

Министерство образования и науки РФ
Волгодонский инженерно-технический институт
Филиал Национального Исследовательского ядерного университета "МИФИ"
г. Волгодонск Ростовской области
ФГБОУ ВПО «Донской государственный университет»
филиала ДГТУ в г. Волгодонске

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И МНОГОМЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Новочеркасск
2016

ББК 22.14
УДК 512.7
М 73

Рецензенты:

Логинов В.Г., докт. техн. наук, профессор ЮРГПУ (НПИ);
Иванов С.А., канд. тех. наук, доцент ДГТУ.

М 73 Многомерная математическая физика и многомерные приложения: Монография/А.В.Коротков, П.Д.Кравченко, В.Е.Мешков, Е.В.Мешкова, В.С.Чураков, Т.А.Брыкина. – (Серия «Многомерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.3). – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2016. – 193 с.
ISBN 978-5-8431-0347-7

Коллективная монография посвящена проблемам применения теоретических построений на основе многомерной парадигмы А.В. Короткова и раскрывает её значимость для естественных наук и техники. Она может найти применение в тех научно-технических сферах, где ранее использовалось трёхмерное векторное исчисление: в физике это газо-, гидро-, термо-, электродинамика, теоретическая механика, квантовая механика, физика твёрдого тела, физика элементарных частиц и др.; в химии – в теории строения атома, кристаллохимии, теории строения химических соединений и др.; в геологии, кристаллографии, теории строения кристаллических структур и т.д. В математике многомерная парадигма может быть использована в тензорном исчислении, теории групп, теории ортогональных и унитарных симметрий. А также в технике при математическом описании сложных технических объектов и процессов, системах многомерной графики, построении векторных процессоров, системах управления сложными техническими объектами и процессами.

Монография предназначена научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам, студентам технических и естественнонаучных специальностей, а также всем, интересующимся современными научными идеями, исследованиями и разработками в данной области.

ББК 22.14
УДК 512.7

ISBN 978-5-8431-0347-7

© Коллектив авторов, 2016
© Чураков В.С., составление,
предисловие, заключение и
научная редакция, 2016
© Издательство «НОК», 2016

*Те, кто, изучая науки, обращаются
не к природе, а к авторам, не могут
считаться сынами природы, я бы
сказал, что они только её внуки.*

*Лишь она одна – подлинная
руководительница настоящих гениев,
между тем, как это ни глупо,
смеются над человеком, предпочитающим
учиться у самой природы, а не у авторов.*

Леонардо да Винчи

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий выпуск очередной, третьей по счету коллективной монографии серии «Многомерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии», продолжает начатую ранее тему реализации многомерной парадигмы А.В.Короткова.

Поскольку Анатолий Васильевич Коротков является основным разработчиком данного направления, то большинство публикуемых работ принадлежит ему. Кратко скажу обо всех публикуемых в коллективной монографии работах.

Коротков А.В. Пятнадцатимерная векторная алгебра. Данная статья открывает цикл работ автора по пятнадцатимерной алгебре.

Коротков А.В. Векторное произведение трех векторов в пятнадцатимерной алгебре. В работе рассматриваются различные произведения трех векторов в пятнадцатимерной векторной алгебре на основе построенных ранее трех мерных и семимерных векторных алгебр – простейшее, смешанное и двойное векторное произведение. Последнее дает известное из семимерной алгебры соотношение Якоби с ненулевой правой частью. Найдены координатная и векторная форма записи векторного произведения трех векторов как сумма ста пяти определителей четвертого порядка. Ставится проблема о размерности физического пространства.

Коротков А.В. Элементы 31-мерного векторного исчисления. Изучаются вопросы построения тридцатиодномерной векторной алгебры. Найдено векторное произведение двух векторов на основе рассмотрения расширения системы комплексных чисел, а также трех-, семи-, пятнадцатимерных алгебр. Найдены операторы моментов импульса, а также сумма операторов моментов импульса. Установлено, что нечетные степени суммы операторов момента импульса совпадают с точностью до коэффициентов пропорциональности с оператором момента импульса, а четные степени – определяются симметрической матрицей. Это соответствует матричному векторному аналогу комплексных чисел.

Коротков А.В. Связь чисел Пифагора и Диофанта. В работе рассматриваются вопросы построения связи между последовательностями чисел Пифагора и Диофанта, а также показана возможность построения совершенно новых математических объектов таких, как кольца простых чисел, и последовательности этих колец в рамках евклидовых и псевдоевклидовых представлений. Приведены примеры числовых колец из 25-ти чисел с восьмерками Пифагора и 16-тью числами Диофанта, и характерным числом. Эти кольца замкнуты, создают последовательности и могут иметь отношение к природным явлениям, в частности, к построению календаря.

Коротков А.В. Особенности статистик Бозе-Эйнштейна в многомерном пространстве. В статье рассматриваются вопросы построения основ статистики Бозе-Эйнштейна для многомерного пространства. Число

фазовых ячеек в многомерном случае равно 2-D. Рассмотрение проведено в многомерных сферических координатах. Записаны выражения D-мерного элемента объема, элемента поверхности, полной поверхности и на их основе - кинетической энергии, импульса, числа ячеек, числа частиц фотонного газа, плотности энергии и полной энергии. Показано, что постоянная Стефана-Больцмана зависит от размерности пространства, а энергия излучения определяется Гамма- и дзета-функциями. Это позволяет установить формулу Планка для размерности D вплоть до самых больших значений энергии и достижения самых малых размеров частиц.

Коротков А.В. Решения многомерного уравнения Гельмгольца. Рассматриваются вопросы построения способов решения многомерных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных на примере решения многомерного уравнения Гельмгольца. Аналогичные решения могут быть получены для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения диффузии, уравнения Лапласа. Особое внимание следует уделить решению уравнений размерности 2^n-1 , что соответствует применению многомерных векторных алгебр.

Коротков А.В. Формула Планка в D-мерных пространствах. Рассмотрены вопросы описания силовых взаимодействий в области чрезвычайно малых расстояний, а также уточнения описания силовых взаимодействий в области привычных расстояний на базе использования многомерных векторных алгебр размерности 2^n-1 , степенных и экспоненциальных функций в формуле Планка при изменении показателя степени. Приведены графики зависимости кривой (Планка) с изменением показателя степени, длины волны, либо частоты излучения. Показана необходимость использования гамма-функции, многочленов Бернулли и дзета- функции для описания силовых взаимодействий в области малых расстояний.

Коротков А.В. Последовательности Фибоначчи-Пифагора. Статья из цикла, посвященного изучению пифагоровых чисел. В статье ставится задача получения значений пифагоровых чисел для большого числа измерений и показывается, что для пространства она вполне разрешима. Также разрешима задача получения последовательностей пифагоровых чисел для большого числа измерений пространства. Возможность представления пифагоровых чисел и их последовательностей в виде координат физического пространства-времени позволяет рассмотреть вопрос решения уравнения для квадрата интервала такого пространства в целых числах. При этом уравнению «светового конуса» соответствует значение $x_0=0$, что отвечает теореме Пифагора для многомерного пространства.

Коротков А.В., Чураков В.С. Диофантово уравнение и его связь с пифагоровыми числами (евклидовыми пространствами) и пространством-временем. Анализируется связь диофантова уравнения с пифагоровыми тройками (евклидовыми пространствами). Показывается, во-первых, какими числами определяется евклидовость физического пространства, во-вторых – что пространство-время описывается диофантовым уравнением, а три

основных понятия СТО, связанные с пространством-временем, имеют завязку на теорему Пифагора.

Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С. Применение многомерных векторных алгебр для изучения микромира. В работе показано, что поскольку отсутствует возможность применения 3-D векторных алгебр в области весьма малых расстояний, то принципиально важно построение многомерных векторных алгебр, остающихся в рамках линейных векторных пространств. Развитие многомерных векторных алгебр позволяет применять их для изучения микромира. Широкие возможности для этого открывает формула, аналогичная формуле Планка, способная описать поля при изменении n от единицы до бесконечности. Кроме того, многомерная алгебра и многомерная физика открывают путь к многомерным технологиям (технологиям 2^n-1), а также – многопараметровых и многопараметрических систем передачи информации.

Мешков В.Е., Мешкова Е.В., Чураков В.С., Брыкина Т.А. Построение многомерных моделей абстрактных объектов с учетом семимерной парадигмы А.В.Короткова. В данной статье показан процесс построения многомерных моделей абстрактных объектов с учетом семимерной парадигмы А.В.Короткова. На её основе в ходе исследований был получен вариант использования семимерной парадигмы для построения библиотеки сумматоров, наилучшие результаты быстрогодействия при этом были получены для манчестерского сумматора.

Мешков В.Е., Чураков В.С., Брыкина Т.А. Золотая пропорция: алгоритмы и коды на её основе в природных вычислениях. Показано, что золотая пропорция, широко распространенная на всех природных уровнях, представленная в культуре, науке и технике, может быть использована и в природных вычислениях.

Природные вычисления... О них стоит сказать особо... В последние годы в рамках концепции многоагентного моделирования интенсивно разрабатывается научное направление Natural Computing – «Природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложены принципы, аналогичные природным механизмам принятия решений. Эти механизмы обеспечивают эффективную адаптацию флоры и фауны к окружающей среде на протяжении миллионов лет.

Впервые автор этих строк узнал нечто из этой области ещё в далекие теперь уже 70-годы прошлого Ха-Ха века... В школу, где я учился, пришёл ветеран Великой Отечественной Войны и поведал поразительную историю... Он летом 1942 года был в Сталинграде, подвергавшемся бесконечным бомбардировкам. И вот кто-то заметил, что стая крыс перебегает в дома, на которые не падают нацистские бомбы во время авианалётов! И его боевая группа внимательно следила за перемещениями крысиной стаи и следовала за крысами... И так удалось уцелеть в разбомблённом городе. По современным понятиям можно сказать о крысиной стае:

- а) это многоагентная система;
- б) разновидность природных вычислений;

в) коллективный разум крыс способен успешно моделировать ближайшее будущее с очень высокой степенью достоверности (создавать модели, полностью адекватные реальности!).

И много позже я прочитал роман польского писателя-фантаста Станислава Лема «Непобедимый». «Непобедимый» – это название космического корабля, а по ходу развития сюжета романа непобедимым представляется рой микрочастиц, по современным понятиям представляющего собою многоагентную систему, а также форму искусственной жизни – т.е. опять таки вариант природных вычислений...

С.Н.Голубеву возможно удалось раскрыть природу золотого сечения, на это необходимо обратить особое внимание, для чего ниже приводится обширная цитата из его работы: «Пропорция золотого сечения интригует исследователей, по крайней мере, со времен Пифагора. Кеплер называл эту пропорцию жемчужиной евклидовой геометрии. Своеобразная и высшая форма природной красоты проявляется в том, что даже эту аллгорию можно перевести в сферу точной кристаллографии. Жемчуг состоит из минерала арагонита. А три безразмерных пропорции орторомбической элементарной ячейки арагонита с высокой точностью оказываются степенным рядом пропорции золотого сечения (табл. 5).

Красивой и многовековой загадкой является постоянная встречаемость пропорции золотого сечения в самых разных областях. Информационные свойства и особенности симметрии квазикристаллов решают эту интригующую загадку, но для этого на знаменитую пропорцию надо посмотреть с новой точки зрения. **Пропорция золотого сечения — это не мистика и не какая-то «сверхфизика», а отражение совершенно реальных закономерностей кодирования признаков любых объектов, которые в принципе поддаются распознаванию.**

Попробуем представить понятие образа в самом общем виде, понимая, что образ может быть зрительным, слуховым, осязательным, чисто умозрительным и др. Для формирования образа объект необходимо описать с помощью такого числа (n) признаков, которых достаточно для его характеристики. А далее требуется сформировать n-мерное абстрактное пространство признаков, в котором объект любой сложности будет представлять собой лишь точку. **Вся информация о его свойствах будет закодирована в координатах этой точки в многомерном пространстве признаков.** Многомерность пространства признаков не имеет отношения к гипотезам о многомерности реального пространства. Речь идет об абстрактном пространстве, по разным координатным осям которого могут откладываться значения таких параметров как цвет, эластичность, температура плавления, химический состав и масса других. Естественно, что конкретные наборы признаков при описании музыкального аккорда и проезжающего трамвая будут совсем разными.

Для иллюстрации такого нового подхода в качестве важного и удобного примера представим пространство квантовых чисел. Для четырех квантовых чисел требуется четырехмерное абстрактное пространство, поэтому для сохранения наглядности условно ограничимся тремя числами, т. е. представим дискретное абстрактное периодическое пространство трех квантовых чисел. Пространство квантовых чисел надо представлять периодическим. Это значит, что при движении вдоль любой оси значение координаты меняется по закону числового ряда такого типа: 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 0, Уг9 1, 3/2, 2,... В целом это напоминает изменение показаний дискретного счетчика километража — показания периодически обнуляются, после чего отсчет начинается заново. В математике такие ситуации описываются с использованием групп Галуа.

А теперь попробуем в таком абстрактном периодическом пространстве трех квантовых чисел сформировать кубический кристалл из достаточно большого числа

точек. Мы получим большое число точек, у которых значения всех трех квантовых чисел идентичны. Эти точки в пространстве квантовых чисел также неотличимы друг от друга, как в обычном пространстве принципиально неотличимы друг от друга ионы натрия в идеальном кристалле поваренной соли. Такое расположение точек в пространстве квантовых чисел не совместимо с соблюдением принципа Паули. Поэтому реальные частицы, которые отображаются такими точками, могут быть только бозонами. А соблюдающие принцип Паули электроны в принципе не могут таким способом заполнять пространство квантовых чисел. Они не могут формировать в пространстве квантовых чисел какие-либо периодические структуры, поскольку это неизбежно приведет к появлению принципиально не различимых точек, т. е. к нарушению принципа Паули. И оптимальной альтернативой является заполнение пространства квантовых чисел по законам узоров Пенроуза.

Посмотрим, как соотносится фактическое соблюдение в природе принципа Паули с использованным модельным представлением. При формировании узора Пенроуза 20 ромбоэдров, по 10 штук каждого сорта, образуют компактный агрегат, который иногда называют квазисферой. При дальнейшем росте квазикристалла и добавлении новых ромбоэдров неизбежно именно с 21-го ромбоэдра должно начинаться заполнение нового структурного слоя. Эта ситуация легко моделируется при помощи пластмассовых кубиков соответствующей формы. Но что-то аналогичное должно происходить и при заполнении абстрактного пространства квантовых чисел. В действительности это соответствует тому, что именно с 21 -го элемента таблицы Менделеева начинается заполнение побочных подгрупп, т. е. начинает реально сказываться наличие четвертого квантового числа. Классическая 8-элементная периодичность таблицы Менделеева соответствует комбинаторике заполнения пространства четырех квантовых чисел четырехмерными ромбоэдрами, каждый из которых имеет по 80 элементов: 8 трехмерных граней, 24 стороны, 16 вершин, 32 ребра. **Фактически симметрия квазикристалла оказывается своеобразным геометрическим эквивалентом принципа Паули.**

Узор Пенроуза формально можно представить как трехмерную проекцию шестимерного кубического кристалла. Блестящий способ наглядно и понятно проиллюстрировать этот эффект многомерной геометрии найден в работе [58]. Все точки такого абстрактного многомерного кубического кристалла принципиально не отличимы друг от друга. Для перехода к трехмерному пространству необходимо получить трехмерную проекцию этого шестимерного кристалла. Но конкретный результат зависит от способа проектирования. И если речь идет не об обычном пространстве, а о пространстве квантовых чисел, то меняя способ проектирования, можно получать либо бозоны, либо фермионы. При ортогональном проектировании из шестимерного кубического кристалла будет получаться классический трехмерный кубический кристалл, в котором сохранится принципиальная неразличимость всех его точек, т. е. в пространстве квантовых чисел точки окажутся бозонами. А если проектировать «под другим углом», то в пространстве квантовых чисел будет возникать квазикристаллическая структура, точки которой окажутся фермионами. Квазикристаллическая структура вакуума создает суперсимметрию между фермионами и бозонами. При этом шестимерность пространства квантовых чисел означает только то, что для описания соответствующих частиц необходимо шесть квантовых чисел. А физически эта частица может находиться и в обычном трехмерном пространстве окружающей действительности.

Геометрическое представление принципа Паули носит чисто формальный характер и не связано с какими-либо конкретными физическими законами. Но это представление отражает закономерности, которые именно благодаря своей формальности почти так же универсальны, как и традиционные законы теории информации. Сферу их действия естественно назвать **информационной комбинаторикой**. Эти закономерности касаются не только принципа Паули, они отражают **универсальные принципы кодирования признаков любых объектов, поддающихся распознаванию**. Действительно, если

существуют объекты, которые в принципе можно отличить друг от друга, и при этом реализованы все комбинаторно возможные сочетания признаков (типа отсутствия пустых клеток в таблице Менделеева), то в абстрактном периодическом пространстве признаков, размерность которого совпадает с числом признаков, будет возникать геометрическая структура по типу квазикристалла. Периодическая структура такого пространства должна совпадать с рассмотренным выше вариантом пространства квантовых чисел.

Абсолютно неизбежным следствием такого заполнения пространства признаков является **реализация пропорции золотого сечения, ее просто не может не быть**. Если распознаваемые объекты заполняют абстрактное пространство признаков по указанным выше закономерностям, то традиционная форма золотой пропорции в виде числа 1,618... обязательно будет связывать параметры, которые в этом абстрактном признаковом пространстве отвечают объемным диагоналям элементарных ромбоэдров. В общем случае может потребоваться только корректировка единиц измерения, применяемых при описании качественно разных признаков объекта. Но при этом безразмерные пропорции между межплоскостными расстояниями такого квазикристалла в абстрактном пространстве признаков будут в явном виде воспроизводить и степенной ряд золотой пропорции, о чем говорилось в предыдущих разделах. Одновременно будет реализован и довольно широкий спектр сопряженных пропорций.

С постоянной встречаемостью пропорции золотого сечения исследователи в самых разных областях постоянно сталкивались на протяжении многих столетий. Особенности квазикристаллов решают эту интригующую загадку. Еще раз повторим, что **пропорция золотого сечения — это не мистика и не какая-то «сверхфизика», а отражение формальных, но совершенно реальных закономерностей информационной комбинаторики, т. е. закономерностей кодирования признаков любых объектов, которые в принципе поддаются распознаванию**.

Реализация золотого сечения, например, в музыке означает, что закономерности информационной комбинаторики используются при работе физиологических алгоритмов распознавания слуховых образов. А реализация золотого сечения в архитектуре означает, что закономерности информационной комбинаторики использует и физиологический алгоритм распознавания зрительных образов. Использование таких способов распознавания образов целесообразно и для компьютерных алгоритмов.

Механизм физиологического формирования образа на самом деле представляет собой формирование в подсознании человека специфической системы координат или абстрактного многомерного пространства признаков. А сам объект любой степени сложности в таком условном пространстве отображается одной единственной точкой. Видимо, такой парадоксальный способ формирования образов универсален для всех вариантов образного мышления человека, т. е. для зрительных, слуховых, осязательных и др. видов образов.

Для однозначного отображения такой «точки образа» в абстрактном многомерном пространстве признаков с помощью реальных трехмерных физических структур носитель Разума должен быть построен по принципу квазикристаллов.

Мозг, который является химической имитацией структуры вакуума, наследует от вакуума структуру квазикристаллического типа. В результате соответствующие соотношения информационной комбинаторики реализуются уже не в абстрактном пространстве признаков, а в обычном пространстве на уровне строения вещества мозга. Такие алгоритмы распознавания образов заложены в «программное обеспечение» мозга уже самой геометрической структурой вакуума. При цифровом представлении работы такого механизма распознавания образов наиболее естественным является использование фибоначчиевой системы счисления, а не двоичной или десятичной.

Квазикристаллы или узоры Пенроуза прошли полувековой путь от математической головоломки до ключевой структуры нашего мира. Применительно к мозгу определяющая роль квазикристаллов базируется на такой трактовке узоров Пенроуза, которой у самого

Пенроуза не было. Как и большинство математиков, Пенроуз просто не знал, что строение углеродного каркаса любого комплекса биополимеров можно представить как совокупность соответствующих фрагментов кристаллических структур алмаза и графита. Именно это приводит к непосредственной реализации усложненного варианта узоров Пенроуза или квазикристаллов в строении вещества любого биологического объекта». (См. Голубев С.Н. Квазикристаллическая структура вакуума: Ключ к разгадке тайны живых клеток и квантовых частиц.—М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 262с. — (с.202-206)).

Далее С.Н.Голубев развивает мысль о связи квазикристаллов с золотым сечением и с фибоначчьевым компьютером: «Представим квазикристалл, состоящий из 60×10^n точек и имеющий порядок симметрии, равный 60. Это значит, что имеется 10^n «комплексов», по 60 точек в каждом. Внутри каждого комплекса структурные позиции всех 60 точек принципиально не различимы. Именно из-за такой симметрии вакуума протон оказывается тяжелее электрона в 1836 раз. Но одновременно в таком квазикристалле имеется еще и 10^n структурно различимых позиций, а это огромная информационная емкость. Свойства симметрии, в том числе и численное значение порядка симметрии, не зависят ни от абсолютного числа частиц, ни от абсолютных размеров. В квазикристаллическом вакууме, заполняющем всю Вселенную и состоящем из огромного количества виртуальных частиц, порядок симметрии должен остаться равным 60. И если такой квазикристалл состоит, например, из 60×10^n точек, то в нем имеется 10^n структурно различимых позиций. Вакуум, который заполняет объем Вселенной, характеризуется очень большими значениями n . Но даже при таких значениях n , которые соответствуют квазикристаллу размером в 1 см, это огромная информационная емкость. Для сравнения — в идеальном кристалле кремния вообще все имеющиеся атомы занимают структурно неразличимые позиции. Если микропроцессор реализован на классическом кристалле, то кибернетические функции выполняются только его разнообразными дефектами, как статическими (легирующие примеси и др.), так и динамическими. Сам же кристалл является лишь средой, в которой работают его собственные дефекты. В квазикристалле такой пассивной среды просто нет, он весь состоит из точек (точечных объектов), в принципе способных выполнять кибернетические функции.

Итак, **квазикристалл — это не только идеальные ячейки памяти, это еще и идеальная структура для кодировки образов.** Единственная форма разума, которая нам известна, существует благодаря использованию уникальных свойств квазикристаллической структуры. Человек и его мозг, как вещественный носитель такого разума, созданы природой по образу и геометрическому подобию квазикристаллического вакуума. При наличии собственной геометрической структуры вакуум, оставаясь виртуальным образованием, вполне может иметь собственный разум, точнее в этом случае вакуум должен этим Разумом и являться.

Если это так, то человек унаследовал от вакуума не только геометрическую структуру, но и само наличие разума, возможно, лишь в ограниченных и скромных пределах. Вопрос о существовании надчеловеческого Разума человечество обсуждает несколько тысячелетий. К этому обсуждению нам нечего добавить. Мы только показали, что наличие у вакуума Разума является вполне вероятным следствием существования геометрической структуры по типу квазикристалла или узора Пенроуза. Можно сказать и так: **физический мир, в котором протон тяжелее электрона именно в 1836 раз, должен быть построен на основе квазикристаллического вакуума, а такой вакуум вполне может обладать и собственным виртуальным Разумом.**

Биологические процессы в квазикристаллических структурах в цифровом представлении должны основываться на фибоначчьевой системе счисления. Ее парадоксальные свойства не оставляют сомнений в том, что наш собственный мозг использует именно эту систему счисления. Возможность создания компьютеров,

использующих не двоичную, а фибоначчиевую систему счисления серьезно изучалась [Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 151с.]. В программно-кибернетическом отношении фибоначчиевые компьютеры весьма перспективны, но на существующей элементной базе их можно только имитировать. Усилительные элементы, т. е. транзисторы в составе микропроцессоров в фибоначчиевом компьютере функционально аналогичны воздушному насосу музыкального органа. А собственно цифровые преобразования в таком компьютере осуществляются прецизионными неравноплечными резисторными мостами, в которых безразмерные пропорции между значениями электрических сопротивлений формируют степенной ряд золотой пропорции. Для современной промышленности такие конструкции не технологичны. Но мозг, опосредовано наследующий от эфира квазикристаллическую структуру, и является той вещественной конструкцией, которая необходима для фибоначчиева компьютера. Напомним, что в трехмерном узоре Пенроуза вообще все безразмерные пропорции между величинами межплоскостных расстояний являются членами степенного ряда золотого сечения. Сходство свойств мозга и фибоначчиева компьютера проиллюстрируем примером, далеко не самым доказательным даже из уже имеющихся, но очень наглядным. При старении фибоначчиева компьютера совершенно естественным путем возникает стадия, на которой он еще продолжает работать правильно, но быстродействие автоматически снижается. Парадоксальное появление у фибоначчиева компьютера такого «геронтологического» свойства в книге [Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 151с] объясняется на чисто кибернетическом уровне, никаких сопоставлений со структурой мозга в этой книге нет.

Фибоначчиевому компьютеру необходимо специфическое программное обеспечение, при наличии которого он может решать все те же задачи, что и обычный компьютер. Но фибоначчиевый компьютер, как и наш мозг, оказывается вне конкуренции при решении задач распознавания образов. Объяснению этой важной особенности посвящены заключительные разделы нашей книги.

При работе резисторных мостов фибоначчиева компьютера важны не абсолютные значения сопротивлений, а совокупность безразмерных пропорций между ними. Если расширяющуюся Вселенную сопоставлять с гигантским компьютером, то это может быть только фибоначчиевый компьютер, никакой другой в условиях трехмерного расширения его «деталей» работать не сможет. А для фибоначчиева компьютера важны не размеры, а безразмерные пропорции.

Для понимания основных свойств фибоначчиевой системы счисления надо четко различать двоичный код и двоичную систему счисления. Двоичный код — это кодирование любой информации с использованием только двух символов, обычно обозначаемых 0 и 1, хотя, например, в азбуке Морзе приняты другие обозначения — точка и тире. В двоичном коде последовательность 101 в зависимости от принятой системы кодировки может обозначать все что угодно, никакого общего алгоритма расшифровки смысла в принципе не существует. В частности, последовательность 101 может быть фрагментом чисто словесного текста, передаваемого при помощи азбуки Морзе; при этом смысл может передаваться как открытым текстом, причем на любом языке, так и шифром, причем любым. А двоичная система счисления — понятие более узкое и чисто математическое, для нее последовательность 101 является эквивалентом числа 5 в десятичной системе счисления и не может быть ничем иным, в противном случае это не двоичная система счисления.

В фибоначчиевой системе счисления при записи любого числа используется двоичный код. Но в отличие от двоичной системы счисления последовательность нулей и единиц соответствует разным степеням не числа «2», а разным степеням пропорции золотого сечения, т. е. числа 1,618... На первый взгляд это кажется абсурдным усложнением. Но **только такая система счисления пригодна для реальных**

конструкций, которые спонтанно возникли в природе, а не создавались на заводах с помощью чертежей и высоких технологий.

Причина в так называемых рекуррентных свойствах степенного ряда золотой пропорции. По смыслу этот термин означает, что любой член степенного ряда золотой пропорции равен сумме двух предыдущих членов того же ряда. При обозначении пропорции золотого сечения (число 1,618...) через Φ степенной ряд принимает вид:

$$\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \dots = (1,618\dots)^0, (1,618\dots)^1, (1,618\dots)^2, \dots = \\ = (1), (1,618\dots), (2,618\dots), \dots$$

При этом: $(2,618\dots) = (1,618\dots) + 1$.

В общем виде и с использованием иррациональных чисел существует точное равенство:

$$\Phi^n = \Phi^{(n-1)} + \Phi^{(n-2)}$$

Это означает, что в фибоначчиевой системе счисления при записи любого произвольного числа две единицы, идущие подряд, всегда можно заменить одной единицей старшего разряда.

В фибоначчиевой системе счисления имеем:

$$10110 = 11000 = 100000$$

$$11111 = 100111 = 101001$$

Аналогичным образом можно преобразовать любое произвольное число, после чего не останется двух единиц, идущих подряд. При этом мы фактически минимизируем количество единиц, т. е. реальных кодирующих импульсов, а количество нулей никак не регламентируется. Другими словами, мы экономим реальные импульсы и реальную энергию, а не бумагу для эквивалентной записи. Но главное не в этой экономии.

Отсутствие двух единиц подряд навсегда избавляет от необходимости отличать один импульс от двух импульсов, следующих подряд друг за другом. В материальном воплощении два импульса подряд при отсутствии «нуля» между ними эквивалентны появлению одного импульса удвоенной длительности. Отсутствие таких удлиненных импульсов при использовании фибоначчиевой системы счисления означает, что кодирующая система может импульсы только считать (в штуках), а измерять длительность импульсов абсолютно не нужно. Для возможности спонтанного появления кодирующих структур в ходе биологической эволюции такое упрощение задачи имеет решающее значение. Напомним, что в квазикристалле степенной ряд золотой пропорции действительно существует в структуре вещества, — это совокупность безразмерных пропорций в системе межплоскостных расстояний.

При сравнении с существующими техническими системами структуры мозга поражают своей миниатюрностью. Секрет этой миниатюрности парадоксален и состоит в том, что одновременно мозг является и увеличенной в абсолютных размерах химической имитацией фундаментальных структур вакуума. При сравнении с ними мозг поражает гигантскими размерами такой химической имитации. А для детального понимания механизмов работы мозга нужно о вакуумных структурах знать много больше того, что мы знаем сегодня. Форму человеческого мозга видит только патологоанатом. А на создание этой формы природа затрачивает колоссальные ресурсы. Зачем? На самом деле это одно из обязательных условий существования необходимой динамики взаимодействия между мозгом и физическим вакуумом.

Для объяснения работы мозга не хватает знания о тех внутриатомных силах, которые действуют в квазистационарном режиме. Современные представления о ядерных силах по чисто методическим причинам ограничены экстремальными процессами — распадами атомных ядер, их «взрывами» и т. п. На самом деле ядерные силы в стационарном режиме поддерживают структуру стабильного вещества. Но законы действия ядерных сил в этом качестве сегодня абсолютно не известны. Настанет время, когда станет очевидным, что нельзя понять работу мозга без знаний о свойствах заряженных и нейтральных векторных бозонов. Проблема не в том, что сегодня

большинство специалистов по мозгу об этих частицах ничего не знает. Проблема в том, что сегодня вся физика знает об этих частицах слишком мало, чтобы от их участия в простейших процессах внутри ускорителей перейти к их роли в сложных процессах внутри мозга. Почти точное совпадение значения атомной массы углерода с разностью масс нейтральных и заряженных векторных бозонов не может быть случайным (раздел 10.2). Это первичная основа резонансных эффектов физического вакуума, на которых и строятся подлинные механизмы работы мозга. Естественно, что таким процессам в сложной системе мозга сопутствует разнообразный комплекс химических и электрических явлений.

Безэнтропийные процессы мышления при реальных биологических температурах в принципе не могут быть реализованы как система химических реакций [Кобозев Н.К. Исследования в области термодинамики процессов информации и мышления. М.: Изд. МГУ, 1971. 196с.]. Говоря упрощенно, на химическом носителе нельзя «одинаково думать» в интервале температур от 35° до 41° С. Необходимы процессы, для которых энергетический эквивалент такого изменения температуры является пренебрежимо малой величиной. Мышление явно базируется на вакуумных голографических эффектах не электромагнитной природы. Пенроуз предполагал, что в основе работы человеческого разума лежат процессы, которые он называл «квантовой гравитацией» [Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. 4-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2011. 400с.]. Судя по всему, точнее говорить о гравитационной интерференции. При этом надо четко понимать, что постоянные поля в принципе не могут интерферировать. Речь идет о переменных гравитационных полях, которые на самом деле совсем не являются слабыми. У нас просто нет генераторов и детекторов таких полей. Но если в качестве того и другого использовать вращение Земли, то проявившиеся за геологическое время следы действия циклопических сил планетарного масштаба видны на обычном глобусе. В следующей главе мы их увидим. И одновременно поймем, что внутри мозга действуют силы, которые вовсе не являются слабыми, но для нас они пока остаются во многом загадочными.

Со слабыми силами статического давления воздуха человек тоже сталкивается в быту. Не было современной терминологии, но по смыслу люди и тогда понимали, что для откачивания воздуха из полушарий необходимо к насосу приложить определенные усилия. Никого бы не удивило, если бы сила прижима полусфер оказалась сравнима с силой обычного ветрового давления на такую же площадь. Но появление силы притяжения, превышавшей силу тяги восьми лошадей, было неожиданным. Другими словами, сюрпризом оказался масштаб различий между силами статического и динамического давления». (Голубев С.Н. Квазикристаллическая структура вакуума: Ключ к разгадке тайны живых клеток и квантовых частиц.—М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 262с. – (с.206-210)).

Брыкина Т.А. Анализ влияния на темпоральность вычислительного процесса булевых, небулевых и многомерных булевых алгебр логики. Исследуются основные логические операции, свойства и законы, присущие булевым алгебрам логики, небулевым алгебрам логики и многомерным булевым алгебрам логики. В ходе анализа предпринята попытка определить, как выбранная алгебра влияет на темпоральность вычислительного процесса компьютера.

В заключение, ко всему вышесказанному, повторю, что авторы определяют данную многомерную парадигму А.В.Короткова как *открытую систему, т.е. любой и каждый может внести свой вклад в её развитие.*

КОРОТКОВ А.В.

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть XX – го столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [1, 2].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцатимерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел), алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел – комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов связан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа

$$ab = (a_0b_0 - b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1),$$

т.е. $ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1).$

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = \begin{vmatrix} a_0b_0 & \\ & -b_1a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0b_1 & \\ & +b_0a_1 \end{vmatrix}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ назовем пару

$$ab = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

т.е. $ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных кватернионов может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab} = \begin{array}{cc|cc} a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1. \end{array}$$

При удвоении кватернионов можно получить восьмимерные октонионы. При этом произведением пар $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ называется пара

$$\mathbf{ab} = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

т.е.

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных октонионов может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab} = \begin{array}{cccc|cccc} a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3 & -b_4a_4 & -a_5b_5 & -a_6b_6 & -b_7a_7, \\ a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3 & +b_4a_5 & -a_4b_5 & +a_6b_7 & -b_6a_7, \\ a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1 & +b_4a_6 & +a_7b_5 & -a_4b_6 & -b_7a_5, \\ a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1 & +b_4a_7 & -a_6b_5 & -a_4b_7 & +b_6a_5, \\ a_0b_4 & +b_5a_1 & +b_6a_2 & +a_3b_7 & +b_0a_4 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -b_3a_7, \\ a_0b_5 & -b_4a_1 & -b_6a_3 & +a_2b_7 & +b_0a_5 & +a_4b_1 & +a_6b_3 & -b_2a_7, \\ a_0b_6 & -b_7a_1 & -b_4a_2 & +a_3b_5 & +b_0a_6 & +a_7b_1 & +a_4b_2 & -b_3a_5, \\ a_0b_7 & +b_6a_1 & -b_4a_3 & -a_2b_5 & +b_0a_7 & -a_6b_1 & +a_4b_3 & +b_2a_5. \end{array}$$

Указанная процедура удвоения – одна из процедур, позволяющих получать комплексные числа, кватернионы и октонионы. Эта процедура не позволяет получить другие многомерные числовые системы с делением, что было определено еще в XIX веке. Более того, отсутствует не только деление, но также и наличие обратных векторов, а вместе с тем кватернионы теряют свойство коммутативности произведения, а октонионы – также свойство ассоциативности. Это резко ограничивает возможности использования этих систем на практике.

Вместе с тем, получаемые из комплексных чисел, кватернионов и октонионов одно-, трех- и семимерные векторные алгебры, как отмечалось, не требуют наличия свойств деления и обратных векторов, так что, применение той же процедуры удвоения приводит к возможности получения шестнадцатимерной алгебры, из которой выделяется пятнадцатимерная векторная алгебра. Применим процедуру удвоения к октонионам. При удвоении октонионов можно получить шестнадцатимерные числа. При этом произведением двух пар октонионов $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ назовем пару

$$\mathbf{ab} = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

т.е.

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения 16-ти мерных ab

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_{11}$	$+a_1b_3$	-	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{10}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_{11}$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{11}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{12}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{13}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_{11}$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{14}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	-	$+a_3b_{11}$	$-a_8b_{15}$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	-	$+a_{15}b_6$	$-a_{12}b_4$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_6b_{15}$	-	$-a_{11}b_1$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_1b_{11}$	-	$-a_{12}b_7$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_7b_{12}$	-	$-a_{14}b_2$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_2b_{14}$	-	$-a_4b_9$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_4b_8$	-	$-a_{13}b_3$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_3b_{13}$	-	$-a_{10}b_5$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$
					a_5b_{10}										

$(ab)=$

$[ab]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_{11}$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_{11}$	$+a_{11}b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_{11}$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_3b_{10}	$+a_{10}b_3$	a_5b_{12}	$+a_{12}b_5$	a_6b_{15}	$+a_{15}b_6$	$-a_{11}b_1$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_6b_{12}	$+a_{12}b_6$	a_7b_{13}	$+a_{13}b_7$	a_1b_{11}	$+a_{11}b_1$	$-a_{12}b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_5b_{14}	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	a_7b_{12}	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_1b_{13}	$+a_{13}b_1$	a_3b_{15}	$+a_{15}b_3$	a_2b_{14}	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_2b_{15}	$+a_{15}b_2$	a_6b_{11}	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	a_4b_{10}	$+a_{10}b_4$	a_3b_{13}	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_4b_{11}	$+a_{11}b_4$	a_1b_{14}	$+a_{14}b_1$	a_5b_{10}	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

чисел (при такой процедуре удвоения) может быть представлена в виде произведения ab , приведенного на альбомном листе. Там же показаны скалярное (ab) и векторное $[ab]$ произведения двух векторов.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде суммы:

$$[ab] = [(a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_{15}e_{15})(b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_{15}e_{15})],$$

т. е. $[ab] =$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_8 & e_9 \\ a_1 & a_8 & a_9 \\ b_1 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{11} & e_{10} \\ a_1 & a_{11} & a_{10} \\ b_1 & b_{11} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{13} & e_{12} \\ a_1 & a_{13} & a_{12} \\ b_1 & b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_{14} & e_{15} \\ a_1 & a_{14} & a_{15} \\ b_1 & b_{14} & b_{15} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_8 & e_{10} \\ a_2 & a_8 & a_{10} \\ b_2 & b_8 & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_{14} & e_{12} \\ a_2 & a_{14} & a_{12} \\ b_2 & b_{14} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_{15} & e_{13} \\ a_2 & a_{15} & a_{13} \\ b_2 & b_{15} & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_9 & e_{11} \\ a_2 & a_9 & a_{11} \\ b_2 & b_9 & b_{11} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_8 & e_{11} \\ a_3 & a_8 & a_{11} \\ b_3 & b_8 & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{13} & e_{14} \\ a_3 & a_{13} & a_{14} \\ b_3 & b_{13} & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{10} & e_9 \\ a_3 & a_{10} & a_9 \\ b_3 & b_{10} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_{15} & e_{12} \\ a_3 & a_{15} & a_{12} \\ b_3 & b_{15} & b_{12} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_8 & e_{12} \\ a_4 & a_8 & a_{12} \\ b_4 & b_8 & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_9 & e_{13} \\ a_4 & a_9 & a_{13} \\ b_4 & b_9 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_{11} & e_{15} \\ a_4 & a_{11} & a_{15} \\ b_4 & b_{11} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_{10} & e_{14} \\ a_4 & a_{10} & a_{14} \\ b_4 & b_{10} & b_{14} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_8 & e_{13} \\ a_5 & a_8 & a_{13} \\ b_5 & b_8 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{10} & e_{15} \\ a_5 & a_{10} & a_{15} \\ b_5 & b_{10} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{14} & e_{11} \\ a_5 & a_{14} & a_{11} \\ b_5 & b_{14} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_5 & e_{12} & e_9 \\ a_5 & a_{12} & a_9 \\ b_5 & b_{12} & b_9 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_8 & e_{14} \\ a_6 & a_8 & a_{14} \\ b_6 & b_8 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{15} & e_9 \\ a_6 & a_{15} & a_9 \\ b_6 & b_{15} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{12} & e_{10} \\ a_6 & a_{12} & a_{10} \\ b_6 & b_{12} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_{11} & e_{13} \\ a_6 & a_{11} & a_{13} \\ b_6 & b_{11} & b_{13} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_8 & e_{15} \\ a_7 & a_8 & a_{15} \\ b_7 & b_8 & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{12} & e_{11} \\ a_7 & a_{12} & a_{11} \\ b_7 & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_9 & e_{14} \\ a_7 & a_9 & a_{14} \\ b_7 & b_9 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{13} & e_{10} \\ a_7 & a_{13} & a_{10} \\ b_7 & b_{13} & b_{10} \end{vmatrix}$$

тридцати пяти определителей третьего порядка, заданных таблицей в немых индексах:

орт	коммутатор $[a_i b_j] = a_i b_j - a_j b_i$						
e_1	[2.3]	[4.5]	[7.6]	[8.9]	[11.10]	[13.12]	[14.15]
e_2	[4.6]	[5.7]	[3.1]	[8.10]	[14.12]	[15.13]	[9.11]
e_3	[6.5]	[1.2]	[4.7]	[8.11]	[13.14]	[10.9]	[15.12]
e_4	[5.1]	[7.3]	[6.2]	[8.12]	[9.13]	[11.15]	[10.14]
e_5	[7.2]	[3.6]	[1.4]	[8.13]	[10.15]	[14.11]	[12.9]
e_6	[1.7]	[2.4]	[5.3]	[8.14]	[15.9]	[12.10]	[11.13]
e_7	[3.4]	[6.1]	[2.5]	[8.15]	[12.11]	[9.14]	[13.10]
e_8	[9.1]	[10.2]	[11.3]	[12.4]	[13.5]	[14.6]	[15.7]
e_9	[11.2]	[13.4]	[14.7]	[1.8]	[3.10]	[5.12]	[6.15]
e_{10}	[14.4]	[15.5]	[9.3]	[2.8]	[6.12]	[7.13]	[1.11]
e_{11}	[13.6]	[10.1]	[15.4]	[3.8]	[5.14]	[2. 9]	[7.12]
e_{12}	[9.5]	[11.7]	[10.6]	[4.8]	[1.13]	[3.15]	[2.14]
e_{13}	[10.7]	[14.3]	[12.1]	[5.8]	[2.15]	[6.11]	[4. 9]
e_{14}	[15.1]	[12.2]	[11.5]	[6.8]	[7. 9]	[4.10]	[3.13]
e_{15}	[12.3]	[9.6]	[13.2]	[7.8]	[4.11]	[1.14]	[5.10]

Здесь индексом i, j -обозначена величина

$$[a_i b_j] = a_i b_j - a_j b_i,$$

а все элементы суммируются по координатам.

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 35-ти определителей третьего порядка:

$$[a, b] = \begin{vmatrix} 1,2,3 \\ 2,4,6 \\ 3,6,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,8,9 \\ 2,8,10 \\ 3,8,11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,11,10 \\ 2,14,12 \\ 3,13,14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,13,12 \\ 2,15,13 \\ 3,10,9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,14,15 \\ 2,9,11 \\ 3,15,12 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 4,5,1 \\ 4,8,12 \\ 4,9,13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4,11,15 \\ 4,10,14 \\ 5,7,2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5,8,13 \\ 5,10,15 \\ 5,14,11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5,12,9 \\ 6,1,7 \\ 6,8,14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6,15,9 \\ 6,12,10 \\ 6,11,13 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 7,3,4 \\ 7,8,15 \\ 7,12,11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7,9,14 \\ 7,13,10 \end{vmatrix}.$$

явно определяющем трех-, семи-, и 15-ти мерные варианты, или же просто:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9,3,10	9,5,12	9,6,15	9,1,8	9,11,2	9,13,4	9,14,7
10,6,12	10,7,13	10,1,11	10,2,8	10,14,4	10,15,5	10,9,3
11,5,14	11,2,9	11,7,12	11,3,8	11,13,6	11,10,1	11,15,4
12,1,13	12,3,15	12,2,14	12,4,8	12,9,5	12,11,7	12,10,6
13,2,15	13,6,11	13,4,9	13,5,8	13,10,7	13,14,3	13,12,1
14,7,9	14,4,10	14,3,13	14,6,8	14,15,1	14,12,2	14,11,5
15,4,11	15,1,14	15,5,10	15,7,8	15,12,3	15,9,6	15,13,2

Операторы момента импульса L (матриц Паули) удовлетворяют соотношениям:

$m([L_2 L_3])$	$+ [L_4 L_5]$	$+ [L_7 L_6]$	$+ n [L_8 L_9]$	$+ [L_{11} L_{10}]$	$+ [L_{13} L_{12}]$	$+ [L_{14} L_{15}]$	$= -i L_1;$
$m([L_4 L_6])$	$+ [L_5 L_7]$	$+ [L_3 L_1]$	$+ n [L_8 L_{10}]$	$+ [L_{14} L_{12}]$	$+ [L_{15} L_{13}]$	$+ [L_9 L_{11}]$	$= -i L_2;$
$m([L_6 L_5])$	$+ [L_1 L_2]$	$+ [L_4 L_7]$	$+ n [L_8 L_{11}]$	$+ [L_{13} L_{14}]$	$+ [L_{10} L_9]$	$+ [L_{15} L_{12}]$	$= -i L_3;$
$m([L_5 L_1])$	$+ [L_7 L_3]$	$+ [L_6 L_2]$	$+ n [L_8 L_{12}]$	$+ [L_9 L_{13}]$	$+ [L_{11} L_{15}]$	$+ [L_{10} L_{14}]$	$= -i L_4;$
$m([L_7 L_2])$	$+ [L_3 L_6]$	$+ [L_1 L_4]$	$+ n [L_8 L_{13}]$	$+ [L_{10} L_{15}]$	$+ [L_{14} L_{11}]$	$+ [L_{12} L_9]$	$= -i L_5;$
$m([L_1 L_7])$	$+ [L_2 L_4]$	$+ [L_5 L_3]$	$+ n [L_8 L_{14}]$	$+ [L_{15} L_9]$	$+ [L_{12} L_{10}]$	$+ [L_{11} L_{13}]$	$= -i L_6;$
$m([L_3 L_4])$	$+ [L_6 L_1]$	$+ [L_2 L_5]$	$+ n [L_8 L_{15}]$	$+ [L_{12} L_{11}]$	$+ [L_9 L_{14}]$	$+ [L_{13} L_{10}]$	$= -i L_7;$
$k([L_9 L_1])$	$+ [L_{10} L_2]$	$+ [L_{11} L_3]$	$+ [L_{12} L_4]$	$+ [L_{13} L_5]$	$+ [L_{14} L_6]$	$+ [L_{15} L_7]$	$= -i L_8;$
$m([L_3 L_{10}])$	$+ [L_5 L_{12}]$	$+ [L_6 L_{15}]$	$+ n [L_1 L_8]$	$+ [L_{11} L_2]$	$+ [L_{13} L_4]$	$+ [L_{14} L_7]$	$= -i L_9;$
$m([L_6 L_{12}])$	$+ [L_7 L_{13}]$	$+ [L_1 L_{11}]$	$+ n [L_2 L_8]$	$+ [L_{14} L_4]$	$+ [L_{15} L_5]$	$+ [L_9 L_3]$	$= -i L_{10};$
$m([L_5 L_{14}])$	$+ [L_2 L_9]$	$+ [L_7 L_{12}]$	$+ n [L_3 L_8]$	$+ [L_{13} L_6]$	$+ [L_{10} L_1]$	$+ [L_{15} L_4]$	$= -i L_{11};$
$m([L_1 L_{13}])$	$+ [L_3 L_{15}]$	$+ [L_2 L_{14}]$	$+ n [L_4 L_8]$	$+ [L_9 L_5]$	$+ [L_{11} L_7]$	$+ [L_{10} L_6]$	$= -i L_{12};$
$m([L_2 L_{15}])$	$+ [L_6 L_{11}]$	$+ [L_4 L_9]$	$+ n [L_5 L_8]$	$+ [L_{10} L_7]$	$+ [L_{14} L_3]$	$+ [L_{12} L_1]$	$= -i L_{13};$
$m([L_7 L_9])$	$+ [L_4 L_{10}]$	$+ [L_3 L_{13}]$	$+ n [L_6 L_8]$	$+ [L_{15} L_1]$	$+ [L_{12} L_2]$	$+ [L_{11} L_5]$	$= -i L_{14};$
$m([L_4 L_{11}])$	$+ [L_1 L_{14}]$	$+ [L_5 L_{10}]$	$+ n [L_7 L_8]$	$+ [L_{12} L_3]$	$+ [L_9 L_6]$	$+ [L_{13} L_2]$	$= -i L_{15};$

где $[L_i L_j] = L_i L_j - L_j L_i$, коммутатор, причем $n=11/3$, $m=3/25$, $k=1/11$.

Трехмерная и семимерная векторные алгебры являются частным случаем пятнадцатимерной. Таблица подстановки индексов в ней имеет вид:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

Матрицы пятнадцатого порядка L_i приведены в [3]. С целью упрощения записи лучше использовать сумму операторов момента импульсов, вида:

$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

или расширенный вариант записи:

$-iL_r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5
11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3
13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0

определяющий координаты моментов импульса.

Специфичны свойства суммы операторов моментов импульса:

-во –первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;

-во- вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;

-матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных - симметричны;

-размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n -

-все нечетные степени матрицы пропорциональны L , а четные- L^2 ;

-целые степени матрицы определяются лишь двумя числами;

-матрица L определяет векторное произведение двух векторов;

-определитель матрицы L (и всех её степеней) равен нулю.

Приведем несколько примеров.

$-L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

$-iL^3/15^I$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

$L^4/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

$-iL^5/15^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

Очевидно, что, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса, образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из $3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots, 2^n-1, \dots$ -мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса совершенно аналогичного вида.

У пятнадцатимерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_{15}^2 = 14I,$$

где I -единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удастся построить антисимметричную векторную алгебру, определяемую векторами с пятнадцатью координатами в каждой из них. Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, анти коммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцатимерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата шестнадцатимерной алгебры определяет скалярное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 15-тензору. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из пятнадцатимерных алгебр.

Чтобы говорить предметно о свойствах пятнадцатимерной алгебры, можно проанализировать пятнадцати рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса.

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и векторных алгебр пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высоких размерностей. Это, в свою очередь, ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что **“Размерность физического пространства неопределённа**. Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой”!

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии определяющих соотношений.

Литература

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
2. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.
3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. 36с.

КОРОТКОВ А.В. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^{m-1} & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Обозначим определитель третьего порядка символом

$$|i,j,k| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение двух векторов $[a,b]$ представляется

-в *одномерном* случае как $|1,0,0|=0$;

-в *трехмерном* случае в виде одного определителя третьего порядка

$$[a,b]=|1,2,3| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

или в координатной форме записи

$$[a,b] = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk} = \pm 1$ — является совершенно антисимметричным единичным 3-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 .

Тензор структурных констант имеет вид:

σ^{ijk}	1	2	3
1	0	-1	1
2	1	0	-1
3	-1	1	0

С целью упрощения записи лучше использовать сумму трех операторов момента импульса $L=(L_1,L_2,L_3)$. Она определяет векторное произведение двух векторов и может быть представлена в виде суммы трёх компонент. Матрицы L и L_i третьего порядка с мнимыми элементами.

В трехмерном случае

$$[a,b]=[a_i e_i b_j e_j]=a_i b_j [e_i e_j]=\sigma_{ij}^k a_i b_j e_k;$$

при последовательности чисел $e_i a_i b_k = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2;$

$$\sigma_{ij}^k = 1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^k = -1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^k = 0.$

Отметим, что подстановки на множестве индексов **1,2,3** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя [1, 2]:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Очень специфичны свойства (суммы операторов момента импульса) – тензора структурных констант:

-во -первых, сумма, чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;

-во -вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;

-матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны;

-размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1 и может быть как угодно большой;

-все нечетные степени матрицы пропорциональны L , а четные- L^2 ;

-целые степени матрицы определяются двумя числами;

-матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;

-определитель матрицы L и всех её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров.

$L^2/3^0$	1	2	3		$-iL^3/3^0$	1	2	3		$L^4/3^1$	1	2	3		$iL^5/3^1$	1	2	3
1	-2	1	1		1	0	-1	1		1	-2	1	1		1	0	-1	1
2	1	-2	1		2	1	0	-1		2	1	-2	1		2	1	0	-1
3	1	1	-2		3	-1	1	0		3	1	1	-2		3	-1	1	0

Операторы момента импульса связаны соотношениями:

$$-iL_1 = L_2 * L_3 - L_3 * L_2,$$

$$-iL_2 = L_3 * L_1 - L_1 * L_3,$$

$$-iL_3 = L_1 * L_2 - L_2 * L_1,$$

причём

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

и скалярный квадрат операторов момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2.$$

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные (кроме 0) и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер и среди них выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

При этом

$$\begin{aligned}
 L^1/3^0 = -L^3/3^1 = L^5/3^2 = \dots & \begin{vmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{vmatrix}, \quad -L^2/3^0 = L^4/3^1 = -L^6/3^2 = \dots & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \\
 p^1 = -L^2/3^0 = p^3/3^2 = p^5/3^4 = \dots & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad -p^2/3^1 = -p^4/3^3 = -p^6/3^5 = \dots & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \\
 -(L^1/3^1)p^1 = (L^3/3^4)p^3 = \dots & \begin{vmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{vmatrix}, \quad -(L^2/3^2)p^2 = (L^4/3^5)p^4 = \dots & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \\
 \text{(квадрат модуля)} & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{(теорема Пифагора)} & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \\
 -(p^1 + iL^1)(p^1 - iL^1)/(3^1 + 1) = & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad (p^2 + L^2)/(3^2 - 1) = & \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \\
 \text{определители} & & \\
 /L/ = 0, \dots /L^n/ = 0, & & /p/ = 0, \dots /p^n/ = 0,
 \end{aligned}$$

что аналогично комплексным числам.

У 3-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 2I,$$

где I -единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

В семимерном случае векторное произведение двух векторов удобно записать в координатной форме записи

$$\begin{aligned}
 [a, b] = & \begin{pmatrix} (a_2b_3 - b_2a_3) + (a_4b_5 - b_4a_5) + (b_6a_7 - a_6b_7) \\ (a_4b_6 - b_4a_6) + (a_5b_7 - b_5a_7) + (b_1a_3 - a_1b_3) \\ (a_6b_5 - b_6a_5) + (a_1b_2 - b_1a_2) + (b_7a_4 - a_7b_4) \\ (a_5b_1 - b_5a_1) + (a_7b_3 - b_7a_3) + (b_2a_6 - a_2b_6) \\ (a_7b_2 - b_7a_2) + (a_3b_6 - b_3a_6) + (b_4a_1 - a_4b_1) \\ (a_1b_7 - b_1a_7) + (a_2b_4 - b_2a_4) + (b_3a_5 - a_3b_5) \\ (a_3b_4 - b_3a_4) + (a_6b_1 - b_6a_1) + (b_5a_2 - a_5b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

или в виде суммы семи определителей

$$\begin{aligned}
 [ab] = & \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} + \\
 & + \begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

$\sigma^{ijk} = -iL$	1	2	3	4	5	6	7	$-iLr$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	-3	2	-5	4	7	-6
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	2	3	0	-1	-6	-7	4	5
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	3	-2	1	0	-7	6	-5	4
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	4	5	6	7	0	-1	-2	-3
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	5	-4	7	-6	1	0	3	-2
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	6	-7	-4	5	2	-3	0	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $L=(L_1, L_2, \dots, L_7)$ может быть представлена в виде суммы семи компонент. Матрицы L и L_i 7-го порядка.

В семимерном случае

$$[a, b] = [a_i e_i b_j e_j] = a_i b_j [e_i e_j] = \sigma_{ij}^k a_i b_j e_k;$$

при последовательности чисел

$$e_i a_j b_k = 1, 2, 3; 2, 4, 6; 3, 6, 5; 4, 5, 1; 5, 7, 2; 6, 1, 7; 7, 3, 4;$$

$\sigma_{ij}^k = 1$; при обратной последовательности $\sigma_{ij}^k = -1$; для других наборов чисел $\sigma_{ij}^k = 0$.

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk} = \pm 1$ – является совершенно антисимметричным единичным 7- тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов $1, 2, \dots, 7$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Первые три столбца (или строки) этой таблицы характеризуют значения индексов определителей в векторном произведении двух векторов. Специфичны свойства (суммы операторов момента импульса) и тензора структурных констант:

-во –первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;

-во- вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;

-матрицы нечётных степеней антисимметричны, а чётных – симметричны;

-размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом $2^n - 1$;

- все нечетные степени матрицы пропорциональны L , а четные- L^2 ;
- целые степени матрицы определяются двумя числами;
- матрицы L_i определяют векторное произведение двух векторов;
- определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем несколько примеров. Имеем

$$\begin{aligned}
 -iL_1 &= m(L_2 * L_3 - L_3 * L_2 + L_4 * L_5 - L_5 * L_4 + L_7 * L_6 - L_6 * L_7), \\
 -iL_2 &= m(L_4 * L_6 - L_6 * L_4 + L_5 * L_7 - L_7 * L_5 + L_3 * L_1 - L_1 * L_3), \\
 -iL_3 &= m(L_6 * L_5 - L_5 * L_6 + L_1 * L_2 - L_2 * L_1 + L_4 * L_7 - L_7 * L_4), \\
 -iL_4 &= m(L_5 * L_1 - L_1 * L_5 + L_7 * L_3 - L_3 * L_7 + L_6 * L_2 - L_2 * L_6), \\
 -iL_5 &= m(L_7 * L_2 - L_2 * L_7 + L_3 * L_6 - L_6 * L_3 + L_1 * L_4 - L_4 * L_1), \\
 -iL_6 &= m(L_1 * L_7 - L_7 * L_1 + L_2 * L_4 - L_4 * L_2 + L_5 * L_3 - L_3 * L_5), \\
 -iL_7 &= m(L_3 * L_4 - L_4 * L_3 + L_6 * L_1 - L_1 * L_6 + L_2 * L_5 - L_5 * L_2),
 \end{aligned}$$

причём

$$m = 1/3.$$

$$L = -i * (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7),$$

и

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2 + L_7^2 = 6I.$$

Возведём L в целую положительную степень. При этом:

$-L^2/7^0$	1	2	3	4	5	6	7	$-iL^3/7^1$	1	2	3	4	5	6	7
1	-6	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	-6	1	1	1	1	1	2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3	1	1	-6	1	1	1	1	3	-1	1	0	-1	1	-1	1
4	1	1	1	-6	1	1	1	4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5	1	1	1	1	-6	1	1	5	-1	1	-1	1	0	1	-1
6	1	1	1	1	1	-6	1	6	-1	-1	1	1	-1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	-6	7	1	-1	-1	1	1	-1	0

$L^4/7^1$	1	2	3	4	5	6	7	$-iL^5/7^2$	1	2	3	4	5	6	7
1	-6	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	-6	1	1	1	1	1	2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3	1	1	-6	1	1	1	1	3	-1	1	0	-1	1	-1	1
4	1	1	1	-6	1	1	1	4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5	1	1	1	1	-6	1	1	5	-1	1	-1	1	0	1	-1
6	1	1	1	1	1	-6	1	6	-1	-1	1	1	-1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	-6	7	1	-1	-1	1	1	-1	0

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом эти числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер, среди которых выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

У 7-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми

операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_7^2 = 6I,$$

где I -единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L = L^3/7 = L^5/7^2 = \dots \quad -L^2 = -L^4/7 = -L^6/7^2 \dots$$

0	-i	i	-i	i	i	-i
i	0	-i	-i	-i	i	i
-i	i	0	-i	i	-i	i
i	i	i	0	-i	-i	-i
-i	i	-i	i	0	i	-i
-i	-i	i	i	-i	0	i
i	-i	-i	i	i	-i	0

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

$$p = p^3/7^2 = p^5/7^4 = \dots \quad -p^2/7 = -p^4/7^3 = -L^6/7^5 = \dots$$

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

$$-(L/7)p = - \quad -(L^2/7^2)p^2 = -$$

0	-i	i	-i	i	i	-i
i	0	-i	-i	-i	i	i
-i	i	0	-i	i	-i	i
i	i	i	0	-i	-i	-i
-i	i	-i	i	0	i	-i
-i	-i	i	i	-i	0	i
i	-i	-i	i	i	-i	0

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

$$\begin{aligned} & \text{(квадрат модуля)} & & \text{(теорема Пифагора)} \\ & -(p+iL)(p-iL)/(7+1) = & & (p^2+L^2)/(-7-1) = \end{aligned}$$

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

-	1	1	1	1	1	1
1	-	1	1	1	1	1
1	1	-	1	1	1	1
1	1	1	-	1	1	1
1	1	1	1	-	1	1
1	1	1	1	1	-	1
1	1	1	1	1	1	-

определители
/L/=0, ... /L^n/=0,

/p/=0, ... /p^n/=0,

Мы построили матричную аналогию комплексных чисел.

В пятнадцатимерной векторной алгебре векторное произведение двух векторов можно записать в виде суммы ста пяти величин вида:

$$(a_i b_j - a_j b_i) e_k,$$

по семь компонент в каждой координате ($7 \cdot 15 = 105$) в соответствии с таблицей:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9,						
11,2	9,13,4	9,14,7	9,1,8	9,3,10	9,5,12	9,6,15
10,14,4	10,15,5	10,9,3	10,2,8	10,6,12	10,7,13	10,1,11
11,13,6	11,10,1	11,15,4	11,3,8	11,5,14	11,2,9	11,7,12
12,9,5	12,11,7	12,10,6	12,4,8	12,1,13	12,3,15	12,2,14
13,10,7	13,14,3	13,12,1	13,5,8	13,2,15	13,6,11	13,4,9
14,15,1	14,12,2	14,11,5	14,6,8	14,7,9	14,4,10	14,3,13
15,12,3	15,9,6	15,13,2	15,7,8	15,4,11	15,1,14	15,5,10

где i, j, k циклически повторяются для каждой величины, так что они создают определители третьего порядка.

Например, три величины **1,2,3; 2,3,1; 3,1,2** дают определитель **|1,2,3|**. В результате векторное произведение двух векторов в пятнадцатимерной алгебре может быть записано в виде суммы сорока девяти определителей третьего порядка, семь из которых (с восьмой координатой, например **1, 8, 9**) повторяются трижды ($49 = 28 + 3 \cdot 7$). При этом орт e_8 является общим ортом для всех семи пространств, так что, имеется 35 не примитивных определителей

[ab]=

$$\begin{aligned}
 = & |1, 2, 3| + |2, 8, 10| + |3, 10, 9| + |8, 9, 1| + |9, 11, 2| + |10, 1, 11| + |11, 3, 8| \\
 + & |2, 4, 6| + |4, 8, 12| + |6, 12, 10| + |8, 10, 2| + |10, 14, 4| + |12, 2, 14| + |14, 6, 8| \\
 + & |3, 6, 5| + |6, 8, 14| + |5, 14, 11| + |8, 11, 3| + |11, 13, 6| + |14, 3, 13| + |13, 5, 8| \\
 + & |4, 5, 1| + |5, 8, 13| + |1, 13, 12| + |8, 12, 4| + |12, 9, 5| + |13, 4, 9| + |9, 1, 8| \\
 + & |5, 7, 2| + |7, 8, 15| + |2, 15, 13| + |8, 13, 5| + |13, 10, 7| + |15, 5, 10| + |10, 2, 8| \\
 + & |6, 1, 7| + |1, 8, 9| + |7, 9, 14| + |8, 14, 6| + |14, 15, 1| + |9, 6, 15| + |15, 7, 8| \\
 + & |7, 3, 4| + |3, 8, 11| + |4, 11, 15| + |8, 15, 7| + |15, 12, 3| + |11, 7, 12| + |12, 4, 8|
 \end{aligned}$$

Возможна также укороченная (не симметричная) запись векторного произведения двух векторов, которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
 [a, b] = & |1, 2, 3| + 3*|1, 8, 9| + |1, 11, 10| + |1, 13, 12| + |1, 14, 15| + \\
 & |2, 4, 6| + 3*|2, 8, 10| + |2, 14, 12| + |2, 15, 13| + |2, 9, 11| + \\
 & |3, 6, 5| + 3*|3, 8, 11| + |3, 13, 14| + |3, 10, 9| + |3, 15, 12| + \\
 & |4, 5, 1| + 3*|4, 8, 12| + |4, 9, 13| + |4, 11, 15| + |4, 10, 14| + \\
 & |5, 7, 2| + 3*|5, 8, 13| + |5, 10, 15| + |5, 14, 11| + |5, 12, 9| + \\
 & |6, 1, 7| + 3*|6, 8, 14| + |6, 15, 9| + |6, 12, 10| + |6, 11, 13| + \\
 & |7, 3, 4| + 3*|7, 8, 15| + |7, 12, 11| + |7, 9, 14| + |7, 13, 10| ,
 \end{aligned}$$

поскольку суммируются компоненты с восьмой координатой:

$$\begin{aligned}
 &|1, 8, 9|+|8, 9, 1|+|9, 1, 8|=3*|1, 8, 9|, \\
 &|2, 8, 10|+|8, 10, 2|+|10, 2, 8|=3*|2, 8, 10|, \\
 &|3, 8, 11|+|8, 11, 3|+|11, 3, 8|=3*|3, 8, 11|, \\
 &|4, 8, 12|+|8, 12, 4|+|12, 4, 8|=3*|4, 8, 12|, \\
 &|5, 8, 13|+|8, 13, 5|+|13, 5, 8|=3*|5, 8, 13|, \\
 &|6, 8, 14|+|8, 14, 6|+|14, 6, 8|=3*|6, 8, 14|, \\
 &|7, 8, 15|+|8, 15, 7|+|15, 7, 8|=3*|7, 8, 15|.
 \end{aligned}$$

Тензор структурных констант и сумма операторов момента импульса имеют вид:

$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0

или в расширенном виде

$-iL_r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5
11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3
13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0

Они определяют векторное произведение двух векторов. Матрица суммы операторов момента импульса $L=(L_1, L_2, \dots, L_{15})$ может быть представлена в виде суммы 15-ти компонент. Матрицы L и L_i 15-го порядка.

В пятнадцатимерном случае

$$[a, b] = [a_i e_i b_j e_j] = a_i b_j [e_i e_j] = \sigma_{ij}^k a_i b_j e_k;$$

при последовательности чисел

$e_i a_j b_k = 1, 2, 3; 2, 4, 6; 3, 6, 5; 4, 5, 1; 5, 7, 2; 6, 1, 7; 7, 3, 4;$
 $1, 8, 9; 2, 8, 10; 3, 8, 11; 4, 8, 12; 5, 8, 13; 6, 8, 14; 7, 8, 15;$
 $1, 11, 10; 2, 14, 12; 3, 13, 14; 4, 9, 13; 5, 10, 15; 6, 15, 9; 7, 12, 11;$
 $1, 13, 12; 2, 15, 13; 3, 10, 9; 4, 11, 15; 5, 14, 11; 6, 12, 10; 7, 9, 14;$
 $1, 14, 15; 2, 9, 11; 3, 15, 12; 4, 10, 14; 5, 12, 9; 6, 11, 13; 7, 13, 10$

$\sigma_{ij}^{k=1};$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{k=-1};$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{k=0}.$

При этом тензор структурных констант $\sigma^{ijk} = \pm 1$ является совершенно антисимметричным единичным 15- тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Отметим, что подстановки на множестве индексов $1, 2, \dots, 15$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица системы подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

Замечательны свойства (суммы операторов момента импульса) тензора структурных констант:

-во-первых, суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю;

-во-вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;

-матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных – симметричны;

-размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом $2^n - 1$;

-все нечетные степени матрицы пропорциональны L , а четные (кроме 0)- L^2 ;

-целые степени матрицы определяются двумя числами;

-матрицы L определяют векторное произведение двух векторов;

-определитель матрицы L и её степеней равен нулю.

Приведем ещё несколько примеров.

$$L=L^3/7=L^5/7^2=\dots \quad \begin{vmatrix} 0 & -i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i \\ -i & i & 0 & -i \\ i & i & i & 0 \\ -i & i & -i & i \\ -i & -i & i & i \\ i & -i & -i & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} i & i & -i \\ -i & i & i \\ i & -i & i \\ -i & -i & -i \\ 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{vmatrix} \quad -L^2=-L^4/7=-L^6/7^2=\dots \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix}$$

$$p=p^3/7^2=p^5/7^4=\dots \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 \\ 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix} \quad -p^2/7=-p^4/7^3=-L^6/7^5=\dots \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix}$$

$$\frac{-(L/7)p}{\sqrt[3]{3/4}}=- \quad \begin{vmatrix} 0 & -i & i & -i \\ i & 0 & -i & -i \\ -i & i & 0 & -i \\ i & i & i & 0 \\ -i & i & -i & i \\ -i & -i & i & i \\ i & -i & -i & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} i & i & -i \\ -i & i & i \\ i & -i & i \\ -i & -i & -i \\ 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{vmatrix} \quad \frac{-(L^2/7^2)p^2}{\sqrt[4]{4/5}}=- \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{(квадрат модуля)} \\ -(p+iL)(p-iL)/(7+1)= \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 \\ 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(теорема Пифагора)} \\ (p^2+L^2)/(-7-1)= \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \hat{1} & - \end{vmatrix}$$

определители
/L/=0, ... /L^n/=0,

определители
/p/=0, ... /p^n/=0,

Мы построили 7-мерную матричную аналогию комплексных чисел.

Скалярное и векторное произведения двух векторов в координатной форме записи представлены в таблице на альбомном листе, приведенном ниже.

Эта таблица фиксирует векторное произведение двух векторов и покоординатную запись пятнадцати операторов момента импульса

L_i ($i=1, 2, \dots, 15$), как показано ниже.

1. векторное произведение двух векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель;

2. векторное произведение двух векторов изменяет знак при перестановке векторов;

3. векторное произведение двух векторов дистрибутивно;

$$[a(b+c)]=[ab]+[ac]$$

4. если два вектора в векторном произведении компланарны, то это произведение равно нулю и т. д.

Модуль векторного произведения двух векторов a и b можно сопоставить скаляр, равный площади построенного на них параллелограмма

$$[ab]=absin(a,b).$$

Приведем несколько примеров.

$$-iL=L^3/i5=L^5/i5^2=\dots$$

0	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i	i	-i	-i	i
i	0	-i	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i	i	i	-i	-i
-i	i	0	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	i	-i
i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	i	i	i	i
-i	i	-i	i	0	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	-i	i
-i	-i	i	i	-i	0	i	-i	i	i	-i	-i	i	i	-i
i	-i	-i	i	i	-i	0	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i
i	i	i	i	i	i	i	0	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i
-i	i	-i	i	-i	-i	i	i	0	i	-i	-i	-i	-i	i
-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	-i	0	i	i	-i	-i	-i
i	-i	-i	-i	-i	i	i	i	-i	-i	0	i	i	i	i
i	-i	i	-i	-i	-i	i	i	i	-i	i	0	-i	-i	i
i	i	-i	-i	i	-i	-i	i	i	i	-i	-i	i	0	-i
-i	i	i	-i	-i	i	-i	i	-i	i	i	-i	-i	i	0

$$-L^2=-L^4/15=L^6/15^2=\dots$$

-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

При этом

$$p=p^3/15^2=p^5/15^4=\dots-p^2/15=-p^4/15^3=L^6/15^5=\dots-(p+iL)(p-iL)/16=-(p^2+L^2)/16=\dots-(L^2/15^2)p^2=-/15^5)p^4=-L^2$$

$$-(L/15)p=-L^3/(15^4)p=-L^5/(15^7)p^5 \dots =L$$

$$/L/=0.../L^n/=0, \quad /p/=0, \dots$$

$$/p^n/=0.$$

Очевидно, что без учёта коэффициентов, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса совпадают и образуют две

числовые величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел.

У 15-мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_{15}^2 = 14I,$$

где I -единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса. Матрица, составляющая сумму операторов момента импульса, антисимметрична, причём этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$L^2 L_i - L_i L^2 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 15),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Произведения трех векторов

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны следующие типы произведений:

1. $a(bc)$ - простейшее произведение трех векторов;
2. $(a[bc])$ - смешанное произведение трех векторов;
3. $[a[bc]]$ - двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение трех векторов $a(bc)$ компланарно с третьим вектором

$$\text{т. е. } a(bc) \neq (ab)c,$$

так что векторные n -мерные ($n=1, 3, 7, 15, \dots$) алгебры не ассоциативны.

Смешанное произведение

$$(a[bc]) = (abc)$$

получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию:

$$(abc) = ((a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n) * \sigma_{ij}^k b_i c_j e_k);$$

т. е. смешанное произведение трех векторов в одномерном случае равно нулю, в трехмерном случае – определяется одним определителем третьего порядка, в семимерном – суммой семи определителей, а в пятнадцатимерном – суммой тридцати пяти определителей третьего порядка причем

- в **трехмерном** случае

$$(abc) = |1, 2, 3|,$$

- в **семимерном** случае

$$(abc) = |1, 2, 3| + |2, 4, 6| + |3, 6, 5| + |4, 5, 1| + |5, 7, 2| + |6, 1, 7| + |7, 3, 4|,$$

- в **пятнадцатимерном** случае

$(abc)=$

$$\begin{aligned}
 = & |1, 2, 3| + |2, 8, 10| + |3, 10, 9| + |8, 9, 1| + |9, 11, 2| + |10, 1, 11| + |11, 3, 8| \\
 + & |2, 4, 6| + |4, 8, 12| + |6, 12, 10| + |8, 10, 2| + |10, 14, 4| + |12, 2, 14| + |14, 6, 8| \\
 + & |3, 6, 5| + |6, 8, 14| + |5, 14, 11| + |8, 11, 3| + |11, 13, 6| + |14, 3, 13| + |13, 5, 8| \\
 + & |4, 5, 1| + |5, 8, 13| + |1, 13, 12| + |8, 12, 4| + |12, 9, 5| + |13, 4, 9| + |9, 1, 8| \\
 + & |5, 7, 2| + |7, 8, 15| + |2, 15, 13| + |8, 13, 5| + |13, 10, 7| + |15, 5, 10| + |10, 2, 8| \\
 + & |6, 1, 7| + |1, 8, 9| + |7, 9, 14| + |8, 14, 6| + |14, 15, 1| + |9, 6, 15| + |15, 7, 8| \\
 + & |7, 3, 4| + |3, 8, 11| + |4, 11, 15| + |8, 15, 7| + |15, 12, 3| + |11, 7, 12| + |12, 4, 8|
 \end{aligned}$$

или в сокращенной записи:

$$\begin{aligned}
 (abc) = & |1, 2, 3| + 3*|1, 8, 9| + |1, 11, 10| + |1, 13, 12| + |1, 14, 15| \\
 & + |2, 4, 6| + 3*|2, 8, 10| + |2, 14, 12| + |2, 15, 13| + |2, 9, 11| \\
 & + |3, 6, 5| + 3*|3, 8, 11| + |3, 13, 14| + |3, 10, 9| + |3, 15, 12| \\
 & + |4, 5, 1| + 3*|4, 8, 12| + |4, 9, 13| + |4, 11, 15| + |4, 10, 14| \\
 & + |5, 7, 2| + 3*|5, 8, 13| + |5, 10, 15| + |5, 14, 11| + |5, 12, 9| \\
 & + |6, 1, 7| + 3*|6, 8, 14| + |6, 15, 9| + |6, 12, 10| + |6, 11, 13| \\
 & + |7, 3, 4| + 3*|7, 8, 15| + |7, 12, 11| + |7, 9, 14| + |7, 13, 10|
 \end{aligned}$$

В этой таблице символом $|i, j, k|$ обозначен определитель вида:

$$|i, j, k| = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

- смешанное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель,

$$(\alpha abc) = \alpha (abc);$$

- смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;

- циклическая подстановка векторов не изменяют смешанного произведения трех векторов;

- смешанное произведение трех векторов дистрибутивно, т. е.

$$(ab(c+d)) = (abc) + (abd);$$

- если два вектора в смешанном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов для всех рассмотренных алгебр

$$([ab]a) = ([ba]b) = 0$$

и т. д.

Модулю смешанного произведения (abc) трех векторов a , b и c можно сопоставить скаляр, равный объему построенного на них параллелепипеда.

Вместе с тем пятнадцатимерное пространство можно рассматривать как совокупность 35-ти трехмерных пространств. При этом векторное произведение двух векторов в не симметричной форме располагает коэффициентом 3 при 8-ой координате. Запись скалярного произведения двух векторов остается в прежнем виде так, что смешанное произведение трех векторов представляется аналогично формуле векторного произведения двух векторов.

Оно содержит $(49=28+3*7)$ определителей третьего порядка, в случае представления 15-мерного пространства трёхмерными пространствами, что равносильно использованию тридцати пяти не повторяющихся определителей.

Двойное векторное произведение $[a[bc]]$ трех векторов a , b и c получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор такой, что

$$[a[bc]] = [ad] = f = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \dots + f_{15} e_{15}.$$

В координатной форме записи для двойного векторного произведения имеет место соотношение:

- в *трехмерном* случае

$$f_1 = a_2 d_3 - d_2 a_3 = a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1);$$

$$f_2 = a_3 d_1 - d_3 a_1 = a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2);$$

$$f_3 = a_1 d_2 - d_1 a_2 = a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3);$$

т.е.

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c;$$

- в *семимерном* случае для первой координаты

$$f_1 = a_2 d_3 - a_3 d_2 + a_4 d_5 - a_5 d_4 + a_7 d_6 - a_6 d_7 =$$

$$= a_2 (b_6 c_5 - b_5 c_6 + b_1 c_2 - b_2 c_1 + b_4 c_7 - b_7 c_4) - a_3 (b_4 c_6 - b_6 c_4 + b_5 c_7 - b_7 c_5 + b_3 c_1 - b_1 c_3) +$$

$$+ a_4 (b_7 c_2 - b_2 c_7 + b_3 c_6 - b_6 c_3 + b_1 c_4 - b_4 c_1) - a_5 (b_5 c_1 - b_1 c_5 + b_7 c_3 - b_3 c_6 + b_6 c_2 - b_2 c_6) +$$

$$+ a_7 (b_1 c_7 - b_7 c_1 + b_2 c_4 - b_4 c_2 + b_5 c_3 - b_3 c_5) - a_6 (b_3 c_4 - b_4 c_3 + b_6 c_1 - b_1 c_6 + b_2 c_5 - b_5 c_2),$$

т.е.

$$f_1 = b_1(ca) - (ab)c_1 + [abc]_1 \quad \text{где} \quad [abc]_1 = |2,4,7| + |3,7,5| + |4,3,6| + |6,5,2|.$$

Аналогично для других координат

$$f_2 = b_2(ca) - (ab)c_2 + [abc]_2, \quad [abc]_2 = |4,5,3| + |6,3,7| + |5,6,1| + |1,7,4|,$$

$$f_3 = b_3(ca) - (ab)c_3 + [abc]_3, \quad [abc]_3 = |6,1,4| + |5,4,2| + |1,5,7| + |7,2,6|,$$

$$f_4 = b_4(ca) - (ab)c_4 + [abc]_4, \quad [abc]_4 = |5,7,6| + |1,6,3| + |7,1,2| + |2,3,5|,$$

$$f_5 = b_5(ca) - (ab)c_5 + [abc]_5, \quad [abc]_5 = |7,3,1| + |2,1,6| + |3,2,4| + |4,6,7|,$$

$$f_6 = b_6(ca) - (ab)c_6 + [abc]_6, \quad [abc]_6 = |1,2,5| + |7,5,4| + |2,7,3| + |3,4,1|,$$

$$f_7 = b_7(ca) - (ab)c_7 + [abc]_7, \quad [abc]_7 = |3,6,2| + |4,2,1| + |6,4,5| + |5,1,3|.$$

Таким образом, в семимерном случае, окончательно напомним

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc],$$

где вектор $[abc]$ определяется суммой 28-ми определителей третьего порядка, причем имеет место соотношение Якоби в виде:

$$[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc],$$

т.е.

$$[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 3[abc].$$

Следует отметить, что подстановки

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

на множестве индексов $(1,2,3,4,5,6,7)$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя. Аналогичным образом:

$$[[ab]c]=b(ac)-(cb)a+[cba]=b(ac)-(cb)a-3[abc],$$

Назовем антисимметричную по перестановке любой пары векторов функцию трех векторов $[abc]$ векторным произведением трех векторов, при этом двойное векторное произведение трех векторов сводится к линейной комбинации двух простейших и векторного произведения трех векторов. Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

- векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль и т. д.

Векторным произведением $[abc]$ трех векторов a , b и c можно назвать вектор

$$[abc]=[a_i e_i b_j e_j c_k e_k]=a_i b_j c_k [e_i e_j e_k]=\sigma_{ijk}^k a_i b_j c_k e_k,$$

определяемый совершенно антисимметричным единичным 7-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметрии следует, что все компоненты 7-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Вектор $[abc]$ в семимерном случае определяется суммой 28-ми определителей третьего порядка (по четыре в каждой координате), дополняющих совокупность из $(35=7+7*4)$ возможных комбинаций как число сочетаний $C_7^3=35$. Компоненты совершенно антисимметричного единичного 7-тензора третьего ранга σ^{ijk} не изменяются по отношению к вращению семимерной системы координат.

Соотношение Якоби в семимерной алгебре не выполняется, она не ассоциативна и не является алгеброй Ли. В [1] показано, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

В **15-мерной** алгебре скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$$(ab)=(a_i e_i b_k e_k)=a_i b_k (e_i e_k)=g_{ik} a_i b_k,$$

где g_{ik} -метрический 15-тензор, равный единичной матрице. Согласно сказанному выше, имеем:

$$[ab] = \begin{array}{l} |1, 2, +3*| 2, + | 3,10, + | 9,11, + | 10, \\ + | 2, 4, +3*| 4, + | + | 10,14 + | 12, \\ + | 3, 6, +3*| 6, + | + | 11,13 + | 14, \\ + | 4, 5, 1 +3*| 5, + | + | 12, 9, + | 13, 4, \\ + | 5, 7, +3*| 7, + | + | 13,10, + | 15, \\ + | 6, 1, +3*| 1, 8, + | 7, + | 14,15, + | 9, \\ + | 7, 3, +3*| 3, + | + | 15,12, + | 11, \end{array}$$

Для первой координаты f_1 двойного векторного произведения двух векторов получим таблицу приведенную, на альбомном листе. Здесь 6 коммутаторов имеют отрицательные знаки перед скобками. Величины вида a_i, b_j, c_k будем обозначать цифрами, например, так:

$$a_2*(b_6*c_5 - b_5*c_6) = 2, 6, 5.$$

Из таблицы следует, что:

2,6,5	2,1,2	2,4,7	3*(2,8,11)	-2,13,14	2, 10,9	-2,15,12
3,6,4	3,7,5	3, 1,3	3*(3,10,8)	+3,12,14	+3,13,15	3,11,9
4,7,2	4,3,6	4, 1,4	3*(4,8,13)	-4,10,15	-4,14,11	4,12,9
5,1,5	5,3,7	5,2, 6	3*(5,12,8)	5,13,9	+5,15,11	+5,14,10
6,4,3	6,1, 6	6,5,2	3*(6,15,8)	+6,11,12	6,14,9	+6,10,13
7,1,7	7,2,4	7,5,3	3*(7,8,14)	7,15,9	-7,12,10	-7,11,13
3*(8,11,2)	3*(8,13,4)	3*(8,14,7)	(8,1,8)	3*(8,3,10)	3*(8,5,12)	3*(8,6,15)
9,1,9	9,2,10	9,3,11	(9,4,12)	9,5,13	9,6,14	9,7,15
-10,6,13	10,1,10	10,4,15	3*(10,8,3)	-10,14,5	10,9,2	10,12,7
11,14,4	-11,15,5	11,9,3	3*(11,2,8)	11,6,12	11,7,13	11,1,11
12,7,10	12,3,14	12,1,12	3*(12,8,5)	12,15,2	12,11,6	12,9,4
13,9,5	13,11,7	-13,10,6	3*(13,4,8)	13,1,13	-13,3,15	13,2,14
14,12,3	14,9,6	14,13,2	3*(14,7,8)	14,4,11	14,1,14	-14,5,10
15,1,15	15, 2,12	-15,5,11	3*(15,8,6)	15,9,7	15,10,4	-15,13,3

$m.e.[abc]_1 =$

$$\begin{aligned}
 &= |2,4,7| + 3*|4,8,13| + 3*|8,11,2| + |11,14,4| + 3*|14,7,8| + |7,13,11| + |13,2,14| \\
 &+ |3,7,5| + |5,13,9| + |9,2,10| + |10,4,15| + 3*|15,8,6| + |6,11,12| + |12,14,3| \\
 &+ |4,3,6| + 3*|8,5,12| + |11,9,3| + |14,10,5| + |7,15,9| + |13,6,10| + |2,12,15| \\
 &+ |6,5,2| + |12,9,4| + 3*|3,10,8| + |5,15,11| + |9,6,14| + |10,12,7| + |15,3,13| \\
 &_1 = ((a_2d_3 - a_3d_2) + (a_4d_5 - a_5d_4) + (a_7d_6 - a_6d_7) + 3(a_8d_9 - a_9d_8) + (a_{11}d_{10} - a_{10}d_{11}) + (a_{13}d_{12} - a_{12}d_{13}) + (a_{14}d_{15} - a_{15}d_{14})) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_2^* ((b_6c_5 - b_5c_6) + (b_1c_2 - b_2c_1) + (b_4c_7 - b_7c_4) + 3(b_8c_{11} - b_{11}c_8) - (b_{13}c_{14} - b_{14}c_{13}) + (b_{10}c_9 - b_9c_{10}) - (b_{15}c_{12} - b_{12}c_{15})) \\
 &- a_3^* ((b_4c_6 - b_6c_4) + (b_5c_7 - b_7c_5) + (b_3c_1 - b_1c_3) + 3(b_8c_{10} - b_{10}c_8) + (b_{14}c_{12} - b_{12}c_{14}) + (b_{15}c_{13} - b_{13}c_{15}) + (b_9c_{11} - b_{11}c_9)) \\
 &+ a_4^* ((b_7c_2 - b_2c_7) + (b_3c_6 - b_6c_3) + (b_1c_4 - b_4c_1) + 3(b_8c_{13} - b_{13}c_8) - (b_{10}c_{15} - b_{15}c_{10}) - (b_{14}c_{11} - b_{11}c_{14}) + (b_{12}c_9 - b_9c_{12})) \\
 &- a_5^* ((b_5c_1 - b_1c_5) + (b_7c_3 - b_3c_7) + (b_6c_2 - b_2c_6) + 3(b_8c_{12} - b_{12}c_8) + (b_9c_{13} - b_{13}c_9) + (b_{11}c_{15} - b_{15}c_{11}) + (b_{10}c_{14} - b_{14}c_{10})) \\
 &+ a_7^* ((b_1c_7 - b_7c_1) + (b_2c_4 - b_4c_2) + (b_5c_3 - b_3c_5) + 3(b_8c_{14} - b_{14}c_8) + (b_{15}c_9 - b_9c_{15}) - (b_{12}c_{10} - b_{10}c_{12}) - (b_{11}c_{13} - b_{13}c_{11})) \\
 &- a_6^* ((b_3c_4 - b_4c_3) + (b_6c_1 - b_1c_6) + (b_2c_5 - b_5c_2) + 3(b_8c_{15} - b_{15}c_8) + (b_{12}c_{11} - b_{11}c_{12}) + (b_9c_{14} - b_{14}c_9) + (b_{13}c_{10} - b_{10}c_{13})) \\
 &+ a_8^* (3(b_{11}c_2 - b_2c_{11}) + 3(b_{13}c_4 - b_4c_{13}) + 3(b_{14}c_7 - b_7c_{14}) + (b_1c_8 - b_8c_1) + 3(b_3c_{10} - b_{10}c_3) + 3(b_5c_{12} - b_{12}c_5) + 3(b_6c_{15} - b_{15}c_6)) \\
 &- a_9^* ((b_9c_1 - b_1c_9) + (b_{10}c_2 - b_2c_{10}) + (b_{11}c_3 - b_3c_{11}) + (b_{12}c_4 - b_4c_{12}) + (b_{13}c_5 - b_5c_{13}) + (b_{14}c_6 - b_6c_{14}) + (b_{15}c_7 - b_7c_{15})) \\
 &+ a_{11}^* ((b_{14}c_4 - b_4c_{14}) + (b_{15}c_5 - b_5c_{15}) + (b_9c_3 - b_3c_9) + 3(b_3c_8 - b_8c_3) + (b_6c_{12} - b_{12}c_6) + (b_7c_{13} - b_{13}c_7) + (b_{11}c_{11} - b_{11}c_{11})) \\
 &- a_{10}^* ((b_{13}c_6 - b_6c_{13}) + (b_{10}c_1 - b_1c_{10}) + (b_{15}c_4 - b_4c_{15}) + 3(b_2c_8 - b_8c_2) + (b_5c_{14} - b_{14}c_5) + (b_2c_9 - b_9c_2) + (b_7c_{12} - b_{12}c_7)) \\
 &+ a_{13}^* ((b_9c_5 - b_5c_9) + (b_{11}c_7 - b_7c_{11}) + (b_{10}c_6 - b_6c_{10}) + 3(b_5c_8 - b_8c_5) + (b_1c_{13} - b_{13}c_1) + (b_3c_{15} - b_{15}c_3) + (b_2c_{14} - b_{14}c_2)) \\
 &- a_{12}^* ((b_{10}c_7 - b_7c_{10}) + (b_{14}c_3 - b_3c_{14}) + (b_{12}c_1 - b_1c_{12}) + 3(b_4c_8 - b_8c_4) + (b_2c_{15} - b_{15}c_2) + (b_6c_{11} - b_{11}c_6) + (b_4c_9 - b_9c_4)) \\
 &+ a_{14}^* ((b_{12}c_3 - b_3c_{12}) + (b_9c_6 - b_6c_9) + (b_{13}c_2 - b_2c_{13}) + 3(b_7c_8 - b_8c_7) + (b_4c_{11} - b_{11}c_4) + (b_1c_{14} - b_{14}c_1) - (b_5c_{10} - b_{10}c_5)) \\
 &- a_{15}^* ((b_{15}c_1 - b_1c_{15}) + (b_{12}c_2 - b_2c_{12}) + (b_{11}c_5 - b_5c_{11}) + 3(b_6c_8 - b_8c_6) + (b_7c_9 - b_9c_7) + (b_4c_{10} - b_{10}c_4) + (b_3c_{13} - b_{13}c_3))
 \end{aligned}$$

$$\text{или } f_1 = b_1(ca) - (ab)c_1 + [abc]_1.$$

Аналогично для остальных координат (без учета коэффициентов пропорциональности и знаков сложения определителей):

$$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$$

$[abc]_1$						
2,4,7	8,11,2	8,13,4	8,14,7	13,14,2	14,11,4	11,13,7
3,7,5	9,2,10	9,4,12	9,7,15	12,2,15	15,4,10	10,7,12
4,3,6	11,9,3	13,9,5	14,9,6	- 14,12,3	- 11,15,5	- 13,10,6
6,5,2	3,10,8	5,12,8	6,15,8	- 3,15,13	- 5,10,14	- 6,12,11

$$f_2=b_2(ca)-(ab)c_2+[abc]_2$$

$[abc]_2$						
4,5,3	8,14, 4	8, 15, 5	8, 9, 3	15, 9, 4	9, 14,5	14,15,3
6,3,7	10,4,12	10,5,13	10,3,11	13,4,11	11,5,12	12,3,13
5,6,1	14,10,6	15,10,7	9, 10, 1	- 9,13, 6	- 14,11,7	- 15,12,1
1,7,4	6, 12, 8	7, 13, 8	1, 11,8	- 6,11,15	- 7,12, 9	- 1,13,14

$$f_3=b_3(ca)-(ab)c_3+[abc]_3$$

$[abc]_3$						
6,1,4	8,13, 6	8, 10, 1	8 ,15, 4	10,15,6	15,13,1	13,10,4
5,4,2	11,6,14	11, 1 ,9	11,4,12	9, 6,12	12,1,14	14, 4, 9
1,5,7	13,11,5	10,11,2	15,11,7	- 15,9, 5	- 13,12,2	- 10, 14,7
7,2,6	5, 14,8	2, 9, 8	7, 12, 8	- 5,12,10	- 2,14,15	- 7, 9, 13

$$f_4=b_4(ca)-(ab)c_4+[abc]_4$$

$[abc]_4$						
5,7,6	8 ,9, 5	8, 11, 7	8, 10, 6	11,10,5	10, 9,7	9,11, 6
1,6,3	12,5,13	12,7,15	12,6,14	15,5,14	14,7,13	13,6,15
7,1,2	9, 12, 1	11,12,3	10,12,2	- 10,15,1	- 9,14, 3	- 11,13,2
2,3,5	1,13, 8	3, 15, 8	2, 14, 8	- 1,14,11	- 3,13,10	- 2, 15, 9

$$f_5=b_5(ca)-(ab)c_5+[abc]_5$$

$[abc]_5$						
7,3,1	8,10, 7	8, 14,3	8,12, 1	14,12,7	12, 10,3	10,14,1
2,1,6	13,7,15	13,3,11	13,1, 9	11, 7, 9	9, 3,15	15,1,11
3,2,4	10,13,2	14,13,6	12,13,4	- 12,11, 2	- 10, 9,6	- 14,15,4
4,6,7	2 ,15, 8	6, 11, 8	4, 9,8	- 2, 9,14	- 6, 15,12	- 4,11,10

$$f_6=b_6(ca)-(ab)c_6+[abc]_6$$

$[abc]_6$						
1,2,5	8, 15, 1	8,12, 2	8,11, 5	12,11,1	11,15,2	15,12,5
7,5,4	14,1, 9	14,2,10	14,5,13	10, 1,13	13,2, 9	9, 5, 10
2,7,3	15,14,7	12,14,4	11,14,3	- 11,10,7	- 15,13,4	- 12, 9, 3
3,4,1	7, 9, 8	4, 10, 8	3, 13,8	- 7,13,12	- 4, 9, 11	- 3,10,15

$$f_7=b_7(ca)-(ab)c_7+[abc]_7$$

$[abc]_7$						
3,6,2	8, 12, 3	8, 9, 6	8, 13, 2	9, 13, 3	13,12,6	12, 9, 2
4,2,1	15,3,11	15,6,14	15,2,10	14,3,10	10,6,11	11, 2,14
6,4,5	12,15,4	9, 15, 1	13,15,5	- 13,14,4	- 12,10,1	- 9, 11, 5
5,1,3	4, 11, 8	1, 14, 8	5, 10, 8	- 4, 10, 9	- 1,11,13	- 5,14,12

$$f_8=b_8(ca)-(ab)c_8+[abc]_8$$

$[abc]_8$						
11,13,14	14,15,9	13,10,15	9,11,10	10,14,12	15,12,11	12,9,13
3,14,5	6, 9,7	5,15,2	1,10,3	2,12,6	7,11,4	4,13,1
13,3,6	15,6,1	10,5,7	11,1,2	14,2,4	12,7,3	9, 4,5
6,5,11	1, 7,14	7,2,13	2, 3, 9	4,6,10	3,4,15	5,1,12

$$f_9=b_9(ca)-(ab)c_9+[abc]_9$$

$[abc]_9$						
10,12,15	8,10,11	8,12,13	8,15,14	5,6,10	6,3,12	3,5,15
11,15,13	1,11, 3	1,13, 5	1,14, 6	4,10,7	7,12,2	2,15,4
12,11,14	- 10,1, 2	- 12,1, 4	- 15,1, 7	- 6,4,11	- 3,7,13	- 5,2,14
14,13,10	- 2, 3, 8	- 4, 5, 8	- 7, 6, 8	- 11,7,5	- 13,2,6	- 14,4,3

$$f_{10}=b_{10}(ca)-(ab)c_{10}+[abc]_{10}$$

$[abc]_{10}$						
12,13,11	8,12,14	8,13,15	8,11, 9	7,1,12	1,6,13	6,7,11
14,11,15	2,14, 6	2, 15, 7	2, 9, 1	5,12,3	3,13,4	4,11,5
13,14, 9	- 12, 2, 4	- 13,2, 5	- 11,2, 3	- 1,5,14	- 6,3,15	- 7, 4, 9
9, 15,12	- 4, 6, 8	- 5, 7, 8	- 3, 1, 8	- 14,3,7	- 15,4,1	- 9, 5, 6

$f_{11}=b_{11}(ca)-(ab)c_{11}+[abc]_{11}$						
$[abc]_{11}$						
14, 9,12	8,14,13	8,9,10	8,12,15	2,7,14	7,5, 9	5,2,12
13,12,10	3, 13,5	3,10,2	3, 15,7	1,14,4	4,9, 6	6,12,1
9, 13,15	- 14,3,6	- 9, 3,1	- 12, 3,4	- 7,1,13	- 5,4,10	- 2,6,15
15,10,14	- 6, 5,8	- 1, 2,8	- 4, 7,8	- 13,4,2	- 10,6,7	- 15,1,5
$f_{12}=b_{12}(ca)-(ab)c_{12}+[abc]_{12}$						
$[abc]_{12}$						
13,15,14	8,13, 9	8,15,11	8,14,10	3,2,13	2,1,15	1,3,14
9, 14,11	4, 9, 1	4,11, 7	4,10, 6	7,13,6	6,15,5	5,14,7
15, 9,10	- 13,4, 5	- 15,4, 3	- 14,4, 2	- 2, 7, 9	- 1,6,11	- 3,5,10
10,11,13	- 5, 1, 8	- 3, 7, 8	- 2, 6, 8	- 9,6, 3	- 11,5,2	- 10,7,1
$f_{13}=b_{13}(ca)-(ab)c_{13}+[abc]_{13}$						
$[abc]_{13}$						
15,11, 9	8,15,10	8,11,14	8, 9,12	6,4,15	4,2,11	2,6, 9
10, 9,14	5,10, 2	5,14, 3	5,12, 1	3,15,1	1,11,7	7, 9,3
11,10,12	- 15,5, 7	- 11,5, 6	- 9, 5, 4	- 4,3,10	- 2,1,14	- 6,7,12
12,14,15	- 7, 2, 8	- 6, 3, 8	- 4, 1, 8	- 10,1,6	- 14,7,4	- 12,3,2
$f_{14}=b_{14}(ca)-(ab)c_{14}+[abc]_{14}$						
$[abc]_{14}$						
9, 10,13	8,9,15	8,10,12	8,13,11	4, 3, 9	3,7,10	7,4,13
15,13,12	6,15,7	6,12, 2	6,11, 5	2,9, 5	5,10,1	1,13,2
10,15,11	- 9, 6, 1	- 10,6, 4	- 13,6, 3	- 3,2,15	- 7,5,12	- 4,1,11
11,12, 9	- 1, 7, 8	- 4, 2, 8	- 3, 5, 8	- 15,5,4	- 12,1,3	- 11,2,7
$f_{15}=b_{15}(ca)-(ab)c_{15}+[abc]_{15}$						
$[abc]_{15}$						
11,14,10	8,11,12	8,14,9	8,10,13	1,5,11	5,4,14	4,1,10
12,10 ,9	7, 12, 4	7, 9,6	7, 13, 2	6,11,2	2,14,3	3,10,6
14,12,13	- 11, 7,3	- 14,7,1	- 10,7, 5	- 5,6,12	- 4, 2,9	- 1,3,13
13, 9,11	- 3, 4, 8	- 1, 6,8	- 5, 2, 8	- 12,2,1	- 9, 3,5	- 13,6,4

Таким образом, окончательно напомним

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где каждая компонента пятнадцатимерного вектора векторного произведения трех векторов $[abc]_i$ определяется алгебраической суммой 28 определителей третьего порядка, так что этот вектор характеризуется $(28 \cdot 15 = 420)$ определителями третьего порядка, отличающимися друг от друга. С учетом 35 определителей, используемых для векторного произведения двух векторов, получаем 455 определителей третьего порядка, как полное число сочетаний

$$C_{15}^3 = 455.$$

Последняя таблица характеризуется высокой степенью симметрии. Достаточно сказать, что каждая i -тая координата входит в неё ровно 84 раза (по 6 раз в каждой координате f_i , $(j = 1, 2, \dots, 15)$ кроме $i=j$, при этом очевидна симметрия в построении семи совокупностей из четырех определителей в каждой координате. Из этой таблицы следует также наличие четырех типов совокупностей определителей, составляющих векторное произведение трех векторов.

Сумма четырех определителей третьего порядка может образовывать определитель четвёртого порядка

$$|i,j,k,h| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k & e_h \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда $[abc]$ определяется суммой семи определителей четвертого порядка.

Это сильно упрощает запись векторного произведения трех векторов.

Так, сумма 28 определителей третьего порядка

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$+ 2,4,7 $	$+ 4,5,3 $	$+ 6,1,4 $	$+ 5,7,6 $	$+ 7,3,1 $	$+ 1,2,5 $	$+ 3,6,2 $
$+ 3,7,5 $	$+ 6,3,7 $	$+ 5,4,2 $	$+ 1,6,3 $	$+ 2,1,6 $	$+ 7,5,4 $	$+ 4,2,1 $
$+ 4,3,6 $	$+ 5,6,1 $	$+ 1,5,7 $	$+ 7,1,2 $	$+ 3,2,4 $	$+ 2,7,3 $	$+ 6,4,5 $
$+ 6,5,2 $	$+ 1,7,4 $	$+ 7,2,6 $	$+ 2,3,5 $	$+ 4,6,7 $	$+ 3,4,1 $	$+ 5,1,3 $

образует сумму семи определителей четвертого порядка

$$[abc] = |1,2,4,7| + |2,4,5,3| + |3,6,1,4| + |4,5,7,6| + |5,7,3,1| + |6,1,2,5| + |7,3,6,2|.$$

Тогда векторное произведение трех векторов образует сумма 105-ти определителей четвертого порядка:

$ 1,2,4,7 $	$ 1,8,11,2 $	$ 1,8,13,4 $	$ 1,8,14,7 $	$ 1,13,14,2 $	$ 1,14,11,4 $	$ 1,11,13,7 $
$ 2,4,5,3 $	$ 2,8,14,4 $	$ 2,8,15,5 $	$ 2,8, 9,3 $	$ 2,15, 9,4 $	$ 2, 9,14,5 $	$ 2,14,15,3 $
$ 3, ,1,4 $	$ 3,8,13,6 $	$ 3,8,10,1 $	$ 3,8, 15,4 $	$ 3,10,15,6 $	$ 3,15,13,1 $	$ 3,13,10,4 $
$ 4,5,7,6 $	$ 4,8, 9,5 $	$ 4,8, 11,7 $	$ 4,8,10, 6 $	$ 4,11,10,5 $	$ 4,10, 9,7 $	$ 4, 9,11,6 $
$ 5,7,3,1 $	$ 5,8,10,7 $	$ 5,8, 14,3 $	$ 5,8,12, 1 $	$ 5,14,12,7 $	$ 5,12,10,3 $	$ 5,10,14,1 $
$ 6,1,2,5 $	$ 6,8, 15,1 $	$ 6,8,12, 2 $	$ 6,8,11, 5 $	$ 6,12,11,1 $	$ 6,11,15,2 $	$ 6,15,12,5 $
$ 7,3,6,2 $	$ 7,8, 12, 3 $	$ 7,8, 9,6 $	$ 7,8, 13, 2 $	$ 7, 9,13, 3 $	$ 7,13,12,6 $	$ 7,12, 9,2 $
$ 8,11,13,14 $	$ 8,14,15,9 $	$ 8,13,10,15 $	$ 8,9,11,10 $	$ 8,10,14,12 $	$ 8,15,12,11 $	$ 8,12,9,13 $
$ 9, 10,12,15 $	$ 9, 10,2,1 $	$ 9, 12,4,1 $	$ 9, 15,7,1 $	$ 9, 5,6,10 $	$ 9, 6,3,12 $	$ 9, 3,5,15 $
$ 10,12,13,11 $	$ 10,12,4,2 $	$ 10,13,5,2 $	$ 10,11,3,2 $	$ 10,7,1,12 $	$ 10,1,6,13 $	$ 10,6,7,11 $
$ 11,14, 9,12 $	$ 11,14,6,3 $	$ 11, 9,1,3 $	$ 11,12,4,3 $	$ 11,2,7,14 $	$ 11,7,5, 9 $	$ 11,5,2,12 $
$ 12,13,15,14 $	$ 12,13,5,4 $	$ 12,15,7,4 $	$ 12,14,6,4 $	$ 12,3,2,13 $	$ 12,2,1,15 $	$ 12,1,3,14 $
$ 13,15,11, 9 $	$ 13,15,7,5 $	$ 13,11,3,5 $	$ 13, 9,1,5 $	$ 13,6,4,15 $	$ 13,4,2,11 $	$ 13,2,6, 9 $
$ 14,9, 10,13 $	$ 14, 9,1,6 $	$ 14,10,2,6 $	$ 14,13,5,6 $	$ 14,4, 3, 9 $	$ 14,3,7,10 $	$ 14,7,4,13 $
$ 15,11,14,10 $	$ 15,11,3,7 $	$ 15, 14,6,7 $	$ 15,10,2,7 $	$ 15,1,5,11 $	$ 15,5,4,14 $	$ 15,4,1,10 $

строго фиксируемого состава. Очевидно, что векторное произведение образуют семь определителей верхнего левого угла. Очевидна также симметрия построения таблицы:

- во-первых – по всем 28-ми рядам четко соблюдаются найденные выше подстановки индексов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10

- во-вторых – все 28 столбиков включают по 15 определителей с двумя семиэлементными и одной одноэлементной структурами;

- в-третьих – все координаты входят в таблицу ровно 28 раз. В результате векторное произведение трёх векторов определяется суммой 105-ти не повторяющихся определителей 4-го порядка и может рассматриваться как совокупность $420=28 \cdot 15$ трехмерных пространств.

Равенства

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]$$

или

$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc]$$

указывают на то, что 15-ти мерная алгебра не является алгеброй Ли. Можно показать, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

- векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль.

Векторным произведением $[abc]$ трех векторов a , b и c можно назвать вектор

$$[abc]=[a_i e_i b_j e_j c_k e_k]=a_i b_j c_k [e_i e_j e_k]=\sigma_{ijk}^k a_i b_j c_k e_k,$$

определяемый совершенно антисимметричным единичным 15-тензором третьего ранга σ^{ijk} , компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметричности следует, что все компоненты 15-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличные от нуля лишь те, у которых все три индекса различны, так что вектор $[abc]$ определяется суммой 420-ти определителей третьего порядка.

Подчеркнем, что подстановки на множестве индексов $(1,2,...,15)$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя, например, при указанной подстановке индексов:

3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13

т. е. последовательности индексов преобразуются в иные последовательности индексов той же системы. Подчеркнем еще раз, что

- в *трехмерном* случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c,$$

и

$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=0,$$

- в *семимерном* случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

и

$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc],$$

- в *пятнадцатимерном* случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

и

$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc],$$

причем вектор **[abc]** сохраняет соответствующие свойства у 3-х, 7-ми и 15-ти мерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр для совокупностей из (2,3,...,7) векторов, представленных в векторной форме записи. Координатная форма записи при этом кардинально видоизменяется, однако свойства алгебр от этого не зависят, т.е. векторные соотношения семи- и пятнадцатимерной алгебр совпадают при рассмотрении произведений векторов от двух до семи. Вместе с тем, произведения векторов от восьми до пятнадцати имеют место лишь в пятнадцатимерной алгебре, только 16-ый вектор в пятнадцатимерной алгебре раскладывается по пятнадцати векторам.

Уже найдены векторные алгебры, соответствующие 31-ой, 63-ём, 127-ми, 255-ти, 511-ти, 1023-м координатам. 2^n -1-мерные векторные алгебры расширяются вплоть до бесконечномерных алгебр. Следовательно, стоит ребром вопрос о размерности физического пространства, поскольку трехмерная векторная алгебра определила в XIX веке название трехмерной теоретической физики. **<<Физическое пространство не имеет размерности>>.** Оно лишь отражает ту или иную степень симметрии выражений, используемых для описания явлений.

Более симметричны алгебры высокой размерности, алгебры меньшей размерности могут рассматриваться, как та или иная степень нарушения симметрии и являются их частным случаем.

Приведём таблицу структуры многомерных алгебр, отметив высокую интенсивность увеличения числа составляющих их трехмерных пространств.

$x_{n+1}=2*x_n+1$	$[ab], z_{n+1}=4*z_n+x_n$	$[abc]_i, y_{n+1}=4*z_n$	$[abc], x_n*y_n$	$C_n^3 = x_n*y_n+z_n$
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
7	7	4	28	35
15	35	28	420	455
31	155	140	4340	4495
63	651	620	39060	39711
127	2667	2604	330708	333375
255	10795	10668	2720340	2731135
511	43435	43180	22064980	22108415
1023	174251	173740	177736020	177910271

Важным свойством векторных алгебр является то, что их размерность часто совпадает с рядом простых чисел Мерсенна, соответствующих совершенным числам, и, следовательно, по крайней мере, отдельные векторные алгебры имеют прямое отношение к совершенным числам. Так, например, сумма индексов систем подстановки индексов зачастую определяется совершенным числом:

-в трехмерной алгебре:

1	2	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
6	6	6	Σ

-в семимерной алгебре:

1	2	3	4	5	6	7	28
2	4	6	5	7	1	3	28
3	6	5	1	2	7	4	28
4	5	1	7	3	2	6	28
5	7	2	3	6	4	1	28
6	1	7	2	4	3	5	28
7	3	4	6	1	5	2	28
28	28	28	28	28	28	28	Σ

-в 15-мерной алгебре, однако, размерность – составное число; в результате:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	120
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11	120
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12	120
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14	120
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9	120
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13	120
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10	120
28	28	28	28	28	28	28	56	84	84	84	84	84	84	84	Σ

причем таблица векторного произведения двух векторов:

1	2 3	4 5	7 6	8 9	11 10	13 12	14 15	120
2	4 6	5 7	3 1	8 10	14 12	15 13	9 11	120
3	6 5	1 2	4 7	8 11	13 14	10 9	15 12	120
4	5 1	7 3	6 2	8 12	9 13	11 15	10 14	120
5	7 2	3 6	1 4	8 13	10 15	14 11	12 9	120
6	1 7	2 4	5 3	8 14	15 9	12 10	11 13	120
7	3 4	6 1	2 5	8 15	12 11	9 14	13 10	120
8	9 1	10 2	11 3	12 4	13 5	14 6	15 7	120
9	3 10	5 12	6 15	1 8	11 2	13 4	14 7	120
10	6 12	7 13	1 11	2 8	14 4	15 5	9 3	120
11	5 14	2 9	7 12	3 8	13 6	10 1	15 4	120
12	1 13	3 15	2 14	4 8	9 5	11 7	10 6	120
13	2 15	6 11	4 9	5 8	10 7	14 3	12 1	120
14	7 9	4 10	3 13	6 8	15 1	12 2	11 5	120
15	4 11	1 14	5 10	7 8	12 3	9 6	13 2	120

Совершенные числа $s_n=2^{n-1}(2^n-1)$ можно определять по совпадению простых чисел натурального ряда чисел n и простых чисел ряда $m_n=2^n-1$, причем для упрощения вычислений этому ряду следует сопоставить рекуррентное соотношение $m_{n+1}=2m_n+1$. Оказывается, что совершенные числа также можно найти, используя укороченный ряд чисел $k_{n+1}=4k_n+3$. В этом случае $k_n=s_n+m_{n-1}$ и, следовательно,

$$s_n = k_n - m_{n-1},$$

что определяется таблицей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431

Указанный порядок нахождения размерности векторных алгебр и совершенных чисел относительно прост, поскольку ряд k является

чересстрочной разверткой ряда m , где последовательно используются операции умножения и сложения с целыми числами. Совершенные числа отвечают простым числам рядов чисел m и натуральных чисел в одном и том же столбце. Сдвигом влево на одну позицию рядов s и k получим эту таблицу в удобной форме записи.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
s	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336	134209536
k	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431	134217727

Здесь простые числа Мерсенна сдвинуты на один шаг относительно совершенных чисел, так что совершенные числа определяются простым числом из двух соседних значений ряда чисел m :

$$s_n = k_n - m_n, \quad k_n = m_{n+1} * (m_n + 1) + m_n, \quad s_n = m_{n+1} * (m_n + 1).$$

Так:

$$\begin{aligned} 6 &= 3 * 2 \\ 28 &= 7 * 4 \\ 496 &= 31 * 16 \\ 8128 &= 127 * 64 \\ 33550336 &= 8191 * 4096 \\ &\dots \end{aligned}$$

Достаточно знать простые числа Мерсенна, чтобы найти совершенные числа. Тот же ряд чисел определяет размерность векторных алгебр. Она определяется тем же рекуррентным соотношением, так что

$$x_{n+1} = 2 * x_n + 1.$$

Литература

1. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244с.
2. Коротков А. В. Пятнадцати мерная векторная алгебра// Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во "НОК", 2011. 36с.
3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во "НОК", 2011. 36с.

КОРОТКОВ А.В.

ЭЛЕМЕНТЫ 31-МЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в начале девяностых годов XX –го столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчисления [1, 2].

В последнее время получены серьезные результаты в отношении пятнадцатимерной векторной алгебры [3], в частности, найдены векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведение трех векторов. Получено векторное произведение трех векторов. Оказывается, что пятнадцатимерная алгебра повторяет многие свойства трехмерной и семимерной алгебр в векторной форме записи при кардинальном отличии координатных форм записи. Это создает предпосылки для использования однотипных векторных соотношений. Так, например,

- в *трехмерном* случае

$$\begin{aligned} &[a[bc]] = b(ca) - (ab)c, \\ \text{и} \quad &[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 0, \end{aligned}$$

- в *семимерном* случае

$$\begin{aligned} &[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc], \\ \text{и} \quad &[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 3[abc], \end{aligned}$$

- в *пятнадцатимерном* случае

$$\begin{aligned} &[a[bc]] = b(ca) - (ab)c + [abc], \\ \text{и} \quad &[a[bc]] + [b[ca]] + [c[ab]] = 3[abc], \end{aligned}$$

т.е. вектор $[abc]$ сохраняет соответствующие свойства у семимерной и пятнадцатимерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семимерной и пятнадцатимерной алгебр, представленных в векторной форме записи.

Существенное отличие семимерной и пятнадцатимерной алгебр появляется лишь в случае рассмотрения произведений восьми или более векторов, когда произведения векторов семимерной алгебры обращаются в нуль. Вторым существенным отличием пятнадцатимерной алгебры от семимерной и трехмерной заключается в том, что восьмая координата получает привилегированное (не однородное) значение, так что таблицы подстановок индексов рассматриваются не как последовательности

пятнадцати координат, а как совокупность двух последовательностей из семи координат и одной последовательности с восьмой координатой. В результате, например, векторное произведение двух векторов распадается на пять не однородных совокупностей из семи векторов. Это можно рассматривать как разложение пятнадцатимерного пространства на совокупность пяти семимерных или **тридцати пяти трехмерных** не однородных пространств. Необходимо отметить, что *векторные алгебры большей размерности включают алгебры меньшей размерности, как подалгебры*. Это приводит к тому, что векторные алгебры с размерностью большей пятнадцати также раскладываются на совокупности трехмерных алгебр. Отметим, что векторное произведение двух векторов семимерной алгебры состоит, однако, из семи векторных произведений двух векторов однородных трехмерных алгебр. Однородность в пятнадцатимерной алгебре отсутствует. Таким образом, все возможные 2^n-1 -мерные векторные алгебры являются комбинацией не однородных трехмерных векторных алгебр. Из этого следует вывод, что **2^n-1 -мерные ($n>3$) алгебры являются совокупностями трехмерных не однородных алгебр.**

Векторное произведение двух векторов в трехмерной алгебре определяется с помощью одного определителя третьего порядка, в семимерной алгебре – с помощью семи определителей третьего порядка, в пятнадцатимерной алгебре – с помощью 35 определителей третьего порядка. Попытаемся отыскать векторное произведение двух векторов 31-одномерной алгебры в расчете на определение его как совокупности трехмерных векторных произведений двух векторов. Рассмотрим в связи с этим порядок получения 31-одномерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел. Эта процедура позволяет получить из алгебры одномерных чисел комплексные числа, кватернионы и октонионы, замыкающие цепочку гиперкомплексных чисел с делением. Векторным алгебрам, однако, в принципе не свойственно наличие операции деления и получения обратных величин, поэтому замечательный результат ограниченности числа гиперкомплексных чисел с делением четырьмя типами чисел не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Так, ранее была получена [3] пятнадцатимерная векторная алгебра, векторное произведение двух векторов в которой распадается на совокупность 35-ти определителей третьего порядка, что можно рассматривать как совокупность 35-ти трехмерных пространств. Одной из особенностей 7-ми, 15-ти, 31-ой и вообще $2n-1$ - мерных векторных алгебр является, в частности, наличие операции векторного произведения трех векторов.

Применим в начале процедуру удвоения [1; 3] к 8-ми мерным гиперкомплексным числам и запишем векторное произведение двух векторов. При этом произведением двух пар восьмимерных чисел $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ назовем пару

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е.

$$\mathbf{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операции умножения двух пар 8-ми мерных чисел **ab** и далее двух 15ти-мерных векторов могут быть представлены таблицей, приведенной на альбомном листе. Здесь **ab**-произведение двух шестнадцати мерных чисел, дающее в результате скалярное (**ab**), а также векторное [**ab**] произведения двух векторных 15-ти мерных величин. При этом определяется произведение двух векторных величин с пятнадцатью значащими координатами.

В результате скалярное и векторное произведения двух векторов имеют вид, представленный на альбомном листе. Здесь a_i – i-ая координата пятнадцатимерного вектора, b_j – j- ая координата пятнадцатимерного вектора **b**. Каждая из пятнадцати координат векторного произведения двух векторов состоит из пятнадцати по-парных произведений величин a_i и b_j связанных между собой алгебраической суммой. Таким образом, векторное произведение двух векторов можно получить применением процедуры удвоения.

Эта процедура в применении к тридцатиодномерной алгебре позволяет привести таблицу 1. В таблице 1, первый столбик выделен жирным шрифтом и соответствует немоу индексу i при координате a_i , второй столбик – соответствует немоу индексу j при координате b_j . Произведениям $a_i * b_j$ соответствует пара соседних столбиков. Четверки столбиков формируют величины коммутаторов $a_i * b_j - b_i * a_j$. Пятнадцать коммутаторов, суммируемые построчно, представляют одну из координат векторного произведения двух тридцатиодномерных векторов. В результате, в этой таблице отражается как скалярное (верхняя строчка), так и векторное произведение двух тридцатиодномерных векторов (остальные – тридцать одна строчка). Все пары значений $a_i * b_j$ суммируются построчно, так что образуется 30 слагаемых, составленных из произведений и последующих алгебраических сумм пар значений координат (билинейных уравнений) в каждой из 31 строки. Произведения величин с индексом нуль суммируются для получения скалярного произведения двух векторов, определяемого первой строкой таблицы 1. Отметим, что суммарное число отрицательных знаков в таблице 1 равно совершенному числу $496=16*31$.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде:

$$[ab] = [(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{31} e_{31})(b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_{31} e_{31})],$$

определяющем суммы 15 коммутаторов вида $[a_i * b_j] = a_i * b_j - a_j * b_i$ в каждой из 31-ой координат, т.е. $31*15=465$ величин $[a_i * b_j]$ (таблица 2).

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 155 определителей (таблица 3) третьего порядка.

$ab=a_0b_0$	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_6b_6$	$+a_7b_5$	$-a_8b_7$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_{12}$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

$(ab)=$

- -

$[ab]=$

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_{12}$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

Таблица 1.

0 0 -1 1	-2 2 -3 3	-4 4 -5 5	-6 6 -7 7	-8 8 -9 9	-10 10 -11 11	-12 12 -13 13	-14 14 -15 15
0 1 1 0	3 2 -2 3	5 4 -4 5	6 7 -7 6	9 8 -8 9	10 11 -11 10	12 13 -13 12	15 14 -14 15
0 2 1 3	2 0 -3 1	6 4 7 5	-4 6 -5 7	10 8 11 9	-8 10 -9 11	12 14 13 15	-14 12 -15 13
0 3 -1 2	3 0 2 1	7 4 -6 5	-4 7 5 6	11 8 -10 9	-8 11 9 10	12 15 -13 14	-15 12 14 13
0 4 1 5	2 6 3 7	4 0 -5 1	-6 2 -7 3	12 8 13 9	14 10 15 11	-8 12 -9 13	-10 14 -11 15
0 5 -1 4	-3 6 2 7	5 0 4 1	6 3 -7 2	13 8 -12 9	-14 11 15 10	-8 13 9 12	11 14 -10 15
0 6 -1 7	-2 4 3 5	6 0 7 1	4 2 -5 3	14 8 -15 9	-12 10 13 11	-8 14 9 15	10 12 -11 13
0 7 1 6	-3 4 -2 5	7 0 -6 1	4 3 5 2	15 8 14 9	-12 11 -13 10	-8 15 -9 14	11 12 10 13
0 8 1 9	2 10 3 11	4 12 5 13	6 14 7 15	8 0 -9 1	-10 2 -11 3	-12 4 -13 5	-14 6 -15 7
0 9 -1 8	-3 10 2 11	-5 12 4 13	-6 15 7 14	9 0 8 1	10 3 -11 2	12 5 -13 4	15 6 -14 7
0 10 -1 11	-2 8 3 9	-6 12 -7 13	4 14 5 15	10 0 11 1	8 2 -9 3	12 6 13 7	-14 4 -15 5
0 11 1 10	-3 8 -2 9	-7 12 6 13	4 15 -5 14	11 0 -10 1	8 3 9 2	12 7 -13 6	-15 4 14 5
0 12 -1 13	-2 14 -3 15	-4 8 5 9	6 10 7 11	12 0 13 1	14 2 15 3	8 4 -9 5	-10 6 -11 7
0 13 1 12	3 14 -2 15	-5 8 -4 9	-6 11 7 10	13 0 -12 1	-14 3 15 2	8 5 9 4	11 6 -10 7
0 14 1 15	2 12 -3 13	-6 8 -7 9	-4 10 5 11	14 0 -15 1	-12 2 13 3	8 6 9 7	10 4 -11 5
0 15 -1 14	3 12 2 13	-7 8 6 9	-4 11 -5 10	15 0 14 1	-12 3 -13 2	8 7 -9 6	11 4 10 5
0 16 1 17	2 18 3 19	4 20 5 21	6 22 7 23	8 24 9 25	10 26 11 27	12 28 13 29	14 30 15 31
0 17 -1 16	-3 18 2 19	-5 20 4 21	-6 23 7 22	9 24 8 25	-10 27 11 26	-12 29 13 28	-15 30 14 31
0 18 -1 19	-2 16 3 17	-6 20 -7 21	4 22 5 23	10 24 -11 25	8 26 9 27	-12 30 -13 31	14 28 15 29
0 19 1 18	-3 16 -2 17	-7 20 6 21	4 23 -5 22	11 24 10 25	8 27 -9 26	-12 31 13 30	15 28 -14 29
0 20 -1 21	-2 22 -3 23	-4 16 5 17	6 18 7 19	12 24 -13 25	-14 26 -15 27	8 28 9 29	10 30 11 31
0 21 1 20	3 22 -2 23	-5 16 -4 17	-6 19 7 18	13 24 12 25	14 27 -15 26	8 29 -9 28	-11 30 10 31
0 22 1 23	2 20 -3 21	-6 16 -7 17	-4 18 5 19	14 24 15 25	12 26 -13 27	8 30 -9 31	-10 28 11 29
0 23 -1 22	3 20 2 21	-7 16 6 17	-4 19 -5 18	15 24 -14 25	12 27 13 26	8 31 9 30	-11 28 -10 29
0 24 -1 25	-2 26 -3 27	-4 28 -5 29	-6 30 -7 31	-8 16 9 17	10 18 11 19	12 20 13 21	14 22 15 23
0 25 1 24	3 26 -2 27	5 28 -4 29	6 31 -7 30	-9 16 -8 17	-10 19 11 18	-12 21 13 20	-15 22 14 23
0 26 1 27	2 24 -3 25	6 28 7 29	-4 30 -5 31	-10 16 -11 17	-8 18 9 19	-12 22 -13 23	14 20 15 21
0 27 -1 26	3 24 2 25	7 28 -6 29	-4 31 5 30	-11 16 10 17	-8 19 -9 18	-12 23 13 22	15 20 -14 21
0 28 1 29	2 30 3 31	4 24 -5 25	-6 26 -7 27	-12 16 -13 17	-14 18 -15 19	-8 20 9 21	10 22 11 23
0 29 -1 28	-3 30 2 31	5 24 4 25	6 27 -7 26	-13 16 12 17	14 19 -15 18	-8 21 -9 20	-11 22 10 23
0 30 -1 31	-2 28 3 29	6 24 7 25	4 26 -5 27	-14 16 15 17	12 18 -13 19	-8 22 -9 23	-10 20 11 21
0 31 1 30	-3 28 -2 29	7 24 -6 25	4 27 5 26	-15 16 -14 17	12 19 13 18	-8 23 9 22	-11 20 -10 21

-16 16 -17 17	-18 18 -19 19	-20 20 -21 21	-22 22 -23 23	-24 24 -25 25	-26 26 -27 27	-28 28 -29 29	-30 30 -31 31
17 16 -16 17	18 19 -19 18	20 21 -21 20	23 22 -22 23	24 25 -25 24	27 26 -26 27	29 28 -28 29	30 31 -31 30
18 16 19 17	-16 18 -17 19	20 22 21 23	-22 20 -23 21	24 26 25 27	-26 24 -27 25	30 28 31 29	-28 30 -29 31
19 16 -18 17	-16 19 17 18	20 23 -21 22	-23 20 22 21	24 27 -25 26	-27 24 26 25	31 28 -30 29	-28 31 29 30
20 16 21 17	22 18 23 19	-16 20 -17 21	-18 22 -19 23	24 28 25 29	26 30 27 31	-28 24 -29 25	-30 26 -31 27
21 16 -20 17	-22 19 23 18	-16 21 17 20	19 22 -18 23	24 29 -25 28	-27 30 26 31	-29 24 28 25	30 27 -31 26
22 16 -23 17	-20 18 21 19	-16 22 17 23	18 20 -19 21	24 30 -25 31	-26 28 27 29	-30 24 31 25	28 26 -29 27
23 16 22 17	-20 19 -21 18	-16 23 -17 22	19 20 18 21	24 31 -25 30	-27 28 -26 29	-31 24 -30 25	28 27 29 26
24 16 25 17	26 18 27 19	28 20 29 21	30 22 31 23	-16 24 -17 25	-18 26 -19 27	-20 28 -21 29	-22 30 -23 31
25 16 -24 17	-26 19 27 18	-28 21 29 20	-31 22 30 23	-16 25 17 24	19 26 -18 27	21 28 -20 29	22 31 -23 30
26 16 -27 17	-24 18 25 19	-28 22 -29 23	30 20 31 21	-16 26 17 27	18 24 -19 25	22 28 23 29	-20 30 -21 31
27 16 26 17	-24 19 -25 18	-28 23 29 22	31 20 -30 21	-16 27 -17 26	19 24 18 25	23 28 -22 29	-20 31 21 30
28 16 -29 17	-30 18 -31 19	-24 20 25 21	26 22 27 23	-16 28 17 29	18 30 19 31	20 24 -21 25	-22 26 -23 27
29 16 28 17	30 19 -31 18	-24 21 -25 20	-27 22 26 23	-16 29 -17 28	-19 30 18 31	21 24 20 25	22 27 -23 26
30 16 31 17	28 18 -29 19	-24 22 -25 23	-26 20 27 21	-16 30 -17 31	-18 28 19 29	22 24 23 25	20 26 -21 27
31 16 -30 17	28 19 29 18	-24 23 25 22	-27 20 -26 21	-16 31 17 30	-19 28 -18 29	23 24 -22 25	20 27 21 26
16 0 -17 1	-18 2 -19 3	-20 4 -21 5	-22 6 -23 7	-24 8 -25 9	-26 10 -27 11	-28 12 -29 13	-30 14 -31 15
17 0 16 1	18 3 -19 2	20 5 -21 4	23 6 -22 5	-24 9 -25 8	27 10 -26 11	29 12 -28 13	30 15 -31 14
18 0 19 1	16 2 -17 3	20 6 21 7	-22 4 -23 5	-24 10 25 11	-26 8 -27 9	30 12 31 13	-28 14 -29 15
19 0 -18 1	16 3 17 2	20 7 -21 6	-23 4 22 5	-24 11 -25 10	-27 8 26 9	31 12 -30 13	-28 15 29 14
20 0 21 1	22 2 23 3	16 4 -17 5	-18 6 -19 7	-24 12 25 13	26 14 27 15	-28 8 -29 9	-30 10 -31 11
21 0 -20 1	-22 3 23 2	16 5 17 4	19 6 -18 7	-24 13 -25 12	-27 14 26 15	-29 8 28 9	30 11 -31 10
22 0 -23 1	-20 2 21 3	16 6 17 7	18 4 -19 5	-24 14 -25 15	-26 12 27 13	-30 8 31 9	28 10 -29 11
23 0 22 1	-20 3 -21 2	16 7 -17 6	19 4 18 5	-24 15 25 14	-27 12 -26 13	-31 8 -30 9	28 11 29 10
24 0 25 1	26 2 27 3	28 4 29 5	30 6 31 7	16 8 -17 9	-18 10 -19 11	-20 12 -21 13	-22 14 -23 15
25 0 -24 1	-26 3 27 2	-28 5 29 4	-31 6 30 7	16 9 17 8	19 10 -18 11	21 12 -20 13	22 15 -23 14
26 0 -27 1	-24 2 25 3	-28 6 -29 7	30 4 31 5	16 10 17 11	18 8 -19 9	22 12 23 13	-20 14 -21 15
27 0 26 1	-24 3 -25 2	-28 7 29 6	31 4 -30 5	16 11 -17 10	19 8 18 9	23 12 -22 13	-20 15 21 14
28 0 -29 1	-30 2 -31 3	-24 4 25 5	26 6 27 7	16 12 17 13	18 14 19 15	20 8 -21 9	-22 10 -23 11
29 0 28 1	30 3 -31 2	-24 5 -25 4	-27 6 26 7	16 13 -17 12	-19 14 18 15	21 8 20 9	22 11 -23 10
30 0 31 1	28 2 -29 3	-24 6 -25 7	-26 4 27 5	16 14 -17 15	-18 12 19 13	22 8 23 9	20 10 -21 11
31 0 -30 1	28 3 29 2	-24 7 25 6	-27 4 -26 5	16 15 17 14	-19 12 -18 13	23 8 -22 9	20 11 21 10

Таблица 2.

1	2, 3	4, 5	7, 6	8, 9	11,10	13,12	14,15	16,17	19,18	21,20	22,23	25,24	26,27	28,29	31,30
2	4, 6	5, 7	3, 1	8, 10	14,12	15,13	9, 11	16,18	22,20	23,21	17,19	26,24	28,30	29,31	27,25
3	6, 5	1, 2	4, 7	8, 11	13,14	10, 9	15,12	16,19	21,22	18,17	23,20	27,24	30,29	25,26	28,31
4	5, 1	7, 3	6, 2	8, 12	9, 13	11,15	10,14	16,20	17,21	19,23	18,22	28,24	29,25	31,27	30,26
5	7, 2	3, 6	1, 4	8, 13	10,15	14,11	12, 9	16,21	18,23	22,19	20,17	29,24	31,26	27,30	25,28
6	1, 7	2, 4	5, 3	8, 14	15, 9	12,10	11,13	16,22	23,17	20,18	19,21	30,24	25,31	26,28	29,27
7	3, 4	6, 1	2, 5	8, 15	12,11	9, 14	13,10	16,23	20,19	17,22	21,18	31,24	27,28	30,25	26,29
8	9, 1	10, 2	11, 3	12, 4	13, 5	14, 6	15, 7	16,24	17,25	18,26	19,27	20,28	21,29	22,30	23,31
9	11, 2	13, 4	14, 7	1, 8	3, 10	5, 12	6, 15	16,25	18,27	20,29	23,30	24,17	26,19	28,21	31,22
10	14, 4	15, 5	9, 3	2, 8	6, 12	7, 13	1, 11	16,26	20,30	21,31	19,25	24,18	28,22	29,23	27,17
11	13, 6	10, 1	15, 4	3, 8	5, 14	2, 9	7, 12	16,27	22,29	17,26	20,31	24,19	30,21	25,18	28,23
12	9, 5	11, 7	10, 6	4, 8	1, 13	3, 15	2, 14	16,28	21,25	23,27	22,26	24,20	29,17	31,19	30,18
13	10, 7	14, 3	12, 1	5, 8	2, 15	6, 11	4, 9	16,29	23,26	19,30	17,28	24,21	31,18	27,22	25,20
14	15, 1	12, 2	11, 5	6, 8	7, 9	4, 10	3, 13	16,30	17,31	18,28	21,27	24,22	25,23	26,20	29,19
15	12, 3	9, 6	13, 2	7, 8	4, 11	1, 14	5, 10	16,31	19,28	22,25	18,29	24,23	27,20	30,17	26,21
16	17, 1	18, 2	19, 3	20, 4	21, 5	22, 6	23, 7	24, 8	25, 9	26,10	27,11	28,12	29,13	30,14	31,15
17	19, 2	21, 4	22, 7	25, 8	10,27	12,29	15,30	1, 16	3, 18	5, 20	6, 23	9, 24	26,11	28,13	31,14
18	22, 4	23, 5	17, 3	26, 8	12,30	13,31	11,25	2, 16	6, 20	7, 21	1, 19	10,24	28,14	29,15	27, 9
19	21, 6	18, 1	23, 4	27, 8	14,29	9, 26	12,31	3, 16	5, 22	2, 17	7, 20	11,24	30,13	25,10	28,15
20	17, 5	19, 7	18, 6	28, 8	13,25	15,27	14,26	4, 16	1, 21	3, 23	2, 22	12,24	29, 9	31,11	30,10
21	18, 7	22, 3	20, 1	29, 8	15,26	11,30	9, 28	5, 16	2, 23	6, 19	4, 17	13,24	31,10	27,14	25,12
22	23, 1	20, 2	19, 5	30, 8	9, 31	10,28	13,27	6, 16	7, 17	4, 18	3, 21	14,24	25,15	26,12	29,11
23	20, 3	17, 6	21, 2	31, 8	11,28	14,25	10,29	7, 16	4, 19	1, 22	5, 18	15,24	27,12	30, 9	26,13
24	1, 25	2, 26	3, 27	4, 28	5, 29	6, 30	7, 31	8, 16	17, 9	18,10	19,11	20,12	21,13	22,14	23,15
25	2, 27	4, 29	7, 30	8, 17	10,19	12,21	15,22	9, 16	18,11	20,13	23,14	24, 1	26, 3	28, 5	31, 6
26	4, 30	5, 31	3, 25	8, 18	12,22	13,23	11,17	10,16	20,14	21,15	19, 9	24, 2	28, 6	29, 7	27, 1
27	6, 29	1, 26	4, 31	8, 19	14,21	9, 18	12,23	11,16	22,13	17,10	20,15	24, 3	30, 5	25, 2	28, 7
28	5, 25	7, 27	6, 26	8, 20	13,17	15,19	14,18	12,16	21, 9	23,11	22,10	24, 4	29, 1	31, 3	30, 2
29	7, 26	3, 30	1, 28	8, 21	15,18	11,22	9, 20	13,16	23,10	19,14	17,12	24, 5	31, 2	27, 6	25, 4
30	1, 31	2, 28	5, 27	8, 22	9, 23	10,20	13,19	14,16	17,15	18,12	21,11	24, 6	25, 7	26, 4	29, 3
31	3, 28	6, 25	2, 29	8, 23	11,20	14,17	10,21	15,16	19,12	22, 9	18,13	24, 7	27, 4	30, 1	26, 5

Таблица 3.

1	2,3	...	...	8, 9	11,10	13,12	14,15	16,17	19,18	21,20	22,23	24,25	27,26	29,28	30,31
2	4,6			8,10	14,12	15,13	9, 11	16,18	22,20	23,21	17,19	24,26	30,28	31,29	25,27
3	6,5	...	...	8,11	13,14	10, 9	15,12	16,19	21,22	18,17	23,20	24,27	29,30	26,25	31,28
4	5,1			8,12	9, 13	11,15	10,14	16,20	17,21	19,23	18,22	24,28	25,29	27,31	26,30
5	7,2	...	...	8,13	10,15	14,11	12, 9	16,21	18,23	22,19	20,17	24,29	26,31	30,27	28,25
6	1,7			8,14	15, 9	12,10	11,13	16,22	23,17	20,18	19,21	24,30	31,25	28,26	27,29
7	3,4	...	...	8,15	12,11	9, 14	13,10	16,23	20,19	17,22	21,18	24,31	28,27	25,30	29,26
8	...	...	...	...	...	...	...	16,24	17,25	18,26	19,27	20,28	21,29	22,30	23,31
9								16,25	18,27	20,29	23,30	17,24	26,19	28,21	31,22
10	...	...	...	...	...	...	...	16,26	20,30	21,31	19,25	18,24	28,22	29,23	27,17
11								16,27	22,29	17,26	20,31	19,24	30,21	25,18	28,23
12	...	...	...	...	...	...	...	16,28	21,25	23,27	22,26	20,24	29,17	31,19	30,18
13								16,29	23,26	19,30	17,28	21,24	31,18	27,22	25,20
14	...	...	...	...	...	...	...	16,30	17,31	18,28	21,27	22,24	25,23	26,20	29,19
15								16,31	19,28	22,25	18,29	23,24	27,20	30,17	26,21

Таблица 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11	16	18	20	22	21	23	17	19	24	26	28	30	29	31	25	27
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12	16	19	22	21	17	18	23	20	24	27	30	29	25	26	31	28
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14	16	20	21	17	23	19	18	22	24	28	29	25	31	27	26	30
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9	16	21	23	18	19	22	20	17	24	29	31	25	27	30	28	25
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13	16	22	17	23	18	20	19	21	24	30	25	31	26	28	27	29
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10	16	23	19	20	22	17	21	18	24	31	27	28	30	25	29	26

Таблица 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-3	2	-5	4	7	-6	-9	8	11	-10	13	-12	-15	14	-17	16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30
2	3	0	-1	-6	-7	4	5	-10	-11	8	9	14	15	-12	-13	-18	-19	16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29
3	-2	1	0	-7	6	-5	4	-11	10	-9	8	15	-14	13	-12	-19	18	-17	16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28
4	5	6	7	0	-1	-2	-3	-12	-13	-14	-15	8	9	10	11	-20	-21	-22	-23	16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27
5	-4	7	-6	1	0	3	-2	-13	12	-15	14	-9	8	-11	10	-21	20	-23	22	-17	16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26
6	-7	-4	5	2	-3	0	1	-14	15	12	-13	-10	11	8	-9	-22	23	20	-21	-18	19	16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25
7	6	-5	-4	3	2	-1	0	-15	-14	13	12	-11	-10	9	8	-23	-22	21	20	-19	-18	17	16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	16	17	18	19	20	21	22	23
9	-8	11	-10	13	-12	-15	14	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	-25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	16	-19	18	-21	20	23	-22
10	-11	-8	9	14	15	-12	-13	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	-26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	16	-17	-22	-23	20	21
11	10	-9	-8	15	-14	13	-12	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	-27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	16	-23	-22	-21	20
12	-13	-14	-15	-8	9	10	11	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	-28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	16	-17	-18	-19
13	12	-15	14	-9	-8	-11	10	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	-29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	16	19	-18
14	15	12	-13	-10	11	-8	-9	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	-30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	16	17
15	-14	13	12	-11	-10	9	-8	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	-31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15
17	-16	19	-18	21	-20	-23	22	25	-24	-27	26	-29	28	31	-30	1	0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
18	-19	-16	17	22	23	-20	-21	26	27	-24	-25	-30	-31	28	29	2	-3	0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
19	18	-17	-16	23	-22	21	-20	27	-26	25	-24	-31	30	-29	28	3	2	-1	0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
20	-21	-22	-23	-16	17	18	19	28	29	30	31	-24	-25	-26	-27	4	-5	-6	-7	0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
21	20	-23	22	-17	-16	-19	18	29	-28	31	-30	25	-24	27	-26	5	4	-7	6	-1	0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
22	23	20	-21	-18	19	-16	-17	30	-31	-28	29	26	-27	-24	25	6	7	4	-5	-2	3	0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
23	-22	21	20	-19	-18	17	-16	31	30	-29	-28	27	26	-25	-24	7	-6	5	4	-3	-2	1	0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
24	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-16	17	18	19	20	21	22	23	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	0	1	2	3	4	5	6	7
25	24	-27	26	-29	28	31	-30	-17	-16	-19	18	-21	20	23	-22	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	0	-3	2	-5	4	7	-6
26	27	24	-25	-30	-31	28	29	-18	19	-16	-17	-22	-23	20	21	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	0	-1	-6	-7	4	5
27	-26	25	24	-31	30	-29	28	-19	-18	17	-16	-23	22	-21	20	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	0	-7	6	-5	4
28	29	30	31	24	-25	-26	-27	-20	21	22	23	-16	-17	-18	-19	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	0	-1	-2	-3
29	-28	31	-30	25	24	27	-26	-21	-20	23	-22	17	-16	19	-18	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	0	3	-2
30	-31	-28	29	26	-27	24	25	-22	-23	-20	21	18	-19	-16	17	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	0	1
31	30	-29	-28	27	26	-25	24	-23	22	-21	-20	19	18	-17	-16	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	0

Таблица 6.

-iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
17	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	
21	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1	
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1	
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1	
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	
29	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0	1	-1	
30	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Таблица 3 явно определяет векторное произведение двух векторов трехмерной (верхний левый определитель), семимерной (верхний левый блок из семи определителей) и пятнадцатимерной (пять верхних левых блоков) алгебр. При этом 3-х мерная, 7-ми мерная и 15-ти мерная алгебры являются, очевидно, частным случаем 31-мерной алгебры, которая определяется всей таблицей 3 (все 22 блока).

Отметим, что для тридцатиодномерной алгебры имеют место подстановки индексов, приведенные в таблице 4. Это существенно облегчает запись формул, представленных в форме немых индексов. Очевидно, что три последних блока таблицы подстановок индексов соответствуют сдвигу индексов на число, кратное числу восемь. При этом 8-я, 16-я и 24-я координаты резко отличаются от всех остальных координат.

Таблица 3 определяет векторное произведение двух векторов как сумму 155-ти не повторяющихся определителей 3-го порядка. Тридцатиодномерную алгебру определяют в полном масштабе $C_{31}^3 = 4495$ определителей 3-го порядка. Таким образом, векторное произведение двух векторов является лишь незначительной частью фиксирующих алгебру определителей, дающих в совокупности $4495 = 4340 + 155$, так что 4340 определителей третьего порядка формируют векторное произведение трех векторов. В каждой координате векторного произведения трех векторов имеет место $4340/31 = 140$ определителей 3-го порядка. Таким образом, задействованы все возможные комбинации трех координат в векторных произведениях двух и трех векторов. Необходимо отметить, что эти векторные произведения заданы суммой определителей третьего порядка, а, следовательно, имеют свойства, аналогичные свойствам определителей, то есть:

- векторные произведения двух и трех векторов не изменятся, если вынести за скобки скалярный множитель;
- векторные произведения двух и трех векторов изменяют знак при перестановке любой пары векторов;
- циклическая подстановка векторов меняет знак векторного произведения двух векторов и не меняет знака векторного произведения трех векторов;
- векторные произведения двух и трех векторов дистрибутивны;
- если два вектора в векторном произведении двух или трех векторов компланарны, то это произведение равно 0 и т.д.

Матрицы, определяющие структурные константы алгебры и операторы момента импульса L_i также антисимметричны. Тридцать один оператор L_i ($i=1,2,\dots,31$) составляют оператор скалярного квадрата момента импульса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_{31}^2 = 30I,$$

что характеризует закон сохранения момента импульса, при I – равной единичной матрице. Этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$L^2 * L_i^2 - L_i^2 * L^2 = 0, \quad (i=1,2,\dots,31),$$

что также характеризует закон сохранения момента импульса.

Очень специфичны свойства суммы операторов момента импульса L (структурных констант алгебры):

-во –первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L равна нулю;

-во- вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце матрицы суммы операторов момента импульса L одинаково;

-матрицы нечётных степеней суммы операторов момента импульса антисимметричны, (и пропорциональны L), а четных – симметричны (пропорциональны L^2);

- размерность матрицы суммы операторов момента импульса L (как совершенного числа) определяется числом 2^n-1 ;

-целые степени матрицы суммы операторов момента импульса L определяются лишь двумя числами;

-матрицы суммы операторов момента импульса L определяют векторное произведение двух векторов;

- матрица суммы операторов момента импульса L и все её степени имеют определитель, равный нулю.

Особо отметим, что любые степени матрицы суммы операторов момента импульса L^n пропорциональны лишь двум матрицам – L и L^2 , соответствующих четным (с вещественными элементами) и нечётным (с мнимыми элементами) степеням матрицы L . Размерность этих матриц совпадает с размерностью алгебр, причём матрицы меньшей размерности без каких либо изменений входят в состав матриц большей размерности. Это упрощает процесс расширения матриц.

Операторы момента импульса L (матриц Паули) удовлетворяют 31-му соотношению таблицы, представленной на альбомном листе, где $[L_i L_j] = L_i L_j - L_j L_i$ -коммутатор, причем в данной алгебре $m=1/19$, $n=9$, $k=1/27$.

Трёхмерная, семимерная и пятнадцатимерная векторные алгебры являются частным случаем тридцатиодномерной. С целью уплотнения записи величин следует использовать сумму операторов момента импульса. В противном случае приходится использовать запись 31-ой таблицы размером 31 на 31, что соответствует объему одного печатного листа.

Очевидно, что чётные и нечётные степени матрицы суммы операторов момента импульса образуют числовые величины, аналогичные единицам **комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер, что можно рассматривать как расширение комплексных чисел. Среди них выделяются четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из $3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots, 2^n-1, \dots$ -мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса и её степеней совершенно аналогичного вида.

У 31-но мерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таблица 7.

$-iL^3/3! = -iL$																															
$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
11	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	0	-1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0
31	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1

Таблица 8.

$-L^2=a^*I+ L , \ a=-30$																															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Таблица 9.

$L^4 = -3I^{1*}(a^*I + L), a=-30$																															
$ L $	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1	1
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a	1
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	a

Таблица10.

$L^5/3L^2=iL$																															
$-iL$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
3	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	-1	1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
6	-1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
7	1	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
11	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
13	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
14	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
17	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	0	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
18	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1
19	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
20	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
21	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1
22	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
23	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	0	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
24	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1
25	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	-1	1	1	1	-1
26	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	1
27	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	0	-1	-1	1
28	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1
29	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1
30	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0
31	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1

Таким образом, удастся построить антисимметричную векторную алгебру, определяемую векторами с 31-ой координатой в каждом из них.

Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, антикоммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной тридцатидвухмерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата тридцатиодномерной алгебры определяет скалярное произведение двух тридцатиодномерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 31-тензору, так что векторная алгебра – евклидова. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из тридцатиодномерных алгебр. В [1] приведены таблицы подстановок индексов изоморфных семимерных векторных алгебр. Рассмотренная выше алгебра расширяет эти алгебры до тридцатиодномерных. Следовательно, можно построить, по крайней мере, 480 изоморфных 15-ти, 31-й мерных алгебр и алгебр большей размерности (очевидно, значительно большее число). Приведём пример расширения одной из семимерных алгебр, ограничиваясь пятнадцатимерным вариантом. Пусть этой алгебре соответствует таблица подстановки индексов, приведенная в левой части таблицы.

Соответствующие ей, расширенная таблица структурных констант и тензор структурных констант алгебры будут иметь вид:

$L_1 = m([2,3] [4,5] [7,6] [8,9] [11,10] [13,12] [14,15] n[16,17] [19,18] [21,20] [22,23] [25,24] [26,27] [28,29] [31,30])$	
$L_2 = m([4,6] [5,7] [3,1] [8,10] [14,12] [15,13] [9,11] n[16,18] [22,20] [23,21] [17,19] [26,24] [28,30] [29,31] [27,25])$	
$L_3 = m([6,5] [1,2] [4,7] [8,11] [13,14] [10,9] [15,12] n[16,19] [21,22] [18,17] [23,20] [27,24] [30,29] [25,26] [28,31])$	
$L_4 = m([5,1] [7,3] [6,2] [8,12] [9,13] [11,15] [10,14] n[16,20] [17,21] [19,23] [18,22] [28,24] [29,25] [31,27] [30,26])$	
$L_5 = m([7,2] [3,6] [1,4] [8,13] [10,15] [14,11] [12,9] n[16,21] [18,23] [22,19] [20,17] [29,24] [31,26] [27,30] [25,28])$	
$L_6 = m([1,7] [2,4] [5,3] [8,14] [15,9] [12,10] [11,13] n[16,22] [23,17] [20,18] [19,21] [30,24] [25,31] [26,28] [29,27])$	
$L_7 = m([3,4] [6,1] [2,5] [8,15] [12,11] [9,14] [13,10] n[16,23] [22,19] [17,22] [21,18] [31,24] [27,28] [30,25] [26,29])$	
$L_8 = m([9,1] [10,2] [11,3] [12,4] [13,5] [14,6] [15,7] n[16,24] [17,25] [18,26] [19,27] [20,28] [21,29] [22,30] [23,31])$	
$L_9 = m([11,2] [13,4] [14,7] [1,8] [3,10] [5,12] [6,15] n[16,25] [18,27] [20,29] [23,30] [24,17] [26,19] [28,21] [31,22])$	
$L_{10} = m([14,4] [15,5] [9,3] [2,8] [6,12] [7,13] [1,11] n[16,26] [20,30] [21,31] [19,25] [24,18] [28,22] [29,23] [27,17])$	
$L_{11} = m([13,6] [10,1] [15,4] [3,8] [5,14] [2,9] [7,12] n[16,27] [22,29] [17,26] [20,31] [24,19] [30,21] [25,18] [28,23])$	
$L_{12} = m([9,5] [11,7] [10,6] [4,8] [1,13] [3,15] [2,14] n[16,28] [21,25] [23,27] [22,26] [24,20] [29,17] [31,19] [30,18])$	
$L_{13} = m([10,7] [14,3] [12,1] [5,8] [2,15] [6,11] [4,9] n[16,29] [23,26] [19,30] [17,28] [24,21] [31,18] [27,22] [25,20])$	
$L_{14} = m([15,1] [12,2] [11,5] [6,8] [7,9] [4,10] [3,13] n[16,30] [17,31] [18,28] [21,27] [24,22] [25,23] [26,20] [29,19])$	
$L_{15} = m([12,3] [9,6] [13,2] [7,8] [4,11] [1,14] [5,10] n[16,31] [19,28] [22,25] [18,29] [24,23] [27,20] [30,17] [26,21])$	
$L_{16} = k([17,1] [18,2] [19,3] [20,4] [21,5] [22,6] [23,7] [24,8] [25,9] [26,10] [27,11] [28,12] [29,13] [30,14] [31,15])$	
$L_{17} = m([19,2] [21,4] [22,7] [25,8] [10,27] [12,29] [15,30] n[1,16] [3,18] [5,20] [6,23] [9,24] [26,11] [28,13] [31,14])$	
$L_{18} = m([22,4] [23,5] [17,3] [26,8] [12,20] [13,31] [11,25] n[2,16] [6,20] [7,21] [1,19] [10,24] [28,14] [29,15] [27,9])$	
$L_{19} = m([21,6] [18,1] [23,4] [27,8] [14,22] [19,26] [12,31] n[3,16] [5,22] [2,17] [7,20] [11,24] [30,13] [25,10] [28,15])$	
$L_{20} = m([17,5] [19,7] [18,6] [28,8] [13,21] [15,27] [14,26] n[4,16] [1,21] [3,23] [2,22] [12,24] [29,9] [31,11] [30,10])$	
$L_{21} = m([18,7] [22,3] [20,1] [29,8] [15,23] [11,30] [19,28] n[5,16] [2,23] [6,19] [4,17] [13,24] [31,10] [27,14] [25,12])$	
$L_{22} = m([23,1] [20,2] [19,5] [30,8] [9,17] [10,28] [13,27] n[6,16] [7,17] [4,18] [3,21] [14,24] [25,15] [26,12] [29,11])$	
$L_{23} = m([20,3] [17,6] [21,2] [31,8] [11,19] [14,25] [10,29] n[7,16] [4,19] [1,22] [5,18] [15,24] [27,12] [30,9] [26,13])$	
$L_{24} = m([1,25] [2,26] [3,27] [4,28] [5,29] [6,30] [7,31] n[8,16] [17,19] [18,10] [19,11] [20,12] [21,13] [22,14] [23,15])$	
$L_{25} = m([2,27] [4,29] [7,30] [8,17] [10,19] [12,21] [15,22] n[9,16] [18,11] [20,13] [23,14] [24,1] [26,3] [28,5] [31,6])$	
$L_{26} = m([4,30] [5,31] [3,25] [8,18] [12,22] [13,23] [11,17] n[10,16] [10,14] [21,15] [19,9] [24,2] [28,6] [29,7] [27,1])$	
$L_{27} = m([6,29] [1,26] [4,31] [8,19] [14,21] [9,18] [12,23] n[11,16] [12,13] [17,10] [20,15] [24,3] [30,5] [25,2] [28,7])$	
$L_{28} = m([5,25] [7,27] [6,26] [8,20] [13,17] [15,19] [14,18] n[12,16] [11,9] [23,11] [22,10] [24,4] [29,1] [31,3] [30,2])$	
$L_{29} = m([7,26] [3,30] [1,28] [8,21] [15,18] [11,22] [9,20] n[13,16] [13,10] [19,14] [17,12] [24,5] [31,2] [27,6] [25,4])$	
$L_{30} = m([1,31] [2,28] [5,27] [8,22] [9,23] [10,20] [13,19] n[14,16] [17,15] [18,12] [21,11] [24,6] [25,7] [26,4] [29,3])$	
$L_{31} = m([3,28] [6,25] [2,29] [8,23] [11,29] [14,17] [10,21] n[15,16] [19,12] [22,9] [18,13] [24,7] [27,4] [30,1] [26,5])$	

Таблица 11.

iL_r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	iL	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-3	2	-5	4	-7	6	-9	8	11	-10	13	-12	15	-14	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	3	0	-1	-7	-6	5	4	-10	-11	8	9	15	14	-13	-12	2	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-2	1	0	-6	7	4	-5	-11	10	-9	8	14	-15	-12	13	3	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	5	7	6	0	-1	-3	-2	-12	-13	-15	-14	8	9	11	10	4	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-4	6	-7	1	0	-2	3	-13	12	-14	15	-9	8	10	-11	5	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	7	-5	-4	3	2	0	-1	-14	-15	13	12	-11	-10	8	9	6	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1
7	-6	-4	5	2	-3	1	0	-15	14	12	-13	-10	11	-9	8	7	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	1	-1	1	1
8	9	10	11	12	13	14	15	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	8	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-8	11	-10	13	12	15	-14	1	0	3	-2	5	-4	7	-6	9	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-11	-8	9	15	14	-13	-12	2	-3	0	1	7	6	-5	-4	10	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	10	-9	-8	14	-15	-12	13	3	2	-1	0	6	-7	-4	5	11	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-13	-15	-14	-8	9	11	10	4	-5	-7	-6	0	1	3	2	12	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	12	14	15	-9	-8	10	-11	5	4	-6	7	-1	0	2	-3	13	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-15	13	12	-11	-10	-8	9	6	-7	5	4	-3	-2	0	1	14	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	14	12	-13	-10	11	-9	-8	7	6	4	-5	-2	3	-1	0	15	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Таблица 12.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767	65535
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336	134209536	536854528	2147450880
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431	134217727	536870911	2147483647

Таблица 13.

подстановки индексов	iL_r	1	2	3	4	5	6	7	iL	1	2	3	4	5	6	7
1 2 3 4 5 6 7	1	0	-3	2	-5	4	-7	6	1	0	-1	1	-1	1	-1	1
2 4 7 5 6 7 1	2	3	0	-1	-7	-6	5	4	2	1	0	-1	-1	-1	1	1
3 7 5 1 2 1 6	3	-2	1	0	-6	7	4	-5	3	-1	1	0	-1	1	1	-1
4 5 1 6 3 7 2	4	5	7	6	0	-1	-3	-2	4	1	1	1	0	-1	-1	-1
5 6 2 3 7 1 4	5	-4	6	-7	1	0	-2	3	5	-1	1	-1	1	0	-1	1
6 7 1 7 1 2 5	6	7	-5	-4	3	2	0	-1	6	1	-1	-1	1	1	0	-1
7 1 6 2 4 5 3	7	-6	-4	5	2	-3	1	0	7	-1	-1	1	1	-1	1	0

и, следовательно, тензор структурных констант резко отличается в знаках от ранее рассмотренной алгебры. При этом расширение до 15-ти мерной алгебры дает:

iL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

и, следовательно, структурные константы алгебры определяются таблицей, существенно отличающейся в знаках компонент векторного произведения двух векторов от ранее рассмотренных алгебр. При этом:

$-L^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Очевидно, что структурные константы сравниваемых алгебр не совпадают. Вместе с тем, квадрат вектора суммы оператора момента импульсов определяется той же величиной (т.е. L^2 в изоморфных алгебрах не изменяется), а нечетные степени структурных констант повторяют вид суммы оператора моментов импульса (т.е. L в изоморфных алгебрах может иметь различный вид). Следовательно, изоморфизм алгебр можно определять по четной (второй) степени суммы операторов момента импульса и

$-iL^3/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

$L^4/15^1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-14

Чтобы говорить предметно о свойствах 31-й мерной алгебры, можно проанализировать 31-но рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трехмерные, семимерные и пятнадцатимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше 31-но соотношение для операторов момента импульса, которые определяют L_i . При этом $m=9$, $n=1/19$, $k=1/27$.

$iL^{5/15^2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
5	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
6	1	-1	-1	1	1	0	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
7	-1	-1	1	1	-1	1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	1	-1	1	-1	1	-1
10	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	-1	-1
11	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0	1	-1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1
13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	0	1	-1
14	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1
15	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высокой размерности. Это в свою очередь ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Уже найдены векторные произведения двух векторов векторных алгебр размерностью (1, 3), 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047,. Определены также векторные произведения двух векторов ряда векторных алгебр большей размерности, что требует для проверки соответствующих вычислительных и программных средств (в матрице 4095-D 16.769.025 элементов).

Я считаю, что **“Размерность физического пространства неопределённа.** Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой”!

Более симметричны алгебры высокой размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения (упрощения свойств) симметрии, определяющих соотношения и являются подалгебрами алгебр большей размерности. Я надеюсь, что данная работа явится началом её широкого обсуждения и применения во многих естественных науках, в науках о природе окружающего мира, в технических приложениях. Наш мир удивительно симметричен и многообразен – и в то же время, мы удивительно инертны и пассивны. Ровесники семимерного исчисления уже окончили вузы, – а воз и ныне там. В завершение работы приведём таблицу 12, характеризующую размерность векторных алгебр и их связь с совершенными числами.

Литература

- 1.Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
- 2.Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.
- 3.Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. 36с.

КОРОТКОВ А.В. СВЯЗЬ ЧИСЕЛ ПИФАГОРА И ДИОФАНТА

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Последовательности чисел Пифагора приведены в [1]. Они наводят на мысль, что подобные последовательности могут быть построены для чисел Фибоначчи и чисел Диофанта. В таком случае удалось бы установить связь этих чисел между собой. Для чисел Пифагора существует зависимость

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

удовлетворяющая знаменитому соотношению

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

где x, y, z , стороны прямоугольного треугольника.

Вместо параметров m, n можно задействовать параметры h и g [1], что дает тождество

$$(2h^2 + 2hg + g^2)^2 = (2hg + g^2)^2 + (2hg^2 + 2hg)^2.$$

Причем, $h=0,1,2,\dots$, - числа натурального ряда. $g=1,3,5,\dots$, - нечетные

числа. При этом g и h – взаимно простые числа. Для чисел n, m, h, g, x, y, z характерны соотношения

$$\begin{aligned} (2h_k * h_{k-1})^2 + (h_k^2 - h_{k-1}^2)^2 &= (h_k^2 + h_{k-1}^2)^2 \\ (2g_k * g_{k-1})^2 + (g_k^2 - g_{k-1}^2)^2 &= (g_k^2 + g_{k-1}^2)^2 \\ (2m_k * m_{k-1})^2 + (m_k^2 - m_{k-1}^2)^2 &= (m_k^2 + m_{k-1}^2)^2 \\ (2n_k * n_{k-1})^2 + (n_k^2 - n_{k-1}^2)^2 &= (n_k^2 + n_{k-1}^2)^2 \\ (2x_k * x_{k-1})^2 + (x_k^2 - x_{k-1}^2)^2 &= (x_k^2 + x_{k-1}^2)^2 \\ (2y_k * y_{k-1})^2 + (y_k^2 - y_{k-1}^2)^2 &= (y_k^2 + y_{k-1}^2)^2 \\ (2z_k * z_{k-1})^2 + (z_k^2 - z_{k-1}^2)^2 &= (z_k^2 + z_{k-1}^2)^2. \end{aligned}$$

Причем

$$\begin{aligned} h &= 1, 3, 7, 17, \dots, \text{ и } h_{k+1} = 2h_k + h_{k-1}, \\ g &= 0, 1, 2, 5, \dots, \text{ и } g_{k+1} = 2g_k + g_{k-1}, \\ m &= 0, 1, 2, 5, \dots, \text{ и } m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1}, \\ n &= 1, 3, 7, 17, \dots, \text{ и } n_{k+1} = 2n_k + n_{k-1}, \\ x &= 1, 3, 21, 119, \dots, \text{ и } x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}, \\ y &= 0, 4, 20, 120, \dots, \text{ и } y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}, \\ z &= 1, 5, 29, 169, \dots, \text{ и } z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1}. \end{aligned}$$

Всем указанным величинам соответствует уравнение Диофанта или Пифагора. Так

$$\begin{aligned} g_k^2 - 2h_k^2 &= \pm d_k^2 \\ n_k^2 - 2m_k^2 &= \pm d_k^2 \end{aligned}$$

$$\dots \\ x_k^2 + y_k^2 = z_k^2$$

При этом, формируются ряды бесконечной длины, причем $d_k = 1, 7, 17, 23,$

31,... так что эти числа относятся к числам типа $8*n\pm 1$, причем задействован квадрат модуля разности двух катетов.

Для чисел Диофанта существует зависимость,

$$m^2 - 2*n^2 = \pm d^2,$$

где **m, n**-параметры уравнения.

Характерно, что числа Диофанта и числа Пифагора якобы независимы друг от друга, что определяется видом уравнений Пифагора и Диофанта. Однако, как показано в [2], это не совсем справедливо. Так тройки Пифагора соответствуют трем сторонам прямоугольных треугольников, причем формируется бесконечное число пифагоровых троек. Числа Диофанта также формируются из трех величин, совершенно не соответствующих тройкам Пифагора. Однако это заблуждение - как числа Пифагора, так и числа Диофанта составляют более сложную структуру. В [3] указано о формировании колец чисел и последовательностей из них. При этом, числа Пифагора и Диофанта образуют пятерки или семерки целых чисел, два или четыре из которых удовлетворяют уравнению Диофанта. Так, например, числа **16, 63, 65, 91, 13** относятся к одной и той же пятерке Пифагора-Диофанта. В последней при множителе **-2** стоит число **65**, а без множителя-числа **91** или **13**. В результате для этой пятерки чисел можно записать два уравнения Диофанта.

Числа Пифагора и Диофанта, как выясняется, при этом также могут быть расширены. Пять составляющих, с одной определяющей величиной могут быть дополнены, по крайней мере, еще парой целых чисел, при этом имеют место четыре уравнения Диофанта и четыре уравнения Пифагора (таблица 1).

Таблица 1

x	y	z	c	dzc	p	t	dpt
697	696	985	1393	-1	2378	3363	1
119	120	169	239	1	408	577	1
21	20	29	41	-1	70	99	1
3	4	5	7	1	12	17	1
1	0	1	1	-1	2	3	1
-1	0	1	-1	1	0	1	1
-3	-4	5	-7	-1	-2	3	1
-21	-20	29	-41	1	-12	17	1
-	-	169	-239	-1	-70	99	1
119	120	985	-	1	-408	577	1
-	-		1393				
697	696						

Для случая характеризующего числа, равного 65 имеем:

$$\begin{array}{ll}
 13^2 - 2 \cdot 65^2 = -91^2, & 63^2 + 16^2 = 65^2 \\
 23^2 - 2 \cdot 65^2 = -89^2, & 25^2 + 60^2 = 65^2 \\
 35^2 - 2 \cdot 65^2 = -85^2 & 33^2 + 56^2 = 65^2 \\
 47^2 - 2 \cdot 65^2 = -79^2 & 39^2 + 52^2 = 65^2
 \end{array}$$

Однако, как легко показать, величины сумм разностей квадратов аргументов определяются двумя переменными уравнений Диофанта и этими же переменными уравнений Пифагора. Эти уравнения пропорциональны трем сторонам прямоугольных треугольников. Так величине взаимно не простых троек Пифагора (25, 60, 65) соответствует величина $5 \cdot (5, 12, 13)$, а тройка Пифагора (39, 52, 65) соответствует величина $13 \cdot (3, 4, 5)$, причем произведение $5 \cdot 13$ соответствует разложению числа 65. При этом характерны четыре тройки Пифагора (16, 63, 65), (25, 60, 65), (39, 52, 65). Характеризующее число, как и раньше, равно 65 (таблица 2). Например, для пятиэлементной системы имеем совокупность четырех пятерок чисел, числа Пифагора-Диофанта.

Таблица 2

16	63	65	91	13
25	60	65	89	23
33	56	65	85	35
39	52	65	79	47
65	0	65		

Левая сторона таблицы 2 соответствует четырем тройкам Пифагора, а правая сторона- четырем тройкам Диофанта. Суммы и разности компонентов левой стороны таблицы определяют величины компонентов правой стороны таблицы. Вместе с этим правая сторона таблицы определяет четверку чисел Диофанта. Полусуммы и полуразности компонентов правой стороны этой таблицы, определяют компоненты левой стороны таблицы.

Такова жесткая взаимосвязь пяти компонентов каждой строки таблицы Диофанта-Пифагора, включающих два числа, удовлетворяющих уравнению Пифагора, два числа, соответствующих уравнению Диофанта и одно характеризующее число (гипотенузу четырех треугольников, таблица 3).

Таблица 3

16	63	13	84	17	144	57	176
25	60	36	77	24	143	60	175
33	56	51	68	105	100	104	153
39	52	40	75	116	87	111	148
65	0	85	0	145	0	185	0
91	13	119	17	205	5	259	37
89	23	115	35	203	29	257	49
85	35	113	41	167	119	235	115
79	47	97	71	161	127	233	119

Таким образом, одна из компонентов является определяющей. Для первой пары столбцов – это число **65**. Оно является общим для таблиц Диофанта и Пифагора. В таком случае, необходимо вести речь о **5-ти** числах Пифагора – Диофанта. В таблице 3 приведены значения чисел Пифагора и Диофанта, для других определяющих величин (**65, 85, 145, 185, ...**). Отметим, что числа, относящиеся к таблице Диофанта, линейно зависят от чисел Пифагора так, что суммы и разности чисел дают один и тот же набор из пяти составляющих. Два столбца чисел Пифагора (таблица 3) включают восемь чисел так, что реально задача нахождения чисел Пифагора-Диофанта сводится к нахождению восьми чисел составляющих четыре пифагоровых тройки с одной и той же гипотенузой (**205, 221, 265, 305, ...**) (таблица 4).

Таблица 4

45	200	21	220	23	264	55	300
84	187	85	204	96	247	136	273
133	156	104	195	140	225	183	244
123	164	140	171	159	212	207	224
205	0	221	0	265	0	305	0
289	23	311	31	371	53	431	17
287	41	299	91	365	85	427	61
271	103	289	119	343	151	409	137
245	155	241	199	287	241	335	245

Эти таблицы дают значения, составляющие четыре уравнения Пифагора и четыре уравнения Диофанта, а также значения характеризующих величин указанных выше. Теперь легко видеть, например, что **164+123=287**, входящее в

уравнение Диофанта или **164-123=41**, которое также входит в уравнение Диофанта. Наличие четырех уравнений Диофанта и четырех уравнений Пифагора позволяют составлять такие комбинации чисел, как сумма и разность чисел, сумма четырех квадратов, равная квадрату числа,

или сумма четырех или восьми квадратов, равная квадрату числа. В этом случае, идет речь о целочисленной многомерной евклидовой геометрии.

$$45^2+200^2+84^2+187^2+133^2+156^2+123^2+164^2=4*205^2=410^2$$

Таким образом, пифагоровы числа образуют подмножества из **5-ти** колец множества натуральных чисел. Эти подмножества замкнуты, что позволяет говорить о кольцах чисел Диофанта и Пифагора. Эти числа характеризуются произведениями или возведением в степень чисел первого класса сравнений по модулю четыре.

Числа Пифагора-Диофанта характеризуют кольца чисел и составленные из них последовательности (рис.1и рис.2).

Покажем возможность использования чисел Диофанта-Пифагора на примере построения календаря. Для этого выделим таблицу Диофанта-Пифагора для числа **365**, связанного с продолжительностью календарного года. В результате имеем четыре пятерки или семерки чисел:

•**27, 76, 219, 240, 275, 292, 357, 364**- числа Пифагора

•**365**

•**515, 511, 433, 391, 337, 281, 73, 35, (756, 798, 876, 880, 1121, 1163, 1241, 1245)**

- числа Диофанта (таблица 5).

Таблица 5

27	364	365	391	337	756	1121
76	357	365	433	281	798	1163
219	292	365	511	73	876	1241
240	275	365	515	35	880	1245
365	0		365	0	756	0

Левая часть таблицы соответствует четырем уравнениям Пифагора, а восемь (или 16) чисел правой части - уравнению Диофанта.

Правая часть таблицы соответствует сумме компонент левой части, а левая часть таблицы полусумме компонент правой части, что соответствует уравнению Диофанта, например,

$$515^2-2*365^2= - 35^2.$$

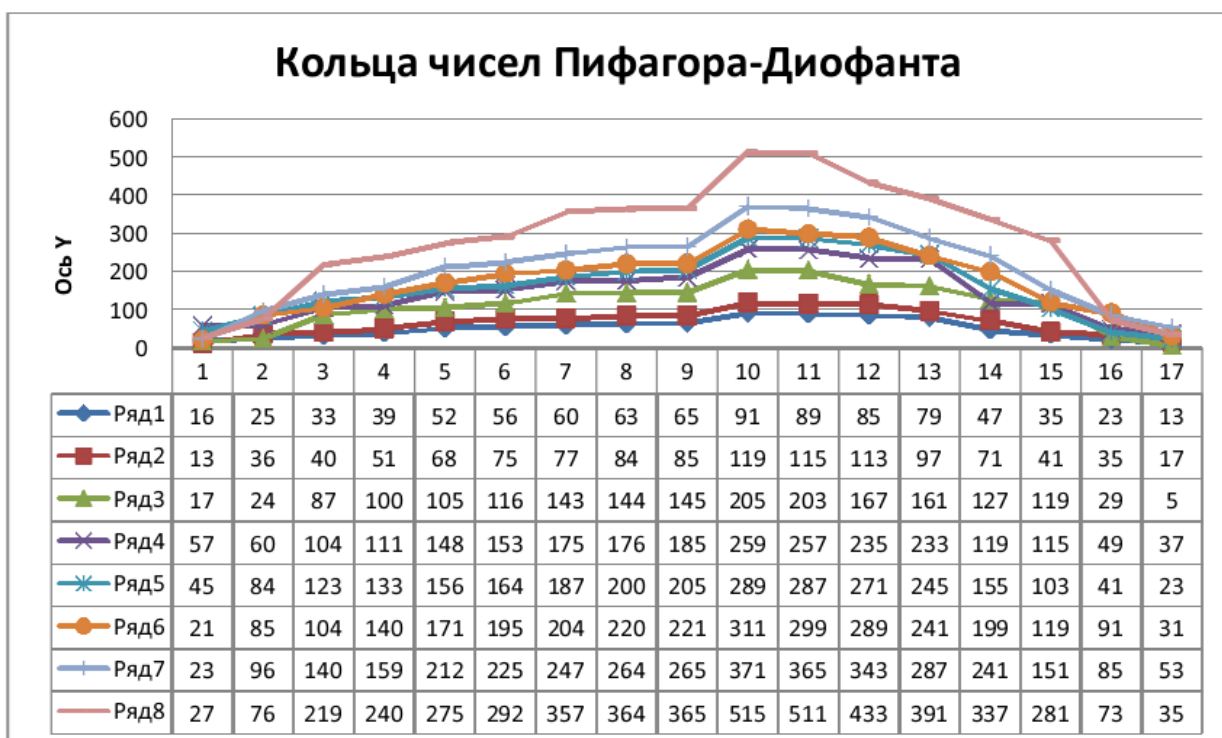


Рис. 1



Рис. 2

Левая часть соответствует четырем уравнениям Пифагора, например,
 $27^2 + 364^2 = 365^2$.

Некоторые числа этой таблицы имеют ясный характер, например, само число 365 (число суток в году) или число 27, совпадающее с лунным циклом вращения вокруг Земли, число 281. Другие же числа, видимо, имеют важное значение, но требуют увязки с природными циклическими явлениями. Отметим, что последнее уравнение дает квадрат продолжительности года, как сумму квадратов продолжительности двух других величин. То же самое можно сказать обо всех других парах чисел Пифагора и, следовательно, эти пары имеют геометрическую интерпретацию. В результате пифагоровы и диофантовы числа можно изобразить в виде таблицы, приведенной на следующей странице. Отметим также, что как показано в [3] пифагоровы числа допускают процесс сложения и умножения чисел, что дает математическую основу их анализа. Так, например, число

$$65 = 5 \cdot 13 = (4, 3, 5) \cdot (12, 5, 13).$$

В соответствии с процедурой умножения пифагоровых чисел

$$(4 \cdot 12 - 5 \cdot 3, 4 \cdot 5 + 12 \cdot 3) = (33, 56) + (4 \cdot 12 + 5 \cdot 3, 4 \cdot 5 - 12 \cdot 3) = (63, -16, 65),$$

т.е.
$$65^2 = 33^2 + 56^2 = 63^2 + 16^2$$

Таким образом, найдены дополнительные аргументы в пользу объединения чисел типа Пифагора, Диофанта в единую систему чисел. В частности, найден алгоритм получения колец чисел Пифагора-Диофанта, состоящих из *5-ми* или *7-ми* чисел и их бесконечных последовательностей. Важное значение приобретает вопрос нахождения числовых колец, обеспечивающих периодическую повторяемость чисел.

Числа пифагоровых троек наиболее удачно представлять в виде таблиц с параметрами *h* и *g*, определяющих значения величин $c = x + y$ и $d = x - y$ (таблица 6)

Отметим также, что длину чисел определяющих кольцевые последовательности можно увеличивать, поскольку уравнение Диофанта может быть использовано не только для чисел *c* и *z*, но также для чисел *t* и *p*, где $p = c + z$, а $t = p + z$. В результате могут быть построены кольцевые последовательности из *7-ми* чисел *x, y, z, c, dcz, p, t* (таблица 7). Важно, что сразу формируются семь последовательностей. Возможно, видимо, дальнейшее увеличение длины колец. В таблице 7 приведены бесконечные последовательности чисел троек Пифагора и соответствующие им две пары последовательностей чисел Диофанта, т.е. колец из семи чисел Пифагора-Диофанта.

76	ПИФАГОР	357
240		275
292		219
364		27
35	ДИОФАНТ	515
73		511
281		433
337		391
756		1121
798		1163
876		1241
880	365	1245

Таблица 7

x	y	z	c	dzc	p	t	dpt
461035	-461028	651997	7	922063	652004	1304001	7
79097	-79104	111865	-7	158201	111858	223723	7
13575	-13568	19193	7	27143	19200	38393	7
2325	-2332	3293	-7	4657	3286	6579	7
403	-396	565	7	799	572	1137	7
65	-72	97	-7	137	90	187	7
15	-8	17	7	23	24	41	7
-3	-4	5	-7	1	-2	3	7
-5	12	13	7	17	20	33	7
-55	48	73	-7	103	66	139	7
-297	304	425	7	601	432	857	7
-1755	1748	2477	-7	3503	2470	4947	7
-10205	10212	14437	7	20417	14444	28883	7

Таблицы 8-11 показывают набор бесконечных последовательностей пятерок чисел Пифагора, составляющих сумму четырех квадратов. Приведенные выше соотношения и таблицы могут быть получены также для суммы четырех квадратов, составляющих расширенное уравнение Пифагора. Это может иметь важное значение поскольку, как известно, каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов. С учетом важного значения сумм четырех квадратов, приведены различные способы формирования пятерок чисел Пифагора.

Таблица 8.

...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	#1
5	73	137	205	221	481	353	325	449
3	43	81	121	131	283	209	193	267
1	13	25	37	41	85	65	61	85
6	86	162	242	262	566	418	386	534
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
1	13	25	37	41	85	65	61	85
1	9	19	27	33	57	51	51	73
1	5	13	17	25	29	37	41	61
2	18	38	54	66	114	102	102	146
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
1	5	13	17	25	29	37	41	61
3	11	33	41	67	59	97	113	171
5	17	53	65	109	89	157	185	281
6	22	66	82	134	118	194	226	342
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
5	17	53	65	109	89	157	185	281
17	57	179	219	369	297	531	627	953
29	97	305	373	629	505	905	1069	1625
34	114	358	438	738	594	1062	1254	1906
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
29	97	305	373	629	505	905	1069	1625
99	331	1041	1273	2147	1723	3089	3649	5547
169	565	1777	2173	3665	2941	5273	6229	9469
198	662	2082	2546	4294	3446	6178	7298	11094
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
169	565	1777	2173	3665	2941	5273	6229	9469
577	1929	6067	7419	12513	10041	18003	21267	32329
985	3293	10357	12665	21361	17141	30733	36305	55189
1154	3858	12134	14838	25026	20082	36006	42534	64658
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
985	3293	10357	12665	21361	17141	30733	36305	55189
3363	11243	35361	43241	72931	58523	104929	123953	188427
5741	19193	60365	73817	124501	99905	179125	211601	321665
6726	22486	70722	86482	145862	117046	209858	247906	376854
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	7	17	23	31	41	47	49	71
5741	19193	60365	73817	124501	99905	179125	211601	321665
19601	65529	206099	252027	425073	341097	611571	722451	1098233
33461	111865	351833	430237	725645	582289	10440171	1233301	1874801
39202	131058	412198	504054	850146	682194	223142	1444902	2196466

Таблица 9.

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	75	97	126	1	58	104	230	259	1	87	133	421	450
1	5	13	17	22	1	10	18	40	45	1	15	23	73	78
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	5	27	73	78	1	10	32	110	115	1	15	37	157	162
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	133	305	334	1	58	162	496	525	1	87	191	745	774
1	5	23	53	58	1	10	28	86	91	1	15	33	129	134
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	5	37	137	142	1	10	42	184	189	1	15	47	241	246
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	191	629	658	1	58	220	878	907	1	87	249	1185	1214
1	5	33	109	114	1	10	38	152	157	1	15	43	205	210
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	5	47	221	226	1	10	52	278	283	1	15	57	345	350
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	249	1069	1098	1	58	278	1376	1405	1	87	307	1741	1770
1	5	43	185	190	1	10	48	238	243	1	15	53	301	306
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90
1	5	57	325	330	1	10	62	392	397	1	15	67	469	474
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	307	1625	1654	1	58	336	1990	2019	1	87	365	2413	2442
1	5	53	281	286	1	10	58	344	349	1	15	63	417	422
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	5	67	449	454	1	10	72	526	531	1	15	77	613	618
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	365	2297	2326	1	58	394	2720	2749	1	87	423	3201	3230
1	5	63	397	402	1	10	68	470	475	1	15	73	553	558
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150
1	5	77	593	598	1	10	82	680	685	1	15	87	777	782
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 10.

x_0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	x_0	x_1	x_2	x_3	z	...
8_n+1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242	...
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18	...
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	305	179	53	358	17	610	484	842	1147	17	915	789	2241	2546	...
17	53	33	13	66	17	106	86	152	205	17	159	139	397	450	...
17	13	19	25	38	17	26	32	70	83	17	39	45	141	154	...
17	25	81	137	162	17	50	106	268	293	17	75	131	449	474	...
17	137	467	797	934	17	274	604	1538	1675	17	411	741	2553	2690	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
41	505	297	89	594	41	1010	802	1396	1901	41	1515	1307	3713	4218	...
41	89	59	29	118	41	178	148	266	355	41	267	237	681	770	...
41	29	57	85	114	41	58	86	200	229	41	87	115	373	402	...
41	85	283	481	566	41	170	368	934	1019	41	255	453	1557	1642	...
41	481	1641	2801	3282	41	962	2122	5404	5885	41	1443	2603	8969	9450	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	1069	627	185	1254	49	2138	1696	2950	4019	49	3207	2765	7853	8922	...
49	185	113	41	226	49	370	298	524	709	49	555	483	1377	1562	...
49	41	51	61	102	49	82	92	194	235	49	123	133	409	450	...
49	61	193	325	386	49	122	254	640	701	49	183	315	1077	1138	...
49	325	1107	1889	2214	49	650	1432	3646	3971	49	975	1757	6053	6378	...
8_n+7	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
7	97	57	17	114	7	194	154	268	365	7	291	251	713	810	...
7	17	11	5	22	7	34	28	50	67	7	51	45	129	146	...
7	5	9	13	18	7	10	14	32	37	7	15	19	61	66	...
7	13	43	73	86	7	26	56	142	155	7	39	69	237	250	...
7	73	249	425	498	7	146	322	820	893	7	219	395	1361	1434	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
23	373	219	65	438	23	746	592	1030	1403	23	1119	965	2741	3114	...
23	65	41	17	82	23	130	106	188	253	23	195	171	489	554	...
23	17	27	37	54	23	34	44	98	115	23	51	61	193	210	...
23	37	121	205	242	23	74	158	400	437	23	111	195	669	706	...
23	205	699	1193	1398	23	410	904	2302	2507	23	615	1109	3821	4026	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
31	629	369	109	738	31	1258	998	1736	2365	31	1887	1627	4621	5250	...
31	109	67	25	134	31	218	176	310	419	31	327	285	813	922	...
31	25	33	41	66	31	50	58	124	149	31	75	83	257	282	...
31	41	131	221	262	31	82	172	434	475	31	123	213	729	770	...
31	221	753	1285	1506	31	442	974	2480	2710	31	663	1195	4117	4338	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
47	905	531	157	1062	47	1810	1436	2498	3403	47	2715	2341	6649	7554	...
47	157	97	37	194	47	314	254	448	605	47	471	411	1173	1330	...
47	37	51	65	102	47	74	88	190	227	47	111	125	389	426	...
47	65	209	353	418	47	130	274	692	757	47	195	339	1161	1226	...
47	353	1203	2053	2406	47	706	1556	3962	4315	47	1059	1909	6577	6930	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 11

1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42	...
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10	...
17	53	33	13	66	17	106	86	152	205	17	159	139	397	450	...
17	13	19	25	38	17	26	32	70	83	17	39	45	141	154	...
41	89	59	29	118	41	178	148	266	355	41	267	237	681	770	...
41	29	57	85	114	41	58	86	200	229	41	87	115	373	402	...
49	185	113	41	226	49	370	298	524	709	49	555	483	1377	1562	...
49	41	51	61	102	49	82	92	194	235	49	123	133	409	450	...
73	193	123	53	246	73	386	316	562	755	73	579	509	1457	1650	...
73	53	89	125	178	73	106	142	320	373	73	159	195	621	674	...
89	241	153	65	306	89	482	394	700	941	89	723	635	1817	2058	...
89	65	107	149	214	89	130	172	386	451	89	195	237	753	818	...
97	397	241	85	482	97	794	638	1120	1517	97	1191	1035	2949	3346	...
97	85	99	113	198	97	170	184	382	467	97	255	269	821	906	...
113	337	211	85	422	113	674	548	970	1307	113	1011	885	2529	2866	...
113	85	129	173	258	113	170	214	472	557	113	255	299	941	1026	...
137	305	201	97	402	137	610	506	908	1213	137	915	811	2329	2634	...
137	97	187	277	374	137	194	284	658	755	137	291	381	1233	1330	...
161	521	323	125	646	161	1042	844	1490	2011	161	1563	1365	3897	4418	...
161	125	177	229	354	161	250	302	656	781	161	375	427	1333	1458	...
161	689	417	145	834	161	1378	1106	1940	2629	161	2067	1795	5113	5802	...
161	145	163	181	326	161	290	308	634	779	161	435	453	1377	1522	...
217	565	361	157	722	217	1130	926	1648	2213	217	1695	1491	4269	4834	...
217	157	267	377	534	217	314	424	958	1115	217	471	581	1853	2010	...
217	745	459	173	918	217	1490	1204	2122	2867	217	2235	1949	5561	6306	...
217	173	233	293	466	217	346	406	872	1045	217	519	579	1797	1970	...
233	793	489	185	978	233	1586	1282	2260	3053	233	2379	2075	5921	6714	...
233	185	251	317	502	233	370	436	938	1123	233	555	621	1929	2114	...
241	1061	641	221	1282	241	2122	1702	2984	4045	241	3183	2763	7869	8930	...
241	221	243	265	486	241	442	464	950	1171	241	663	685	2077	2298	...
257	653	419	185	838	257	1306	1072	1910	2563	257	1959	1725	4941	5594	...
257	185	321	457	642	257	370	506	1148	1333	257	555	691	2209	2394	...
281	1009	619	229	1238	281	2018	1628	2866	3875	281	3027	2637	7521	8530	...
281	229	297	365	594	281	458	526	1120	1349	281	687	755	2333	2562	...
289	661	433	205	866	289	1322	1094	1960	2621	289	1983	1755	5037	5698	...
289	205	387	569	774	289	410	592	1366	1571	289	615	797	2573	2778	...
313	905	569	233	1138	313	1810	1474	2612	3517	313	2715	2379	6801	7706	...
313	233	363	493	726	313	466	596	1322	1555	313	699	829	2617	2850	...
329	901	571	241	1142	329	1802	1472	2614	3515	329	2703	2373	6789	7690	...
329	241	393	545	786	329	482	634	1420	1661	329	723	875	2777	3018	...
329	1189	729	269	1458	329	2378	1918	3376	4565	329	3567	3107	8861	10050	...
329	269	347	425	694	329	538	616	1310	1579	329	807	885	2733	3002	...
337	1513	913	313	1826	337	3026	2426	4252	5765	337	4539	3939	11217	12730	...
337	313	339	365	678	337	626	652	1330	1643	337	939	965	2921	3234	...
353	1313	803	293	1606	353	2626	2116	3722	5035	353	3939	3429	9777	11090	...
353	293	369	445	738	353	586	662	1400	1693	353	879	955	2941	3234	...
401	1025	657	289	1314	401	2050	1682	2996	4021	401	3075	2707	7753	8778	...
401	289	499	709	998	401	578	788	1786	2075	401	867	1077	3441	3730	...
409	1189	747	305	1494	409	2378	1936	3430	4619	409	3567	3125	8933	10122	...
409	305	473	641	946	409	610	778	1724	2029	409	915	1083	3417	3722	...
433	1657	1011	365	2022	433	3314	2668	4690	6347	433	4971	4325	12329	13986	...
433	365	449	533	898	433	730	814	1712	2077	433	1095	1179	3621	3986	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Последовательности чисел Пифагора (x, y, z) и Диофанта (c, z и t, p).

Таблица 12

x	y	z	c	dcz	p	t	dp	x	y	z	c	dcz	p	t	dp
697	696	985	1393	-1	2378	3363	1	2325	2332	3293	4657	7	7950	11243	7
119	120	169	239	1	408	577	1	403	396	565	799	-7	1364	1929	7
21	20	29	41	-1	70	99	1	65	72	97	137	7	234	331	7
3	4	5	7	1	12	17	1	15	8	17	23	-7	40	57	7
1	0	1	1	-1	2	3	1	-3	4	5	1	7	6	11	7
-1	0	1	-1	1	0	1	1	-5	-12	13	-17	-7	-4	9	7
-3	-4	5	-7	-1	-2	3	1	-55	-48	73	-103	7	-30	43	7
-21	-20	29	-41	1	-12	17	1	-297	-304	425	-601	-7	-176	249	7
-119	-120	169	-239	-1	-70	99	1	-1755	-1748	2477	-3503	7	-1026	1451	7
-697	-696	985	-1393	1	-408	577	1	-10205	-10212	14437	-20417	-7	-5980	8457	7
x	y	z	c	dcz	p	t	dp	x	y	z	c	dcz	p	t	dp
7315	7332	10357	14647	17	25004	35361	17	4905	4928	6953	9833	23	16786	23739	23
1265	1248	1777	2513	-17	4290	6067	17	855	832	1193	1687	-23	2880	4073	23
207	224	305	431	17	736	1041	17	133	156	205	289	23	494	699	23
45	28	53	73	-17	126	179	17	35	12	37	47	-23	84	121	23
-5	12	13	7	17	20	33	17	-15	8	17	-7	23	10	27	23
-7	-24	25	-31	-17	-6	19	17	-33	-56	65	-89	-23	-24	41	23
-105	-88	137	-193	17	-56	81	17	-275	-252	373	-527	23	-154	219	23
-555	-572	797	-1127	-17	-330	467	17	-1525	-1548	2173	-3073	-23	-900	1273	23
-3293	-3276	4645	-6569	17	-1924	2721	17	-8967	-8944	12665	-17911	23	-5246	7419	23
-19135	-19152	27073	-38287	-17	-11214	15859	17	-52185	-52208	73817	-104393	-23	-30576	43241	23

В таблицах 9-12 показаны различные, очевидные способы формирования пятерок чисел Пифагора, а в таблице 13- способы формирования семерок чисел Пифагора-Диофанта. Характерной и очень важной особенностью последовательности этих чисел является то, что эти числа могут быть основой для получения бесконечных числовых последовательностей не только приведенных пятерок чисел, но и расширения числовых последовательностей во всех направлениях вплоть до бесконечно больших значений. Так, например, использование рекуррентного соотношения $P_{n+1}=6*P_n-P_{n-1}$, для каждой пятерки обеспечивает выполнение равенство $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_5^2$.

Из пары соседних чисел

Таблица 13

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
7	13	9	5	18
7	15	11	17	22

получим

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
7	425	249	73	498
7	73	43	13	86
7	13	9	5	18
7	5	11	17	22
7	17	57	97	114
7	97	331	565	662
7	425	249	73	498

Способ размножения последовательности чисел Пифагора-Диофанта приведен в таблице 15.

x	y	z	c	d	p	t
3	4	5	7	1	12	17
5	12	13	17	7	30	43
16	30	34	46	14	80	114
39	80	89	119	41	208	297
105	208	233	313	103	546	779
272	546	610	818	274	1428	2038

Литература

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.
2. Коротков А.В. Элементы классификации пифагоровых чисел. – Новочеркасск: Набла, 2009. 73 с.
3. Коротков А.В. Алгебры над кольцом чисел Пифагора// Сознание и физическая реальность т.16, №11, 2011. (с.17-30).
4. Коротков А.В. Последовательности Фибоначчи-Пифагора// Сознание и физическая реальность. 2013. №7.

КОРОТКОВ А.В. ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИК БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Число фазовых ячеек z_i в элементе фазового пространства

$$\prod_1^n dx_n \prod_1^n dp_n$$

в D -мерном пространстве равно отношению величины элемента к h^n [1]:

$$Z_i = \frac{\prod_1^n dx_n \prod_1^n dp_n}{h^n}.$$

Для выражения произведения дифференциалов импульсов dp через кинетическую энергию ε целесообразно перейти к сферическим координатам [2]

$$\begin{aligned} p_{x_1} &= p \cos \varphi_2, \\ p_{x_2} &= p \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ p_{x_3} &= p \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} p_{x_{D-2}} &= p \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{D-2} \cos \varphi_{D-1}, \\ p_{x_{D-1}} &= p \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{D-2} \sin \varphi_{D-1} \cos \varphi_D, \\ p_{x_D} &= p \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{D-2} \sin \varphi_{D-1} \sin \varphi_D, \end{aligned}$$

$$p \geq 0,$$

$$0 \leq \varphi_i \leq \pi, (i = 2, 3, \dots, D-1)$$

$$0 \leq \varphi_D \leq 2\pi.$$

D -мерный элемент объема задается в этих координатах формулой

$$dV = p^{D-1} (\sin \varphi_2)^{D-2} (\sin \varphi_3)^{D-3} \dots (\sin \varphi_{D-1})^1 dp d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_{D-1} d\varphi_D,$$

Элемент поверхности $n-1$ -мерной единичной сферы $d\Omega$ -формулой

$$d\Omega = (\sin \varphi_3)^{D-3} \dots (\sin \varphi_{D-1})^1 d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_{D-1} d\varphi_D$$

Полная поверхность $D-1$ -мерной единичной сферы Ω представляется формулой

$$\Omega = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma((D-1)/2)}.$$

Кинетическая энергия ε и импульс p связаны функцией Гамильтона

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m},$$

где m - масса частиц фотонного газа, откуда

$$p^{D-1} dp = \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2}}{2} d\varepsilon$$

$$dp = \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2}}{2} d\varepsilon$$

Число энергетических ячеек z_i равно:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{p^{D-1} \sin \phi_D}{h^D} d\phi_2 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D dp dV = \\ &= \frac{(2m)^{D/2} \varepsilon^{(D-2)/2} \sin \phi_n}{2h^D} d\phi_2 \dots d\phi_{D-1} d\phi_D dp dV \end{aligned}$$

Число частиц газа, подчиняющегося статистике Бозе-Эйнштейна в n -мерном пространстве

$$\begin{aligned} N &= \sum_i D_i = \\ &= \frac{(2m)^{D/2}}{2h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon \int_0^V dV \int_0^\pi d\phi_2 \int_0^\pi d\phi_3 \dots \int_0^\pi d\phi_{D-1} \int_0^{2\pi} \sin \phi_D d\phi_D = \\ &= \frac{2\pi V (2m)^{D/2}}{h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon \end{aligned}$$

Полная энергия

$$E = \sum_i D_i \varepsilon_i = \frac{2\pi V (2m)^{D/2}}{h^D} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{(D-2)/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} - 1} d\varepsilon.$$

Излучение рассматривается как идеальный газ, состоящий из частиц света – фотонов. Энергия фотона ε равна $h\nu$, импульс фотона p равен $\frac{h\nu}{c}$, масса фотонов, согласно соотношению между энергией и массой, равняется $\frac{h\nu}{c^2}$.

Данной частоте ν , соответствующей излучению, поляризованному в противоположные стороны, для полного числа частиц можно найти выражение для числа фотонов dN_ν , которым соответствуют частоты в интервале от ν до $\nu + d\nu$:

$$dN_\nu = \frac{2\pi}{h^D} \frac{V_P^{D-1}}{e^{\varepsilon/kT} - 1} dp$$

В этой формуле μ для излучения равно нулю, T – температура фотонного газа.

Энергия равновесного излучения в указанном интервале частот:

$$E_v = e_v dN_v = \frac{8\pi h^{D-2}}{c^D} \frac{V}{e^{hv/kT} - 1} dv$$

Плотность энергии в единичном интервале частот можно получить, разделив энергию на объем V излучения и ширину интервала частот dv :

$$\frac{E_v}{V dv} = \frac{8\pi h^{D-2}}{c^D} \frac{v^D}{e^{hv/kT} - 1}$$

Последнее равенство аналогично формуле Планка и отличается от нее степенью частоты в числителе.

Полная энергия излучения по всем частотам от 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty E_v dv = \frac{2\pi h^D}{c^{D-1}} \int_0^\infty \frac{v^D}{e^{hv/kT} - 1} dv = \\ &= 2\pi^{D+2} h c^2 \left(\frac{kT}{ch} \right)^{D+1} = \sigma_D T^{D+1} \end{aligned}$$

Постоянная Стефана-Больцмана существенно зависит от размерности пространства. Так в случае семимерного пространства, имеем:

$$y_7 = 2\pi h c^2 \frac{8p^8}{15} \left(\frac{k}{hc} \right)^8$$

при $D = 15$

$$y_{15} = 2p h c^2 \frac{9,003 * 10^7}{1,308 * 10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{hc} \right)^{16}$$

Площадь под полученной кривой (Планка) [5] можно найти в относительных единицах, используя соотношение

$$\int_0^\infty \frac{y^D}{e^D - 1} dy = \Gamma(D+1) \zeta(D+1)$$

где Γ – Гамма-, а ζ – дзета функция Римана,

$$\Gamma(D+1) = D!, \quad \zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(2\pi)^D \zeta(D)},$$

$$S = \Gamma(D+1) \cdot \zeta(D+1) = \frac{p^{n+1}}{(\text{зн. } \zeta)}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

D		2	3	4	5	6	7	...	15
$\Gamma(D+1)$	1,00000	2,00000	6,00000	24,0000	120,000	720,000	5040,00	...	1,308*10 ¹²
$\zeta(D+1)=$	1,64493	1,20205	1,08232	1,03692	1,01734	1,00834	1,00407	...	1,00001528
$=\zeta(D+1)$	$\pi^2/6,00$	$\pi^3/25,79$	$\pi^4/90,0$	$\pi^5/295,1$	$\pi^6/925,0$	$\pi^7/2995$	$\pi^8/9450$	...	я'790032220
$S=\Gamma*\zeta$	1,64493	2,40410	6,49390	24,8861	122,081	726,005	5060,51	...	1,308* 10 ¹²
зн. $\zeta/D!$	6,00000	12,8970	15,0000	12,2967	7,70830	4,16010	1,87500	...	6,8848*10 ⁻⁵

Очевидно, что площадь графика $S=\Gamma(D+1)*\zeta(D+1)$, характеризующая энергию, с ростом размерности пространства, интенсивно возрастает.

Функция (знам. ζ)/D! дает график, совпадающий с кривой Планка при D=3, при этом

$$(\text{знам. } \zeta)/D! = E_{V,D}.$$

$$\Gamma(D+1) = D!, \quad \zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(\text{знам. } \zeta)D!}, \quad S = \Gamma * \zeta.$$

Коэффициент пропорциональности определяется формулой Планка.

Так в случае D=3

$$\Gamma(4) = 3!, \quad \zeta(4) = \frac{p^4}{3! \cdot 15},$$

причем постоянная Стефана-Больцмана равняется

$$y_3 = 2phc^2 * \frac{p^4}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^4.$$

При иной размерности пространства меняются величины

$$\Gamma(D+1) = D!, \quad \zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(\text{знам. } \zeta)D!},$$

а, следовательно, и σ_D . Например, при D=7

$$y_7 = 2phc^2 \frac{8p^8}{15} \left(\frac{k}{hc}\right)^8,$$

При D=15

$$y_{15} = 2phc^2 \frac{9,003 \cdot 10^7}{1,308 \cdot 10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{hc}\right)^{16}.$$

Найденные коэффициенты и соотношения могут корректироваться, например, при получении формулы Планка для распределения энергии по длинам волн. Однако можно говорить о возрастании функции Планка с ростом размерности вплоть до самых больших значений энергий и достижения самых малых размеров частиц.

Таким образом, в многомерном пространстве изменяются энергетические величины, в частности необходимо рассматривать n-мерное фазовое пространство с n-координатами и n-компонентами импульса. Это влечет за собой увеличение размерности статистики Бозе-Эйнштейна, и получаемой из неё формулы Планка. Т.е. необходимо рассматривать

многомерную векторную алгебру, которая включает трехмерную векторную алгебру, как подалгебру.

В такой формуле Планка существенно возрастает степень числителя, а, следовательно, все энергетические показатели. С увеличением энергии существенно уменьшается расстояние до центра частиц. Уменьшение расстояния и увеличение силовых воздействий происходит при увеличении размерности векторной алгебры. Отметим, что нами разработаны основы 7-, 15-, 31-мерной векторных алгебр [3, 4] и найдены векторные произведения двух векторов для 63-, 127-, ..., 2047-мерной векторных алгебр. Процесс может быть продолжен до бесконечно больших величин. Алгебры больших размерностей более симметричны, нежели алгебры меньших размерностей.

Литература

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: «Наука», 1971.
2. Карякин Н. И. и др. Краткий справочник по физике. М.: ГИ «Высшая школа», 1963. - 559 с.
3. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
4. Коротков А. В. Элементы многомерного (15- и 31-мерного) векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2012. 76с.
5. Коротков А. В. Формула Планка в D-мерных пространствах// Альманах современной науки и образования. 2013. № 3 (70).

КОРОТКОВ А.В. РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Будем искать решения $D = \lambda_i + i$ -мерного уравнения Гельмгольца
($i = 1, 2, \dots, D-2, D-1$), ($\lambda_i = D-1, D-2, \dots, 2, 1$)

$$\Delta_i \Phi_i + m_i^2 \Phi_i = 0,$$

записанного в сферической D -мерной системе координат $(\Phi_1(r_1, \phi_2, \dots, \phi_{\lambda_1+2}))$
[1;2], понимая под D – размерность векторной алгебры, в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_1^{\lambda_i}} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^{\lambda_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_1^2 S_2^{\lambda_{i+1}}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{i+1}} \left(S_2^{\lambda_{i+1}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_{i+1}} \right) + \frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2} \frac{\partial}{\partial \varphi_{i+2}} \left(S_{i+2}^{\lambda_{i+2}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_{i+2}} \right) + \dots + \\ & + \frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 \dots S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\lambda_{i+1}}} \left(S_{\lambda_{i+1}}^2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_{\lambda_{i+1}}} \right) + \frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 \dots S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2 S_{\lambda_i}} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\lambda_i}} \left(S_{\lambda_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_{\lambda_i}} \right) + \\ & \frac{1}{r_1^2 S_{i+1}^2 S_{i+2}^2 \dots S_{\lambda_{i+2}}^2 S_{\lambda_{i+1}}^2 S_{\lambda_i}^2} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \varphi_D^2} + m_i^2 \Phi_i = 0, \end{aligned}$$

где $S_i = \sin \varphi_i$, методом разделения переменных, полагая

$$\Phi_i(r_1, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D) = \psi_i(r_1) \Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+1}}{r_1^{\lambda_i}} \frac{d}{dr_1} \left(r_1^{\lambda_i} \frac{d\psi_i}{dr_1} \right) + \frac{\psi_i}{r_1^2} \Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_i^2 \psi_i \Phi_{i+1} = 0$$

или

$$\frac{(r_1^{\lambda_i} \psi_i')'}{r_1^{\lambda_{i+1}} \psi_i} = - \frac{\Delta_{i+1} \Phi_{i+1}}{\Phi_{i+1}} = m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}),$$

т.е., полагая $i=1$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \Phi_{i+1} = 0, \\ \frac{1}{r_1^{\lambda_i}} (r_1^{\lambda_i} \psi_i')' + \left(m_i^2 - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{r_1^2} \right) \psi_i = 0. \end{cases}$$

Подстановка $x_i = m_i r_1$, $y_i = \psi_i x_i^{\lambda_{i+1}/2}$, во второе из них приводит к уравнению Бесселя порядка $m_{i+1} + \lambda_{i+1}/2$:

$$\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} + \frac{1}{x_i} \frac{dy_i}{dx_i} + \left(1 - \frac{(m_{i+1} + \lambda_{i+1}/2)^2}{x_i^2} \right) y_i = 0$$

или

$$\frac{1}{x_i} \frac{d}{dx_i} \left(x_i \frac{dy_i}{dx_i} \right) + \left(1 - \frac{(m_{i+1} + \lambda_{i+1}/2)^2}{x_i^2} \right) y_i = 0,$$

т.е. к цилиндрическим функциям порядка $m_{i+1} + \lambda_{i+1}/2$.

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{i+1}\Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\Phi_{i+1} = 0,$$

при

$$\Phi_{i+1} = \Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D),$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D) = \psi_{i+1}(\varphi_{i+1})\Phi_{i+2}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \frac{d}{d\varphi_i} \left(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_{i+1} \frac{d\psi_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} \right) + \frac{\psi_{i+1}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \Delta_{i+2}\Phi_{i+2} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \cdot \psi_{i+1}\Phi_{i+2} = 0$$

или

$$\frac{\left(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i' \right)' + m_i(m_i + \lambda_{i+1}) \sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}} \varphi_i \psi_i} = - \frac{\Delta_{i+2}\Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}} = m_{i+2}(m_{i+2} + \lambda_{i+2}),$$

т.е., при $i=1$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1}\Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})\Phi_{i+1} = 0, \\ \frac{1}{\sin^{\lambda_i} \varphi_i} \left(\sin^{\lambda_i} \varphi_i \psi_i' \right)' + \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{\sin^i \varphi_i} \right) \psi_i = 0. \end{cases}$$

Вводя переменную $x_i = \cos \varphi_i$ и обозначая $V_i(x_i) = \psi_i(\varphi_i)$ из второго уравнения, получим соотношение

$$\frac{d}{dx_i} \left((1-x_i^2)^3 \frac{dV_i}{dx_i} \right) + (1-x_i^2)^2 \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2} \right) V_i = 0.$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx_i} (1-x_i^2)^{\lambda_{i+2}} \frac{dV_i}{dx_i} + (1-x_i^2)^{\lambda_{i+3}} \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2} \right) V_i = 0,$$

для которого подстановка $V_i(x) = (1-x_i^2)^{\frac{m_{i+1}}{2}} y_i(x)$, $V_i(\pm 1) \neq 0$, дает

$$\begin{aligned} (1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2m_{i+1} + \lambda_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + (m_i - m_{i+1})(m_i + m_{i+1} + \lambda_i) y_i &= 0, \\ y_i(\pm 1) &\neq 0. \end{aligned}$$

Обозначив далее $2m_{i+1} + \lambda_i = 2\alpha_i$ и $m_i - m_{i+1} = n_i$, получим уравнение

$$(1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2\alpha_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + n_i(n_i + 2\alpha_i) y_i = 0.$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и Гамма функции

$$C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) = \frac{\Gamma(n_i + 2\alpha_i)}{\Gamma(n_i + 1)\Gamma(2\alpha_i)} F(n_i + 2\alpha_i; -n_i; \alpha_i + \frac{1}{2}; \frac{1-x_i}{2}), \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

как многочлены при значениях n_i с коэффициентами при h^{n_i} в разложении

функции $(1 - 2hx + h^2)^{\alpha_i}$ по степеням h :

$$(1 - 2hx + h^2)^{\alpha_i} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) h^{n_i}.$$

В частности, при $i = 2$, $\lambda_2 = D - 2$, имеем:

$$(1 - x_2^2) \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} - (2\alpha_2 + 1)x_2 \frac{dy_2}{dx_2} + n_2(n_2 + 2\alpha_2)y_2 = 0, \quad y_2(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n_2 &= m_2 - m_3; & m_2 &= \alpha_2 + n_2 - \frac{\lambda_2}{2}; \\ \alpha_2 &= m_3 + \frac{\lambda_2}{2}; & m_3 &= \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{2}; \end{aligned}$$

так что

$$C_{n_2}^{\alpha_2}(x_2) = \frac{\Gamma(n_2 + 2\alpha_2)}{\Gamma(n_2 + 1)\Gamma(2\alpha_2)} \times F(n_2 + 2\alpha_2; -n_2; \alpha_2 + \frac{1}{2}; \frac{1 - x_2}{2}), n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \Phi_{i+1} = 0,$$

при

$$\Phi_{i+1} = \Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D),$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D) = \psi_{i+1}(\varphi_{i+1}) \Phi_{i+2}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \frac{d}{d\varphi_i} \left(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_{i+1} \frac{d\psi_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} \right) + \frac{\psi_{i+1}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \Delta_{i+2} \Phi_{i+2} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \cdot \psi_{i+1} \Phi_{i+2} = 0$$

или

$$\frac{(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i')' + m_i(m_i + \lambda_{i+1}) \sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}} \varphi_i \psi_i} = - \frac{\Delta_{i+2} \Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}} = m_{i+2}(m_{i+2} + \lambda_{i+2}),$$

т.е., полагая $i=2$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \Phi_{i+1} = 0, \\ \frac{1}{\sin^{\lambda_i} \varphi_i} (\sin^{\lambda_i} \varphi_i \psi_i')' + \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{\sin^i \varphi_i} \right) \psi_i = 0. \end{cases}$$

Вводя переменную $x_i = \cos \varphi_i$ и обозначая $V_i(x_i) = \psi_i(\varphi_i)$ из второго уравнения, получим соотношение

$$\frac{d}{dx_i} \left((1 - x_i^2)^3 \frac{dV_i}{dx_i} \right) + (1 - x_i^2)^2 \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1 - x_i^2} \right) V_i = 0.$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx_i} (1-x_i^2)^{\lambda_{i+2}} \frac{dV_j}{dx_i} + (1-x_i^2)^{\lambda_{i+3}} \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2} \right) V_i = 0,$$

для которого подстановка $V_i(x) = (1-x_i^2)^{\frac{m_{i+1}}{2}} y_i(x)$, $V_i(\pm 1) \neq 0$, дает

$$(1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2m_{i+1} + \lambda_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + (m_i - m_{i+1})(m_i + m_{i+1} + \lambda_i) y_i = 0,$$

$$y_i(\pm 1) \neq 0.$$

Обозначив далее $2m_{i+1} + \lambda_i = 2\alpha_i$ и $m_i - m_{i+1} = n_i$, получим уравнение

$$(1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2\alpha_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + n_i(n_i + 2\alpha_i) y_i = 0.$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и Гамма функции

$$C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) = \frac{\Gamma(n_i + 2\alpha_i)}{\Gamma(n_i + 1)\Gamma(2\alpha_i)} F(n_i + 2\alpha_i; -n_i; \alpha_i + \frac{1}{2}; \frac{1-x_i}{2}), \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

как многочлены при значениях n_i с коэффициентами при h^{n_i} в разложении функции $(1-2hx+h^2)^{\alpha_i}$ по степеням h :

$$(1-2hx+h^2)^{\alpha_i} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) h^{n_i}.$$

В частности, при $i=2$, $\lambda_2 = D-2$ имеем:

$$(1-x_2^2) \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} - (2\alpha_2 + 1) x_2 \frac{dy_2}{dx_2} + n_2(n_2 + 2\alpha_2) y_2 = 0, \quad y_2(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n_2 &= m_2 - m_3; & m_2 &= \alpha_2 + n_2 - \frac{\lambda_2}{2}; \\ \alpha_2 &= m_3 + \frac{\lambda_2}{2}; & m_3 &= \alpha_2 - \frac{\lambda_2}{2}; \end{aligned}$$

так что

$$C_{n_2}^{\alpha_2}(x_2) = \frac{\Gamma(n_2 + 2\alpha_2)}{\Gamma(n_2 + 1)\Gamma(2\alpha_2)} \times F(n_2 + 2\alpha_2; -n_2; \alpha_2 + \frac{1}{2}; \frac{1-x_2}{2}), n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Решения первого уравнения системы

$$\Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \Phi_{i+1} = 0,$$

при

$$\Phi_{i+1} = \Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D),$$

будем искать методом разделения переменных

$$\Phi_{i+1}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D) = \psi_{i+1}(\varphi_{i+1}) \Phi_{i+2}(\varphi_{i+1}, \dots, \varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{i+2}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \frac{d}{d\varphi_i} \left(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_{i+1} \frac{d\psi_{i+1}}{d\varphi_{i+1}} \right) + \frac{\psi_{i+1}}{\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i} \Delta_{i+2} \Phi_{i+2} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \cdot \psi_{i+1} \Phi_{i+2} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\left(\sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i'\right)' + m_i(m_i + \lambda_{i+1}) \sin^{\lambda_{i+1}} \varphi_i \psi_i}{\sin^{\lambda_{i+3}} \varphi_i \psi_i} = -\frac{\Delta_{i+2} \Phi_{i+2}}{\Phi_{i+2}} = m_{i+2}(m_{i+2} + \lambda_{i+2}),$$

т.е., полагая $i=3$, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{i+1} \Phi_{i+1} + m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1}) \Phi_{i+1} = 0, \\ \left[\frac{1}{\sin^{\lambda_i} \varphi_i} \left(\sin^{\lambda_i} \varphi_i \psi_i'\right)' + \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{\sin^i \varphi_i} \right) \right] \psi_i = 0. \end{cases}$$

Вводя переменную $x_i = \cos \varphi_i$ и обозначая $V_i(x_i) = \psi_i(\varphi_i)$ из второго уравнения, получим соотношение

$$\frac{d}{dx_i} \left((1-x_i^2)^3 \frac{dV_i}{dx_i} \right) + (1-x_i^2)^2 \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2} \right) V_i = 0.$$

Это уравнение может рассматриваться как частный случай более общего уравнения

$$\frac{d}{dx_i} (1-x_i^2)^{\lambda_{i+2}} \frac{dV_i}{dx_i} + (1-x_i^2)^{\lambda_{i+3}} \left(m_i(m_i + \lambda_i) - \frac{m_{i+1}(m_{i+1} + \lambda_{i+1})}{1-x_i^2} \right) V_i = 0,$$

для которого подстановка $V_i(x) = (1-x_i^2)^{\frac{m_{i+1}}{2}} y_i(x)$, $V_i(\pm 1) \neq 0$, дает

$$\begin{aligned} (1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2m_{i+1} + \lambda_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + (m_i - m_{i+1})(m_i + m_{i+1} + \lambda_i) y_i &= 0, \\ y_i(\pm 1) &\neq 0. \end{aligned}$$

Обозначив далее $2m_{i+1} + \lambda_i = 2\alpha_i$ и $m_i - m_{i+1} = n_i$, получим уравнение

$$(1-x_i^2) \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} - (2\alpha_i + 1) x_i \frac{dy_i}{dx_i} + n_i(n_i + 2\alpha_i) y_i = 0.$$

Одним из решений этого дифференциального уравнения являются функции Гегенбауэра, выражаемые через гипергеометрическую и Гамма функции

$$C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) = \frac{\Gamma(n_i + 2\alpha_i)}{\Gamma(n_i + 1)\Gamma(2\alpha_i)} F(n_i + 2\alpha_i; -n_i; \alpha_i + \frac{1}{2}; \frac{1-x_i}{2}), \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

как многочлены при значениях n_i с коэффициентами при h^{n_i} в разложении функции $(1-2hx+h^2)^{\alpha_i}$ по степеням h :

$$(1-2hx+h^2)^{\alpha_i} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) h^{n_i}.$$

При $i=3$, $\lambda_3 = D-3$, имеем:

$$(1-x_3^2) \frac{d^2 y_3}{dx_3^2} - (2a_3 + 1) x_3 \frac{dy_3}{dx_3} + n_3(n_3 + \lambda_3) y_3 = 0, \quad y_3(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n_3 &= m_3 - m_4; & m_3 &= \alpha_3 + n_3 - \frac{\lambda_3}{2}; \\ \alpha_3 &= m_4 + \frac{\lambda_3}{2}; & m_4 &= \alpha_3 - \frac{\lambda_3}{2}; \end{aligned}$$

так что

$$C_{n_3}^{\alpha_3}(x_3) = \frac{\Gamma(n_3 + 2\alpha_3)}{\Gamma(n_3 + 1)\Gamma(2\alpha_3)} \times F(n_3 + 2\alpha_3; -n_3; \alpha_3 + \frac{1}{2}; \frac{1-x_3}{2}), \quad n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогичным образом получаются решения подобных уравнений при

$i = 4, 5, \dots, D-2; \quad \lambda_4, \lambda_5, \dots, \lambda_{D-2}, \dots$

Решение уравнения $\Delta_{D-2}\Phi_{D-2} + m_{D-2}(m_{D-2} + 2)\Phi_{D-2} = 0, \quad \Phi_{D-2} = \Phi_{D-2}(\varphi_{D-2}, \dots, \varphi_D)$

будем искать методом разделения переменных, т.е.

$$\Delta_{D-2}\Phi_{D-2}(\varphi_{D-2}, \dots, \varphi_D) = \psi_{D-1}(\varphi_{D-1})\Phi_{D-1}(\varphi_{D-1}, \varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_{D-1}}{\sin^2 \varphi_{D-2}} \frac{d}{d\varphi_{D-2}} \left(\sin^2 \varphi_{D-2} \frac{d\psi_{D-2}}{d\varphi_{D-2}} \right) + \frac{\psi_{D-2}}{\sin^2 \varphi_{D-2}} \Delta_{D-1}\Phi_{D-1} + m_{D-2}(m_{D-2} + 2) \cdot \psi_{D-2}\Phi_{D-1} = 0$$

или

$$\frac{(\sin^2 \varphi_{D-2} \psi'_{D-2})' + m_{D-2}(m_{D-2} + 2) \sin^2 \varphi_{D-2} \psi_{D-2}}{\sin^2 \varphi_{D-2} \psi_{D-2}} = \frac{\Delta_{D-1}\Phi_{D-1}}{\Phi_{D-1}} = m_{D-1}(m_{D-1} + 1),$$

т.е., при $i = D-2$, систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_{D-1}\Phi_{D-1} + m_{D-1}(m_{D-1} + 1)\Phi_{D-1} = 0, \\ \frac{1}{\sin^2 \varphi_{D-2}} (\sin^2 \varphi_{D-2} \psi'_{D-2})' + \left(m_{D-2}(m_{D-2} + 2) - \frac{m_{D-1}(m_{D-1} + 1)}{\sin^2 \varphi_{D-2}} \right) \psi_{D-2} = 0. \end{cases}$$

Вводя переменную $x_{D-2} = \cos \varphi_{D-2}$ после рассмотренных выше преобразований, получим при $\lambda_{D-2} = 2$

$$(1 - x_{D-2}^2) \frac{d^2 y_{D-2}}{dx_{D-2}^2} - (2m_{D-1} + \lambda_{D-1} + 1)x_{D-2} \frac{dy_{D-2}}{dx_{D-2}} + (m_{D-2} - m_{D-1})(m_{D-2} + m_{D-1} + 2)y_{D-2} = 0,$$

и, следовательно, $2m_{D-1} + \lambda_{D-2} = 2\alpha_{D-2}$ и $m_{D-2} - m_{D-1} = n_i$, так что

$$C_{n_i}^{\alpha_i}(x_i) = \frac{\Gamma(n_i + 2\alpha_i)}{\Gamma(n_i + 1)\Gamma(2\alpha_i)} \times F(n_i + 2\alpha_i; -n_i; \alpha_i + \frac{1}{2}; \frac{1-x_i}{2}), n_i = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, при $i = D-2$, $\lambda_{D-2} = 2$, имеем

$$(1 - x_{D-2}^2) \frac{d^2 y_{D-2}}{dx_{D-2}^2} - (2a_{D-2} + 1)x_{D-2} \frac{dy_{D-2}}{dx_{D-2}} + n_{D-2}(n_{D-2} + D - 2)y_{D-2} = 0, \quad y_{D-2}(\pm 1) \neq 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} n_{D-2} &= m_{D-2} - m_{D-1}; & m_{D-2} &= \alpha_{D-2} + n_{D-2} - \frac{\lambda_{D-2}}{2}; \\ \alpha_{D-2} &= m_{D-2} + \frac{\lambda_{D-2}}{2}; & m_{D-2} &= \alpha_{D-2} - \frac{\lambda_{D-2}}{2}; \end{aligned}$$

так что

$$C_{n_{D-2}}^{\alpha_{D-2}}(x_{D-2}) = \frac{\Gamma(n_{D-2} + 2\alpha_{D-2})}{\Gamma(n_{D-2} + 1)\Gamma(2\alpha_{D-2})} \times F(n_{D-2} + 2\alpha_{D-2}; -n_{D-2}; \alpha_{D-2} + \frac{1}{2}; \frac{1-x_{D-2}}{2}), n_{D-2} = 0, 1, 2, \dots$$

Решение уравнения $\Delta_{D-1}\Phi_{D-1} + m_{D-1}(m_{D-1} + 1)\Phi_{D-1} = 0, \quad \Phi_{D-1} = \Phi_{D-1}(\varphi_{D-1}, \varphi_D)$ будем

искать методом разделения переменных

$$\Phi_{D-1}(\varphi_{D-1}, \varphi_D) = \psi_{D-1}(\varphi_{D-1}) \Phi_D(\varphi_D).$$

В результате имеем

$$\frac{\Phi_D}{\sin \varphi_{D-1}} \frac{d}{d\varphi_{D-1}} \left((\sin \varphi_{D-1} \frac{d\psi_{D-1}}{d\varphi_{D-1}}) \right) + \frac{\psi_{D-1}}{\sin^2 \varphi_{D-1}} \Delta_D \Phi_D + m_{D-1}(m_{D-1} + 1) \cdot \psi_{D-1} \Phi_D = 0$$

или

$$\frac{(\sin \varphi_{D-1} \psi'_{D-1})' + m_{D-1}(m_{D-1} + 1) \sin \varphi_{D-1} \psi_{D-1}}{\sin^{-1} \varphi_{D-1} \psi_{D-1}} = \frac{\Delta_D \Phi_D}{\Phi_D} = m_D(m_D + 0),$$

т.е., полагая $i=D-1$, имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_D \Phi_D + m_D(m_D + 0) \Phi_D = 0, \\ \frac{1}{\sin \varphi_{D-1}} (\sin \varphi_{D-1} \psi'_{D-1})' + \left(m_{D-1}(m_{D-1} + 1) - \frac{m_D(m_D + 0)}{\sin^2 \varphi_{D-1}} \right) \psi_{D-1} = 0. \end{cases}$$

Вводя переменную $x_{D-1} = \cos \varphi_{D-1}$ после рассмотренных выше преобразований получим, при $\lambda_{D-1} = 1$

$$(1 - x_{D-1}^2) \frac{d^2 y_{D-1}}{dx_{D-1}^2} - (2m_D + \lambda_D + 1) x_{D-1} \frac{dy_{D-1}}{dx_{D-1}} + (m_{D-1} - m_D)(m_{D-1} + m_D + 1) y_{D-1} = 0,$$

и, следовательно, $2m_D + \lambda_{D-1} = 2\alpha_{D-1}$ и $m_{D-1} - m_D = n_{D-1}$, так что

$$C_{n_{D-1}}^{\alpha_{D-1}}(x_{D-1}) = \frac{\Gamma(n_{D-1} + 2\alpha_{D-1})}{\Gamma(n_{D-1} + 1) \Gamma(2\alpha_{D-1})} \times F(n_{D-1} + 2\alpha_{D-1}; -n_{D-1}; \alpha_{D-1} + \frac{1}{2}; \frac{1 - x_{D-1}}{2}), n_{D-1} = 0, 1, 2, \dots$$

что соответствует решению уравнения Лежандра.

Таким образом, найдено решение n -мерного уравнения Гельмгольца. Аналогичным образом можно найти решение других многомерных уравнений в частных производных – уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, диффузии и др [3;4].

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х тт. Т. II. – М.: «Наука», 1974. 295 с.
2. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во “НОК”, 2011. 36с.
4. Коротков А. В. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.

КОРОТКОВ А.В.

ФОРМУЛА ПЛАНКА В D-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

О размерности многомерных векторных алгебр

Широко распространенная и сыгравшая в естествознании замечательную роль трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана), доминирующая уже в течение полутора столетий, имеет, в то же время, существенные ограничения в описании различных физических процессов. Это связано, например, с тем, что ограничение размерности приводит к ограничению степени зависимости силовых величин от расстояний величиной обратной второй степени расстояния. В качестве другого недостатка выступает наличие в трехмерной векторной алгебре лишь трех законов сохранения физических величин и описание процессов лишь с помощью двух первых производных от расстояний.

Это обуславливает невозможность применения 3-D векторных алгебр в области весьма малых расстояний и для увеличения точности описания процессов в области привычных расстояний. Поэтому принципиально важно построение многомерных векторных алгебр, остающихся в рамках линейных векторных пространств, но с фиксированным векторным произведением двух векторов. Этот принцип был использован при создании трехмерной векторной алгебры.

Анализ способов построения векторных алгебр показал, что размерность алгебр определяется числом способов разбиения множества из n элементов на два непустых подмножества и соответствует ряду чисел: 1, 3, 7, 15, 31, ..., 2^n-1 , Он определяется рекуррентной формулой вида:

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}.$$

Эти соотношения создают ряд, определяющий все совершенные числа. Попытка сведения ряда к последовательности классических ортогональных многочленов оказалась неудачной, но позволила получить в рамках соотношения:

$$P_{n+1}(x) = (A_n * x + B_n) P_n(x) - C_n * P_{n-1}(x),$$

где

$$A_n = -1/(2^n-1); B_n = 3; C_n = 2$$

следующую последовательность многочленов:

$$P_{-1}(x) = 0;$$

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = (-x/1+3) = -x+3;$$

$$P_2(x) = (-x/3+3)(-x+3)-2 = x^2/3-4x+7;$$

$$P_3(x) = (-x/7+3) (x^2/3-4x+7)-2(-x+3) = -x^3/21+11/7x^2-11x+15;$$

$$P_4(x) = (-x/15+3) (-x^3/21+11/7x^2-11x+15)-2(x^2/3-4x+7) = \\ = x^4/315-26/105x^3+502/105x^2-26x+31;$$

$$P_5(x) = (-x/31+3) (x^4/315-26/105x^3+502/105x^2-26x+31)-2(-x^3/21+11/7x^2-11x+15) = \\ = -x^5/9765+ 15563/105 x^4-2610/3255x^3+39186/3255x^2 - 57x + 63;$$

...

Здесь, очевидно, свободные члены последовательности многочленов создают числовой ряд, определяющий соотношение:

$$P_{n+1(0)} = 3P_{n(0)}-2P_{n-1(0)}.$$

Он соответствует производящей функции:

$$P_n(x)=e^x(e^x-n),$$

так что

$$P_n(x)=e^x(e^x-n)+0e^{2x},$$

$$P_n'(x)=e^x(e^x-n)+1e^{2x}$$

и

$$P_n''(x)=e^x(e^x-n)+3e^{2x},$$

причем дифференциальное уравнение зависимости имеет вид:

$$P_n''(x)-3P_n'(x)+2P_n(x)=0.$$

Запишем:

$$y = e^x(e^x - n) + 0e^{2x}$$

$$y' = e^x(e^x - n) + 1e^{2x}$$

$$y'' = e^x(e^x - n) + 3e^{2x}$$

$$y''' = e^x(e^x - n) + 7e^{2x}$$

$$y^{(4)} = e^x(e^x - n) + 15e^{2x}$$

...

$$y^{(k)} = e^x(e^x - n) + (2^k - 1)e^{2x}$$

Очевидно, что последние элементы, каждой из этих формул создают ряд требуемых значений размерности многомерных векторных алгебр

$$..., -\frac{15}{16}, -\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3, 7, 15, ...$$

Важным уравнением выступает рекуррентное соотношение для производных

$$y^{(k)} - 3y^{(k-1)} + 2y^{(k-2)} = 0,$$

величины полиномов

$$P_{n+1}(x) = 3P_n(x) - 2P_{n-1}(x),$$

и разностей функций

$$dy^{(k)} - 3dy^{(k-1)} + 2dy^{(k-2)} = 0, \quad dy^{(i)} = y^{(i)} - y^{(i-1)}.$$

Очевидно, что набор возможностей, предложенной производящей функцией, весьма широк. Рекуррентное соотношение приемлемо для связи переменных в дифференциальной форме

$$y^{(k)} - 3y^{(k-1)} + 2y^{(k-2)} = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad y'' - 3y' + 2y = (e^x(e^x - n) + 3e^{2x}) - 3(e^x(e^x - n) + e^{2x}) + 2(e^x(e^x - n)) = 0,$$

или

$$y''' - 3y'' + 2y' = (e^x(e^x - n) + 15e^{2x}) - 3(e^x(e^x - n) + 7e^{2x}) + 2(e^x(e^x - n) + 3e^{2x}) = 0.$$

Разложение функции в степенной ряд можно осуществить, полагая $n=1$ и имея разность $y = e^{2x} - e^x$, тогда:

$$e^{2x} = 1 + \frac{(2x)^1}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^8}{8!} \dots;$$

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \dots;$$

$$y(x) = 1 * \frac{x^1}{1!} + 3 * \frac{x^2}{2!} + 7 * \frac{x^3}{3!} + 15 * \frac{x^4}{4!} + 31 * \frac{x^5}{5!} + 63 * \frac{x^6}{6!} + 127 * \frac{x^7}{7!} + 255 * \frac{x^8}{8!} \dots;$$

$$y(x) = e^{2x} - e^x.$$

Разложение в степенной ряд, очевидно, дает требуемую последовательность размерностей векторных алгебр $0, 1, 3, 7, 15, \dots, 2^n - 1, \dots$

Вместе с тем, разности различных порядков производных дают иные последовательности с совершенно иными свойствами чисел, например

$$\dots \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$$

Отметим, что если определить закон умножения и (сложения) рассмотренного выше ряда чисел в виде

$$(a \otimes b) = (ab) + (a+b),$$

$$(a \oplus b) = (a+b) + (ab),$$

$$(a \otimes b) = (a \oplus b),$$

то таблица умножения (сложения) определяется числами того же ряда (табл.1).

Таблица 1

таблица умножения и сложения чисел ряда $P_n(0)$									
\	1	3	7	15	31	63	127	255	511
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383
63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767

Очевидно, что эти числа не выходят за рамки указанного числового ряда. Вторую последовательность эта таблица не удовлетворяет.

Силовые воздействия по законам Ньютона и Кулона не достаточно резко возрастают с уменьшением расстояния (обратно пропорционально второй степени расстояний (R^{-2})), что определяется трехмерной векторной алгеброй. Эту ситуацию могут исправить многомерные векторные алгебры, обеспечивающие обратную пропорциональность величин в значительно большей ($R^{-(D-1)}$) степени. Нами разработаны основы 7-ми, 15-ти и 31-мерной векторных алгебр, а также найден способ построения алгебр любой размерности из этого ряда чисел. При этом определены векторные произведения двух векторов 63-х, 127-ми, 255-ти, 511-ти, 1023-х и 2047-ми мерных векторных алгебр. Этот список может быть продолжен как угодно далеко.

Отметим, что вторым по значимости законом распределения силовых взаимодействий на относительно малых расстояниях является закон Юкавы, в котором использована экспоненциальная зависимость сил от расстояний наряду со степенной. Характерную экспоненциальную особенность проявляют ортогональные обобщенные многочлены Лагерра. Не менее важны также статистика Бозе-Эйнштейна и формула Планка, обеспечившие торжество степенных и экспоненциальных соотношений, а также комбинаторного анализа для описания силовых взаимодействий на малых расстояниях.

Таким образом, напрашивается вывод:

- применение многомерных векторных алгебр для описания процессов на малых расстояниях должно сопровождаться использованием экспоненциальных и степенных зависимостей сил от расстояний,
- необходимо использовать комбинаторный анализ при нахождении способов разбиения множества элементов на непустые подмножества,
- необходимо объединить законы Ньютона (Кулона), Юкавы, Планка, статистику Бозе-Эйнштейна и комбинаторный анализ на единой базе 2^n -1-мерных векторных алгебр.

Особое внимание следует уделить возможным законам сохранения. Отметим, что каждой векторной алгебре соответствует закон сохранения оператора момента импульсов как сумма квадратов операторов отдельных координат.

2^n -1-номерным векторным алгебрам соответствует также (векторное) произведение операторов момента импульсов. Именно такой принцип формирования векторных алгебр должен быть положен в основу их определения.

История вопроса

В формировании выдающейся формулы Планка участвовало большое количество физиков и математиков. Наиболее существенные моменты относятся к получению законов теплового излучения. Наибольшие вклады в теорию теплового излучения абсолютно черных тел внесли такие знаменитые физики, как собственно Планк, его предшественники по отдельным частям работы Релей и Джинс, получившие формулу Релея-Джинса, совпадающую с опытной зависимостью распределения излучения абсолютно черного тела по частотам и длинам волн в области больших длин волн. Кроме того, Больцман и Стефан получили закон Стефана-Больцмана для энергетической светимости абсолютно черного тела. Не менее важную зависимость получил Вин, объяснивший смещение максимального значения спектральной плотности энергетической светимости.

По сути вопроса.

Предшественники Планка работали в рамках трехмерной классической термодинамики, как и Планк, построивший свою знаменитую формулу для спектральной плотности энергетической светимости, имеющую вид:

$$E_{\lambda,T} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/k\lambda T} - 1},$$

или

$$E_{\nu,T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

где e – основание натуральных логарифмов, c – скорость света, k – постоянная Больцмана, указал на квантовый характер теплового излучения. В последующем периоде времени серьезные результаты были получены в рамках квантовой статистики Бозе - Эйнштейна и представлении о фотонном газе в фазовом пространстве, определяемом тремя пространственными координатами и тремя координатами импульса частиц. Эта статистика Бозе – Эйнштейна применима к фотонному газу в трехмерном пространстве (шестимерном фазовом пространстве). Квантовая статистика Бозе – Эйнштейна объяснила квантовый характер теплового излучения абсолютно черного тела.

Тем не менее, участие большого числа знаменитых ученых в данной теме не дало ответа на некоторые принципиальные вопросы. Основной из них – это размерность физического пространства, определяющая размерность фазового пространства и вслед за этим – размерность статистики Бозе – Эйнштейна, и, как результат, видоизменение формулы Планка на случай изменения размерности пространства.

В настоящее время, спустя столетие, многомерные пространства никого не удивляют. Разработаны векторные алгебры для пространств больших размерностей (не только 1 и 3, но также векторные алгебры размерности 7, 15, 31), и найдены структурные константы алгебр больших размерностей (63, 127, ..., 1023, 2047, ...).

Это требует нахождения выражения для формулы Планка в случае больших размерностей пространства. С этой целью будем рассматривать формулу Планка в относительных единицах [1]. Для этого полагаем

$$z = \frac{kT}{hc} \lambda, \quad \lambda = \frac{hc}{kT} z, \quad d\lambda = \frac{hc}{kT} dz.$$

Подставив эту замену в формулу Планка

$$E_{\lambda,T} = 2\pi hc^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

и произведя интегрирование, получим формулу

$$E_T = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc} \right)^4 \int_0^\infty \frac{z^{-5}}{e^{1/z} - 1} dz, \quad \text{т.е. } E_z = \frac{z^{-5}}{e^{1/z} - 1}.$$

Интеграл в формуле для E_T равен $\frac{3!\pi^4}{90}$, так что попутно определяется закон Стефана-Больцмана с универсальными константами π , k , h , c .

$$\sigma_3 = 2\pi hc^2 * \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{k}{hc} \right)^4.$$

Формула Планка построена в трехмерном физическом пространстве. Вместе с тем, кроме трехмерного пространства, можно предположить наличие иных пространственных структур. Размерности векторных алгебр при этом определяются числами, которые создают числовой ряд: 1, 3, 7, 15, 31, ..., 2^n-1 , ... или рекуррентным соотношением

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}.$$

Будем рассматривать выражения формулы Планка для размерности пространства $D=n-2$, где $D = 0, 1, 2, \dots$, и показателя степени n , определяемом числителем формулы Планка $n = 2, 3, 4, \dots$. Формула (Планка) в относительных единицах позволяет построить графики для $E_{z,n}$, как функцию z и n (или D). Эти графики для некоторых значений n приведены ниже. На рис. 1 представлены графики зависимости E_z при $z = z(\lambda)$ и $n = 2, 3, 4, \dots$. Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $n = 5$ (или $D = 3$). Амплитуда $E_{n\max}$ резко возрастает с ростом n , что представляет определенные неудобства в работе.

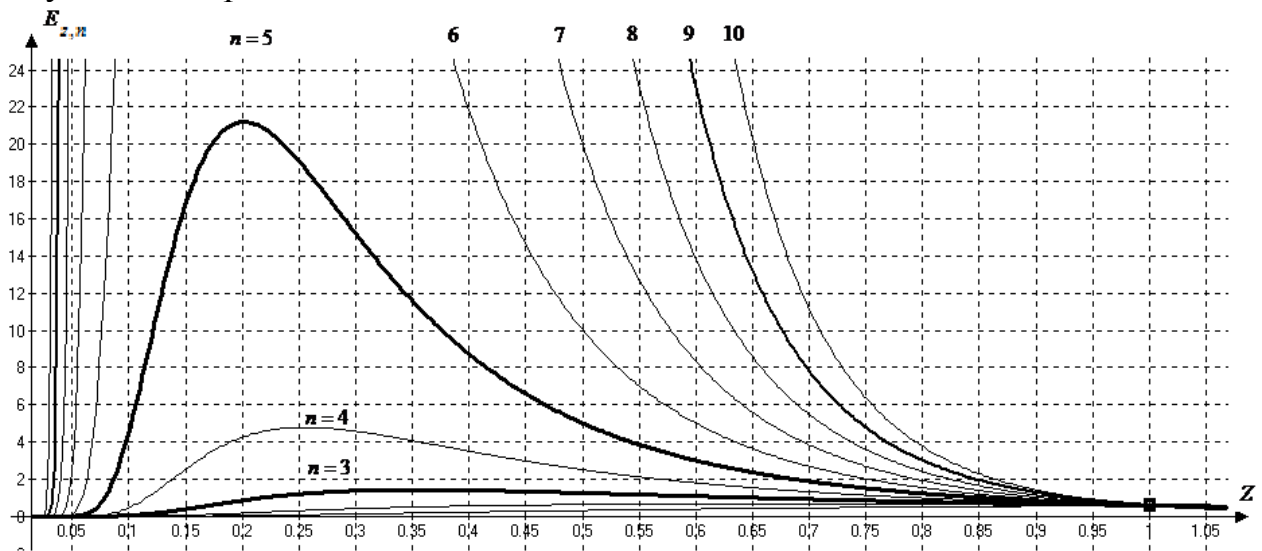


Рис.1

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис.2), но усложняет анализ закономерности.

Рисунки 1 и 2 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений n , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{n,z}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{n,z}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования длин. При больших D кривые приобретают свойства единичного импульсного воздействия.

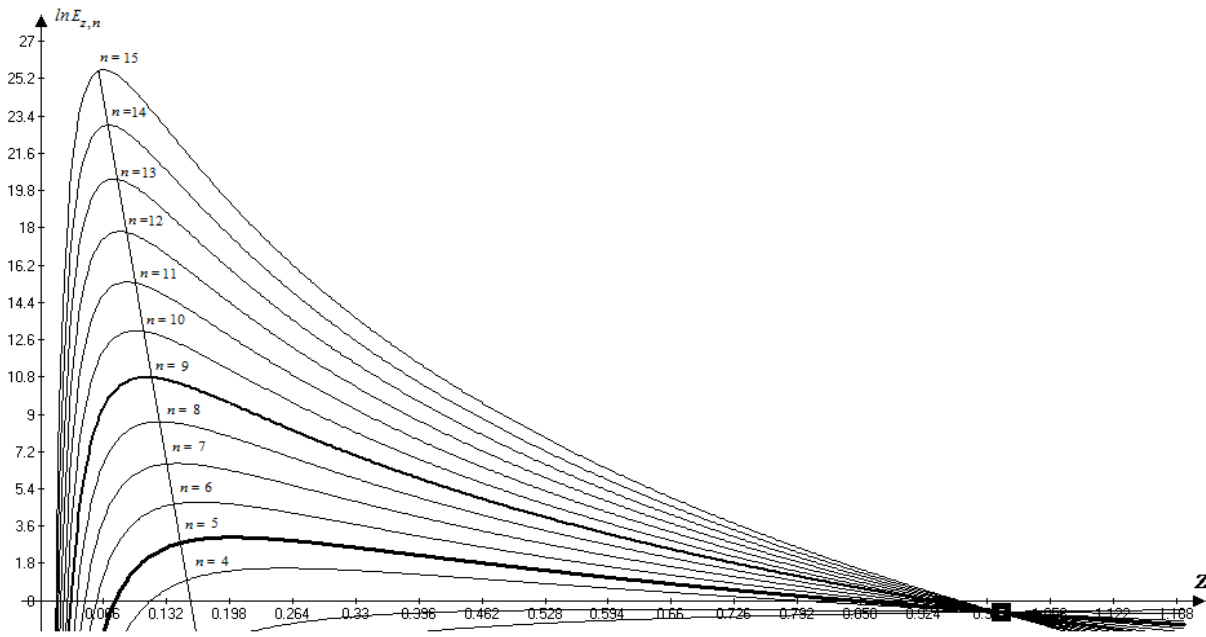


Рис.2

Все графики для формулы Планка при изменении n имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших длинах волн. Увеличение n сопровождается резким ростом амплитуды $E_{n \max}$. Имеет место смещение амплитуды $E_{z \max}$ для различных n в сторону меньших длин волн при увеличении n . Степень смещения беспрестанно уменьшается с ростом n . Степень смещения можно оценить, продифференцировав формулу (Планка) и решив уравнение $\frac{dE_{n,z}}{dz} = 0$. Имеем

$$E_{n,z} = \frac{z^{-n}}{e^{1/z} - 1}$$

дифференцируя по z , получаем соотношение

$$z_{\max}^{-1} = n(1 - e^{-1/z_{\max}}).$$

В многомерном пространстве определяется закон Вина. В случае трехмерного пространства

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,97k} = 2,89 \cdot 10^{-1} [\text{см} / \text{K}] = \text{const.}$$

Для n -мерного пространства максимуму кривой внутри интервала для λ соответствует значение z , обращающее в нуль выражение

$$\frac{dE_{z,n}}{dz} = \frac{z^{-n}}{e^{1/z} - 1} = \frac{n z^{n-1} (e^{1/z} - 1) - z^{-(n+1)} e^{1/z}}{(e^{1/z} - 1)^2}.$$

В результате

$$\frac{1}{z_{\max}} = n(1 - e^{-1/z_{\max}}).$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает таблицу значений $z_{\max}$, соответствующих максимальному значению $E_{z_{\max}}$ и, очевидно,

отклоняющемуся с ростом n в сторону меньших значений z . С ростом n степень отклонения $E_{z_{\max}}$ беспрестанно уменьшается (табл.2).

Таблица 2

D	n	$z_{\max}$	D	n	$z_{\max}$	D	n	$z_{\max}$
0	2	1,593624262	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>8,998881625</u>	14	16	15,99999820
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>2,821439372</u>	8	10	9,999545794	<u>15</u>	<u>17</u>	<u>16,99999930</u>
2	4	3,920690395	9	11	10,99981625	16	18	17,99999973
<u>3</u>	<u>5</u>	<u>4,965114232</u>	10	12	11,99992626	17	19	18,99999989
4	6	5,984901226	11	13	12,99997061	18	20	19,99999996
5	7	6,993575687	12	14	13,99998836	19	21	20,99999998
6	8	7,997309068	13	15	14,99999541	20	22	21,99999999

Следует отметить, что амплитуды $E_{z,n}$ для различных $z_{\max}$ лежат на одной и той же кривой, определяемой уравнением

$$E_{z_{\max}} = e^{\left(\frac{1}{2,821z}\right)^2} - 1.$$

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного $z_{\max}$ к размерным величинам, находим:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{4,97kT}$$

или

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,97k} = 2,89 \cdot 10^{-1} [\text{см} / \text{K}] = \text{const},$$

что соответствует закону Винна.

Будем рассматривать выражение формулы Планка для размерности пространства D в зависимости от частоты излучения в относительных единицах. Это позволяет построить графики для $E_{y,D}$, как функцию y и D . На рис. 3 представлены графики зависимости E_y при $y = y(\nu)$ и $D = 2,3,4 \dots$. Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $D = 3$. Амплитуда $E_{y_{\max}}$ резко возрастает с ростом n , что представляет определенные неудобства в работе.

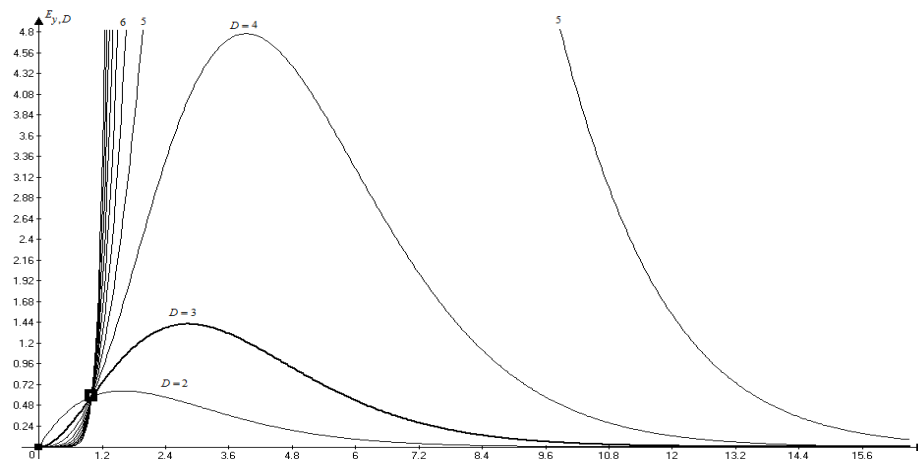


Рис.3

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис.4), но усложняет анализ закономерности.

Рисунки 3 и 4 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений D , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{y,D}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{y,D}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования длин. Следует отметить, что амплитуды $E_{y,D}$ для различных $y_{\max}$ лежат на одной и той же кривой, определяемой уравнением

$$E_{y_{\max}} = e^{\left(\frac{y}{2,821}\right)^2} - 1.$$

Формулу Планка можно записать, как известно, несколько в ином виде как распределение $E_{\nu,T}$ в функции от частоты излучения ν так, что

$$E_{\nu,T} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

причем, используя подстановки

$$y = \frac{hc}{kT} \nu, \quad \nu = \frac{kT}{hc} y, \quad d\nu = \frac{kT}{hc} dy$$

в относительных единицах имеем

$$E_{y,D} = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^{D+1} \frac{y^D}{e^y - 1}.$$

Так, в трехмерном пространстве

$$E_{\nu,3} = \frac{\nu^3}{e^\nu - 1},$$

$$E_{y,3} = 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \frac{y^3}{e^y - 1},$$

т.е. плотность энергии в единичном интервале частот определяется в трехмерном пространстве третьей степенью частоты ν . Размерность пространства D определяет соотношение

$$E_{y,D} = \frac{y^D}{e^y - 1}.$$

В результате имеем распределение плотности энергии в единичном интервале частот в виде графика, представленного на рис.4. Он показывает, что функции (Планка) резко возрастают с ростом степени ν , то есть с ростом размерности пространства D . Все кривые (Планка) при различных ν пересекаются в одной точке с координатами $(1, \frac{1}{e-1})$. Кривые, соответствующие сумме кривой (Планка) и кривой, пропорциональной первой производной, дают величину, пропорциональную кривой, близкой от кривой (Планка). Это способствует определению уравнения, соответствующего кривым (Планка).

Очевидно смещение максимума кривой (Планка) с увеличением частоты в сторону больших частот. Одновременно амплитуда плотности энергии резко возрастает.

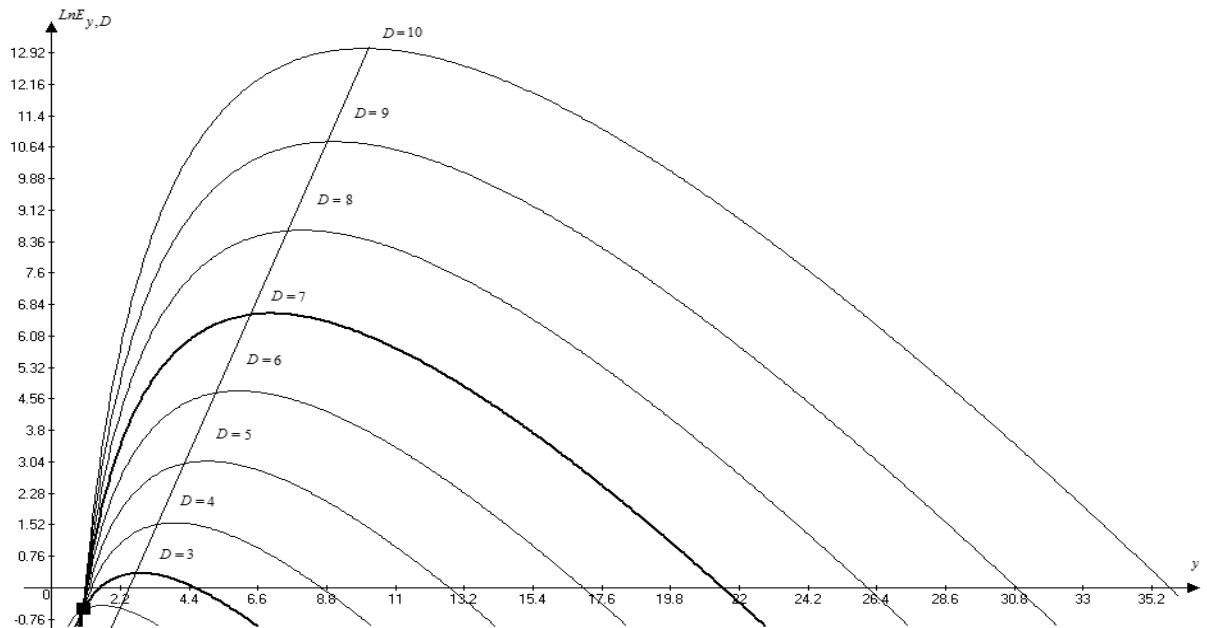


Рис.4

Все графики для формулы Планка при изменении n имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших частотах. Имеет место смещение амплитуды $E_{y \max}$ для различных D в сторону меньших длин волн при увеличении D . Степень смещения беспредельно уменьшается с ростом D . Увеличение D сопровождается резким ростом амплитуды $E_{y \max}$. Степень смещения можно оценить, решив уравнение $\frac{dE_{y,D}}{dy} = 0$ и продифференцировав формулу (Планка) по y

$$E_{y,D} = \frac{y^D}{e^y - 1},$$

получим соотношение

$$y_{\max} = D(1 - e^{-y_{\max}}).$$

В многомерном пространстве также определяется закон Вина.

В случае трехмерного пространства

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,97k} = 2,89 \cdot 10^{-1} [\text{см} / \text{K}] = \text{const.}$$

Для n -мерного пространства максимуму кривой внутри интервала для y соответствует значение y , обращающее в нуль выражение

$$\frac{dE_{y,D}}{dy} = \frac{y^D}{e^y - 1} = \frac{Dy^{D-1}(e^y - 1) - y^{D+1}e^y}{(e^y - 1)^2}.$$

В результате

$$y_{\max} = n(1 - e^{-y_{\max}}).$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает таблицу значений $y_{\max}$, соответствующих максимальному значению $E_{y_{\max}}$ и, очевидно, отклоняющемуся с ростом D в сторону больших значений y . С ростом D степень отклонения $E_{y_{\max}}$ беспредельно уменьшается (табл.3).

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного $y_{\max}$ к размерным величинам, находим:

$$\begin{aligned} \nu_{\max} = \text{const} &= \frac{kT}{h} y_{\max} = \frac{2,82kT}{h} = 4,2 \cdot 10^9 \text{ [Kc}^{-1}\text{]} \\ \frac{\nu_{\max}}{T} &= \frac{2,82k}{h} = \\ \frac{\lambda_{\max}}{T} &= \frac{hc}{4,97k} \\ \frac{\nu_{\max}}{T} &= \frac{2,82k}{h} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = \frac{2,82k}{h} = 4,2 \cdot 10^9 \text{ [(Kг)}^{-1}\text{]} = \text{const}.$$

Очевидно, рассмотрение зависимости y и z от n и D дает целый ряд постоянных размерных и безразмерных величин, а также соотношений между ними при изменении n и D , например, соотношение

$$\lambda_{\max} * \nu_{\max} = \frac{2,82}{4,97} c = 0,567c \text{ [см / сек]}.$$

Таким образом, $\nu_{\max}$ пропорционален температуре.

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного $z_{\max}$ к размерным величинам, находим:

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{4,97kT},$$

или

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4,97k} = 2,89 \cdot 10^{-1} \text{ [см / K]} = \text{const},$$

что соответствует закону Вина.

Такие соотношения можно строить при каждом значении n или D . В результате, например, может быть полезна таблица 5. Площадь под кривой (Планка) в относительных единицах можно найти, используя соотношение

Таблица 3

D	n	y_{max}	D	n	y_{max}	D	n	y_{max}
0	2	1,593624262	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>8,998881625</u>	14	16	15,99999820
1	3	2,821439372	8	10	9,999545794	<u>15</u>	<u>17</u>	<u>16,99999930</u>
2	4	3,920690395	9	11	10,99981625	16	18	17,99999973
<u>3</u>	<u>5</u>	<u>4,965114232</u>	10	12	11,99992626	17	19	18,99999989
4	6	5,984901226	11	13	12,99997061	18	20	19,99999996
5	7	6,993575687	12	14	13,99998836	19	21	20,99999998
6	8	7,997309068	13	15	14,99999541	20	22	21,99999999

Очевидно, что таблицы 2 и 3 фактически одинаковы. Разница заключается лишь в значениях степени числителя формулы Планка и соответствует значениям $n=5$, либо $D=3$. Это определяет величину коэффициентов 4,965... и 2,821... для длин волн и частот соответственно.

Определим также характер изменения площадей кривых (Планка) в зависимости от n или D (табл.3), полученные путем интегрирования.

Таблица 4

$D,(n)$	(3)	2,(4)	3,(5)	4,(6)	5,(6)	6,(8)	7,(9)	...	15,(17)
$\Gamma(D+1)$	1,00000	2,00000	6,00000	24,0000	120,000	720,000	5040,00	...	$1,308 \cdot 10^{12}$
$\zeta(D+1)$	1,64493	1,20205	1,08232	1,03692	1,01734	1,00834	1,00407	...	1,00001528
$\zeta(D+1)$	$\pi^2/6,00$	$\pi^3/25,79$	$\pi^4/90,0$	$\pi^5/295,1$	$\pi^6/925,0$	$\pi^7/2995$	$\pi^8/9450$	...	$\pi^{16}/90032220$
$S = \Gamma * \zeta$	1,64493	2,40410	6,49390	24,8861	122,081	726,005	5060,51	...	$1,308 \cdot 10^{12}$
зн. $\zeta / D!$	6,00000	12,8970	15,0000	12,2967	7,70830	4,16010	1,87500	...	$6,8848 \cdot 10^{-5}$

Очевидно, что площадь графика $S = \Gamma(D+1) * \zeta(D+1)$, характеризующая энергию с ростом размерности пространства, интенсивно возрастает. Коэффициент пропорциональности определяется числами z_{max} , приведенными в табл.2. Функция (знаменатель ζ)/ $D!$ дает график, совпадающий с кривой Планка при $D=3$, т.е. (зн. ζ)/ $D! = E_{v,D}$.

т.е. таблица y_{max} совпадает с z_{max} и имеет место строгое соответствие

$$y_{max} = D(1 - e^{-y_{max}}), \quad 1/z_{max} = (D+2)(1 - e^{-1/z_{max}})$$

$$y_{max} * z_{max} = \frac{D(1 - e^{-y_{max}})}{(D+2)(1 - e^{-1/z_{max}})}$$

Возвращаясь от безразмерного вспомогательного переменного z_{max} к размерным величинам, находим:

$$\nu_{max} = const = \frac{kT}{hc} y_{max} = \frac{2,82kT}{hc} = 4,2 \cdot 10^9 \left[Kc^{-1} \right]$$

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4,97k}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{T} = \frac{2,82k}{h}$$

ИЛИ

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = \frac{2,82k}{h} = 4,2 \cdot 10^9 [(K \text{ г})^{-1}] = \text{const}$$

Очевидно, рассмотрение зависимости y и z от n и D дает целый ряд постоянных размерных и безразмерных величин, а также соотношений между ними при изменении n и D , например, соотношение

$$\lambda_{\max} * \nu_{\max} = \frac{2,82}{4,97} c = 0,567 c [\text{см} / \text{сек}].$$

Таким образом, $\nu_{\max}$ пропорционален температуре.

Такие соотношения можно строить при каждом значении n или D . В результате, например, может быть полезна таблица 5. Площадь под кривой (Планка) в относительных единицах можно найти, используя соотношение

Таблица 5

D/n	n/D	$\lambda_{\max} * \nu_{\max}$	D/n	n/D	$\lambda_{\max} * \nu_{\max}$	D/n	n/D	$\lambda_{\max} * \nu_{\max}$
0,709954	1,408542	6,248108	0,833301	1,200047	62,9344	0,882353	1,133333	167,9988
0,748364	1,336248	14,00877	0,846142	1,181835	79,96946	0,888889	1,125	194,9995
0,77716	1,286736	23,46494	0,857138	1,166673	98,98612	0,894737	1,117647	223,9998
0,799767	1,250364	34,7239	0,866665	1,153848	119,9938	0,9	1,111111	254,9999
0,818094	1,222353	47,8631	0,874999	1,142858	142,9973	0,904762	1,105263	288
...	...	...	...	...	...	...	...	...

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{-n}}{e^{1/z} - 1} dz = \Gamma(n-1) \zeta(n-1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^D}{e^y - 1} dy = \Gamma(D+1) \zeta(D+1)$$

В этом случае

$$n-1 = D+1$$

$$\Gamma(n-1) = D! ,$$

$$\zeta(n-1) = \frac{\pi^{n-1}}{(3\pi, \zeta)(n-2)!} ,$$

$$\Gamma(D+1) = D! ,$$

$$\zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(3\pi, \zeta)D!} ,$$

где коэффициент пропорциональности определяется степенью числителя формулы Планка (Табл.2).

Так, в случае $n=5$ ($D=3$)

$$\Gamma(4) = 3!$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{3! \cdot 15},$$

причем постоянная Стефана-Больцмана равняется

$$\sigma_3 = 2\pi\hbar c^2 * \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{k}{\hbar c}\right)^4.$$

При иной размерности пространства меняются величины

$$\Gamma(D+1) = D!$$

$$\zeta(D+1) = \frac{\pi^{D+1}}{(2\pi^2)\zeta(D+1)}$$

а, следовательно, и σ_D .

Например, при $D=7$

$$\sigma_7 = 2\pi\hbar c^2 \frac{8\pi^8}{15} \left(\frac{k}{\hbar c}\right)^8,$$

при $D=15$

$$\sigma_{15} = 2\pi\hbar c^2 \frac{9,003*10^7}{1,308*10^{12}} \pi^{16} \left(\frac{k}{\hbar c}\right)^{16}.$$

Аналогичным образом в многомерном пространстве находится закон Вина. Для D -мерного пространства

$$\frac{dE_{y,D}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{y^D}{e^y - 1} \right) = \frac{Dy^{D-1}(e^y - 1) - y^D e^y}{(e^y - 1)^2} = 0.$$

Дифференцируя и полагая равным нулю полученное уравнение, находим

$$E_{y,D} = D(e^y - 1) - ye^y = 0$$

умножая далее

$$D(e^y - 1) - ye^y = 0$$

на e^{-y} имеем

$$y_{\max} = D(1 - e^{-y_{\max}})$$

Поэтому в трехмерном пространстве

$$\begin{aligned} \nu_{\max} &= \frac{kT}{h} y_{\max} = 2,82 \frac{kT}{h} \Rightarrow \frac{\nu_{\max}}{T} = 2,82 \frac{k}{h}, \\ \lambda_{\max} &= \frac{\hbar c}{kT} z_{\max} = \frac{\hbar c}{4,97kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{\hbar c}{4,97k}, \\ \lambda_{\max} \nu_{\max} &= y_{\max} z_{\max} = \frac{2,82c}{4,97} = 0,567c. \end{aligned}$$

В семимерном пространстве

$$\begin{aligned} \nu_{\max} &= \frac{kT}{h} y_{\max} = 6,993 \frac{kT}{h} \Rightarrow \frac{\nu_{\max}}{T} = 6,993 \frac{k}{h}, \\ \lambda_{\max} &= \frac{\hbar c}{kT} z_{\max} = \frac{\hbar c}{8,998kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{\hbar c}{8,998k}, \\ \lambda_{\max} \nu_{\max} &= y_{\max} z_{\max} = \frac{6,993c}{8,998} = 0,777c. \end{aligned}$$

Для пятнадцатимерного пространства

$$\nu_{\max} = \frac{kT}{h} y_{\max} = 14,999 \frac{kT}{h} \Rightarrow \frac{\nu_{\max}}{T} = 14,999 \frac{k}{h},$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{kT} z_{\max} = \frac{hc}{16,999kT} \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{16,999k},$$

$$\lambda_{\max} \nu_{\max} = y_{\max} z_{\max} = \frac{14,999c}{16,999} = 0,882c.$$

Получим также разложение функции (Планка)

$$E_{\nu,D} = \frac{\nu^3}{e^{\nu} - 1}$$

в степенной ряд для $D=1,2,3,4, \dots$

Имеем, для $\nu=x$ и степени $\nu=1,2,3,4, \dots$

$$-\frac{\nu^1}{2!} + \left(\frac{\nu^0}{1!} + \frac{\nu^2}{2!3!} - \frac{\nu^4}{3!5!} + \frac{2!\nu^6}{5!7!} - \frac{4!\nu^8}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{\nu^2}{2!} + \left(\frac{\nu^1}{1!} + \frac{\nu^3}{2!3!} - \frac{\nu^5}{3!5!} + \frac{2!\nu^7}{5!7!} - \frac{4!\nu^9}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{\nu^3}{2!} + \left(\frac{\nu^2}{1!} + \frac{\nu^4}{2!3!} - \frac{\nu^6}{3!5!} + \frac{2!\nu^8}{5!7!} - \frac{4!\nu^{10}}{6!8!} \right)$$

$$-\frac{\nu^4}{2!} + \left(\frac{\nu^3}{1!} + \frac{\nu^5}{2!3!} - \frac{\nu^7}{3!5!} + \frac{2!\nu^9}{5!7!} - \frac{4!\nu^{11}}{6!8!} \right)$$

Отметим, что эти функции дают графики, совпадающие с функцией Планка при низких частотах (рис.5). С увеличением числа элементов ряда степень совпадения графиков увеличивается. Очевидно, что многочлены в скобках отличаются только множителем x^n .

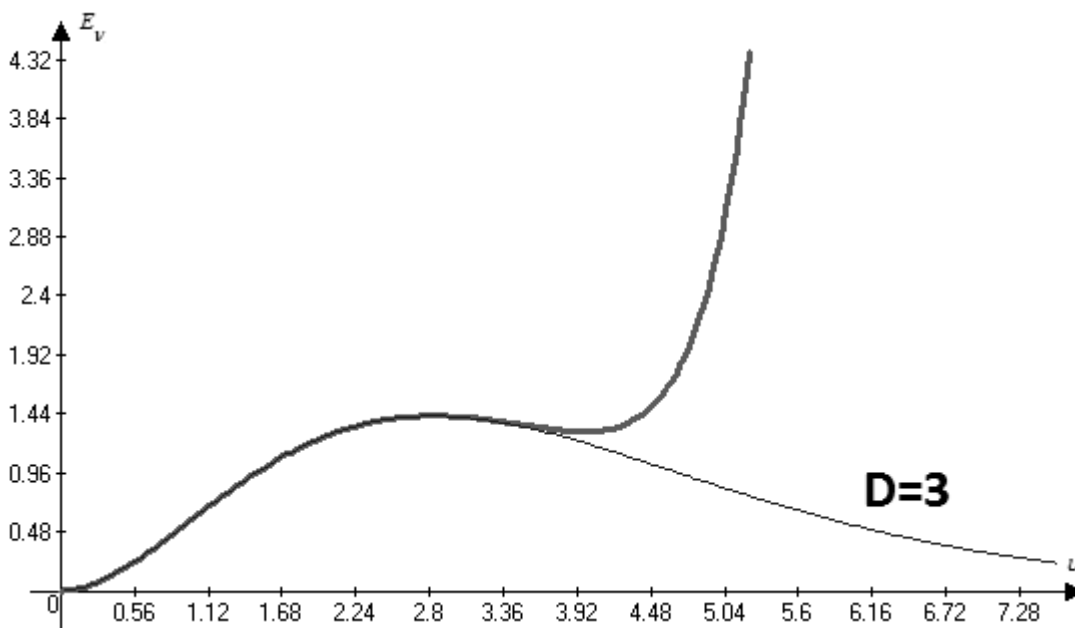


Рис.5

Заключение

Таким образом, описание силовых взаимодействий может быть связано с увеличением размерности (2^n-1) пространства с уменьшением расстояний от привычных значений в область микромира. Размерность векторных алгебр может быть сколь угодно большой. Векторные алгебры большой размерности могут задействовать формулу Планка с изменением показателя степени n или D в степенной части функции. *Это позволяет рассматривать единое поле как структуру, определяемую размерностью пространства, т.е. степенью степенной части формулы Планка.*

Очевидно, попытка описать силовые взаимодействия в области малых расстояний значениями, значительно превышающими величину, обратно пропорциональную квадрату расстояний, приводит к необходимости повышения степени в формуле Планка. Сама формула при этом существенно видоизменяется, значение степени в ней может определяться размерностью многомерной векторной алгебры, причем с ростом размерности неограниченно возрастают силовые взаимодействия между частицами, и осуществляется смещение максимума кривой в сторону весьма малых значений расстояний.

Площадь под кривой (Планка) определяется через Гамма- и дзета-функции и интенсивно растет с ростом D и n . При этом Гамма – функция определяет факториал D , а дзета-функция – π^{D+1} . Константа связи между $\lambda_{\max}$ и T , $\lambda_{\max} T = \text{const}$, индивидуальна для каждой из размерности пространства.

Необходимо отметить, что повышение размерности векторных алгебр сопровождается лишь изменением соотношений между координатами, поскольку алгебры любой меньшей размерности являются подалгебрами более высокой размерности [4]. Это приводит к тому, что соотношения между координатами меняются дискретно, как и количество задействованных координат [3]. Так, трехмерная алгебра получается из семимерной пренебрежением значениями четырех координат $x_4, x_5, x_6, x_7 = 0$, аналогично можно пренебрегать координатами в алгебрах больших размерностей. Таким образом, имеет место единый способ описания силовых взаимодействий по мере уменьшения расстояний между частицами.

Литература

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: «Наука», 1971.
2. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т.3. – М: Изд-во “Наука“, 1972. – 496с. (с илл.).
3. Коротков А. В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. – 36с.
4. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

КОРОТКОВ А.В. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ-ПИФАГОРА

$$\begin{vmatrix} 3-D & 2^m-1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7-D & 2^m-1 \\ 2^m-1 & 2n+1 & 15-D \end{vmatrix}$$

Знаменитая последовательность Фибоначчи [1], которая связывает тройку чисел соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и определяет третье число тройки как сумму двух предыдущих, имеет вид

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Такую же последовательность образует разность последующего члена F_{n+1} и предыдущего члена F_n , т.е. последовательность разности соседних чисел Фибоначчи совпадает с самой последовательностью Фибоначчи. Эта последовательность имеет отношение к так называемому золотому сечению, числа которого определяются величиной

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034,$$

что определяется решением дифференциального уравнения

$$y'' - y' - y = 0,$$

$$p^2 - p - 1 = 0, \quad p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2},$$

причем решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.$$

Привлекает внимание значение отношения двух соседних чисел Фибоначчи, характеризуемое величиной $\Phi \approx 1,618034$ или обратной величиной, равной $\Phi^{-1} \approx 0,618034$, которые определяются все с большей точностью с ростом чисел Фибоначчи, и стремятся к иррациональным

величинам $p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Важным тождеством является соотношение

$$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1.$$

Отметим еще одно из важных свойств чисел Фибоначчи. Оно заключается в том, что последовательная тройка чисел Фибоначчи определяет, как не странно, пифагорову тройку. Это замечательное свойство определяет не только связь чисел Фибоначчи с числами Пифагора, но также устанавливает связь этих чисел с уравнением Диофанта, так что три знаменитых математика древности и средних веков работали над одной и той же проблемой. Вместе с тем, связь чисел Фибоначчи, троек Пифагора и уравнения Диофанта до сих пор не установлена. В связи с этим, следует проанализировать процесс построения пифагоровых троек на базе чисел

Фибоначчи. Отметим, что были установлены соотношения трех чисел Пифагора $[x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}]$ для прямоугольного треугольника с тройкой чисел $[F_{n-1}, F_n, F_{n+1}]$ из последовательности Фибоначчи, причем

$$\begin{aligned}x_{n-1} &= F_{n+1}^2 - F_n^2, \\y_{n-1} &= 2F_{n+1} * F_n, \\z_{n-1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2.\end{aligned}$$

Эти соотношения полностью определяют пифагоровы тройки по трем последовательным числам Фибоначчи, так что совокупности Фибоначчи соответствует три последовательности чисел $[x, y, z]$ (табл.1).

Таблица 1

F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
x	3	5	16	39	105	272	715	1869	4896	12815	33553	87840	229971	602069
y	4	12	30	80	208	546	1428	3740	9790	25632	67104	175682	459940	1204140
z	5	13	34	89	233	610	1597	4181	10946	28657	75025	196418	514229	1346269
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1, \quad z_{n+1} * z_{n-1} - z_n^2 = \pm 1, \quad \Delta_1 = 4 = 1^3 * 4, \quad \text{базовые числа}[1,2]$														

Отметим, что последовательность Фибоначчи обладает не только уже указанным свойством $F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1$, например, $3 * 8 - 5^2 = -1$, но и отношением $z_{n+1} * z_{n-1} - z_n^2 = \pm 1$, например, $5 * 3 - 4^2 = -1$, для всех чисел бесконечного ряда, причем имеет место рекуррентное соотношение $z_{n+1} = 3z_n - z_{n-1}$. Это, отчасти, связано с определителем третьего порядка, составленным из трех соседних рядов троек Пифагора ряда Фибоначчи. Такой определитель равен 4 для всех соседних троек Пифагора, вплоть до самых больших чисел. Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 16 \\ 4 & 12 & 30 \\ 5 & 13 & 34 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 16 & 39 \\ 12 & 30 & 80 \\ 13 & 34 & 89 \end{vmatrix} = 4.$$

Вместе с тем, ряд чисел z состоит из чисел чересстрочной развертки последовательности Фибоначчи. Так что, числа Фибоначчи определяют последовательность прямоугольных треугольников, определяемых величиной гипотенузы в соответствии с чересстрочной разверткой чисел Фибоначчи.

Отметим особо, что эти последовательности бесконечны, однако, не включают целый ряд пифагоровых троек, даже с самыми малыми числовыми значениями, например, тройку $[24, 7, 25]$ [2] (табл.П1), а, следовательно, должен быть способ нахождения иных пифагоровых троек и иных последовательностей Фибоначчи. Более того, три соседних числа последовательности Фибоначчи определяют лишь одну из троек Пифагора. Так, числа Фибоначчи $[1,1,2]$ определяют первую тройку Пифагора $[3,4,5]$. Числа Фибоначчи $[1,2,3]$ определяют вторую тройку Пифагора $[5,12,13]$,... и т.д. до бесконечности.

Основополагающим признаком таких последовательностей должно быть удовлетворение соотношению $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. В результате, каждый третий элемент последовательности должен определяться суммой двух предыдущих.

Этому условию удовлетворяет бесконечное число последовательностей, в которых задействованы совершенно иные числа, нежели в последовательности Фибоначчи, с другими парами базовых натуральных чисел, не стоящих рядом в последовательности Фибоначчи. Это показано в табл. 2. Базовые числа определяются табл.П1.

Каждая из приведенных последовательностей может быть продолжена до бесконечности вправо, а четверки последовательностей $[F, x, y, z]$ – до бесконечности вниз с помощью рекуррентного соотношения $z_{n+1} = 3(z_n - z_{n-1}) + z_{n-2}$, так что пифагоровых троек можно привести бесконечное множество. Если учитывать отрицательные значения чисел, то аналогично получается расширение последовательности до бесконечности влево и вверх. Аналогичная картина имеет место в последовательностях пифагоровых троек, следовательно, можно считать родственными тройки последовательности Фибоначчи (табл.1) и последовательностей пифагоровых троек (табл.2). Родственным признаком каждой из последовательности пифагоровых троек должна быть, по крайней мере, одна величина, которая позволила бы классифицировать эти тройки, относящиеся к данной последовательности. Каждая тройка чисел Фибоначчи определяет одну из пифагоровых троек, следовательно, можно считать родственными тройки одной и той же последовательности.

Для нахождения этой величины изучим совокупность двух последовательных прямоугольных треугольников, построенных по тройкам Пифагора. Рассмотрение такой совокупности треугольников позволяет выявить её особенности.

Оказывается, что имеет место система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} 2x_2 &= -x_1 + 2y_1 + z_1 \\ y_2 &= x_1 + y_1 + z_1, \\ 2z_2 &= x_1 + 2y_1 + 3z_1, \end{aligned}$$

для двух соседних троек или в матричной форме записи

Таблица 2

1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322
7	33	72	203	517	1368	3567	9353	24472	64083	167757	439208
24	56	154	396	1044	2726	7144	18696	48954	128156	335524	878406
25	65	170	445	1165	3050	7985	20905	54730	143285	375125	982090
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 5, \quad \Delta_5 = 500 = 5^3 * 4, \text{ Базовые числа}[3,4]$											
1	4	5	9	14	23	37	60	97	157	254	411
9	56	115	333	840	2231	5809	15240	39867	104405	273304	715551
40	90	252	644	1702	4440	11640	30458	79756	208788	546630	1431080
41	106	277	725	1898	4969	13009	34058	89165	233437	611146	1600001
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 11, \quad \Delta_{11} = 5324 = 11^3 * 4, \text{ Базовые числа}[4,5]$											
1	5	6	11	17	28	45	73	118	191	309	500
11	85	168	495	1241	3304	8595	22557	59000	154519	404481	1059000
60	132	374	952	2520	6570	17228	45076	118038	309000	809000	2117962
61	157	410	1073	2809	7354	19253	50405	131962	345481	904481	2367962
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 19, \quad \Delta_{19} = 27436 = 19^3 * 4, \text{ Базовые числа}[5,6]$											
1	6	7	13	20	33	53	86	139	225	364	589
13	120	231	689	1720	4587	11925	31304	81871	214425	561288	1469555
84	182	520	1320	3498	9116	23908	62550	163800	428792	1122634	2939052
85	218	569	1489	3898	10205	26717	69946	183121	479417	1255130	3285973
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 29, \quad \Delta_{29} = 97556 = 29^3 * 4, \text{ Базовые числа}[6,7]$											
1	7	8	15	23	38	61	99	160	259	419	678
15	161	304	915	2277	6080	15799	41481	108480	284123	743725	1947216
112	240	690	1748	4636	12078	31680	82880	217042	568164	1487532	3894350
113	289	754	1973	5165	13522	35401	92681	242642	635245	1663093	4354034
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 41, \quad \Delta_{41} = 275684 = 41^3 * 4 \text{ Базовые числа}[7,8]$											
1	8	9	17	26	43	69	112	181	293	474	767
17	208	387	1173	2912	7783	20217	53088	138827	363613	951792	2491983
144	306	884	2236	5934	15456	40544	106066	277764	727116	1903694	4983856
145	370	965	2525	6610	17305	45305	118610	310525	812965	2128370	5572145
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 55, \quad \Delta_{55} = 665500 = 55^3 * 4 \text{ Базовые числа}[8,9]$											
1	9	10	19	29	48	77	125	202	327	529	856
19	288	480	1463	3625	9696	25179	66125	172912	452895	1185489	3103856
198	462	1102	2784	7392	19250	50500	132108	345966	905648	2371120	6207570
202	562	1202	3145	8233	21554	56429	147733	386770	1012577	2650961	6940306
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 71, \quad \Delta_{71} = 1431644 = 71^3 * 4 \text{ Базовые числа}[9,10]$											
1	10	11	21	32	53	85	138	223	361	584	945
21	320	583	1785	4416	11819	30685	80592	210735	551969	1444816	3782835
220	462	1344	3392	9010	23460	61548	161006	421648	1103760	2889810	7565492
221	562	1465	3833	10034	26269	68773	180050	471377	1234081	3230866	8458517
$F_{n+1} * F_{n-1} - F_n^2 = \pm 89, \quad \Delta_{71} = 2819876 = 89^3 * 4 \text{ Базовые числа}[10,11]$											

$$\begin{bmatrix} 2x_2 \\ y_2 \\ 2z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы, как и определители чисел Фибоначчи, равняется четырём. Это следует из таблиц 1 и 2, где верхняя строчка из каждой четверки строчек соответствует последовательности Фибоначчи, а остальные три – последовательностям чисел x , y , z в каждой строке.

Рассматривая уравнения для $[x_n, y_n, z_n]$, получим, как и следовало ожидать, соотношение Пифагора:

$$x_n^2 + y_n^2 = z_n^2,$$

причем оно определяет пифагорову тройку $[x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}]$ через предыдущую тройку $[x_n, y_n, z_n]$, так что в таблицах 1, 2 представлены последовательности Фибоначчи, пифагоровы тройки и соответствующие им определители. Отметим, что определитель третьего порядка из пифагоровых троек, кратен четырём и кубу числа определяющего последовательности пифагоровых троек, причем это число определяется рядом $[1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71, 89, \dots]$ с рекуррентным соотношением $P_{n+1} = 3*(P_n - P_{n-1}) + P_{n-2}$.

Рассмотренные последовательности получены путем перехода от троек с меньшим номером к пифагоровым тройкам с большим номером. Это определяет матрицу преобразования координат $[x_n, y_n, z_n]$. Очевидно, что возможен и обратный процесс нахождения пифагоровых троек, соответствующих последовательности чисел Фибоначчи. Для этого нужно установить порядок нахождения троек с меньшим номером из троек с большим номером, т.е. установить обратную матрицу линейного преобразования A_n как функцию A_{n+1} . Вычисления показывают, что матрица обратного преобразования требует использования функций Фибоначчи. Причем

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 2z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta \\ -\Delta \\ \Delta \end{bmatrix}$$

где Δ – числа рекуррентного соотношения вида:

$$P_{n+1} = 2(P_n + P_{n-1}) - P_{n-2}.$$

Это соотношение определяет последовательность $[0, 2, 3, 10, 24, 65, 168, 442, \dots]$. Если разложить числа этой последовательности на составляющие, то можно видеть, что эти числа определяются произведением чисел двух рядов Фибоначчи, сдвинутых на два такта между собой, т.е. они представляют собой функцию

$$F = F_{n+1} * F_{n-1}.$$

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F_{n+1}	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...
F_{n-1}	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	...
F	0	2	3	10	24	65	168	442	1155	3026	7920	20737	54288	142130	372099	...

Таким образом, систематизированы ряды пифагоровых троек по алгоритму Фибоначчи. Эти пифагоровы тройки определяют каждую

последующую тройку через предыдущую и наоборот. Они характеризуются числами определителей третьего порядка, и могут быть применены к любой тройке пифагоровых чисел. Значение определителя постоянно по всей бесконечной длине последовательностей. Для достаточно больших значений величин отношения

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx \frac{y_{n+1}}{y_n} \approx \frac{z_{n+1}}{z_n} \approx 1,618034.$$

Так что полученные последовательности чисел, как и последовательность Фибоначчи, характеризуется золотым сечением, поэтому следует рассматривать последовательность Фибоначчи как частный случай более широкого объекта – множества последовательностей Фибоначчи-Пифагора (табл.ПЗ).

Стоит заметить, что с каждой тройкой Фибоначчи жестко связана определенная тройка Пифагора (табл.ПЗ). Можно отметить и обратное – каждой тройке Пифагора соответствует тройка последовательности Фибоначчи.

В таблице 4 приведены значения гипотенуз в случае изменения базовых чисел. Из неё следует, что не все пифагоровы тройки представлены этой таблицей. Так, например, отсутствует пифагорова тройка [8,15,17] [2], однако, в таблице представлена пифагорова тройка [16, 30, 34], что характеризует удвоенное число [8, 15, 17]. Удвоение троек с взаимно простыми числами характерно для последовательности Фибоначчи, где представлены чётные значения отдельных чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Таблица 4

Гипотенуза z											
5	25	41	61	85	113	145	181	221	265	313	365
13	65	106	157	218	289	370	461	562	673	794	925
34	170	277	410	569	754	965	1202	1465	1754	2069	2410
89	445	725	1073	1489	1973	2525	3145	3833	4589	5413	6305
233	1165	1898	2809	3898	5165	6610	8233	10034	12013	14170	16505
610	3050	4969	7354	10205	13522	17305	21554	26269	31450	37097	43210
1597	7985	13009	19253	26717	35401	45305	56429	68773	82337	97121	113125
4181	20905	34058	50405	69946	92681	118610	147733	180050	215561	254266	296165
10946	54730	89165	131962	183121	242642	310525	386770	471377	564346	665677	775370
28657	143285	233437	345481	479417	635245	812965	1012577	1234081	1477477	1742765	2029945
75025	375125	611146	904481	1255130	1663093	2128370	2650961	3230866	3868085	4562618	5314465

Таким образом, нами показана жёсткая взаимосвязь троек Пифагора и Фибоначчи. Для троек Пифагора наиболее приемлема таблица П2, обладающая высокой плотностью записи информации, однако, фиксирующая значение x и y , как функции величин c и d . Причем

$$x = \frac{c+d}{2}, \quad y = \frac{c-d}{2}$$

и, очевидно, $c^2 + d^2 \neq z^2$ при $x^2 + y^2 = z^2$.

Связь троек Фибоначчи и Пифагора определяется таблицей ПЗ, причем по вертикали действует рекуррентное соотношение $P_{n+1} = 3P_n - P_{n-1}$, а по горизонтали соответствующие уравнения связи чисел Фибоначчи F и Пифагора P .

Отметим, наконец, весьма важную особенность приведенных выше последовательностей, заключающуюся в том, что числа Пифагора выражены через величины сумм катетов c , разности катетов d и гипотенузы z соответствуют уравнению Диофанта

$$c^2 - 2 * z^2 = \pm d^2.$$

Это легко проверяемое свойство следует из таблицы П2. Так, для тройки $[d,z,c]=[7,17,23]$ имеем

$$23^2 - 2 * 17^2 = -7^2.$$

Такая зависимость чисел Пифагора характерна для уравнения Диофанта, что определяет связь чисел Пифагора и Диофанта. Это можно показать для любой тройки чисел $[d,z,c]$, определяющей пифагорову тройку $[x,y,z]$.

Диофантовы уравнения удовлетворяются не только числами $[d,z,c]$, но так же числами $[d,t,p]$, где p – периметр прямоугольного треугольника $p = x + y + z$ или $p = c + z$, а t – сумма периметра и гипотенузы $t = p + z$ или $t = c + 2z$. Для них $t^2 - 2p^2 = \pm d^2$. Например,

$$17^2 - 2 * 12^2 = 1^2.$$

Это свойство легко подтвердить рассмотрением таблицы П4. Отметим, что эти величины неявно связаны с величинами x и y , причем числа t и p , как и числа c и d лишь косвенно не удовлетворяют уравнению Пифагора. Отметим также, что в правой части уравнения Диофанта представлена величина $\pm d^2$, т.е. оно выполнимо лишь для чисел типа $8n \pm 1$, которые соответствуют числам c и d , образующим дискретный ряд значений

$$1, 7, 17, 23, 47, 79, \dots$$

Большинство из приведенных последовательностей чисел соответствует рекуррентному соотношению $z_{n+1} = 3z_n - z_{n-1}$ и позволяет построить числовые плоскости. Например, для последовательности Фибоначчи имеем числовую плоскость с симметрией чисел по координатам (табл.5).

Таблица 5

Плоскости последовательности Фибоначчи											
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597
13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181
34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946
89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711
144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946	17711	28657

Аналогично можно построить числовые трехмерные пространства Фибоначчи. Кроме того, по различным координатам плоскостей и трехмерных пространств последовательности Фибоначчи могут быть задействованы не только числа Фибоначчи, но также другие базовые числа, при этом последовательности (числовых кристаллов) будут различны.

Таблица П1

Тройки чисел $[d, z, c]$															
h\g	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
1	-1	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839
	5	17	37	65	101	145	197	257	325	401	485	577	677	785	901
	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839	959
2	-7	1	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833
	13	29	53	85	125	173	229	293	365	445	533	629	733	845	965
	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833	953	1081
3	-17	-9	7	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823
	25	45	73	109	153	205	265	333	409	493	585	685	793	909	1033
	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823	943	1071	1207
4	-31	-23	-7	17	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809
	41	65	97	137	185	241	305	377	457	545	641	745	857	977	1105
	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809	929	1057	1193	1337
5	-49	-41	-25	-1	31	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791
	61	89	125	169	221	281	349	425	509	601	701	809	925	1049	1181
	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791	911	1039	1175	1319	1471
6	-71	-63	-47	-23	9	49	97	153	217	289	369	457	553	657	769
	85	117	157	205	261	325	397	477	565	661	765	877	997	1125	1261
	97	153	217	289	369	457	553	657	769	889	1017	1153	1297	1449	1609
7	-97	-89	-73	-49	-17	23	71	127	191	263	343	431	527	631	743
	113	149	193	245	305	373	449	533	625	725	833	949	1073	1205	1345
	127	191	263	343	431	527	631	743	863	991	1127	1271	1423	1583	1751
8	-127	-119	-103	-79	-47	-7	41	97	161	233	313	401	497	601	713
	145	185	233	289	353	425	505	593	689	793	905	1025	1153	1289	1433
	161	233	313	401	497	601	713	833	961	1097	1241	1393	1553	1721	1897
9	-161	-153	-137	-113	-81	-41	7	63	127	199	279	367	463	567	679
	181	225	277	337	405	481	565	657	757	865	981	1105	1237	1377	1525
	199	279	367	463	567	679	799	927	1063	1207	1359	1519	1687	1863	2047
10	-199	-191	-175	-151	-119	-79	-31	25	89	161	241	329	425	529	641
	221	269	325	389	461	541	629	725	829	941	1061	1189	1325	1469	1621
	241	329	425	529	641	761	889	1025	1169	1321	1481	1649	1825	2009	2201
11	-241	-233	-217	-193	-161	-121	-73	-17	47	119	199	287	383	487	599
	265	317	377	445	521	605	697	797	905	1021	1145	1277	1417	1565	1721
	287	383	487	599	719	847	983	1127	1279	1439	1607	1783	1967	2159	2359
12	-287	-279	-263	-239	-207	-167	-119	-63	1	73	153	241	337	441	553
	313	369	433	505	585	673	769	873	985	1105	1233	1369	1513	1665	1825
	337	441	553	673	801	937	1081	1233	1393	1561	1737	1921	2113	2313	2521
13	-337	-329	-313	-289	-257	-217	-169	-113	-49	23	103	191	287	391	503
	365	425	493	569	653	745	845	953	1069	1193	1325	1465	1613	1769	1933
	391	503	623	751	887	1031	1183	1343	1511	1687	1871	2063	2263	2471	2687
14	-391	-383	-367	-343	-311	-271	-223	-167	-103	-31	49	137	233	337	449
	421	485	557	637	725	821	925	1037	1157	1285	1421	1565	1717	1877	2045
	449	569	697	833	977	1129	1289	1457	1633	1817	2009	2209	2417	2633	2857
15	-449	-441	-425	-401	-369	-329	-281	-225	-161	-89	-9	79	175	279	391
	481	549	625	709	801	901	1009	1125	1249	1381	1521	1669	1825	1989	2161
	511	639	775	919	1071	1231	1399	1575	1759	1951	2151	2359	2575	2799	3031
16	-511	-503	-487	-463	-431	-391	-343	-287	-223	-151	-71	17	113	217	329
	545	617	697	785	881	985	1097	1217	1345	1481	1625	1777	1937	2105	2281
	577	713	857	1009	1169	1337	1513	1697	1889	2089	2297	2513	2737	2969	3209
17	-577	-569	-553	-529	-497	-457	-409	-353	-289	-217	-137	-49	47	151	263
	613	689	773	865	965	1073	1189	1313	1445	1585	1733	1889	2053	2225	2405
	647	791	943	1103	1271	1447	1631	1823	2023	2231	2447	2671	2903	3143	3391
18	-647	-639	-623	-599	-567	-527	-479	-423	-359	-287	-207	-119	-23	81	193
	685	765	853	949	1053	1165	1285	1413	1549	1693	1845	2005	2173	2349	2533
	721	873	1033	1201	1377	1561	1753	1953	2161	2377	2601	2833	3073	3321	3577
19	-721	-713	-697	-673	-641	-601	-553	-497	-433	-361	-281	-193	-97	7	119
	761	845	937	1037	1145	1261	1385	1517	1657	1805	1961	2125	2297	2477	2665
	799	959	1127	1303	1487	1679	1879	2087	2303	2527	2759	2999	3247	3503	3767

Таблица П2

Тройки чисел $[F_{n-1}, F_n, F_{n+1}]/[x, y, z]$ (Фибоначчи-Пифагора)											
1	3	1	7	1	9	1	11	1	13	1	15
1	4	3	24	4	40	5	60	6	84	7	112
2	5	4	25	5	41	6	61	7	85	8	113
1	5	3	33	4	56	5	85	6	120	7	161
2	12	4	56	5	90	6	132	7	182	8	240
3	13	7	65	9	106	11	157	13	218	15	289
2	16	4	72	5	115	6	168	7	231	8	304
3	30	7	154	9	252	11	374	13	520	15	690
5	34	11	170	14	277	17	410	20	569	23	754
3	39	7	203	9	333	11	495	13	689	15	915
5	80	11	396	14	644	17	952	20	1320	23	1748
8	89	18	445	23	725	28	1073	33	1489	38	1973
5	105	11	517	14	840	17	1241	20	1720	23	2277
8	208	18	1044	23	1702	28	2520	33	3498	38	4636
13	233	29	1165	37	1898	45	2809	53	3898	61	5165
8	272	18	1368	23	2231	28	3304	33	4587	38	6080
13	546	29	2726	37	4440	45	6570	53	9116	61	12078
21	610	47	3050	60	4969	73	7354	86	10205	99	13522
13	715	29	3567	37	5809	45	8595	53	11925	61	15799
21	1428	47	7144	60	11640	73	17228	86	23908	99	31680
34	1597	76	7985	97	13009	118	19253	139	26717	160	35401
21	1869	47	9353	60	15240	73	22557	86	31304	99	41481
34	3740	76	18696	97	30458	118	45076	139	62550	160	82880
55	4181	123	20905	157	34058	191	50405	225	69946	259	92681
34	4896	76	24472	97	39867	118	59000	139	81871	160	108480
55	9790	123	48954	157	79756	191	118038	225	163800	259	217042
89	10946	199	54730	254	89165	309	131962	364	183121	419	242642
55	12815	123	64083	157	104405	191	154519	225	214425	259	284123
89	25632	199	128156	254	208788	309	309000	364	428792	419	568164
144	28657	322	143285	411	233437	500	345481	589	479417	678	635245
89	33553	199	167757	254	273304	309	404481	364	561288	419	743725
144	67104	322	335524	411	546630	500	809000	589	1122634	678	1487532
233	75025	521	375125	665	611146	809	904481	953	1255130	1097	1663093
144	87840	322	439208	411	715551	500	1059000	589	1469555	678	1947216
233	175682	521	878406	665	1431080	809	2117962	953	2939052	1097	3894350
377	196418	843	982090	1076	1600001	1309	2367962	1542	3285973	1775	4354034
233	229971	521	1149847	665	1873305	809	2772443	953	3847261	1097	5097759
377	459940	843	2299704	1076	3746632	1309	5544924	1542	7694580	1775	10195600
610	514229	1364	2571145	1741	4188857	2118	6199405	2495	8602789	2872	11399009
377	602069	843	3010353	1076	4904408	1309	7258405	1542	10072344	1775	13346225
610	1204140	1364	6020696	1741	9808794	2118	14516772	2495	20144630	2872	26692368
987	1346269	2207	6731345	2817	10966570	3427	16230253	4037	22522394	4647	29842993
610	1576240	1364	7881192	1741	12839875	2118	19002696	2495	26369655	2872	34940752
987	3152478	2207	15762394	2817	25679772	3427	38005430	4037	52739368	4647	69881586
1597	3524578	3571	17622890	4558	28710853	5545	42491354	6532	58964393	7519	78129970

Таблица ПЗ

Тройки чисел $[F_{n-1}, F_n, F_{n+1}]/[x, y, z]$ (Фибоначчи-Пифагора)									
1	3	1	7	1	9	1	11	1	13
1	4	3	24	4	40	5	60	6	84
2	5	4	25	5	41	6	61	7	85
1	5	3	33	4	56	5	85	6	120
2	12	4	56	5	90	6	132	7	182
3	13	7	65	9	106	11	157	13	218
2	16	4	72	5	115	6	168	7	231
3	30	7	154	9	252	11	374	13	520
5	34	11	170	14	277	17	410	20	569
3	39	7	203	9	333	11	495	13	689
5	80	11	396	14	644	17	952	20	1320
8	89	18	445	23	725	28	1073	33	1489
5	105	11	517	14	840	17	1241	20	1720
8	208	18	1044	23	1702	28	2520	33	3498
13	233	29	1165	37	1898	45	2809	53	3898
8	272	18	1368	23	2231	28	3304	33	4587
13	546	29	2726	37	4440	45	6570	53	9116
21	610	47	3050	60	4969	73	7354	86	10205
13	715	29	3567	37	5809	45	8595	53	11925
21	1428	47	7144	60	11640	73	17228	86	23908
34	1597	76	7985	97	13009	118	19253	139	26717
21	1869	47	9353	60	15240	73	22557	86	31304
34	3740	76	18696	97	30458	118	45076	139	62550
55	4181	123	20905	157	34058	191	50405	225	69946
34	4896	76	24472	97	39867	118	59000	139	81871
55	9790	123	48954	157	79756	191	118038	225	163800
89	10946	199	54730	254	89165	309	131962	364	183121
55	12815	123	64083	157	104405	191	154519	225	214425
89	25632	199	128156	254	208788	309	309000	364	428792
144	28657	322	143285	411	233437	500	345481	589	479417
89	33553	199	167757	254	273304	309	404481	364	561288
144	67104	322	335524	411	546630	500	809000	589	1122634
233	75025	521	375125	665	611146	809	904481	953	1255130
144	87840	322	439208	411	715551	500	1059000	589	1469555
233	175682	521	878406	665	1431080	809	2117962	953	2939052
377	196418	843	982090	1076	1600001	1309	2367962	1542	3285973
233	229971	521	1149847	665	1873305	809	2772443	953	3847261
377	459940	843	2299704	1076	3746632	1309	5544924	1542	7694580
610	514229	1364	2571145	1741	4188857	2118	6199405	2495	8602789
377	602069	843	3010353	1076	4904408	1309	7258405	1542	10072344
610	1204140	1364	6020696	1741	9808794	2118	14516772	2495	20144630
987	1346269	2207	6731345	2817	10966570	3427	16230253	4037	22522394
610	1576240	1364	7881192	1741	12839875	2118	19002696	2495	26369655
987	3152478	2207	15762394	2817	25679772	3427	38005430	4037	52739368
1597	3524578	3571	17622890	4558	28710853	5545	42491354	6532	58964393
								7519	78129970
								8506	99988085

Таблица П4

Тройки чисел $[d,t,p]$ (Диофанта)															
d1	-1	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839
t	17	57	121	209	321	457	617	801	1009	1241	1497	1777	2081	2409	2761
p	12	40	84	144	220	312	420	544	684	840	1012	1200	1404	1624	1860
d2	-7	1	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833
t	43	99	179	283	411	563	739	939	1163	1411	1683	1979	2299	2643	3011
p	30	70	126	198	286	390	510	646	798	966	1150	1350	1566	1798	2046
d3	-17	-9	7	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823
t	81	153	249	369	513	681	873	1089	1329	1593	1881	2193	2529	2889	3273
p	56	108	176	260	360	476	608	756	920	1100	1296	1508	1736	1980	2240
d4	-31	-23	-7	17	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809
t	131	219	331	467	627	811	1019	1251	1507	1787	2091	2419	2771	3147	3547
p	90	154	234	330	442	570	714	874	1050	1242	1450	1674	1914	2170	2442
d5	-49	-41	-25	-1	31	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791
t	193	297	425	577	753	953	1177	1425	1697	1993	2313	2657	3025	3417	3833
p	132	208	300	408	532	672	828	1000	1188	1392	1612	1848	2100	2368	2652
d6	-71	-63	-47	-23	9	49	97	153	217	289	369	457	553	657	769
t	267	387	531	699	891	1107	1347	1611	1899	2211	2547	2907	3291	3699	4131
p	182	270	374	494	630	782	950	1134	1334	1550	1782	2030	2294	2574	2870
d7	-97	-89	-73	-49	-17	23	71	127	191	263	343	431	527	631	743
t	353	489	649	833	1041	1273	1529	1809	2113	2441	2793	3169	3569	3993	4441
p	240	340	456	588	736	900	1080	1276	1488	1716	1960	2220	2496	2788	3096
d8	-127	-119	-103	-79	-47	-7	41	97	161	233	313	401	497	601	713
t	451	603	779	979	1203	1451	1723	2019	2339	2683	3051	3443	3859	4299	4763
p	306	418	546	690	850	1026	1218	1426	1650	1890	2146	2418	2706	3010	3330
d9	-161	-153	-137	-113	-81	-41	7	63	127	199	279	367	463	567	679
t	561	729	921	1137	1377	1641	1929	2241	2577	2937	3321	3729	4161	4617	5097
p	380	504	644	800	972	1160	1364	1584	1820	2072	2340	2624	2924	3240	3572
d10	-199	-191	-175	-151	-119	-79	-31	25	89	161	241	329	425	529	641
t	683	867	1075	1307	1563	1843	2147	2475	2827	3203	3603	4027	4475	4947	5443
p	462	598	750	918	1102	1302	1518	1750	1998	2262	2542	2838	3150	3478	3822
d11	-241	-233	-217	-193	-161	-121	-73	-17	47	119	199	287	383	487	599
t	817	1017	1241	1489	1761	2057	2377	2721	3089	3481	3897	4337	4801	5289	5801
p	552	700	864	1044	1240	1452	1680	1924	2184	2460	2752	3060	3384	3724	4080
d12	-287	-279	-263	-239	-207	-167	-119	-63	1	73	153	241	337	441	553
t	963	1179	1419	1683	1971	2283	2619	2979	3363	3771	4203	4659	5139	5643	6171
p	650	810	986	1178	1386	1610	1850	2106	2378	2666	2970	3290	3626	3978	4346
d13	-337	-329	-313	-289	-257	-217	-169	-113	-49	23	103	191	287	391	503
t	1121	1353	1609	1889	2193	2521	2873	3249	3649	4073	4521	4993	5489	6009	6553
p	756	928	1116	1320	1540	1776	2028	2296	2580	2880	3196	3528	3876	4240	4620
d14	-391	-383	-367	-343	-311	-271	-223	-167	-103	-31	49	137	233	337	449
t	1291	1539	1811	2107	2427	2771	3139	3531	3947	4387	4851	5339	5851	6387	6947
p	870	1054	1254	1470	1702	1950	2214	2494	2790	3102	3430	3774	4134	4510	4902
d15	-449	-441	-425	-401	-369	-329	-281	-225	-161	-89	-9	79	175	279	391
t	1473	1737	2025	2337	2673	3033	3417	3825	4257	4713	5193	5697	6225	6777	7353
p	992	1188	1400	1628	1872	2132	2408	2700	3008	3332	3672	4028	4400	4788	5192
d16	-511	-503	-487	-463	-431	-391	-343	-287	-223	-151	-71	17	113	217	329
t	1667	1947	2251	2579	2931	3307	3707	4131	4579	5051	5547	6067	6611	7179	7771
p	1122	1330	1554	1794	2050	2322	2610	2914	3234	3570	3922	4290	4674	5074	5490
d17	-577	-569	-553	-529	-497	-457	-409	-353	-289	-217	-137	-49	47	151	263
t	1873	2169	2489	2833	3201	3593	4009	4449	4913	5401	5913	6449	7009	7593	8201
p	1260	1480	1716	1968	2236	2520	2820	3136	3468	3816	4180	4560	4956	5368	5796

Литература

- 1.Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978. 144 с.
- 2.Коротков А. В. Элементы классификации пифагоровых чисел. Новочеркасск: Издательство «Набла», 2009. 73 с.

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С. ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ И ЕГО СВЯЗЬ С ПИФАГОРОВЫМИ ЧИСЛАМИ (ЕВКЛИДОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ) И ПРОСТРАНСТВОМ-ВРЕМЕНЕМ

Если сделать попытку классификации чисел натурального ряда, опираясь на теорему Пифагора, то становится понятным, что эти числа образуют определенные ряды, которые классифицируются по различным признакам, в частности, по модулю разности катетов прямоугольного треугольника с целыми значениями координат. Разница катетов прямоугольного треугольника с числами- координатами позволяет свести определенные числовые соотношения в единый ряд. Причем, эти ряды характеризуются разностью катетов d , которая относится к числам $8n \pm 1$, т.е. разница катетов принимает значения: один, семь, семнадцать, двадцать три, – и т.д. – строго определенные значения, куда входят числа, типа $8n \pm 1$ [1]. Так, при $n=0$ мы получаем разницу, равную единице. При $n=1$ получаем разницу в семь. А вот число девять учитывать не надо, потому что девять – число не простое и не относящееся к гипотенузам Пифагоровых прямоугольных треугольников с целочисленными координатами.

Следующее число – при $n=2$, $8n \pm 1$, т.е. пятнадцать и семнадцать. Число пятнадцать опять- таки не следует учитывать, поскольку это число, во- первых составное, а во-вторых – оно составное из чисел три и пять. Где три – число, не относящееся к гипотенузам прямоугольных треугольников. Гипотенуза прямоугольных треугольников относится к числам типа $4n+1$, т.е. числам класса 1 вычетов по модулю четыре. Это замечательный факт. Но оказывается, что теперь числа можно классифицировать следующим образом: числа типа $8n \pm 1$ относятся уже к числам, входящим в правую часть диофантового уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm d^2$, причем под d понимаются числа $8n \pm 1$, где n – натуральное число. Вот в этом то и проявляется связь диофантового уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm d^2$ с пифагоровым уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, определяющим модуль разности катетов d .

Т.е. числам пифагорового ряда чисел – пифагоровых троек – соответствуют определенные диофантовы уравнения с конкретной правой частью d^2 , с d , меняющемся дискретно от нуля до бесконечности, и являющимися классом чисел $8n \pm 1$, возведённым в квадрат. При этом приобретают важное значение гипотенузы прямоугольного треугольника, которые образуют многочисленные ряды чисел с различными $\pm d^2$ и рекуррентным соотношением $P_{n+1} = 6P_n - P_{n-1}$ – т.е. бесконечные ряды чисел для различных d^2 . Т.е. бесконечные в четырёх направлениях последовательности (таблица 1).

Каждое последующее число равно шести предыдущим числам минус предпредыдущее: $29=6*5-1$, $169=29*6-5$ – и т.д. до бесконечности. Этот ряд соответствует $d=1$, т.е. разница длин катетов равняется единице. Так что это определяет все числа ряда вплоть до бесконечности и классифицирует прямоугольные треугольники с разницей катетов в единицу. Числам при $d=7$ соответствует вторая последовательность и т.д.

Табл.1

985	14437	73817	179125	330361
169	2477	12665	30733	56681
29	425	2173	5273	9725
5	73	373	905	1669
1	13	65	157	289
1	5	17	37	65
5	17	37	65	101
29	97	205	353	541
169	565	1193	2053	3145
985	3293	6953	11965	18329
5741	19193	40525	69737	106829
33461	111865	236197	406457	622645

О числах x и y уравнения Пифагора следует сказать, что они формируются соотношениями:

$$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2,$$

где m и n – взаимно простые числа разной четности, а x, y, z – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2,$$

т.е.

$$x^2+y^2=z^2,$$

что соответствует теореме Пифагора.

Числа x и y являются: одно – чётным класса нуль вычетов по модулю четыре, а второе – нечётное класса один или три вычетов по модулю четыре. Поэтому числа x и y реально отличаются от чисел z гипотенуз. Достаточно сказать, что рекуррентное соотношение $P_{n+1}=6P_n-P_{n-1}$ не соответствует числам x и y .

Оно определяется рекуррентным соотношением:

$$x_{k+1}=5(x_k+x_{k-1})-x_{k-2}$$

$$y_{k+1}=5(y_k+y_{k-1})-y_{k-2}.$$

Т.е. числа x и y отличаются от чисел z – это очень важный фактор. Оказывается, что если обозначить сумму катетов $x+y$ через c , то сумма катетов образует ряд, подобный ряду гипотенуз, с закономерностью каждой из последовательностей:

$$c_{k+1}=6c_k-c_{k-1},$$

где c_{k+1} и c_{k-1} – соответственно суммы катетов следующего и предыдущего c_k прямоугольных треугольников в каждой из последовательностей
(..., $7=6*1-(-1)$, $41=6*7-1$,... или ... $1=6*(-17)-(-103)$, $23=6*1-(-17)$, $137=6*23-1$,...).

Если проанализировать эти числа, то выяснится, что они образуют рекуррентный ряд такого же класса, что и числа z . Числа c уже являются числами типа z – они определяются одним и тем же рекуррентным соотношением. Достаточно указать два первых значения, которые образуют бесконечный ряд значений суммы катетов. Значения x и y таковы потому, что x и y последующего числа составляется из трёх предыдущих чисел, а не из двух, как для чисел z и c . Если теперь считать z и c родственными числами, то можно искать связь между ними.

Оказывается, что числа бесконечной последовательности можно характеризовать с помощью определителей, причем

$$z_{n+1} * z_{n-1} - z_n^2 = \Delta.$$

Этот определитель равен по всей длине последовательности одному и тому же числу – числу 2^2 для первой последовательности табл.1., числу 13^2 – для второй последовательности и т.д... Это очень важное свойство, потому, что определитель даёт решения уравнения Пифагора

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

а вместе с ним значения $\pm d^2$, что соответствует соотношению Диофанта

$$c^2 - 2z^2 = -d^2.$$

Соотношение Диофанта выполняется не только для величин c и z , но также и для величин

$$\begin{aligned} n^2 - 2m^2 &= \pm d^2, \\ t^2 - 2p^2 &= +d^2, \end{aligned}$$

где n и m определены выше, p – периметр прямоугольного треугольника, а $t=p+z$.

При $c=1$ и $z=1$

$$c^2 - 2z^2 = -d^2 = -1,$$

следующие числа: $c=7$, $z=5$

$$c^2 - 2z^2 = -d^2 = -1.$$

Т.о. числа типа z и c ставятся в соответствие определенному решению, уравнению Диофанта с разностью катетов, равной единице — и это соответствие выполняется для всех чисел всего бесконечного ряда, т.е.:

$$c^2 - 2z^2 = -d^2 = -1.$$

Это очень важное свойство, которое устанавливает связь диофантова уравнения с уравнением Пифагора, где в качестве чисел диофантова уравнения рассматривают числа c и z . Необходимо отметить, что таких рядов пифагоровых троек бесконечное число – меняется только разность между катетами. Эта разница, как уже было сказано выше, равна d .

Причем следующим за единицей является число семь, потом идут числа семнадцать, двадцать три и т.д. Т.о. устанавливается дискретный ряд

значений, который, в свою очередь, определяет ряды чисел z и c и решения диофантова уравнения, где в качестве d уже выступает число семь, а не число один. Т.е. образуется новая последовательность z чисел c бесконечной длины в обе стороны с определенным значением решения уравнения Диофанта. В этой последовательности, как и в предыдущей, будет фигурировать величина d^2 .

Это – самая прямая и непосредственная связь между числами c и z и диофантовым уравнением, непосредственная связь уравнения Диофанта с уравнением Пифагора.

Необходимо отметить, что числа z и c являются не единственными числами, которым соответствует такая же процедура. Следующей двойкой чисел являются значения p и t , где в качестве p выступает периметр, а в качестве t – значения периметра плюс гипотенуза: $t = p + z$, эти числа соответствуют паре чисел z и c , и следовательно, образуют уже не пару чисел z и c , а четверку чисел: z, c, p, t . Для чисел z и c и четверки чисел 5, 7, 12, 17.

Необходимо отметить примечательность последовательности p и t . Последовательность p образует такой же ряд, как c и z , характеризуемый величиной рекуррентного соотношения $P_{n+1} = 6P_n - P_{n-1}$. Последовательность t определяется тем же самым рядом. Т.е. четверка чисел z, c, p, t определяется одним и тем же рекуррентным соотношением. Это первый фактор. Второй фактор: значения чисел p и t точно так же определяют уравнение Диофанта. Или, иными словами, числа p и t , как и числа c и z определяют решение уравнения Диофанта. Итак, это – второй фактор. Третий фактор: по всей длине определитель между четверкой соседних чисел определяется одной и той же величиной.

Вышесказанное позволяет утверждать, что числа натурального ряда можно систематизировать по величинам z, c, p и t , причем все эти четыре типа чисел входят в один и тот же класс. Для последовательности z (один, пять, двадцать девять, сто шестьдесят девять), будет соответствовать последовательность c (один, семь, сорок один, и т.д.). Для p (два, двенадцать, семьдесят,...). Для t (три, семнадцать, девяносто девять,...). Т.е. например, в одной и той же величине будут следующие соответствия: $z=5, c=7, p=12, t=17$. Это связано с рекуррентными соотношениями, а так же с уравнением Диофанта.

Необходимо отметить, что следующим могло бы быть еще какое-нибудь число, но установить такие взаимосвязи между четверками указанных чисел не удалось. Т.е. данная четверка чисел определена принципиально. Следующее число в последовательности пять, семь, двенадцать, семнадцать, – это число двадцать девять – число из первого ряда, сдвинутое на одну позицию. Следующее число – сто шестьдесят девять – опять уже со следующей ступеньки в этих четырех последовательностях чисел. Следует отметить, что в натуральном ряде чисел выделяют числа типа z , типа c , типа p и типа t . Четверка этих чисел принципиально важна. При этом роль чисел x и y снижается, причем $(c+d)/2$ определяет y , а $(c-d)/2$

определяет x . Можно показать, что числа n и m , а также числа $g=m$ и $h=n+g$ также соответствуют уравнению Диофанта, что показано в таблице 2.

Таблица 2.

$h \backslash g$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
1	-1	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839
	5	17	37	65	101	145	197	257	325	401	485	577	677	785	901
	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839	959
2	-7	1	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833
	13	29	53	85	125	173	229	293	365	445	533	629	733	845	965
	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833	953	1081
3	-17	-9	7	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823
	25	45	73	109	153	205	265	333	409	493	585	685	793	909	1033
	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823	943	1071	1207
4	-31	-23	-7	17	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809
	41	65	97	137	185	241	305	377	457	545	641	745	857	977	1105
	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809	929	1057	1193	1337
5	-49	-41	-25	-1	31	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791
	61	89	125	169	221	281	349	425	509	601	701	809	925	1049	1181
	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791	911	1039	1175	1319	1471
6	-71	-63	-47	-23	9	49	97	153	217	289	369	457	553	657	769
	85	117	157	205	261	325	397	477	565	661	765	877	997	1125	1261
	97	153	217	289	369	457	553	657	769	889	1017	1153	1297	1449	1609
7	-97	-89	-73	-49	-17	23	71	127	191	263	343	431	527	631	743
	113	149	193	245	305	373	449	533	625	725	833	949	1073	1205	1345
	127	191	263	343	431	527	631	743	863	991	1127	1271	1423	1583	1751
8	-127	-119	-103	-79	-47	-7	41	97	161	233	313	401	497	601	713
	145	185	233	289	353	425	505	593	689	793	905	1025	1153	1289	1433
	161	233	313	401	497	601	713	833	961	1097	1241	1393	1553	1721	1897
9	-161	-153	-137	-113	-81	-41	7	63	127	199	279	367	463	567	679
	181	225	277	337	405	481	565	657	757	865	981	1105	1237	1377	1525
	199	279	367	463	567	679	799	927	1063	1207	1359	1519	1687	1863	2047
10	-199	-191	-175	-151	-119	-79	-31	25	89	161	241	329	425	529	641
	221	269	325	389	461	541	629	725	829	941	1061	1189	1325	1469	1621
	241	329	425	529	641	761	889	1025	1169	1321	1481	1649	1825	2009	2201
	-241	-233	-217	-193	-161	-121	-73	-17	47	119	199	287	383	487	599

-1	7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839
5	17	37	65	101	145	197	257	325	401	485	577	677	785	901
7	23	47	79	119	167	223	287	359	439	527	623	727	839	959
-7	1	17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833
13	29	53	85	125	173	229	293	365	445	533	629	733	845	965
17	41	73	113	161	217	281	353	433	521	617	721	833	953	1081
-17	-9	7	31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823
25	45	73	109	153	205	265	333	409	493	585	685	793	909	1033
31	63	103	151	207	271	343	423	511	607	711	823	943	1071	1207
-31	-23	-7	17	49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809
41	65	97	137	185	241	305	377	457	545	641	745	857	977	1105
49	89	137	193	257	329	409	497	593	697	809	929	1057	1193	1337

-49	-41	-25	-1	31	71	119	175	239	311	391	479	575	679	791
61	89	125	169	221	281	349	425	509	601	701	809	925	1049	1181
71	119	175	239	311	391	479	575	679	791	911	1039	1175	1319	1471
-71	-63	-47	-23	9	49	97	153	217	289	369	457	553	657	769
85	117	157	205	261	325	397	477	565	661	765	877	997	1125	1261
97	153	217	289	369	457	553	657	769	889	1017	1153	1297	1449	1609
-97	-89	-73	-49	-17	23	71	127	191	263	343	431	527	631	743
113	149	193	245	305	373	449	533	625	725	833	949	1073	1205	1345
127	191	263	343	431	527	631	743	863	991	1127	1271	1423	1583	1751
-127	-119	-103	-79	-47	-7	41	97	161	233	313	401	497	601	713
145	185	233	289	353	425	505	593	689	793	905	1025	1153	1289	1433
161	233	313	401	497	601	713	833	961	1097	1241	1393	1553	1721	1897
-161	-153	-137	-113	-81	-41	7	63	127	199	279	367	463	567	679
181	225	277	337	405	481	565	657	757	865	981	1105	1237	1377	1525
199	279	367	463	567	679	799	927	1063	1207	1359	1519	1687	1863	2047
-199	-191	-175	-151	-119	-79	-31	25	89	161	241	329	425	529	641
221	269	325	389	461	541	629	725	829	941	1061	1189	1325	1469	1621
241	329	425	529	641	761	889	1025	1169	1321	1481	1649	1825	2009	2201
-241	-233	-217	-193	-161	-121	-73	-17	47	119	199	287	383	487	599
265	317	377	445	521	605	697	797	905	1021	1145	1277	1417	1565	1721
287	383	487	599	719	847	983	1127	1279	1439	1607	1783	1967	2159	2359
-287	-279	-263	-239	-207	-167	-119	-63	1	73	153	241	337	441	553
313	369	433	505	585	673	769	873	985	1105	1233	1369	1513	1665	1825
337	441	553	673	801	937	1081	1233	1393	1561	1737	1921	2113	2313	2521
-337	-329	-313	-289	-257	-217	-169	-113	-49	23	103	191	287	391	503
365	425	493	569	653	745	845	953	1069	1193	1325	1465	1613	1769	1933
391	503	623	751	887	1031	1183	1343	1511	1687	1871	2063	2263	2471	2687
-391	-383	-367	-343	-311	-271	-223	-167	-103	-31	49	137	233	337	449
421	485	557	637	725	821	925	1037	1157	1285	1421	1565	1717	1877	2045
481	549	625	709	801	901	1009	1125	1249	1381	1521	1669	1825	1989	2161
449	569	697	833	977	1129	1289	1457	1633	1817	2009	2209	2417	2633	2857
-449	-441	-425	-401	-369	-329	-281	-225	-161	-89	-9	79	175	279	391
481	549	625	709	801	901	1009	1125	1249	1381	1521	1669	1825	1989	2161
511	639	775	919	1071	1231	1399	1575	1759	1951	2151	2359	2575	2799	3031
-511	-503	-487	-463	-431	-391	-343	-287	-223	-151	-71	17	113	217	329
545	617	697	785	881	985	1097	1217	1345	1481	1625	1777	1937	2105	2281
577	713	857	1009	1169	1337	1513	1697	1889	2089	2297	2513	2737	2969	3209
-577	-569	-553	-529	-497	-457	-409	-353	-289	-217	-137	-49	47	151	263
613	689	773	865	965	1073	1189	1313	1445	1585	1733	1889	2053	2225	2405
647	791	943	1103	1271	1447	1631	1823	2023	2231	2447	2671	2903	3143	3391
-647	-639	-623	-599	-567	-527	-479	-423	-359	-287	-207	-119	-23	81	193
685	765	853	949	1053	1165	1285	1413	1549	1693	1845	2005	2173	2349	2533
721	873	1033	1201	1377	1561	1753	1953	2161	2377	2601	2833	3073	3321	3577
-721	-713	-697	-673	-641	-601	-553	-497	-433	-361	-281	-193	-97	7	119
761	845	937	1037	1145	1261	1385	1517	1657	1805	1961	2125	2297	2477	2665
799	959	1127	1303	1487	1679	1879	2087	2303	2527	2759	2999	3247	3503	3767
-799	-791	-775	-751	-719	-679	-631	-575	-511	-439	-359	-271	-175	-71	41
841	929	1025	1129	1241	1361	1489	1625	1769	1921	2081	2249	2425	2609	2801
881	1049	1225	1409	1601	1801	2009	2225	2449	2681	2921	3169	3425	3689	3961

Таблица 2 показывает тройки чисел $[d, z, c]$ Пифагора для различных значений h и g , т.е. практически для x, y, z . Более того, величина d^2 соответствует, как легко показать, правой части уравнения Диофанта. Аналогичные таблицы строятся для троек чисел $[d, t, p]$, также соответствующих уравнению Диофанта.

Теперь – о связи с физикой. Необходимо отметить, что решение уравнения Пифагора определяется евклидовым соотношением $x^2 + y^2 = z^2$. Это ни что иное, как квадрат модуля евклидового характера для двумерного евклидового пространства, где x и y формируют координаты двумерного евклидового пространства. *Поэтому числа, x, y, z , а следовательно d, z, c характеризуют евклидовость нашего физического пространства, его евклидов характер.* Т.о. здесь наблюдается связь этих чисел с числами, соответствующими геометрическим (прямоугольные треугольники) и физическим евклидовым пространствам, а, следовательно, к этому пространству имеет то же прямое отношение уравнение Диофанта. Потому, что названная четверка чисел определяет соотношения диофантового уравнения. Вот эта прямая связь чисел типа c, z, p и t с числами, характеризующими физическое пространство, его евклидовость.

Необходимо отметить ещё один интересный аспект, о котором раньше нигде и никем не упоминалось: спинорные уравнения в трехмерном евклидовом пространстве устанавливаются также четверкой чисел, – это отражено в любом учебнике по физике, по теории трехмерных спиноров. Причем, эта четверка чисел делится принципиально на две пары чисел: числа для спиноров – два числа и для сопряженных спиноров – ещё пара чисел. Т.е. физически это такие частицы, как электрон, протон и другие со спином одна вторая ($1/2$).

Они представляют комбинации четверок чисел, причем распадающихся на две пары четверок чисел. Т.е. отмечается та же существенная зависимость уравнения спиноров для четырех чисел, распадающихся на две пары. С этими числами можно пытаться связать числа z, c, p и t , которые также распадаются на две пары чисел, одна из которых составляет c и z , с уравнением Диофанта, и вторая пара – t и p , так же с уравнением Диофанта. Вот эти факторы, во-первых, устанавливающие связь параметров уравнения Диофанта с уравнением Пифагора, подтверждающие евклидовость физического пространства, а во-вторых – с четверкой спинорных чисел на трёхмерном физическом пространстве позволяет полагать, что эта связь определяет физические процессы, а не просто чисто математические аспекты.

В связи с чем необходимо отметить, что когда речь идет о большем числе переменных, то нахождение решения полиномиальных уравнений второй степени, где число переменных не два, – а три, четыре, пять и т.д., т.е. – большое число – суммирование квадратов соответствует собственно евклидовому четырехмерному пространству – собственно евклидовому, т.е. сумме квадратов координат. Однако такая возможность есть: это [1, с.56-57] сумма квадратов трёх компонентов равна четвертой компоненте, взятой в

квадрате – собственно евклидово пространство – либо его можно рассматривать как четырехмерное псевдоевклидово пространство с квадратом интервала, равным нулю... Здесь возникает такая ситуация, когда сумма квадратов трех координат равняется четвертому квадрату действительной величины.

Это можно рассматривать как псевдоевклидово четырёхмерное пространство индекса 1, в частности, не только трехмерное собственно евклидово пространство, четырехмерный псевдоевклидовый вариант, а также и многомерный: пяти, шести, и т.д. Т.е. в данном случае рассматривается не просто собственно евклидово пространство как сумма квадратов пифагоровых чисел, но и возникают варианты, когда фигурируют псевдоевклидовы варианты, а вместо суммы пифагоровых чисел: двоек, троек и т.д.– берется алгебраическая сумма, т.е. одна либо в многомерном случае несколько компонент входят с отрицательным значением квадрата координат. Вот здесь и возникает возможность рассмотрения не только собственно евклидовых пространственно-временных преобразований, но и псевдоевклидовых преобразований. В частности, псевдоевклидова четырехмерного пространства-времени. Т.е. этот вариант соответствует псевдоевклидовому случаю и позволяет рассматривать не чисто пифагоровы (собственно евклидовы пространства), но и пространства псевдоевклидового типа. Псевдоевклидовы пространства определяются алгебраической суммой квадратов пифагоровых чисел. Сумма алгебраическая, т.е. появляется возможность использовать не только плюс, но и минус перед квадратами координат.

Отметим соответствие некоторых пифагоровых чисел уравнению Диофанта. Так, можно показать, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & t_i^2 - 2p_i^2 = d_i^2 \text{ и } c_i^2 - 2z_i^2 = -d_i^2, \\ \text{что равносильно} & d_i^2 + p_i^2 + p_i^2 = t_i^2 \text{ и } -d_i^2 + z_i^2 + z_i^2 = c_i^2, \\ \text{а, также} & (2c_i)^2 - 8z_i^2 = -(2d_i)^2 \text{ и } (2t_i)^2 - 8p_i^2 = (2d_i)^2, \\ \text{т. е.} & (2d_i)^2 + (2c_i)^2 + z_i^2 = (3z_i)^2 \text{ и } -(2d_i)^2 + (2t_i)^2 + p_i^2 = (3p_i)^2. \end{aligned}$$

Эти два способа формирования последовательностей чисел определяют для разных d_i бесконечное число последовательностей чисел собственно евклидового и псевдоевклидового характеров бесконечной длины, как показано в таблицах 7 и 8 в работе [1, с.56-57].

Т.о. пифагоровы числа прочно увязаны с диофантовым уравнением. Уравнение Пифагора – это само по себе очень важное уравнение, но пифагоровы числа связаны между собой еще и с помощью диофантового уравнения в том числе. Т.е. связь диофантова уравнения с пифагоровым уравнением о присутствует явным образом. В работе [1, с.50] это описано, причем возможны не только связи собственно евклидового характера уравнения Пифагора, но также связи псевдоевклидового характера – уравнение Диофанта.

Заметим в скобках: в работе «Алгебры над кольцом чисел Пифагора» [2]

Рассматриваются алгебры главным образом над полями, а алгебры Пифагора оказываются кольцом чисел. Здесь что привлекательно? Прежде всего то, что намечается определенный выход на связь с уравнениями

Диафанта, уравнением Пифагора и уравнением квадрата интервала СТО А.Эйнштейна. Это – квадрат интервала, собственно структур четырёхмерного пространства-времени, что является хорошим признаком для целого ряда как математических структур, так и для целого круга геометрических и физических структур. Прежде всего, уравнения Диофанта обеспечивают значения решений целочисленных задач (если задачи решаются в целых числах), причем это важные уравнения для различных показателей степени и различных коэффициентов).

В том числе в случае представления трехмерным вектором первой координаты уравнения Диофанта, когда формируется четырехмерное представление псевдоевклидова пространства индекса 1. Правую часть уравнения Диофанта можно связать с квадратом интервала, а отрицательную величину левой части с квадратом, пропорциональным квадрату времени

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \pm d^2.$$

Сумма квадратов трех компонент без квадрата четвертой компоненты равняется квадрату интервала. Это основополагающее соотношение специальной теории относительности и четырехмерного пространства-времени Минковского. При этом три пространственные компоненты рассматриваются совместно с одной временной компонентой, что соответствует трёхмерному пространству СТО – трёхмерному псевдоевклидову пространству, вернее пространству-времени. Здесь записывается уравнение для квадрата интервала четырёхмерного пространства-времени. Т.е. в данном случае опять-таки налицо те же самые три формулы: Диофанта, Пифагора и уравнение для квадрата интервала. И они связаны между собою. Эти связи очень жесткие: в математике иначе не бывает, и в результате – *мы можем говорить о присутствии в СТО уравнений Пифагора и Диафанта.* Это замечательный эффект, поскольку все уравнения квадратные, все простые и все взаимосвязанные.

Заключение

Т.о., пифагоровы числа, соответствующие собственно евклидовому характеру пространства, определяют параметры псевдоевклидовых пространств. В частности, речь идет о пространстве-времени Минковского. Пифагоровы числа оказываются жестко связанными с уравнением Диофанта, что представляет собой не только замечательный математический результат, – а результат, соответствующий физическим представлениям связей, определяемых уравнениями Пифагора и Диофанта и пространственно-временных соотношений специальной теории относительности. Отметим также, что решения уравнений Пифагора и Диофанта чаще всего рассматриваются для множества целых чисел, что представляет интерес для ряда разделов теоретической физики.

Литература

- 1.Коротков А.В. Элементы классификации пифагоровых чисел.– Новочеркасск: Набла, 2009. – 73 с. – (с.47-61).
- 2.Коротков А.В. Алгебры над кольцом чисел Пифагора//Сознание и физическая реальность. 2011.№11.

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С. МНОГОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ И СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА

Структуру пространства следует изучать либо на больших масштабах и расстояниях, либо на чрезвычайно малых. Человек живет в макромире и использует для его изучения и описания человеко-размерные метрические величины: миллиметр, сантиметр, метр, километр и т.д. Причём эти величины используются не только в макромире, но и в мега- и в микромире. В физико-математическом аспекте пространство описывается векторными алгебрами. Векторные алгебры постоянно добавляются: к трёхмерной векторной алгебре добавились семи-, пятнадцати-, тридцатиодномерные векторные исчисления [7;8;9;10;11]. Изучены структурные константы алгебр вплоть до 2047 измерений. Дальше имеющаяся в наличии вычислительная техника совокупно с программным обеспечением не работает с матрицами столь большой размерности. Так вот, размерность алгебр значительно больше трёх... Трёхмерие обеспечивает обратно пропорциональную зависимость от расстояния: сила определяется как $F=1/R^2$. Потенциал $1/R$. Квадратичная зависимость силы от расстояния до нужной частицы определяется в трёхмерном пространстве величиной $1/R^2$.

Многомерные алгебры в отличие от этого, дают следующие размерности: если это семимерная алгебра то $1/R^5$,

в пятнадцати мерной $1/R^{13}$, в тридцатиодномерной $1/R^{29}$. Причем степень может неограниченно возрастать. Следующие матрицы, которые дают векторное произведение двух векторов, проверены для 63 измерений, 127-и, 255, 511, 1023, 2047 – это уже всё проверено. Т.о. можно сказать, что в математическом отношении *наше пространство многомерно*. И в результате, алгебры, которые фиксируют силовые воздействия на частицы, могут быть, прежде всего, применены для изучения поведения частиц в области чрезвычайно малых расстояний (микромира). Причём, расстояние может быть какое угодно малое, но – не нулевое. *Нулевой случай исключён: бесконечно высоких энергий быть не может*. Была предпринята попытка приспособить многомерные векторные алгебры для описания элементарных частиц [7]. Т.е. применить их на очень малых расстояниях. При этом необходимо помнить, что мы имеем дело в данном случае с объектом, который изучен с одной стороны очень неплохо, а с другой стороны совершенно недостаточно.

Следует отметить следующие возможности описания поведения элементарных частиц: это, прежде всего, описание процессов на малых расстояниях с помощью экспоненциальных и степенных зависимостей от расстояний. Здесь надо вспомнить работы того же Лаггера, того же

Планка, а также предшественников М.Планка – Стефана – Больцмана, Вина. Всё это исследователи, сделавшие очень много для описания тепловых процессов – процессов излучения абсолютно черного тела... Формула Планка – это шедевр, который общепризнан. Она, прежде всего, обеспечила то, что в физике появился раздел квантовой механики и появились представления о квантованности объектов и явлений микромира [1]. *Т.е. наряду с веществом и полем, рассматриваемыми в непрерывном пространстве, стали также рассматриваться вещество и поле, связанные с дискретностью пространства.* Это всё позволила формула Планка, которая работает с малыми расстояниями микромира. Следует также отметить положительную черту теории суперструн (при всей её искусственности и отсутствием реальных результатов, которая заключается в том, что теория суперструн признаёт многомерное пространство –11-и мерное, либо пространства других размерностей [3;4;5;13;18]. (Сюда следовало бы добавить замечание Герловина И.Л.– гения, совместно с Протодяконовым М.М. открывшим путь к фемтотехнологиям [14] – о том, что «в течение длительного времени теоретические работы, в которых использовались многомерные и/или расслоенные пространства, рассматривались как подходы, в которых используются изощренные формально-математические методы, не имеющие отношения к реально протекающим процессам в природе. Об эвристической ценности достижений современной математики не было и речи» [2, с.31]).

Попытка применить формулу Планка для описания силовых взаимодействий приводит к необходимости введения понятия *фотонного газа*, введенное Эйнштейном для трехмерного векторного пространства, идеального фотонного газа, который при нагреве излучает энергию и может потреблять энергию. Энергия излучается и поглощается дискретно по формуле Планка. И это дало основание построить квантовую механику. Формула Планка и постоянная Планка широко задействованы в квантовой механике наряду с прочими дискретными величинами. Однако, когда разрабатывали статистическую физику для изучения поведения фотонного газа, то работы велись в плане трёхмерия с использованием трёхмерной алгебры. Все ученые работали в плане трёхмерия. Это было уже почти сто лет назад и это было очень важное достижение для трёхмерных представлений. Но уже трёхмерные представления потребовали введения многомерных понятий. Поскольку уже не хватило собственно трёхмерной алгебры, то потребовалось ввести фазовое трехмерное пространство совокупно с трехмерной алгеброй. Т.е. трёхмерное пространство, задаваемое координатами x, y, z и три координаты импульса P_x, P_y, P_z . Это уже Эйнштейну с Бозе пришлось ввести понятие фазового пространства. В случае многомерия фазовое пространство определяется точно так же, как и в трёхмерии, но только вместо трёх координат импульса и трёх координат расстояния пространства: длины, ширины, высоты, – используется n

координат и n координат импульса. Т.о. это ничто иное, как $2N$ фазовое пространство.

Это приводит к тому, что необходимо рассмотреть статистические соотношения, которые позволили бы описать статистику поведения фотонного газа в многомерном пространстве [10]. Уже выявляются следующие закономерности: во-первых, пространство должно иметь определенную размерность, во-вторых, размерность дискретна (1, 2, 3, 4...). В пространстве выделяются пространства, связанные с нечетным рядом чисел: 1, 3, 7, 15, 31, 63...

«Или рекуррентным соотношением

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}.$$

Будем рассматривать выражения формулы Планка для размерности пространства $D = 0, 1, 2, \dots$. Формула (Планка) в относительных единицах позволяет построить графики для $E_{z,n}$, как функцию z и n (или D). Эти графики для некоторых значений n приведены ниже. На рис. 1 представлены графики зависимости E_z при $z = z(\lambda)$ и $n = 2, 3, 4 \dots$. Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $n = 5$ (или $D = 3$). Амплитуда $E_{n_{\max}}$ резко возрастает с ростом n , что представляет определенные неудобства в работе.

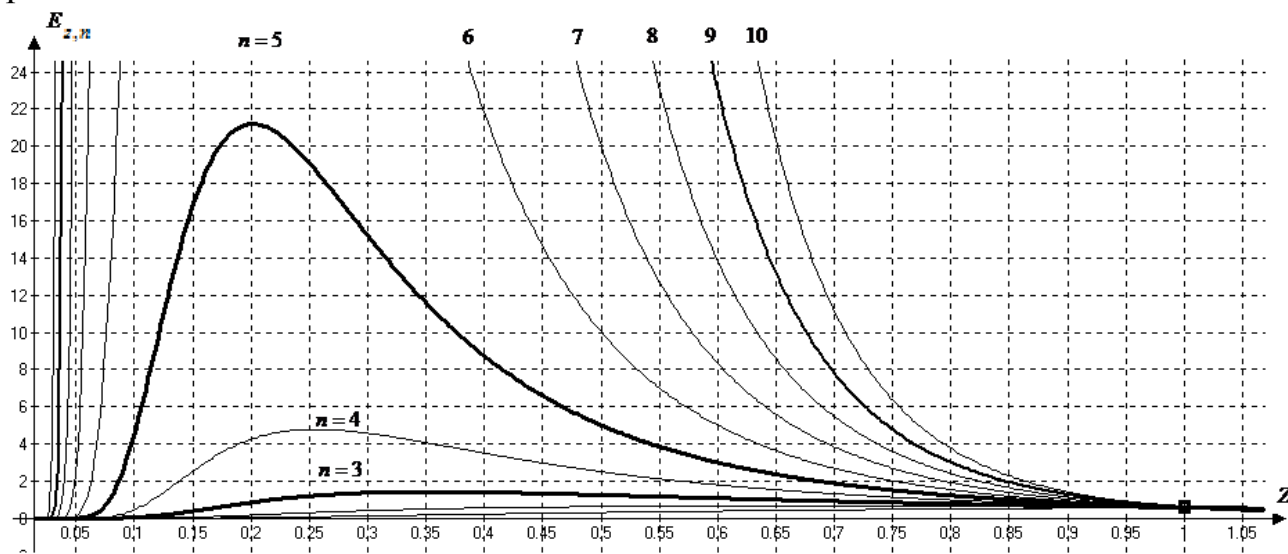


Рис.1

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис.2), но усложняет анализ закономерности.

Рисунки 1 и 2 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений n , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{n,z}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{n,z}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования длин. При больших D кривые приобретают свойства единичного импульсного воздействия.

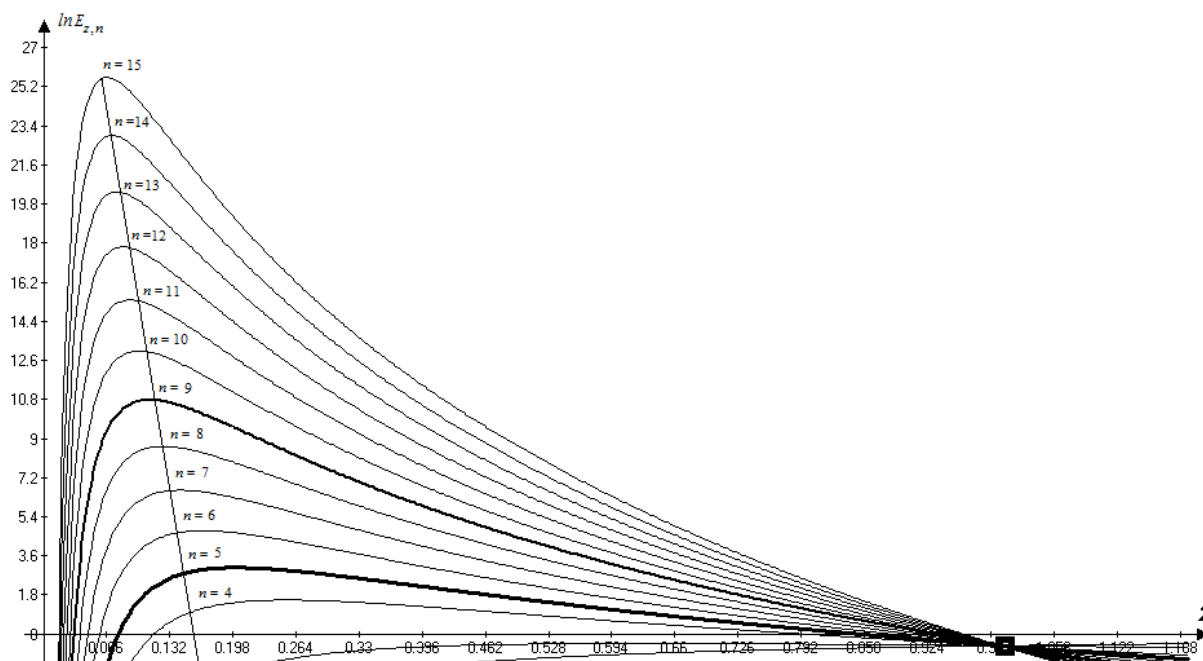


Рис.2

Все графики для формулы Планка при изменении n имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших длинах волн. Увеличение n сопровождается резким ростом амплитуды $E_{n_{\max}}$. Имеет место смещение амплитуды $E_{z_{\max}}$ для различных n в сторону меньших длин волн при увеличении n . Степень смещения беспредельно уменьшается с ростом n » [10].

Т.е. по формуле $2^n - 1$ включая очень большие N – и так вплоть до бесконечности. Это характеризует изменение элементов фазового пространства – и в результате приводит к изменению формулы Планка. Собственно для многомерного случая формула Планка не используется, но там есть такая возможность: величина энергии либо плотности энергии определяется длиной волны излучения либо частотой излучения. Как правило, в основном используют распределение энергии по длинам волн, потому что на этом распределении работает физическая регистрирующая аппаратура длины волн. Распределение энергии по частотам используется значительно реже, и изучено не столь досконально по сравнению с распределением по длине волны.

Рассмотрев в относительных координатах формулу Планка, используя для этого размер величины n в третьей степени e разделить на e в третьей степени ix минус единица – эта размерность рассматривалась для проведения анализа преобразований этих формул – и в результате были получены графики распределения энергии по длинам волн – с одной стороны для трёхмерного пространства, и с другой стороны – для N -мерного пространства по частотам – как для трехмерного, так и для N -мерного пространства [10]. Для этого была использована возможность использования частоты либо длины волны для повышения размерности

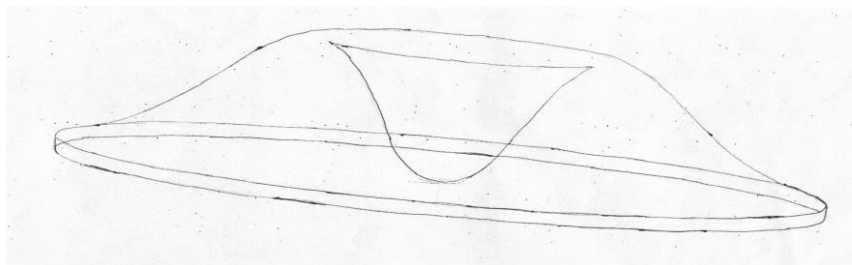
пространства – для чего используется степень, отличная от трёх и пяти и соответствующая размерности D , а D может быть произвольным числом: $3D$, $7D$, $15D$, $31D$ и т.д. в т.ч. и $2D$ – как возможный вариант, а также размерности $N = D + 2$ – для распределения по частотам.

Что показывают графики? Графики дают интересную зависимость в относительных единицах энергии от величины, пропорциональной длине волны и от величины, пропорциональной частоте излучения. Графики показывают резкий рост энергетической зависимости от степени числителя формулы Планка. Не 3 и 5 – как это задействовано в трёхмерии, а 4,6, 5, 7 и т.д. – это очень важно. С другой стороны, графики выясняют то обстоятельство, что имеются две точки, где все графики сходятся. Это, прежде всего – нулевая точка – начало координат – и точка на расстоянии относительно единицы, которая фиксирует точку пересечения всех кривых Планка при значениях показателя степени равное N , каким бы N ни было. В случае очень больших N кривые приближаются к форме единичного ступенчатого воздействия и похожи на потенциальную яму. Т.е. по виду – это конструкция прямоугольной формы. Эта точка пересечения имеет место как на частотном графике, так и на графике волновом. Это важное обстоятельство, поскольку эти точки не зависят от частот либо каких-то других параметров. Эта точка определяется формулой Планка и она равняется единице. Т.е. в принципе есть возможность установить масштаб длины – если рассматривать зависимость от длин волн – и масштаб частоты, если рассматривать зависимость от частот. Но следовало бы лучше сказать, что не масштаб частоты единица на нь, единица в секунду, а масштаб времени – секунду. *Графики Планка выясняют то обстоятельство, что может быть введена единица масштаба длин и единица масштаба времени.* Т.о. пространственно-временные соотношения будут фиксированы относительными величинами относительно расстояния, равного единице.

Интересно также отметить, что кривые Планка в относительных единицах фиксируют то, что это не просто плоский чертёж – чертеж на плоскости, но чертёж, который может быть объёмным. И тут появляются две очень важные величины – первая величина связана с частотным распределением энергии (с распределением энергии по частотам), а вторая – с распределением энергии по длинам волн. Эти две величины всё время дополняют друг друга. Например, выясняется что закон Вина может фигурировать не только как лямбда максимум на T – как длина волны на температуру газа, равная константе, но также и для частот: соотношение нь максимум – т.е. нь зависимости от величины относительной частоты на лямбда максимум. Это соотношение для трёхмерия имеет место при $0,567 c$ скорости света – есть константа: $\lambda_{\max} = 0,567 c$. Необходимо задать вопрос: почему 0,567? Почему не единица? Скорость света появляется как константа, пропорциональная скорости света. Причём эта константа связана с размерностью. Для размерности 7 эта константа уже не 0,567, а

0,777, для размерности 15 – для пятнадцатимерного пространства – константа определяется величиной 0,882 скорости света равно константа. Т.е. появляется не только значение константы для трехмерного случая но максимум на лямбда максимум, но также и для всех других размерностей. Каждая размерность имеет размерность алгебры, имеет свою кривую Планка и свои константы. Получены эти константы для всех рассмотренных выше алгебр. *Теперь можно говорить о структуре пространственных распределений энергии с одной стороны, и о формировании определенных зон с различной энергией.* В частности, как было указано выше, что единично-ступенчатое воздействие возникает в случае больших размерностей N . Даже при небольших размерностях N – даже для $N=2$ получаются кривые, которые характеризуют потенциальную яму. В частности, это проще всего сделать путём поворота графика Планка вокруг своей вертикальной оси. В этом случае появляется кривая, которая определяет потенциальную яму. Потенциальная яма получается глубиной, соответствующей амплитуде кривой Планка. Поскольку кривые Планка меняются в зависимости от размерности пространства, меняются и размеры потенциальных ям. При одной и той же форме, но при различной амплитуде этих кривых Планка, получены рисунки с помощью трёхмерных преобразований на компьютерной технике формы потенциальных ям, соответствующих кривым Планка. Две такие потенциальные ямы легко стыкуются, потому, что есть общая точка объединения, которая определяется для каждой кривой Планка данной размерности. Эта точка позволяет объединить потенциальные ямы в систему, в специфический комплекс. В частности, такой комплекс, который распределён в пространстве по всем осям. Но по семимерным координатам или N -мерным представить комплекс очень трудно, а если по трёхмерным – то вычислительная машина вполне справляется с этой задачей.

Необходимо отметить, что *имеют место два вида потенциальных ям.* Первая потенциальная яма связана с распределением излучения по частоте, т.е. плотности энергии по частоте. Это рисунок, который обладает относительно невысоким потенциальным барьером, но очень широким барьером. Т.е. этот рисунок плоский, хотя в сечении повторяет кривую Планка, кривую распределения энергии по частоте. Эти потенциальные ямы относительно не глубокие, но широкие.



(рис.*)

Второй вид потенциальных ям связан с распределением по длинам волн. В этом случае, яма выглядит так: она очень узкая, но очень высокая. Чтобы сравнить значения ширины и высоты для трёхмерия, потенциальная яма получается в случае распределения по частотам. Ей соответствует амплитуда 21-й относительной единицы, а амплитуда распределения по частотам всего 1,6 – т.е. 21 и 1,6 – вот такое соотношение глубины потенциальных ям. Ширина соответственно для потенциальной ямы первого типа всего 0,5 относительных единиц длины, а ширина потенциальной ямы для распределения по частотам характеризуется числами 12, 13, 15 – т.е. значительно большим – в 30 раз большим, чем ширина потенциальной ямы для первого типа. Это принципиально отличает эти две конструкции, хотя есть и общие моменты: форма кривой Планка сохраняется в обоих случаях, в сечении этих потенциальных ям, и кроме того, что очень важно: *площади сечения потенциальных ям одни и те же!* Т.е. кривые разные, частоты разные, длины волн разные, амплитуды разные, потенциальные ямы совершенно разные, а площадь, характеризующая энергию излучения, остаётся одной и той же! Причём равной, хоть для распределения по частотам, хоть для распределения по длинам волн. Это говорит о чём? Что видимо есть два типа потенциальных ям: одна очень узкая и глубокая, а другая достаточно широкая и достаточно глубокая. Но эти два вида различных функций на лицо. Причём, следует повторить, площади сечения одни и те же. Т.е. эти ямы характеризуются одной и той же характеристикой. Есть смысл предположить, что с этими ямами связаны два заряда: один положительный, а второй – отрицательный. Как их назвать – это не столь важно, но такие ямы могут характеризовать потенциальные ямы для двух частиц, условно характеризуемых знаком «плюс» и знаком «минус». Т.е. скорее всего, заряда частиц (следует отметить, что это согласуется с выводом Герловина И.Л. о том, «почему основное единое фундаментальное поле имеет природу двухзарядного поля» [2, с.65]). Необходимо отметить, что ямы можно формировать по различным законам. Располагая эти отдельные ячейки в узлах, например, той же кристаллической решетки твердых тел, к примеру – металлов. Распределяются эти потенциальные ямы по плоскости, либо по трёхмерному пространству, а также, скорее всего, они имеют место в значительно более серьёзном случае *многомерного пространства*. Очень важно, что с глубиной потенциальных ям, т.е. вообще говоря, с размерностью, с увеличением размерности пространства, связано то, что каждой размерности пространства соответствует определённая энергия. Степень формулы Планка в числителе формулы Планка меняется ступенчато, а, следовательно, ступенчато меняется и энергия частиц, которые мы описываем, или наблюдаем. Т.е. степень числителя в формуле Планка определяется дискретностью, и он определяет дискретность энергии, соответствующую потенциальным ямам и состоящего их кривых Планка. Это определяет «лестницу энергий», т.е. распределение энергии по формуле Планка, либо по размерностям векторных преобразований. Это

всё – взаимоувязанные вещи. Отметим, что размерность векторных алгебр может быть бесконечной, вплоть до бесконечности. Т.е. наше пространство имеет возможность в этом случае, использовать бесконечно большие энергии, вплоть до бесконечно больших энергий. С уменьшением расстояния от центра системы частиц резко возрастает степень получаемой энергии излучения. Очень сильная зависимость, потому что особенно распределение по длинам волн и так располагает очень большими величинами амплитуд плотности энергии. Следует отметить, что многомерные векторные алгебры устроены так, что все векторные алгебры меньшей размерности получаются друг из друга. Т.е. как в трёхмерном пространстве, рассматривая преобразования на плоскости, мы пренебрегаем одной из координат, полагаем её постоянной, равной константе. Получаем двумерное пространство, при этом мы ничего особого не сделали, мы только изменили закон преобразования величин. Размерность мы не меняли, а преобразования изменились. Точно так и в многомерных случаях, например, пятнадцатимерная алгебра включает в себя как частные случаи семимерную и трёхмерную векторные алгебры. Всё определяется тем, какой размерностью мы оперируем. Двумерной векторной алгебры практически нет, есть трёхмерная векторная алгебра, потому что векторное произведение двух векторов, расположенных в одной плоскости, даёт третий вектор, выходящий за пределы плоскости, т.е. получается трёхмерная структура. Точно так и четырёхмерная структура может действовать так же, как и четыре плоскости, может быть, и пять плоскостей, и шесть плоскостей. Но это – относительные названия семимерных величин. Для построения четырех плоскостей нужно, по крайней мере, иметь три величины. То есть это уже не плоскость, а трёхмерное пространство. Для пятимерной плоскости этого уже мало, а нужно семимерное пространство. Так вот ступенчато меняются размерности пространства: 3, 7, 15, 31, и т.д. А различные сечения, связанные с другими размерностями, например, 2, 4, 6, 8 и т.д. дают сечения плоские этих пространственных представлений и характеризуют энергию частиц, находящихся в промежутке между энергией, связанной с размерностью три, либо с энергий, связанной с размерностью семь. Там есть возможности и три, и четыре, и пять и шесть но – это частный случай семимерного варианта. Всё точно также и для остальных случаев. Т.е., во-первых, *наше пространство многомерно*, что находит отражение в теории струн [3;4;5;13;18];

во-вторых, оно обладает слоённостью, т.е. расслоено на плоскости (или подпространства, см.: [2;15]. (Вполне возможно, что это проявляется в структуре макромира (частично? проецируется?) в *геометрии электромагнетизма*. См.: [6;12]).

«Будем рассматривать выражения формулы Планка для размерности пространства $D = 0, 1, 2, \dots$ в зависимости от частоты излучения в относительных единицах. Это позволяет построить графики для $E_{y,D}$, как

функцию y и D . Эти графики для некоторых значений D приведены ниже. На рис. 3 представлены графики зависимости E_y при $y = y(v)$ и $D = 2, 3, 4, \dots$. Жирной линии соответствует формула Планка, то есть $D = 3$, а полужирной $D=7$. Наблюдается слоёность пространства, построенного из жирных и нежирных линий, соответствующих размерности векторных алгебр (1,3,7,15...), либо несоответствующих этой размерности. Амплитуда $E_{y_{\max}}$ резко возрастает с ростом D , что является недостатком.

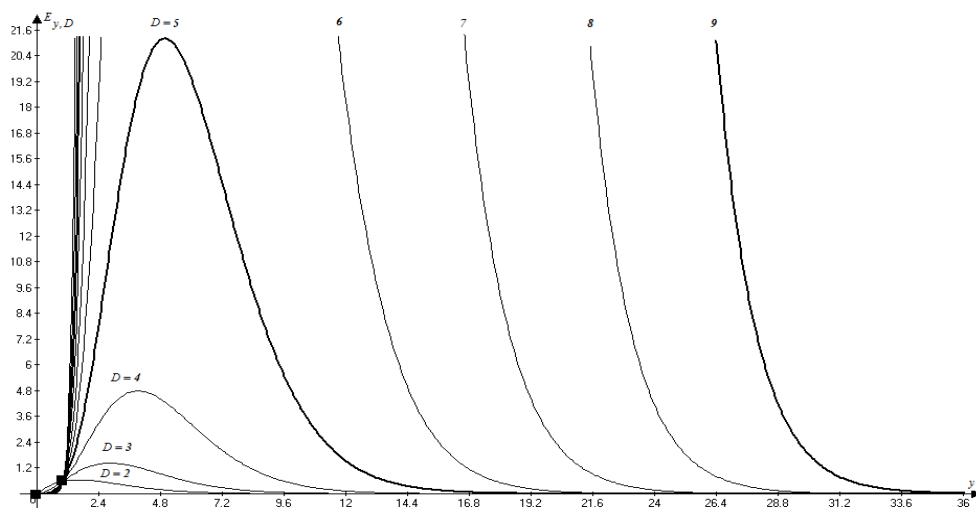


Рис.3

Логарифмический масштаб по оси ординат исключает этот недостаток (Рис.4), но усложняет анализ закономерности.

Рис. 3 и 4 показывают, что имеют место две точки пересечения кривых Планка для различных значений D , определяемые началом координат и точкой $(1, \frac{-1}{e-1})$ для логарифмического масштаба по оси $\ln E_{y,D}$ или $(1, \frac{1}{e-1})$ для равномерного распределения по оси $E_{y,D}$. Ненулевая точка пересечения кривых может быть использована для целей масштабирования времени (частоты).

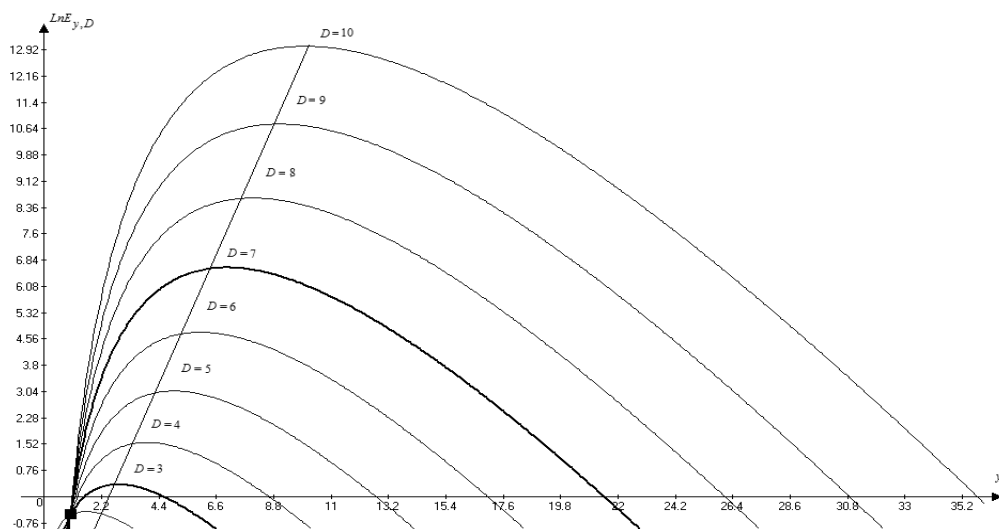


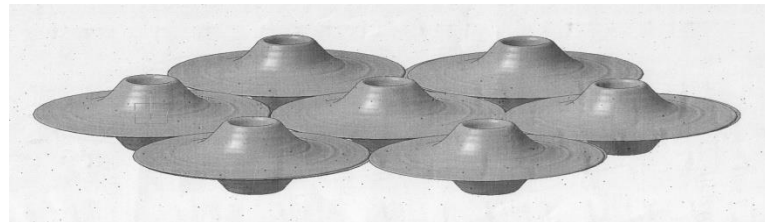
Рис.4

Все графики для формулы Планка при изменении D имеют одинаковую форму, спадающую на малых и больших частотах. Увеличение D

сопровождается резким ростом амплитуды $E_{D_{\max}}$. Имеет место смещение амплитуды $E_{y_{\max}}$ для различных D в сторону больших частот при увеличении D . Степень смещения можно оценить, решив уравнение $\frac{dE_{y,D}}{dy}=0$ [10].

В изображениях на плоскости одной и той же числовой системы, например, в семимерии – проявляются четырёхмерные, пяти-, шести- мерные структуры. Это – различные плоскости одного и того образования, которые наглядно-образно можно было бы представить в виде слоёного торта (или пирога): слой крема сменяется слоем бисквита либо шоколада. И плюс прослойки. Слои крема встречаются реже, а другие прослойки чаще.

Схематически полученные объекты можно представить себе примерно так, как это показано на *рисунке 2*.



*Рис. ***

Т.е. повторим ещё раз: пространство, во-первых, многомерно, во-вторых, слоёное, в- третьих, дискретно (дискретность пространства вполне определена и определяется числами: 1, 3, 7, 15, 31, и т.д.). Что ещё можно сказать? Рассмотрение величины произведения максимального значения длины $\lambda_{\max}$, где амплитуда энергии максимальна и $v_{\max}$, где амплитуда энергии также максимальна. Произведение этих двух величин дают для каждой размерности своё значение, причем значение связано с одной и той же величиной – со скоростью света. Выше уже отмечалось, что для трёхмерного пространства эта величина равна 0,567 скорости света, для других значений оно меняется. В частности, для значений этой величины в семимерном пространстве имеет место 0,777 скорости света, равна константе, третья величина размерности пропорциональна скорости света при пятнадцатимерии это 14,999 разделить на 16 равна 0,887 скорости света. Так вот, в трёхмерии, а также во всех остальных пространственных соотношениях, используется постоянная величина размерная $\lambda_{\max} \cdot v_{\max}$. Эта величина равна константе и определённый коэффициент перед скоростью света. Для трёхмерии это 0,567 скорости света, для семимерии 0,777 скорости света, для пятнадцатимерии 0,882 скорости света и равной константе постоянной для данной размерности. Если повышается размерность, то повышается степень функции Планка и меняются эти величины. Они меняются с повышением размерности в сторону увеличения. И меняются достаточно быстро в начальной части. Отметим, что эти значения дискретны. Они связаны с дискретностью и размерностью

пространства. 0,882, 0, 777, 0, 567 – вот такие вот числа от скорости света. Т.е. скорость распространения излучений определяется в данном случае, размерностью векторного исчисления, принятого для описания этих процессов. И понятие «скорость» оказывается понятием дискретным, квантованным. В том числе и скорость света квантованна. Частицы, видимо, на разных расстояниях от центра системы, движутся с различными скоростями. При малых размерностях пространства это скорости на уровне от 0, 567 скорости света и до нуля. Но не больше. При больших размерностях пространства эта скорость возрастает, но дискретно. Дискретность определяется лестницей скоростей очень большой величины. Ступенчатость явно выявляется при скорости уже 0,4 от скорости света. Т.е. в два с половиной раза меньше скорости света. С величины порядка единицы на 10 в десятой степени сантиметра в секунду. До этой величины – начиная от нуля и кончая 0,4 от скорости света – ступенчатость не проявляется, потому, что размерность уже определяется размерностью «три» – размерностью векторной алгебры. С размерностью «один» связана несколько меньшая величина, но дискретность на графиках уже не проявляется. Здесь действует непрерывное (континуальное) значение скорости, т.е. до 0,4 скорости от скорости света влияние дискретности не проявляется. Но свыше 0,4 от скорости света это уже обязательное соотношение. Т.е. что здесь следовало бы сказать? Дискретность скорости распространения силовых воздействий излучений, частиц, и т.д. определяет следующее: во-первых, выявляются волновые и корпускулярные свойства, во-вторых, проявляется дискретность многих физических величин. В частности, дискретность скорости света, со скоростью излучения волн будет связана дискретность импульса, сил, ускорений – и многих других физических величин. Т.е. это очень существенно, что проявляется дискретность скорости света. В частности, хорошо подтверждаемая дискретность энергии может быть определена дискретностью скорости света, потому, что скорость распространения электромагнитных волн в частности, создаёт ступенчатую структуру распределения энергии, т.е. энергия распределена по энергетической лестнице. Это связано с изменением глубины и ширины потенциальных ям. К вышесказанному следует добавить, что начатые работы следует продолжать, поскольку это реальный шаг по пути построения Единой Теории поля. Многомерные векторные алгебры, многомерная дифференциальная геометрия, многомерная теория поля, многомерная квантовая механика, многомерные физические размерности и физики элементарных частиц и т.д. Наиболее перспективны многомерные преобразования в области чрезвычайно малых расстояний, которые дают возможность ввести относительные величины – выше уже говорилось о масштабах длин и временных промежутков.

Appendix I

Внимательный читатель может обратить внимание на то обстоятельство, что в статье фигурируют частота и длина волны – распределение по частотам и по длинам волн, и на этом строятся первичные бинарные структуры пространства. В зависимости от уровня подготовки и мировоззренческих установок любознательного и внимательного читателя метафизического либо диалектического характера может возникнуть вопрос того плана, что поскольку частота – это $F=1/T$, а длина волны соответствует пространственному периоду волны, то есть расстоянию, которое точка с постоянной фазой проходит за время, равное периоду колебаний T , поэтому

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

Отсюда может возникнуть иллюзия, что на самом деле в данном случае в конструкции первичных пространственных бинарных структур имеет место время: время является источником пространства, или пространство представляет собою модифицированное время. Т.е. время преобразуется таким образом, что из него конфигурируются вышеуказанные бинарные первичные структуры пространства – два вида потенциальных ям (поэтому можно сказать, что *сущностью пространства является бинарность*).

Тем самым *время является субстанцией* (классическая дефиниция понятия субстанция восходит к Декарту, Спинозе и Лейбницу и звучит так: **«Под субстанцией следует понимать то, что не нуждается ни в чем другом для своего существования, в отличие от модуса, который нуждается для своего существования в чем-то другом, а именно в субстанции»** [17, с.689-691), т.е. *время – это субстанция, а пространство – модус*.

Но так ли это на самом деле? Если мы напишем, например, что частота есть скорость света, деленная на длину волны – это частота – то мы будем с одной стороны правы, а с другой стороны – нет. И вот почему. С одной стороны, по размерности и по всем прочим параметрам – это действительно так. Но при различных математических преобразованиях всё это нарушается. Почему? Дело в том, что в формулы входят интегральные и дифференциальные величины, а это накладывает определённый отпечаток на математические соотношения. В частности, если мы берём величину z как пропорциональную λ , то λ – длина волны, соответствующая $hc \cdot kT \cdot z$, то $d\lambda/dz$ и dz – одинаковые, коэффициент стандартный: $hc \cdot kT$. Если же мы возьмём распределение по частотам, то картина несколько видоизменяется. В распределении по частотам используются не только вышеуказанные понятия, но по крайней мере, входит уже процесс дифференцирования, а там z^2 , вернее появляется величина, связанная с

квадратом. Единица на *икс*, как известно, даёт минус единицу на *икс* в квадрате. Т.е. казалось бы, использовались величины первого порядка, а получилась величина второго порядка минус единица на *икс* минус во второй степени. Минус один дифференцировали и получили минус два в результате. Это не совсем чётко увязанные величины. Если мы эти величины подставим сюда, то мы не получим распределение по частоте, это будет совсем другое распределение. Т.е. в статике действительно наблюдается связь частоты и длины волны, а вот в динамике эта связь полностью утрачивается, поскольку происходит рассеивание на дифференциальных уравнениях, и таким образом, *совершенно неправомерно говорить о сведении времени к пространству или обратно: это совершенно разные сущности!*

В заключение хотелось бы привести несколько строчек из статьи Е.А.Соколова, посвящённой размышлениям о многомерности пространства: «В начале XX века Анри Пуанкаре, вероятно, первым сформулировал идею о существовании многомерного физического (а не абстрактного математического) пространства: «Разве невозможно выразить эти законы (физики – *Е.С.*) другими уравнениями, где фигурировали бы в этом случае другие точки, имеющие четыре координаты?..» И после Пуанкаре пытались решить задачу многомерности пространства, но ничего лучше, чем придать времени статус четвертой координаты, не придумали. Понятно, что такой гибрид: трехмерное пространство плюс время, – оказался конструкцией сугубо формальной, хотя Эйнштейн пользовался ею, создавая специальную теорию относительности. Но, тем не менее, выражение «пространство-время», по существу, не более чем метафора» [16, с.78].

Appendix II

О специфике многомерных алгебр, пространств и времени

Итак, выше мы уже отметили, что в нашем описании пространство получается многослойное и расслоённое на подпространства – мы даже использовали метафору «слоёный торт»...

Что даёт подобное представление? В области малых расстояний более грамотно и конкретно будут записываться силовые воздействия посредством применения многомерных алгебр, потому что они дают величину силы, обратно пропорциональной не второй степени расстояния, а значительно большей степени: шестой, четырнадцатой, тридцатой и т.д. до бесконечности... т.е. может быть описана сила любой величины – вплоть до бесконечно большой. Это в области малых расстояний: никакая трёхмерная алгебра либо другие математические подходы не опишут такие силы на малых расстояниях. Но, поскольку малые расстояния дробятся на сферы действия (применения) тех или иных алгебр: 3-мерных, 7-мерных, 15-мерных, 31-мерных и т.д. – до бесконечности, то появляются промежутки

между алгебрами, когда часть координат выпадает – становится равной нулю. Из 31-мерной алгебры можно сформировать 15-мерную, из 15-мерной 7-мерную и т.д. Т.е. всё идёт ступенями: 3, 7, 15, 31, 63 и т.д. **Это слои.** Кроме того, если описывать эти слои формулой Планка, то слои формируют отдельные частные случаи. В частности, трёхмерная геометрия может быть превращена в двухмерную геометрию или в одномерную. Т.е. *появляются пространственные промежутки*. Эти промежутки описываются степенью – степенной частью формулы Планка. И если степень меняется – эр в степени – то меняются и слои: трёхмерность распадается на частичный четырёхмерный слой, пятимерный, шестимерный, семимерный... Это уже не слой, а подслой, а сам слой в этом случае семимерный. Пятнадцатимерный тоже слой, а 8, 9, 10, 11, 12, 13 – подслои. Т.е. всё это распадается на прослойки.

В алгебрах как таковых время практически отсутствует. В дифференциальной геометрии, в теории поля там время важно. А алгебра в основном ориентируется на механику. И даже не всю механику, а в основном на статику и кинематику. В этих разделах механики время практически не задействовано. В статике время вообще не задействовано, а в кинематике очень слабо задействовано. А динамика – это теория поля. Вот там время присутствует. Время не меняет своей конфигурации с изменением размерности пространства. Время остаётся одним единым для всех пространств: для 3-мерного, 7-мерного, 15-мерного и т.д. В данном случае время классическая стационарная константа своего рода. Оно существует как независимо от нашего субъективного восприятия, так и от процессов любой природы: ядерных, сильных, слабых, гравитационных и т.д. – время идёт независимо. Время одномерное. В специальной теории относительности время смешано с пространством – представляется специфическим гибридом, которого современные релятивисты принимают за чистую монету. Но во всех прочих условиях такие смешения для описания процессов и явлений не применяются, поскольку, как это уже было показано выше, это связано с низкими скоростями и присущими им явлениями и эффектами. Время начинает меняться только там (по используемым пока что релятивистским представлениям), где скорости объектов приближаются к скорости света. И причем изменения, видимо, происходят дискретно (как это уже было отмечено выше). Скорость изменяется дискретно – изменяется с помощью перехода от низкой ступени на более высокую ступень.

Литература

1. Быстров К.Н. Квантовый принцип и дискретные законы физического мира. М.: МГУП, 2005. 219с.
2. Герловин И.Л. Основы единой теории всех взаимодействий в веществе. Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. 432с.: ил.
3. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. Пер. с англ./Общ. ред. В.О.Малышенко. М.: Едиториал УРСС, 2004. 288с.
4. Грин Б. Ткань космоса: Пространство, время и текстура реальности. Пер. с англ./Под ред. В.О.Малышенко и А.Д.Панова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 608с.
5. Девис П. Суперсила: Пер. с англ./Под ред. и с предисл. Е.М.Лейкина. М.: Мир, 1989. 272с.
6. Жвирблис В.Е. Игра в бублики//Химия и жизнь.1995.№5. (с.10-15).
7. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
8. Коротков А. В. Элементы пятнадцати мерного векторного исчисления. Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011.
9. Коротков А.В. Элементы многомерного (15-и 31-мерного) векторного исчисления. Новочеркасск: «НОК», 2012. 76с.
10. Коротков А.В. Формула Планка в D-мерных пространствах//Альманах науки и образования. 2013.№3. (с.81-91).
11. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. 194с.
12. Невесский Н.Е. Электромагнитные поля токовых структур//Электричество.1993.№12. – (с.49-52).
13. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель.М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 912с.
14. Протодяконов М.М., Герловин И.Л. Электронное строение и физические свойства кристаллов. М.Наука, 1975. 359с.
15. Расслоенные пространства и их приложения. Сб. переводов/Под ред. В.Г.Болтянского, Е.Б.Дынкина, М.М.Постникова. М.: Изд-во Иностранной Литературы, 1958. 460с.
16. Соколов Е.А. Пространство Кэролла//Химия и жизнь. 1992.№9. (с.78-79).
17. Современный философский словарь/Под общей ред. д.ф.н., профессора В.Е.Кемерова. М.: Академический проект. 2004. 864с.
18. Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытые измерения Вселенной. СПб.: Питер, 2012. 400с.: ил.

КРАВЧЕНКО П. Д., МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В. С.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ АЛГЕБР ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МИКРОМИРА

Статья посвящена попытке использования одного из типов векторной алгебры в физике микромира. В настоящее время в физике микромира используются многомерные квантовые алгебры Вирасоро, лежащие в основе теории струн [3]. Работа носит чисто демонстрационный характер: поскольку отсутствует возможность применения 3-D векторных алгебр в области весьма малых расстояний и для увеличения точности описания процессов в области традиционных расстояний, то поэтому принципиально важно построение многомерных векторных алгебр, остающихся в рамках линейных векторных пространств, но с фиксированным векторным произведением двух векторов. Развитие многомерных алгебр позволяет применять их для изучения микромира.

Необходимо отметить, что предлагаемый авторами подход позволит пополнить арсенал ныне существующих научных инструментов, к коим относятся: многомерная квантовая теория и статистика – и как вариант унитарные унимодулярные группы $SU(N)$. Поскольку хорошо известными фактами и экспериментальными данными является то, что при взаимодействии нуклонов в ядре статические ядерные потенциалы можно использовать вплоть до энергий 300 Мэв. При более высоких энергиях ядерные силы нельзя считать статическими, так как необходимо учитывать запаздывание взаимодействий [18]. При взаимодействиях частиц высоких энергий переданная энергия растёт с уменьшением масштаба в пространстве. В физике микромира обобщается на многомерие четырехмерная теория поля, которая считается подтверждённой экспериментально (это так называемая СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ПОЛЯ, за которую Хиггсу в 2013 году была присуждена нобелевская премия за теоретическое предсказание открытого хиггсовского бозона). По мнению авторов, широкие возможности для этого открывает формула, аналогичная формуле Планка, способная расширить область описания полей.

Статья является продолжением и развитием предыдущих работ по теме «Многомерная физика», начатой в предыдущих публикациях [10;11;13;14;15].

О размерности многомерных векторных алгебр следовало бы сказать, что широко распространенная и сыгравшая в естествознании замечательную роль трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана), доминирующая уже в течение полутора столетий, имеет в то же время существенные ограничения в описании различных физических процессов. Это связано, прежде всего, с тем, что ограничение размерности приводит к ограничению степени зависимости силовых величин от расстояний величиной, обратной

второй степени расстояния. В качестве другого недостатка выступает наличие в трехмерной векторной алгебре лишь трех законов сохранения физических величин и описание процессов лишь с помощью двух первых производных от расстояний.

Это обуславливает невозможность применения 3-D векторных алгебр в области весьма малых расстояний и для увеличения точности описания процессов в области традиционных расстояний. Поэтому принципиально важно построение многомерных векторных алгебр, остающихся в рамках линейных векторных пространств, но с фиксированным векторным произведением двух векторов. Этот принцип был использован при создании трехмерной векторной алгебры.

Анализ способов построения многомерных векторных алгебр показал, что размерность алгебр определяется числом способов разбиения множества из n элементов на два непустых подмножества и соответствует ряду чисел: 1, 3, 7, 15, 31, ..., $2^n - 1$, Он определяется рекуррентной формулой вида:

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}.$$

Эти соотношения создают ряд, определяющий все совершенные числа.

Многомерные векторные алгебры могут быть использованы, прежде всего, для описания необыденных, необычных для человека пространств. Если говорить о трёхмерной векторной алгебре, то она описывает пространства, которые меняют потенциал в степени единица на R , т.е. ($F = 1/R^2$). К этим силам относят гравитационные и электромагнитные силы. Эти силы дают потенциал $1/R$. Многомерные алгебры отличаются совершенно другой размерностью – у них размерность не три (три – это только частный случай), а семь, пятнадцать, тридцать один, шестьдесят три, ... и т.д. [6;7;8]. Эту последовательность можно описать рекуррентным соотношением

$$P_{n+1} = 3P_n - 2P_{n-1}.$$

Это приводит к тому, что потенциал и силы меняются совершенно иным образом. Так, силы в семимерной алгебре меняются по закону $1/R^6$, в пятнадцатимерной алгебре – как $1/R^{14}$, в тридцатиодномерной алгебре – как $1/R^{30}$ и т.д. Т.е. расстояния будут уже совершенно иным образом влиять на силу: $1/R^6$ в знаменателе – это уже не $1/R^2$, а на четыре порядка большая величина и рассчитывать на то, что в области больших расстояний удастся использовать многомерные алгебры, проблематично. Но, тем не менее, *многомерная алгебра [6;7;8;10;11;12] и многомерная физика [11;12;13] открывают путь к многомерным технологиям (технологиям $2^n - 1$ [11;16;17])*. Говоря о размерности физического пространства, следует не только уточнить его размерность (n -мерность), но и алгебру, которой оно описывается.

Следует изучить этот вопрос более досконально для многофазных структур, в частности, многошпиндельных станков с ЧПУ, двигателей, всякого рода многотактных и многофазных механизмов, многопараметровых

и многопараметрических систем передачи информации, а также устройств для её приема, хранения, переработки, устройств вычислительной техники, т.е. везде, где осуществляются прием, переработка, хранение и передача многопараметрической информации. Вот та сфера, где, прежде всего, следует рассчитывать на применение многомерных векторных алгебр [10;11;12].

Компьютерная техника также может быть построена на базе не булевой алгебре логики (не системе 2^n для разрядности числа, а в системе $2^n - 1$ – это даст ряд три, семь, пятнадцать...) и, тем самым, будет задействовано более полное использование компьютерных ресурсов для переработки информации, в частности, в непрерывном слежении за процессом и принятием решений в реальном масштабе времени, когда переработка информации должна осуществляться очень быстро, параллельными, а не последовательными путями [10;11;12].

Это относится к уровню повседневных вещей. На уровне микромира – малых расстояний – $1/R^2$ не срабатывает. Ядерные силы оказываются значительно большей величины. Т.е. на малых расстояниях, на расстояниях атомных, ядерных, субатомных и субъядерных, необходимо использовать уравнения, связанные с большой степенью величины R в знаменателе. В частности, семимерная алгебра, пятнадцатимерная алгебра, тридцатиодномерная алгебра [6;7;8] дают соответственно: $1/R^6$,

$1/R^{14}$, $1/R^{30}$. Причем следует обратить внимание на то, что процесс осуществляется степенями: два, шесть, четырнадцать, тридцать, ... т.о. шаг размерностей векторных алгебр дискретен. И там трёхмерная алгебра не срабатывает. Она описывает процессы только для сил типа $1/R^2$. Единица на расстоянии большей степени не проходит. Другие векторные алгебры не могут быть использованы. В связи с этим пытаются задействовать не только степенные, но и экспоненциальные функции, обеспечивающие возрастание сил в области малых расстояний в большей степени. Так, например, потенциал Юкавы определяется экспонентой, связанной со степенной функцией

$$V = -g \frac{e^{-kr}}{r}$$

где g – константа, задающая интенсивность ядерного взаимодействия, k – постоянная с размерностью обратной длины, задающей радиус взаимодействия. Знак минус говорит о притяжении [4,С.427].

На этой же странице можно прочитать следующее: «Гипотеза Юкавы – для описания коротко действующего характера ядерных сил японский физик высказал гипотезу, в которой идёт речь о решении уравнения в виде:

$$\varphi = -\frac{ge^{\frac{r}{R}}}{r}, \quad \varepsilon \partial e R = \frac{h}{m_\pi c}.$$

Это даёт величину массы π -мезона» [4, С.427]. В данном случае задействованы экспоненциальная и показательная функции. Поскольку это не единица на R в квадрате и не единица на R в шестой степени, то можно попытаться расширить закон Юкавы точно так же, как расширялись векторные алгебры – от трехмерной к многомерным. Расширение даёт следующее: оно приводит к тому, что должна быть осуществлена попытка нахождения зависимости силовых взаимодействий в области чрезвычайно малых расстояний от размерности многомерных векторных алгебр. Многомерные алгебры всегда являются подалгеброй алгебры большей размерности. Так что, по сути, будет задействована лишь одна алгебра большей размерности. Все алгебры меньшей размерности будут выступать лишь как частный случай. В частности, трёхмерная векторная алгебра является подалгеброй всех многомерных векторных алгебр и позволяет производить разложение в ортогональные ряды. Такое разложение было проделано для размерности векторной алгебры три, семь, пятнадцать и так далее [6;7;8].

Этот ряд относится к одному из многочисленных обобщенных многочленов Лагерра. Если обратить внимание на весовую функцию обобщенных многочленов Лагерра, то она фиксируется как e^{-x} на x^k , где k – порядок, равный 1, 2, 3,... и так далее [5, С.775]:

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-k)!} \delta_{n,m}$$

$$L_n^{(a)}(x) = e^x x^{-a} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+a}).$$

Т.е. это величина дискретная. В результате опять мы сталкиваемся, как и у Юкавы, с функцией e^{-x} , где x^k – расстояние, $x \sim r$. Но у Юкавы это для физических приложений, а у Лагерра – для приложений математических. На больших расстояниях потенциал описывается функцией $\sim 1/r$, а на малых расстояниях – функцией $\sim e^{-r}$. Необходимо отметить, что расширение потенциала Юкавы не было осуществлено должным образом, попытки были неудачные, хотя они предпринимались многократно и многие ученые стремились найти решения.

Многомерные векторные алгебры дают решение в следующем варианте: на относительно больших расстояниях относительно (по сравнению с $1/R^2$) силы фиксируются сначала алгеброй размерности три – векторной алгеброй размерности три, это даёт $(1/R^2)$, затем с

уменьшением расстояния действует векторная алгебра размерности семь – что дает уже $(1/R^6)$, с дальнейшим уменьшением расстояния действует векторная алгебра размерности пятнадцать. Это даёт величину силы $(1/R^{14})$. Можно сказать, что ступени 1, 3, 7, 15, ..., – фундаментальны в этом случае, поскольку других алгебр практически нет. Ни четырех-, ни пяти-, ни шестимерной алгебр не существует. Многомерные векторные алгебры фиксируют уровни энергии на очень малых расстояниях – субатомных. Ведь даже на расстояниях оболочки атомов действуют электромагнитные силы $(1/R^2)$. А дальше пошли уже ступенчатые изменения величины размерности векторной алгебры, и, следовательно, сил, действующих на объекты. Все эти силы должны быть в математическом отношении связаны с экспонентой в отрицательной степени. Разложение по ортогональным многочленам дает решение, связанное с решением уравнения многочленов Лагерра. Многочлены – это определенное приближение к реальной функции. Какая же будет реальная функция? Ответ на это вопрос есть в справочниках, например – в справочном сетевом ресурсе Википедии [1], подробно описывающей фотонный газ.

Приведенное в указанном электронном ресурсе описание фотонного газа хорошо иллюстрирует действие электромагнитных сил на электромагнитное излучение фотонов – фотонное излучение, подчиняющееся статистике Бозе-Эйнштейна. Эта статистика даёт результат, связанный с силами и энергиями полей. В частности, в справочнике по физике читаем:

$$\begin{aligned} \ll N = \sum_i n_i = \frac{(2m)^{3/2}}{2h^3} \int_0^V dV \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon+p}{kT}} - 1} = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon+p}{kT}} - 1} \\ E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon+p}{kT}} - 1}. \end{aligned}$$

Это применение статистики Бозе-Эйнштейна к фотонному газу» [2, С. 167]. Т.о. показано, что выполняется для фотонного газа уравнение Планка

$$E_{\lambda,T} = 2\pi h c^2 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1},$$

где e – основание натуральных логарифмов, c – скорость света, k – постоянная Больцмана. В трёхмерном варианте: $\sim v^3 / \exp^{hv/kT} - 1$.

Все параметры называть не стоит, поскольку они известны из курса физики и указаны в справочной литературе, но необходимо напомнить, что v – это частота излучения, а v^3 – третья степень, результат для приложения к трехмерным векторным алгебрам. И именно трёхмерная векторная алгебра

формирует число три, потому что здесь определяется число фазовых ячеек в элементе фазового пространства $dx dy dz \cdot dp_x dp_y dp_z$ – т.е. шестимерное фазовое пространство, которое даёт в конечном итоге величину E , величину энергии излучения фотонного газа. Дальше Макс Планк и его последователи не пошли.

В принципе – здесь прямой намёк на трёхмерную векторную алгебру. В области меньших расстояний, как мы уже отметили выше, действуют силы, начиная с $1/R^6$, определяемые семимерной векторной алгеброй [8]. Семимерная векторная алгебра даёт другое выражение для числа фазовых ячеек, иные соотношения. Соотношения меняются так, что вместо v^3 будет фигурировать v^7 . Это уже не формула Планка, а последовательное применение этой формулы на многомерный случай. Решение уравнения будет связано с величиной v^n , где n – размерность векторной алгебры [9]. Поскольку трёхмерная векторная алгебра – частный случай многомерных векторных алгебр, то речь идет о том, что седьмая, пятнадцатая, тридцать первая степень размерности алгебры и дальнейшее продолжение вплоть до бесконечности описываются одной и той же формулой $v^n / (\exp^v - 1)$ – выражением для сил, связанных с размерностью векторных алгебр n , причём n может меняться до бесконечности в соответствии с рекуррентным соотношением:

$$P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}.$$

Итак, мы приходим к выводу, что формула Планка является частным случаем более широкого ряда формул с индексом n , где n может принимать дискретные значения 1, 3, 7, 15, ... и т.д. – вплоть до бесконечности. Как выглядят формы графиков зависимости этой функции от частоты либо длины волны? Эта форма определяется законами теплового излучения абсолютно черного тела, из которых была получена формула Планка [2, С. 210, рис. 142].

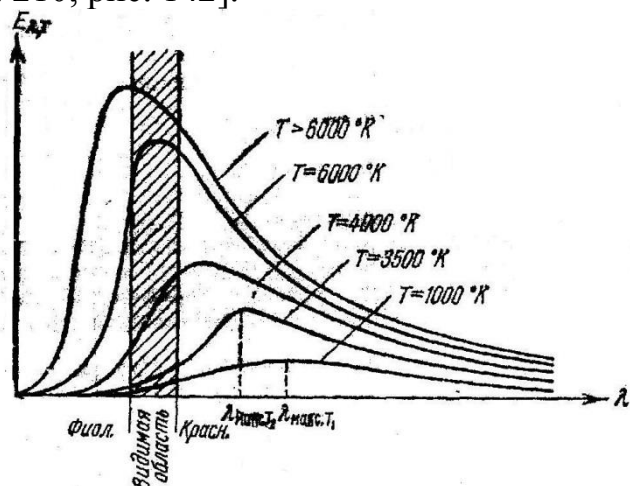


Рис.1. Тепловое излучение абсолютного черного тела

Рисунок 1 представляет формы графиков для $n=3$. Энергия на малых частотах распределения энергии близка к нулю, на больших частотах

также стремится к нулю, имеет явно выраженный максимум, и этот максимум изменяется с изменением длины волны или частоты.

Причем эти графики могут давать характерную формулу $dz / z^5 \exp^{1/z} - 1$. Эта формула приведена там же [2, С.210]. Теперь нам нужно вместо 5-й степени z применить порядок $n+2$ для распределения по длинам волн, либо n для распределения по частотам вместо тройки. Причём, $1/z$ изменяется на z . В результате мы имеем полный аналог формулы Планка для описания уже не фотонного газа, а силовых взаимодействий на очень малых расстояниях. Т.о. гипотеза фотонного газа распространяется не только на электромагнитные взаимодействия, но и на взаимодействия других типов. Форма графиков функции $z^{-5} / (e^{1/z} - 1)$ была получена для различных значений величины n – не в третьей степени, которая была раньше при размерности, равной трем – трёхмерной алгебре, а в степени величин n , определяемых числами: 3, 7, 15, 31, 63,... Полученные графики выявляют схожесть графиков для формулы Планка с графиками при n , изменяющихся от малых значений до самых больших [9]. Были проверены все значения n до значения n в степени 127. Графики показывают значительное смещение положения максимума с изменением частоты или длины волны. Причем появляется соответствие, аналогичное значению $\lambda_{\max} * T$, а также постоянной σ в функции Планка для законов Вина и Больцмана, при индивидуальных значениях для каждого n .

Аналогичная ситуация возникает с изменением длины волны, а также частоты. График полностью восстанавливает форму графика, соответствующего уравнению Планка при различных величинах n , т.е. начинается при росте длины волны с нуля, достигает максимального значения, а затем медленно падает до нуля. График говорит о том, что функция Планка может быть расширена для различных значений n . Причём n изменяется ступенчато с изменением размерности векторных алгебр. Т.о. выявляется соответствие векторных алгебр большой размерности для малых расстояний, причем с уменьшением расстояний растет размерность векторной алгебры [9]. Или, наоборот: с увеличением размерности векторной алгебры уменьшается расстояние, на котором действуют возрастающие по величине силы. Причем силы резко возрастают с увеличением размерности векторной алгебры. Это очень важный результат, поскольку здесь величина n может меняться от единицы до бесконечности и функции типа функции Планка, которая имеет место при $n=3$, выражает те же самые функциональные зависимости, что и формула Планка. Т.о. можно говорить, что формула Планка имеет расширение в область больших значений n , малых значений расстояний (что и было показано в работе [9]). Отсюда следует вывод: *формула, аналогичная формуле Планка, способна описать поля при изменении n от единицы до бесконечности.* Структуры этих полей, образно выражаясь, напоминают «слоёный пирог», где каждому

n соответствует прослойка. А при $n=3, 7, 15, \dots$ опять -таки образно выражаясь, к «бисквитной прослойке» добавляется «слой крема».

В заключение следует отметить, что, таким образом, здесь просматривается *возможный подход к описанию единого поля в многомерном, «слоёном» пространстве*. Возможно, что мы находимся на пороге получения теории единого поля, где функция Планка расширяется до функций, описывающих силы в едином поле. (Но это требует дальнейших исследований). Так что векторные алгебры большой размерности имеют принципиально важное применение в области малых расстояний на уровне атомных, ядерных, субатомных и субъядерных расстояний. С ростом n резко падают значения расстояний, на которых действуют силы, и эти силы растут чрезвычайно быстро с увеличением размерности векторных алгебр. Процесс можно продолжать вплоть до бесконечности. Т.о., силы на очень малых расстояниях растут практически до бесконечности (это очень большие силы).

Самое главное то, что *формула Планка показывает: на чрезвычайно малых расстояниях, с уменьшением расстояния, растут силы и энергия, и наступает момент достижения максимума энергии (минимума расстояний), соответствующего максимуму расширенной функции Планка с учетом величины n* [9]. В дальнейшем сила меняется на противоположное направление. Здесь правый участок в функции Планка будет соответствовать силам отталкивания, а левый на очень малых расстояниях – силам притяжения. Такой характер силы имеет место для атомных сил, описываемых сильными взаимодействиями. Сильные взаимодействия с уменьшением расстояния сначала чрезвычайно растут, но в дальнейшем, с уменьшением расстояния, с приближением к ядру – падают, меняются на силы притяжения, а не отталкивания. Т.е. график воспроизводит требуемый характер изменения сил – силовых взаимодействий с уменьшением расстояния.

Это доказывает целесообразность применения многомерных векторных алгебр для изучения и последующего более детального исследования процессов, происходящих в микромире

Литература

1. Википедия, Свободная энциклопедия [Электронный ресурс]: Драйвер. URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> Драйвер (дата обращения: 21.04.2015).

2. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Том 3. Оптика, физика атомов и молекул, физика атомного ядра и микрочастиц. – Изд. Пятое, стереотипное. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 495с.: Илл.

3.Каку М. Введение в теорию суперструн: пер. с англ. М.: Мир,1999. 624с.

4.Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С. Краткий справочник по физике. Изд. второе, стереотипное. М.: Государственное издательство «ВЫСШАЯ ШКОЛА», 1963. 559 с.

5.Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Издание четвертое. Пер. со второго американского издания под общей редакцией И.Г. Арамовича. М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 831с.

6.Коротков А.В. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011. 36с.

7.Коротков А.В. Элементы многомерного (15-и 31-мерного) векторного исчисления. Новочеркасск: «НОК», 2012. 76с.

8.Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244с.

9.Коротков А.В. Формула Планка в D-мерных пространствах//Альманах науки и образования. 2013.№3. С. 81-91

10.Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В. Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2011. 488с.

11.Коротков А.В., Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С., Кочковая Н.В., Брыкина Т.А., Вересников Г.С., Веприков Ю.В. Многомерная алгебра. Многомерная физика. Многомерные технологии: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.2). Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2014. 286с.

12.Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. 194с.

13.Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С. Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А. В. Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 5. С. 51-56.

14.Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С., Вересников Г.С. Пифагоровы числа в атоме//Альманах современной науки и образования.2013.№1. С.78-90.

15.Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С., Вересников Г.С. Эволюция представлений об n-мерных пространствах в физике//Известия

высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2013. №5. С.35-37.

16.Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С., Брыкина Т.А., Веприков Ю.А. Многомерные технологии//Альманах современной науки и образования.2012.№8. С.91-97.

17.Кочковая Н.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Брыкина Т.А. Концепция 3D компьютера//Альманах современной науки и образования.2012.№8. С.84-89.

18.Современные представления о строении ядра //Физика микромира. Маленькая энциклопедия/ под ред. чл.корр. АН СССР Д.В.ШИРКОВА. М.: Издательство «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ», 1980. 528с.

**МЕШКОВ В.Е., МЕШКОВА Е.В.,
ЧУРАКОВ В.С., БРЫКИНА Т.А.
ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ
АБСТРАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ
СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ А.В.КОРОТКОВА**

Проблема многомерности в оптимизации решается двумя путями: первый из них – это построение неких обобщённых функционалов, например, аддитивных функционалов, или мультипликативных функционалов, в которых в качестве аргумента выступают собственно критерии и вводятся какие-то коэффициенты влияния, например, весовые коэффициенты, учитывающие влияния каждого из параметров. Вследствие этого задача сводится к однокритериальной, одномерной оптимизации и решается существующими традиционными методами. Проблема, которая здесь очевидно существует – это влияние критериев. Как правило, расстановка весов осуществляется на основе каких-то экспертных оценок, что неизбежно носит субъективный фактор. Это – первое.

Второе: существуют методики в теории выбора принятия решений, например, те, которые приводят Р.Л. Кини и Х.Райфа – авторы уже классической книги «Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения» [4]. Эти авторы приводят методики, позволяющие, во-первых, оценить взаимовлияние критериев, во-вторых, построить некие функции их взаимного влияния. Однако, всё равно, это некоторая нечеткость и субъективность. Второй подход – это выделение одного генерального критерия и введение всех остальных в ограничения.

Опять мы приходим к одномерной задаче оптимизации – и проблема здесь следующая: выделение генерального критерия – опять это субъективная оценка – и установка ограничений – тоже во многом субъективная оценка, потому что, как правило, нет ни статистических наработок, ни хороших исследований в этой области.

В качестве примера рассмотрим **понятие ОБЪЕКТА** в различных областях знания (что такое объект в различных областях знания?). Т.е. попытаемся многозначность понятия «объект» привязать к математике.

«**Объект** – в языкознании имя предмета или лица, на который направлено действие, выраженное глаголом (противопоставляется субъекту действия); то же, что дополнение при глаголе и отглагольном существительном» [1, с.829].

«**Объект права**, конкретные имущественные и блага и интересы, отношения по поводу к-рых регламентированы законом» [1, с.829].

В астрономии:

«**Объект дальнего космоса (deep sky object).**

Любой объект вне Солнечной системы, чаще всего термин используется для внегалактических объектов «малой поверхностной яркости»[5, с.118].

В информатике объект понимается и определяется таким образом:

«**Объект [object]** – любой материальный предмет или явление, с которым связана познавательная, информационная или любая другая практическая деятельность человека;

Тип объекта [object type] – обобщенное имя какого-либо множества объектов, характеризующееся определенным набором признаков (в том числе свойств и характеристик), например, «автомобиль», «гроза», «компьютерные игры», и т.д.» [2, с.11].

«**Объект доступа [access object]** – единица информационного ресурса автоматизированной системы, доступ к которой регламентируется правилами разграничения доступа» [2, с.396];

«**Объект с нечеткими границами [fuzzy object]** – в компьютерной графике: объект, границы поверхности которого нельзя чётко обозначить. Примерами могут служить волосы, мех, дым, огонь и т.д. одним из средств реализации таких объектов является вероятностный механизм моделирования движения изображения элементарных участков («частиц») поверхности, составляющих взаимосвязанную систему (**систему частиц [particle system]**). Движение и взаимодействие этих «частиц» определяется как их свойствами, так и характеристиками системы в целом» [2, с.443].

В кибернетике:

«**Объект управления** – система, в которой происходят процессы, подлежащие управлению. В качестве О.у. могут выступать не только физ. (тех.) системы, но и биол., экологические, экон., организационные и др. Примерами могут служить различные агрегаты и установки, производственные процессы, движущиеся объекты и т.д. См.также *Оптимизатор автоматический*» [21, с.361].

Оптимизатор автоматический – устройство, автоматически отыскивающее и поддерживающее такие значения регулирующих воздействий на входе *объекта управления*, при которых некоторая входная величина объекта, характеризующая показатель качества его работы, принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное). О.а. применяются в тех случаях, когда положение *экстремума* неизвестно или изменяется под влиянием факторов, которые нельзя заранее учесть. О.а., предназначенный для работы с объектом, имеющим один экстремум, наз. локальным. Если характеристика объекта имеет несколько экстремумов и О.а. отыскивает главный из них (наибольший из нескольких максимумов или наименьший из нескольких минимумов), то О.а. наз. глобальным. В зависимости от того, отыскивает О.а. экстремум ф-ции одной или нескольких переменных, различают одноканальные или многоканальные автомат. оптимизаторы. О.а. может быть выполнен либо в виде специализированного устр-тва, реализующего простые *алгоритмы* поиска экстремума (см. Регулятор экстремальный), либо в виде специализированной *цифровой вычислительной машины*, решающей сложные задачи оптимизации при наличии ограничений, являющихся ф-циями координат объекта. О.а. применяются для оптимизации работы сложных пром. объектов, т.е. для достижения наилучших технико-экон. показателей их работы (макс. производительности, макс. Кпд, миним. Себестоимости продукции и т.д.) [21, с. 376].

В математике:

«ОБЪЕКТ категории – термин, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль множеств, групп, топологич. пространств и т.п. О. категории неопределяемое понятие. Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. классом объектов и классом морфизмов соответственно. Класс О. категории $\mathfrak{K}$ обычно обозначается Ob . Любому объекту A категории $\mathfrak{K}$ однозначно соответствует единичный морфизм 1_A причем разным О. отвечают разные единичные морфизмы. Поэтому формально можно определить понятие категории только с помощью морфизмов. Однако термин «объект категории» является удобным языковым средством, которое практически всегда используется. Деление элементов категории на О. и морфизмы имеет смысл только в пределах фиксированной категории, так как О. одной категории могут быть морфизмами другой и наоборот. Благодаря наличию морфизмов между О. категории устанавливаются определенные взаимосвязи, что позволяет выделить специальные классы О.: *интегральные объекты, нулевые объекты, малые объекты, проективные объекты, инъективные объекты* и т.д.

М.Ш. Цаленко» [13, стб. 1148-1149].

В политологии

«ОБЪЕКТЫ ПОЛИТИКИ (от лат. *objectum* – предмет) – общественные явления, процессы, ситуации, факты, а также общественные силы, организации, лица, люди, на которых направлена деятельность *субъектов политики*. Поскольку объектно-субъектная взаимосвязь в сфере

политической жизни представляет собой органическое единство, постольку сами субъекты политики являются и ее объектами: так, человек есть главный субъект и объект политики; социальные группы, организации, движения, политические силы выступают одновременно и как объекты политики, и как ее субъекты. Но правомерно говорить об объектах политики как относительно самостоятельных явлениях. Так, важнейшими объектами политики являются власть, вся политическая система общества. Наиболее общим объектом является общество в целом, все его ключевые социально-экономические процессы, а политика приобретает функцию координации, регулирования всех его главных сторон социальной жизни» [3, с.95].

В психологии:

«Объект – фрагмент реальности, на которую направлена *активность* взаимосвязанного с ней *субъекта*. Вещи, существующие независимо от субъекта, становятся О. по мере того, как субъект взаимодействует с ними. В процессе действия и познания они выступают как вещи для нас, т.е. для людей, обладающих *сознанием* и *психикой*. Таким образом, взаимосвязь субъекта с О. характеризует психический уровень *взаимодействия* человека с миром; физиологический его уровень определяется через взаимосвязь с *раздражителями*. Сигнальный раздражитель опосредует *взаимодействие* между предметом как О. и раздражителя (соответственно действия и реакции) одна из существенных особенностей *деятельностного* подхода в психологической науке» [10, с.231].

В семиотике:

«Объект, наделенный ценностью (Object of value)»

Термин «ценность» имеет сам по себе несколько значений. Например, мы различаем ценность, определяемую посредством «оценки», т.е. установленной стоимости или цены, и ценность, понимаемую как «качество», делающее кого-нибудь достойным уважения, желанным или важным.

Согласно семиотической теории, ценность возникает из отношения между актантными субъектами и объектами: любая потребность субъекта в конкретном объекте или желание его наделяет последний ценностью и тем самым превращает его в объект, наделенный ценностью (*object of value*). Более того, ценность, которую объект имеет для субъекта, в конечном счете отождествляется с самим объектом. Например, если кто-нибудь покупает машину, дело, скорее всего, заключается не столько в обладании объектом (машиной), сколько в приобретении простого и удобного транспортного средства, либо способа поднять свою общественную репутацию или наслаждения чувством власти... Сама по себе вещь в этом смысле является просто предлогом, местом вложения желаемых ценностей. Таким образом, в семиотическом анализе термин объект, наделенный ценностью служит для обозначения объектов, поставленных в определенное отношение к субъекту» [12, с.119-120].

В социологии

«ОБЪЕКТ И СУБЪЕКТ В СОЦИОЛОГИИ (лат. objectum – предмет и subjectum – подлежащее). О. социологич. исследования является определенная социальная реальность, подлежащая изучению согласно целям исследования и предмету анализа, сформулированным в его программе, С. выступает исследователь или исследовательский коллектив. Осн. особенность объектно-субъектных отношений в социологии (в отличие от естественных и технических наук) состоит в том, что исследователь имеет дело с др. С., выступающими для него в качестве О. изучения, к-рые характеризуют их деятельность. В обращении к социальной реальности социолога, следовательно, подстерегает опасность утраты объективного, материалистического взгляда на изучаемые процессы и явления, опасность субъективизма и психологизации в объяснении и интерпретации предмета изучения. Ясность мировоззренческих позиций исследователя, руководствующегося диалектико-материалистического анализа общественных явлений, – важнейшее условие преодоления субъективизма и объективизма в социологич. исследовании. Проблема психологизации О. состоит в том, что возможна подмена анализа объективных условий деятельности людей и объективных социальных отношений их отражением в мнениях, оценках, суждениях лиц, к-рые выступают источниками первичной информации в эмпирическом социологич. исследовании. Мнения, оценки, суждения и т.п. субъективные проявления человеческой активности, если они рассматриваются в качестве таковых, сами по себе выступают О. не только психологического, но и социологич. изучения (напр., опросы общественного мнения, исследование состояний удовлетворенности различными сторонами условий жизни и деятельности). В этом случае социолог обязан выявлять зависимость данных субъективных проявлений от объективных материальных условий жизни людей, четко разграничивая эти последние и их отражение в сознании и психике личности. Наряду с методологическими критериями разделения объективного и субъективного важную роль играют технико-методические операции, фиксированные в инструментарии социологического исследования, где должны быть предусмотрены операции контроля достоверности получаемых сведений, надежности и устойчивости исходных данных» [11, с.212-213].

В философии:

«ОБЪЕКТ (от лат. objectum – предмет) – в самом широком смысле то, на что направлено индивидуальное или коллективное сознание. Когнитивным, или эпистемологическим, О. является все, что воспринимается, воображается, представляется или мыслится; О. может быть реальным, вымышленным, или даже галлюцинаторным. После И.Канта О. часто называют то, что противостоит субъекту, его сознанию как часть внешнего мира, т.е. реальный О. волевым О. является все желаемое, избегаемое или притягивающее» [22,с.596].

Из приведенных примеров следует, что объект обладает различными смыслами в различных областях знания. В математическом плане (отношении) смыслу может быть присвоена числовая оценка (вес, весовая

функция) что предлагал в 70-е годы XX В.В.Налимов [20]. Для сокращения числа существенных критериев можно предложить два подхода:

- *Использование при формировании оценочных функций многомерной парадигмы (например, семимерной парадигмы [6; 7; 8; 9]);*
- *Переход на более высокий абстрактный уровень представления модели объекта, что позволяет сократить число критериев (атрибутов объекта), например рассмотрение смыслового образа объекта ассоциативного вида.*

В своё время, в ранних работах [14;15;17], посвященных определению описания объектов, было предложено именно *семь критериев* оценки любого объекта –таких критериев, как: сложность, полезность, и т.д. – но они были все сведены, в общем - то, к численным оценкам, к таким понятиям, как *утилизация объекта* и ряд других. Численные оценки, следовательно, *вычисляемы и сравнимы в разных системах.*

Если в качестве *аргументов* взять именно эти семь критериев, поставив им в соответствие физические критерии конкретного объекта, например, ту же топологию вычислительной сети для качественного критерия «сложность», то можно попытаться решить задачу оптимизации, а как следствие – задачу проектирования и синтеза топологии с учетом именно семимерной парадигмы А.В.Короткова [6;7;8;9]. Потому что *конечная основная задача – это автоматизированный синтез топологий (автоматизация структурного синтеза) – вот это генеральная цель, которую надо поставить.* Но для того, чтобы её достичь, мы должны иметь критерии сравнения и критерии оптимизации или, по крайней мере, критерии выбора рационального или предпочтительного решения.

Используя качественные критерии, такие как *утилизация, функциональность, полезность объекта*, мы, очевидно, с какой-то точки зрения, получаем довольно универсальную модель произвольной сложной системы. *И если мы, хотя бы в одной статье сейчас проведем параллели между технической системой и вот такой моделью и попытаемся построить функционал, который сможем минимизировать или максимизировать, то это будет весьма полезно. Это – в этом подходе.* Ещё где это можно использовать? Например, в автоматической классификации текстов. Попытаться здесь уйти от статических численных критериев и выделить критерии, характеризующие семантику текста [16;19]. Для этого *следует построить многовекторную модель для каждого текста и соответственно, по крайней мере, сравнивать, а может и находить лучшее или худшее решения.* Т.е. лучший или худший текст с т.з. определённой цели (т.е. тематики), а она наверняка должна отражаться положением точки в семимерном пространстве. Как идея, каждая тематика покрывает некоторое пространство *в пространстве языка.* Если язык представить как набор слов и набор каких-то понятий, которые отражены в многовекторном пространстве, т.е. координата – понятие, её значение, это координата точки, пересечение координат, это точка, характеризующая текст. И опять здесь надо вычислять

и надо сравнивать. Вот два этих подхода именно с этой – многомерной точки зрения.

С точки зрения семимерной парадигмы А.В.Короткова [6;7;8;9], мы могли бы, по крайней мере, *свести эту задачу к решению в области функций, определенных на семи аргументах и попытаться построить некие функции, которые были бы, по крайней мере, дифференцируемы*. Тогда бы мы могли находить оптимум традиционным классическим математическим методом, находя первую и соответствующую вторую производную. В то же время, как бы решая задачу традиционно одномерной или однокритериальной оптимизации, можно было работать с семью, по крайней мере, критериями.

Проблема – в построении таких функций и здесь следует смотреть, прежде всего, на то, как ведут себя сами аргументы? В качестве примера такого подхода лучше выбрать, например, оптимизацию технических систем – таких, как сложные топологии, которые характерны наличием многих критериев, таких, как: пропускная способность каналов, длина линии связи, аппаратные затраты, сложность топологии – и ряд других, которые иной раз, нечетко определены.

С другой стороны, мы всегда могли бы рассматривать пропускную способность как изменение некоторого линейного аргумента и, следовательно, функция от него тоже может быть гладкой и дифференцированной (потенциально). Вот такие исследования желательно провести и построить подобные функционалы.

В ходе исследований был получен вариант использования семимерной парадигмы для построения библиотеки сумматоров, наилучшие результаты быстродействия при этом были получены для *манчестерского сумматора* [18]. Рассмотрим подробнее его работу. При вычислении суммы двух двоичных строк A и B , время передачи может быть ускорено, если в модели параллельного сумматора использовать так называемую Манчестерскую ячейку.

Чтобы понять базовую механику Manchester Adder, представим основные булевы уравнения, на которых основана его работа.

- 1) $G_i = A_i B_i$ – carry generate на i ом этапе
- 2) $P_i = A_i \oplus B_i$ – carry propagate на i^{om} этапе
- 3) $S_i = P_i \oplus C_i$ – сумма на i^{om} этапе
- 4) $C_{i+1} = G_i + P_i C_i$ – перенос на i^{om} этапе

Где $A=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $B=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $C=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, $P=(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)$, $S=(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)$ являются семимерными булевыми векторами.

При $A_i = B_i$ создаются условия для генерации нового переноса на любой стадии сложения, C_{i+1} при этом зависит исключительно от G_i (то есть $C_{i+1} = G_i$ – из уравнения 4). Необходимое условие для передачи переноса – $A_i \neq B_i$, следовательно $C_{i+1} = C_i$ из уравнения 4.

Представим на рисунке 1 алгоритмическую модель полученного сумматора, а на рисунке 2 форму, отражающую работу сумматора. В полях

Text Box вводятся значения переменных: $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$, $B=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7)$. При нажатии кнопки **Вычислить** вычисляется результат. Значения переменных a и b представляют собой символьные массивы заданной длины – размерности семь. Далее элементы массива обрабатываются согласно таблице истинности.

При нажатии кнопки **Контроль** появляется таблица истинности и можно проконтролировать правильность вычислений [23]



Рисунок 1 – Алгоритмическая модель Манчестерского сумматора

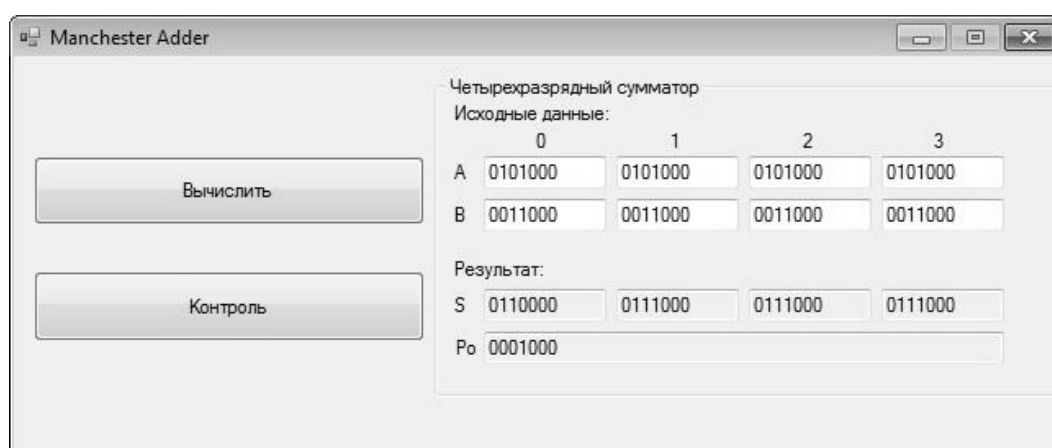


Рисунок 2 – Структурная схема модели Манчестерского сумматора

Подводя итоги вышесказанного можно сформулировать ряд выводов, которые, на первый взгляд могут выглядеть тривиально, но, в тоже время, имеют несомненный практический и теоретический интерес:

рассмотренное в качестве примера понятие «объекта» (как и вообще любое другое понятие) многопланово – и как следствие может быть представлено многомерной моделью, например, так, как это предлагается на основе многомерной парадигмы [6;7; 8; 9].

Отсюда можно сформулировать ряд перспективных направлений в этой области:

- Разработка многомерной универсальной модели объекта, в которой качественные критерии могут быть представлены численно;
- Разработка на основе многомерной парадигмы универсальных процедур построения оценочных функций для решения задачи многокритериальной оптимизации;
- Разработка универсальных процедур синтеза топологий с учетом влияния многомерной парадигмы.

Эти и подобные задачи должны стать предметом дальнейших исследований в данном направлении.

Литература

1. Большой энциклопедический словарь.–2-е изд., перераб. и доп. – М.: «Большая Российская энциклопедия»; СПб.: «Норинт», 1999. – 1456с.: ил.
2. Воройский Ф.С. Информатика. Новый систематизированный толковый словарь – справочник (Введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах). – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2003. – 760с.
3. Политологический словарь: учебн. пособие/Р.Г.Григорян, А.В.Гришин, Г.И.Демин и др.; Под ред. В.Ф. Халипова.– М.: Высш. шк., 1995. –192с.
4. Кини Р.Л., Райф Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения.– М.: Радио и связь, 1981.– 560с.: ил.
5. Иллюстрированный словарь практической астрономии/Пер. с англ. А.П.Железняка.– М.: АСТ: Астрель, 2006. – 304с.: ил.
6. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. –Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.
7. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. –266с.
8. Коротков А.В., Мешков В.Е. Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). –Новочеркасск: Изд-во НОК, 2011. – 488с.
9. Коротков А.В., Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С., Кочковая Н.В., Брыкина Т.А., Вересников Г.С., Веприков Ю.В. Многомерная алгебра. Многомерная физика. Многомерные технологии: Монография. (Серия

«Семимерная парадигма А.В.Корткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.2). – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2014. – 286с.

10. Краткий психологический словарь /Ред.-сост. Л.А.Карпенко; Под общ. ред. А.В.Петровского, М.Г. Ярошевского. – 2-изд., расш., испр. и доп. – Ростов-на Дону: Изд-во «Феникс», 1998.– 512с.

11. Краткий психологический словарь /Под общ. ред. Д.М.Гвишиани, Н.И.Лапина; Сост. Э.М.Коржева, Н.Ф.Наумова. – М.: Политиздат, 1989. – 479с.

12. Мартин Броуэн, Рингхэм Фелицитас. Словарь семиотики: пер. с англ. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.– 256с.

13. Математическая энциклопедия: Гл.ред. И.М.Виноградов, т.3, Коо – Од. – М.: «Советская энциклопедия», 1982. – 1184 стб., ил.

14. Мешков В.Е. , Трунин В.Б., Марчук В.И., Кравчик В.Г. Новый подход к организации саморазвивающихся информационных систем для исследования параметрического пространства объекта // Конструирование, технологии, экологические исследования в автомобилестроении: Межвузовский сборник трудов/Завод-ВТУЗ при ЗИЛе.– М., 1987.

15. Мешков В.Е., Трунин В.Б., Марчук В.И., Кравчик В.Г. Применение универсального информационного модуля для синтеза саморазвивающихся систем информационного пространства объекта // Конструирование, технологии, экологические исследования в автомобилестроении: Межвузовский сборник трудов/Завод-ВТУЗ при ЗИЛе.– М., 1987.

16. Мешков В.Е., Мешкова Е.В., Козоброд А.В. Анализ архитектур гибридных нейросетевых моделей в задачах автоматической классификации текстовой информации // Известия ТТИ ЮФУ. Технические науки. – 2010. – №4.

17.Мешков В.Е., Трунин В.Б., Марчук В.И., Кравчик В.Г. Организация иерархической структуры саморазвивающейся информационной системы «человек-машина-среда»//Конструирование, технологии, экологические исследования в автомобилестроении: межвузовский сборник трудов/Завод-ВТУЗ при ЗИЛе.– М., 1987.

18. Мешков В.Е., Брыкина Т.А. Разработка моделей сумматоров на базе многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В.Корткова// Естественные и технические науки. 2012. № 2. – М.: Спутник+. – 513с. – (с. 423-428)

19. Мешкова Е. В. Методика построения классификатора текста на основе гибридной нейросетевой модели //Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск «Интеллектуальные САПР». –Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2008. №4(81). – (С.212- 215).

20. Налимов В.В. Спонтанность сознания: Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектура личности. – М.: Изд-во Прометей МГПИ им. Ленина, 1989. – 287с.

21. Словарь по кибернетике /Под ред. академика В.М.Глушкова. – Киев: Главная редакция украинской советской энциклопедии, 1979. – 623с.:ил.

22. Философия: Энциклопедический словарь /Под ред. А.А.Ивина.– М.: Гардарики, 2004.– 1072с.

23. **SEVEN-DIMENSIONAL ADDER** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012617303; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 14.08.2012.

МЕШКОВ В. Е., ЧУРАКОВ В.С., БРЫКИНА Т.А. ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ: АЛГОРИТМЫ И КОДЫ НА ЕЁ ОСНОВЕ В ПРИРОДНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Введение

В последние годы в рамках концепции многоагентного моделирования интенсивно разрабатывается научное направление Natural Computing – «Природные вычисления», объединяющее математические методы, в которых заложены принципы, аналогичные природным механизмам принятия решений. Эти механизмы обеспечивают эффективную адаптацию флоры и фауны к окружающей среде на протяжении миллионов лет.

Изучаются, прежде всего, как наиболее перспективные методы природных вычислений, т.н. *роевые алгоритмы*, к коим относятся муравьиные и пчелиные алгоритмы.

Муравьиные алгоритмы серьезно исследуются европейскими учеными с середины 90-х годов XX века. В основу муравьиных алгоритмов оптимизации положена имитация самоорганизации муравьиной колонии. Колония муравьев рассматривается как многоагентная система, в которой каждый агент (муравей) функционирует автономно по очень простым правилам. В противовес почти примитивному поведению агентов, поведение всей системы получается очень сложным, похожим на разумное. Муравьиные алгоритмы основаны на имитации самоорганизации социальных насекомых посредством использования динамических механизмов, обеспечивающих достижение системой глобальной цели в результате низкоуровневого взаимодействия её элементов при условии использования элементами системы только локальной информации, исключая централизованное управление. Необходимо отметить, что в настоящее время получены хорошие результаты муравьиной оптимизации таких сложных комбинаторных задач, как раскраски графа, задачи коммивояжера, оптимизации маршрутов транспорта, оптимизации сетевых графиков, календарного планирования и других. Особенно эффективны муравьиные алгоритмы при on-line оптимизации процессов в распределенных нестационарных системах (например, трафиков в телекоммуникационных системах). Все эти алгоритмы хорошо описаны в научной литературе и фигурируют в докладах соответствующих научных конференций [12;13;14;15].

К природным вычислениям относятся генетические алгоритмы, а также сознание и мышление человеческого мозга и интеллектуальные способности животных, самоизмерение Вселенной [17].

Поскольку физическое существование и информационное содержание неразрывно связаны, то к природным вычислениям относят также *квантовую модель вычислений* (см. например, статья В.В.Курейчика «Методы и модели, инспирированные природными системами» [12]),

реализуемую на гипотетическом квантовом компьютере. Физики, работающие в области квантовой механики, считают, что все физические системы – компьютеры. «Камни, атомные бомбы и галактики не могут работать под управлением популярных операционных систем, но они регистрируют и обрабатывают информацию. Электроны, фотоны и другие элементарные частицы несут в себе информацию, которая изменяется всякий раз, когда частицы взаимодействуют друг с другом» [16, с.33]. Или иными словами можно сказать, что вычислительными способностями обладают вещество и поле – т.е. материя в общем и целом, – а это имело место ещё в работах древнегреческих мыслителей, писавших о том, что разум имманентен природе [8, с.77, 238] (Необходимо отметить, что наука Нового времени строится на картезианском *дуалистическом* подходе, согласно которому признается наличие в мире двух субстанций: протяжённой (*res extensa*) и мыслящей (*res cogitans*). В данном случае – налицо интеллектуальная революция, ведущая к смене парадигм: от дуализма к монизму – **в мире существует одна субстанция, которая протяженна и мысляща одновременно**). Или, по представлениям современных физиков, работающих в области квантовой механики: «Абсолютно все физические системы хранят и обрабатывают информацию, развиваясь во времени. Иначе говоря, вся Вселенная вычисляет» [16, с.34], что можно перефразировать следующим образом: «Сущностью Вселенной является вычисление».

Слияние теории информации и физики обеспечивает главный принцип квантовой механики, согласно которому в основе своей сама природа дискретна, а любую физическую систему можно описать, используя конечное число битов. В этой природной системе каждая частица действует точно также, как логический элемент компьютера. Спин ("ось") частицы может указывать в одном из двух направлений, кодируя, таким образом, один бит, и может менять направление на обратное ("опрокидываясь"), выполняя, таким образом, простейшее вычислительное действие. Согласно теореме Марголуса-Левитина для изменения значения бита требуется минимальный временной промежуток. У этой теоремы есть множество следствий от пределов, налагаемых на геометрию пространства-времени, до вычислительных возможностей Вселенной в целом. Рассмотрим пределы вычислительной мощности обычной материи в –данном случае одного килограмма вещества, занимающего объём 1 л. С. Ллойд и Дж. Энджи предлагают назвать это гипотетическое устройство "предельным ноутбуком" [16, с.34]. «Источником питания для него служит просто вещество, непосредственно преобразуемое в энергию по формуле $E=mc^2$. Если направить всю энергию на управление битами, компьютер сможет выполнять 10^{51} операций в секунду. Объём памяти можно рассчитать с помощью термодинамики. Когда один килограмм вещества превращается в энергию в объеме 1 л, его температура равна 1 млрд. К, а энтропия, пропорциональная энергии, деленной на температуру, соответствует 10^{31} битам информации. Предельный ноутбук хранит данные в виде

микроскопических движений и положений элементарных частиц внутри себя. При этом используется каждый отдельный бит, допускаемый законами термодинамики.

Взаимодействуя, частицы могут заставлять друг друга изменять состояние. Этот процесс можно рассматривать в терминах языка программирования типа *C++* или *Java*: частицы – это переменные, а их взаимодействия – арифметические операции. Состояние каждого бита может изменяться 10^{20} раз в секунду, что эквивалентно тактовой частоте процессора в 100 гигагерц (т.е. 100 миллиардов миллиардов герц). На самом деле система действует слишком быстро, чтобы ею управлял тактовый генератор. Время, требуемое для изменения состояния бита, приблизительно равно времени, в течение которого распространяется сигнал между двумя соседними частицами. Таким образом, предельный ноутбук работает в предельно параллельном режиме, он действует не как один процессор, а как множество процессоров, работающих почти независимо и сравнительно медленно обменивающихся результатами [16, с.38], – пишут авторы. Поскольку предельный ноутбук выполняет все вычисления параллельно [16, с.37], то он представляет собою «идеальный параллельный компьютер, т.е. несметное множество процессоров, работающих одновременно» [16, с.37].

«Предполагается, что природные компьютеры хранят данные в дискретных квантовых состояниях элементарных частиц, а набор выполняемых ими команд определяется законами квантовой физики» (16, с.35). Знаменитое высказывание Пифагора «Всё есть число» в данном случае преобразуется в высказывание «Вычисление есть существование Вселенной» [16, с.42].

Золотая пропорция

Определение Золотого сечения

В математике *пропорцией* (лат. *proportio*) называют равенство двух отношений:

$$a:b=c:d.$$

Отрезок прямой AB можно разделить на две части следующими способами: на две равные части – $AB : AC = AB : BC$;

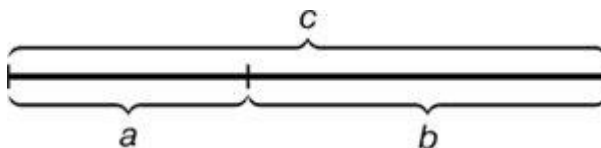
на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют); таким образом, когда $AB : AC = AC : BC$.

Последнее и есть золотое деление или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

Золотое сечение – это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему $a:b=b:c$ или $c:b=b:a$.

Практическое знакомство с золотым сечением начинают с деления отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки. Из точки B восстанавливается перпендикуляр, равный половине AB . Полученная точка C соединяется отрезком с точкой A . На отрезке AC от

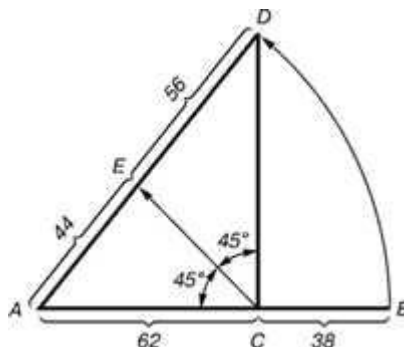
точки C откладывается отрезок, равный BC , заканчивающийся точкой D . На отрезке AB от точки A откладываем отрезок AE , равный отрезку AD . Полученная при этом точка E делит отрезок AB в соотношении золотой пропорции.



Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью $AE = 0,618...$, если AB принять за единицу, $BE = 0,382...$. Для практических целей часто используют приближенные значения 0,62 и 0,38. Если отрезок AB принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

Второе золотое сечение

Второе Золотое сечение вытекает из основного сечения и дает другое отношение 44 : 56. Такая пропорция обнаружена в архитектуре, а также имеет место при построении композиций изображений удлиненного горизонтального формата. Деление осуществляется следующим образом. Отрезок AB делится в пропорции золотого сечения. Из точки C восставляется перпендикуляр CD . Радиусом AB находится точка D , которая соединяется линией с точкой A . Прямой угол ACD делится пополам. Из точки C проводится линия до пересечения с линией AD . Точка E делит отрезок AD в отношении 56 : 44.



Построение второго золотого сечения

Ряд Фибоначчи

Ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т.д. известен как ряд Фибоначчи. Особенность последовательности чисел состоит в том, что каждый ее член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$, $8 + 13 = 21$; $13 + 21 = 34$ и т.д., а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления. Так, $21 : 34 = 0,617$, а $34 : 55 = 0,618$. Это отношение обозначается символом Φ . Только это

отношение – $0,618 : 0,382$ – дает непрерывное деление отрезка прямой в золотой пропорции, увеличение его или уменьшение до бесконечности, когда меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему. Фибоначчи так же занимался решением практических нужд торговли: с помощью какого наименьшего количества гирь можно взвесить товар? Фибоначчи доказывает, что оптимальной является такая система гирь: 1, 2, 4, 8, 16...

Обобщенное золотое сечение

Ряд Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8) и открытый им же «двоичный» ряд гирь 1, 2, 4, 8, 16... на первый взгляд совершенно разные. Но алгоритмы их построения весьма похожи друг на друга: в первом случае каждое число есть сумма предыдущего числа с самим собой $2 = 1 + 1$; $4 = 2 + 2$..., во втором – это сумма двух предыдущих чисел $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$ Нельзя ли отыскать общую математическую формулу, из которой получаются и «двоичный» ряд, и ряд Фибоначчи? Действительно, зададимся числовым параметром S , который может принимать любые значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5... Рассмотрим числовой ряд, $S + 1$ первых членов которого – единицы, а каждый из последующих равен сумме двух членов предыдущего и отстоящего от предыдущего на S шагов. Если n -й член этого ряда мы обозначим через $\varphi_S(n)$, то получим общую формулу $\varphi_S(n) = \varphi_S(n - 1) + \varphi_S(n - S - 1)$. Очевидно, что при $S = 0$ из этой формулы мы получим «двоичный» ряд, при $S = 1$ – ряд Фибоначчи, при $S = 2, 3, 4$ – новые ряды чисел, которые получили название S -чисел Фибоначчи. В общем виде золотая S -пропорция есть положительный корень уравнения золотого S -сечения $x(S+1) - x(S - 1) = 0$. Нетрудно показать, что при $S = 0$ получается деление отрезка пополам, а при $S = 1$ – знакомое классическое золотое сечение. Отношения соседних S -чисел Фибоначчи с абсолютной математической точностью совпадают в пределе с золотыми S -пропорциями! Математики в таких случаях говорят, что золотые S -сечения являются числовыми инвариантами S -чисел Фибоначчи. С помощью кодов золотой S -пропорции можно выразить любое действительное число в виде суммы степеней золотых S -пропорций с целыми коэффициентами.

Золотое сечение и симметрия

Золотое деление не есть проявление асимметрии, чего-то противоположного симметрии. Согласно современным представлениям золотое деление – это асимметричная симметрия. В науку о симметрии вошли такие понятия, как статическая и динамическая симметрия. Статическая симметрия характеризует покой, равновесие [9], а динамическая – движение, рост. Так, в природе статическая симметрия представлена строением кристаллов, а в искусстве характеризует покой, равновесие и неподвижность. *Динамическая симметрия выражает активность, характеризует движение, развитие, ритм, она – свидетельство*

жизни. Статической симметрии свойственны равные отрезки, равные величины. Динамической симметрии свойственно увеличение отрезков или их уменьшение, и оно выражается в величинах золотого сечения возрастающего или убывающего ряда.

Понятие «золотого сечения» известно ещё со времен античности. С точки зрения Платона, и других античных авторов – с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – Золотого Сечения... Как уже было отмечено выше, его сущность состоит в том, что отрезок прямой делится на две части в среднем и крайнем отношении, т.е. *целое относится к большей части отрезка так же, как большая его часть относится к меньшей части*. Решение этой задачи сводится к решению квадратного уравнения следующего вида:

$$X^2 - X - 1 = 0; \quad (1) \quad \text{Два корня этого уравнения}$$

имеют вид:

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339; (2) \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339; (3)$$

Корень X_1 назван числом Фидия (Φ) в честь великого древнегреческого скульптора, жившего в V веке до нашей эры, скульптуры которого отличались высочайшей гармонией. Отношение отрезков, равное числу Фидия, или «золотому числу», и названо «золотым сечением». $\alpha = 1,6180339...$, называемое основанием золотой пропорции.

Число α обладает уникальными математическими свойствами. Это единственное число, кроме нуля, удовлетворяющее рекуррентному соотношению:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$$

Основание золотой пропорции обладает одновременно свойствами аддитивности и мультипликативности.

Весь окружающий мир можно разделить с точки зрения формообразования на две группы – то, что создано руками человека и то, что мы называем природой.

Итак, $X_1 = \Phi$, а $X_2 = -\Phi^{-1}$. «Золотое сечение» находит свое проявление в пропорциях живой и неживой природы. Это сечение пронизывает пропорции скульптур и архитектурных сооружений великих мастеров античности, а также музыкальные произведения замечательных композиторов. На нём основан модуль французского архитектора Карбюзье [23]. Классическими проявлениями золотого сечения являются предметы обихода, математика [6; 11; 21] и эстетика [4; 23]. В XX столетии с расширением области знаний резко увеличилось количество сфер, где наблюдается феномен золотой пропорции. Это биология и зоология [1; 23; 24], экономика [1], защита информации [2], искусственный интеллект [7], кибернетика [18; 20; 21], астрономия [1; 3; 4], геология [4], стандартизации и теории измерений [21; 26].

Числовой ряд Фибоначчи:

(0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,144,233,377,610,987...) $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$; (4) и
числовой ряд Люка:

(2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843...) $L_{k+1} = L_k + L_{k-1}$; (5),
каждый последующий член которых равен сумме двух предыдущих членов
ряда связаны с «золотым числом» следующим соотношением:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{F_{k+1}}{F_k} \right\rangle = \Phi; \quad (6)$$

при этом как числа Фибоначчи, так и числа Люка могут быть выражены
через степени числа

Φ по следующим формулам:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^k - (-\Phi)^{-k}]; \quad (7) \quad L_k = [\Phi^k - (-\Phi)^{-k}]; \quad (8).$$

К вышесказанному следует также добавить «золотой вурф» – *пропорцию
конформной симметрии*, равную $1, 618^2 : 2 \approx 1, 309$ [22].

Итак, свойства золотого сечения описываются уравнением: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

Решение этого уравнения:

$$\Phi_1 = 1,618$$

$$\Phi_2 = -0,618$$

$$\Phi_1 \Phi_2 = -1$$

$$(\Phi_1)^2 = 1 + \Phi_1 = 2,618$$

$$(\Phi_2)^2 = 1 + \Phi_2 = 0,381$$

$$1/\Phi_1 = -\Phi_2$$

$$1/\Phi_2 = -\Phi_1$$

$$\Phi_1/\Phi_2 = 2 - \Phi_2$$

$$\Phi_1/\Phi_2 = -(1 + \Phi_1)$$

$$\Phi_1/(\Phi_1 - 1) = (1 + \Phi_1)$$

$$\Phi_2/\Phi_1 = 1/(2 + \Phi_1) = 1 - \Phi_2 = (\Phi_2)^2 = 0,381$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \sqrt{5}$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 1$$

Золотое сечение в природе

Есть все основания полагать, что отражение закономерности мироздания связано с золотым сечением, с числами Фибоначчи. (Есть все основания полагать, что на самом деле Природа устроена просто, без математических наворотов релятивистов, ведь не зря же ещё И. Кеплер писал, что «геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них – это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем (золотом) отношении»). Античные мыслители: Пифагор, Платон, Евклид это отношение, равное $1,618\dots$, считали числом, лежащим в основе мироустройства. С числом, олицетворяющим золотое сечение, тесно связан числовой ряд Фибоначчи, где каждый член равен сумме двух предыдущих: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 21, 34, 55... При этом отношение какого-либо из чисел Фибоначчи к предыдущему тем ближе к золотому, чем дальше число от начала ряда.

Золотое сечение проявляется на всех структурных уровнях материи: на уровне мега уровня выявлено К.П.Бутусовым в Солнечной системе [3], оно обнаружено и на микроуровне выявлено в распаде элементарных частиц [1;19], в рамках бинарной геометрофизики выявлена связь зарядов в электрослабых взаимодействиях с золотым сечением [5]. Также существует связь пропорции «золотого сечения» с явлениями синхронизации и самоорганизации, обнаруживаемая в различных природных и технических объектах.

Широко распространены в природе соответствующие числам Фибоначчи «спирали Фибоначчи» и «степенные ряды чисел S – золотых сечений». «Степенные ряды чисел S – золотых сечений являются» рекуррентными последовательностями и производными чисел Фибоначчи. «Спираль S – золотых сечений» соответствуют числам: 1,618; 1,464; 1,380; 1,324;... – числовым инвариантам, характеризующим волны электрической активности головного мозга и других самоорганизующихся систем.

Выявлены соответствия «спиралей Фибоначчи» числам ряда Фибоначчи, существующим в природе (упаковка семян растительного мира: ромашки, подсолнуха, ананаса и т.д. Точнее, спирали имеют как правое, так и левое вращение, а в зонах пересечения спиралей (в зонах взаимодействия) находятся семена. Это очевидный и о многом говорящий факт. Очевиден и факт того, что одновременно существуют две спирали – правая и левая и в точке их пересечения идёт некоторый процесс, который мы наблюдаем на макроуровне, как формирование лепестка или зерна). Все в Природе подчинено строгим математическим законам. Оказывается, что расположение листьев на стеблях также носит строгий математический характер и это явление называется в ботанике "филлотаксисом". Суть филлотаксиса состоит в винтовом расположении листьев на стебле растений (ветвей на деревьях, лепестков в соцветьях и т.д.).

Алгоритмы и коды на «золотой пропорции»

В.Г.Евстигнеев в обзорной статье «Недвоичные компьютерные арифметики» выделяет «среди позиционных весомозначных систем счисления есть системы, в которых веса разрядов выражаются не известным соотношением $\Delta_i = S_i$, а другими, например числами ряда Фибоначчи, т.е. $\Delta_t = \Delta_{t-2} + \Delta_{t-1}$. В этом случае система счисления называется Фибоначчиевой» [10].

Автором разработки является Стахов А.П. [20;21].

Кроме Стахова, алгеброй логики в золотом сечении занимался А.Н.Наголкин [18].

Алгоритм Стахова на золотом сечении реализуется следующим образом:

Пусть задана функция $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \in C([a, b])$. Тогда для того, чтобы найти определённое значение этой функции на заданном отрезке, отвечающее критерию поиска (пусть это будет минимум), рассматриваемый отрезок делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки x_1 и x_2 такие, что:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-a}{x_2-a} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots, \text{ где } \varphi \text{ — пропорция золотого сечения.}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= b - \frac{(b-a)}{\varphi} \\ x_2 &= a + \frac{(b-a)}{\varphi} \end{aligned}$$

То есть точка x_1 делит отрезок $[a, x_2]$ в отношении золотого сечения. Аналогично x_2 делит отрезок $[x_1, b]$ в той же пропорции. Это свойство и используется для построения итеративного процесса.

Алгоритм

1. На первой итерации заданный отрезок делится двумя симметричными относительно его центра точками и рассчитываются значения в этих точках.
2. После чего тот из концов отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально (для случая поиска минимума), отбрасывают.
3. На следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения уже надо искать всего одну новую точку.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Формализация

Шаг 1. Задаются начальные границы отрезка a , b и точность ε .

1. Шаг 2. Рассчитывают начальные точки

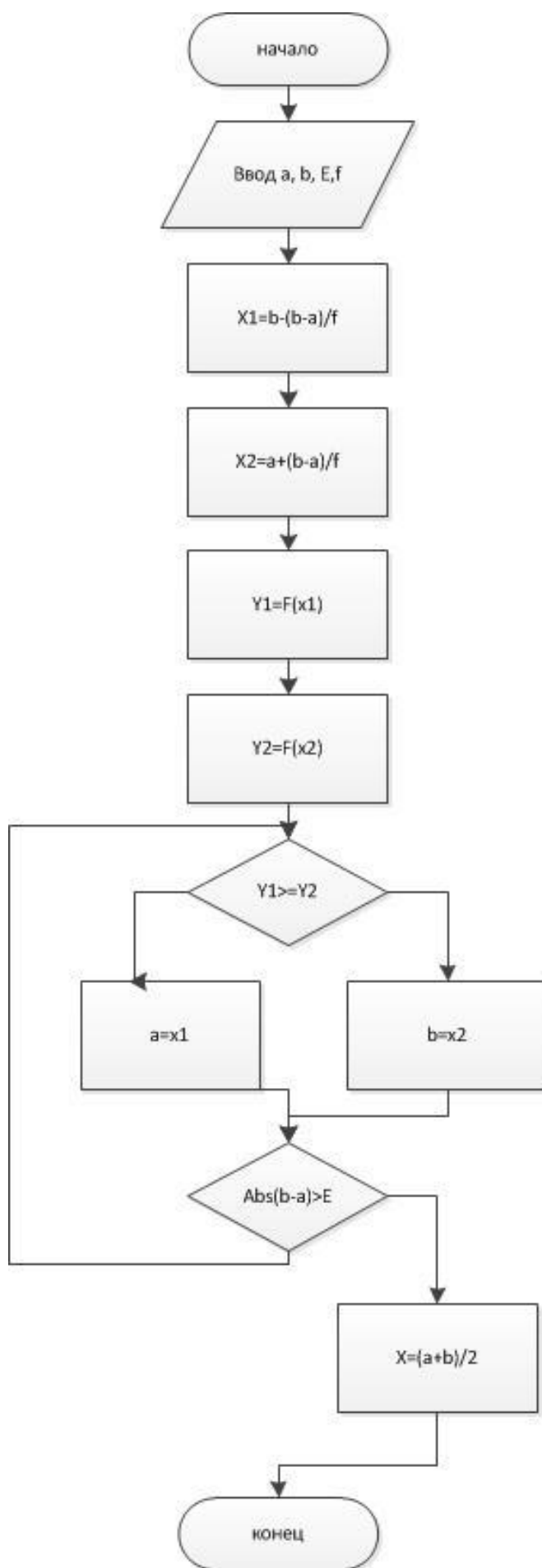
деления: $x_1 = b - \frac{(b-a)}{\varphi}, \quad x_2 = a + \frac{(b-a)}{\varphi}$ и значения в них целевой функции: $y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$.

- Если $y_1 \geq y_2$ (для поиска max изменить неравенство на $y_1 \leq y_2$), то $a = x_1$
- Иначе $b = x_2$.

2. Шаг 3.

- Если $|b-a| < \varepsilon$, то $x = \frac{a+b}{2}$ и останов.
- Иначе возврат к шагу 2 [25].

Блок-схема алгоритма при этом выглядит следующим образом:



Коды и алгоритмы золотой пропорции в природных вычислениях

А.Н.Наголкин сообщает о том, что в генетических алгоритмах присутствуют коды золотой пропорции [18].

Собственно, коды и алгоритмы золотой пропорции можно обнаружить во всех видах собственно природных вычислений и соответственно, использовать в любом виде природных вычислений, а также в распознавании образов в искусственном интеллекте [7].

Наиболее перспективные с нашей т.з. области применения золотой пропорции в природных вычислениях – это: шифрование-дешифрование на основе чисел Фибоначчи; использование подходов, основанных на золотом сечении в задачах, которые требуют некоторого деления вариантов решений, например – методы случайного поиска, генетические алгоритмы, и реализация операций кроссинговера – особенного сложного кроссинговера; затем в третьих – это задачи, которые связаны с поиском оптимумов, в т.ч. и глобальных с использованием многомерных критериев [2],– на наборах неупорядоченных данных и с некоторой априорной недостаточностью, например, в таких задачах, как кластеризация данных (прямой и обратный кластерный анализ), и в целом в задачах, в которых представляется интуитивно ясным применение алгоритмов поиска оптимизации, основанных на методах случайного поиска, которые будут устойчивыми и сходимыми.

Литература

1. Балакшин О.Б. Коды да Винчи – новая роль в естествознании? Неожиданное о золотом сечении: Гармония асимметричных подобий в Природе. Изд. 2-е, доп. –М.: КомКнига, 2006. –176 с.
2. Брыкина Т.А., Мешков В.Е., Чураков В.С. Разработка генератора псевдослучайных семимерных двоичных чисел//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'13». Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2013.– Т.1.– 393 с. – (с.334-343).
- 3.Бутусов К.П. «Золотое сечение» в Солнечной системе // Проблемы исследования Вселенной. Вып.7. АН СССР, ВАГО, ГАО, ИТА. М - Л., 1978.
4. Васютинский Н.А. Золотая пропорция.– М.: Молодая гвардия, 1990. –238 [2] с.
5. Владимиров Ю.С. Метафизика/Предисловие В.Д.Захарова.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002. – 550с., илл.
6. Воробьев Н.Н.Числа Фибоначчи.– М.: Наука, 1978. – 144с.
7. Голубев С.Н. Квазикристаллическая структура вакуума: Ключ к разгадке тайны живых клеток и квантовых частиц.– М., 2013.– 256с.

8. Гомперц Т. Греческие мыслители. Т.1. Пер. с нем. Д.Жуковского и Е.Герцык. Научная ред. нового издания, комментарии, примечания и предисловие А.В.Цыба. Серия «Античная библиотека», раздел «Исследования». – СПб.: Издательство «Алетейя», 1999.– 605с.
9. Вейль Г. Симметрия. Изд. 2-е, стереотипное– М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192с.
10. Евстигнеев В.Г. Недвоичные компьютерные арифметики// Коротков А.В., Мешков В.Е. Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). –Новочеркасск: Изд-во НОК, 2011. – 488с. – (с.380-387).
11. Коротков А.В. Последовательности Фибоначчи-Пифагора//Коротков А.В. Особенности многомерного (7-, 15-, 31-,... мерного) векторного исчисления и чисел Пифагора, Диофанта и Фибоначчи.– Новочеркасск: Издательство ООО НПП «НОК», 2013. –64с.
12. Курейчик В.В. Методы и модели, инспирированные природными системами//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'13». Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2013.– Т.2.– 430 с.– (с.94-103).
13. Лебедев Б.К. Кристаллизации россыпи альтернатив (КРА) новая парадигма роевого интеллекта //Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'13». Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2013.– Т.2.– 430 с. –(с.63-73).
14. Лебедев В.Б. Интеграция моделей адаптивного поведения муравьиной и пчелиной колоний//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'13». Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2013.– Т.2.– 430 с. – (с.81-90).
15. Лебедев В.Б. Роевой интеллект на основе интеграции моделей адаптивного поведения пчелиной колонии и эволюционной адаптации//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'13». Научное издание в 4-х томах. – М.: Физматлит, 2013.– Т.2.– 430 с. – (с.73-80).
16. Ллойд С., Энджи Дж. Сингулярный компьютер//В мире науки. 2005. №2. – (с.33-42).
17. Менский М.Б. Самоизмерение Вселенной и понятие времени в квантовой космологии.– М.: ФИАН, 1990.– 22с.
18. Наголкин А.Н. Алгебра логики в золотом сечении: ещё один шаг в область нечетких логик и компьютерного интеллекта.– М.: МАКС Пресс, 2006. –184с.

19. Саврухин А.П. Природа элементарных частиц и золотое сечение.– М.: Изд. МГУЛ, 2004.
20. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. –М.: «Радио и связь», 1984. –152с.
21. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерений.– М.: Сов. радио, 1997.
22. Система.Симметрия. Гармония /Под ред. В.С.Тюхтина, Ю.А.Урманцева.– М.: Мысль, 1988.– 315, [2] с.
23. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии.– М.: Стройиздат, 1990. – 343с.; ил.
- 24.Шевелев И.Ш. Формообразование (Число.Форма. Искусство. Жизнь). – Кострома: Издательство «Дизайн-центр», 1995.– 160 с.
25. Джон Г.Мэтьюз, Куртис Д.Финк. Численные методы. Использование MATLAB. – 3-е издание. – М., СПб.: Вильямс, 2001. –716 с.
26. Ясинский С.А. «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения.– СПб.: ВАС, 2008. – 160с.

БРЫКИНА Т.А.
АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НА ТЕМПОРАЛЬНОСТЬ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА БУЛЕВЫХ,
НЕБУЛЕВЫХ
И МНОГОМЕРНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛОГИКИ

Темпоральность – это протяженность во времени. Темпоральность или темпоральная протяженность объекта – это такая же его характеристика, как и его размеры в пространстве. Наиболее обще темпоральность можно определить как интервал времени, на котором может быть установлена исчерпывающая специфичность объекта (процесса, действия).

В современной науке для анализа так называемых динамических систем используется понятие "состояние": объект описывается как ряд последовательно сменяющих друг друга состояний. При этом под сменой состояния объекта понимается как трансформация его структуры, так и изменение любых других параметров. Для простых объектов – механических систем, непрерывных сред, электродинамических, химических систем – такое описание вполне приемлемо. Т.е. мы стремимся игнорировать темпоральную составляющую, и представляем их абсолютно пространственными, то есть такими объектами, у которых все системные качества фиксируются в единомоментном срезе, определяются текущей структурой.

Эта технология описания принципиально неприменима к темпоральным объектам. Ведь что такое темпоральная система? – Сложный объект, специфичность которого не определяется в моментальном срезе или, точнее, системные качества которого мы не можем зафиксировать, измерить в момент времени.

Получается, что для описания темпоральных объектов (например, система интеллекта, мышление) мы не можем применить методику описания систем через смену состояний – по одной элементарной причине: в моментальном временном срезе нельзя выделить систему, состояния которой требуется описать.

Таким образом, если мы говорим о создании искусственного интеллекта подобного человеческому, то механическая система должна рассматриваться как темпоральный объект. Изменяя свою темпоральность, субъект способен изменять пространственное распределение объектов – по сути, управлять временем и своим положением в пространстве.

Одним из направлений повышения производительности информационно-вычислительных комплексов является увеличение быстродействия элементов. Используемые в настоящее время нанотехнологии накладывают жесткие требования к соответствующему проекту, особенно связанному с нейронными сетями, так как при их функционировании переходные процессы могут стать причиной порождения ложной информации не только из-за неодновременного возбуждения

синапсов нейронных сети, но и из-за задержек в аксонах. Согласно теории трейсов и теории трасс при проектировании логических структур, правильно функционирующих в условиях нанотехнологии, необходимо минимизировать интегральный временной дебаланс активизируемых переключательных цепей [1, с.24-28].

Исследуем основные логические операции, свойства и законы, присущие булевым алгебрам логики, не булевым алгебрам логики и многомерным булевым алгебрам логики. В ходе анализа определим, как выбранная алгебра влияет на темпоральность процесса.

1. Булевы алгебры логики

Булевой алгеброй называется класс S объектов $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

	00	11
00	00	11
11	11	11

операция умножения

	00	11
00	00	00
11	00	11

для всех $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$ из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$a_1 + b_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$a_1 \cdot b_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$a_1 + b_1 = b_1 + a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$a_1 + (b_1 + c_1) = (a_1 + b_1) + c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1) = (a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$a_1 \cdot (b_1 + c_1) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$$

$$a_1 + (b_1 \cdot c_1) = (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c});$$

5) (свойства идемпотентности)

$$a_1 + a_1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$a_1 \cdot a_1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

6) (свойства совместимости)

$$a_1 + b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = b_1 \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = a_1 \end{cases}, \text{ т.е. } \mathbf{a+b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b = b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b = a} \end{cases}$$

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 + b_1 = b_1 \\ b_1, & \text{если } a_1 + b_1 = a_1 \end{cases}, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a+b=b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a+b=a}; \end{cases}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1=1}$ и $\mathbf{0=0}$, такие, что для всякого элемента $\mathbf{a=a_1}$ из S

$$a_1 + 0 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+0=a}$$

$$a_1 \cdot 1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1=a}$$

$$a_1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0=0}$$

$$a_1 + 1 = 1, \text{ т.е. } \mathbf{a+1=1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a=a_1}$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=\bar{a_1}$ (дополнение элемента $\mathbf{a=a_1}$), такой, что

$$a_1 + \bar{a_1} = 1, \text{ т.е. } \mathbf{a+\bar{a}=1}$$

$$a_1 \cdot \bar{a_1} = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot \bar{a}=0}.$$

В каждой одномерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$a_1 \cdot (a_1 + b_1) = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot (a+b)=a},$$

$$a_1 + a_1 \cdot b_1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+a \cdot b=a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a_1} \cdot \bar{b_1}, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a + b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a_1} + \bar{b_1}, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a \cdot b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \quad \overline{\bar{a_1}} = a_1, \text{ т.е. } \overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$\bar{\bar{1}} = 0, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \mathbf{0},$$

$$\bar{\bar{0}} = 1, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{0}}} = \mathbf{1};$$

$$12) \quad a_1 + \bar{a_1} \cdot b_1 = a_1 + b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + \bar{a} \cdot b = a + b},$$

$$a_1 \cdot (\bar{a_1} + b_1) = a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b};$$

$$13) \quad a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1 = a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c},$$

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1), \text{ т.е. } \mathbf{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c) = (a+c) \cdot (b+c)}.$$

Выполнение этих операций подтверждается таблицей истинности 1.

Таблица 1

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
a·b	0	0	0	0	0	0	1	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0	1
c·a	0	0	0	0	0	1	0	1

$a+b$	0	0	1	1	1	1	1	1
$b+c$	0	1	1	1	0	1	1	1
$c+a$	0	1	0	1	1	1	1	1
$a \cdot (b \cdot c)$	0	0	0	0	0	0	0	1
$(a \cdot b) \cdot c$	0	0	0	0	0	0	0	1
$a+(b+c)$	0	1	1	1	1	1	1	1
$(a+b)+c$	0	1	1	1	1	1	1	1
$a+b \cdot c$	0	0	0	1	1	1	1	1
$(a+b) \cdot (a+c)$	0	0	0	1	1	1	1	1
$a \cdot a$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+a$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot b = a$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a+b = b$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a \cdot b = b$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a+b = a$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+0$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a+1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a+\bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a+b)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\bar{a} + \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\bar{a} + \bar{b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\bar{a} + b$	1	1	1	1	0	0	1	1
$b + \bar{c}$	1	0	1	1	1	0	1	1
$a + a \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (\bar{a} + b)$	0	0	0	0	0	0	1	1
$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+\bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1	1
$(a+c) \cdot (b+\bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1	1

2. Небулевы алгебры логики

Примером небулевой алгебры логики может являться класс вычетов по модулю два (класс четных и нечетных чисел), как класс S объектов $\mathbf{a}=a_1$, $\mathbf{b}=b_1$, $\mathbf{c}=c_1$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

$m=2$	0	1
0	0	1
1	1	0

операция умножения

$m=2$	0	1
0	0	0
1	0	1

для всех $\mathbf{a}=a_1$, $\mathbf{b}=b_1$, $\mathbf{c}=c_1$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$a_1 + b_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$a_1 \cdot b_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$a_1 + b_1 = b_1 + a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$a_1 + (b_1 + c_1) = (a_1 + b_1) + c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1) = (a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$a_1 \cdot (b_1 + c_1) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$$

$$a_1 + (b_1 \cdot c_1) \neq (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c});$$

5) (свойства идемпотентности)

$$a_1 + a_1 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = 0, \text{ т.е. } a_1 + a_1 \neq a_1 \text{ или } \mathbf{a} + \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \quad a_1 \cdot a_1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

6) (свойства совместимости)

$$a_1 + b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = a_1 \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = b_1 \end{cases}, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \end{cases}$$

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 + b_1 = a_1 \\ b_1, & \text{если } a_1 + b_1 = b_1 \end{cases}, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b}; \end{cases}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1}=1$ и $\mathbf{0}=0$, такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=a_1$ из S

$$a_1 + 0 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + 0 = a}$$

$$a_1 \cdot 1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1 = a}$$

$$a_1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0 = 0}$$

$$a_1 + 1 = \bar{a}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + 1 = \bar{a}}, \text{ т.е. } a_1 + 1 \neq 1 \text{ или } \mathbf{a + 1 \neq 1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a = a_1}$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_1$ (дополнение элемента $\mathbf{a = a_1}$), такой, что

$$a_1 + \bar{a}_1 = 1, \text{ т.е. } \mathbf{a + \bar{a} = 1}$$

$$a_1 \cdot \bar{a}_1 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot \bar{a} = 0}.$$

В каждой небулевой алгебре логики имеют место:

9) (законы поглощения)

$$a_1 \cdot (a_1 + b_1) = a_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot (a + b) = a \cdot \bar{b}},$$

$$a_1 + a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + a \cdot b = a \cdot \bar{b}};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 + a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } \mathbf{\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + a_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \mathbf{\overline{a \cdot b} = \bar{a} + a \cdot \bar{b}};$$

11)

$$\bar{\bar{a}_1} = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{\bar{\bar{a}} = a},$$

$$\bar{1} = 0, \text{ т.е. } \mathbf{\bar{1} = 0},$$

$$\bar{0} = 1, \text{ т.е. } \mathbf{\bar{0} = 1};$$

12)

$$a_1 \cdot \bar{b}_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1 = a_1 + b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = a + b},$$

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1) = a_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot \bar{b}};$$

13) $a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1 \neq a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c} \neq a \cdot c + b \cdot \bar{c}}$,

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), \text{ т.е.}$$

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + \bar{c}) = (a + c) \cdot (b + \bar{c})}.$$

Выполнение этих операций подтверждается таблицей 2 истинности.[2, с.100-103], [3, с.23-25]

Таблица 2

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
a·b	0	0	0	0	0	0	1	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0	1
c·a	0	0	0	0	0	1	0	1
a+b	0	0	1	1	1	1	0	0
b+c	0	1	1	0	0	1	1	0
c+a	0	1	0	1	1	0	1	0
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0	1
(a·b)·c	0	0	0	0	0	0	0	1
a+(b+c)	0	1	1	0	1	0	0	1
(a+b)+c	0	1	1	0	1	0	0	1

$a+b \cdot c$	0	0	0	1	1	1	1	0
$(a+b) \cdot (a+c)$	0	0	0	1	1	0	0	0
$a \cdot a$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+a$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a \cdot b = a$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a + b = b$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a \cdot b = b$	+	+	-	-	+	+	-	-
$a + b = a$	+	+	+	+	-	-	-	-
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+0$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a+1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a + \bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a+b)$	0	0	0	0	1	1	0	0
$a+a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{a + b}$	1	1	0	0	0	0	1	1
$\overline{a \cdot b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{a+b}$	0	0	1	1	1	1	0	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\bar{a} + b$	1	1	0	0	0	0	1	1
$b + \bar{c}$	1	0	0	1	1	0	0	1
$a + \bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (\bar{a} + b)$	0	0	0	0	0	0	1	1
$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	0	0
$a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	0	0
$(a+c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	0	0

3. Многомерные булевы алгебры

Многомерной булевой алгеброй назовем класс S объектов $a=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $b=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $c=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со свойствами коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, совместимости и т.д.

Кроме того, S содержит элементы $\mathbf{1}=(1,1,1,1,1,1,1)$ и $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0,0,0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ из S

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

для каждого элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7)$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$) такой, что

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7) + (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (a_1 + a_1, a_2 + a_2, a_3 + a_3, a_4 + a_4, a_5 + a_5, a_6 + a_6, a_7 + a_7) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7) \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (\bar{a}_1 \cdot a_1, \bar{a}_2 \cdot a_2, \bar{a}_3 \cdot a_3, \bar{a}_4 \cdot a_4, \bar{a}_5 \cdot a_5, \bar{a}_6 \cdot a_6, \bar{a}_7 \cdot a_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой семимерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, \\ & b_5, b_6, b_7) = \\ & = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \\ & a_3 \cdot (a_3 + b_3), a_4 \cdot (a_4 + b_4), a_5 \cdot (a_5 + b_5), a_6 \cdot (a_6 + b_6), \\ & a_7 \cdot (a_7 + b_7)) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \\ & \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (\\ & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot \\ & (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)) = \\ & = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2), \\ & a_3 + (a_3 \cdot b_3), a_4 + (a_4 \cdot b_4), \\ & a_5 + (a_5 \cdot b_5), a_6 + (a_6 \cdot b_6), a_7 + (a_7 \cdot b_7)) = \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \\ & \text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}; \end{aligned}$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\begin{aligned} & \overline{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)} = \\ & \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, a_5 + b_5, a_6 + b_6, a_7 + b_7)} = \\ & = (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2, \bar{a}_3 \cdot \bar{b}_3, \bar{a}_4 \cdot \bar{b}_4, \bar{a}_5 \cdot \bar{b}_5, \bar{a}_6 \cdot \bar{b}_6, \\ & \bar{a}_7 \cdot \bar{b}_7) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \\ & \bar{b}_3, \bar{b}_4, \bar{b}_5, \bar{b}_6, \bar{b}_7), \\ & \text{т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}, \\ & \overline{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)} = \\ & \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4, a_5 \cdot b_5, a_6 \cdot b_6, a_7 \cdot b_7)} = \\ & = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3, \bar{a}_4 + \bar{b}_4, \bar{a}_5 + \bar{b}_5, \bar{a}_6 + \bar{b}_6, \bar{a}_7 + \bar{b}_7) = \\ & = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3, \bar{a}_4 + \bar{b}_4, \bar{a}_5 + \bar{b}_5, \bar{a}_6 + \bar{b}_6, \bar{a}_7 + \bar{b}_7) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4, a_5 \cdot b_5, a_6 \cdot b_6, a_7 \cdot b_7)} \\
& = \\
& = (\overline{a_1 + b_1}, \overline{a_2 + b_2}, \overline{a_3 + b_3}, \overline{a_4 + b_4}, \overline{a_5 + b_5}, \overline{a_6 + b_6}, \overline{a_7 + b_7}) = (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5}, \overline{a_6}, \overline{a_7}) + (\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \overline{b_4}, \overline{b_5}, \overline{b_6}, \overline{b_7}), \\
& , \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot b = a + b}; \\
& 11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\overline{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)}} = \overline{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a = a}, \\
& \overline{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)} = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{\overline{1} = 0}, \\
& \overline{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)} = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{\overline{0} = 1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12) (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) + (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) \cdot (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}) = (a_1 + a_1 \cdot b_1, a_2 + a_2 \cdot b_2, a_3 + a_3 \cdot b_3, a_4 + a_4 \cdot b_4, a_5 + a_5 \cdot b_5, a_6 + a_6 \cdot b_6, a_7 + a_7 \cdot b_7) = \\
& = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4, a_5 + b_5, a_6 + b_6, a_7 + b_7) = (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) + (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}), \text{ т.е. } \mathbf{a + a \cdot b = a + b}, \\
& (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) \cdot (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) + (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}) = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), a_3 \cdot (a_3 + b_3), a_4 \cdot (a_4 + b_4), a_5 \cdot (a_5 + b_5), a_6 \cdot (a_6 + b_6), a_7 \cdot (a_7 + b_7)) = \\
& = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4, a_5 \cdot b_5, a_6 \cdot b_6, a_7 \cdot b_7) = (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) \cdot (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a \cdot (a + b) = a \cdot b};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 13) (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) \cdot (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}) + (\overline{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7}) \cdot (\overline{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7}) + (\overline{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7}) \cdot (\overline{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7}) = \\
& = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2, a_3 \cdot b_3 + a_3 \cdot c_3 + b_3 \cdot c_3, a_4 \cdot b_4 + a_4 \cdot c_4 + b_4 \cdot c_4, a_5 \cdot b_5 + a_5 \cdot c_5 + b_5 \cdot c_5, a_6 \cdot b_6 + a_6 \cdot c_6 + b_6 \cdot c_6, a_7 \cdot b_7 + a_7 \cdot c_7 + b_7 \cdot c_7) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2, a_3 \cdot c_3 + b_3 \cdot \bar{c}_3, \\
& a_4 \cdot c_4 + b_4 \cdot \bar{c}_4, a_5 \cdot c_5 + b_5 \cdot \bar{c}_5, a_6 \cdot c_6 + b_6 \cdot \bar{c}_6, \\
& a_7 \cdot c_7 + b_7 \cdot \bar{c}_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\
& ((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, \\
& b_5, b_6, b_7)) \cdot ((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (c_1, c_2, c_3, c_4, \\
& c_5, c_6, c_7)) \cdot ((b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) + (c_1, c_2, c_3, \\
& c_4, c_5, c_6, c_7)) = \\
& = ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2), \\
& (a_3 + b_3) \cdot (a_3 + c_3) \cdot (b_3 + \bar{c}_3), (a_4 + b_4) \cdot (a_4 + c_4) \cdot (b_4 + \bar{c}_4), \\
& (a_5 + b_5) \cdot (a_5 + c_5) \cdot (b_5 + \bar{c}_5), (a_6 + b_6) \cdot (a_6 + c_6) \cdot (b_6 + \bar{c}_6), \\
& (a_7 + b_7) \cdot (a_7 + c_7) \cdot (b_7 + \bar{c}_7)) = \\
& ((a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2), \\
& (a_3 + c_3) \cdot (b_3 + \bar{c}_3), (a_4 + c_4) \cdot (b_4 + \bar{c}_4), \\
& (a_5 + c_5) \cdot (b_5 + \bar{c}_5), (a_6 + c_6) \cdot (b_6 + \bar{c}_6), \\
& (a_7 + c_7) \cdot (b_7 + \bar{c}_7)), \\
& \text{т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}).
\end{aligned}$$

Таким образом, свойства многомерных булевых алгебр повторяют свойства одномерной булевой алгебры.

Представим таблицу истинности для $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ [4, с. 322-324]:

Таблица 3

a	0	0	0	0	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	1	0
a·b	0	0	0	0	0	0	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0
c·a	0	0	0	0	0	1	0
a+b	0	0	1	1	1	1	1
b+c	0	1	1	1	0	1	1
c+a	0	1	0	1	1	1	1
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0
(a·b)·c	0	0	0	0	0	0	0
a+(b+c)	0	1	1	1	1	1	1
(a+b)+c	0	1	1	1	1	1	1
a+b·c	0	0	0	1	1	1	1
(a+b)·(a+c)	0	0	0	1	1	1	1
a·a	0	0	0	0	1	1	1
a+a	0	0	0	0	1	1	1
a·b=a	+	+	+	+	-	-	+
a+b=b	+	+	+	+	-	-	+

$a \cdot b = b$	+	+	-	-	+	+	+
$a + b = a$	+	+	-	-	+	+	+
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1
$a + 0$	0	0	0	0	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0
$a + 1$	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0
$a + \bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a + b)$	0	0	0	0	1	1	1
$a + a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	1
$\overline{a + b}$	1	1	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	1	1	1	0
$\overline{a + b}$	1	1	1	1	1	1	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1
$\bar{a} + b$	1	1	1	1	0	0	1
$b + \bar{c}$	1	0	1	1	1	0	1
$a + \bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1
$a \cdot (\bar{a} + b)$	0	0	0	0	0	0	1
$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1
$a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1
$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1
$(a + c) \cdot (\bar{b} + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1

Таким образом, анализ показал разницу между булевой и многомерной булевой алгеброй логики, которая состоит в размерности чисел (в данном случае – размерность 7), и разницу между не булевой и булевой алгеброй логики – в функции логического сложения.

Мы считаем, что темпоральность в случае многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы будет меньше, т.к. при реализации такой модели многомерное время возникает как следствие самой модели. При каждом повторе операции совершаются параллельно, как совокупность сигналов и темпоральность при этом носит многомерный характер.

В случае вычетов по модулю 2 (не булевой алгебры логики) не изменится существенно в сравнении с булевой алгеброй логики, если вычисления будут вестись в обычной двоичной среде.

Тем не менее, для управления темпоральностью подходят все варианты, но следует учитывать их специфику применения.

Литература

1. Коротков А.В., Чураков В.С. Многозначные алгебры логики, булевы многомерные алгебры и дискретные (многомерные целочисленные) алгебры// Информационные системы и технологии. Теория и практика: Сб. науч. Тр./редкол.: А.Н.Береза [и др.]. – Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2009. – 210 с. – (с.24-28).

2. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194 с.

3. Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика. Сб. научн. тр. Тр./редкол.: А.Н.Береза [и др.]. – Шахты: ЮРГУЭС, 2008. – 189 с.

4. Бабкина Т.А. Моделирование основных логических элементов на основе семимерной булевой алгебры логики. Естественные и технические науки. №3. – М.: Спутник+, 2011 – 529с. – (с.322-324).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применяемая в настоящее время трёхмерная векторная алгебра Гамильтона-Грассмана для решения задач математического моделирования физических и технических объектов далеко не всегда отвечает требованиям современной науки, а также многочисленных технических приложений, что осложняет изучение процессов, происходящих в таких объектах, и зачастую обеспечивает лишь приближённые решения. В то же время до сих пор отсутствуют системные теоретические исследования обеспечивающие возможность расширения трёхмерного векторного исчисления до многомерного представления, в котором были бы органически отражены все свойства трёхмерного физического мира. Это обуславливает актуальность проблемы, рассматриваемой автором работы.

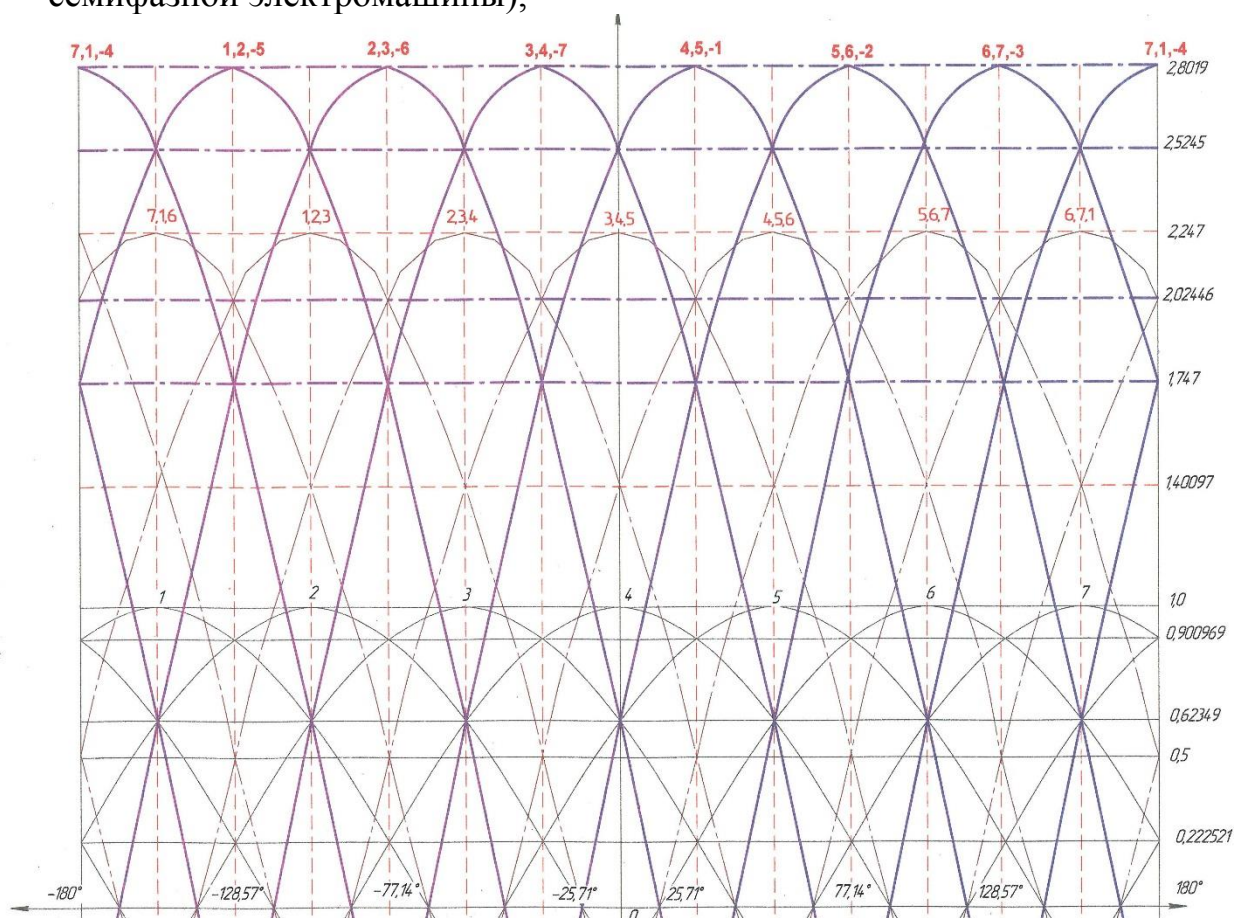
Представленная коллективная монография в значительной степени восполняет этот пробел, поскольку в многомерной парадигме А.В.Короткова научно обоснованно расширение трёхмерной векторной алгебры Гамильтона-Грассмана до семимерной векторной алгебры Мальцева с конкретными структурными константами, позволяющими сохранить все известные законы физического мира, найденные в рамках трёхмерного векторного исчисления, как частный случай многомерных физических закономерностей, то есть сохранить принцип преемственности знаний. Это позволило также использовать хорошо изученный способ описания трёхмерного векторного исчисления, дифференциальной геометрии, векторного анализа и теории поля по новому назначению – описанию их многомерных аналогов. Значимость для науки и техники многомерной парадигмы А.В.Короткова заключается в следующем:

- нахождение неизвестных ранее соотношений для произведения n векторов в многомерном (7D, 15D, 31D) евклидовом пространстве;
- построение нормалей линии в многомерном пространстве с учётом значения первых трёх производных от радиуса-вектора по скалярному аргументу и принципиальной значимостью третьей производной для многомерных (7D, 15D, 31D) преобразований;
- установление координатной формы записи дифференциальных операций первого и второго порядка многомерной (7D, 15D, 31D) теории полей;
- установление соотношений восьмимерного расширения пространства-времени Минковского;
- построение систем многомерных (7D, 15D, 31D) пространственных вращений, ортогональных семимерных преобразований и их унитарных шестимерных представлений;
- нахождение решений многомерного уравнения Гельмгольца;
- построение схем многомерных (7D, 15D, 31D) симметрий.

Отдельные результаты работы соответствуют экспериментальным данным в области физики элементарных частиц.

Всё это определило высокую значимость работы. Её результаты составляют основу модели многомерного (7D, 15D, 31D) физического мира. Они позволяют указать на наличие неизвестных полей в рамках многомерного (7D, 15D, 31D) поля, установить связи между ними, выявить новые физические явления. Также полученные результаты позволили получить алгебры размерностей пятнадцать и тридцать один. Они способны найти применение во всех разделах естественных наук и в технической сфере, там, где ранее использовалось трёхмерное векторное исчисление:

- в физике: газо-, гидро-, термо-, электродинамике, теоретической механике, квантовой механике, физике твёрдого тела, физике элементарных частиц и т.д.;
- в химии: теории строения атома, кристаллохимии, теории строения химических соединений и т.д.;
- в геологии: многомерной кристаллографии, теории строения кристаллических структур и т.д.;
- в математике: теории многомерных вращений, тензорном исчислении, теории групп, теории ортогональных и унитарных симметрий;
- в технике: математическом описании сложных технических объектов и процессов, системах многомерной графики (пример: см. график семифазной электромашин),



- построении векторных процессоров, системах управления сложными

техническими объектами и процессами и т.д.;

- в ряде других наук.

В работе значительное место уделено рассмотрению задач математического моделирования физических объектов при заметно меньшем внимании к задачам математического моделирования технических объектов и процессов.

Предложенные в коллективной монографии теоретические разработки и выводы рекомендуется использовать во всех разделах естественнонаучных и технических дисциплин, где недостаточно эффективно использование трёхмерного векторного исчисления Гамильтона-Грассмана, в частности, в тех практических приложениях, которые указаны выше в разделе «Значимость для науки и техники».

Наибольший эффект от теоретических разработок следует ожидать при их применении к задачам физики элементарных частиц, а также при решении задач управления сложными техническими объектами и процессами.

Рекомендуется использование результатов коллективной монографии для формирования новых разделов теоретических курсов в естественнонаучных и технических дисциплинах для студентов высших учебных заведений.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Брыкина Татьяна Александровна, базовое образование: экономист по специальности «Информационные системы в экономике», ВИ (ф) ЮРГТУ в 2002 году; программист, разработка программного обеспечения, UBG GmbH, Rheinbach, NRW, Deutschland.

Область научных интересов: нечеткое моделирование и управление, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте, альтернативные подходы к изучению искусственного интеллекта.

Коротков Анатолий Васильевич, базовое образование: инженер-электрик, НПИ в 1967 году, кандидат технических наук, доктор физико-математических наук, доцент. Длительное время работал в ОКТБ «Старт» и «Орбита» в г. Новочеркасске. Область научных интересов – обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) – как многомерной базы семимерной физической теории.

Кравченко Павел Давидович, доктор технических наук, профессор. Кафедра "Машиностроение и Прикладная Механика". Волгодонский инженерно-технический институт Филиал Национального Исследовательского ядерного университета "МИФИ" г.Волгодонск Ростовской области.

Базовое образование: окончил НПИ в 1964 году по специальности горный инженер-механик (горные машины); кандидат технических наук в 1971 году по специальности «Горные машины». Доктор технических наук (ВНИИАМ, г.Москва, 1999 год) – специальность «Атомное машиностроение». Сфера научных интересов: изобретательство – новые подходы в атомном машиностроении, спасательных и аварийно-восстановительных работах при чрезвычайных ситуациях (ЧС).

Мешков Владимир Евгеньевич, базовое образование: инженер-системотехник, НПИ в 1975 году, кандидат технических наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии» ФГБОУ ВПО «Донской государственный университет» филиала ДГТУ в г. Волгодонске.

Член Российской ассоциации искусственного интеллекта, индивидуальный член Европейской координационной комиссии по искусственному интеллекту. Область научных интересов: разработка теоретических основ применения бионических методов в решении задач синтеза сложных топологий, применение гибридных нейросетевых технологий в решении задач автоматической классификации и распознавании смыслов текстов, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте.

Мешкова Екатерина Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Технический сервис и информационные технологии» ФГБОУ ВПО «Донской государственной университет» филиала ДГТУ в г. Волгодонске.

Чураков Вадим Сергеевич, базовое образование: горный инженер-электрик, Шахтинский филиал НПИ в 1987 году, кандидат философских наук, доцент. Научный редактор серий «Библиотека времени» и «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Область научных интересов: изучение феномена времени, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте, философский анализ онлайн-социальных сетей.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
КОРОТКОВ А.В. ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	14
КОРОТКОВ А.В. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ.....	23
КОРОТКОВ А.В. ЭЛЕМЕНТЫ 31-МЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ...	48
КОРОТКОВ А.В. СВЯЗЬ ЧИСЕЛ ПИФАГОРА И ДИОФАНТА.....	66
КОРОТКОВ А.В. ОСОБЕННОСТИ СТАТИСТИК БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ	80
КОРОТКОВ А.В. РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА	85
КОРОТКОВ А.В. ФОРМУЛА ПЛАНКА В D-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.....	92
КОРОТКОВ А.В. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ-ПИФАГОРА	108
КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С. ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ И ЕГО СВЯЗЬ С ПИФАГОРОВЫМИ ЧИСЛАМИ (ЕВКЛИДОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ) И ПРОСТРАНСТВОМ-ВРЕМЕНЕМ.....	119
КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С. МНОГОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ И СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА	128
КРАВЧЕНКО П. Д., МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В. С. ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ АЛГЕБР ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МИКРОМИРА	143
МЕШКОВ В.Е., МЕШКОВА Е.В., ЧУРАКОВ В.С., БРЫКИНА Т.А. ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ АБСТРАКТНЫХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ А.В.КОРОТКОВА	152
МЕШКОВ В. Е., ЧУРАКОВ В.С., БРЫКИНА Т.А. ЗОЛОТАЯ ПРОПОРЦИЯ: АЛГОРИТМЫ И КОДЫ НА ЕЁ ОСНОВЕ В ПРИРОДНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ..	162
БРЫКИНА Т.А. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НА ТЕМПОРАЛЬНОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА БУЛЕВЫХ, НЕБУЛЕВЫХ И МНОГОМЕРНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛОГИКИ	176
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	188
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	191
СОДЕРЖАНИЕ.....	193

Только для научных библиотек

Научное издание

***МНОГОМЕРНАЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА***

***И МНОГОМЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ: МОНОГРАФИЯ/А.В.Коротков,
П.Д.Кравченко, В.Е.Мешков, Е.В.Мешкова, В.С.Чураков, Т.А.Брыкина
(Серия «Многомерная парадигма А.В. Короткова в информатике,
искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.3).***

Под науч. ред. В.С. Чуракова

Техн. ред.: Г.А. Еремеев

Издательство «**НаукаОбразованиеКультура**»
346430 Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.
Подписано в печать 21.10.2015 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Печ. л. 7,6. Тир. 500 экз.
Отпечатано ООО НПП «НОК»
346428 Новочеркасск, ул. Просвещения, 155А.
E-mail: nok.company@gmail.com

В серии «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии» вышли следующие издания:

Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: Монография/ А.В.Коротков, П.Д.Кравченко, В.Е.Мешков, В.С.Чураков, Т.А.Бабкина, А.В.Козоброд, А.В.Прудий. – (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1).– Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2011.– 488с.

Многомерная алгебра. Многомерная физика. Многомерные технологии: Монография/ А.В.Коротков, П.Д.Кравченко, В.Е.Мешков, В.С.Чураков, Н.В.Кочковая, Т.А.Брыкина, Г.С.Вересников, Ю.В.Веприков. – (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.2).– Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2014. – 286с.

Все вышеуказанные издания есть на сайте **ТЕХЛИБРАРИ РУ**

На **ТЕХЛИБРАРИ РУ** есть и работы **А.В.Короткова**