

**МНОГОЗНАЧНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ
БУЛЕВЫ И НЕБУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ
А.В. КОРОТКОВА И ПИФАГОРОВЫ
ЧИСЛА
В ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ
И КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Новочеркасск
«НОК»
2011

УДК 512
ББК 87.21:72
М 73

Рецензенты: Галушкин Н.Е., доктор техн. наук, профессор;
Кравченко П.Д., доктор техн. наук, профессор.

М 73 Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Бабкина Т.А.,
Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и
небулевы алгебры логики А.В. Короткова и пифагоровы числа в искус-
ственном интеллекте и криптографических системах: монография. –
(Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искус-
ственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). – Новочеркасск: Изд-во
«НОК», 2011. – 488с.

ISBN 978-5-8431-0211-1

В монографии показано, что разделы математического знания, при-
меняемого в кибернетике, информатике, нейроинформатике и криптоло-
гии, могут иметь вариант, альтернативный по отношению к варианту,
основанному на булевой алгебре логики, на которой построены все эти
разделы наук. Появление многозначных и многомерных булевых и небу-
левых алгебр логики даёт совершенно новый способ определения этих
разделов знания (в данном случае они разрабатываются в рамках семи-
мерной парадигмы А.В.Короткова). Авторы определяют данную пара-
дигму как *открытую систему, т.е. любой и каждый может внести*
свой вклад в её развитие.

Монографию дополняют три приложения. Первое – это машинные
арифметики и их специфика, второе – это статья Ю.И. Неймарка «Мно-
гомерная геометрия и распознавание образов», и третье приложение –
статья П.А. Флоренского «Пифагоровы числа».

Монография предназначена для научных работников, специалистов,
преподавателей вузов, аспирантов, магистрантов и студентов вузов.

УДК 512
ББК 87.21:72

ISBN 978-5-8431-0211-1

© Коллектив авторов, 2011.

© ВИС (филиал) ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2011.

© Чураков В.С., составление и предисловие, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
Мешков В.Е., Чураков В.С. Программа исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии в рамках семимерной парадигмы А.В. Короткова.....	15
Коротков А.В. Алгебры над кольцом чисел Пифагора.....	26
Коротков А.В. Многомерные алгебры полей сравнений по $\text{mod}=2$	46
Коротков А.В. Многозначные алгебры логики	53
Коротков А.В. Многомерные булевы алгебры	60
Коротков А.В. Небулевы алгебры логики.....	68
Коротков А.В. N-позиционные алгебры	74
Коротков А.В. Пифагоровы числа и двойная (тройная) спирали.....	80
Коротков А.В. Представление натуральных чисел в виде суммы восьми квадратов	92
Коротков А.В. Структура последовательностей пифагоровых чисел ..	99
Коротков А.В. К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах.....	117
Коротков А.В. К вопросу классификации пифагоровых чисел.....	131
Коротков А.В. К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени с большим количеством переменных в целых числах	160
Коротков А.В. Особенности полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах	168
Коротков А.В. К нахождению решений полиномиальных уравнений третьей степени в целых числах	187
Коротков А.В., Чураков В.С. Дискретные алгебры (многомерные целочисленные алгебры)	201
Коротков А.В., Чураков В.С. Многозначные алгебры логики, булевы многомерные алгебры и дискретные (многомерные целочисленные) алгебры	215

Коротков А.В., Чураков В.С. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики в искусственном интеллекте	220
Коротков А.В., Чураков В.С. Замечание по статье В.В.Орлова «Структура памяти человека: голографическая модель»	232
Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерные алгебры А.В.Короткова для нейросетей и нейрокомпьютеров.....	234
Мешков В.Е., Чураков В.С. Пифагоровы числа в нейросетях	237
Мешков В.Е., Чураков В.С. Размышления об образе и его представлении в информатике	2422
Мешков В.Е., Чураков В.С., Козоброд А.В. Сумматор на небулевых алгебрах (на классе вычетов чисел по модулю два)	259
Мешков В.Е., Чураков В.С. О применении в криптографических системах многозначных и многомерных булевых и небулевых алгебр логики и пифагоровых чисел	261
Чураков В.С. Беседа с А.В.Коротковым о теоретическом и практическом применении семимерной парадигмы	266
Бабкина Т.А., Мешков В.Е. Сравнительный анализ нечетких логических систем.....	304
Бабкина Т.А. О трёх современных подходах к построению перспективных вычислительных систем.....	310
Бабкина Т.А. Моделирование основных логических элементов на основе многомерной булевой алгебры логики	342
Бабкина Т.А. Моделирование основных логических элементов на основе небулевой алгебры логики	345
Бабкина Т.А. Разработка основных устройств вычислительной машины на базе многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В. Короткова.....	352
Мешков В.Е., Прудий А.В., Козоброд А.В. Синтез топологии вычислительной сети	359
ПРИЛОЖЕНИЕ I	372
Евстигнеев В.Г. Компьютерные арифметики. Ретроспективный взгляд.....	372

Евстигнеев В.Г. Недвоичные компьютерные арифметики	381
Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Троичное конструктивное кодирование булевых выражений	389
Брусенцов Н.П. Упорядочение булевой алгебры	395
Брусенцов Н.П. Построение логических схем на магнитных усилителях с питанием импульсами тока	413
Брусенцов Н.П. Опыт разработки троичной вычислительной машины.....	421
Брусенцов Н.П., Жоголев Е.А., Веригин В.В., Маслов С.П., Тишулина А.М. Малая автоматическая цифровая машина «СЕТУНЬ»	433
Варшавский В.И. Трехзначная мажоритарная логика	446
ПРИЛОЖЕНИЕ II	461
Неймарк Ю.И. Многомерная геометрия и распознавание образов	461
ПРИЛОЖЕНИЕ III.....	472
Флоренский П.А. Пифагоровы числа	472
Сведения об авторах	487

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каков порядок дальнейшего развития трёхмерных алгебр, семимерных векторных алгебр, либо четырёхмерных и восьмимерных пространственно-временных структур евклидовых и псевдоевклидовых? Дело в том, что числа, используемые в этих алгебрах, действительные в каждой координате, то есть числовые системы, задействованные при построении алгебр — это расширение действительных чисел, системы действительных чисел.

Однако есть серьезная проблема, связанная с квантованием пространства и с квантованием времени. Квантованные величины занимают не непрерывный, а дискретный ряд числовых величин со своим значением. Это говорит о том, что нужно построить алгебры, которые бы определялись не непрерывным рядом чисел, скажем действительными величинами, а дискретными, предположим целыми числами. То, что используется в системах алгебра действительных чисел для построения векторных алгебр, определяется главным образом тем, что математики пытались создавать системы с делением, системы комплексных чисел, кватернионов, октанионов, то есть стремились строить системы с делением.

Векторные алгебры — это системы без деления, а поэтому могут задействовать числа, лежащие в основе расширяемых систем, определяемыми системами без деления, например, рядом целых чисел или натуральных чисел. Это системы без деления, каждому целому числу нельзя сопоставить обратное целое число, например, двойке обратное число $\frac{1}{2}$. 0,5 — это не целое число, поэтому необходимо строить также алгебры, векторные алгебры, которые бы базировались на системах не действительных чисел, а, например, на системах целых чисел, системах чисел без деления. Это позволило бы **создавать векторные алгебры для квантованных величин, в частности для квантованных пространственных величин и**

временных величин квантованного пространства- времени.
Это одно из направлений работ.

Если задействовать в векторных алгебрах целые числа, то, как не трудно видеть – понятие скалярного и векторного произведения векторов формируется за счет алгебраических сумм и произведений целых чисел, а, следовательно, эти величины также целые, как скалярное произведение векторов, так и векторное произведение двух векторов, а также нескольких векторов, определяется целыми значениями. Затруднения могут возникать только при нахождении модулей векторов, потому что модуль вектора связан с операцией извлечения квадратного корня из чисел, а извлечение квадратного корня из целых чисел не всегда дает целые числа. Это единственное затруднение. Если избегать применения понятия модуля, а пользоваться понятием квадрата модуля, квадрата интервала двух векторов, то это затруднение исключается, оно отпадает. Следовательно, такие алгебры могут быть построены для дискретного ряда значений числовых величин, то есть могут быть использованы для дискретизации пространственно- временных величин, а вслед за этим, и всех производных от них величин. Вот это **одно из направлений работы – создание квантованных векторных алгебр.**

А применение... Физика сейчас рассматривает целый ряд квантованных значений, например, положение электрона в атоме водорода связано с рассмотрением орбит, которые квантованы и определяются целыми положительными значениями N , где $N = 1, 2, 3, 4$ и т. д.

Это — фундаментальный физический результат. То есть величины – например, радиус орбит электронных оболочек в атоме квантован – а вслед за ним квантованы и такие понятия, как энергия, момент импульса – это всё квантованные величины. Это мы их рассматривали как непрерывные, а поэтому использовали алгебры непрерывные, но в принципе понятие квантования времени и пространства – это очень важное понятие, и физиками широко используется. Это старая эпистемологическая проблема, занимавшая в свое время И.Канта: о соответствии математического описания физической реальности.

Второе направление работ связано с алгебрами логики. Алгебры логики в частности, булева алгебра, строится на основе применения операции сложения и умножения, и вообще-то стоило бы говорить не об алгебре, как таковой, булевой, а о булевом линейно-векторном пространстве, потому, что булева алгебра вообще-то од-

номерна и нет понятия векторного произведения двух векторов квантованных величин. Тогда как в алгебре действительных чисел есть процедура сложения чисел и процедура умножения чисел.

Так вот, в зависимости от того, какова процедура сложения и какова процедура умножения чисел, получаются те или иные значения, вернее свойства этих линейных векторных пространств. В булевой алгебре задействованы только два значения величин – ноль и один, и известны операции сложения и умножения. Операция сложения, лучше сказать операция умножения двух дискретных величин булевой алгебры определяется свойствами обычной операции умножения двух действительных чисел ноль на ноль ноль, ноль на один ноль, один на ноль ноль, один на один один. То есть, это значение определяется обычной операцией умножения чисел ноль и один, действительных чисел. А вот с операцией сложения двух булевых величин не все обстоит так гладко, потому что, хоть три первых значения ноль плюс ноль, ноль ноль плюс один, один плюс ноль есть один, а вот один плюс один есть один в булевой алгебре, и это не соответствует значениям действительных чисел, где для единицы плюс единицы есть двойка, то есть совсем другое число, нежели единица. Так вот, в дополнение к булевой алгебре можно привести также другую алгебру – алгебру, получаемую на основе теории сравнения чисел по определенному модулю, p -адические числа. При этом, если рассматривать алгебру в сравнении по модулю 2, то все числа, все целые числа разбиваются на два класса – класс целых четных чисел и класс целых нечетных чисел. Они имеют одно и то же значение остатка при делении на 2. Целые числа имеют остаток 0, нечетные числа, нецелые, а четные числа имеют остаток 0, а нечетные числа имеют остаток 1. То есть, все целые числа разбиваются на два класса – класс целых четных чисел, класс ноль и класс нечетных чисел класс один.

Так вот, если посмотреть теории сравнений по модулю 2, расположить все числа, то умножение чисел определяется также обычной алгеброй, обычной операцией умножения целых чисел – ноль на ноль ноль, ноль на один ноль, один на ноль ноль, один на один есть один. То есть, та же процедура, что и в булевой алгебре, а вот со сложением дело обстоит иначе – если класс ноль четные числа, а класс один включает нечетные числа, то четное плюс четное есть четное, то есть ноль плюс ноль есть ноль, четное плюс нечетное, ноль плюс один и один плюс ноль есть один, потому что четное

плюс нечетное есть нечетное число, а вот четное, вернее нечетное, плюс нечетное, то есть один плюс один есть всегда число четное, то есть ноль, то есть, это говорит о том, что один плюс один в этой алгебре есть ноль. В отличие от булевой алгебры, где один плюс один есть один. *А это совсем другая процедура умножения и сложения, то есть это совсем другая алгебра.*

Это уже небулева алгебра, это алгебра также над нулем и единицей, но совсем другими свойствами обладающая. Эта алгебра может быть построена без проблем, она имеет также 16 функций двух переменных с двумя состояниями – нуль и один, но свойства алгебры совсем другие. В данном случае без особых проблем строятся все 16 функций, они строятся также, как в булевом варианте, но, все-таки, имеют другие функциональные значения. Например, не выполняются законы поглощения, не выполняются формулы Де Моргана, это совсем другая алгебра. Но также ассоциативная, дистрибутивная над нулем и единицей, с вектором. Соответствующей операции нет, то есть свойства алгебры близки свойствам булевой алгебры, но совершенно иные. Все-таки, иные. Это создает прецедент, алгебры логики могут быть вовсе не такими, как булевы алгебры логики. То есть, например, как работает мозг человека, и если он работает в дискретных величинах, как полагают специалисты в области нейронауки, нейроинформатики и нейрокибернетики, становится проблемным: в какой алгебре логики работает мозг? В какой алгебре должен и может работать компьютер? Либо, в какой алгебре логики целесообразно строить компьютерные средства. Это уже требует дополнительного рассмотрения и изучения. Вот второе направление работ. Оно связано с дискретными алгебрами, алгебрами логики. Первое для квантованных величин – это тоже, в принципе, дискретные значения, второе направление для квантованных логических величин, когда величины собираются в класс по определенному модулю. В данном случае модуль 1, либо 0, вернее модуль 2 алгебра с нулевым единичным значением. Могут быть и алгебры по модулю 4 и даже по другим модулям. По модулю 4 алгебра интересна тем, что пифагоровы числа собираются также в классы четных и нечетных чисел, но класс нечетных чисел разделяется на два класса – числа, представимые как разность квадратов двух величин, и числа, представимые как сумма квадратов двух величин. Например, гипотенуза прямоугольного треугольника представима суммой квадратов двух величин, а катет представим только разно-

стью квадратов двух величин. То есть, модуль 4 может быть интересен для алгебр, изучающих свойства пифагоровых чисел.

Группа статей в настоящем издании посвящена пифагоровым числам и их применению в искусственном интеллекте и в криптографических системах.

Статья «**N-позиционная алгебра**» — с одной стороны, создаёт впечатление, что вариант таких чисел надуман, т.е. многомерные числа, многопозиционные числа — это числа одной и той же алгебры в различных разрядах. Где такие числа могут найти применение? И что это за числа? В связи с этим стоит выделить два варианта чисел. Первый вариант — обработка последовательности чисел n -мерных структур связана с банковскими, либо с биржевыми потоками информации. Дело в том, что на бирже каждой компании присваивается свой разряд числа. Так, «Газпром» имеет один разряд, «Бритиш Петролеум» другой разряд, «Лукойл» — третий и.д. И все эти числа имеют свои позиции, т.е. можно говорить о *многопозиционном числе* одном. Это числа действительные, но это — целый ряд чисел, массив чисел. Причём эти числа обрабатываются по одному и тому же алгоритму. Через каждую секунду поступает информация о том, что столько-то акций по каждой позиции куплено, столько-то продано — и делается машинный пересчёт котировок акций и всяких прочих показателей различных биржевых потоков. Т.е. эти числа многопозиционные, но действительные в каждой позиции. Ещё сравнительно недавно таких чисел было мало, теперь же очень сильно возрастает значимость таких чисел. Это — с одной стороны. А с другой стороны, даже пифагоровы числа тройной спирали сформированы в цепочки чисел — целых чисел. Причем, эти цепочки чисел имеют различные числовые позиции для различной размерности пространственно-временной структуры. Это может быть и 5 цепочек, и 6, и 7, и 8 и n , вообще говоря. Закон переработки чисел один и тот же. Но эти числа связаны между собой. Например, четвёрка чисел: z, c, p, t — двойной спиральной структуры. Это такая же композиционная алгебра, только уже целочисленная. Поэтому А.В. Короткову пришлось рассмотреть вопросы построения n -позиционных алгебр вообще — начиная от алгебр n -позиционных действительных чисел, n -позиционных алгебр целых чисел, а также принципы построения алгебр сравнения по модулю, алгебр вычетов и булевых алгебр. Все эти вопросы рассмотрены в данной статье. Мне представляется целесообразным выделить n -

позиционные алгебры в отдельный разряд алгебраических систем для их всестороннего изучения. Надо отметить, что в каждой позиции этих алгебраических структур могут быть числа различного класса: действительные, целые, рациональные, вычетов, алгебр логики, логические числа. Но однако же, число позиций определяется одномерными алгебрами. Можно строить n -позиционные алгебры для многомерных структур той же троичной алгебры логики, векторной трёхмерной и семимерной алгебр, той же алгебры комплексных чисел кватернионов и октонионов, и т.д. Т.е. речь идёт о том, что n -позиционные алгебры могут иметь в каждой позиции не одно число, а набор чисел: это n -позиционные k -разрядные алгебры. При $k=1$, показано, как это сделать, а при k , равном большему числу, это сделать также нетрудно и можно. Например, слежение за объектами в трёхмерном пространстве: n -самолётов летает в трёхмерном пространстве — надо оперативно отслеживать информацию по определению параметров всех n самолётов в трёхмерном пространстве (это верно и в отношении космических объектов, надводных кораблей, подводных лодок, беспилотников, вертолётов и прочих транспортных средств, а также прокси-серверов и других объектов).

Защита информации представлена группой статей «О решении полиномиальных уравнений». Это небольшие статьи в плане применения теоремы Пифагора, в продолжение раннее начатых работ. Они указывают на особенность — ту, что пифагоровы тройки чисел могут быть классифицированы не только по значениям гипотенуз прямоугольных треугольников, но также по значениям суммы катетов прямоугольных треугольников. Сумма катетов также находится в периодической зависимости и выражения x плюс y эн плюс единица равняется $6x$ плюс y эн минус x плюс y эн минус один применима в данном случае для сумм катетов. Это говорит о том, что с каждым прямоугольным треугольником связана не только его нахождение в бесконечном ряду чисел, определяемых гипотенузой. Для данного значения модуля разности двух катетов, но также и в бесконечном ряду сумм катетов построенных по тому же аналогичному принципу. Эти выражения позволяют найти некоторые соотношения. В частности, соотношения для значений катетов и гипотенуз. Эти соотношения несколько отличаются от тех, которые применимы для теоремы Пифагора. В частности, теорема Пифагора x^2 квадрат плюс y^2 квадрат равняется z^2

квадрат может быть использована для икс второго, равного икс первое плюс игрек первое в квадрате минус единица пополам игрек равняется игрек два равняется игрек один плюс икс один, зет равняется также как, икс два только плюс единица, а не минус единица. *Это говорит о том, что имеет место классификация пифагоровых троек по разности гипотенузы и одного из катетов, равное единице. Это совсем другой способ классификации — это вторая последовательность для пифагоровых троек.*

(Прежде всего, нельзя не обратить внимания на большое количество статей, связанных с эллиптическими уравнениями, решением уравнений Ферма, а, кроме того, применением их в криптографии – прежде всего эллиптических уравнений).

Необходимо отметить, что вопросы применения криптографических знаний связаны с вопросами шифрации-дешифрации сообщений. В частности, для криптографических шифрующих устройств с открытым ключом используются произведения двух простых чисел. Это легко сделать в виде выполнения процедуры произведения двух чисел, но обратная процедура – процедура нахождения двух простых чисел – по донному составному из них числу очень сложна. Но есть способы (хотя преждевременно об этом говорить) разложения составного числа на два простых числа. Способы эти (из анализа литературы) ранее не применялись и могут найти применение для решения криптографических задач.

В частности, в работе под названием «Нахождение решений полиномиальных уравнений второй степени целых чисел» показан следующий интересный нюанс. А именно: таблица 1 позволяет построить системы чисел пифагоровых троек, классифицируемых по определенному признаку, например, по модулю разности двух катетов. Оказывается, что модуль разности двух катетов принимает строго определенные значения, например, один, семь, семнадцать и т.д. В статье об этом говорится. Так вот, если построить цепочку чисел соответствующей, например, модулю разницы между катетами, равными единице, то получается последовательность: 1, 5, 29, 169, 985, 5741 и т.д. – для гипотенуз прямоугольного треугольника с целочисленными значениями сторон, всех трех сторон.

Эта последовательность строгая и оказывается, что она связана следующим рекуррентным соотношением – тройкой последовательных чисел. Третье число тройки равняется величине 6, второго числа тройки без первого числа, последовательных чисел гипотену-

зы в прямоугольных треугольниках. Например, 169 равняется 29 на 6 отнять 5. Эта последовательность выполняется для всех прямоугольных треугольников с разницей модуля – с модулем разницы катетов, равным единице. Но не только единице, но и 7, 17, 23 и т.д. Что это дает?

Необходимо отметить, что гипотенузы прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами определяются нечетными числами класса 1 с вычетом по модулю 4. (Выше уже было сказано, что это означает). То есть 5, 29, 169 отличаются от числа делимого на 4 только одной единицей (класс один по модулю 4).

Во-вторых, среди этих чисел очень много простых чисел. Практически значительная часть чисел, определяющих гипотенузу простые числа. В-третьих, последовательность рекуррентно настолько быстро возрастает, что уже где-то 18-ое число последовательности характеризуется, по крайней мере, 20-ю разрядами. Тридцатое число в этой последовательности содержит 24 разряда и число простое. Его перечислил А.В.Коротков: 68480406462161287469. Вот такое число и оно уже возникает на тридцатом шагу. Таких чисел очень много в этих системах. А, как известно, в криптографии используют простые числа, т.е. произведение двух простых чисел дает возможность свободной публикации кода – и только тот, кто знает, как разложить эти числа на два множителя, может расшифровать эти коды (это — шифры с открытым ключом). Т.е. эти последовательности могут найти применение в криптографии и в криптологических устройствах (криптотехнике).

Всё вышеизложенное является сутью семимерной (многомерной) парадигмы А.В.Короткова, включающей в себя квантованные логические величины, многомерные и многозначные булевы и небулевы алгебры логики (эти работы представлены в настоящей коллективной монографии), а также разработки на их основе.

(Стоит обратить внимание на ошибочное понимание некоторыми специалистами семимерной парадигмы (в особенности к приложениям всякого рода, в частности – поля) вроде следующего пассажа: "семимерное поле есть совокупность семи трехмерных полей", вообще не верно. Если рассматривать каждое из полей как трехмерное линейное пространство, то их ортогональная сумма будет 21-мерной, а если они – подмножества обычного трехмерного пространства, то и их объединение остается трехмерным.

В действительности – составные алгебры, которые очень сложны, в векторных произведениях двух векторов, отличаются, и составные алгебры дают теорию составных полей – полей семимерных. Они отличаются как небо и земля от теории семимерных полей, но не составного характера, а простых).

Раннее печатавшиеся статьи для настоящего издания были доработаны и дополнены.

...Из всего комплекса многомерной парадигмы А.В. Короткова авторы разрабатывают только одно **информационное направление на многомерных и многозначных булевых и небулевых алгебрах логики**. А на остальные направления: на разработку квантованной (дискретной физики), применения в физике и топологии многомерных и многозначных булевой и небулевой алгебр, разработку многомерной физики (семи- и пятнадцати-мерной) и новые физики элементарных частиц на многомерной основе, сильного и слабого ядерного взаимодействий и гравитационной теории, теории поля также на многомерной основе, новые теории полей, новые аналитические геометрии, дифференциальные геометрии, новые квантовые теории поля, – нам не по силам, средствам и времени. Поэтому авторы определяют данную парадигму как **открытую систему**, т.е. любой и каждый может внести свой вклад в её развитие.

Монографию дополняют три приложения. **Первое приложение** – это машинные арифметики и их специфика, **второе приложение** – это статья Ю.И.Неймарка «Многомерная геометрия и распознавание образов».

Третье приложение – статья П.А.Флоренского «Пифагоровы числа».

Иное дано!

Меняй реальность!

Чураков В.С., научный редактор.

МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В.С.

**ПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЙ
В ОБЛАСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА И
КОГНИТОЛОГИИ В РАМКАХ СЕМИМЕРНОЙ
ПАРАДИГМЫ
А.В. КОРОТКОВА**

Предлагаемая нами «Программа исследований» базируется на семимерной парадигме А.В.Короткова.

Анатолий Васильевич Коротков проблемой семимерного пространства (собственно евклидового и псевдоевклидового) занимается с 1988 г. В 2001 году А.В. Коротков защитил докторскую диссертацию на тему «Элементы семимерного векторного исчисления в задачах математического моделирования физических и технических объектов». Специальности: 05.13.01– системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям), 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы. Диссертационный совет рекомендовал Высшей Аттестационной Комиссии Российской Федерации включить в учебные программы основные сведения о семимерном векторном исчислении для студентов механико-математических и физико-математических специальностей вузов.

Семимерная парадигма А.В.Короткова представляет собой семимерное пространство (собственно евклидово и псевдоевклидово). Оно обусловлено тем обстоятельством, что математики Новосибирской школы показали, что трёхмерная алгебра является подалгеброй только семимерной алгебры. Только семимерной алгебры – нужно было рассматривать семимерный вариант со скалярным и векторным произведением двух векторов, т.е. семимерную векторную алгебру – в философском отношении «истинной середины» (следуя Мих. Лифшицу) – в отношении множества многомерных концепций пространства. (Следует обратить внимание на ошибочное понимание некоторыми специалистами семимерной парадигмы (в особенности к приложениям всякого рода, в частности – поля) вроде следующего пассажа: "семимерное поле есть совокупность семи трехмерных полей", вообще не верно. Если рассматривать каждое из полей как трехмерное линейное пространство, то их

ортогональная сумма будет двадцатиодномерной, а если они – подмножества обычного трехмерного пространства, то и их объединение остается трехмерным.

В действительности – составные алгебры, которые очень сложны, в векторных произведениях двух векторов, отличаются, и составные алгебры дают теорию составных полей – полей семимерных. Они отличаются как небо и земля от теории семимерных полей, но не составного характера, а простых).

Кроме того, кватернионы организуют координацию векторизованных явлений в трёхмерном пространстве, в котором существует лишь семь различных систем координат. Это – исходная *эпистемологическая парадигма, которой мы будем следовать*.

Основным недостатком булевой алгебры логики, получившей широкое распространение и применение – прежде всего, в вычислительной технике – с точки зрения идентификации и управления объектами, обладающими сознанием (интеллектом), является то, что данная логика одномерна, то есть описывает лишь действительные логические состояния и не учитывает иных, в том числе – мнимых, ввиду чего с XX в. начинают разрабатываться многомерные и многозначные логики [3;4;7;8; 9;16].

На основе результатов, полученных в многолетних исследованиях по семимерной парадигме, в последние годы А.В.Коротков опубликовал работы, позволившие применить семимерную парадигму к информационным технологиям, искусственному интеллекту и когнитологии (в рамках семимерной парадигмы А.В.Коротков разработал: дискретные алгебры [многомерные целочисленные алгебры], многозначные алгебры логики и небулевы алгебры логики [7;8;9]), способные ещё более понизить конкурентную способность гипотетических квантовых компьютеров по отношению к универсальным электронным вычислительным машинам.

Разработки А.В.Короткова позволяют наполнить новым содержанием, прежде всего, два традиционных подхода: логический и структурный.

Логический подход. Основой для логического подхода служит булева алгебра. Булева алгебра появилась ещё в XIX веке (Свое дальнейшее развитие булева алгебра получила в виде исчисления предикатов, в котором она расширена за счет введения предметных символов, отношений между ними, кванторов существования и всеобщности)... В вычислительной технике она применяется с сере-

дины XX-го века. Булева алгебра двузначна и одномерна. Это числа с двумя состояниями, которые условно называют нуль и единица. Они дают соответствующие операции сложения и умножения этого числа, в результате булева алгебра обладает целым рядом полезных, очень важных свойств, позволивших широко применять ее на практике, в алгебре логики, а также самое главное – в технике логических, арифметических и преобразовательных устройств булева алгебра хорошо разработана и изложена, говорить о ней много не следует (но попутно стоит отметить такое сравнительно новое направление, как нечеткая логика). Необходимо отметить прецедент, который возникает в булевой алгебре.

Во-первых, наличие операций сложения не сопровождается операцией вычитания, то есть, отсутствует противоположность операции сложения. Булевому числу нельзя сопоставить противоположное число. В алгебре, например, действительных чисел, все обстоит иначе. Эта алгебра характеризует поле – математическое понятие, набор математических операций, одна из которых – операция вычитания. Так вот, имеется система в теории сравнений, которая может работать с классом вычетов по модулю. Эта теория хорошо разработана и изложена в литературе. Она имеет возможность построения чисел по модулю два классов сравнений и классов вычетов по модулю два. Это – та же система с двумя числами нуль и единица, но эта система не имеет уже операций вычитания, и в результате имеет отличающуюся от булевой алгебры операцию сложения, где единица плюс единица в этой алгебре есть нуль, в то время как в булевой алгебре единица плюс единица есть единица.

Это очень существенное отличие, позволяющее построить новую алгебру. Эта алгебра обладает целым рядом полезных свойств, теми же, что и, например, в алгебре действительных чисел, хотя она дополнена свойствами чисто логических систем. В этой алгебре A равняется нулю, а не A , как в булевой алгебре, если A – число. Отличительные свойства этой небулевой одномерной алгебры от булевой одномерной алгебры характеризует целый ряд возможностей и создает целый ряд алгебр. Это в отношении одномерной алгебры булевой и небулевой.

Теперь в отношении многомерной алгебры. В принципе, булева алгебра может быть расширена до многомерного варианта, до N – мерного, где N – произвольное число, путем применения операции умножения. Умножение в этой алгебре прямое – умножение двух

чисел. В одной из публикаций показано, что булева алгебра может быть N – мерна, то есть число может быть записано в N - мерной форме. Операнды в N - мерной форме есть результаты операций в N - мерной форме. Это создает возможности использования этой алгебры по ряду назначений, в частности, при построении логических многомерных устройств, либо логически-арифметических многомерных устройств. Однако, прямое произведение двух величин, всё- таки, обладает некоторыми существенными недостатками, поэтому в практике действительных чисел используют не только прямое произведение двух величин, но и произведение многомерных величин, построенных не по способу прямого произведения.

Таковыми числами, кроме действительных одномерных чисел, являются комплексные числа, например, двумерные числа, кватернионные четырехмерные числа, октанионы – восьмимерные числа, а также числа, характеризующие векторные алгебры, одномерные векторные алгебры, трехмерные векторные алгебры, семимерные векторные алгебры. То есть, в алгебре действительных чисел имеется целый ряд возможностей расширения, но уж, поскольку, система сравнений классов вычетов по модулю обладает свойствами, близкими к свойствам действительных чисел, в частности, обладает вычитанием, то можно строить алгебры логики многомерной, используя те же процедуры для произведения чисел, что и алгебры многомерной для действительных чисел. В частности, процедура удвоения Гамильтона может быть использована для построения двумерной алгебры логики и одномерной векторной алгебры. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к комплексным, логическим числам даст четырехмерные логические числа и трехмерную векторную алгебру. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к кватернионным числам, даст октанионную систему чисел – логических чисел и семимерную векторную алгебру логики, то есть, известная процедура умножения по отношению к числам классов вычетов по модулю дает возможность построить целый ряд совершенно новых алгебр.

Следовало бы отметить еще одно важное применение – речь идет о дискретных алгебрах с бесконечным модулем в данном случае, вернее, это – алгебра действительных чисел, но только расширена она до четырех восьмимерных (одно-трех и семимерный вариант). Дело в том, что в векторных алгебрах, алгебрах кватернионов, комплексных чисел и октанионов используются операции сложения

и умножения, а также операции скалярного произведения и векторного произведения двух векторов векторной алгебры.

Если числа занимают чисто дискретный ряд значений, например, приобретают только целые значения, то результаты всех практических операций будут принимать целые значения. То есть, эта алгебра в значительной степени воспроизводит дискретную алгебру, если речь не идет об извлечении квадратного корня. Скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение трех векторов, двойное векторное произведение трех векторов, есть и другие многомерные операции, которые будут иметь целочисленные значения, многомерные целочисленные значения, это может иметь существенное применение для описания дискретных величин, которые, в последнее время, на протяжении уже, более ста лет широко используются физиками.

Структурный подход – это ни что иное, как попытки построения ИИ путем моделирования структуры человеческого мозга. Одной из первых таких попыток был перцептрон Френка Розенблатта. Основной моделируемой структурной единицей в перцептронах (как и в большинстве других вариантов моделирования мозга) является нейрон. Позднее возникли и другие коннекционистские модели, которые большинству известны под термином нейронные сети (НС) и их реализации — нейрокомпьютеры. Эти модели различаются по строению отдельных нейронов, по топологии связей между ними и по алгоритмам обучения. Среди наиболее известных сейчас вариантов НС можно назвать НС с обратным распространением ошибки, сети Кохонена, сети Хопфилда, стохастические нейронные сети. В более широком смысле такой подход известен как коннективизм. Различия между логическим и структурным подходом не столь принципиальны, как это может показаться на первый взгляд. Алгоритмы упрощения и вербализации нейронных сетей преобразуют модели структурного подхода в явные логические модели. С другой стороны, ещё в 1943 году Маккалок и Питс показали, что нейронная сеть может реализовывать любую функцию алгебры логики [10; 24].

На основании вышеизложенного, **сформулируем программу исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии в рамках семимерной парадигмы А.В. Короткова.**

В области **информационных технологий** в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова возможно решение следующих задач:

1.Разработка математических основ для создания многомерного булевого и небулевого логического базиса элементов и устройств вычислительной техники (включая нейрочипы, нейрокомпьютеры и нейросети).

2.Разработка принципиальных схем для реализации полного набора базовых элементов вычислительных устройств на основе многомерного булевого и небулевого логического базиса.

3.Разработка новых алгоритмов и программного обеспечения на основе многомерных булевых и небулевых логик.

4.В робототехнике возможно построение систем представления и анализа пространственных объектов в семимерном пространстве координат (трехмерные пространственные координаты X,Y, Z, цветное восприятие, обоняние, осязание, аудиоинформация).

В области **искусственного интеллекта** в рамках семимерной парадигмы возможно решение следующих задач:

1.Разработка теоретических основ построения многомерных булевых и небулевых формальных логик.

2.Построение экспертных систем на базе многозначных и многомерных булевых и небулевых формальных логик.

3.Применение семимерной парадигмы при построении многовекторных систем управления базами данных (МСУБД).

4.Применение семимерной парадигмы для реализации поисковых систем с многовекторным индексированием гипертекста.

5.Применение семимерной парадигмы для формирования продукционных моделей предметных областей в интеллектуальных информационных системах.

6. Открывается возможность для следующих вариантов построения нейросетей [19]:

а) на небулевых алгебрах;

б) на многозначных алгебрах (булевых и небулевых);

в) на многомерных алгебрах (булевых и небулевых).

(Работы в этих направлениях уже начаты, см. [12;13;14] – в дополнение к ведущимся работам в области многозначных логик [3;4;16]).

А также построения ИИ на трехмерных логиках (**стандартный ИИ**) и построения **ИИ высокого уровня** – на алгебраических

логиках более высокого порядка (ИИ высокого уровня должен быть социальным, примерно как это описано в романе Й.Макдональда «Река богов» [11], и многомерным/многозначным).

Поскольку представления о природе человеческого сознания, полученные в когнитивной психологии (и проецируемые на модели искусственного интеллекта), по замечанию И.З.Цехмистро, „не идут дальше выяснения функциональных сторон его деятельности: памяти, логико-вычислительных операций, способности к прогнозированию и т.п., которые с той или иной степенью достоверности могут быть смоделированы в различных кибернетических устройствах“ [25, с.4], то в области **когнитологии (когнитивного моделирования)** в рамках семимерной парадигмы возможно:

1. Построение многомерной модели сознания на основе многомерных булевой и не-булевой алгебр А.В.Короткова [8]. (Открывается возможность построения [многомерной] **топологии сознания**, для чего лучше всего подходят работы: Л.Литвака «Жизнь после смерти»: предсмертные переживания и природа психоза. Опыт самонаблюдения и психоневрологического исследования» [17] и как демоверсия — «Герменевтика смерти» В.Никитаева [18]. Но для этого следует предварительно разработать *топологии на мномерных и многозначных булевой и небулевой алгебрах*).

2.Появляется возможность на основе пифагоровых чисел моделировать представление сознания и мышления, а также перейти от евклидовых представлений (моделирования работы мозга) — к неевклидовым, дополнительным к евклидовым. (А.А.Гриб в статье «Квантовая логика: возможные применения» пишет, что квантовую логику можно применить в психологии к проблеме взаимодействия психического и физического в мозге: «Если состояния системы нейронов описываются недистрибутивной решеткой, сознание же работает на дистрибутивной (булевой) логике, то согласно квантовой теории измерения, аппарат которой переносится на этот случай, при осознании (самосознания) различных дополнительных свойств мозга будет происходить изменение физического состояния мозга (редукция волнового пакета). Если нейронная структура такова, что $A \wedge (B \vee C) \neq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, сознание же мыслит по дистрибутивной логике, то, задавая вопросы: я в состоянии А? я в состоянии В? — оно сопоставит некоммутирующие операторы А и В этим вопросам. Если оно потом задаст третий вопрос: В в А? — то ответ будет другой, чем в начале. Тем самым проявляется возможность самоизме-

нения как следствие самосознания» [3, с.316-317]. Впрочем, это не обязательно должна быть квантовая логика — это может быть любая троичная система вычислений).

3. По новому можно подойти к проблеме формализации знаний.

Кроме того, данный подход можно применить к *теории автоматов, в нечетком моделировании и управлении [20], прогнозировании [2;15], нейроинформатике, компьютерных играх, криптографии, биоинформатике, геоинформатике, в разработке новых вычислительных систем (биомолекулярный компьютер и т.д.), и использовать методы [булевой и небулевой, многозначной и многомерной] алгебры логики в математической физике [22].*

Данный подход соответствует также программной статье Князевой Е. и Турובה А. «Познающее тело. Новые подходы в эпистемологии» [6], в которой внимание привлекается «к тому обстоятельству, что нельзя понять работу человеческого ума, когнитивные функции человеческого интеллекта, если ум абстрагирован от организма, его телесности, эволюционно обусловленных способностей восприятия посредством органов чувств (глаз, ушей, носа, языка, рук), от организма, включенного в особую ситуацию, экологическое окружение. «То, что познается и как познается, зависит от строения тела и его конкретных функциональных особенностей, способностей восприятия и движения в пространстве» [6], — утверждают отечественные авторы» (Цит. по: [23]).

Следует отметить, что ведущиеся до сих пор исследования проводятся в марковской парадигме, согласно которой «Марковский процесс, — это случайный процесс, для которого при известном состоянии системы в настоящий момент ее дальнейшая эволюция не зависит от состояния этой системы в прошлом» [1, с.94] — и их следует отработать до конца, а собственно работы по искусственному интеллекту и ИИ высокого уровня проводить в рамках немарковской парадигмы [1; 26].

Предложенная выше исследовательская программа представляет собой, по сути, новое научное направление на многомерной математической базе, которое можно применить и в альтернативном подходе [5; 21] — как в марковской, так и в немарковской парадигмах [1; 26].

Данная система является открытой, т.е. любой и каждый может принять участие в её развитии.

Литература

1. Азроянц Э.А., Харитонов А.С., Шелепин Л.А. Немарковские процессы как новая парадигма//Вопросы философии. 1999. №7. – (с.94-104).
2. Горбунов Е.А. Самоорганизация и прогнозирование военно-политических, экономических и социальных аспектов. – Киев: Ника-Центр, 2005. – 320 с.
3. Гриб А.А. Квантовая логика: возможные применения//Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты/Отв. Ред. Д.ф.н. М.И. Панов.— М.: «Наука», 1987. — 336с.
4. Зиновьев А.А. Комплексная логика//Зиновьев А.А. Очерки комплексной логики. – М.: Наука, 1970; М.: Эдиториал УРСС, 2000.; см. также: Зиновьев А.А. Философские проблемы многозначной логики/Вступ. ст. В.А.Лекторского. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. —144с. (Из наследия А.А.Зиновьева); Ионов А.С., Петров Г.А. Алгебра 9-значной комплексной логики и ее применение [Электронный ресурс]. – URL : psi-logic.shadanakar.org; Ионов А.С. Комплексная логика для идентификации систем, учитывающих возможные ошибки. – 13 с.– Деп. в. ВИНТИ, от 16.09.88. № 7018-B88; Ионов А.С., Петров Г.А. Интерпретация логических законов комплексной логикой// Вестник Новг. гос. ун-та. Сер. Технические науки. – 2001. – № 17; Ионов А.С., Петров Г.А. К построению основ теории вероятности комплексных логических событий//Вестник Новг. гос. ун-та, Сер. Технические науки. – 2004. – № 26; Ионов А.С. Построение основ алгебры комплексной логики на базе расширения теории множеств// Вестник Новг. гос. ун-та. Сер. Математика и информатика. – 2002. – № 22; Ионов А.С., Петров Г.А. Принципы построения гиперкомплексной логики// Искусственный интеллект 2004: сб. трудов Международ. науч. конф. Таганрог-Донецк, т. 1, 2004; Ионов А.С., Петров Г.А. Основы алгебры 9-значной комплексной логики // Вестник Новг. гос. ун-та, Сер. Технические науки. – 2004. – № 28; Карпенко А.С. Развитие многозначной логики. Изд.3-е. перераб. и доп.— М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 448с.
5. Клименко А.В. Основы естественного интеллекта. Рекуррентная теория самоорганизации. Версия 3.— Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета, 1994. — 304с.

6.Князева Е., Туробов А. Познающее тело. Новые подходы в эпистемологии//Новый мир. 2002. №11. – (с.136-154); 6а.

7.Коротков А.В. Многомерные булевы алгебры//Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семи-мерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.– 194с.– (с.180-185).

8.Коротков А.В. Многозначные алгебры логики// Информационные системы и технологии. Теория и практика.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008.– (с.17-23).

9. Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. – (с.23-29).

10.Майнцер К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез. Пер. с англ./Под ред. и с предисл. Г.Г.Малинецкого.– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 464с.

11.Макдональд Й. Река Богов/Пер. с англ. С.Минкина.– М.: АСТ: АСТ МОСКВА: Транзиткнига, 2006.– 669, [3]с.

12.Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерная модель сознания на основе многомерных булевой и не-булевой алгебр А.В.Короткова//Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'08) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2008). Научное издание в 4-х томах. Т.2. – М.: Физматлит, 2008. – (с.159-161).

13.Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерные алгебры А.В.Короткова для нейросетей и нейрокомпьютеров//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «AIS-IT'09». Научное издание в 4-х томах.– М.: Физматлит, 2009. Т.2. – 568с.– (с.112-114).

14.Мешков В.Е., Чураков В.С. Пифагоровы числа в нейросетях//Труды Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «AIS-IT'09». Научное издание в 4-х томах.– М.: Физматлит, 2009. Т.2. –568с.– (с.115- 119).

15.Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Бенамеур Лиес. Методы и алгоритмы идентификации и прогнозирования в условиях неопределенности в нейросетевом логическом базисе. – М.: Горячая линия– Телеком, 2003. – 205 с.: ил.

16. Многозначные логики и их применения: Т.1: Логические исчисления, алгебры и функциональные свойства/Сост.

О.М.Аншаков, Д.В.Виноградов, В.К.Финн; Под ред. В.К.Финна. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 504с.; Многочисленные логики и их применения: Т.2: Логика в системах искусственного интеллекта/Сост. О.М.Аншаков, Д.В.Виноградов, В.К.Финн; Под ред. В.К.Финна. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 240с.

17. Литвак Л. «Жизнь после смерти»: предсмертные переживания и природа психоза. Опыт самонаблюдения и психоневрологического исследования. – Изд. 2-е, перераб. и доп./Под ред. и со вступит. статьей Д.И. Дубровского.– М.: «Канон+», РООИ «Реабилитация», 2007.– 672с.

18. Никитаев В. Герменевтика смерти//Логос.№2 (47).2005.– (с.193-211).

19. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации/Пер. с польского И.Д.Руденко. – М.: Финансы и статистика, 2004. –344с.: ил.

20. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление/Пер. с англ.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798с.: ил.

21. Поликарпов В.С., Курейчик В.М., Поликарпова Е.В., Курейчик В.В. Философские проблемы искусственного интеллекта. – М.: Физматлит, 2008.– 266с.

22. Рвачев В.Л. Методы алгебры логики в математической физике. — Киев: «Наукова Думка», 1974. –212 с.

23. Режабек Е.Я. В поисках рациональности (статьи разных лет): научное издание. – М.: Академический проект, 2007. – 383с.

24.Солсо Р. Когнитивная психология.– 6-изд. – СПб.: Питер, 2006. – 589 с.: ил.

25.Цехмистро И.З. Поиски квантовой концепции физических оснований сознания. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981. –176с.

26. Шелепин Л.А. Становление новой парадигмы//Философия науки.– Вып. 7: Формирование современной естественнонаучной парадигмы. – М., 2001. – 270с. – (с.24-42).

АЛГЕБРЫ НАД КОЛЬЦОМ ЧИСЕЛ ПИФАГОРА

Множества целых чисел (включающие множества квадратов целых чисел, целочисленных квадратных корней, их сумм и произведений) будем называть пифагоровыми числами. Пифагоровы числа обеспечивают равенство квадратов чисел сумме квадратов целых чисел.

Рассмотрим свойства пифагоровых чисел по аналогии со свойствами гиперкомплексных и целых чисел [1], учитывая отсутствие операции деления, а также обратных величин. Рассмотрим линейные векторные пространства над кольцом пифагоровых чисел в которых кроме действий сложения и умножения на скаляры определено еще действие умножения, сопоставляющее каждой упорядоченной паре векторов третий вектор того же пространства. Естественно предполагать, что результат умножения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линеен по каждому из множителей при фиксированном втором, т. е.

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2)\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{a}_2\mathbf{b},$$

$$\mathbf{a}(c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2) = c_1\mathbf{a}\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{a}\mathbf{b}_2.$$

Одномерные пифагоровы числа

Одномерными пифагоровыми числами $\mathbf{a}$ являются числа $\mathbf{a} = (a_0)$, где a_0 -пифагорово число, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления с другими числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

Числа $\mathbf{a} = (a_0)$ и $\mathbf{b} = (b_0)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их компоненты a_0 и b_0 .

В символической записи:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Суммой чисел $\mathbf{a} = (a_0)$ и $\mathbf{b} = (b_0)$ называется число $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0)$, т.е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0) + (b_0) = (a_0 + b_0).$$

Произведением чисел $\mathbf{a} = (a_0)$ и $\mathbf{b} = (b_0)$ называется число

$$\mathbf{ab} = (a_0)(b_0) = (a_0b_0).$$

4. Число (a_0) отождествляется с целым числом a_0 , т.е. $(a_0) = a_0$.

В данном определении одномерных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы и произведения, нет речи о каком-либо делении и извлечении квадратного корня. Все определения формулируются в терминах целых чисел и действий над ними.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$ma = (m)(a_0) = (ma_0),$$

т.е. $ma = (ma_0)$.

Число $a = (a_0)$ не имеет сопряженных чисел.

Умножив числа

$$aa = (a_0)(a_0) = (a_0a_0) = (a_0^2),$$

т.е. $aa = a_0^2$,

так что их произведение равно целому числу, которое равно нулю, если: $a_0^2 = 0$.

Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a+b)+c = ((a_0+b_0))+(c_0) = ((a_0+b_0)+c_0),$$

$$a+(b+c) = (a_0)+((b_0+c_0)) = (a_0+(b_0+c_0)).$$

В силу ассоциативности сложения целых чисел

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. Коммутативность сложения:

$$a+b = (a_0)+(b_0) = (a_0+b_0),$$

$$b+a = (b_0)+(a_0) = (b_0+a_0).$$

В силу коммутативности сложения целых чисел $a+b = b+a$.

3. Наличие нуля:

$$a+0 = (a_0)+(0) = (a_0+0) = (a_0),$$

т.е. $a+0 = a$,

так что число (0) отождествляется с целым числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$a+(-a) = (a_0)+(-a_0) = (a_0-a_0) = (0),$$

т.е. $a+(-a) = 0$, так что число $(-a_0)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c = (a_0b_0)(c_0) = ((a_0b_0)c_0),$$

$$a(bc) = (a_0)(b_0c_0) = (a_0(b_0c_0)).$$

В силу коммутативности умножения целых чисел $(ab)c = a(bc)$.

6. Коммутативность умножения:

$$ab = (a_0)(b_0) = (a_0b_0),$$

$$ba = (b_0)(a_0) = (b_0a_0).$$

В силу коммутативности умножения целых чисел $ab = ba$.

7. Дистрибутивность:

$$(a+b)c = (a_0+b_0)(c_0) = ((a_0+b_0)c_0),$$

$$ac+bc = (a_0c_0)+(b_0c_0) = ((a_0+b_0)c_0),$$

т.е. $(a+b)c = ac+bc$.

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_0)(1)=(a_01)=(a_0),$$

т.е. $a1=a$.

Итак, одномерные пифагоровы числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Обратное число отсутствует. Отсутствует также операция деления.

В координатной форме записи операция умножения двух одномерных пифагоровых чисел может быть представлена в виде:

$$ab=(a_0b_0).$$

Двумерные пифагоровы числа

Двумерными пифагоровыми числами a назовем упорядоченные пары $a=(a_0, a_1)$ одномерных пифагоровых чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с одномерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

Пары пифагоровых чисел $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты $a_0=b_0, a_1=b_1$.

В символической записи

$$a=b$$

Суммой пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ назовем пару

$$a+b=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1)$$

т.е. $a+b=(a_0+b_0, a_1+b_1)$,

3. Произведением пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара

$$ab=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$,

4. Число $(a_0, 0)$ отождествляется с целым числом a_0 , т.е. $(a_0, 0)=(a_0)=a_0$.

В данном определении двумерных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы и произведения, нет речи о делении и извлечении квадратного корня. Все определения формулируются в терминах целых чисел и действий над ними.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$ta=(t, 0)(a_0, a_1)=(ta_0-a_10, ta_1+a_00)=(ta_0, ta_1),$$

т.е. $ta=(ta_0, ta_1)$.

Пары $a=(a_0, a_1)$ и $\bar{a}=(a_0, -a_1)$, отличающиеся знаком второй компоненты, будем считать сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$a\bar{a}=(a_0, a_1)(a_0, -a_1)=(a_0a_0+a_1a_1, -a_0a_1+a_0a_1)=(a_0^2+a_1^2, 0),$$

$$\text{т.е. } a\bar{a} = a_0^2 + a_1^2,$$

так что их произведение равно целому числу, которое равно нулю, только если: $a_0^2 = a_1^2 = 0$.

Двумерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{a}} = \overline{(a_0, -a_1)} = (a_0, a_1) = a,$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{a}} = a.$$

$$2. \overline{ab} = (a_0b_0 - b_1a_1, -(a_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$\bar{b}\bar{a} = (b_0, -b_1)(a_0, -a_1) = (b_0a_0 - a_1b_1, -(b_0a_1 + a_0b_1)),$$

$$\text{т.е. } \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

$$3. a + \bar{a} = (a_0, a_1) + (a_0, -a_1) = (a_0 + a_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является целым одномерным числом.

$$4. \overline{a+b} = (a_0 + b_0, -(a_1 + b_1)) = (a_0, -a_1) + (b_0, -b_1) = \bar{a} + \bar{b}.$$

Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a+b)+c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$a+(b+c) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения одномерных пифагоровых чисел

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. Коммутативность сложения:

$$a+b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$b+a = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения одномерных пифагоровых чисел вещественных чисел $a+b = b+a$.

3. Наличие нуля:

$$a+0 = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0+0, a_1+0) = (a_0, a_1),$$

$$\text{т.е. } a+0 = a,$$

так что пара $(0, 0)$ отождествляется с целым числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$a+(-a) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0-a_0, a_1-a_1) = (0, 0),$$

$$\text{т.е. } a+(-a) = 0,$$

так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 - b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0b_0 - b_1a_1)c_0 - c_1(a_0b_1 + b_0a_1), (a_0b_0 - b_1a_1)c_1 + c_0(a_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$a(bc) = (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 - c_1b_1, b_0c_1 + c_0b_1) =$$

$$= (a_0(b_0c_0 - c_1b_1) - (b_0c_1 + c_0b_1)a_1, a_0(b_0c_1 + c_0b_1) + (b_0c_0 - c_1b_1)a_1).$$

В силу коммутативности умножения одномерных пифагоровых чисел $(ab)c=a(bc)$.

6. Коммутативность умножения:

$$ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1),$$

$$ba=(b_0, b_1)(a_0, a_1)=(b_0a_0-a_1b_1, b_0a_1+a_0b_1).$$

В силу коммутативности умножения одномерных чисел $ab=ba$.

7. Дистрибутивность:

$$(a+b)c=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))(c_0, c_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1)(c_0, c_1)=$$

$$=((a_0+b_0)c_0-c_1(a_1+b_1), (a_0+b_0)c_1+c_0(a_1+b_1)),$$

$$ac+bc=(a_0c_0-c_1a_1, a_0c_1+c_0a_1)+(b_0c_0-c_1b_1, b_0c_1+c_0b_1)=$$

$$=((a_0+b_0)c_0-c_1(a_1+b_1), (a_0+b_0)c_1+c_0(a_1+b_1)),$$

т.е. $(a+b)c=ac+bc$.

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_0, a_1)(1, 0)=(a_01+a_10, a_00+1a_1)=(a_0, a_1),$$

т.е. $a1=a$.

Итак, двумерные пифагоровы числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Обратное число отсутствует. Отсутствует также операция деления.

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных пифагоровых чисел может быть представлена в виде:

$$ab=(a_0b_0-b_1a_1,$$

$$a_0b_1+b_0a_1).$$

Четырехмерные пифагоровы числа

Четырехмерными пифагоровыми числами a назовем упорядоченные пары $a=(a_0, a_1)$ двумерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с двумерными пифагоровыми числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары двумерных чисел $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты $a_0=b_0, a_1=b_1$.

В символической записи:

$$a=b.$$

2. Суммой пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара $a+b=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$a+b=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ назовем пару

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

4. Число $(a_0, 0)$ отождествляется с двумерным пифагоровым числом.

Пары $\mathbf{a}=(a_0,a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_0,-a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, назовем сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0,a_1)(\bar{a}_0,-a_1)=(a_0\bar{a}_0-a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1+\bar{a}_0a_1)=(|a_0|^2+|a_1|^2, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=|a_0|^2+|a_1|^2,$$

так что их произведение равно целому числу, которое равно нулю только, если: $|a_0|^2=|a_1|^2=0$.

Четырехмерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{\mathbf{a}}}=(\bar{\bar{a}_0}, -\bar{\bar{a}_1})=(\bar{\bar{a}_0}, a_1)=(a_0, a_1)=\mathbf{a},$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}.$$

$$2. \overline{\mathbf{ab}}=(\overline{a_0b_0-b_1\bar{a}_1}, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1))=$$

$$=(\bar{b}_0\bar{a}_0-a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}=(\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(\bar{b}_0\bar{a}_0-a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1+\bar{a}_0b_1)),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{ab}}=\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}.$$

$$3. \mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)+(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0+\bar{a}_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является целым числом.

$$4. \overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(\overline{a_0+b_0}, -(a_1+b_1))=(\bar{a}_0, -a_1)+(\bar{b}_0, -b_1)=\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}.$$

Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))+(c_0, c_1)=((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(a_0, a_1)+((b_0, b_1)+(c_0, c_1))=(a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения двумерных чисел $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_0, b_1)+(a_0, a_1)=(b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения двумерных чисел $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=(a_0,a_1)+(0,0)=(a_0+0, a_1+0)=(a_0,a_1),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(a_0,a_1)+(-a_0,-a_1)=(a_0-a_0, a_1-a_1)=(0, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0},$$

так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$\begin{aligned} (ab)c &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0b_0 - b_1\bar{a}_1)c_0 - c_1(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1), (\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)c_1 + c_0(a_0b_0 - b_1\bar{a}_1)) = \\ &= ((a_0b_0 - b_1\bar{a}_1)c_0 - c_1(\bar{b}_1a_0 + \bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0 - a_1\bar{b}_1)c_1 + c_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)), \\ a(bc) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 - c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= (a_0(b_0c_0 - c_1\bar{b}_1) - (\bar{b}_0c_1 + c_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0c_1 + c_0b_1) + (b_0c_0 - c_1\bar{b}_1)a_1). \end{aligned}$$

В силу коммутативности умножения двумерных чисел $(ab)c = a(bc)$.

6. Не коммутативность умножения:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1), \\ ba &= (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 - a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1 + a_0b_1). \end{aligned}$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $ab \neq ba$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (a+b)c &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \\ ac + bc &= (a_0c_0 - c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 - c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \end{aligned}$$

т.е. $(a+b)c = ac + bc$.

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_01 - 0\bar{a}_1, \bar{a}_00 + 1a_1) = (a_0, a_1) = a.$$

Итак, четырехмерные пифагоровы числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Обратное число отсутствует. Отсутствует также операция деления.

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных пифагоровых чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l|l} ab = (a_0b_0 - b_1a_1, & b_2a_2 - a_3b_3, \\ a_0b_1 + b_0a_1, & b_2a_3 - a_2b_3, \\ a_0b_2 + b_3a_1, & b_0a_2 - a_3b_1, \\ a_0b_3 - b_2a_1, & b_0a_3 + a_2b_1). \end{array}$$

Восьмимерные пифагоровы числа

Восьмимерными пифагоровыми числами a назовем упорядоченные пары $a = (a_0, a_1)$ четырехмерных пифагоровых чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с четырехмерными пифагоровыми числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

Пары четырехмерных чисел $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты $a_0 = b_0, a_1 = b_1$.

В символической записи:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Суммой пар $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ назовем пару $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$, т.е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

Произведением пар $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ называется пара

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1),$$

4. Число $(a_0, 0)$ отождествляется с четырехмерным числом.

Пары $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, назовем сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} = (a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (a_0 \bar{a}_0 + a_1 \bar{a}_1, -\bar{a}_0 a_1 + \bar{a}_1 a_0) = (|a_0|^2 + |a_1|^2, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \bar{\mathbf{a}} = |a_0|^2 + |a_1|^2,$$

так что их произведение равно целому числу, которое равно нулю, только если: $|a_0|^2 = |a_1|^2 = 0$.

Восьмимерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{\mathbf{a}}} = (\bar{\bar{a}_0}, -\bar{\bar{a}_1}) = (\bar{a}_0, a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a},$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}.$$

$$2. \overline{\mathbf{ab}} = (\overline{a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1}, -(\bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1)) =$$

$$= (\bar{b}_0 \bar{a}_0 - a_1 \bar{b}_1, -(\bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}} = (\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (\bar{b}_0 \bar{a}_0 - a_1 \bar{b}_1, -(b_0 a_1 + \bar{a}_0 b_1)),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}}.$$

$$3. \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = (a_0, a_1) + (\bar{a}_0, -a_1) = (a_0 + \bar{a}_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является целым числом.

$$4. \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0 + b_0, -(a_1 + b_1)) = (\bar{a}_0, -a_1) + (\bar{b}_0, -b_1) = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}.$$

Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения четырехмерных чисел

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения четырехмерных чисел

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$,

так что пара $(0, 0)$ отождествляется с целым числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,

так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Альтернативность умножения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{b} &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1)(b_0, b_1) = \\ &= ((a_0b_0 - b_1\bar{a}_1)b_0 - b_1(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1), (\bar{a}_0b_0 - b_1\bar{a}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)) = \\ &= ((a_0b_0 - b_1\bar{a}_1)b_0 - b_1(\bar{b}_1a_0 + \bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0 - a_1\bar{b}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)), \\ \mathbf{a}(\mathbf{bb}) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(b_0, b_1)) = (a_0, a_1)(b_0b_0 - b_1\bar{b}_1, \bar{b}_0b_1 + b_0b_1) = \\ &= (a_0(b_0b_0 - b_1\bar{b}_1) - (\bar{b}_0b_1 + b_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0b_1 + b_0b_1) + (b_0b_0 - b_1\bar{b}_1)a_1). \end{aligned}$$

В силу равенств $\mathbf{bb}$ и $\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}$ вещественным числам $(\mathbf{ab})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{bb})$.

6. Не коммутативность умножения:

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 - a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1 + b_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \\ \mathbf{ac} + \mathbf{bc} &= (a_0c_0 - c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 - c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 - c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \end{aligned}$$

т.е. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.

8. Наличие единицы:

$$\mathbf{a} \mathbf{1} = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_0 \cdot 1 - 0\bar{a}_1, \bar{a}_0 \cdot 0 + 1a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a}.$$

Итак, восьмимерные пифагоровы числа составляют некоммутативное, альтернативное кольцо с единицей.

9. Обратное число отсутствует. Отсутствует также операция деления.

В координатной форме записи операция умножения двух восьмерных пифагоровых чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l} \mathbf{ab} = (a_0b_0 - b_1a_1 - b_2a_2 - a_3b_3 - b_4a_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - b_7a_7, \\ a_0b_1 + b_0a_1 + b_2a_3 - a_2b_3 + b_4a_5 - a_4b_5 + a_6b_7 - b_6a_7, \\ a_0b_2 + b_3a_1 + b_0a_2 - a_3b_1 + b_4a_6 + a_7b_5 - a_4b_6 - b_7a_5, \\ a_0b_3 - b_2a_1 + b_0a_3 + a_2b_1 + b_4a_7 - a_6b_5 - a_4b_7 + b_6a_5, \\ \hline a_0b_4 + b_5a_1 + b_6a_2 + a_3b_7 + b_0a_4 - a_5b_1 - a_6b_2 - b_3a_7, \\ a_0b_5 - b_4a_1 - b_6a_3 + a_2b_7 + b_0a_5 + a_4b_1 + a_6b_3 - b_2a_7, \\ a_0b_6 - b_7a_1 - b_4a_2 + a_3b_5 + b_0a_6 + a_7b_1 + a_4b_2 - b_3a_5, \\ a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 + b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5). \end{array}$$

Особо отметим, что операцию умножения четырехмерных и, следовательно, восьмерных пифагоровых чисел можно определить иначе, например, так:

произведением пар $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ можно назвать пару

$$\mathbf{ab} = (a_0b_0 - \bar{b}_1a_1, a_1\bar{b}_0 + b_1a_0),$$

т.е. $\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 - \bar{b}_1a_1, a_1\bar{b}_0 + b_1a_0)$.

Особенностью и основным отличием пифагоровых чисел от гиперкомплексных чисел является то, что в качестве компонентов у них использованы целые числа, что определяет отсутствие обратных чисел и операции деления. Отсутствие деления, однако, позволяет получить не только 1, 2, 4, 8- мерные пифагоровы числа, но также $16, 32, \dots, 2^n$ - мерные числа. Это обеспечивает построение n - мерных евклидовых геометрий высокой размерности. Кроме того пифагоровы числа обеспечивают равенство квадратов чисел сумме квадратов целых чисел.

Совершенно обособленно стоит операция умножения пифагоровых чисел, определяемая в случае двумерных чисел величиной

$$\mathbf{ab} = (a_0b_0 + b_1a_1, a_1b_0 - b_1a_0).$$

Такое произведение уже в двумерном случае определяет не коммутативность операций. Результат умножения при этом (как показано ниже) имеет тоже значение, но компоненты другие. Необходимость введения новых понятий для пифагоровых чисел связано с изучением многомерных геометрических величин, в частности, многомерных евклидовых геометрий.

В качестве примеров рассмотрим пифагоровы двойки, четверки и восьмерки чисел. В двумерном варианте пифагоровых чисел мы имеем дело с парой координат и гипотенузой прямоугольных треугольников, т.е. с тройками Пифагора, определяемых уравнением

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

которое может быть представлено также в виде

$$(m^2+n^2)^2-((2m\ n)^2+(m^2-n^2)^2)=0,$$

или, полагая $n=m+k$, - в виде

$$(2m^2+2mk+k^2)^2-((2m^2+2mk)^2+(2mk+k^2)^2)=0.$$

Где числа x_1, x_2, t характеризуют соответственно катеты и гипотенузу прямоугольных треугольников, причем гипотенуза t играет вспомогательную роль и может быть не указана, так что рассматриваются пары или тройки чисел без участия гипотенуз в операциях. Обозначим через **a**, **b** и **c** значения пар пифагоровых чисел (катетов) в виде пар одномерных пифагоровых чисел

$$\mathbf{a}=(a_0,a_1), \mathbf{b}=(b_0,b_1), \mathbf{c}=(c_0,c_1).$$

Суммой и произведением пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ назовем пары

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0,a_1)+(b_0,b_1)=(a_0+b_0,a_1+b_1)$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0+b_0,a_1+b_1)$,

и $\mathbf{c}=\mathbf{ab}=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$,

т.е. $\mathbf{c}=\mathbf{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0+b_1a_1,a_0b_1+b_0a_1)=(c_0,c_1)$, или

$$\mathbf{c}=\mathbf{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0-b_1a_1,a_0b_1+b_0a_1)=(c_0,c_1).$$

Приведем примеры сумм и произведений двумерных пифагоровых чисел, записанных в виде пифагоровых троек.

Операция сложения

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0+b_0,a_1+b_1),$$

продемонстрирована в таблицах 1 и 2. В них осуществлено попарное сложение всех трех составляющих двумерных пифагоровых чисел. Для упрощения результата сложения взята полусумма попарных сложений и их полуразность. При совпадении слагаемых чисел **a** и **b** результат вычитания равен нулю.

Таблица 1.

	(20,21,29)+(12,35,37)=(7,16,28,3 3)	(24,7,25)+(12,35,37)=(14,18,21,3 1)
(4,3,5)+(12,5,13)=(1,8,4,9)		(24,7,25)+(20,21,29)=(7,22,14,27)
(4,3,5)+(8,15,17)=(2,6,9,11)	(12,5,13)+(8,15,17)=(1,2,2,3)	
(4,3,5)+(24,7,25)=(2,14,5,15)	(12,5,13)+(24,7,25)=(1,18,6,19)	(8,15,17)+(24,7,25)=(8,16,11,21)
(4,3,5)+(20,21,29)=(1,12,12,17)	(12,5,13)+(20,21,29)=(4,16,13,21)	(8,15,17)+(20,21,29)=(3,14,18,23)
(4,3,5)+(12,35,37)=(4,8,19,21)	(12,5,13)+(12,35,37)=(9,12,20,25)	(8,15,17)+(12,35,37)=(2,10,25,27)

Суммирование осуществляется совершенно аналогично операции суммирования вещественных чисел. Вместе с тем, как видно из таблиц 1 и 2 суммирование пифагоровых пар $(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(c_0,c_1,c_2)$ приводит к появлению пифагоровых троек чисел, поэтому пифагорову пару нужно рассматривать как пифагорову тройку чисел с нулевой первой координатой, а результат суммирования повышает раз-

мерность чисел. Суммирование последовательности пифагоровых троек осуществляется также попарно, причем принципиально важно иметь фиксированное положение четной и не четной координат пифагорового числа. В противном случае использование полусуммы и полуразности слагаемых недопустимо. Отметим, что операция суммирования приводит к евклидовому характеру результата т. е. квадрат значения результата определяется суммой квадратов теперь уже трех координат, а операция вычитания приводит к псевдоевклидовому характеру результата, т. е. квадрат значения результата определяется алгебраической суммой координат. Причем значение новой координаты равняется одной и той же величине $c_0 = \text{const}$.

Пифагоровы числа могут представлять собой пару пространственных координат (или катетов прямоугольных треугольников). Особым образом фигурирует в пифагоровых тройках гипотенуза прямоугольного треугольника t и, как отмечалось выше, может не указываться. Очевидно, что имеют место два типа произведения. Один из них - указанный тип представления пространственных координат (катетов)

$c = \mathbf{ab} = (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1)$, произведения $\mathbf{ab}$, а второй – отличается знаками слагаемых составляющих координаты $\mathbf{ab}$. Это дает для произведения двух величин два различных

$$c = \mathbf{ab} = (a_0 b_0 + b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 - b_0 a_1).$$

Операции умножения продемонстрированы в таблице 2 и 3. Умножение осуществляется в соответствии с этими операциями и результатом его является также двумерное пифагорово число. При умножении равных чисел в умножении второго типа координата c_1 обращается в нуль. Аналогично при умножении сопряженных чисел в умножении первого типа координата c_1 обращается в нуль. В этом случае координата c_0 характеризует значение t . При умножении отличающихся чисел $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ координата c_0 также характеризует значение t , однако, значение c_1 для произведений двух типов различно. Значение t совпадает с произведением

$$t = t_a * t_b.$$

Отметим, что данное представление операций сложения и умножения пифагоровых троек позволяет применить их к сложению и умножению не только чисел (таблица 4), но и их последовательностей. Некоторые из последовательностей чисел приведены в таблице 5. В этом случае осуществляется построчное суммирование или умножение пифагоровых троек с катетами x_1, x_2 и гипотенузой t .

Таблица 2.

a_i	b_i	$c_i=(a_i+b_i)/2$	$d_i=(b_i-a_i)/2$
120	119	169	0
20	21	29	0
4	3	5	0
0	1	1	0
0	-1	1	0
-4	-3	5	0
-20	-21	29	0
-120	-119	169	0
a_i	b_i	$c_i=(a_i+b_i)/2$	$d_i=(b_i-a_i)/2$
120	119	169	1
20	21	29	1
4	3	5	1
0	1	1	1
0	-1	1	1
-4	-3	5	1
-20	-21	29	1
-120	-119	169	1
a_i	b_i	$c_i=(a_i+b_i)/2$	$d_i=(b_i-a_i)/2$
120	119	169	1
20	21	29	1
4	3	5	1
0	1	1	1
0	-1	1	1
-4	-3	5	1
-20	-21	29	1
-120	-119	169	1
a_i	b_i	$c_i=(a_i+b_i)/2$	$d_i=(b_i-a_i)/2$
120	119	169	2
20	21	29	2
4	3	5	2
0	1	1	2
0	-1	1	2
-4	-3	5	2
-20	-21	29	2
-120	-119	169	2

Таблица 3.

$a=(a_0, a_1)$	$b=(b_0, b_1)$	$ab=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$	$ab=(a_0b_0+b_1a_1, a_0b_1-b_0a_1)$
119	120	169	28561
21	20	29	841
3	4	5	25
1	0	1	1
-1	0	1	1
-3	-4	5	25
-21	-20	29	841
-119	-120	169	28561
$a=(a_0, a_1)$	$b=(b_0, b_1)$	$ab=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$	$ab=(a_0b_0+b_1a_1, a_0b_1-b_0a_1)$
119	120	169	166465
21	20	29	4899
3	4	5	143
1	0	1	3
-1	0	1	-1
-3	-4	5	3
-21	-20	29	143
-119	-120	169	4899
$a=(a_0, a_1)$	$b=(b_0, b_1)$	$ab=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$	$ab=(a_0b_0+b_1a_1, a_0b_1-b_0a_1)$
119	120	169	166463
21	20	29	4899
3	4	5	143
1	0	1	3
-1	0	1	-1
-3	-4	5	3
-21	-20	29	143
-119	-120	169	4899
$a=(a_0, a_1)$	$b=(b_0, b_1)$	$ab=(a_0b_0-b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)$	$ab=(a_0b_0+b_1a_1, a_0b_1-b_0a_1)$
119	120	169	970221
21	20	29	28557
3	4	5	837
1	0	1	21
-1	0	1	-3
-3	-4	5	-3
-21	-20	29	21
-119	-120	169	837

Таблица 4.

составное число	произведение чисел	пифагорова тройка	соотношение Пифагора
65=5*13=(4,3,5)*(12,5,13)	(4*12-5*3, 4*5+12*3)	(33, 56, 65)	$65^2=33^2+56^2$
	(4*12+5*3, 4*5-12*3)	(63, -16, 65)	$65^2=63^2+16^2$
85=5*17=(4,3,5)*(8,15,17)	(4*8-15*3, 4*15+8*3)	(-13, 84, 85)	$85^2=13^2+84^2$
	(4*8+15*3, 4*15-8*3)	(77, 36, 85)	$85^2=77^2+36^2$
365=5*73=(4,3,5)*(48,55,73)	(4*48-55*3, 4*55+48*3)	(27, 364, 365)	$365^2=27^2+364^2$
	(4*48+55*3, 4*55-48*3)	(357, 76, 365)	$365^2=357^2+76^2$
2117=29*73=(-20,-21,29)*(-48,-55,73)	((-20)*(-48)-(-55)*(-21), (-20)*(-55)+(-48)*(-21))	(-195, 2108, 2117)	$2117^2=195^2+2108^2$
	((-20)*(-48)+(-55)*(-21), (-20)*(-55)-(-48)*(-21))	(2115, -92, 2117)	$2117^2=2115^2+92^2$

Таблица 5.

x ₁	x ₂	t	x ₁	x ₂	t	x ₁	x ₂	t	x ₁	x ₂	t	x ₁	x ₂	t
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	2	2	39	40	56	124	126	177	154	152	217	375	370	527
0	1	9	6	3	5	8	5	7	8	5	3	2	5	3
4	3	5	72	65	97	224	207	305	252	275	373	616	663	905
0	1	1	8	15	17	28	45	53	56	33	65	132	85	157
0	-1	1	4	-3	5	12	-5	13	-8	15	17	-12	35	37
-4	-3	5	-12	-5	13	-24	-7	25	-12	-35	37	-16	-63	65
-	-													
2	2	2												
0	1	9	-48	-55	73	-88	-105	137	-156	-133	205	-272	-225	353
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Для последовательностей чисел, характеризующих гипотенузы прямоугольных треугольников использовано рекуррентное соотношение

$$t_{n+1}=6t_n-t_{n-1},$$

а для последовательностей чисел, характеризующих катеты прямоугольных треугольников – соотношение

$$t_{n+1}=5(t_n+t_{n-1})-t_{n-2},$$

Таким образом, сложение и умножение пифагоровых троек осуществляются весьма своеобразными способами. При этом выполняется соотношение

$$t^2-(x_1^2+x_2^2)=0.$$

Это уравнение соответствует двумерному уравнению Пифагора. Приведенное уравнение, однако, определяет частный случай соотношения для квадрата интервала трехмерного пространства-времени, используемого в теории поля и частной теории относительности

$$t^2-(x_1^2+x_2^2)=\pm x_0^2.$$

При этом один из знаков $x_0=const$ соответствует времени подобному, а другой пространственно подобному случаю. Если $x_0=0$, то это соответствует уравнению «светового конуса» [2].

Естественно сразу возникает вопрос о свойствах чисел, характеризующих четырехмерное пространство-время. В двумерном варианте пифагоровых чисел мы имеем дело с парами (тройками чисел Пифагора). В трехмерном варианте пифагоровых чисел необходимо иметь дело уже с четверками чисел. Причем операция сложения добавляет одну координату $a_0=const$, так что, можно писать

$$\mathbf{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3,t),$$

$$\text{или еще проще } \mathbf{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)$$

Эти числа, рассматриваемые как четверки одномерных пифагоровых чисел, можно представить умножением пар двумерных пифагоровых чисел в виде

$$\mathbf{a}=(a_0,a_1), \mathbf{b}=(b_0,b_1), \mathbf{c}=(c_0,c_1).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1)= \\ &= ((a_0,a_1)(b_0,b_1)-(b_2,b_3)(\bar{a}_2,-a_3), (\bar{a}_0,-a_1)(b_2,b_3)+(b_0,b_1)(a_2,a_3))= \\ &= ((a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1)- (b_2\bar{a}_2+a_3b_3,-b_2a_3+\bar{a}_2b_3), \\ &(\bar{a}_0b_2+b_3a_1, \bar{a}_0b_3-b_2a_1)+(b_0a_2-a_3\bar{b}_1, \bar{b}_0a_3+a_2b_1))= \\ &= ((a_0b_0-b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1)- (b_2\bar{a}_2+a_3b_3,-b_2a_3+\bar{a}_2b_3), \\ &(\bar{a}_0b_2+b_3a_1, \bar{a}_0b_3-b_2a_1)+(b_0a_2-a_3\bar{b}_1, \bar{b}_0a_3+a_2b_1)), \\ \mathbf{c} &= (a_0b_0-b_1\bar{a}_1-b_2\bar{a}_2-a_3b_3, \bar{a}_0b_1+b_0a_1+b_2a_3-\bar{a}_2b_3, \\ &\bar{a}_0b_2+b_3a_1+b_0a_2-a_3\bar{b}_1, \bar{a}_0b_3-b_2a_1+\bar{b}_0a_3+a_2b_1), \\ \text{т.е. } \mathbf{c} &= (a_0b_0-b_1\bar{a}_1-b_2\bar{a}_2-a_3b_3, \\ &\bar{a}_0b_1+b_0a_1+b_2a_3-\bar{a}_2b_3, \end{aligned}$$

$$\bar{a}_0 b_2 + b_3 a_1 + b_0 a_2 - a_3 \bar{b}_1, \\ \bar{a}_0 b_3 - b_2 a_1 + \bar{b}_0 a_3 + a_2 b_1) = (c_0, c_1, c_2, c_3).$$

Для одномерных пифагоровых чисел $\bar{a} = a$ и, следовательно,

$$c = (a_0 b_0 - b_1 a_1 - b_2 a_2 - a_3 b_3, \\ a_0 b_1 + b_0 a_1 + b_2 a_3 - a_2 b_3, \\ a_0 b_2 + b_3 a_1 + b_0 a_2 - a_3 b_1, \\ a_0 b_3 - b_2 a_1 + b_0 a_3 + a_2 b_1) = (c_0, c_1, c_2, c_3),$$

Аналогично для произведения второго типа имеем

$$c = (a_0 b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + a_3 b_3, \\ a_0 b_1 - b_0 a_1 + b_2 a_3 - a_2 b_3, \\ a_0 b_2 + b_3 a_1 - b_0 a_2 - a_3 b_1, \\ a_0 b_3 - b_2 a_1 - b_0 a_3 + a_2 b_1) = (c_0, c_1, c_2, c_3).$$

Таким образом, определены операции умножения четырехмерных пифагоровых чисел. Пример выполнения операции умножения для последовательностей пифагоровых чисел приведен в таблице 6.

Таблица 6.

a_0	a_1	a_2	a_3	a	b_0	b_1	b_2	b_3	b
7	896	1130	1558	2123	1	29	75	97	126
7	154	194	268	365	1	5	13	17	22
7	28	34	50	67	1	1	3	5	6
7	14	10	32	37	1	1	5	13	14
7	56	26	142	155	1	5	27	73	78
c_0	c_1	c_2	c_3	c	d_0	d_1	d_2	d_3	d
-					26186	-7933	-	33551	2674
26185		-		26749	7		42335		98
3	-6141	40075	36667	8					
-7841	3	-993	1419	8030	7855	-305	-1381	883	8030
-373	55	-35	135	402	387	-1	-103	35	402
-473	-9	-105	183	518	487	-37	-125	119	518
					11355	-1957	-3215	1751	1209
-11341	-1845	-3163	2035	12090					0

В этой таблице построчно умножаются пифагоровы четверки $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$.

Результатом умножения являются также пифагоровы четверки $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ и $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, d_3)$,

причем $\mathbf{c}$ относится к умножению первого типа, а $\mathbf{d}$ – к умножению второго типа. Очевидно, что все координаты чисел $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ различны, а результат совпадает т.е. $\mathbf{c} = \mathbf{d}$.

При этом выполняются соотношения

$$c^2 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \pm c_0^2, \\ d^2 - (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = \pm d_0^2$$

а при $c_0=d_0=0$ эти уравнения обращаются в трехмерное уравнение Пифагора. Приведенное соотношение определяет квадрат интервала четырехмерного пространства-времени, используемого в теории поля и частной теории относительности. При этом один из знаков при c или d соответствует времени подобному, а другой пространственно подобному случаю. Если $c_0=d_0=0$, то это соответствует уравнению «светового конуса» [2].

Естественно сразу возникает вопрос о свойствах чисел, характеризующих восьмимерное пространство-время [3]. В двумерном варианте пифагоровых чисел мы имеем дело с парами (с учетом t -тройками чисел Пифагора). В четырехмерном варианте пифагоровых чисел необходимо иметь дело уже с четверками (пятерками чисел Пифагора), а в восьмимерном варианте – с восьмерками (девятками чисел Пифагора)

$$\mathbf{a}=(a_0, a_1, \dots, a_7, t),$$

$$\text{или еще проще } \mathbf{a}=(a_0, a_1, \dots, a_7).$$

Эти числа, рассматриваемые как восьмерки одномерных пифагоровых чисел, можно представить умножением пар четырехмерных пифагоровых чисел в виде

$$\mathbf{a}=(a_0, a_1), \mathbf{b}=(b_0, b_1), \mathbf{c}=(c_0, c_1).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1) = \\ &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1) - (b_2, b_3)(\bar{a}_2, -a_3), (\bar{a}_0, -a_1)(b_2, b_3) + (b_0, b_1)(a_2, a_3)) = \\ &= ((a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1) - (b_2 \bar{a}_2 + a_3 b_3, -b_2 a_3 + \bar{a}_2 b_3), \\ &(\bar{a}_0 b_2 + b_3 a_1, \bar{a}_0 b_3 - b_2 a_1) + (b_0 a_2 - a_3 \bar{b}_1, \bar{b}_0 a_3 + a_2 b_1)) = \\ &= ((a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1) - (b_2 \bar{a}_2 + a_3 b_3, -b_2 a_3 + \bar{a}_2 b_3), \\ &(\bar{a}_0 b_2 + b_3 a_1, \bar{a}_0 b_3 - b_2 a_1) + (b_0 a_2 - a_3 \bar{b}_1, \bar{b}_0 a_3 + a_2 b_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1 - b_2 \bar{a}_2 - a_3 b_3, \bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1 + b_2 a_3 - \bar{a}_2 b_3, \\ &\bar{a}_0 b_2 + b_3 a_1 + b_0 a_2 - a_3 \bar{b}_1, \bar{a}_0 b_3 - b_2 a_1 + \bar{b}_0 a_3 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (a_0 b_0 - b_1 \bar{a}_1 - b_2 \bar{a}_2 - a_3 b_3, \\ &\bar{a}_0 b_1 + b_0 a_1 + b_2 a_3 - \bar{a}_2 b_3, \\ &\bar{a}_0 b_2 + b_3 a_1 + b_0 a_2 - a_3 \bar{b}_1, \\ &\bar{a}_0 b_3 - b_2 a_1 + \bar{b}_0 a_3 + a_2 b_1) = (c_0, c_1, c_2, c_3). \end{aligned}$$

Для четырехмерных пифагоровых чисел $\bar{a} = (\bar{a}_0, \dots, -a_1)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} c = & a_0b_0 - b_1a_1 - b_2a_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - b_5a_5 - b_6a_6 - a_7b_7, \\ & a_0b_1 + b_0a_1 + b_2a_3 - a_2b_3 + b_4a_5 - a_4b_5 + a_6b_7 - b_6a_7, \\ & a_0b_2 + b_3a_1 + b_0a_2 - a_3b_1 + a_6b_4 + b_7a_5 - b_4a_6 + a_7b_5, \\ & a_0b_3 - b_2a_1 + b_0a_3 + a_2b_3 + a_4b_7 - b_6a_5 - b_4a_7 + a_6b_5, \\ & a_0b_4 + b_5a_1 + b_6a_2 + a_3b_7 + b_0a_4 - a_5b_1 - a_6b_2 - b_3a_7, \\ & a_0b_5 - b_4a_1 - b_6a_3 + a_2b_7 + b_0a_5 + a_4b_1 + a_6b_3 - b_2a_7, \\ & a_0b_6 - b_7a_1 - b_4a_2 + a_3b_5 + b_0a_6 + a_7b_1 + a_4b_2 - b_3a_5, \\ & a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 + b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5. \end{aligned}$$

Аналогично для произведения второго типа имеем

$$\begin{aligned} c = & a_0b_0 + b_1a_1 + b_2a_2 + a_3b_3 + b_4a_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + b_7a_7 \\ & a_0b_1 - b_0a_1 + b_2a_3 - a_2b_3 + b_4a_5 - a_4b_5 + a_6b_7 - b_6a_7 \\ & a_0b_2 + b_3a_1 - b_0a_2 - a_3b_1 + b_4a_6 + a_7b_5 - a_4b_6 - b_7a_5 \\ & a_0b_3 - b_2a_1 - b_0a_3 + a_2b_3 + a_4b_7 - b_6a_5 - b_4a_7 + a_6b_5, \\ & a_0b_4 + b_5a_1 + b_6a_2 + a_3b_7 - b_0a_4 - a_5b_1 - a_6b_2 - b_3a_7, \\ & a_0b_5 - b_4a_1 - b_6a_3 + a_2b_7 - b_0a_5 + a_4b_1 + a_6b_3 - b_2a_7, \\ & a_0b_6 - b_7a_1 - b_4a_2 + a_3b_5 - b_0a_6 + a_7b_1 + a_4b_2 - b_3a_5, \\ & a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 - b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5. \end{aligned}$$

Таким образом, определены операции умножения восьмимерных пифагоровых чисел. Пример выполнения операции умножения для последовательностей восьмимерных пифагоровых чисел приведен в таблице 7.

В этой таблице построчно умножаются пифагоровы восьмерки $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_7)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_7)$.

Результатом умножения являются пифагоровы восьмерки

$$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_7) \text{ и } \mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_7),$$

причем $\mathbf{c}$ относится к умножению первого типа, а $\mathbf{d}$ – к умножению второго типа. Очевидно, что все координаты чисел $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ различны, а результат совпадает, т.е. $\mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{ab}$.

Таблица 7.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a
1	29	29	29	29	29	99	227	256
1	5	5	5	5	5	17	39	44
1	1	1	1	1	1	3	7	8
1	1	1	1	1	1	1	3	4
1	5	5	5	5	5	3	11	16

b ₀	b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅	b ₆	b ₇	b
1	-5	-5	-5	-5	-5	-17	-39	44
1	-1	-1	-1	-1	-1	-3	-7	8
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-3	4
1	-5	-5	-5	-5	-5	-3	-11	16
1	-29	-29	-29	-29	-29	-17	-63	92
c ₀	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c=ab
11262	22	18	22	30	26	78	190	11264
350	2	-2	2	10	6	10	34	352
30	-2	-6	-2	6	2	-2	6	32
62	-6	-10	-6	2	-2	-6	-6	64
1470	-26	-30	-26	-18	-22	-18	-50	1472
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	d ₅	d ₆	d ₇	d=ab
-11260	-36	-40	-36	-28	-32	-120	-264	11264
-348	-8	-12	-8	0	-4	-24	-44	352
-28	-4	-8	-4	4	0	-8	-8	32
-60	-8	-12	-8	0	-4	-8	-12	64
-1468	-36	-40	-36	-28	-32	-24	-72	1472

При этом выполняется соотношение

$$c^2 - (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_7^2) = \pm c_0^2,$$

а при $c_0=0$ это уравнение обращается в восьмимерное уравнение Пифагора. Приведенное соотношение определяет квадрат интервала восьмимерного пространства-времени, используемого в теории поля и частной теории относительности. При этом один из знаков соответствует времени подобному, а другой пространственно подобному случаю. Если $c_0=0$, то это соответствует уравнению «светового конуса» [2].

Четырехмерное пространство – время является частным случаем восьмимерного пространства – времени, которое получается из него пренебрежением четырьмя пространственными координатами. Аналогичным образом, четырехмерные пифагоровы числа являются частным случаем восьмимерных пифагоровых чисел. Двумерные пифагоровы числа являются частным случаем четырехмерных и восьмимерных пифагоровых чисел. При этом также пренебрегаются значения четырех, либо шести координат.

Литература

1. Коротков А. В. Элементы псевдоевклидова трех- и семи- мерного векторных исчислений. – Новочеркасск: Набла, 2004. – 79 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля. – М: Наука, 1988. – 512 с.

МНОГОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ПОЛЕЙ СРАВНЕНИЙ ПО MOD=2

Алгебра одномерных полей сравнений по mod=2

Алгеброй одномерных полей сравнений по mod=2 назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1)$, $\mathbf{b}=(b_1)$, $\mathbf{c}=(c_1)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения операция умножения

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Для всех $\mathbf{a}=(a_1)$, $\mathbf{b}=(b_1)$, $\mathbf{c}=(c_1)$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$(a_1)+(b_1)=(a_1+b_1);$$

$$(a_1)\cdot(b_1)=(a_1\cdot b_1);$$

2) (коммутативные законы)

$$(a_1)+(b_1)=(b_1)+(a_1), \text{ т.е. } \mathbf{a+b=b+a};$$

$$(a_1)\cdot(b_1)=(b_1)\cdot(a_1), \text{ т.е. } \mathbf{a\cdot b=b\cdot a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$(a_1)+((b_1)+(c_1))=((a_1)+(b_1))+(c_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c};$$

$$(a_1)\cdot((b_1)\cdot(c_1))=((a_1)\cdot(b_1))\cdot(c_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$(a_1)\cdot((b_1)+(c_1))=(a_1)\cdot(b_1)+(a_1)\cdot(c_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)};$$

5) (свойства идемпотентности)

$$(a_1)+(a_1)=0, \text{ т.е. } \mathbf{a+a=0},$$

$$(a_1)\cdot(a_1)=a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a\cdot a=a};$$

6) (свойства совместимости) – (не используются)

7) S содержит элементы $1=(1)$, $0=(0)$ такие, что для всякого элемента $a=(a_1)$ из S

$$(a_1)+(0)=(a_1), \text{ т.е. } a+0=a,$$

$$(a_1)\cdot(1)=(a_1), \text{ т.е. } a\cdot 1=a,$$

$$(a_1)\cdot(0)=(0), \text{ т.е. } a\cdot 0=0,$$

$$(a_1)+(1)=(\bar{a}_1), \text{ т.е. } a+1=\bar{a};$$

8) для каждого элемента $a=(a_1)$ класс S содержит элемент $\bar{a}=(\bar{a}_1)$ (дополнение элемента $a=(a_1)$) такой, что

$$(a_1)+(\bar{a}_1)=1, \text{ т.е. } a+\bar{a}=1,$$

$$(a_1)\cdot(\bar{a}_1)=0, \text{ т.е. } a\cdot\bar{a}=0.$$

В алгебре одномерных полей сравнений имеют место:

9) законы поглощения

$$(a_1)\cdot((a_1)+(b_1))=(a_1)+(a_1)\cdot(b_1)=(a_1)\cdot((1)+(b_1))=(a_1)\cdot(\bar{b}_1), \text{ т.е. } a\cdot(a+b)=a\cdot\bar{b},$$

$$(a_1)+((a_1)\cdot(b_1))=(a_1)\cdot((1)+(b_1))=(a_1)\cdot(\bar{b}_1), \text{ т.е. } a+a\cdot b=a\cdot\bar{b};$$

10) двойственность, (законы де Моргана)

$$\overline{(a_1)+(b_1)}=(\bar{a}_1)\cdot(\bar{b}_1)+(a_1)\cdot(b_1), \text{ т.е. } \overline{a+b}=\bar{a}\cdot\bar{b}+a\cdot b,$$

$$\overline{(a_1)\cdot(b_1)}=(\bar{a}_1)+(a_1)\cdot(\bar{b}_1), \text{ т.е. } \overline{a\cdot b}=\bar{a}+a\cdot\bar{b};$$

$$11) (\bar{\bar{a}}_1)=(a_1), \text{ т.е. } \bar{\bar{a}}=a,$$

$$(\bar{1})=(0), \text{ т.е. } \bar{1}=0,$$

$$(\bar{0})=(1), \text{ т.е. } \bar{0}=1;$$

$$12) (a_1)\cdot(\bar{b}_1)+(\bar{a}_1)\cdot(b_1)=(a_1)+(b_1), \text{ т.е. } a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b=a+b,$$

$$(a_1)\cdot((\bar{a}_1)+(b_1))=(a_1)\cdot(b_1), \text{ т.е. } a\cdot(\bar{a}+b)=a\cdot b.$$

Приведем таблицу истинности для полей вычетов по модулю 2. В таблице 1 две переменные a и b с двумя состояниями 0 и 1 образуют четыре комбинации состояний и зависящие от них 16 функций двух переменных. Выполнение операций подтверждается таблицей истинности.

Алгебра двумерных полей сравнений по mod=2

Алгеброй двумерных полей сравнений по mod=2 назовем класс S объектов $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2)$, $c=(c_1, c_2)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2)$, $c=(c_1, c_2)$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a};$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)),$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c};$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2))$$

$$((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) = ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2)),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c});$$

5) (свойства идемпотентности)

$$(a_1, a_2) + (a_1, a_2) = (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

6) (свойства совместимости) – (не используются);

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0)$ такие, что для всякого элемента

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ из S

$$(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$

$$(a_1, a_2) \cdot (1, 1) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a},$$

$$(a_1, a_2) \cdot (0, 0) = (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$(a_1, a_2) + (1, 1) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \bar{\mathbf{a}};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$) такой, что

$$(a_1, a_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2) = (1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1},$$

$$(a_1, a_2) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2) = (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой алгебре двумерных полей сравнений по $\text{mod}=2$ имеют место:

9) (законы поглощения)

$$(a_1, a_2) \cdot ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1 \cdot \bar{b}_1, a_2 \cdot \bar{b}_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$(a_1, a_2) + ((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2)) = (a_1 \cdot \bar{b}_1, a_2 \cdot \bar{b}_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)} = \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2)} =$$

$$= (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2) = \overline{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)},$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)} = \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)} =$$

$$= (\bar{a}_1 + \bar{a}_1 \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \quad \overline{\overline{(a_1, a_2)}} = \overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)} = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$(\overline{1}, \overline{1}) = (\bar{1}, \bar{1}) = (0, 0), \text{ т.е. } \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0},$$

$$(\overline{0}, \overline{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) = (1, 1), \text{ т.е. } \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1};$$

$$12) \quad (a_1, a_2)(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2)(b_1, b_2) = (a_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_1 b_1, a_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 b_2) =$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (b_1, b_2)) = (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2)) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Алгебра n-мерных полей сравнений по mod=2

Алгеброй n-мерных полей сравнений по mod=2 назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n), \mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n), \mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots$ из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2, \dots, b_n \cdot a_n),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;

3) (ассоциативные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n))$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) + (c_1, c_2, \dots, c_n) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n),$$

т.е. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) =$$

$$(a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n))$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) =$$

$$((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$;

4) (дистрибутивные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2), \dots, a_n \cdot (b_n + c_n))$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$;

5) (свойства идемпотентности)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

6) (свойства совместимости) – (не используются);

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из S

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (1, 1, \dots, 1) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (1, 1, \dots, 1) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \bar{\mathbf{a}};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) такой, что

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2, \dots, a_n + \bar{a}_n) = (1, 1, \dots, 1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2, \dots, a_n \cdot \bar{a}_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$.

В каждой алгебре n-мерных полей сравнений по mod=2 имеют место:

9) (законы поглощения)

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \\ & = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (a_n + b_n)) = (a_1 \bar{b}_1, a_2 \bar{b}_2, \dots, a_n \bar{b}_n), \\ & \text{т.е. } \mathbf{a \cdot (a+b) = a \cdot \bar{b}}, \\ & (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \\ & = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2), \dots, a_n + (a_n \cdot b_n)) = (a_1 \bar{b}_1, a_2 \bar{b}_2, \dots, a_n \bar{b}_n), \\ & \text{т.е. } \mathbf{a + a \cdot b = a \cdot \bar{b}}; \end{aligned}$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\begin{aligned} & \overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)} = \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)} = \\ & = (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 + a_1 \cdot b_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 + a_2 \cdot b_2, \dots, \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n + a_n \cdot b_n) = \\ & = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ & \text{т.е. } \mathbf{\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b}, \\ & \overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)} = \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)} = \\ & = (\bar{a}_1 + a_1 \bar{b}_1, \bar{a}_2 + a_2 \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_n + a_n \bar{b}_n) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n), \\ & \text{т.е. } \mathbf{\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}}; \end{aligned}$$

$$11) (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\overline{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n}) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{\bar{\bar{a}} = a},$$

$$(1, 1, \dots, 1) = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \mathbf{\bar{1} = 0},$$

$$(0, 0, \dots, 0) = (\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}) = (1, 1, \dots, 1), \text{ т.е. } \mathbf{\bar{0} = 1};$$

$$\begin{aligned} 12) & (a_1, a_2, \dots, a_n) (\bar{b}_1, \bar{b}_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ & = (a_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1, a_2 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \cdot b_2, \dots, a_n \bar{b}_n + \bar{a}_n \cdot b_n) = \\ & = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = a + b},$$

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \\ & = (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (\bar{a}_n + b_n)) = \\ & = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2, \dots, a_n \cdot \bar{a}_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a \cdot (a + b) = a \cdot b}.$$

Таким образом, свойства алгебр многомерных полей сравнений по mod=2 повторяют свойства алгебры одномерных полей сравнений по mod=2. Вместе с тем эти алгебры создают прецедент по отношению к булевым алгебрам в связи с изменением операции логического сложения, а, следовательно, требуют расширения понятий основ кибернетики, алгебры классов, теории множеств и топологии по отношению к операциям логического сложения (объединения), логического умножения (пересечения) и взятия дополнения. То же самое можно сказать и о сферах технического, физического, биологического — и других применениях отмеченных алгебр.

Таблица 1.

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
$a \cdot b$	0	0	0	1
$a \cdot \bar{b}$	0	0	1	0
a	0	0	1	1
$\bar{a} \cdot b$	0	1	0	0
b	0	1	0	1
$a+b$	0	1	1	0
$\overline{\overline{a \cdot b}}$	0	1	1	1
$\overline{a \cdot b}$	1	0	0	0
$\overline{a + b}$	1	0	0	1
$\bar{b}$	1	0	1	0
$\overline{a \cdot b}$	1	0	1	1
$\bar{a}$	1	1	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	0	1
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	0
1	1	1	1	1
$a+a$	0	0	0	0
$a \cdot a$	0	0	1	1
$a+1$	1	1	0	0
$a+\bar{a}$	1	1	1	1
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0
$a \cdot (a+b)$	0	0	0	1
$a+a \cdot b$	0	0	0	1
$\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b$	1	0	0	1
$\bar{a} + a \cdot \bar{b}$	1	1	1	0
$a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$	0	1	1	0
$\bar{a} + b$	1	0	0	1
$a \cdot (\bar{a} + b)$	0	0	0	1

Литература

1. Коротков А. В. Не булевы алгебры логики// Информационные системы и технологии. Теория и практика: сб. науч. тр. под ред. А. Н. Березы.— Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. — 188 с.— (с23-29).

МНОГОЗНАЧНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Пусть m – данное натуральное число. Все целые числа по отношению к числу m естественно разбиваются [1] на m классов, если отнести к одному классу числа, дающие один и тот же остаток при делении на m . Так, если $m=2$, целые числа разбиваются на классы четных и нечетных чисел. Если $m=4$, классы в этом смысле составляют числа вида $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ при целых k и т. д. Числа, относящиеся к одному классу, называются сравнимыми, и изучение свойств классов носит название теории сравнений. Переходим к определениям относящихся сюда понятий.

1. Определение и простейшие свойства. Пусть m – натуральное число. Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m , если их разность $a-b$ делится на m . Высказывание « a и b сравнимы по модулю m » записывается в виде $a \equiv b \pmod{m}$.

Предложение 1. $a \equiv a \pmod{m}$; далее, если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$; если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

Именно эти свойства сравнений позволяют заключить, что каждое целое число попадает в один и только один класс попарно сравнимых между собой целых чисел. Эти классы называются классами вычетов по модулю m или просто классами по модулю m .

Предложение 2. Каждое целое число сравнимо по модулю m с одним и только одним из чисел ряда $0, 1, \dots, m-1$.

Каждый класс по модулю m действительно состоит из чисел, дающих один и тот же остаток при делении на m .

Любая совокупность чисел, взятых по одному из каждого класса по модулю m , называется полной системой вычетов по модулю m . Например, числа $0, 1, \dots, m-1$ образуют полную систему вычетов.

Предложение 3. Если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$, то $a_1 \pm b_1 \equiv a_2 \pm b_2 \pmod{m}$.

Предложение 4. Если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$, то $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{m}$.

В частности, если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и c – любое целое число, то $a_1 c \equiv a_2 c \pmod{m}$.

Предложение 5. Если $ca_1 \equiv ca_2 \pmod{m}$ и число c взаимно просто с m , то $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$.

Таким образом, обе части сравнения можно сократить на множитель, взаимно простой с модулем. Без предположения о взаимной простоте это, вообще говоря, делать нельзя. Так, $2 \equiv 6 \pmod{4}$, но $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$.

2. Действия над классами. Пусть $m=4$. Мы можем записать «суммы», «разности» и «произведения», руководствуясь сложением, вычитанием и умножением чисел (все равно каких), взятых из соответствующих классов.

То же самое имеет место при любом m . Для того чтобы указать класс, к которому принадлежит сумма, разность или произведение двух чисел, нам достаточно знать классы, к которым эти числа принадлежат, а как они выбраны внутри классов – на результате не сказывается. Это обстоятельство делает естественными следующие определения.

Суммой двух классов по модулю m называется класс по модулю m , к которому принадлежит сумма каких-либо чисел из слугаемых классов.

Произведением двух классов по модулю m называется класс по модулю m , к которому принадлежит произведение каких-либо чисел из перемножаемых классов.

В силу предложений 3, 4 эти определения корректны – какие бы числа из двух данных классов мы ни выбрали, их сумма и их произведение будут принадлежать вполне определенным классам, не зависящим от выбора чисел внутри данных классов.

Пример. Приведем таблицы сложения и умножения для классов по модулю 2, 3 и 4.

Таблица1

$m=2$	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица2

$m=2$	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица 3

$m=3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Таблица4

$m=3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Таблица5

$m=4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Таблица6

$m=4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Символы 0, 1, 2, 3 в табл. 1-6 обозначают классы по модулю 2, 3 и 4, которым принадлежат числа 0, 1, 2, 3. Такими обозначениями мы будем пользоваться и впредь – символ a будет обозначать класс по модулю (который предполагается заданным), содержащий число a .

Отметим некоторые очевидные свойства действий над классами по модулю.

$$1. (a+b)+c = a+(b+c) \text{ (ассоциативность сложения).}$$

$$2. a+b = b+a \text{ (коммутативность сложения).}$$

Класс 0 играет роль нуля при сложении: $a+0=a$ при любом a .

Класс $-a$ играет роль класса, противоположного классу a , именно, $a + (-a) = 0$.

$$a(b+c) = ab+ac.$$

$$5'. (b+c)a = ba+ca \text{ (дистрибутивность).}$$

$$a(bc) = (ab)c \text{ (ассоциативность умножения).}$$

$$ab = ba \text{ (коммутативность умножения).}$$

Свойства 3 и 4 очевидны. Свойства 2, 5, 6, 7 доказываются точно так же, как свойство 1, посредством перехода от классов к любым числам из этих классов, для которых соответствующие свойства действий имеют место.

8. Класс 1 играет роль единицы при умножении классов, именно, $a1=a$ при любом a .

3. Приведенная система вычетов и примитивные классы.

Предложение 6. Если $d = \text{н. о. д. } (a, m)$ и $a_1 = a \pmod{m}$, то $\text{н. о. д. } (a_1, m) = d$.

В частности, если одно из чисел класса по модулю m взаимно просто с m , то и все числа этого класса взаимно просты с m .

Классы, состоящие из чисел, взаимно простых с модулем, называются примитивными классами. Для любого модуля примитивные классы существуют; такими будут, в частности, классы 1 и $m-1$.

Предложение 7. Для того чтобы сравнение $ax=1 \pmod{m}$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы a было взаимно просто с m .

Предложение 7 можно в терминах классов сформулировать так: для того чтобы класс a имел обратный a^{-1} , т. е. такой, что $a a^{-1} = 1$, необходимо и достаточно, чтобы класс a был примитивным.

Если модуль есть простое число p , то все классы, кроме нулевого, примитивны.

Предложение 8. Сравнение $ax = b \pmod{m}$, если a взаимно просто с m , имеет единственный класс решений.

Если модуль m есть простое число, то все классы, кроме нулевого, примитивны, так что в этом случае возможно деление на любой класс, кроме нулевого.

Классы по модулю m образуют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Оно называется кольцом вычетов по модулю m . Если m -составное число, то это кольцо не будет областью целостности. Если же m -простое число, то кольцо вычетов по нему есть не только область целостности, но даже поле. В частности кольцо вычетов по модулю 2, состоящее из двух элементов 0 и 1 (классы четных и нечетных чисел), является полем. Полем также является кольцо вычетов по модулю 3.

Приведем таблицы истинности для колец вычетов по модулю 2, 3 и 4 (таблицы 7, 8, 9). В таблице 7 две переменные **a** и **b** с двумя состояниями образуют $4=2^2$ комбинации состояний и зависящие от них $16=2^4$ функций. В таблице 8 две переменные **a** и **b** с тремя состояниями образуют $9=3^2$ комбинаций состояний и зависящие от них $19683=3^9$ функций. В таблице 9 две переменные **a** и **b** с четырьмя состояниями образуют $16=4^2$ комбинаций состояний и зависящее от них $4\,294\,967\,296=4^{16}$ функций.

Таблица истинности для кольца вычетов по модулю 2 существенно отличается от таблицы истинности для булевой алгебры логики. Она двухзначна. Трехзначная алгебра логики для кольца вычетов по модулю 3, а также четырехзначная алгебра логики для кольца вычетов по модулю 4 включают равное число функций и по этой причине совершенно не используются. Вместе с тем, они вполне применимы для построения трехзначных и четырехзначных логических устройств. Приведенные выше законы выполнения операций применимы для каждой из трех систем построения логических устройств.

Таблица 7

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
$a \cdot b$	0	0	0	1
$a \cdot b^+$	0	0	1	0
a	0	0	1	1
$a^+ \cdot b$	0	1	0	0
b	0	1	0	1
$a+b$	0	1	1	0
$(a^+ \cdot b^+)^+$	0	1	1	1
$a^+ \cdot b^+$	1	0	0	0
$(a+b)^+$	1	0	0	1
b^+	1	0	1	0
$(a^+ \cdot b)^+$	1	0	1	1
a^+	1	1	0	0
$(a \cdot b^+)^+$	1	1	0	1
$(a \cdot b)^+$	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Таблица 8

a	0	0	0	1	1	1	2	2	2
b	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	2
6	0	0	0	0	0	0	0	2	0
7	0	0	0	0	0	0	0	2	1
8	0	0	0	0	0	0	0	2	2
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	1	0	2
12	0	0	0	0	0	0	1	1	0
13	0	0	0	0	0	0	1	1	1
14	0	0	0	0	0	0	1	1	2
15	0	0	0	0	0	0	1	2	0
16	0	0	0	0	0	0	1	2	1
17	0	0	0	0	0	0	1	2	2
18	0	0	0	0	0	0	2	0	0
19	0	0	0	0	0	0	2	0	1
20	0	0	0	0	0	0	2	0	2
21	0	0	0	0	0	0	2	1	0
22	0	0	0	0	0	0	2	1	1

23	0	0	0	0	0	0	2	1	2
24	0	0	0	0	0	0	2	2	0
25	0	0	0	0	0	0	2	2	1
26	0	0	0	0	0	0	2	2	2
...									
19682	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 9

a	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
b	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	2
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3

36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	1
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	3
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	3
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	1
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	2
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	3
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	1
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	2
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	3
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	1
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2
63	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3
...																
n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Литература

1. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1984.– 416с.

МНОГОМЕРНЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Одномерные булевы алгебры

Одномерной булевой алгеброй называется [1] класс S объектов $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$ из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит $a_1+b_1=\mathbf{a+b}$;

$a_1 \cdot b_1=\mathbf{a \cdot b}$;

2) (коммутативные законы) $a_1+b_1=b_1+a_1$,

т.е. $\mathbf{a+b=b+a}$

$a_1 \cdot b_1=b_1 \cdot a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot b=b \cdot a}$;

3) (ассоциативные законы)

$a_1+(b_1+c_1)=(a_1+b_1)+c_1$, т.е. $\mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c}$

$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1)=(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c}$;

4) (дистрибутивные законы)

$a_1 \cdot (b_1+c_1)=a_1 \cdot b_1+a_1 \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)}$

$a_1+(b_1 \cdot c_1)=(a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1)$, т.е. $\mathbf{a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)}$;

5) (свойства идемпотентности) $a_1+a_1=a_1$,

т.е. $\mathbf{a+a=a}$

$a_1 \cdot a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot a=a}$;

6) (свойства совместимости)

$$\begin{cases} a_1+b_1=a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1=b_1, \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1=a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{т.е. } \mathbf{a+b=a}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b=b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b=a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot b_1 = a_1, & \text{если } a_1+b_1=b_1 \\ b_1, & \text{если } a_1+b_1=a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{т.е. } \mathbf{a \cdot b=a}, & \text{если } \mathbf{a+b=b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a+b=a} \end{cases}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1=1}$ и $\mathbf{0=0}$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=a_1$ из S

$a_1+0=a_1$, т.е. $\mathbf{a+0=a}$

$a_1 \cdot 1=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot 1=a}$

$$a_1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$a_1 + 1 = 1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = a_1$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_1$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = a_1$) такой, что $a_1 + \bar{a}_1 = 1$, т.е. $\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$

$$a_1 \cdot \bar{a}_1 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой одномерной булевой алгебре имеют место:

$$9) \text{ (законы поглощения) } a_1 \cdot (a_1 + b_1) = a_1,$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$a_1 + a_1 \cdot b_1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \bar{\bar{a}_1} = a_1, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$\bar{\bar{1}} = 0, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \mathbf{0},$$

$$\bar{\bar{0}} = 1, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{0}}} = \mathbf{1};$$

$$12) a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1 = a_1 + b_1,$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1) = a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$13) a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1 = a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1,$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}},$$

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1),$$

$$\text{т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}).$$

Двумерные булевы алгебры

Двумерной булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = \\ = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = \\ = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a + (b + c) = (a + b) + c}$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2))$$

$$((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) = ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2))$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) = \\ = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)},$$

$$(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a_1 + (b_1 \cdot c_1), a_2 + (b_2 \cdot c_2))$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot ((a_1, a_2) + (c_1, c_2)) = \\ = ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2)),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)};$$

5) (свойства идемпотентности)

$$(a_1, a_2) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a + a = a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot a = a};$$

6) (свойства совместимости)

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = (a_1 + a_1 \cdot b_1, a_2 + a_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2), \\ \text{если } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \\ (a_1 \cdot b_1 + b_1, a_2 \cdot b_2 + b_2) = (b_1, b_2), \\ \text{если } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1, a_2), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{т.е. } \mathbf{a + b = a, \text{ если } a \cdot b = b} \\ \mathbf{b, \text{ если } a \cdot b = a} \end{array} \right.$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1, a_2), \text{ если } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \\ ((a_1 + b_1) \cdot b_1, (a_2 + b_2) \cdot b_2) = (b_1, b_2), \text{ если } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1, a_2), \end{array} \right.$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ из S

$$(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a + 0 = a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (1, 1) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1 = a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (0, 0) = (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0 = 0}$$

$$(a_1, a_2) + (1, 1) = (1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$) такой, что

$$(a_1, a_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2) = (1, 1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2) = (0, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой двумерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$(a_1, a_2) \cdot ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1, a_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$(a_1, a_2) + ((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2)) = (a_1, a_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)} =$$

$$= \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2)} =$$

$$= (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)} = \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)} =$$

$$= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \overline{\overline{(a_1, a_2)}} = \overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)} = (a_1, a_2), \quad \text{т.е. } \overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$\overline{(1, 1)} = (\bar{1}, \bar{1}) = (0, 0),$$

$$\text{т.е. } \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0},$$

$$\overline{(0, 0)} = (\bar{0}, \bar{0}) = (1, 1),$$

$$\text{т.е. } \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1};$$

$$12) (a_1, a_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cdot (b_1, b_2) =$$

$$(a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1, a_2 + \bar{a}_2 \cdot b_2) =$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (b_1, b_2)) =$$

$$= (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2)) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$13) (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) +$$

$$+ (b_1, b_2) \cdot (\bar{c}_1, \bar{c}_2) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2) =$$

$$\begin{aligned}
& (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}}, \\
& ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot ((a_1, a_2) + (c_1, c_2)) \cdot ((b_1, b_2) + (\bar{c}_1, \bar{c}_2)) = \\
& ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), \\
& (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2)) = \\
& ((a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2)), \text{ т.е.} \\
& (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}).
\end{aligned}$$

n-мерные булевы алгебры

n-мерной булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\
& = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \mathbf{a} + \mathbf{b}; \\
& (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\
& = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};
\end{aligned}$$

2) (коммутативные законы)

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\
& (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) \\
& (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2, \dots, b_n \cdot a_n), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};
\end{aligned}$$

3) (ассоциативные законы)

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\
& = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) \\
& ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) + (c_1, c_2, \dots, c_n) = \\
& = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n), \\
& \text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \\
& (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\
& = (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n)) \\
& ((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) = \\
& = ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n),
\end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$;

4) (ДИСТРИБУТИВНЫЕ ЗАКОНЫ)

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\ & = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2), \dots, a_n \cdot (b_n + c_n)) \\ & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) = \\ & = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n), \end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$,

$$\begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\ & = (a_1 + (b_1 \cdot c_1), a_2 + (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n + (b_n \cdot c_n)) \\ & ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + \\ & + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\ & = ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2), \dots, (a_n + b_n) \cdot (a_n + c_n)), \end{aligned}$$

т.е. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c})$;

5) (СВОЙСТВА ИДЕМПОТЕНТНОСТИ)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

6) (СВОЙСТВА СОВМЕСТИМОСТИ)

$$\left\{ \begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \\ & (a_1 + a_1 \cdot b_1, a_2 + a_2 \cdot b_2, \dots, a_n + a_n \cdot b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ & = \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ & (a_1 \cdot b_1 + b_1, a_2 \cdot b_2 + b_2, \dots, a_n \cdot b_n + b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ & \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}, \text{ если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{b}, \text{ если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \\ & (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (a_n + b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ & = \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ & ((a_1 + b_1) \cdot b_1, (a_2 + b_2) \cdot b_2, \dots, (a_n + b_n) \cdot b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ & \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}, \text{ если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{b}, \text{ если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}; \end{aligned} \right.$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из S

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (1, 1, \dots, 1) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (1, 1, \dots, 1) = (1, 1, \dots, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) такой, что

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2, \dots, a_n + \bar{a}_n) = (1, 1, \dots, 1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2, \dots, a_n \cdot \bar{a}_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой n -мерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (a_n + b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + ((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2), \dots, a_n + (a_n \cdot b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)} = \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)} = (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\begin{aligned} \overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)} &= \\ &= \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)} = \\ &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_n + \bar{b}_n) = \\ &= (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n), \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \overline{\overline{(a_1, a_2, \dots, a_n)}} = (\bar{\bar{a}}_1, \bar{\bar{a}}_2, \dots, \bar{\bar{a}}_n) =$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$(1, 1, \dots, 1) = (\bar{\bar{1}}, \bar{\bar{1}}, \dots, \bar{\bar{1}}) = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \mathbf{0},$$

$$(0, 0, \dots, 0) = (\bar{\bar{0}}, \bar{\bar{0}}, \dots, \bar{\bar{0}}) = (1, 1, \dots, 1),$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{0}}} = \mathbf{1};$$

$$12) (a_1, a_2, \dots, a_n) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) =$$

$$=(a_1+\bar{a}_1 \cdot b_1, a_2+\bar{a}_2 \cdot b_2, \dots, a_n+\bar{a}_n \cdot b_n)=$$

$$=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)=$$

$$=(a_1, a_2, \dots, a_n)+(b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) =$$

$$=(a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (\bar{a}_n + b_n)) =$$

$$=(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$13) (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) +$$

$$+(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) +$$

$$+(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n) =$$

$$=(a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2, \dots, a_n \cdot b_n +$$

$$+ a_n \cdot c_n + b_n \cdot \bar{c}_n) =$$

$$(a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2, \dots, a_n \cdot c_n + b_n \cdot \bar{c}_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}},$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) +$$

$$+(c_1, c_2, \dots, c_n)) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n)) =$$

$$=((a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1) \cdot (b_1+\bar{c}_1), (a_2+b_2) \cdot (a_2+c_2) \cdot (b_2+\bar{c}_2), \dots,$$

$$(a_n+b_n) \cdot (a_n+c_n) \cdot (b_n+\bar{c}_n)) =$$

$$((a_1+c_1) \cdot (b_1+\bar{c}_1), (a_2+c_2) \cdot (b_2+\bar{c}_2), \dots, (a_n+c_n) \cdot (b_n+\bar{c}_n)),$$

$$\text{т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}).$$

Таким образом, свойства многомерных булевых алгебр повторяют свойства одномерной булевой алгебры.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) – М.: Наука, 1977. – 832с.

КОРОТКОВ А.В.

НЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Булевой алгеброй называется [1] класс S объектов $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

	0	1
0	0	1
1	1	1

операция умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

для всех $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$ из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит $a_1+b_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

$a_1 \cdot b_1=\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;

2) (коммутативные законы) $a_1+b_1=b_1+a_1$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

$a_1 \cdot b_1=b_1 \cdot a_1$, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;

3) (ассоциативные законы) $a_1+(b_1+c_1)=(a_1+b_1)+c_1$, т.е.

$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$

$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1)=(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})=(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$;

4) (дистрибутивные законы) $a_1 \cdot (b_1+c_1)=a_1 \cdot b_1+a_1 \cdot c_1$, т.е.

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})+(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$

$a_1+(b_1 \cdot c_1)=(a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1)$, т.е. $\mathbf{a}+(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{c})$;

5) (свойства идемпотентности) $a_1+a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

$a_1 \cdot a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}=\mathbf{a}$;

6) (свойства совместимости)

$a_1+b_1 \neq a_1$, если $a_1 \cdot b_1=b_1$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\mathbf{a} \end{cases}$

$a_1 \cdot b_1 \neq a_1$, если $a_1+b_1=b_1$, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}; \end{cases}$

7) S содержит элементы $1=1$ и $0=0$ такие, что для всякого элемента $a=a_1$ из S

$$a_1+0=a_1, \text{ т.е. } a+0=a$$

$$a_1 \cdot 1=a_1, \text{ т.е. } a \cdot 1=a$$

$$a_1 \cdot 0=0, \text{ т.е. } a \cdot 0=0$$

$$a_1+1=1, \text{ т.е. } a+1=1;$$

8) для каждого элемента $a=a_1$ класс S содержит элемент $\bar{a}=\bar{a}_1$ (дополнение элемента $a=a_1$) такой, что $a_1+\bar{a}_1=1$, т.е. $a+\bar{a}=1$

$$a_1 \cdot \bar{a}_1=0, \text{ т.е. } a \cdot \bar{a}=0.$$

В каждой одномерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения) $a_1 \cdot (a_1+b_1)=a_1$, т.е. $a \cdot (a+b)=a$,

$$a_1+a_1 \cdot b_1=a_1, \text{ т.е. } a+a \cdot b=a;$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b};$$

11) $\bar{\bar{a}_1}=a_1$, т.е. $\bar{\bar{a}}=a$,

$$\bar{1}=0, \text{ т.е. } \bar{1}=0,$$

$$\bar{0}=1, \text{ т.е. } \bar{0}=1;$$

12) $a_1+\bar{a}_1 \cdot b_1=a_1+b_1$, т.е. $a+\bar{a} \cdot b=a+b$,

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1+b_1)=a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } a \cdot (\bar{a}+b)=a \cdot b;$$

13) $a_1 \cdot b_1+a_1 \cdot c_1+b_1 \cdot \bar{c}_1=a_1 \cdot c_1+b_1 \cdot \bar{c}_1$, т.е. $a \cdot b+a \cdot c+b \cdot \bar{c}=a \cdot c+b \cdot \bar{c}$,

$$(a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1) \cdot (b_1+\bar{c}_1)=(a_1+c_1) \cdot (b_1+\bar{c}_1), \text{ т.е.}$$

$$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+\bar{c})=(a+c) \cdot (b+\bar{c}).$$

Выполнение этих операций подтверждается таблицей 1 истинности.

Небулевы алгебры логики

Примером небулевой алгебры логики может являться класс вычетов по модулю два (класс четных и нечетных чисел), как класс S объектов $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

	0	1
0	0	1
1	1	0

операция умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

для всех $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}=\mathbf{c}_1$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;

2) (коммутативные законы) $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_1$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{a}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;

3) (ассоциативные законы) $\mathbf{a}_1+(\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1)=(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)+\mathbf{c}_1$, т.е.

$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$

$\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}_1)=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1)\cdot\mathbf{c}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$;

4) (дистрибутивные законы) $\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1)=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}_1$, т.е.

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$

$\mathbf{a}_1+(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}_1)\neq(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\cdot(\mathbf{a}_1+\mathbf{c}_1)$, т.е. $\mathbf{a}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c})$;

5) (свойства идемпотентности) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1=0$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{a}=0$, т.е. $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1\neq\mathbf{a}_1$

или $\mathbf{a}+\mathbf{a}\neq\mathbf{a}$

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$;

6) (свойства совместимости)

$\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1=\begin{cases} \mathbf{a}_1, & \text{если } \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_1, & \text{если } \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_1 \end{cases}$ т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b} \end{cases}$

Таблица 1

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	0	0	0	1	0	0	0	1
$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{b}+\mathbf{c}$	0	1	1	1	0	1	1	1
$\mathbf{c}+\mathbf{a}$	0	1	0	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$	0	0	0	0	0	0	0	1
$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	0	1	1	1	1	1	1	1
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	0	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	0	0	0	1	1	1	1	1
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c})$	0	0	0	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathbf{a}+\mathbf{a}$	0	0	0	0	1	1	1	1

$a \cdot b = a$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a + b = b$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a \cdot b = b$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a + b = a$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a + 0$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a + 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a + \bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a + b)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a + a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\bar{a} + \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{a + b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\bar{a} + b$	1	1	1	1	0	0	1	1
$b + \bar{c}$	1	0	1	1	1	0	1	1
$a + \bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (\bar{a} + b)$	0	0	0	0	0	0	1	1
$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1	1
$(a + c) \cdot (b + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1	1

$$a_1 \cdot b_1 \begin{cases} = a_1, & \text{если } a_1 + b_1 = a_1, \text{ т.е.} \\ b_1, & \text{если } a_1 + b_1 = b_1 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a \cdot b = a,} \\ \mathbf{b,} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{если } \mathbf{a + b = a} \\ \text{если } \mathbf{a + b = b}; \end{array}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1=1}$ и $\mathbf{0=0}$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a=a_1}$ из S

$$a_1 + 0 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + 0 = a}$$

$$a_1 \cdot 1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1 = a}$$

$$a_1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0 = 0}$$

$$a_1 + 1 = \bar{a}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a + 1 = \bar{a}}, \text{ т.е. } a_1 + 1 \neq 1 \text{ или } \mathbf{a + 1 \neq 1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=\bar{\mathbf{a}}_1$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1$) такой, что $\mathbf{a}_1+\bar{\mathbf{a}}_1=1$, т.е. $\mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}=1$

$\mathbf{a}_1\cdot\bar{\mathbf{a}}_1=0$, т.е. $\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{a}}=0$.

В каждой небулевой алгебре логики имеют место:

9) (законы поглощения) $\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)=\mathbf{a}_1\cdot\bar{\mathbf{b}}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}}$,

$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\cdot\bar{\mathbf{b}}_1$, т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}}$;

10) (двойственность, законы де Моргана)

$\overline{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1} = \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{b}}_1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$,

т.е. $\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,

$\overline{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1} = \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{a}_1 \cdot \bar{\mathbf{b}}_1$,

т.е. $\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}}$;

11) $\bar{\bar{\mathbf{a}}_1}=\mathbf{a}_1$, т.е. $\bar{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}$,

$\bar{1}=0$, т.е. $\bar{0}=1$,

$\bar{0}=1$, т.е. $\bar{1}=0$;

12) $\mathbf{a}_1\cdot\bar{\mathbf{b}}_1+\bar{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{b}}+\bar{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$,

$\mathbf{a}_1\cdot(\bar{\mathbf{a}}_1+\mathbf{b}_1)=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot(\bar{\mathbf{a}}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$;

13) $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1\cdot\bar{\mathbf{c}}_1\neq\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}_1+\mathbf{b}_1\cdot\bar{\mathbf{c}}_1$, т.е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{c}}\neq\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{c}}$,

$(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\cdot(\mathbf{a}_1+\mathbf{c}_1)\cdot(\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{c}}_1)=(\mathbf{a}_1+\mathbf{c}_1)\cdot(\mathbf{b}_1+\bar{\mathbf{c}}_1)$, т.е.

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\bar{\mathbf{c}})=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}+\bar{\mathbf{c}})$.

Выполнение этих операций подтверждается таблицей 2 истинности.

Таким образом, булевы алгебры логики не являются единственным способом построения алгебр логики и логических устройств.

Таблица 2

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
a·b	0	0	0	0	0	0	1	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0	1
c·a	0	0	0	0	0	1	0	1
a+b	0	0	1	1	1	1	0	0
b+c	0	1	1	0	0	1	1	0
c+a	0	1	0	1	1	0	1	0
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0	1
(a·b)·c	0	0	0	0	0	0	0	1
a+(b+c)	0	1	1	0	1	0	0	1
(a+b)+c	0	1	1	0	1	0	0	1
a+b·c	0	0	0	1	1	1	1	0
(a+b)·(a+c)	0	0	0	1	1	0	0	0

$a \cdot a$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+a$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a \cdot b=a$	+	+	+	+	-	-	+	+
$a+b=b$	+	+	-	-	+	+	+	+
$a \cdot b=b$	+	+	-	-	+	+	-	-
$a+b=a$	+	+	+	+	-	-	-	-
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a+0$	0	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a+1$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$a+\bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a+b)$	0	0	0	0	1	1	0	0
$a+a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{a + b}$	1	1	0	0	0	0	1	1
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot b$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\bar{a}+\bar{b}$	0	0	1	1	1	1	0	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\bar{a}+b$	1	1	0	0	0	0	1	1
$b+\bar{c}$	1	0	0	1	1	0	0	1
$a+\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (\bar{a}+b)$	0	0	0	0	0	0	1	1
$a \cdot b+a \cdot c+b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	0	0
$a \cdot c+b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+\bar{c})$	0	0	0	1	1	0	0	0
$(a+c) \cdot (b+\bar{c})$	0	0	0	1	1	0	0	0

Литература

1.Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832с.

N-ПОЗИЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ

В литературе повсеместно рассматриваются однопозиционные алгебры над полем действительных чисел [1, 2]. Вместе с тем представляют определенный интерес не только однопозиционные, но и n-позиционные алгебры над полями действительных чисел, кольцами целых чисел и алгебры над кольцами и полями сравнений по модулю m (в частности по модулю $m=2$), а также булевы алгебры. Практическая значимость таких алгебр может быть в использовании указанных алгебр в тех приложениях, где дискретность величин приобретает существенное значение. В случае применения однопозиционных полей действительных чисел имеют место очевидные действия.

1.1 Алгебра однопозиционных полей действительных чисел

I. Однопозиционными действительными числами a назовем элементы полей действительных чисел $a=(a_1)$, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых чисел вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Числа $a=(a_1)$ и $b=(b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$a=b,$$

т. е. $(a_1)=(b_1)$, если $a_1=b_1$.

2. Суммой чисел $a=(a_1)$ и $b=(b_1)$ называется число

$$a+b=(a_1+b_1),$$

т.е. $a+b=(a_1)+(b_1)=(a_1+b_1)=a_1+b_1$.

3. Произведением чисел $a=(a_1)$ и $b=(b_1)$ называется число

$$ab=(a_1)(b_1)$$

т. е. $ab=(a_1)(b_1)=(a_1b_1)=a_1b_1$,

4. Число (a_0) отождествляется с числом a_0 ,

т.е. $a=(a_1)=a_1$.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$ma=(m)(a_1)=(ma_1),$$

т.е. $ma=(ma_1)=ma_1$,

где m -действительное число.

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a+b)+c=((a_1)+(b_1))+(c_1)=((a_1+b_1)+c_1),$$

$$a+(b+c)=(a_1)+((b_1)+(c_1))=(a_1+(b_1+c_1)),$$

$$\text{т.е. } (a+b)+c=a+(b+c).$$

2. Коммутативность сложения:

$$a+b=(a_1)+(b_1)=(a_1+b_1),$$

$$b+a=(b_1)+(a_1)=(b_1+a_1),$$

$$\text{т.е. } a+b=b+a.$$

3. Наличие нуля:

$$a+0=(a_1)+(0),$$

$$a+0=(a_1+0)=(a_1),$$

$$\text{т.е. } a+0=a,$$

так что число (0) отождествляется с числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$a+(-a)=(a_1)+(-a_1),$$

$$\text{т.е. } a+(-a)=(a_1-a_1)=(0),$$

$$\text{т.е. } a+(-a)=0,$$

так что число $(-a_0)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c=((a_1)(b_1))(c_1)=(a_1b_1)(c_1),$$

$$a(bc)=(a_1)((b_1)(c_1))=(a_1)(b_1c_1),$$

$$\text{т.е. } (ab)c=a(bc).$$

6. Коммутативность умножения:

$$ab=(a_1)(b_1)=(a_1b_1),$$

$$ba=(b_1)(a_1)=(b_1a_1),$$

$$\text{т.е. } ab=ba.$$

7. Дистрибутивность:

$$(a+b)c=((a_1)+(b_1))(c_1)=(a_1+b_1)(c_1)=((a_1+b_1)c_1)),$$

$$ac+bc=(a_1c_1)+(b_1c_1)=((a_1+b_1)c_1)),$$

$$\text{т.е. } (a+b)c=ac+bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_1)(1),$$

$$a1=(a_11)=(a_1),$$

$$\text{т.е. } a1=a.$$

Итак, однопозиционные действительные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа a^{-1} , т.е. $a=(1/a_1)$ при $a_1 \neq 0$.

Таким образом, однопозиционные действительные числа составляют коммутативное, ассоциативное поле.

1.2 Алгебра n-позиционных полей действительных чисел

I. N-позиционными действительными числами $\mathbf{a}$ назовем элементы полей действительных чисел $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых чисел вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Числа $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, \dots, b_n)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$\mathbf{a}=\mathbf{b},$$

т. е. $(a_1, \dots, a_n)=(b_1, \dots, b_n)$, если $a_1=b_1, \dots, a_n=b_n$.

2. Суммой чисел $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, \dots, b_n)$ называется число

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1, \dots, a_n)+(b_1, \dots, b_n)=(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$.

3. Произведением чисел $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, \dots, b_n)$ называется число

$$\mathbf{ab}=(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n),$$

т. е. $\mathbf{ab}=(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)=(a_1b_1, \dots, a_nb_n)$.

4. Число $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$ отождествляется с числом $a_1, \dots, a_n$,

т.е. $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)=a_1, \dots, a_n$.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$m\mathbf{a}=(m)(a_1, \dots, a_n)=(ma_1, \dots, ma_n),$$

т.е. $m\mathbf{a}=(ma_1, \dots, ma_n)$,

где m -действительное число.

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} &= ((a_1, \dots, a_n)+(b_1, \dots, b_n))+(c_1, \dots, c_n) = ((a_1, \dots, a_n) \\ &+ (b_1, \dots, b_n))+(c_1, \dots, c_n), \\ \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= (a_1, \dots, a_n)+((b_1, \dots, b_n)+(c_1, \dots, c_n)) = (a_1, \dots, a_n) + ((b_1, \dots, b_n) \\ &+ (c_1, \dots, c_n)), \end{aligned}$$

т.е. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1, \dots, a_n)+(b_1, \dots, b_n),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_1, \dots, b_n)+(a_1, \dots, a_n),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$a + 0 = (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0),$$

$$a + 0 = (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (a_1, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } a + 0 = a,$$

так что число $0 = (0, \dots, 0) = 0, \dots, 0$ отождествляется с числом $0, \dots, 0$.

4. Наличие противоположного числа:

$$a + (-a) = (a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n),$$

$$\text{т.е. } a + (-a) = ((a_1, \dots, a_n) + (-a_1, \dots, -a_n)) = (0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } a + (-a) = 0,$$

так что число $(-a_1, \dots, -a_n)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c = ((a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n))(c_1, \dots, c_n) = ((a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n))(c_1, \dots, c_n),$$

$$a(bc) = (a_1, \dots, a_n)((b_1, \dots, b_n)(c_1, \dots, c_n)) = (a_1, \dots, a_n)((b_1, \dots, b_n)(c_1, \dots, c_n)),$$

$$\text{т.е. } (ab)c = a(bc).$$

6. Коммутативность умножения:

$$ab = (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n),$$

$$ba = (b_1, \dots, b_n)(a_1, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } ab = ba.$$

7. Дистрибутивность:

$$(a + b)c = ((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n))(c_1, \dots, c_n),$$

$$ac + bc = (a_1, \dots, a_n)(c_1, \dots, c_n) + (b_1, \dots, b_n)(c_1, \dots, c_n),$$

$$\text{т.е. } (a + b)c = ac + bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_1, \dots, a_n)(1, \dots, 1),$$

$$a1 = (a_1, \dots, a_n)(1, \dots, 1) = (a_1, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } a1 = a.$$

Итак, n -позиционные действительные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа a^{-1} при $a = (1, \dots, 1)/(a_1, \dots, a_n)$ и $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Таким образом, n -позиционные действительные числа составляют коммутативное, ассоциативное поле.

2.1 Алгебры одно- и n -позиционных колец целых чисел

Алгебры одно- и n -позиционных колец целых чисел описываются совершенно аналогично описанию алгебр одно- и n -позиционных полей действительных чисел, если пренебречь свойством 9, т. е.

свойством наличия обратного числа. Такие алгебры приобретают целый ряд дополнительных свойств, придающих им свойства одно- и n -позиционных алгебр логики.

3.1 Алгебры одно- и n -позиционных колец и полей сравнений по модулю m

Основу алгебр одно- и n -позиционных колец и полей сравнений по модулю m составляют алгебры одно- и n -позиционных колец целых чисел, если все целые числа разбить на m классов по отношению к числу m , дающих один и тот же остаток при делении на m . Такие алгебры приобретают целый ряд дополнительных свойств, придающих им свойства одно- и n -позиционных алгебр логики.

4.1 Алгебры одно- и n -позиционных полей сравнений по модулю $m=2$

Основу алгебр одно- и n -позиционных полей сравнений по модулю $m=2$ составляют алгебры одно- и n -позиционных колец целых чисел, если все целые числа разбить на два класса (четных и нечетных чисел) по отношению к числу $m=2$, дающих один и тот же остаток при делении на два. Такие алгебры приобретают целый ряд дополнительных свойств, придающих им свойства одно- и n -позиционных не булевых алгебр логики [3].

5.1 Одно- и n -позиционные булевы алгебры логики

Основу одно- и n -позиционных булевых алгебр логики составляют алгебры одно- и n -позиционных целых чисел, принимающих значения 0 и 1 и предусматривающие сложение чисел булевого типа. Такие алгебры также приобретают целый ряд дополнительных свойств, придающих им свойства одно- и n -позиционных булевых алгебр логики [4].

Литература

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984. — 416с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1977. — 832 с.

3. Коротков А. В. Многомерные небулевы алгебры логики. Современная Россия: реализация экономического, интеллектуального и технического потенциала: Межвузовский сб. научн. трудов IV Региональной научно-практической конференции / Под ред. В. С. Чуракова. – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2009. — (с.147-151).

4. Коротков А. В. Многомерные булевы алгебры. Современная Россия: реализация экономического, интеллектуального и технического потенциала: Межвузовский сб. научн. трудов IV Региональной научно-практической конференции / Под ред. В. С. Чуракова. – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2009. — (с.151-154).

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА И ДВОЙНАЯ (ТРОЙНАЯ) СПИРАЛИ

Более 50 лет назад Джеймс Ватсон и Фрэнсис Крик открыли двойную спиральную структуру молекулы ДНК и свели генетику к химии, наметив путь развития биологии на вторую половину двадцатого столетия. Сегодня тысячи исследователей расшифровывают генетические коды, записанные в ДНК. Используя современные биотехнические методы, можно создавать длинные молекулы ДНК с желаемой последовательностью функциональных блоков, реализуя возможности, не используемые природой в ходе развития жизни, а также другие небиологические применения ДНК, например, создание структур и устройств из элементов в нанотехнологии (а также биомолекулярные компьютеры, или ДНК-компьютеры [5; 7]). Решетки с ДНК могут удерживать множество копий больших биологических молекул.

ДНК – структура наноразмеров состоит из двух базовых цепей, между которыми расположены комплементарные пары оснований связанные слабыми связями. Наиболее обычная ДНК – это В – ДНК, которая закручена правосторонней двойной спиралью диаметром около 2 нанометров. Один полный оборот спирали занимает приблизительно 3,5 нанометра на которых помещается до 10 пар оснований. Иногда ДНК может образовывать левостороннюю двойную спираль, называемую Z-ДНК [6].

Вместе с тем математическая основа ДНК – структур двойных спиралей до сих пор не изучена. Было бы замечательно, если бы в математике нашлись аналоги двуспиральных структур. В связи с этим проанализируем ДНК – структуру двойных спиралей.

1. ДНК – структуры двойных спиралей являются двухзаходной спиралью.
2. ДНК – структуры двойных спиралей могут представлять не только линейные, но и разветвленные (двухмерные и трехмерные) цепи.
3. ДНК – структуры двойных спиралей объединяют отдельные спирали в двойную структуру с помощью четырех типов связей между молекулами спиралей.

4. ДНК – структуры двойных спиралей повторяют свойства элементов спиралей по всей длине.

В математике подобные структуры удивительным образом напоминают бесконечные последовательности решений уравнения Диофанта в целых числах [4; 9].

$$t^2 - ax^2 = \pm b.$$

Эти две последовательности решений, бесконечные в обоих направлениях представлены в таблице 1 двумя первыми столбцами для t и x соответственно. При различных значениях a и для $b=1$. Можно построить бесконечное множество таких двойных последовательностей чисел, причем не только для указанных значений a и $b=1$, но и для других значений a и b . Отметим удивительную закономерность двойных последовательностей чисел, а именно, определитель двух соседних строк (составленный из четырех соседних чисел) всегда равен одному и тому же числу по всей бесконечной длине двойных числовых цепочек.

Таблица 1.

				a=3		Δ	b	a=8		Δ	b	a=15		Δ	b
				0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1
				1	2	-1	-1	1	3	-1	-1	1	4	-1	-1
				4	7	-1	-1	6	17	-1	-1	8	31	-1	-1
				15	26	-1	-1	35	99	-1	-1	63	244	-1	-1
				56	97	-1	-1	204	577	-1	-1	496	1921	-1	-1
				780	1351	...	-1	6930	19601	...	-1	30744	119071	...	-1
a=2				a=5		Δ	b	a=10		Δ	b	a=17		Δ	b
0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1	0	1	-1	-1
1	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4	1	1
2	3	-1	-1	4	9	-1	-1	6	19	-1	-1	8	33	-1	-1
5	7	1	1	17	38	1	1	37	117	1	1	65	268	1	1
12	17	-1	-1	72	161	-1	-1	228	721	-1	-1	528	2177	-1	-1
70	99	...	-1	1292	2889	...	-1	8658	27379	...	-1	34840	143649	...	-1

Необходимо отметить, что с четверками соседних чисел можно попытаться связать физические (а в частности, геометрические) величины. Это показано в [4] для $a=2$ и $b=d^2$, где d – модуль разности длин катетов прямоугольных треугольников. Уравнения Диофанта при этом определяются соотношениями:

$$n^2 - 2m^2 = \pm d^2,$$

$$c^2 - 2z^2 = -d^2,$$

$$t^2 - 2p^2 = +d^2,$$

$$\text{так что } (c^2 + t^2) = 2(z^2 + p^2),$$

где четверки чисел z, c, p, t двух последовательностей чисел m и n характеризуют соответственно гипотенузы, суммы катетов, периметры и суммы периметров с гипотенузами, причем пары чисел z, c и p, t получаются чересстрочной разверткой числовых последовательностей m и n , определяемые уравнением Пифагора

$$x^2 + y^2 = z^2, \\ (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

где x и y – катеты бесконечной последовательности прямоугольных треугольников, определяемых одним и тем же значением модуля разности катетов (таблица 2). Модуль разности катетов отмечен нижним индексом. В таблице 2 значения рядов z, c, p и t , а также чисел m и n , могут быть продолжены в обоих направлениях, причем используются одни и те же рекуррентные соотношения

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1}, \\ n_{k+1} = 2n_k + n_{k-1}, \\ z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1}, \\ c_{k+1} = 6c_k - c_{k-1}, \\ p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1}, \\ t_{k+1} = 6t_k - t_{k-1}.$$

Эти числа в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной длины в обе стороны.

Таблица 2.

m_1	n_1	m_7	n_7	m_{17}	n_{17}	m_{23}	n_{23}	m_{31}	n_{31}	m_{41}	n_{41}	m_{47}	n_{47}	m_{49}	n_{49}
70	99	234	331	736	1041	900	1273	1518	2147	1218	1723	2184	3089	2580	3649
29	41	97	137	305	431	373	527	629	889	505	713	905	1279	1069	1511
12	17	40	57	126	179	154	219	260	369	208	297	374	531	442	627
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283	-144	209	-132	193
5	-7	73	-103	137	-193	205	-289	221	-311	481	-679	353	-497	325	-457
z_1	c_1	z_7	c_7	z_{17}	c_{17}	z_{23}	c_{23}	z_{31}	c_{31}	z_{41}	c_{41}	z_{47}	c_{47}	z_{49}	c_{49}
29	41	97	137	305	431	373	527	629	889	505	713	905	1279	1069	1511
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
5	-7	73	-103	137	-193	205	-289	221	-311	481	-679	353	-497	325	-457

p ₁	t ₁	p ₇	t ₇	p ₁₇	t ₁₇	p ₂₃	t ₂₃	p ₃₁	t ₃₁	p ₄₁	t ₄₁	p ₄₇	t ₄₇	p ₄₉	t ₄₉
70	99	234	331	736	1041	900	1273	1518	2147	1218	1723	2184	3089	2580	3649
12	17	40	57	126	179	154	219	260	369	208	297	374	531	442	627
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283	-144	209	-132	193

Последовательности чисел m и n , z и c , p и t , получаются с точностью до знака при одном и том же значении d_i^2 и определителя Δ_i (таблица 3).

Таблица 3.

	m1	±d21	Δ1	c1	z1	-d21	Δ1	t1	p1	d21	Δ1
7	5	-12	-12	41	29	-12	2·12	99	70	12	-2·12
3	2	12	12	7	5	-12	2·12	17	12	12	-2·12
1	1	-12	-12	1	1	-12	2·12	3	2	12	-2·12
1	0	12	12	-1	1	-12	2·12	1	0	12	-2·12
-1	1	-12	...	-7	5	-12	...	3	-2	12	...
n7	m7	±d27	Δ7	c7	z7	-d27	Δ7	t7	p7	d27	Δ7
23	17	-72	-72	137	97	-72	2·72	331	234	72	-2·72
11	6	72	72	23	17	-72	2·72	57	40	72	-2·72
1	5	-72	-72	1	5	-72	2·72	11	6	72	-2·72
9	-4	72	72	-17	13	-72	2·72	9	-4	72	-2·72
-17	13	-72	...	-103	73	-72	...	43	-30	72	...
n17	m17	±d217	Δ17	c17	z17	-d217	Δ17	t17	p17	d217	Δ17
73	53	-172	-172	431	305	-172	2·172	1041	736	172	-2·172
33	20	172	172	73	53	-172	2·172	179	126	172	-2·172
7	13	-172	-172	7	13	-172	2·172	33	20	172	-2·172
19	-6	172	172	-31	25	-172	2·172	19	-6	172	-2·172
-31	25	-172	...	-193	137	-172	...	81	-56	172	...
n23	m23	±d223	Δ23	c23	z23	-d223	Δ23	t23	p23	d223	Δ23
89	65	-232	-232	527	373	-232	2·232	1273	900	232	-2·232
41	24	232	232	89	65	-232	2·232	219	154	232	-2·232
7	17	-232	-232	7	17	-232	2·232	41	24	232	-2·232
27	-10	232	232	-47	37	-232	2·232	27	-10	232	-2·232
-47	37	-232	...	-289	205	-232	...	121	-84	232	...

Таким образом, каждая из таблиц 3 дает классификацию всего бесконечного ряда числовых последовательностей, соответствующих данному значению модуля разности катетов. То же самое относится к рядам числовых последовательностей m , n , z , c и p , t .

Величина разности между катетами x и y повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна

тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами, формируя плоскости числовых последовательностей.

В свою очередь полученные пары плоскостей числовых последовательностей могут быть классифицированы определенным образом. Так, в разностях катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49 плоскости с модулем разности катетов 1, 7, 41 представляют определенную совокупность плоскостей с той же последовательностью, относящимся уже к сумме длин катетов (...-7, -1, 1, 7, 41,...). Следующей плоскостью в этой числовой последовательности будет плоскость с разностью 239, и так далее до бесконечности в обоих направлениях.

Таким образом, можно говорить о бесконечном числе трехмерных пространств числовых последовательностей бесконечной протяженности во всех шести направлениях, т.е. о, своего рода, трехмерных “кристаллах” числовых последовательностей [4].

Вопрос классификации пифагоровых чисел, по-видимому, связан с классификацией физических величин. В одной из моих работ отмечалось, что числа x и y имеют прямое отношение к классификации волновых чисел излучения атомов [3]. Отметим к тому же, что четверки чисел также фигурируют в трехмерном спинорном исчислении при классификации элементарных частиц с полуединичным спином. Эти четверки чисел характеризуют две пары частиц, так что имеется прямая аналогия с парами чисел z , s , p и t определяемых уравнением Диофанта. Это, между прочим, говорит о возможной связи пифагоровых чисел с двойными спиралями ДНК-структур и со спиральностью суперструн [1; 2; 3].

Отметим также, что уравнение Пифагора может быть записано не только в двумерном, но и n -мерном варианте, что соответствует евклидовому n -мерному пространству. Уравнение второй степени с тремя переменными в целых числах [4] может быть записано в виде

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = \pm s^2.$$

Это уравнение отвечает метрике трехмерного времениподобного и пространственноподобного псевдоевклидового пространства индекса один. Отметим уникальную особенность решений полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что как и в случае двух переменных, четверки чисел решений уравнения образуют периодическую зависимость, определяемую рекуррентными соотношениями

$$t_{k+1}=6t_k- t_{k-1},$$

$$x_{k+1}=6x_k- x_{k-1},$$

где в качестве t_{k+1} , t_k , t_{k-1} и x_{k+1} , x_k , x_{k-1} выступают три последовательных значения величины t или x при одном и том же значении величины s . Некоторые из последовательностей решений представлены в таблице 4.

Таблица 4.

s, x ₁ , x ₂ , t	s, x ₁ , x ₂ , t	s, x ₁ , x ₂ , t
2,314,821,879	3,326,1818,1847	2,285,1386,1415
2,54,141,151	3,56,312,317	2,49,238,243
2,10,25,27	3,10,54,55	2,9,42,43
2,6,9,11	3,4,12,13	2,5,14,15
2,26,29,39	3,14,18,23	2,21,42,47
2,150,165,223	3,80,96,125	2,121,238,267
2,874,961,1299	3,466.558,727	2,705,1386,1555

Характерной особенностью таких числовых последовательностей являются постоянное значение определителей между соседними четверками чисел в каждой паре из трех числовых рядов x_1 , x_2 , t и постоянство значения s (таблица 5), так что выполняется уравнение

$$t^2-(x_1^2+ x_2^2)=\pm s^2,$$

при $s=\text{const.}$

Таблица 5.

s	x ₁	x ₂	t	Δ_{21}	Δ_{t2}	Δ_{1t}
1	606	1002	1171	24	10	22
1	104	172	201	24	10	22
1	18	30	35	24	10	22
1	4	8	9	24	10	22
1	6	18	19	24	10	22
1	32	100	105	24	10	22
1	186	582	611	...	...	...

Отметим возможность формирования некоторых троек последовательностей чисел бесконечной длины. Так

$$t_i^2-2p_i^2=d_i^2 \text{ и } c_i^2-2z_i^2=-d_i^2,$$

$$\text{а, также. } (2c_i)^2-8z_i^2=-(2d_i)^2 \text{ и } (2t_i)^2-8p_i^2=(2d_i)^2,$$

$$\text{т. е } (2d_i)^2+(2c_i)^2+z_i^2=(3z_i)^2 \text{ и } -(2d_i)^2+(2t_i)^2+p_i^2=(3p_i)^2.$$

Эти два способа формирования последовательностей троек чисел определяют для разных d_i бесконечное число последовательностей чисел бесконечной длины псевдоевклидоваго характера (таблица 6), причем эти последовательности определены значениями четверок чисел z , c , p и t . Это соответствует трехзаходным спиральям (3-

спирали). Они характеризуются шестью значениями чисел на каждой ступени, которые определяются (в данном случае) параметрами исходных двухзаходных спиралей. Таким образом, можно считать, что трехзаходные спиральные последовательности чисел являются функциями двухзаходных спиральных последовательностей.

Справедливость этого показана в таблице 7. В ней приведены три типа трехзаходных спиралей (x_1, x_2, t_1), являющихся линейными комбинациями со сдвигом, последовательностей чисел z_i, c_i, p_i и t_i для $d_i=1, 7, 17, 23, \dots$

Таблица 6.

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_1	p_1	p_1	t_1	$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_1$	z_1	$2c_1$	$3z_1$
1,70,70,99	1	70	70	99	2,29,82,87	2	29	82	87
1,12,12,17	1	12	12	17	2,5,14,15	2	5	14	15
1,2,2,3	1	2	2	3	2,1,2,3	2	1	2	3
1,0,0,1	1	0	0	1	2,1,-2,3	2	1	-2	3
1,-2,-2,3	1	-2	-2	3	2,5,-7,15	2	5	-7	15
$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_7	p_7	p_7	t_7	$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_7$	z_7	$2c_7$	$3z_7$
7,234,234,331	7	234	234	331	14,97,274,291	14	97	274	291
7,40,40,57	7	40	40	57	14,17,46,51	14	17	46	51
7,6,6,11	7	6	6	11	14,5,2,15	14	5	2	15
7,-4,-4,9	7	-4	-4	9	14,13,-34,39	14	13	-34	39
7,-30,-30,43	7	-30	-30	43	14,73,-206,219	14	73	-206	219
$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{17}	p_{17}	p_{17}	t_{17}	$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{17}$	z_{17}	$2c_{17}$	$3z_{17}$
17,736,736,1041	17	736	736	1041	34,305,862,915	34	305	862	915
17,126,126,179	17	126	126	179	34,53,146,159	34	53	146	159
17,20,20,33	17	20	20	33	34,13,14,39	34	13	14	39
17,-6,-6,19	17	-6	-6	19	34,25,-62,75	34	25	-62	75
17,-56,-56,81	17	-56	-56	81	34,137,-386,411	34	137	-386	411
$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{23}	p_{23}	p_{23}	t_{23}	$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{23}$	z_{23}	$2c_{23}$	$3z_{23}$
23,900,900,1273	23	900	900	1273	46,373,1054,1119	46	373	1054	1119
23,154,154,219	23	154	154	219	46,65,178,195	46	65	178	195
23,24,24,41	23	24	24	41	46,17,14,51	46	17	14	51
23,-10,-10,27	23	-10	-10	27	46,37,-94,111	46	37	-94	111
23,-84,-84,121	23	-84	-84	121	46,205,-578,615	46	205	-578	615

Таблица 7.

z_1	c_1	p_1	t_1	s_1	x_{11}	x_{21}	t_1	s_1	x_{11}	x_{21}	t_1	s_1	x_{11}	x_{21}	t_1
29	41	70	99	1	22	46	51	1	104	172	201	2·1	49	238	243
5	7	12	17	1	4	8	9	1	18	30	35	2·1	9	42	43
1	1	2	3	1	2	2	3	1	4	8	9	2·1	5	14	15
1	-1	0	1	1	8	4	9	1	6	18	19	2·1	21	42	47
5	-7	-2	3	1	46	22	51	1	32	100	105	2·1	121	238	267

z_7	c_7	p_7	t_7	s_7	x_{77}	x_{71}	t_7	s_7	x_{77}	x_{71}	t_7	s_7	x_{77}	x_{71}	t_7
97	137	234	331	7	74	154	171	7	348	576	673	2·7	165	798	815
17	23	40	57	7	16	28	33	7	62	106	123	2·7	37	154	159
5	1	6	11	7	22	14	27	7	24	60	65	2·7	57	126	139
13	-17	-4	9	7	116	56	129	7	82	254	267	2·7	305	602	675
73	-103	-30	43	7	674	322	747	7	468	1464	1537	2·7	1773	3486	3911
z_{17}	c_{17}	p_{17}	t_{17}	s_{17}	x_{117}	x_{217}	t_{17}	s_{17}	x_{117}	x_{217}	t_{17}	s_{17}	x_{117}	x_{217}	t_{17}
305	431	736	1041	17	232	484	537	17	...	1810	2115	2·17	517	2506	2559
53	73	126	179	17	46	86	99	17	192	324	377	2·17	105	462	475
13	7	20	33	17	44	32	57	17	58	134	147	2·17	113	266	291
25	-31	-6	19	17	218	106	243	17	156	480	505	2·17	573	1134	1271
137	-193	-56	81	17	1264	604	1401	17	878	2746	2883	2·17	3325	6538	7335
z_{23}	c_{23}	p_{23}	t_{23}	s_{23}	x_{123}	x_{223}	t_{23}	s_{23}	x_{123}	x_{223}	t_{23}	s_{23}	x_{123}	x_{223}	t_{23}
373	527	900	1273	23	284	592	657	23	...	2214	2587	2·23	633	3066	3131
65	89	154	219	23	58	106	123	23	236	400	465	2·23	133	574	591
17	7	24	41	23	64	44	81	23	78	186	203	2·23	165	378	415
37	-47	-10	27	23	326	158	363	23	232	716	753	2·23	857	1694	1899
205	-289	-84	121	23	1892	904	2097	23	...	4110	4315	2·23	4977	9786	10979

Отметим возможность формирования некоторых четверок последовательностей чисел бесконечной длины. Четверки последовательностей чисел определяют для разных s_i бесконечное число последовательностей чисел бесконечной длины псевдоевклидового характера (таблица 8), причем эти последовательности определены значениями четверок чисел z , c , p и t . Это соответствует четырехзаходным спиралям (4-спирали). Они характеризуются восьмью значениями чисел на каждой ступени, которые определяются (в данном случае) параметрами исходных двухзаходных спиралей. Таким образом, можно считать, что четырехзаходные спиральные последовательности чисел являются функциями двухзаходных спиральных последовательностей.

Справедливость этого показана в таблице 8. В ней приведены три типа четырехзаходных спиралей (x_1, x_2, x_3, t) , являющихся линейными комбинациями со сдвигом, последовательностей чисел z_i , c_i , p_i и t_i для $d_i=1, 7, 17, 23, \dots$

Характерной особенностью таких числовых последовательностей является постоянное значение определителей между соседними четверками чисел в каждой паре из четырех числовых рядов x_1 , x_2 , x_3 , t и постоянство значения s (таблица 8), так что выполняется уравнение

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \pm s^2,$$

при $s = \text{const.}$

Аналогично времениподобному пространству формируется пространственноподобное пространство с другим знаком при s^2 .

Таблица 8.

z_1	c_1	p_1	t_1	s_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	t_1	s_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	t_1
29	41	70	99	1	46	58	80	109	1	111	140	193	263
5	7	12	17	1	8	10	14	19	1	19	24	33	45
1	1	2	3	1	2	2	4	5	1	3	4	5	7
1	-1	0	1	1	4	2	10	11	1	-1	0	-3	-3
5	-7	-2	3	1	22	10	56	61	1	-9	-4	-23	-25
z_7	c_7	p_7	t_7	s_7	x_{17}	x_{27}	x_{37}	t_7	s_7	x_{17}	x_{27}	x_{37}	t_7
97	137	234	331	7	154	194	268	365	7	371	468	645	879
17	23	40	57	7	28	34	50	67	7	63	80	109	149
5	1	6	11	7	14	10	32	37	7	7	12	9	15
13	-17	-4	9	7	56	26	142	155	7	-21	-8	-55	-59
73	-103	-30	43	7	322	146	820	893	7	-133	-60	-339	-369
z_{17}	c_{17}	p_{17}	t_{17}	s_{17}	x_{117}	x_{217}	x_{317}	t_{17}	s_{17}	x_{117}	x_{217}	x_{317}	t_{17}
305	431	736	1041	17	484	610	842	1147	17	1167	1472	2029	2765
53	73	126	179	17	86	106	152	205	17	199	252	345	471
13	7	20	33	17	32	26	70	83	17	27	40	41	61
25	-31	-6	19	17	106	50	268	293	17	-37	-12	-99	-105
137	-193	-56	81	17	604	274	1538	1675	17	-249	-112	-635	-691
z_{23}	c_{23}	p_{23}	t_{23}	s_{23}	x_{123}	x_{223}	x_{323}	t_{23}	s_{23}	x_{123}	x_{223}	x_{323}	t_{23}
373	527	900	1273	23	592	746	1030	1403	23	1427	1800	2481	3381
65	89	154	219	23	106	130	188	253	23	243	308	421	575
17	7	24	41	23	44	34	98	115	23	31	48	45	69
37	-47	-10	27	23	158	74	400	437	23	-57	-20	-151	-161
205	-289	-84	121	23	904	410	2302	2507	23	-373	-168	-951	-1035

Отметим возможность формирования некоторых пятерок (шестерок, семерок, восьмерок) последовательностей чисел бесконечной длины. Пятерки (шестерки, семерки, восьмерки) последовательностей чисел определяют для разных s_i бесконечное число последовательностей чисел бесконечной длины псевдоевклидоваго характера (таблица 8), причем эти последовательности определены значениями четверок чисел z , c , p и t . Это соответствует пяти (шести-, семи-, восьми-) заходным спиральям (5-, 6-, 7-, 8-спирали). Они характеризуются удвоенными значениями чисел на каждой ступени, которые определяются (в данном случае) параметрами исходных двухзаходных спиралей. Таким образом, можно считать, что пяти (шести-, семи-, восьми-) заходные спиральные последовательности чисел являются функциями двухзаходных спиральных последовательностей.

Справедливость этого показана в таблице 9. В ней приведены два типа пяти (шести-, семи-, восьми-) заходных спиралей ($x_1, x_2, \dots, x_n, t$), являющихся линейными комбинациями со сдвигом, последовательностей чисел z_i, c_i, p_i и t_i для $d_i=1, 7, 17, 23, \dots$

Характерной особенностью таких числовых последовательностей является постоянное значение определителей между соседними пятерками (шестерками, семерками, восьмерками) чисел в каждой паре из пяти (шести-, семи-, восьми-) числовых рядов $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ и постоянство значения s (таблица 9), так что выполняется уравнение

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \pm s^2,$$

при $s=s_1=1$, где блоки соответствуют времениподобному и пространственноподобному интервалам.

Таблица 9.

x_1	x_2	x_3	x_4	t				x_1	x_2	x_3	x_4	t			
46	58	58	138	167				111	140	140	333	403			
8	10	10	24	29				19	24	24	57	69			
2	2	2	6	7				3	4	4	9	11			
4	2	2	12	13				-1	0	0	-3	-3			
22	10	10	66	71				-9	-4	-4	-27	-29			
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t		
46	58	58	58	196	225			111	140	140	140	473	543		
8	10	10	10	34	39			19	24	24	24	81	93		
2	2	2	2	8	9			3	4	4	4	13	15		
4	2	2	2	14	15			-1	0	0	0	-3	-3		
22	10	10	10	76	81			-9	-4	-4	-4	-31	-33		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	t		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	t	
46	58	58	58	58	254	283		111	140	140	140	140	613	683	
8	10	10	10	10	44	49		19	24	24	24	24	105	117	
2	2	2	2	2	10	11		3	4	4	4	4	17	19	
4	2	2	2	2	16	17		-1	0	0	0	0	-3	-3	
22	10	10	10	10	86	91		-9	-4	-4	-4	-4	-35	-37	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	t
46	58	58	58	58	58	312	341	111	140	140	140	140	140	753	823
8	10	10	10	10	10	54	59	19	24	24	24	24	24	129	141
2	2	2	2	2	2	12	13	3	4	4	4	4	4	21	23
4	2	2	2	2	2	18	19	-1	0	0	0	0	0	-3	-3
22	10	10	10	10	10	96	101	-9	-4	-4	-4	-4	-4	-39	-41

Аналогичным образом можно привести совокупности последовательностей чисел бесконечной длины для других значений s так для $s=s_7$ эти последовательности имеют вид

Таблица 10.

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	t				x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	t			
154	194	194	462	559				371	468	468	1113	1347			
28	34	34	84	101				63	80	80	189	229			
14	10	10	42	47				7	12	12	21	27			
56	26	26	168	181				-21	-8	-8	-63	-67			
322	146	146	966	1039				-133	-60	-60	-399	-429			
x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	t			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	t		
154	194	194	194	656	753			371	468	468	468	1581	1815		
28	34	34	34	118	135			63	80	80	80	269	309		
14	10	10	10	52	57			7	12	12	12	33	39		
56	26	26	26	194	207			-21	-8	-8	-8	-71	-75		
322	146	146	146	1112	1185			-133	-60	-60	-60	-459	-489		
x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	t		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	t	
154	194	194	194	194	850	947		371	468	468	468	468	2049	2283	
28	34	34	34	34	152	169		63	80	80	80	80	349	389	
14	10	10	10	10	62	67		7	12	12	12	12	45	51	
56	26	26	26	26	220	233		-21	-8	-8	-8	-8	-79	-83	
322	146	146	146	146	1258	1331		-133	-60	-60	-60	-60	-519	-549	
x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	t	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	t
154	194	194	194	194	194	1044	1141	371	468	468	468	468	468	2517	2751
28	34	34	34	34	34	186	203	63	80	80	80	80	80	429	469
14	10	10	10	10	10	72	77	7	12	12	12	12	12	57	63
56	26	26	26	26	26	246	259	-21	-8	-8	-8	-8	-8	-87	-91
322	146	146	146	146	146	1404	1477	-133	-60	-60	-60	-60	-60	-579	-609

Таким образом, можно найти решения основного уравнения специальной теории относительности

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \pm s^2$$

и аналогичного уравнения восьмимерного пространства – времени

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2) = \pm s^2$$

в целых числах при различных значениях квадрата интервала для времениподобного и пространственноподобного вариантов. Эти решения являются основой для получения иных соотношений, определяемых целочисленными значениями t , x_i , s , например, скорости, так что *можно говорить о квантованности физических величин*.

Вообще говоря, возможно построение n -мерного соотношения для квадрата интервала. Однако таким решениям не будет соответствовать определенная векторная алгебра, т. е. видимо, такой вариант не приемлем.

Литература

1.Грин Б. Ткань космоса: Пространство, время и текстура реальности. Пер. с англ./Под ред. В.О.Малышенко и А.Д.Панова. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 608с.

2.Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной гипотезы. Пер. с англ. /Общ. Ред. В.О.Малышенко. — М.: Едиториал УРСС, 2004.— 288с.

3.Коротков А.В. Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов//Сознание и физическая реальность. 2009. №11. — (с.17-31).

4.Коротков А. В. Элементы классификации пифагоровых чисел.— Новочеркасск: Набла, 2009.— 73 с.

5.Макдональд Д., Стефанович Д., Стоянович Д. ДНК-компьютеры для работы и развлечений//В мире науки. 2010. №3.— (с.62-71).

6.Нейдриен С. Нанотехнологии и двойная спираль//В мире науки. 2004. № 9. — (с.22-31).

7.Паун Г., Розенберг Г., Саломаа А. ДНК-компьютер. Новая парадигма вычислений: Пер. с англ. — М.: Мир, 2003. — 528с.

8. Пенроуз Р. Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 912с.

9. Сяхович В. И. Пифагоровы точки. — Минск: Изд. Центр БГУ, 2007.—288с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СУММЫ ВОСЬМИ КВАДРАТОВ

Каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел [1]. Доказательство этого замечательного факта сделал Лагранж и оно опирается на известное алгебраическое тождество Эйлера

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2,$$

где

$$c_0 = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

$$c_1 = a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2,$$

$$c_2 = a_0b_2 - a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$c_3 = a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1.$$

Справедливость этого тождества нетрудно уточнить. Действительно

$$\begin{aligned} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \\ &+ (a_0b_2 - a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_3 - a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ &= (a_0b_0)^2 + 2a_0b_0a_1b_1 + (a_1b_1)^2 + 2(a_0b_0 + a_1b_1)(a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_2)^2 + 2a_2b_2a_3b_3 + (a_3b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_1)^2 - 2a_0b_1a_1b_0 + (a_1b_0)^2 + 2(a_0b_1 - a_1b_0)(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2b_3)^2 - \\ &- 2a_2b_3a_3b_2 + (a_3b_2)^2 + \\ &+ (a_0b_2)^2 - 2a_0b_2a_2b_0 + (a_2b_0)^2 + 2(a_0b_2 - a_2b_0)(a_3b_1 - a_1b_3) + (a_3b_1)^2 - \\ &- 2a_3b_1a_1b_3 + (a_1b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_3)^2 - 2a_0b_3a_3b_0 + (a_3b_0)^2 + 2(a_0b_3 - a_3b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1b_2)^2 - \\ &- 2a_1b_2a_2b_1 + (a_2b_1)^2 = \\ &= 2(a_0b_0a_1b_1 + a_0b_0a_2b_2 + a_0b_0a_3b_3 + a_1b_1a_2b_2 + a_1b_1a_3b_3 + a_2b_2a_3b_3 - \\ &- a_0b_1a_1b_0 + a_0b_1a_2b_3 - a_0b_1a_3b_2 - a_1b_0a_2b_3 + a_1b_0a_3b_2 - a_2b_3a_3b_2 - \\ &- a_0b_2a_2b_0 + a_0b_2a_3b_1 - a_0b_2a_1b_3 - a_2b_0a_3b_1 + a_2b_0a_1b_3 - a_3b_1a_1b_3 - \\ &- a_0b_3a_3b_0 + a_0b_3a_1b_2 - a_0b_3a_2b_1 - a_3b_0a_1b_2 + a_3b_0a_2b_1 - a_1b_2a_2b_1) + \\ &+ (a_0b_0)^2 + (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_1)^2 + (a_1b_0)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + \\ &+ (a_0b_2)^2 + (a_2b_0)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 + \\ &+ (a_0b_3)^2 + (a_3b_0)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2. \end{aligned}$$

Первая часть последнего тождества обращается в нуль, так что $(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)=c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2$.

Справедливость этого тождества при любых (a_0, a_1, a_2, a_3) и (b_0, b_1, b_2, b_3) легко проверяется также непосредственным вычислением. Нужно отметить, что это не единственная возможность разложения чисел на сумму квадратов. Попытки представить натуральные числа в виде суммы двух квадратов дают желаемый результат также в случае двухкомпонентных переменных (a_0, a_1) и

$$(b_0, b_1) \text{ когда } (a_0^2+a_1^2)(b_0^2+b_1^2)=c_0^2+c_1^2,$$

где

$$c_0=a_0b_0+a_1b_1,$$

$$c_1=a_0b_1-a_1b_0,$$

что, в частности, справедливо для простых чисел вида $4n+1$. В то время как простые числа $4n+1$ представимы в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, простые числа вида $4n+3$ не всегда представимы даже в виде суммы трех квадратов. Как отметил Лагранж, каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Это одна из причин классификации натуральных (в частности простых) чисел с применением сравнений по модулю 4. В этой классификации простые числа при $p \neq 2$ составляют два вида чисел: $4n+1$ и $4n+3$.

Вместе с тем внимательное рассмотрение алгебраического тождества Эйлера, в частности его компонент (a_0, a_1, a_2, a_3) , (b_0, b_1, b_2, b_3) и (c_0, c_1, c_2, c_3) показывает, что четыре числа (c_0, c_1, c_2, c_3) формируют скалярное и векторное произведения двух векторов трехмерной векторной алгебры. Кроме трехмерной векторной алгебры описаны семимерные векторные алгебры. В них, в частности, определены скалярные и векторные произведения, которые следуют из координатной записи восьмикомпонентных величин. Так, полагая $(a_0, a_1, \dots, a_7)$, $(b_0, b_1, \dots, b_7)$ и $(c_0, c_1, \dots, c_7)$ имеем [2]

$$c_0 = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7,$$

$$c_1 = a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7,$$

$$c_2 = a_0b_2 - a_2b_0 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_5b_7 - a_7b_5 + a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$c_3 = a_0b_3 - a_3b_0 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_7b_4,$$

$$c_4 = a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_6b_2 - a_2b_6,$$

$$c_5 = a_0b_5 - a_5b_0 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_6b_3 + a_1b_4 - a_4b_1,$$

$$c_6 = a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_3b_5,$$

$$c_7 = a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2.$$

Справедливость этого тождества уточняется аналогично четырехмерному тождеству Эйлера

$$\begin{aligned}
& c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_7^2 = \\
& = (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7)^2 + \\
& + (a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7)^2 + \\
& + (a_0b_2 - a_2b_0 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_5b_7 - a_7b_5 + a_3b_1 - a_1b_3)^2 + \\
& + (a_0b_3 - a_3b_0 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_7b_4)^2 + \\
& + (a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_6b_2 - a_2b_6)^2 + \\
& + (a_0b_5 - a_5b_0 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_6b_3 + a_1b_4 - a_4b_1)^2 + \\
& + (a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_3b_5)^2 + \\
& + (a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2)^2 = \\
& = (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 + 2(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7) + \\
& + (a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7)^2 + (a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)^2 + 2(a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2) \\
& (a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7) + (a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7)^2 + (a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + \\
& + 2(a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3)(a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2) + (a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - \\
& a_5b_2)^2 = (a_0b_0)^2 + 2a_0b_0a_1b_1 + (a_1b_1)^2 + 2(a_0b_0 + a_1b_1)(a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_2)^2 + 2a_2b_2a_3b_3 + \\
& + (a_3b_3)^2 + 2(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7) + \\
& + (a_4b_4)^2 + 2a_4b_4a_5b_5 + (a_5b_5)^2 + 2(a_4b_4 + a_5b_5)(a_6b_6 + a_7b_7) + (a_6b_6)^2 + 2a_6b_6a_7b_7 + \\
& + (a_7b_7)^2 + (a_0b_1)^2 - 2a_0b_1a_1b_0 + (a_1b_0)^2 + 2(a_0b_1 - a_1b_0)(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2b_3)^2 - \\
& - 2a_2b_3a_3b_2 + (a_3b_2)^2 + 2(a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)(a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7) + \\
& + (a_4b_5)^2 - 2a_4b_5a_5b_4 + (a_5b_4)^2 + 2(a_4b_5 - a_5b_4)(a_7b_6 - a_6b_7) + (a_7b_6)^2 - \\
& - 2a_7b_6a_6b_7 + (a_6b_7)^2 + (a_0b_7)^2 - 2a_0b_7a_7b_0 + (a_7b_0)^2 + 2(a_0b_7 - a_7b_0)(a_3b_4 - \\
& - a_4b_3) + (a_3b_4)^2 - 2a_3b_4a_4b_3 + (a_4b_3)^2 + 2(a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3)(a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - \\
& - a_5b_2) + (a_6b_1)^2 - 2a_6b_1a_1b_6 + (a_1b_6)^2 + 2(a_6b_1 - a_1b_6)(a_2b_5 - a_5b_2) + (a_2b_5)^2 - \\
& - 2a_2b_5a_5b_2 + (a_5b_2)^2 = \\
& = 2((a_0b_0 + a_1b_1)(a_2b_2 + a_3b_3) + (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
& (a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7) + (a_4b_4 + a_5b_5)(a_6b_6 + a_7b_7) + (a_0b_1 - a_1b_0) \\
& (a_2b_3 - a_3b_2) + (a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)(a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7) + (a_4b_5 - a_5b_4)(a_7b_6 - \\
& - a_6b_7) + (a_0b_7 - a_7b_0)(a_3b_4 - a_4b_3) + (a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3)(a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - \\
& - a_5b_2) + (a_6b_1 - a_1b_6)(a_2b_5 - a_5b_2)) + 2(a_0b_0a_1b_1 + a_2b_2a_3b_3 + a_4b_4a_5b_5 + a_7b_7a_6b_6 - \\
& - a_0b_1a_1b_0 - a_2b_3a_3b_2 - a_4b_5a_5b_4 - a_7b_6a_6b_7 - a_0b_7a_7b_0 - a_3b_4a_4b_3 - a_6b_1a_1b_6 - a_2b_5a_5b_2) + \\
& + ((a_0b_0)^2 + (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2 + (a_4b_4)^2 + (a_5b_5)^2 + (a_6b_6)^2 + (a_7b_7)^2 + \\
& + (a_0b_1)^2 + (a_1b_0)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_4b_5)^2 + (a_5b_4)^2 + (a_7b_6)^2 + (a_6b_7)^2 + \\
& + (a_0b_2)^2 + (a_2b_0)^2 + (a_4b_6)^2 + (a_6b_4)^2 + (a_5b_7)^2 + (a_7b_5)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 + \\
& + (a_0b_3)^2 + (a_3b_0)^2 + (a_6b_5)^2 + (a_5b_6)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_4b_7)^2 + (a_7b_4)^2 + \\
& + (a_0b_4)^2 + (a_4b_0)^2 + (a_5b_1)^2 + (a_1b_5)^2 + (a_7b_3)^2 + (a_3b_7)^2 + (a_6b_2)^2 + (a_2b_6)^2 + \\
& + (a_0b_5)^2 + (a_5b_0)^2 + (a_7b_2)^2 + (a_2b_7)^2 + (a_3b_6)^2 + (a_6b_3)^2 + (a_1b_4)^2 + (a_4b_1)^2 + \\
& + (a_0b_6)^2 + (a_6b_0)^2 + (a_1b_7)^2 + (a_7b_1)^2 + (a_2b_4)^2 + (a_4b_2)^2 + (a_5b_3)^2 + (a_3b_5)^2 + \\
& + (a_0b_7)^2 + (a_7b_0)^2 + (a_3b_4)^2 + (a_4b_3)^2 + (a_6b_1)^2 + (a_1b_6)^2 + (a_2b_5)^2 + (a_5b_2)^2).
\end{aligned}$$

Значительная часть этого тождества обращается в нуль, а последний блок не нулевой, причем соответствует соотношению

$$(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2+b_7^2)=c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2+c_7^2.$$

Для восстановления недостающего текста, отмеченного тремя точками, следует пользоваться следующими подстановками индексов во 2, 3, 4, 5, 6 строчках формул.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Таким образом, получено представление суммы восьми квадратов как произведение двух сумм из восьми квадратов и имеют место следующие соотношения:

- в случае двухкомпонентных величин

$$c_0=a_0b_0+a_1b_1,$$

$$c_1=a_0b_1-a_1b_0;$$

$$(a_0^2+a_1^2)(b_0^2+b_1^2)=c_0^2+c_1^2$$

- в случае четырехкомпонентных величин

$$c_0= a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$c_1= a_0b_1 -a_1b_0+a_2b_3 -a_3b_2,$$

$$c_2= a_0b_2 -a_2b_0+ a_3b_1-a_1b_3,$$

$$c_3= a_0b_3 -a_3b_0+ a_1b_2-a_2b_1;$$

$$(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2)=c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2;$$

- в случае восьмикомпонентных величин

$$c_0=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6+a_7b_7,$$

$$c_1=a_0b_1 -a_1b_0+a_2b_3 -a_3b_2+a_4b_5 -a_5b_4+a_7b_6 -a_6b_7,$$

$$c_2=a_0b_2 -a_2b_0+a_4b_6 -a_6b_4+a_5b_7 -a_7b_5+a_3b_1 -a_1b_3,$$

$$c_3=a_0b_3 -a_3b_0+a_6b_5 -a_5b_6+a_1b_2 -a_2b_1+a_4b_7 -a_7b_4,$$

$$c_4=a_0b_4 -a_4b_0+a_5b_1 -a_1b_5+a_7b_3 -a_3b_7+a_6b_2 -a_2b_6,$$

$$c_5=a_0b_5 -a_5b_0+a_7b_2 -a_2b_7+a_3b_6 -a_6b_3+a_1b_4 -a_4b_1,$$

$$c_6=a_0b_6 -a_6b_0+a_1b_7 -a_7b_1+a_2b_4 -a_4b_2+a_5b_3 -a_3b_5,$$

$$c_7=a_0b_7 -a_7b_0+a_3b_4 -a_4b_3+a_6b_1 -a_1b_6+a_2b_5 -a_5b_2$$

$$(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2+b_7^2)$$

=

$$=c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2+c_6^2+c_7^2.$$

Очевидно также, что:

- каждое простое число представимо в виде суммы восьми квадратов;
- каждое натуральное число представимо в виде суммы восьми квадратов.

Доказательство аналогично теоремам 302 и 303 [1].

Возникает вопрос о единственности представления чисел. В двумерном случае возможно единственное представление величины (c_0, c_1) произведением сумм квадратов (a_0, a_1) и (b_0, b_1) . В четырехмерном случае возможны два вида векторных произведений и, следовательно, два вида представлений числа. В восьмимерном случае возможное число векторных произведений равно 480 [2]. Так в указанной таблице подстановки индексов соответствуют четыре различные семимерные векторные алгебры с векторными произведениями двух векторов **[ab]** вида:

$$[\mathbf{ab}]_1 = |123| + |246| + |365| + |451| + |572| + |617| + |734|,$$

$$[\mathbf{ab}]_2 = |132| + |264| + |356| + |415| + |527| + |671| + |743|,$$

$$[\mathbf{ab}]_3 = |125| + |247| + |362| + |453| + |576| + |614| + |731|,$$

$$[\mathbf{ab}]_4 = |152| + |274| + |326| + |435| + |567| + |641| + |713|,$$

где символом $|ijk|$ обозначен определитель из координат векторов **a**, **b** и ортов системы координат

$$|ijk| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}.$$

Вместе с тем имеют место 120 систем подстановок индексов и, следовательно, 480 семимерных векторных произведений. Им соответствует определенные представления натуральных чисел в виде сумм восьми квадратов. Покажем это на примере.

Рассмотренному способу умножения величин **a** и **b** соответствуют значения восьми координат числа **c=ab**

$$a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7,$$

$$a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7,$$

$$a_0b_2 - a_2b_0 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_5b_7 - a_7b_5 + a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$a_0b_3 - a_3b_0 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_7b_4,$$

$$a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_7b_3 - a_3b_7 + a_6b_2 - a_2b_6,$$

$$a_0b_5 - a_5b_0 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_6b_3 + a_1b_4 - a_4b_1,$$

$$a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_3b_5,$$

$$a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2.$$

Таблица 1.

i	a_i	b_i	c_i	a_i^2	b_i^2	c_i^2
0	1	5	390	1	25	152100
1	9	6	-43	81	36	1849
2	3	7	-72	9	49	5184
3	4	8	25	16	64	625
4	5	9	-38	25	81	1444
5	6	10	39	36	100	1521
6	7	11	36	49	121	1296
7	8	12	-101	64	144	10201
				$\sum a_i^2=281$	$\sum b_i^2=620$	$\sum c_i^2=174220$

При этом выполняется равенство

$$281 \cdot 620 = 174220.$$

Квадрат координаты c_0 характеризует скалярное произведение восьмимерных величин и определяется первой строчкой произведения векторов. Остальные семь компонент величины $\sum c_i^2$ характеризуют набор квадратов его векторных компонент. Нижняя строчка таблицы 1 соответствуют сумме квадратов $\sum a_i^2$ и $\sum b_i^2$ и произведению сумм квадратов $\sum a_i^2$ и $\sum b_i^2$. Покажем характер изменений суммы квадратов восьми компонент для восьмимерного случая характеризуемого векторным произведением

$$[\mathbf{ab}]_3 = |125| + |247| + |362| + |453| + |576| + |614| + |731|, \text{ или}$$

$$a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 + a_6b_6 + a_7b_7,$$

$$a_0b_1 - a_1b_0 + a_2b_5 - a_5b_2 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_7b_3 - a_3b_7,$$

$$a_0b_2 - a_2b_0 + a_4b_7 - a_7b_4 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_3b_6 - a_6b_3,$$

$$a_0b_3 - a_3b_0 + a_6b_2 - a_2b_6 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_4b_5 - a_5b_4,$$

$$a_0b_4 - a_4b_0 + a_5b_3 - a_3b_5 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_6b_1 - a_1b_6,$$

$$a_0b_5 - a_5b_0 + a_7b_6 - a_6b_7 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$a_0b_6 - a_6b_0 + a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_5b_7 - a_7b_5,$$

$$a_0b_7 - a_7b_0 + a_3b_1 - a_1b_3 + a_6b_5 - a_5b_6 + a_2b_4 - a_4b_2.$$

При этом имеем расчетную таблицу в виде таблицы 2.

Таблица 2.

i	a_i	b_i	c_i	a_i^2	b_i^2	c_i^2
0	1	5	390	1	25	152100
1	9	6	-43	81	36	1849
2	3	7	-86	9	49	7396
3	4	8	60	16	64	3600
4	5	9	-45	25	81	2025
5	6	10	25	36	100	625
6	7	11	15	49	121	225
7	8	12	-80	64	144	6400
				$\sum a_i^2=281$	$\sum b_i^2=620$	$\sum c_i^2=174220$

Как показано в таблицах 1 и 2 величина c_0^2 , а также величина суммы квадратов $\sum c_i^2$, сохраняют свои значения. Величина суммы квадратов

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_7^2$$

также сохраняется. Вместе с тем квадраты семи оставшихся координат изменяются от системы к системе и определяются векторным произведением векторов данной системы (таблица 3).

Таблица 3.

$[ab]_1$	$[ab]_2$	$[ab]_3$	$[ab]_4$		$[ab]_k$		$[ab]_n$
152100	152100	152100	152100	152100	152100	152100	152100
1849	1225	1849	1225	...	3481	...	361
5184	3136	7396	4900	...	4096	...	2304
625	2401	3600	7056	...	1089	...	3249
1444	36	2025	169	...	5776	...	1936
1521	6241	625	4225	...	4761	...	841
1296	7056	225	3969	...	2916	...	10404
10201	2025	6400	576	...	1	...	3025
174220	174220	174220	174220	174220	174220	174220	174220

Из таблицы 3 следует, что все $n=480$ систем восьмимерных векторов дают одно и то же значение скалярного произведения и суммы квадратов координат векторов. Отдельные координаты векторов могут совпадать, однако, набор координат в каждой системе индивидуальный. Квадраты семи векторных координат также характеризуют одно и то же значение суммы. Аналогичная картина имеет место для сумм четырех, а также сумм двух квадратов.

Литература

1. Бухштаб А. А. Теория чисел: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб: Издательство «Лань», 2008. – 384с.
2. Коротков А. В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

СТРУКТУРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПИФАГОРОВЫХ ЧИСЕЛ

Бесконечные последовательности чисел можно получить путем рассмотрения решений уравнения Диофанта

$$t^2 - ax^2 = \pm b$$

в целых числах [1]. При этом, как правило, возникают произвольные ряды целых чисел.

Рассмотрим последовательности пифагоровых чисел. С четверками пифагоровых чисел в паре последовательностей можно связать физические (в частности, геометрические) величины. Это показано в [2] для $a=2$ и $b=x_0^2$, где $x_0=\text{const}$. При этом выполняются уравнения (Диофанта):

$$c^2 - 2z^2 = -x_0^2,$$

$$r^2 - 2p^2 = +x_0^2.$$

Здесь четверки чисел z, c, p, r характеризуют соответственно гипотенузы, суммы катетов, периметры и суммы периметров с гипотенузами. При этом в правой части уравнения Диофанта стоит величина x_0^2 квадрата модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Выполняется также теорема Пифагора

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

где x_1 и x_2 – катеты бесконечной последовательности прямоугольных треугольников, определяемых одним и тем же значением модуля разности катетов (Таблица 1). Величина модуля разности катетов отмечена нижним индексом. Очевидно, что уравнение Пифагора соответствует двумерной проекции “светового” конуса в трехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени [2]. Это придает уравнению Пифагора особое значение и позволяет рассмотреть широкий класс уравнений вида

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \pm x_0^2,$$

включающий времени подобный и пространственно подобный случаи в целочисленных решениях для многомерного уравнения Пифагора, когда $x_0=0$.

В таблице 1 значения рядов z, c, p и r , а также чисел m и n , могут быть безгранично продолжены в обоих вертикальных направлениях, причем используются одни и те же рекуррентные соотношения [3]

$$m_{k+1}=2m_k+m_{k-1},$$

$$n_{k+1}=2n_k+n_{k-1},$$

$$z_{k+1}=6z_k-z_{k-1},$$

$$c_{k+1}=6c_k-c_{k-1},$$

$$p_{k+1}=6p_k-p_{k-1},$$

$$r_{k+1}=6r_k-r_{k-1}.$$

Таблица 1.

m	n	m ₇	n ₇	m ₁	n ₁₇	m ₂	n ₂₃	m ₃₁	n ₃₁	m ₄₁	n ₄₁	m ₄₇	n ₄₇	m ₄₉	n ₄₉
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	25
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	11
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
0	1	-4	9	-6	19	-	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
1	-	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-	65	-79	61	-
z ₁	c ₁	z ₇	c ₇	z ₁₇	c ₁₇	z ₂₃	c ₂₃	z ₃₁	c ₃₁	z ₄₁	c ₄₁	z ₄₇	c ₄₇	z ₄₉	c ₄₉
2	4	97	13	30	431	37	527	629	889	505	713	905	127	106	15
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	25
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
1	-	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-	65	-79	61	-
5	-	73	-	13	-	20	-	221	-	481	-	353	-	325	-
	7		10	7	193	5	289		311		679		497		45
p ₁	r ₁	p ₇	r ₇	p ₁₇	r ₁₇	p ₂₃	r ₂₃	p ₃₁	r ₃₁	p ₄₁	r ₄₁	p ₄₇	r ₄₇	p ₄₉	r ₄₉
7	9	23	33	73	104	90	127	151	214	121	172	218	308	258	36
1	1	40	57	12	179	15	219	260	369	208	297	374	531	442	62
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	11
0	1	-4	9	-6	19	-	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
-2	3	-	43	-	81	-	121	-90	131	-	283	-	209	-	19

Эти числа в каждом ряду располагаются по вертикальной линейке бесконечной длины в обе стороны. Последовательности чисел m и n , z и c , p и r , получаются с точностью до знака при одном и том же значении x_{0i}^2 и определителя Δ_i (таблица 2).

Таблица 2.

n ₁	m ₁	± x ₀ ²	c ₁	z ₁	- x ₀ ²	r ₁	p ₁	x ₀ ²
7	5	-1 ²	41	29	-1 ²	99	70	1 ²
3	2	1 ²	7	5	-1 ²	17	12	1 ²
1	1	-1 ²	1	1	-1 ²	3	2	1 ²
1	0	1 ²	-1	1	-1 ²	1	0	1 ²
-1	1	-1 ²	-7	5	-1 ²	3	-2	1 ²
n ₇	m ₇	± x ₀ ²	c ₇	z ₇	- x ₀ ²	r ₇	p ₇	x ₀ ²
23	17	-7 ²	137	97	-7 ²	331	234	7 ²
11	6	7 ²	23	17	-7 ²	57	40	7 ²
1	5	-7 ²	1	5	-7 ²	11	6	7 ²
9	-4	7 ²	-17	13	-7 ²	9	-4	7 ²
-17	13	-7 ²	-103	73	-7 ²	43	-30	7 ²

n_{17}	m_{17}	$\pm x_0^2$	c_{17}	z_{17}	$-x_0^2$	r_{17}	p_{17}	x_0^2
73	53	-17^2	431	305	-17^2	1041	736	17^2
33	20	17^2	73	53	-17^2	179	126	17^2
7	13	-17^2	7	13	-17^2	33	20	17^2
19	-6	17^2	-31	25	-17^2	19	-6	17^2
-31	25	-17^2	-193	137	-17^2	81	-56	17^2
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 2 дает классификацию рядов m и n бесконечных числовых последовательностей, соответствующих данному значению модуля разности катетов. То же самое относится к рядам числовых последовательностей z, c , и p, r . Отметим, что величина x_{0i} может принимать значения из двух классов вычетов по модулю восемь $-1, 17, 41, 49, 73, 89, 97, 113, \dots$, (т.е. чисел вида $8n+1$) или $7, 23, 31, 47, 71, 79, 103, 119, \dots$, (т.е. чисел вида $8n+7$), составленных из соответствующих простых чисел, их произведений и степеней.

Рассмотрим процедуру формирования пифагоровых чисел и их последовательностей. В случае двумерного уравнения Пифагора известен ряд способов формирования троек пифагоровых чисел [3]. Нами найдено уравнение, упрощающее процесс нахождения троек пифагоровых чисел в виде

$$x_1^2 + (((x_1^2/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2/d) + d)/2)^2.$$

Здесь d -разность между гипотенузой t и катетом x_2 . Результаты расчетов приведены в таблице 3.

Таблица 3.

$d=1$			$d=2$			$d=8$			...
x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	...
1	0	1	4	3	5	4	-3	5	...
3	4	5	8	15	17	12	5	13	...
5	12	13	12	35	37	20	21	29	...
7	24	25	16	63	65	28	45	53	...
9	40	41	20	99	101	36	77	85	...
11	60	61	24	143	145	44	117	125	...
13	84	85	28	195	197	52	165	173	...
15	112	113	32	255	257	60	221	229	...
17	144	145	36	323	325	68	285	293	...
19	180	181	40	399	401	76	357	365	...
21	220	221	44	483	485	84	437	445	...
23	264	265	48	575	577	92	525	533	...
25	312	313	52	675	677	100	621	629	...
27	364	365	56	783	785	108	725	733	...
29	420	421	60	899	901	116	837	845	...
31	480	481	64	1023	1025	124	957	965	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Для последовательностей чисел, характеризующих гипотенузы прямоугольных треугольников используется рекуррентное соотношение

$$t_{n+1}=6t_n-t_{n-1},$$

а для последовательностей чисел, характеризующих как гипотенузы, так и катеты прямоугольных треугольников – соотношение

$$x_{n+1}=5(x_n+x_{n-1})-x_{n-2},$$

где в качестве t_{n+1} , t_n , t_{n-1} и x_{n+1} , x_n , x_{n-1} выступают величины x_1 , x_2 и t при одном и том же значении величины x_0 .

Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с двумя переменными, заключающуюся в том, что как и в случае $x_0=0$, тройки чисел целочисленных решений уравнения образуют последовательности, определяемые этими рекуррентными соотношениями (таблица 4).

Таблица 4.

	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	...
$d=1$	-3	-4	5	15	8	17	33	56	65	51	140	149	...
	-1	0	1	1	0	1	3	4	5	5	12	13	...
	1	0	1	3	4	5	5	12	13	7	24	25	...
	3	4	5	5	12	13	7	24	25	9	40	41	...
	21	20	29	39	80	89	57	176	185	75	308	317	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	69	260	269	87	416	425	105	608	617	123	836	845	...
	7	24	25	9	40	41	11	60	61	13	84	85	...
	9	40	41	11	60	61	13	84	85	15	112	113	...
	11	60	61	13	84	85	15	112	113	17	144	145	...
	93	476	485	111	680	689	129	920	929	147	1196	1205	...
	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	...
$d=2$	12	-5	13	48	55	73	84	187	205	120	391	409	...
	0	-1	0	4	3	5	8	15	17	12	35	37	...
	4	3	5	8	15	17	12	35	37	16	63	65	...
	8	15	17	12	35	37	16	63	65	20	99	101	...
	60	91	109	96	247	265	132	475	493	168	775	793	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	156	667	685	192	1015	1033	228	1435	1453	264	1927	1945	...
	16	63	65	20	99	101	24	143	145	28	195	197	...
	20	99	101	24	143	145	28	195	197	32	255	257	...
	24	143	145	28	195	197	32	255	257	36	323	325	...
	204	1147	1165	240	1591	1609	276	2107	2125	312	2695	2713	...

	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	x_1	x_2	t	...
$d=8$	-12	-35	37	60	-11	61	132	85	157	204	253	325	...
	-4	-3	-5	4	-3	5	12	5	13	20	21	29	...
	4	-3	5	12	5	13	20	21	29	28	45	53	...
	12	5	13	20	21	29	28	45	53	36	77	85	...
	84	13	85	156	133	205	228	325	397	300	589	661	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	276	493	565	348	805	877	420	1189	1261	492	1645	1717	...
	28	45	53	36	77	85	44	117	125	52	165	173	...
	36	77	85	44	117	125	52	165	173	60	221	229	...
	44	117	125	52	165	173	60	221	229	68	285	287	...
	372	925	997	444	1333	1405	516	1813	1885	588	2365	2437	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Рассмотрим структуру формирования пифагоровых четверок чисел и числовых последовательностей из них.

Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что, как и в случае $x_0=0$, четверки чисел целочисленных решений уравнения Пифагора, также как и тройки Пифагора, образуют последовательности, однако, определяемые рекуррентными соотношениями

$$t_{k+1}=6t_k- t_{k-1},$$

$$x_{k+1}=6x_k- x_{k-1},$$

где в качестве t_{k+1} , t_k , t_{k-1} и x_{k+1} , x_k , x_{k-1} выступают три последовательные значения величины t или x_i при одном и том же значении величины x_0 . Некоторые из бесконечных последовательностей решений при положительном x_0^2 представлены в левой части таблицы 5.

Таблица 5.

x_0, x_1, x_2, t	x_0, x_1, x_2, t	x_0, x_1, x_2, t	x_0, x_1, x_2, t	x_0, x_1, x_2, t
...	...	...	...	...
2 54 141 151	3 56 312 317	2 49 238 243	2 70 198 210	14 234 662 702
2 10 25 27	3 10 54 55	2 9 42 43	2 12 34 36	14 40 114 120
2 6 9 11	3 4 12 13	2 5 14 15	2 6 6 6	14 6 22 18
2 26 29 39	3 14 18 23	2 21 42 47	2 0 2 0	14 -4 18 12
2 150 165 223	3 80 96 125	2 121 238 267	2 -2 6 -6	14 -30 86 90
...	...	...	...	...

Характерной особенностью таких числовых последовательностей являются постоянное значение определителей между соседними четверками чисел в каждой паре из трех числовых рядов x_1, x_2, t и постоянство значения x_0 , так что выполняется уравнение

$$t^2 - (x_1^2 + x_2^2) = \pm x_0^2,$$

при $x_0 = \text{const.}$

Такие же последовательности решений имеют место при отрицательном

x_0^2 (правая часть таблицы 5). В таблице 6 приведены некоторые четверки пифагоровых чисел. Все указанные таблицы можно продолжать в обоих направлениях по вполне понятным алгоритмам.

Таблица 6.

d=1				d=2				d=4				...
x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	2	2	3	2	2	1	3	2	2	-1	3	...
1	4	8	9	2	6	9	11	2	6	3	7	...
1	6	18	19	2	10	25	27	2	10	11	15	...
1	8	32	33	2	14	49	52	2	14	23	27	...
1	10	50	51	2	18	81	83	2	18	39	43	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	3	6	7	4	4	7	9	6	6	7	11	...
2	5	14	15	4	8	19	21	6	10	15	19	...
2	7	26	27	4	12	39	41	6	14	27	3	...
2	9	42	43	4	16	67	69	6	18	43	7	...
2	11	62	63	4	20	103	105	6	22	63	15	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3	4	12	13	6	6	17	19	10	10	23	27	...
3	6	22	23	6	10	33	35	10	14	35	39	...
3	8	36	37	6	14	57	59	10	18	51	55	...
3	10	54	55	6	18	89	91	10	22	71	75	...
3	12	76	77	6	22	129	131	10	26	95	99	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	5	20	21	8	8	31	33	14	14	47	51	...
4	7	32	33	8	12	51	53	14	18	63	67	...
4	9	48	49	8	16	79	81	14	22	83	87	...
4	11	68	69	8	20	115	117	14	26	107	111	...
4	13	92	93	8	24	159	161	14	30	135	139	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

В [3] показаны различные методы формирования четверок пифагоровых чисел и числовых последовательностей, в том числе при отрицательном знаке при x_0^2 (правая часть таблицы 6).

Нами найдено соотношение связи компонентов четверок пифагоровых чисел, облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + (((x_0^2 + x_1^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d = t - x_2$.

При $x_0=0$ имеем двумерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + (((x_1^2/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2/d) + d)/2)^2.$$

Приведем некоторые последовательности четверок пифагоровых чисел (таблица 7). Отметим уникальную особенность решений уравнения второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что как и в случае рассмотрения пифагоровых троек ($x_0=0$), четверки чисел целочисленных решений уравнения образуют последовательности, определяемые рекуррентными соотношениями

$$t_{k+1} = 6t_k - t_{k-1},$$

$$x_{k+1} = 6x_k - x_{k-1},$$

где в качестве t_{k+1} , t_k , t_{k-1} и x_{k+1} , x_k , x_{k-1} выступают величины x_1 , x_2 и t при одном и том же значении величины x_0 .

Приведенные таблицы можно легко продлить как угодно далеко в четырех направлениях. Тем самым создается набор взаимно простых четверок чисел удовлетворяющих уравнению Пифагора. Этот набор чисел позволяет сформировать бесконечные последовательности четверок чисел, некоторые из которых приведены в таблице 8. Для каждой из них важно согласовать только три четверки чисел. Более того, бесконечные последовательности четверок чисел связаны между собой простым и очевидным образом и могут быть легко расширены по горизонтали и вертикали (таблица 8).

Особо выделим, что отдельные последовательности четверок связаны с величинами p , r и d прямоугольных треугольников. Для формирования последовательностей четверок чисел могут использоваться пары соседних четверок. Приведем некоторые четверки пифагоровых чисел.

Таблица 7.

x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	70	70	99	17	736	736	1041	41	1218	1218	1723	49	2580	2580	3649
1	12	12	17	17	126	126	179	41	208	208	297	49	442	442	627
1	2	2	3	17	20	20	33	41	30	30	59	49	72	72	113
1	0	0	1	17	-6	-6	19	41	-28	-28	57	49	-10	-10	51
1	-2	-2	3	17	-56	-56	81	41	-198	-198	283	49	-132	-132	193
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
7	234	234	331	23	900	900	1273	31	1518	1518	2147	47	2184	2184	3089
7	40	40	57	23	154	154	219	31	260	260	369	47	374	374	531
7	6	6	11	23	24	24	41	31	42	42	67	47	60	60	97
7	-4	-4	9	23	-10	-10	27	31	-8	-8	33	47	-14	-14	51
7	-30	-30	43	23	-84	-84	121	31	-90	-90	131	47	-144	-144	209
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 8.

	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	x_0	x_1	x_2	t	...
$d=1$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	1	46	22	51	1	104	172	201	1	162	438	467	...
	1	8	4	9	1	18	30	35	1	28	76	81	...
	1	2	2	3	1	4	8	9	1	6	18	19	...
	1	4	8	9	1	6	18	19	1	8	32	33	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	2	11	10	15	2	21	42	47	2	31	94	99	...
	2	3	6	7	2	5	14	15	2	7	26	27	...
	2	7	26	27	2	9	42	43	2	11	62	63	...
	2	39	150	155	2	49	238	243	2	59	346	351	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	3	80	96	125	3	138	314	343	3	196	648	677	...
	3	14	18	23	3	24	56	61	3	34	114	119	...
	3	4	12	13	3	6	22	23	3	8	36	37	...
	3	10	54	55	3	12	76	77	3	14	102	103	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$d=2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	2	34	-19	39	2	150	165	223	2	266	581	639	...
	2	6	-3	7	2	26	29	39	2	46	101	111	...
	2	2	1	3	2	6	9	11	2	10	25	27	...
	2	6	9	11	2	10	25	27	2	14	49	51	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	4	12	3	13	4	32	47	57	4	52	131	141	...
	4	4	7	9	4	8	19	21	4	12	39	41	...
	4	12	39	41	4	16	67	69	4	20	103	105	...
	4	68	227	237	4	88	383	393	4	108	579	589	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	6	102	61	119	6	218	381	439	6	334	933	991	...
	6	18	13	23	6	38	69	79	6	58	165	175	...
	6	6	17	19	6	10	33	35	6	14	57	59	...
	6	18	89	91	6	22	129	131	6	26	177	179	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$d=2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	2	34	-53	63	2	150	39	155	2	266	247	363	...
	2	6	-9	11	2	26	7	27	2	46	43	63	...
	2	2	-1	3	2	6	3	7	2	10	11	15	...
	2	6	3	7	2	10	11	15	2	14	23	27	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	6	18	-1	19	6	38	27	47	6	58	75	95	...
	6	6	7	11	6	10	15	19	6	14	27	31	...
	6	18	43	47	6	22	63	67	6	26	87	91	...
	6	102	251	271	6	122	363	383	6	142	495	515	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	10	170	67	183	10	286	295	411	10	402	639	755	...
	10	30	15	35	10	50	55	75	10	70	115	135	...
	10	10	23	27	10	14	35	39	10	18	51	55	...
	10	30	123	127	10	34	155	159	10	38	191	195	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Очевидно, что увеличение числа компонент последовательностей приводит к трудностям в получении состава компонент и последовательностей из них, связанных с увеличением самих чисел. Усложняются также используемые методы.

Нами найдено соотношение связи компонентов пятерок чисел, облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d = t - x_3$.

При $x_0 = 0$ имеем трехмерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + x_2^2 + (((x_1^2 + x_2^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2 + x_2^2)/d) + d)/2)^2.$$

Для формирования последовательностей пятерок чисел могут использоваться пары соседних пятерок. Приведем некоторые пятерки пифагоровых чисел (таблица 9).

Таблица 9.

x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t	x_0	x_1	x_2	x_3	t
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150
1	1	17	145	146	1	2	18	164	165	1	3	19	185	186
1	1	19	181	182	1	2	20	202	203	1	3	21	225	226
1	1	21	221	222	1	2	22	244	245	1	3	23	269	270
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Уже эти пятерки чисел позволяют сформировать множество бесконечных последовательностей пятерок чисел комбинацией соседних пар, например таблицу 10 и 11.

Особо выделим последовательности отдельных пятерок связанных с величинами z , r и d прямоугольных треугольников.

Таблица 10.

X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	5	17	29	34	17	53	179	305	358	41	53	297	505	594	...
1	1	3	5	6	17	13	33	53	66	41	13	59	89	118	...
1	1	1	1	2	17	25	19	13	38	41	25	57	29	114	...
1	5	3	1	6	17	137	81	25	162	41	137	283	85	566	...
1	29	17	5	34	17	797	467	137	934	41	797	1641	481	3282	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
7	17	57	97	114	23	65	219	373	438	31	65	369	629	738	...
7	5	11	17	22	23	17	41	65	82	31	17	67	109	134	...
7	13	9	5	18	23	37	27	17	54	31	37	33	25	66	...
7	73	43	13	86	23	205	121	37	242	31	205	131	41	262	...
7	425	249	73	498	23	1193	699	205	1398	31	1193	753	221	1506	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 11.

X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	t
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	17	5	34	1	58	46	80	109	1	87	75	213	242
1	5	3	1	6	1	10	8	14	19	1	15	13	37	42
1	1	1	1	2	1	2	2	4	5	1	3	3	9	10
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	5	17	29	34	1	10	22	56	61	1	15	27	93	98
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	75	97	126	1	58	104	230	259	1	87	133	421	450
1	5	13	17	22	1	10	18	40	45	1	15	23	73	78
1	1	3	5	6	1	2	4	10	11	1	3	5	17	18
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	5	27	73	78	1	10	32	110	115	1	15	37	157	162
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	133	305	334	1	58	162	496	525	1	87	191	745	774
1	5	23	53	58	1	10	28	86	91	1	15	33	129	134
1	1	5	13	14	1	2	6	20	21	1	3	7	29	30
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	5	37	137	142	1	10	42	184	189	1	15	47	241	246
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	191	629	658	1	58	220	878	907	1	87	249	1185	1214
1	5	33	109	114	1	10	38	152	157	1	15	43	205	210
1	1	7	25	26	1	2	8	34	35	1	3	9	45	46
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	5	47	221	226	1	10	52	278	283	1	15	57	345	350
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	249	1069	1098	1	58	278	1376	1405	1	87	307	1741	1770
1	5	43	185	190	1	10	48	238	243	1	15	53	301	306
1	1	9	41	42	1	2	10	52	53	1	3	11	65	66
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90

x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	t	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	t	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	t
1	5	57	325	330	1	10	62	392	397	1	15	67	469	474
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	307	1625	1654	1	58	336	1990	2019	1	87	365	2413	2442
1	5	53	281	286	1	10	58	344	349	1	15	63	417	422
1	1	11	61	62	1	2	12	74	75	1	3	13	89	90
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	5	67	449	454	1	10	72	526	531	1	15	77	613	618
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	29	365	2297	2326	1	58	394	2720	2749	1	87	423	3201	3230
1	5	63	397	402	1	10	68	470	475	1	15	73	553	558
1	1	13	85	86	1	2	14	100	101	1	3	15	117	118
1	1	15	113	114	1	2	16	130	131	1	3	17	149	150
1	5	77	593	598	1	10	82	680	685	1	15	87	777	782
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Используемые ранее методы нахождения компонент чисел и тем более формирования последовательностей слабо работают при таком большом числе компонентов.

Нами найдено соотношение связи компонентов шестерок чисел, сильно облегчающее их поиск, в виде

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d = t - x_4$.

При $x_0 = 0$ имеем четырехмерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + \dots + x_3^2 + (((x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2 + \dots + x_3^2)/d) + d)/2)^2.$$

Более того эти формулы пригодны для многомерных случаев

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) + d)/2)^2,$$

где $d = t - x_{n+1}$.

При $x_0 = 0$ имеем $n+1$ мерную теорему Пифагора в непривычном виде

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) - d)/2)^2 = (((x_1^2 + \dots + x_n^2)/d) + d)/2)^2.$$

С их помощью находим компоненты пифагоровых шестерок (таблица 12).

Таблица 12.

x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	t	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	t	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	t
1	2	1	1	3	4	1	3	2	1	7	8	1	4	3	1	13	14
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
		1	1									1		3	1		10
1	12			73	74	1	13	2	1	87	88		14			103	4
		1	1									1		3	1		13
1	14			99	100	1	15	2	1	115	116		16			133	4
1	1	3	5	8	10	3	1	3	5	10	12	5	1	3	5	14	16
1	3	5	7	20	22	3	3	5	7	22	24	5	3	5	7	26	28
1	5	7	9	38	40	3	5	7	9	40	42	5	5	7	9	44	46
1	7	9	11	62	64	3	7	9	11	64	66	5	7	9	11	68	70
																	10
1	9	11	13	92	94	3	9	11	13	94	96	5	9	11	13	98	0
																	13
1	11	13	15	128	130	3	11	13	15	130	132	5	11	13	15	134	6
																	17
1	13	15	17	170	172	3	13	15	17	172	174	5	13	15	17	176	8
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Уже эти шестерки чисел позволяют сформировать множество бесконечных последовательностей шестерок чисел рассмотрением соседних пар, например таблицу 14 для $x_0=1$.

Эти последовательности позволяют продлить их как угодно далеко во всех четырех направлениях. Процесс поиска компонент многомерных пифагоровых чисел можно продолжать сколь угодно долго. Этот процесс позволяет найти компоненты n-мерных чисел и составить числовые последовательности из них.

Удачно работает многомерное уравнение

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 + (((((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2) / d) - d) / 2)^2 = (((((x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2) / d) + d) / 2)^2,$$

где $d=t-x_{n+1}$.

В этой работе рассмотрены лишь некоторые малочисленные примеры. С ростом n процесс поиска компонент и составление числовых последовательностей из них усложняется. Тем не менее, он остается достаточно простым. Важным случаем является случай восьмимерного пространства времени (например, таблица 13).

Таблица 13.

x ₀ , x ₁ , ..., x ₇ , t	x ₀ , x ₁ , ..., x ₇ , t	x ₀ , x ₁ , ..., x ₇ , t	x ₀ , x ₁ , ..., x ₇ , t
1,1,1,1,1,1,3,4	1,1,1,1,1,2,2,6,7	1,1,1,1,1,3,3,11,12	1,1,1,1,1,4,4,18,19
1,1,1,1,1,1,3,7,8	1,1,1,1,1,2,4,12,13	1,1,1,1,1,3,5,19,20	1,1,1,1,1,4,6,28,29
1,1,1,1,1,1,5,15,16	1,1,1,1,1,2,6,22,23	1,1,1,1,1,3,7,31,32	1,1,1,1,1,4,8,42,43
1,1,1,1,1,1,7,27,28	1,1,1,1,1,2,8,36,37	1,1,1,1,1,3,9,47,48	1,1,1,1,1,4,10,60,61

1,1,1,1,1,1,9,43,44	1,1,1,1,1,2,10,54,55	1,1,1,1,1,3,11,67,68	1,1,1,1,1,4,12,82,83
1,1,1,1,1,1,11,63,64	1,1,1,1,1,2,12,76,77	1,1,1,1,1,3,13,91,92	1,1,1,1,1,4,14,108,109
1,1,1,1,1,1,13,87,88	1,1,1,1,1,2,14,102,103	1,1,1,1,1,3,15,119,120	1,1,1,1,1,4,16,138,139
1,1,1,1,1,1,15,115,116	1,1,1,1,1,2,16,132,133	1,1,1,1,1,3,17,151,152	1,1,1,1,1,4,18,172,173
6	3	2	

Не будем останавливаться на поиске многомерных пифагоровых чисел и построении числовых последовательностей из них. Приведем в заключение таблицу числовых последовательностей из шестерок пифагоровых чисел при $x_0=1$ (таблица 14) и таблицы 15-18, характеризующие стандартным модулем разности между катетами. Напомним, что каждая из этих таблиц дает множество бесконечных последовательностей собранных по этому признаку.

Таблица 14.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	t
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	46	29	29	51	80	1	75	58	29	155	184	1	104	87	29	317	346
1	8	5	5	9	14	1	13	10	5	27	32	1	18	15	5	55	60
1	2	1	1	3	4	1	3	2	1	7	8	1	4	3	1	13	14
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	22	5	5	51	56	1	27	10	5	83	88	1	32	15	5	125	130
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	104	29	29	201	230	1	133	58	29	363	392	1	162	87	29	583	612
1	18	5	5	35	40	1	23	10	5	63	68	1	28	15	5	101	106
1	4	1	1	9	10	1	5	2	1	15	16	1	6	3	1	23	24
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	32	5	5	105	110	1	37	10	5	147	152	1	42	15	5	199	204
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	162	29	29	467	496	1	191	58	29	687	716	1	220	87	29	965	994
1	28	5	5	81	86	1	33	10	5	119	124	1	38	15	5	167	172
1	6	1	1	19	20	1	7	2	1	27	28	1	8	3	1	37	38
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	42	5	5	179	184	1	47	10	5	231	236	1	52	15	5	293	298
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	220	29	29	849	878	1	249	58	29	1127	1156	1	278	87	29	1463	1492
1	38	5	5	147	152	1	43	10	5	195	200	1	48	15	5	253	258
1	8	1	1	33	34	1	9	2	1	43	44	1	10	3	1	55	56
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
1	52	5	5	273	278	1	57	10	5	335	340	1	62	15	5	407	412
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	278	29	29	1347	1376	1	307	58	29	1683	1712	1	336	87	29	2077	2106
1	48	5	5	233	238	1	53	10	5	291	296	1	58	15	5	359	364
1	10	1	1	51	52	1	11	2	1	63	64	1	12	3	1	77	78
1	12	1	1	73	74	1	13	2	1	87	88	1	14	3	1	103	104
1	62	5	5	387	392	1	67	10	5	459	464	1	72	15	5	541	546
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

1	336	29	29	1961	1990	1	365	58	29	2355	2384	1	394	87	29	2807	2836
1	58	5	5	339	344	1	63	10	5	407	412	1	68	15	5	485	490
1	12	1	1	73	74	1	13	2	1	87	88	1	14	3	1	103	104
1	14	1	1	99	100	1	15	2	1	115	116	1	16	3	1	133	134
1	72	5	5	521	546	1	77	10	5	603	608	1	82	15	5	695	700
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	394	29	29	2691	2720	1	423	58	29	3143	3172	1	452	87	29	3653	3682
1	68	5	5	465	470	1	73	10	5	543	548	1	78	15	5	631	636
1	14	1	1	99	100	1	15	2	1	115	116	1	16	3	1	133	134
1	16	1	1	129	130	1	17	2	1	147	148	1	18	3	1	167	168
1	82	5	5	675	680	1	87	10	5	767	772	1	92	15	5	869	874
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 15.

8n+1					8n+7				
1	29	99	169	198	7	97	331	565	662
1	5	17	29	34	7	17	57	97	114
1	1	3	5	6	7	5	11	17	22
1	1	1	1	2	7	13	9	5	18
1	5	3	1	6	7	73	43	13	86
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	305	1041	1777	2082	23	373	1273	2173	2546
17	53	179	305	358	23	65	219	373	438
17	13	33	53	66	23	17	41	65	82
17	25	19	13	38	23	37	27	17	54
17	137	81	25	162	23	205	121	37	242
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
41	505	1723	2941	3446	31	629	2147	3665	4294
41	89	297	505	594	31	109	369	629	738
41	29	59	89	118	31	25	67	109	134
41	85	57	29	114	31	41	33	25	66
41	481	283	85	566	31	221	131	41	262
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	1069	3649	6229	7298	47	905	3089	5273	6178
49	185	627	1069	1254	47	157	531	905	1062
49	41	113	185	226	47	37	97	157	194
49	61	51	41	102	47	65	51	37	102
49	325	193	61	386	47	353	209	65	418
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 16.

8n+1					8n+7				
1	29	17	5	34	7	97	57	17	114
1	5	3	1	6	7	17	11	5	22
1	1	1	1	2	7	5	9	13	18
1	1	3	5	6	7	13	43	73	86
1	5	17	29	34	7	73	249	425	498
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	305	179	53	358	23	373	219	65	438
17	53	33	13	66	23	65	41	17	82
17	13	19	25	38	23	17	27	37	54
17	25	81	137	162	23	37	121	205	242
17	137	467	797	934	23	205	699	1193	1398
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
41	505	297	89	594	31	629	369	109	738
41	89	59	29	118	31	109	67	25	41
41	29	57	85	114	31	25	33	41	66
41	85	283	481	566	31	41	131	221	262
41	481	1641	2801	3282	31	221	753	1285	1506
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	1069	627	185	1254	47	905	531	157	1062
49	185	113	41	226	47	157	97	37	194
49	41	51	61	102	47	37	51	65	102
49	61	193	325	386	47	65	209	353	418
49	325	1107	1889	2214	47	353	1203	2053	2406
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 17.

8n+1					8n+7				
1	46	58	80	109	7	154	194	268	365
1	8	10	14	19	7	28	34	50	67
1	2	2	4	5	7	14	10	32	37
1	4	2	10	11	7	56	26	142	155
1	22	10	56	61	7	322	146	820	893
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	484	610	842	1147	23	592	746	1030	1403
17	86	106	152	205	23	106	130	188	253
17	32	26	70	83	23	44	34	98	115
17	106	50	268	293	23	158	74	400	437
17	604	274	1538	1675	23	904	410	2302	2507
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
41	802	1010	1396	1901	31	998	1258	1736	2365
41	148	178	266	355	31	176	218	310	419
41	86	58	200	229	31	58	50	124	149
41	368	170	934	1019	31	172	82	434	475
41	2122	962	5404	5885	31	974	442	2480	2701

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	1696	2138	2950	4019	47	1436	1810	2498	3403
49	298	370	524	709	47	254	314	448	605
49	92	82	194	235	47	88	74	190	227
49	254	122	640	701	47	274	130	692	757
49	1432	650	3646	3971	47	1556	706	3962	4315
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 18.

8n+1					8n+7				
1	22	22	20	37	7	154	154	140	259
1	4	4	4	7	7	28	28	28	49
1	2	2	4	5	7	14	14	28	35
1	8	8	20	23	7	56	56	140	161
1	46	46	116	133	7	322	322	812	931
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	374	374	340	629	23	506	506	460	851
17	68	68	68	119	23	92	92	92	161
17	34	34	68	85	23	46	46	92	115
17	136	136	340	391	23	184	184	460	529
17	782	782	1972	2261	23	1058	1058	2668	3059
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
41	902	902	820	1517	31	682	682	620	1147
41	164	164	164	287	31	124	124	124	217
41	82	82	164	205	31	62	62	124	155
41	328	328	820	943	31	248	248	620	713
41	1886	1886	4756	5453	31	1426	1426	3596	4123
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
49	1078	1078	980	1813	47	1034	1034	940	1739
49	196	196	196	343	47	188	188	188	329
49	98	98	196	245	47	94	94	188	235
49	392	392	980	1127	47	376	376	940	1081
49	2254	2254	5684	6517	47	2162	2162	5452	6251
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Укажем на одну особенность формирования числовых последовательностей из пифагоровых чисел. Она связана с тем обстоятельством, что числовые последовательности могут представлять собой не только линейки произвольной длины, но также плоскости произвольной площади. Так из одной последовательности ...,1,1,5,29,... направленных в двух перпендикулярных направлениях формируется числовая плоскость (таблица 19), которая обладает свойствами симметрии в горизонтальном, вертикальном и в диагональных направлениях.

Таблица 19.

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	28561	4901	845	169	169	845	4901	28561	...
...	4901	841	145	29	29	145	841	4901	...
...	845	145	25	5	5	25	145	845	...
...	169	29	5	1	1	5	29	169	...
...	169	29	5	1	1	5	29	169	...
...	845	145	25	5	5	25	145	845	...
...	4901	841	145	29	29	145	841	4901	...
...	28561	4901	845	169	169	845	4901	28561	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Эта последовательность чисел в горизонтальном и вертикальном направлениях определяется двумя осями симметрии. Такие же оси симметрии действуют в диагональных направлениях при этом вдоль вертикальных и горизонтальных осей действуют одно и тоже рекуррентное тождество

$$y_{n+1}=6*y_n-y_{n-1}$$

а по диагоналям – квадрат этого соотношения, определяемый тождеством

$$y_{n+1}=35*(y_n-y_{n-1})+y_{n-2}.$$

Каждая ячейка из соседних четырех чисел дает один и тот же определитель на всей числовой плоскости. В данном случае определитель равен нулю. Очевидна исключительная симметричность такой структуры чисел. Причем, эта структура полностью определяется четверкой начальных значений в данном случае цифрами 1,1,1,1. Такая симметричность структуры аналогична кристаллической решетке твердых тел.

Менее строгой степенью симметрии обладают подобные структуры с совпадающими значениями цифр значащего квадрата, например, цифры 1,3,1,3 дают последовательность, определяющую лишь диагональную симметрию (таблица 20).

Таблица 20.

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	1	3	17	99	577	3363	19601	114243	...
...	3	1	3	17	99	577	3363	19601	...
...	17	3	1	3	17	99	577	3363	...
...	99	17	3	1	3	17	99	577	...
...	577	99	17	3	1	3	17	99	...
...	3363	577	99	17	3	1	3	17	...
...	19601	3363	577	99	17	3	1	3	...
...	114243	19601	3363	577	99	17	3	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Четверка различных чисел значащего квадрата дает еще менее серьезную симметрию последовательностей. Например, диагональная симметрия нарушается (таблица 21).

Таблица 21.

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	-17745	-3044	-519	-70	99	664	3885	22646	...
...	-3043	-522	-89	-12	17	114	667	3888	...
...	-513	-88	-15	-2	3	20	117	682	...
...	-35	-6	-1	0	1	6	35	204	...
...	303	52	9	2	3	16	93	542	...
...	1853	318	55	12	17	90	523	3048	...
...	10815	1856	321	70	99	524	3045	17746	...
...	63037	10818	1871	408	577	3054	17747	103428	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таким образом, степень симметрии плоскостных последовательностей чисел определяется совокупностью четырех чисел, чем задается тот или иной вид симметрии. Эти же четыре цифры определяют набор линейных последовательностей.

Таким образом, задача получения значений пифагоровых чисел для большого числа измерений пространства вполне разрешима. Также разрешима задача получения последовательностей пифагоровых чисел для большого числа измерений пространства. Возможность представления пифагоровых чисел и их последовательностей в виде координат физического пространства-времени позволяет рассмотреть вопрос решения уравнения для квадрата интервала такого пространства в целых числах. При этом уравнению «светового конуса» соответствует значение $x_0=0$, что отвечает теореме Пифагора для многомерного пространства.

Число решений уравнения Пифагора либо уравнения квадрата интервала в целых числах бесконечно велико. Бессмысленно рассматривать все варианты решения этой задачи, однако, для большинства практических задач целесообразно иметь набор, как значений многомерных пифагоровых чисел, так и набора их последовательностей. Возможен также набор плоскостных пифагоровых чисел, что может представлять интерес для кристаллографии, причем не только плоской, но и пространственной.

Литература

1. Сяхович В. И. Пифагоровы точки. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 288 с.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория поля. – М: Наука, 1988. – 512с.
3. Коротков А.В. Элементы классификации пифагоровых чисел. – Новочеркасск: Набла, 2009. – 73 с.

К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в криптографии.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон [1]. Для выяснения этого вопроса необходимо было найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [2] известно, что

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x, y, z – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

$$\text{т.е. } x^2 + y^2 = z^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x, y, z в целых числах. Вместе с тем, теперь величины m и n могут принимать не только целые, но и рациональные числа. Это, соответственно, дает возможность находить решение полиномиальных уравнений в рациональных числах. Для примера в

таблице 1 приведены тройки чисел соответствующих прямоугольным треугольникам с целыми длинами трех сторон. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. В таблице 1, выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел, соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения m и n , а, следовательно, x , y , z по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между длинами катетов x и y . В таблице 2 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности d между длинами катетов x и y равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Первая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в таблице 1 в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$$(x+y)_{k+1} = 6(x+y)_k - (x+y)_{k-1}.$$

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполняемы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}$$

$$y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}.$$

Можно привести целый ряд рекуррентных взаимосвязей между сторонами прямоугольных треугольников для каждого столбца рассматриваемых таблиц, например,

$$x_{k+1} + x_k = y_{k+1} + y_k = z_{k+1} - z_k,$$

$$x_{k+1} + x_k = 6(x_k + x_{k-1}) - (x_{k-1} + x_{k-2}),$$

$$y_{k+1} + y_k = 6(y_k + y_{k-1}) - (y_{k-1} + y_{k-2}),$$

$$z_{k+1} - z_k = 6(z_k - z_{k-1}) - (z_{k-1} - z_{k-2}).$$

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x , y , z соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности меж-

ду длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений m и n . Этот способ классификации приведен в таблице 3, в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из таблицы 2 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин m и n в таблице 3. В ней каждой последовательной паре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из таблицы 2. Так значениям $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу таблицы 3 соответствуют значения $x=2mn=4$, $y=m^2-n^2=3$, $z=m^2+n^2=5$ в верхнем левом углу таблицы 2. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов таблицы 3 величина m следует за величиной n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенной разностью между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2m_{k+1}m_k)^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды определяют генераторы взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Отметим так же, что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше рекуррентных соотношений в общем случае в таблице 4 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из таблицы 1. В таблице 4 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из таблицы 4.

Аналогично, таблица 5 для чисел m и n соответствует пифагоровым тройкам из таблицы 4. Отметим, что разность, а также сумма длин катетов, принимает дискретные строго определенные, зача-

стую простые значения. Величина разности между катетами x и y , очевидно, повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами. Это осуществлено в таблицах 6 и 7 для значений разности между катетами 1, 7, 23, 47, 79 в таблице 6 и значений разности между катетами 1, 7, 17, 31, 49 в таблице 7. Для упрощения записи таблиц вместо пифагоровых троек чисел приведены лишь значения гипотенуз z . В этих таблицах значения рядов пифагоровых троек продолжены в обратных направлениях, причем использованы одни и те же рекуррентные соотношения. Числа, соответствующие гипотенузам из пифагоровых троек в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной в обе стороны. Выделенные жирным шрифтом строчки в таблицах 6 и 7 имеют вспомогательное значение.

Выясним теперь, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон? Площадь прямоугольного треугольника

$$S = xy/2 = mn(m^2 - n^2) = nm^3 - n^3m,$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов. Для примера в таблице 8 приведены результаты значения площадей прямоугольных треугольников для верхней части треугольников из таблицы 2. Расчет площадей прямоугольных треугольников в каждом ряду соответствующей разностью между длинами катетов может осуществляться не только по приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением:

$$S_{n+1} = 35(S_n - S_{n-1}) + S_{n-2},$$

соответствующим каждому из рядов пифагоровых троек. Таким образом, пожалуй, получен ответ на поставленный вопрос о числе решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых троек. Во-первых, пифагоровы тройки создают ряды бес-

конечной протяженности в обоих направлениях, если они соответствуют определенной разности длин катетов. Во-вторых, каждой гипотенузе соответствует два ряда пифагоровых троек. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки чисел, а плоскости числовых последовательностей классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в таблицах 9.1 – 9.12. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскости, которая может быть продлена до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел. Само число, на которое корректируется рекуррентное соотношение, получается из аналогичного числа, указанного в таблице 9.1 путем умножения на величину разностей длин катетов.

В свою очередь полученные плоскости числовых последовательностей могут быть классифицированы определенным образом. Так из приведенных таблиц 9.1 – 9.12 с указанными разностями катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97 плоскости с разностями 1, 7, 41 представляют определенную совокупность плоскостей с одним и тем же рекуррентным соотношением, относящимся уже к сумме длин катетов:

$$41 = 6 \cdot 7 - 1.$$

Следующей плоскостью в этой числовой последовательности будет плоскость с разностью 239:

$$239 = 6 \cdot 41 - 7$$

и так далее до бесконечности в обоих направлениях.

Таким образом, можно говорить о бесконечном числе кубов числовых последовательностей бесконечной протяженности во всех шести направлениях, т.е. о своего рода трехмерных “кристаллах” числовых последовательностей.

Таблица 1.

m\п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	4 3 5	8 0 8														
3	6 8 10	12 5 13	18 0 18													
4	8 15 17	16 12 20	24 7 25	32 0 32												
5	10 24 26	20 21 29	30 16 34	40 9 41	50 0 50											
6	12 35 37	24 32 40	36 27 45	48 20 52	60 11 61	72 0 72										
7	14 48 50	28 45 53	42 40 58	56 33 65	70 24 74	84 13 85	98 0 98									
8	16 63 65	32 60 68	48 55 73	64 48 80	80 39 89	96 28 100	112 15 113	128 0 128								
9	18 80 82	36 77 85	54 72 90	72 65 97	90 56 106	108 45 117	126 32 130	144 17 145	162 0 162							
10	20 99 101	40 96 104	60 91 109	80 84 116	100 75 125	120 64 136	140 51 149	160 36 164	180 19 181	200 0 200						
11	22 120 122	44 117 125	66 112 130	88 105 137	110 96 146	132 85 157	154 72 170	176 57 185	198 40 202	220 21 221	242 0 242					
12	24 143 145	48 140 148	72 135 153	96 128 160	120 119 169	144 108 180	168 95 193	192 80 208	216 63 225	240 44 244	264 23 265	288 0 288				
13	26 168 170	52 165 173	78 160 178	104 153 185	130 144 194	156 133 205	182 120 218	208 105 233	234 88 250	260 69 269	286 48 290	312 25 313	338 0 338			
14	28 195 197	56 192 200	84 187 205	112 180 212	140 171 221	168 160 232	196 147 245	224 132 260	252 115 277	280 96 296	308 75 317	336 52 340	364 27 365	392 0 392		
15	30 224 226	60 221 229	90 216 234	120 209 241	150 200 250	180 189 261	210 176 274	240 161 289	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	420 29 421	450 0 450	
16	32 255 257	64 252 260	96 247 265	128 240 272	160 231 281	192 220 292	224 207 305	256 192 320	288 175 337	320 156 356	352 135 377	384 112 400	416 87 425	448 60 452	480 31 481	512 0 512

Таблица 2.

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
5	17	37	65	101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
29	97	205	353	541
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
169	565	1193	2053	3145
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
985	3293	6953	11965	18329
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
5741	19193	40525	69737	106829
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
33461	111865	236197	406457	622645
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
195025	651997	1376657	2369005	3629041
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
4684660	15661496	33068412	56905408	87172484
4684659	15661503	33068435	56905455	87172563
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
27304196	91281912	192736908	331669184	508078740
27304197	91281905	192736885	331669137	508078661
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
159140520	532029948	1123352944	1933109508	2961299640
159140519	532029955	1123352967	1933109555	2961299719
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
927538920	3100897804	6547380848	11266988052	17259719416
927538921	3100897797	6547380825	11266988005	17259719337
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
5406093004	18073356848	38160932052	65668818616	100597016540
5406093003	18073356855	38160932075	65668818663	100597016619
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
31509019100	105339243312	222418211556	382745923832	586322380140
31509019101	105339243305	222418211533	382745923785	586322380061
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
183648021600	613962102996	1296348337192	2230806724188	3417337263984
183648021599	613962103003	1296348337215	2230806724235	3417337264063
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1070379110496	3578433374692	7555671811688	13002094421484	19917701204080
1070379110497	3578433374685	7555671811665	13002094421437	19917701204001
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
6238626641380	20856638145128	44037682532844	75781759804528	116088869960180
6238626641379	20856638145135	44037682532867	75781759804575	116088869960259
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
36361380737780	121561395496104	256670423385468	441688464405872	676615518557316
36361380737781	121561395496097	256670423385445	441688464405825	676615518557237
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 3.

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

Таблица 4.

4	12	24	40	60
3	5	7	9	11
5	13	25	41	61
20	48	88	140	204
21	55	105	171	253
29	73	137	221	325
120	304	572	924	1360
119	297	555	893	1311
169	425	797	1285	1889
696	1748	3276	5280	7760
697	1755	3293	5311	7809
985	2477	4645	7489	11009
4060	10212	19152	30880	45396
4059	10205	19135	30849	45347
5741	14437	27073	43649	64165
23660	59496	111568	179876	264420
23661	59503	111585	179907	264469
33461	84145	157793	254405	373981
137904	346792	650324	1048500	1541320
137903	346785	650307	1048469	1541271
195025	490433	919685	1482781	2179721
803760	2021228	3790308	6111000	8983304
803761	2021235	3790325	6111031	8983353
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
4684660	11780604	22091592	35617624	52358700
4684659	11780597	22091575	35617593	52358651
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
27304196	68662368	128759176	207594620	305168700
27304197	68662375	128759193	207594651	305168749
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
159140520	400193632	750463532	1209950220	1778653696
159140519	400193625	750463515	1209950189	1778653647
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
927538920	2332499396	4374021948	7052106576	10366753280
927538921	2332499403	4374021965	7052106607	10366753329
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
5406093004	13594802772	25493668224	41102689360	60421866180
5406093003	13594802765	25493668207	41102689329	60421866131
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
31509019100	79236317208	148587987328	239564029460	352164443604
31509019101	79236317215	148587987345	239564029491	352164443653
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640
183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 5.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
5	8	11	14	17
12	19	26	33	40
29	46	63	80	97
70	111	152	193	234
169	268	367	466	565
408	647	886	1125	1364
985	1562	2139	2716	3293
2378	3771	5164	6557	7950
5741	9104	12467	15830	19193
13860	21979	30098	38217	46336
33461	53062	72663	92264	111865
80782	128103	175424	222745	270066
195025	309268	423511	537754	651997
470832	746639	1022446	1298253	1574060
1136689	1802546	2468403	3134260	3800117
2744210	4351731	5959252	7566773	9174294
6625109	10506008	14386907	18267806	22148705
15994428	25363747	34733066	44102385	53471704
38613965	61233502	83853039	106472576	129092113
93222358	147830751	202439144	257047537	311655930
225058681	356895004	488731327	620567650	752403973
543339720	861620759	1179901798	1498182837	1816463876
1311738121	2080136522	2848534923	3616933324	4385331725
3166815962	5021893803	6876971644	8732049485	10587127326
7645370045	12123924128	16602478211	21081032294	25559586377
18457556052	29269742059	40081928066	50894114073	61706300080
44560482149	70663408246	96766334343	122869260440	148972186537
107578520350	170596558551	233614596752	296632634953	359650673154
259717522849	411856525348	563995527847	716134530346	868273532845
627013566048	994309609247	1361605652446	1728901695645	2096197738844
1513744654945	2400475743842	3287206832739	4173937921636	5060669010533
3654502875938	5795261096931	7936019317924	10076777538917	12217535759910
8822750406821	13990997937704	19159245468587	24327492999470	29495740530353
21300003689580	33777256972339	46254510255098	58731763537857	71209016820616

Таблица 6.

1513744654945	22186734778477	113441728156577	275278724789245	507697724676481
259717522849	3806641878437	19463523473585	47230362308293	87107158382561
44560482149	653116492145	3339412684933	8103449060513	14945225618885
7645370045	112057074433	572952636013	1390332054785	2564195330749
1311738121	19225954453	98303131145	238543268197	439946365609
225058681	3298652285	16866150857	40927554397	75482862905
38613965	565959257	2893773997	7022058185	12950811821
6625109	97103257	496493125	1204794713	2222008021
1136689	16660285	85184753	206710093	381236305
195025	2858453	14615393	35465845	65409809
33461	490433	2507605	6084977	11222549
5741	84145	430237	1044017	1925485
985	14437	73817	179125	330361
169	2477	12665	30733	56681
29	425	2173	5273	9725
5	73	373	905	1669
1	13	65	157	289
1	5	17	37	65
5	17	37	65	101
29	97	205	353	541
169	565	1193	2053	3145
985	3293	6953	11965	18329
5741	19193	40525	69737	106829
33461	111865	236197	406457	622645
195025	651997	1376657	2369005	3629041
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 7.

1513744654945	29495740530353	92768738033045	191332737163021	325187737920281
259717522849	5060669010533	15916599117997	32827507845241	55793395192265
44560482149	868273532845	2730856674937	5632309908425	9572633233309
7645370045	148972186537	468540931625	966351605309	1642404207589
1311738121	25559586377	80388914813	165799723429	281792012225
225058681	4385331725	13792557253	28446735265	48347865761
38613965	752403973	2366428705	4880688161	8295182341
6625109	129092113	406014977	837393701	1423228285
1136689	22148705	69661157	143674045	244187369
195025	3800117	11951965	24650569	41895929
33461	651997	2050633	4229369	7188205
5741	111865	351833	725645	1233301
985	19193	60365	124501	211601
169	3293	10357	21361	36305
29	565	1777	3665	6229
5	97	305	629	1069
1	17	53	109	185
1	5	13	25	41
5	13	25	41	61
29	73	137	221	325
169	425	797	1285	1889
985	2477	4645	7489	11009
5741	14437	27073	43649	64165
33461	84145	157793	254405	373981
195025	490433	919685	1482781	2179721
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 8.

6	60	210	504	990
210	2340	10374	30600	71610
7140	79794	355680	1053150	2471196
242556	2710950	12085920	35789754	83986500
8239770	92092800	410568774	1215811740	2853107250
279909630	3128444544	13947255570	41301822660	96921697446
9508687656	106275021990	473796123780	1403046171954	3292484643360
323015470680	3610222303410	16095120956124	47662268037030	111847556214240

Таблица 9.1

d=1				
48	8	0	-8	-48
481	85	29	89	505
73	13	5	17	97
5	1	1	5	29
5	1	1	5	29
73	13	5	17	97

Таблица 9.2

d=7				
336	56	0	-56	-336
1565	277	97	305	1733
205	37	17	65	373
1	1	5	29	169
137	25	13	53	305
877	205	73	233	1325

Таблица 9.3

d=17				
816	136	0	-136	-816
4981	881	305	949	5389
697	125	53	193	1105
17	5	13	73	425
221	41	25	109	629
2125	377	137	445	2533

Таблица 9.4

d=23				
1104	184	0	-184	-1104
6065	1073	373	1165	6617
829	149	65	241	1381
13	5	17	97	565
353	65	37	157	905
3209	569	205	661	3761

Таблица 9.5

d=31				
1488	248	0	-248	-1488
10321	1825	629	1949	11065
1481	265	109	389	2225
53	13	25	137	797
325	61	41	185	1069
3385	601	221	725	4129

Таблица 9.6

d=41				
1968	328	0	-328	-1968
8093	1433	505	1597	9077
1021	185	89	349	2005
1	5	29	169	985
953	173	85	337	1937
7685	1361	481	1525	8669

Таблица 9.7

d=47				
2256	376	0	-376	-2256
14821	2621	905	2809	15949
2105	377	157	565	3233
65	17	37	205	1193
541	101	65	289	1669
5437	965	353	1153	6565

Таблица 9.8

d=49				
2352	392	0	-392	-2352
17585	3109	1069	3305	18761
2557	457	185	653	3733
109	25	41	221	1285
449	85	61	281	1625
4937	877	325	1073	6113

Таблица 9.9

d=71				
3408	568	0	-568	-3408
26773	4733	1625	5017	28477
3925	701	281	985	5629
185	41	61	325	1889
593	113	85	397	2297
6781	1205	449	1489	8485

Таблица 9.11

d=79				
3792	632	0	-632	-3792
27425	4849	1669	5165	29321
3965	709	289	1025	5861
157	37	65	353	2053
769	145	101	461	2665
8249	1465	541	1781	10145

Таблица 9.10

d=73				
3504	584	0	-584	-3504
17909	3169	1105	3461	19661
2405	433	193	725	4157
25	13	53	305	1777
1249	229	125	521	3001
10973	1945	697	2237	12725

Таблица 9.12

d=89				
4272	712	0	-712	-4272
22409	3965	1381	4321	24545
3029	545	241	901	5165
37	17	65	373	2173
1465	269	149	625	3601
13025	2309	829	2665	15161

Литература

1. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра.№ 47-48 [619-620].20 декабря 2005. – (с.72-74).
2. Начала Евклида. Книги I-VI.– М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.

К ВОПРОСУ КЛАССИФИКАЦИИ ПИФАГОРОВЫХ ЧИСЕЛ

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего, так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S=t^2=m^3-p^2m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса [1]

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в криптографии.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон [2]. Для выяснения этого вопроса необходимо было найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [3] известно, что

$$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x, y, z – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x, y, z в целых числах. Вместе с тем теперь величины m и n могут принимать не только целые, но и вещественные значения. Это, соответственно, дает возможность находить решения полиномиальных уравнений в вещественных числах.

В таблице 1 [2] приведены тройки чисел, соответствующих прямоугольным треугольникам с целыми длинами их сторон. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Для примера в таблице 1 [2], выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел, соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем удастся классифицировать значения m и n , а, следовательно, x , y , z по определенным признакам. Одним из таких признаков является величина модуля разности d_i между длинами катетов x_i и y_i . Действительно таблица 1 [2] позволяет каждой тройке пифагоровых чисел сопоставить пару значений определяющих величины $d=|x-y|$ и $c=x+y$ (таблица 1). Эта таблица позволяет сделать следующие выводы:

- значения гипотенуз прямоугольных треугольников определяются последовательностью целых чисел класса 1 вычетов по mod 4 (1, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 65, 73, 85, 85, 89, 97,...), в которой представлены простые числа класса 1 вычетов по mod 4 (1, 5, 13, 17,...), а также их степени ($25=5*5$) и произведения простых чисел класса 1 вычетов по mod 4 ($65=5*13$ и $85=5*17$...), причем составные числа представлены по крайней мере парой значений;
- один из катетов прямоугольных треугольников определяется последовательностью четных чисел класса 0 вычетов по mod 4 (0, 4, 8, 12, 16, 20, 24,...), в которой представлены все четные числа класса 0 вычетов по mod 4;
- другой из катетов прямоугольных треугольников определяется последовательностью нечетных чисел классов 1 и 3 вычетов по mod 4 (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...), в которой представлены все нечетные числа классов 1 и 3 вычетов по mod 4;
- модуль разности катетов прямоугольных треугольников определяется последовательностью отдельных нечетных чисел классов 1 и 3 вычетов по mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 79, 89, 97, 103, 113, 119,...), в которой представлены простые числа из классов 1 и 3 вычетов по mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 79, 89,...), а также их степени ($49=7*7$) и произведения этих чисел ($119=7*17$), причем составные числа представлены по крайней мере парой значений;
- сумма катетов прямоугольных треугольников определяется последовательностью отдельных нечетных чисел классов 1 и

3 вычетов по mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 79, 89, 97, 103, 113, 119,...), в которой представлены простые числа из классов 1 и 3 вычетов по mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 79, 89,...), а также их степени ($49=7*7$) и произведения этих чисел ($119=7*17$), причем составные числа представлены по крайней мере парой значений;

- модуль разности и сумма катетов прямоугольных треугольников, очевидно, определяются одними и теми же последовательностями отдельных чисел (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 79, 89, 97, 103, 113, 119,...), в которой представлены простые числа из классов 1 и 3 вычетов по mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 79, 89,...), а также их степени ($49=7*7$) и произведения этих чисел ($119=7*17$), причем составные числа представлены по крайней мере парой значений;
- модули разности катетов прямоугольных треугольников имеют одно и тоже значение при разных значениях гипотенуз (... , 29, 5, 1, 1, 5, 29,... при $|x-y|=1$ или ... , 73, 13, 5, 17, 79,... при $|x-y|=7$,...) причем значения $|x-y|$ повторяют отдельные значения $x+y$, так что из этих чисел может быть сформировано бесконечное число последовательностей z бесконечной длины (... , 29, 5, 1, 1, 5, 29,... или ... , 73, 13, 5, 17, 97,...) (таблица 2);
- последовательности гипотенуз прямоугольных треугольников определяют последовательности сумм катетов (... , -41, -7, -1, 1, 7, 41,... при $|x-y|=1$ или ... , -103, -17, 1, 23, 137,... при $|x-y|=7$,...) причем значения $|x-y|$ повторяют отдельные значения $x+y$, так что из этих чисел может быть сформировано бесконечное число последовательностей с бесконечной длины (... , -41, -7, 1, 1, 7, 41,... при $|x-y|=1$ или ... , -103, -17, 1, 23, 137,... при $|x-y|=7$,...);
- последовательности гипотенуз z и сумм катетов с прямоугольных треугольников полностью определяют последовательности пифагоровых троек чисел, поскольку полусумма и полуразность значений $|x-y|$ и $x+y$ определяют величины x и y для каждого значения z ;
- модуль разности и сумма катетов прямоугольных треугольников относится к числам вида $8n\pm 1$, где $n=0,1,2,\dots$, т.е. к последовательности mod 4 (1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 79, 89, 97, 103, 113, 119,...).

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек для каждого модуля разности катетов, а именно:

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в каждой из последовательностей (... , $1 = 6 \cdot 1 - 5$,

$5 = 6 \cdot 1 - 1$, $29 = 6 \cdot 5 - 1$, ... или ... $5 = 6 \cdot 13 - 73$, $17 = 6 \cdot 5 - 13$, $97 = 6 \cdot 17 - 5$, ...).

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждой из последовательностей является:

$$c_{k+1} = 6c_k - c_{k-1}.$$

где c_{k+1} и c_{k-1} соответственно суммы катетов следующего и предыдущего c_k прямоугольных треугольников в каждой из последовательностей (... , $1 = 6 \cdot (-1) - (-7)$, $7 = 6 \cdot 1 - (-1)$, $41 = 6 \cdot 7 - 1$, ... или ... $1 = 6 \cdot (-17) - (-103)$, $23 = 6 \cdot 1 - (-17)$, $137 = 6 \cdot 23 - 1$, ...).

Рассмотренные рекуррентные соотношения выполняются для гипотенуз и сумм катетов и не выполняются для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполнимы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}$$

$$y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}.$$

Они определяются величинами катетов не из двух предыдущих значений, а трех и поэтому менее удобны. Таким образом, пифагоровы тройки чисел формируют бесконечное число рядов значений гипотенуз z и сумм катетов c бесконечной протяженности в обоих направлениях, соответствующих определенным значениям модуля разности катетов. В свою очередь сами катеты формируют бесконечное число рядов значений определяемых как полусумма и полуразность величин $|x-y|$ и $x+y$, т. е. d и s .

То же самое можно сказать о построении рядов периметров p и рядов $t = p + z$ прямоугольных треугольников (таблицы 3.1-3.8)

$$(x+y+z)_{k+1} = 6(x+y+z)_k - (x+y+z)_{k-1},$$

$$\text{т.е. } p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1}$$

$$t_{k+1} = 6(p+z)_k - (p+z)_{k-1},$$

$$\text{т.е. } t_{k+1} = 6t_k - t_{k-1}$$

и бесконечном числе других рядов подобного рода.

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они опреде-

ляются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды определяют генераторы взаимно простых и простых чисел. Из таблицы 7 видно, что каждая тройка гипотенуз последовательных прямоугольных треугольников попарно проста. Это представляет практический интерес для задач криптографии. Отметим также, что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико.

Отметим, что модуль разности d , а также сумма длин катетов s , принимает дискретные строго определенные, зачастую простые значения. Величина разности между катетами x и y , очевидно, повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами. Это осуществлено в таблицах 1 и 2 для значений разности между катетами 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49. Для упрощения записи таблиц вместо пифагоровых троек чисел приведены лишь значения гипотенуз z , суммы катетов s , периметров p и суммы периметров с гипотенузами t . Модуль разности катетов отмечен нижним индексом. В таблице 2 значения рядов z , s , p и t , а также чисел m и n могут быть продолжены в обоих направлениях, причем используются одни и те же рекуррентные соотношения

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

$$n_{k+1} = 2n_k + n_{k-1},$$

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

$$s_{k+1} = 6s_k - s_{k-1},$$

$$p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1},$$

$$t_{k+1} = 6t_k - t_{k-1}.$$

Эти числа в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной длины в обе стороны.

Выясним теперь, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Площадь прямоугольного треугольника

$$S = xy/2 = mn(m^2 - n^2) = nm^3 - n^3m,$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены вели-

чинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых троек. Во-первых, пифагоровы тройки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях, если они соответствуют определенному модулю разности длин катетов. Во-вторых, каждой гипотенузе соответствует два ряда пифагоровых троек. Так, например, число 13 встречается в последовательностях гипотенуз ..., 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 137, 25, 13, 53, 305, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах гипотенуз (а также других величин) бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях, формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями, с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки, а плоскости числовых последовательностей, классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в таблицах 3.1 – 3.8. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскостей, которые могут быть продлены до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действуют рекуррентные соотношения

$$z_{k+1}=6z_k- z_{k-1}, c_{k+1}=6c_k- c_{k-1}, p_{k+1}=6p_k- p_{k-1}, t_{k+1}=6t_k- t_{k-1}$$

и т. д., а в вертикальных направлениях эти соотношения корректируются на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел. Само число, на которое корректируется рекуррентное соотношение, получается из аналогичного числа, указанного в таблице 3.1 путем умножения на величину модуля разности длин катетов. Центральный столбик бесконечной последовательности гипотенуз z корректируется на число 0, т. е. определяется тем же рекуррентным соотношением. Столбики слева и справа от центрального получаются различными путями, в частности, цифра центрального столбика умножается на 3 и корректируется в сторону уменьшения и увеличения на удвоенный модуль разности катетов, значение которого приведено во второй части таблицы. Цифры, отмеченные жирным шрифтом, в значениях d и c имеют вспомогательное значение.

Можно также говорить о рядах сумм катетов с бесконечной протяженности в обоих направлениях и о плоскостях сумм катетов,

формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями. Формируются не линейки сумм катетов, а плоскости числовых последовательностей сумм катетов, классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в правой части таблиц 3.1 – 3.8. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют части плоскостей, которые могут быть продлены до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$c_{k+1} = 6c_k - c_{k-1},$$

а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел. Само число, на которое корректируется рекуррентное соотношение, получается из аналогичного числа, указанного в таблице 3.1 путем умножения на величину модуля разности длин катетов. Центральный столбик бесконечной последовательности чисел c определяется величиной модуля разности катетов. Столбики слева и справа от центрального получаются различными путями, в частности, цифра центрального столбика умножается на 3 и корректируется в сторону уменьшения и увеличения на учетверенную величину z_k , значение которой приведено в правой части таблицы.

Значения катетов x и y находятся как полусумма и полуразность величин первой и второй части таблиц 3.1-3.8, так что каждому значению гипотенуз z из правой части таблиц находится пара значений x и y . Отметим, что центральному столбику правой части таблицы соответствует определенная величина модуля разности катетов. Таким образом, каждая из таблиц 3.1-3.8 дает классификацию всего бесконечного ряда числовых последовательностей, соответствующих данному значению модуля разности катетов. То же самое относится к рядам числовых последовательностей p и t .

В свою очередь полученные пары плоскостей числовых последовательностей могут быть классифицированы определенным образом. Так из приведенных таблиц 3.1 – 3.8 с указанными разностями катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49 плоскости с модулем разности катетов с разностями 1, 7, 41 представляют определенную совокупность плоскостей с той же последовательностью, относящимся уже к сумме длин катетов (...-7, -1, 1, 7, 41,...). Следующей плоскостью в этой числовой последовательности будет плоскость с разностью 239 и так далее до бесконечности в обоих направлениях.

Таким образом, можно говорить о бесконечном числе трехмерных пространств числовых последовательностей бесконечной протяженности во всех шести направлениях, т.е. о, своего рода, трехмерных “кристаллах” числовых последовательностей.

Укажем на принципиально важную особенность последовательностей z , c , p и t , а также чисел m и n в том отношении, что определители, вычисленные для соответствующих строк каждой пары последовательностей, имеют определенные значения на всем протяжении столбцов [4], причем они определяются модулями разности катетов. Более того, для пар столбцов n и m , c и z , t и p выполняется уравнение Диофанта (таблицы 4.1-4.8)

$$n^2 - 2m^2 = \pm d^2,$$

$$c^2 - 2z^2 = -d^2,$$

$$t^2 - 2p^2 = +d^2,$$

причем d^2 равен квадрату модуля разности двух катетов. Определители из пар значений n и m равны

$$\Delta = \pm d^2,$$

а из пар значений c и z , t и p

$$\Delta = \pm 2d^2.$$

Отметим, что последовательности значений c и z , t и p определяются черезстрочной разверткой последовательностей n и m (таблица 2).

Поскольку

$$p_i = c_i + z_i,$$

то ряды периметров определяются последовательным суммированием гипотенуз и сумм катетов. Эти последовательности размножаются влево и вправо до беспрельдно больших значений. Число таких последовательностей тем более увеличивается, если учесть, что порядок следования z , c , p и t может быть произвольным.

Отметим также, что последовательности величин n и m определяются рекуррентными соотношениями

$$n_{k+1} = 2n_k + n_{k-1}, \quad m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

что определяет их значения таблицами 8.1-8.8 и 9.1-9.8. Характерной особенностью этих таблиц является чередование рядов z и p , а также c и t , так что в этих таблицах представлены последовательно одни и те же вертикальные ряды чисел. В результате эти последовательности можно характеризовать двумя начальными цифрами рядов n и m (например, 1.3, 1.11,... или 1.2, 5.6,...). Это позволяет

осуществить достаточно простой способ классификации числовых последовательностей, указанный в таблицах 5.1-5.8. Более того, ряды n и m взаимосвязаны, так что, например, ряд n можно получить путем суммирования двух соседних строк из ряда m (таблица 2). В таблицах 6 и 8 указаны способы нахождения значений бесконечно большого числа рядов n и m из бесконечно большого числа значений рядов z и c , если начальные значения рядов z и c для данного d известны (см. таблицы 3.1-3.8). При этом принципиально важно знать начальные значения рядов. Как уже отмечалось использование значений катетов x и y менее удобно нежели значений c и d . По этой причине пифагоровы тройки лучше формировать в виде чисел d , c и z . Это осуществлено в таблице 9, в которой также вместо параметров m и n задействованы параметры g и h [4], (где они обозначены как g и p). Тождество для определения g и h имеет вид

$$(2h^2 + 2hg + g^2)^2 = (2hg + g^2)^2 + (2h^2 + 2hg)^2,$$

где $h=0,1,2,\dots$, – числа натурального ряда;

$g=1,3,5,\dots$, – нечетные числа натурального ряда, при этом g и h взаимно простые числа.

Рассмотренное выше позволяет сформировать ряды чисел h , g , m , n , x , y , z , c , p и t бесконечной длины в обоих направлениях. При этом ряды x и y имеют вспомогательное значение и определяются через d и c . Пятерки начальных значений чисел h , g , m , n , z , c , p и t для d от 1 до 438 приведены в таблицах 10.1-10.9. Характерно, что для чисел этих рядов действуют соотношения

$$(2hk * hk-1)^2 + (hk^2 - hk-12)^2 = (hk^2 + hk-12)^2,$$

$$(2gk * gk-1)^2 + (gk^2 - gk-12)^2 = (gk^2 + gk-12)^2,$$

$$(2mk * mk-1)^2 + (mk^2 - mk-12)^2 = (mk^2 + mk-12)^2,$$

$$(2nk * nk-1)^2 + (nk^2 - nk-12)^2 = (nk^2 + nk-12)^2,$$

$$(2xk * xk-1)^2 + (xk^2 - xk-12)^2 = (xk^2 + xk-12)^2,$$

$$(2yk * yk-1)^2 + (yk^2 - yk-12)^2 = (yk^2 + yk-12)^2,$$

$$(2zk * zk-1)^2 + (zk^2 - zk-12)^2 = (zk^2 + zk-12)^2,$$

$$(2ck * ck-1)^2 + (ck^2 - ck-12)^2 = (ck^2 + ck-12)^2,$$

$$(2pk * pk-1)^2 + (pk^2 - pk-12)^2 = (pk^2 + pk-12)^2,$$

$$(2tk * tk-1)^2 + (tk^2 - tk-12)^2 = (tk^2 + tk-12)^2,$$

причем

$$h = 1, 3, 7, 17, \dots, hk+1 = 2hk + hk-1,$$

$$g = 0, 1, 2, 5, \dots, gk+1 = 2gk + gk-1,$$

$$m = 0, 1, 2, 5, \dots, mk+1 = 2mk + mk-1,$$

$$n = 1, 3, 7, 17, \dots, nk+1 = 2nk + nk-1,$$

$$\begin{aligned}x &= 0, 4, 20, 120, \dots, x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}, \\y &= 1, 3, 21, 119, \dots, y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}, \\z &= 1, 5, 29, 169, \dots, z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1}, \\c &= 1, 7, 41, 239, \dots, c_{k+1} = 6c_k - c_{k-1}, \\p &= 2, 12, 70, 408, \dots, p_{k+1} = 6p_k - p_{k-1}, \\t &= 3, 17, 99, 577, \dots, t_{k+1} = 6t_k - t_{k-1},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}g_{k2} - 2h_{k2} &= \pm d, \\n_{k2} - 2m_{k2} &= \pm d^2, \\c_{k2} - 2z_{k2} &= -d^2, \\t_{k2} - 2p_{k2} &= +d^2, \\x_{k2} + y_{k2} &= z_{k2}.\end{aligned}$$

Так

$$(x + y)^2 - 2(x^2 + y^2) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2 = -d^2$$

и

$$(c + 2z)^2 - 2(c + z)^2 = c^2 + 4cz + 4z^2 - 2c^2 - 4cz - 2z^2 = -(x + y)^2 + 2(x^2 + y^2) = x^2 - 2xy + y^2 = d^2.$$

Напомним, что

$$x - y = \pm d, \quad x + y = c, \quad x + y + z = p, \quad x + y + 2z = t.$$

Необходимо отметить, что принципиальное значение имеют последовательности чисел в рядах z_{k+1} , c_{k+1} , p_{k+1} и t_{k+1} для данной величины d . Четверки чисел этих последовательностей повторяют предыдущие четверки чисел z_k , c_k , p_k и t_k , так что формируются ряды бесконечной длины. Это показано в таблицах 12.1-12.8 для $d=1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49$. Характерно, что все ряды при различных d могут быть определены четырьмя последовательностями чисел как показано в таблице 11.

Таким образом, можно говорить о принципиальном родстве последовательностей z , c , p и t , т. е. о числах z , c , p и t -типов. Отметим также, что в пределе при возрастании k имеют место одни и те же отношения этих чисел между собой. Так, например, отношения чисел рядов c и z , а также t и p стремятся к величине $(2 + 2^{1/2})/2 = 1,707106781\dots$, а отношения чисел рядов p и c , а также z и t стремятся к величине $2^{1/2} = 1,414213562\dots$, так что для этих рядов принципиален параметр $2^{1/2}$.

Отношения соседних чисел одного и того же типа в рядах z , c , p и t стремятся к величине $3 + 2 \cdot 2^{1/2}$. Отношения соседних чисел одного и того же типа в рядах m и n стремятся к величине $1 + 2^{1/2}$, так

что для этих рядов принципиален параметр $21/2$, причем это дает способ определения рациональных приближений величины $21/2$.

В таблице 13 приведена классификация бесконечных последовательностей целых чисел h и g . Она вытекает из рассмотрения таблицы 9.

Вопрос классификации пифагоровых чисел, по-видимому, связан с классификацией физических величин. В одной из моих работ отмечалось, что числа x и y имеют прямое отношение к классификации волновых чисел излучения атомов. Отметим к тому же, что четверки чисел также фигурируют в трехмерном спинорном исчислении при классификации элементарных частиц с полуединичным спином. Эти четверки чисел характеризуют две пары частиц, так что имеется прямая аналогия с парами чисел z и s , p и t определяемых уравнением Диофанта из четверки чисел z , s , p и t . Это, между прочим, говорит о возможном бесконечном числе элементарных частиц с полуединичным спином.

Таблица 1.

z_i	x_i	y_i	d_i	c_i	p_i	t_i	z_i	x_i	y_i	d_i	c_i	p_i	t_i
1	0	1	1	1	2	3	149	140	51	89	191	340	489
5	4	3	1	7	12	17	157	132	85	47	217	374	531
13	12	5	7	17	30	43	169	120	119	1	239	408	577
17	8	15	7	23	40	57	173	52	165	113	217	390	563
25	24	7	17	31	56	81	181	180	19	161	199	380	561
29	20	21	1	41	70	99	185	176	57	119	233	418	603
37	12	35	23	47	84	121	185	104	153	49	257	442	627
41	40	9	31	49	90	131	193	168	95	73	263	456	649
53	28	45	17	73	126	179	197	28	195	167	223	420	617
61	60	11	49	71	132	193	205	84	187	103	271	476	681
65	16	63	47	79	144	209	205	156	133	23	289	494	699
65	56	33	23	89	154	219	221	220	21	199	241	462	683
73	48	55	7	103	176	249	221	140	171	31	311	532	753
85	84	13	71	97	182	267	229	60	221	161	281	510	739
85	36	77	41	113	198	283	233	208	105	103	313	546	779
89	80	39	41	119	208	297	241	120	209	89	329	570	811
97	72	65	7	137	234	331	257	32	255	223	287	544	801
101	20	99	79	119	220	321	265	264	23	241	287	552	817
109	60	91	31	151	260	369	265	96	247	151	343	608	873
113	112	15	97	127	240	353	269	260	69	191	329	598	867
125	44	117	73	161	286	411	277	252	115	137	367	644	921
137	88	105	17	193	330	467	281	160	231	71	391	672	953
145	144	17	127	161	306	451	289	240	161	79	401	690	979
145	24	143	119	167	312	457	293	68	285	217	353	646	939

Таблица 2.

m ₁	n ₁	m ₇	n ₇	m ₁₇	n ₁₇	m ₂₃	n ₂₃	m ₃₁	n ₃₁	m ₄₁	n ₄₁	m ₄₇	n ₄₇	m ₄₉	n ₄₉
70	99	234	331	736	1041	900	1273	1518	2147	1218	1723	2184	3089	2580	3649
29	41	97	137	305	431	373	527	629	889	505	713	905	1279	1069	1511
12	17	40	57	126	179	154	219	260	369	208	297	374	531	442	627
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283	-144	209	-132	193
			-												
5	-7	73	103	137	-193	205	-289	221	-311	481	-679	353	-497	325	-457
z ₁	c ₁	z ₇	c ₇	z ₁₇	c ₁₇	z ₂₃	c ₂₃	z ₃₁	c ₃₁	z ₄₁	c ₄₁	z ₄₇	c ₄₇	z ₄₉	c ₄₉
29	41	97	137	305	431	373	527	629	889	505	713	905	1279	1069	1511
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119	157	217	185	257
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1	37	23	41	31
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113	65	-79	61	-71
5	-7	73	-	137	-193	205	-289	221	-311	481	-679	353	-497	325	-457
			103												
p ₁	t ₁	p ₇	t ₇	p ₁₇	t ₁₇	p ₂₃	t ₂₃	p ₃₁	t ₃₁	p ₄₁	t ₄₁	p ₄₇	t ₄₇	p ₄₉	t ₄₉
70	99	234	331	736	1041	900	1273	1518	2147	1218	1723	2184	3089	2580	3649
12	17	40	57	126	179	154	219	260	369	208	297	374	531	442	627
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59	60	97	72	113
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57	-14	51	-10	51
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283	-144	209	-132	193

Таблица 3.1

-68	-12	c ₁ (-4)	-12	-68	d ₁ (0)	48	8	z ₁ (0)	-8	-48
-679	-113	1	119	713	41	481	85	29	89	505
-103	-17	1	23	137	7	73	13	5	17	97
-7	-1	1	7	41	1	5	1	1	5	29
-7	-1	1	7	41	-1	5	1	1	5	29
-103	-17	1	23	137	-7	73	13	5	17	97
28	4	t ₁ (-4)	-28	-164		-20	-4	p ₁ (-4)	-20	-116
283	57	59	297	1723		-198	-28	30	208	1218
43	9	11	57	331		-30	-4	6	40	234
3	1	3	17	99		-2	0	2	12	70
3	1	3	17	99		-2	0	2	12	70
43	9	11	57	331		-30	-4	6	40	234

Таблица 3.2

-476	-84	c ₇ (-28)	-84	-476	d ₇ (0)	336	56	z ₇ (0)	-56	-336
-2209	-367	7	409	2447	137	1565	277	97	305	1733
-289	-47	7	89	527	23	205	37	17	65	373
-1	1	7	41	239	1	1	1	5	29	169
-193	-31	7	73	431	-17	137	25	13	53	305
-1633	-271	7	313	1871	-103	1157	205	73	233	1325
196	28	t ₇ (-28)	-196	-1148		-140	-28	p ₇ (-28)	-140	-812
921	187	201	1019	5913		-644	-90	104	714	4180
121	27	41	219	1273		-84	-10	24	154	900
1	3	17	99	577		0	2	12	70	408
81	19	33	179	1041		-56	-6	20	126	736
681	139	153	779	4521		-476	-66	80	546	3196

Таблица 3.3

-1156	-204	$c_{17}(-68)$	-204	-1156	$d_{17}(0)$	816	136	$z_{17}(0)$	-136	-816
-7031	-1169	17	1271	7609	431	4981	881	305	949	5389
-983	-161	17	263	1561	73	697	125	53	193	1105
-23	-1	17	103	601	7	17	5	13	73	425
-311	-49	17	151	889	-31	221	41	25	109	629
-2999	-497	17	599	3577	-193	2125	377	137	445	2533
476	68	$t_{17}(-68)$	-476	-2788		-340	-68	$p_{17}(-68)$	-340	-1972
2931	593	627	3169	18387		-2050	-288	322	2220	12998
411	89	123	649	3771		-286	-36	70	456	2666
11	9	43	249	1451		-6	4	30	176	1026
131	33	67	369	2147		-90	-8	42	260	1518
1251	257	291	1489	8643		-874	-120	154	1044	6110

Таблица 3.4

-1564	-276	$c_{23}(-92)$	-276	-1564	$d_{23}(0)$	1104	184	$z_{23}(0)$	-184	-1104
-8561	-1423	23	1561	9343	527	6065	1073	373	1165	6617
-1169	-191	23	329	1951	89	829	149	65	241	1381
-17	1	23	137	799	7	13	5	17	97	565
-497	-79	23	217	1279	-47	353	65	37	157	905
-4529	-751	23	889	5311	-289	3209	569	205	661	3761
644	92	$t_{23}(-92)$	-644	-3772		-460	-92	$p_{23}(-92)$	-460	-2668
3569	723	769	3891	22577		-2496	-350	396	2726	15960
489	107	153	811	4713		-340	-42	88	570	3332
9	11	57	331	1929		-4	6	40	234	1364
209	51	97	531	3089		-144	-14	60	374	2184
1889	387	433	2211	12833		-1320	-182	228	1550	9072

Таблица 3.5

-2108	-372	$c_{31}(-124)$	-372	-2108	$d_{31}(0)$	1488	248	$z_{31}(0)$	-248	-1488
-										
14569	-2423	31	2609	15623	889	10321	1825	629	1949	11065
-2089	-343	31	529	3143	151	1481	265	109	389	2225
-73	-7	31	193	1127	17	53	13	25	137	797
-457	-71	31	257	1511	-49	325	61	41	185	1069
-4777	-791	31	977	5831	-311	3385	601	221	725	4129
868	124	$t_{31}(-124)$	-868	-5084		-620	-124	$p_{31}(-124)$	-620	-3596
6073	1227	1289	6507	37753		-4248	-598	660	4558	26688
873	187	249	1307	7593		-608	-78	140	918	5368
33	19	81	467	2721		-20	6	56	330	1924
193	51	113	627	3649		-132	-10	72	442	2580
1993	411	473	2427	14089		-1392	-190	252	1702	9960

Таблица 3.6

-2788	-492	$c_{41}(-164)$	-492	-2788	$d_{41}(0)$	1968	328	$z_{41}(0)$	-328	-1968
-										
11423	-1897	41	2143	12817	713	8093	1433	505	1597	9077
-1439	-233	41	479	2833	119	1021	185	89	349	2005
1	7	41	239	1393	1	1	5	29	169	985
-1343	-217	41	463	2737	-113	953	173	85	337	1937
-		41								
10847	-1801		2047	12241	-679	7685	1361	481	1525	8669
1148	164	$t_{41}(-164)$	-1148	-6724		-820	-164	$p_{41}(-164)$	-820	-4756
4763	969	1051	5337	30971		-3330	-464	546	3740	21894
603	137	219	1177	6843		-418	-48	130	828	4838
3	17	99	577	3363		2	12	70	408	2378
563	129	211	1137	6611		-390	-44	126	800	4674
4523	921	1003	5097	29579		-3162	-440	522	3572	20910

Таблица 3.7

-3196	-564	$c_{47}(-188)$	-564	-3196	$d_{47}(0)$	2256	376	$z_{47}(0)$	-376	-2256
-										
20921	-3479	47	3761	22519	1279	14821	2621	905	2809	15949
-2969	-487	47	769	4567	217	2105	377	157	565	3233
-89	-7	47	289	1687	23	65	17	37	205	1193
-761	-119	47	401	2359	-79	541	101	65	289	1669
-7673	-1271	47	1553	9271	-497	5437	965	353	1153	6565
1316	188	$t_{47}(-188)$	-1316	-7708		-940	-188	$p_{47}(-188)$	-940	-5452
8721	1763	1857	9379	54417		-6100	-858	952	6570	38468
1241	267	361	1899	11033		-864	-110	204	1334	7800
41	27	121	699	4073		-24	10	84	494	2880
321	83	177	979	5697		-220	-18	112	690	4028
3201	659	753	3859	22401		-2236	-306	400	2706	15836

Таблица 3.8

-3332	-588	$c_{49}(-196)$	-588	-3332	$d_{49}(0)$	2352	392	$z_{49}(0)$	-392	-2352
-										
24823	-4129	49	4423	26489	1511	17585	3109	1069	3305	18761
-3607	-593	49	887	5273	257	2557	457	185	653	3733
-151	-17	49	311	1817	31	109	25	41	221	1285
-631	-97	49	391	2297	-71	449	85	61	281	1625
-6967	-1153	49	1447	8633	-457	4937	877	325	1073	6113
1372	196	$t_{49}(-196)$	-1372	-8036		-980	-196	$p_{49}(-196)$	-980	-5684
10347	2089	2187	11033	64011		-7238	1020	1118	7728	45250
1507	321	419	2193	12739		-1050	-136	234	1540	9006
67	33	131	753	4387		-42	8	90	532	3102
267	73	171	953	5547		-182	-12	110	672	3922
2907	601	699	3593	20859		-2030	-276	374	2520	14746

Таблица 4.1

n_1	m_1	$\pm d_1^2$	Δ	c_1	z_1	$-d_1^2$	Δ	t_1	p_1	d_1^2	Δ
7	5	-1^2	-1^2	41	29	-1^2	$2*1^2$	99	70	1^2	$-2*1^2$
3	2	1^2	1^2	7	5	-1^2	$2*1^2$	17	12	1^2	$-2*1^2$
1	1	-1^2	-1^2	1	1	-1^2	$2*1^2$	3	2	1^2	$-2*1^2$
1	0	1^2	1^2	-1	1	-1^2	$2*1^2$	1	0	1^2	$-2*1^2$
-1	1	-1^2	...	-7	5	-1^2	...	3	-2	1^2	...

Таблица 4.2

n_7	m_7	$\pm d_7^2$	Δ	c_7	z_7	$-d_7^2$	Δ	t_7	p_7	d_7^2	Δ
23	17	-7^2	-7^2	137	97	-7^2	$2*7^2$	331	234	7^2	$-2*7^2$
11	6	7^2	7^2	23	17	-7^2	$2*7^2$	57	40	7^2	$-2*7^2$
1	5	-7^2	-7^2	1	5	-7^2	$2*7^2$	11	6	7^2	$-2*7^2$
9	-4	7^2	7^2	-17	13	-7^2	$2*7^2$	9	-4	7^2	$-2*7^2$
-17	13	-7^2	...	-103	73	-7^2	...	43	-30	7^2	...

Таблица 4.3

n_{17}	m_{17}	$\pm d_{17}^2$	Δ	c_{17}	z_{17}	$-d_{17}^2$	Δ	t_{17}	p_{17}	d_{17}^2	Δ
73	53	-17^2	-17^2	431	305	-17^2	$2*17^2$ $2*17^2$	1041	736	17^2	$-2*17^2$
33	20	17^2	17^2	73	53	-17^2	$2*17^2$	179	126	17^2	$-2*17^2$
7	13	-17^2	-17^2	7	13	-17^2	$2*17^2$	33	20	17^2	$-2*17^2$
19	-6	17^2	17^2	-31	25	-17^2	$2*17^2$	19	-6	17^2	$-2*17^2$
-31	25	-17^2	...	-193	137	-17^2	...	81	-56	17^2	...

Таблица 4.4

n_{23}	m_{23}	$\pm d_{23}^2$	Δ	c_{23}	z_{23}	$-d_{23}^2$	Δ	t_{23}	p_{23}	d_{23}^2	Δ
89	65	-23^2	-23^2	527	373	-23^2	$2*23^2$ $2*23^2$	1273	900	23^2 23^2	$-2*23^2$
41	24	23^2	23^2	89	65	-23^2	$2*23^2$	219	154	23^2	$-2*23^2$
7	17	-23^2	-23^2	7	17	-23^2	$2*23^2$	41	24	23^2	$-2*23^2$
27	-10	23^2	23^2	-47	37	-23^2	$2*23^2$	27	-10	23^2	$-2*23^2$
-47	37	-23^2	...	-289	205	-23^2	...	121	-84	23^2	...

Таблица 4.5

n_{31}	m_{31}	$\pm d_{31}^2$	Δ	c_{31}	z_{31}	$-d_{31}^2$	Δ	t_{31}	p_{31}	d_{31}^2	Δ
151	109	-31^2	-31^2	889	629	-31^2	$2*31^2$ $2*31^2$	2147	1518	31^2	$-2*31^2$
67	42	31^2	31^2	151	109	-31^2	$2*31^2$	369	260	31^2	$-2*31^2$
17	25	-31^2	-31^2	17	25	-31^2	$2*31^2$	67	42	31^2	$-2*31^2$
33	-8	31^2	31^2	-49	41	-31^2	$2*31^2$	33	-8	31^2	$-2*31^2$
-49	41	-31^2	...	-311	221	-31^2	...	131	-90	31^2	...

Таблица 4.6

n_{41}	m_{41}	$\pm d_{41}^2$	Δ	c_{41}	z_{41}	$-d_{41}^2$	Δ	t_{41}	p_{41}	d_{41}^2	Δ
119	89	-41^2	-41^2	713	505	-41^2	$2*41^2$ $2*41^2$	1723	1218	41^2	$-2*41^2$
59	30	41^2	41^2	119	89	-41^2	$2*41^2$	297	208	41^2	$-2*41^2$
1	29	-41^2	-41^2	1	29	-41^2	$2*41^2$	59	30	41^2	$-2*41^2$
57	-28	41^2	41^2	-113	85	-41^2	$2*41^2$	57	-28	41^2	$-2*41^2$
-113	85	-41^2	...	-679	481	-41^2	...	283	-198	41^2	...

Таблица 4.7

n_{47}	m_{47}	$\pm d_{47}^2$	Δ	c_{47}	z_{47}	$-d_{47}^2$	Δ	t_{47}	p_{47}	d_{47}^2	Δ
217	157	-47^2	-47^2	1279	905	-47^2	$2*47^2$	3089	2184	47^2	$2*47^2$
97	60	47^2	47^2	217	157	-47^2	$2*47^2$	531	374	47^2	$2*47^2$
23	37	-47^2	-47^2	23	37	-47^2	$2*47^2$	97	60	47^2	$2*47^2$
51	-14	47^2	47^2	-79	65	-47^2	$2*47^2$	51	-14	47^2	$2*47^2$
-79	65	-47^2	...	-497	353	-47^2	...	209	-144	47^2	...

Таблица 4.8

n_{49}	m_{49}	$\pm d_{49}^2$	Δ	c_{49}	z_{49}	$-d_{49}^2$	Δ	t_{49}	p_{49}	d_{49}^2	Δ
257	185	-49^2	-49^2	1511	1069	-49^2	$2*49^2$	3649	2580	49^2	$2*49^2$
113	72	49^2	49^2	257	185	-49^2	$2*49^2$	627	442	49^2	$2*49^2$
31	41	-49^2	-49^2	31	41	-49^2	$2*49^2$	113	72	49^2	$2*49^2$
51	-10	49^2	49^2	-71	61	-49^2	$2*49^2$	51	-10	49^2	$2*49^2$
-71	61	-49^2	...	-457	325	-49^2	...	193	-132	49^2	...

Таблица 5.1

		c_1	t_1								
n_1	...	41	99	239	577	1253	2745	6067	13387	...	1.3
	...	7	17	41	99	239	577	1393	3363	...	
	...	1	3	7	17	41	99	239	577	...	
	...	-1	1	1	3	7	17	41	99	...	
	...	-7	3	-1	1	1	3	7	17	...	
		z_1	p_1								
m_1	...	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	...	1.2
	...	5	12	29	70	169	408	985	2378	...	
	...	1	2	5	12	29	70	169	408	...	
	...	1	0	1	2	5	12	29	70	...	
	...	5	-2	1	0	1	2	5	12	...	

Таблица 5.2

		c_7	t_7								
n_7	...	137	331	799	1929	4189	9177	20283	44755	...	1.11
	...	23	57	137	331	799	1929	4657	11243	...	
	...	1	11	23	57	137	331	799	1929	...	
	...	-17	9	1	11	23	57	137	331	...	
	...	-103	43	-17	9	1	11	23	57	...	
		z_7	p_7								
m_7	...	97	234	565	1364	3293	7950	19193	46336	...	5.6
	...	17	40	97	234	565	1364	3293	7950	...	
	...	5	6	17	40	97	234	565	1364	...	
	...	13	-4	5	6	17	40	97	234	...	
	...	73	-30	13	-4	5	6	17	40	...	

Таблица 5.3

		c_{17}	t_{17}								
n_{17}	...	431	1041	2513	6067	13175	28863	63793	140761	...	7.33
	...	73	179	431	1041	2513	6067	14647	35361	...	
	...	7	33	73	179	431	1041	2513	6067	...	
	...	-31	19	7	33	73	179	431	1041	...	
	...	-193	81	-31	19	7	33	73	179	...	
		z_{17}	p_{17}								
m_{17}	...	305	736	1777	4290	10357	25004	60365	145734	...	13.20
	...	53	126	305	736	1777	4290	10357	25004	...	
	...	13	20	53	126	305	736	1777	4290	...	
	...	25	-6	13	20	53	126	305	736	...	
	...	137	-56	25	-6	13	20	53	126	...	

Таблица 5.4

		c_{23}	t_{23}								
n_{23}	...	527	1273	3073	7419	16111	35295	78009	172129	...	7.41
	...	89	219	527	1273	3073	7419	17911	43241	...	
	...	7	41	89	219	527	1273	3073	7419	...	
	...	-47	27	7	41	89	219	527	1273	...	
	...	-289	121	-47	27	7	41	89	219	...	
		z_{23}	p_{23}								
m_{23}	...	373	900	2173	5246	12665	30576	73817	160299	...	17.24
	...	65	154	373	900	2173	5246	12665	30576	...	
	...	17	24	65	154	373	900	2173	5246	...	
	...	37	-10	17	24	65	154	373	900	...	
	...	205	-84	37	-10	17	24	65	154	...	

Таблица 5.5

		c_{31}	t_{31}								
n_{31}	...	889	2147	5183	12513	27173	59529	131571	290315	...	17.67
	...	151	369	889	2147	5183	12513	30209	72931	...	
	...	17	67	151	369	889	2147	5183	12513	...	
	...	-49	33	17	67	151	369	889	2147	...	
	...	-311	131	-49	33	17	67	151	369	...	
		z_{31}	p_{31}								
m_{31}	...	629	1518	3665	8848	21361	46387	101622	224605	...	25.42
	...	109	260	629	1518	3665	8848	21361	51570	...	
	...	25	42	109	260	629	1518	3665	8848	...	
	...	41	-8	25	42	109	260	629	1518	...	
	...	221	-90	41	-8	25	42	109	260	...	

Таблица 5.6

		c_{41}	t_{41}								
n_{41}	...	713	1723	4159	10041	21805	47769	105579	232963	...	1.59
	...	119	297	713	1723	4159	10041	24241	58523	...	
	...	1	59	119	297	713	1723	4159	10041	...	
	...	-113	57	1	59	119	297	713	1723	...	
	...	-679	283	-113	57	1	59	119	297	...	
		z_{41}	p_{41}								
m_{41}	...	505	1218	2941	7100	17141	41382	99905	241192	...	29.30
	...	89	208	505	1218	2941	7100	17141	41382	...	
	...	29	30	89	208	505	1218	2941	7100	...	
	...	85	-28	29	30	89	208	505	1218	...	
	...	481	-198	85	-28	29	30	89	208	...	

Таблица 5.7

		c ₄₇	t ₄₇								
n ₄₇	...	1279	3089	7457	18003	39095	85647	189297	417689	...	23.97
	...	217	531	1279	3089	7457	18003	43463	104929	...	
	...	23	97	217	531	1279	3089	7457	18003	...	
	...	-79	51	23	97	217	531	1279	3089	...	
	...	-497	209	-79	51	23	97	217	531	...	
		z ₄₇	p ₄₇								
m ₄₇	...	905	2184	5273	12730	30733	74196	179125	432446	...	37.60
	...	157	374	905	2184	5273	12730	30733	74196	...	
	...	37	60	157	374	905	2184	5273	12730	...	
	...	65	-14	37	60	157	374	905	2184	...	
	...	353	-144	65	-14	37	60	157	374	...	

Таблица 5.8

		c ₄₉	t ₄₉								
n ₄₉	...	1511	3649	8809	21267	46183	101175	223617	493417	...	31.113
	...	257	627	1511	3649	8809	21267	51343	123953	...	
	...	31	113	257	627	1511	3649	8809	21267	...	
	...	-71	51	31	113	257	627	1511	3649	...	
	...	-457	193	-71	51	31	113	257	627	...	
		z ₄₉	p ₄₉								
m ₄₉	...	1069	2580	6229	15038	36305	87648	211601	510850	...	41.72
	...	185	442	1069	2580	6229	15038	36305	87648	...	
	...	41	72	185	442	1069	2580	6229	15038	...	
	...	61	-10	41	72	185	442	1069	2580	...	
	...	325	-132	61	-10	41	72	185	442	...	

Таблица 6.

n ₁ (-4)	n ₇ (8)	n ₁₇ (-8)	n ₂₃ (4)	n ₃₁ (-40)	n ₄₁ (76)	n ₄₇ (-42)	n ₄₉ (-88)
1.59	49.243	87.697	135.881	129.1387	321.1331	217.2027	175.2313
1.11	7.41	17.123	23.153	31.249	41.219	47.361	49.419
1.3	1.11	7.33	7.41	17.67	1.59	23.97	31.113
1.3	7.33	17.67	23.97	31.113	41.211	47.177	49.171
1.11	49.195	87.361	135.545	129.571	321.1283	217.923	175.825
m ₁ (0.-4)	m ₇ (0.8)	m ₁₇ (0.-8)	m ₂₃ (0.4)	m ₃₁ (0.-40)	m ₄₁ (0.76)	m ₄₇ (0.-42)	m ₄₉ (0.-88)
29.30	97.146	305.392	373.508	629.758	505.826	905.1122	1069.1244
5.6	17.24	53.70	65.88	109.140	89.130	157.204	185.234
1.2	5.6	13.20	17.24	25.42	29.30	37.60	41.72
1.2	13.20	25.42	37.60	41.72	85.126	65.112	61.110
5.6	73.122	137.224	205.340	221.350	481.802	353.570	325.500

Таблица 7.

Z_1	
1	1
5	5
29	29
169	13^2
985	$5 \cdot 197$
5741	5741
33461	33461
195021	$5^2 \cdot 29 \cdot 269$
1136681	$137 \cdot 8297$
6625101	$37 \cdot 179057$
3861396	$5 \cdot 13^2 \cdot 45697$
22505868	$229 \cdot 982781$
131173812	$29 \cdot 1549 \cdot 29201$
764537004	$5 \cdot 53 \cdot 197 \cdot 146441$
4456048214	4456048214
25971752284	$61 \cdot 1301 \cdot 3272601$
151374465494	$5 \cdot 52734529 \cdot 5741$
882275040682	$13^2 \cdot 29 \cdot 1800193921$
5142275778598	$593 \cdot 1101341 \cdot 78737$
29971379630906	$5 \cdot 389 \cdot 4605197 \cdot 33461$
174686002006840	174686002006840
1018144632410138	$890220016097 \cdot 11437$
5934181792453998	$5^2 \cdot 29 \cdot 197 \cdot 269 \cdot 238321 \cdot 6481$
34586946122313811	919621008304013761
20158749494142890	$13^2 \cdot 293 \cdot 4071076497797$
117493802352625960	$5 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 20468307053 \cdot 8297$
684804064621612874	684804064621612874
3991330585377051287	$29 \cdot 109 \cdot 120159269 \cdot 5741 \cdot 183041$
23263179447640694849	$5 \cdot 37 \cdot 53535197 \cdot 1311797 \cdot 179057$
135587746100467117807	135587746100467117807

Таблица 8.1

	n_{-7}	m_{-7}	n_{-1}	m_{-1}	n_1	m_1	n_7	m_7	n_{41}	m_{41}	
...	137	97	41	29	41	29	137	97	713	505	...
...	57	40	17	12	17	12	57	40	297	208	...
...	23	17	7	5	7	5	23	17	119	89	...
...	11	6	3	2	3	2	11	6	59	30	...
...	1	5	1	1	1	1	1	5	1	29	...

Таблица 8.2

	n_{-103}	m_{-103}	n_{-17}	m_{-17}	n_1	m_1	n_{23}	m_{23}	n_{137}	m_{137}	
...	1871	1325	431	305	209	149	527	373	2447	1733	...
...	779	546	179	126	89	60	219	154	1019	714	...
...	313	233	73	53	31	29	89	65	409	305	...
...	153	80	33	20	17	12	41	24	201	104	...
...	7	73	7	13	7	5	7	17	7	97	...

Таблица 8.3

	n ₋₁₉₃	m ₋₁₉₃	n ₋₃₁	m ₋₃₁	n ₇	m ₇	n ₇₃	m ₇₃	n ₄₃₁	m ₄₃₁	
...	3577	2533	889	629	601	425	1561	1105	7609	5389	...
...	1489	1044	369	260	249	176	649	456	3169	2220	...
...	599	445	151	109	103	73	263	193	1271	949	...
...	291	154	67	42	43	30	123	70	627	322	...
...	17	137	17	25	17	13	17	53	17	305	...

Таблица 8.4

	n ₋₂₈₉	m ₋₂₈₉	n ₋₄₇	m ₋₄₇	n ₇	m ₇	n ₈₉	m ₈₉	n ₅₂₇	m ₅₂₇	
...	5311	3761	1279	905	799	565	1951	1381	9343	6617	...
...	2211	1550	531	374	331	234	811	570	3891	2726	...
...	889	661	217	157	137	97	329	241	1561	1165	...
...	433	228	97	60	57	40	153	88	769	396	...
...	23	205	23	37	23	17	23	65	23	373	...

Таблица 8.5

	n ₋₃₁₁	m ₋₃₁₁	n ₋₄₉	m ₋₄₉	n ₁₇	m ₁₇	n ₁₅₁	m ₁₅₁	n ₈₈₉	m ₈₈₉	
...	5831	4129	1511	1069	1127	797	3143	2225	15623	11065	...
...	2427	1702	627	442	467	330	1307	918	6507	4558	...
...	977	725	257	185	193	137	529	389	2609	1949	...
...	473	252	113	72	81	56	249	140	1289	660	...
...	31	221	31	41	31	25	31	109	31	629	...

Таблица 8.6

	n ₋₆₇₉	m ₋₆₇₉	n ₋₁₁₃	m ₋₁₁₃	n ₁	m ₁	n ₁₁₉	m ₁₁₉	n ₇₁₃	m ₇₁₃	
...	12241	8669	2737	1937	1393	985	2833	2005	12817	9077	...
...	5097	3572	1137	800	577	408	1177	828	5337	3740	...
...	2047	1525	463	337	239	169	479	349	2143	1597	...
...	1003	522	211	126	99	70	219	130	1051	546	...
...	41	481	41	85	41	29	41	89	41	505	...

Таблица 8.7

	n ₋₄₉₇	m ₋₄₉₇	n ₋₇₉	m ₋₇₉	n ₂₃	m ₂₃	n ₂₁₇	m ₂₁₇	n ₁₂₇₉	m ₁₂₇₉	
...	9271	6565	2359	1669	1687	1193	4567	3233	22519	15949	...
...	3859	2706	979	690	699	494	1899	1334	9379	6570	...
...	1553	1153	401	289	289	205	769	565	3761	2809	...
...	753	400	177	112	121	84	361	204	1857	952	...
...	47	353	47	65	47	37	47	157	47	905	...

Таблица 8.8

	n ₋₄₅₇	m ₋₄₅₇	n ₋₇₁	m ₋₇₁	n ₃₁	m ₃₁	n ₂₅₇	m ₂₅₇	n ₁₅₁₁	m ₁₅₁₁	
...	8633	6113	2297	1625	1817	1285	5273	3733	26489	18761	...
...	3593	2520	953	672	753	532	2193	1540	11033	7728	...
...	1447	1073	391	281	311	221	887	653	4423	3305	...
...	699	374	171	110	131	90	419	234	2187	1118	...
...	49	325	49	61	49	41	49	185	49	1069	...

Таблица 9.

h\g	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
0	1 1 1							d z c							
1	1 5 7	7 17 23	23 37 47	47 65 79	79 101 119	119 145 167	167 197 223	223 257 287	287 325 359	359 401 439	439 485 527	527 577 623	623 677 727	727 785 839	839 901 959
2	7 13 17	1 29 41	17 53 73	41 85 113	73 125 161	113 173 217	161 229 281	217 293 353	281 365 433	353 445 521	433 533 617	521 629 721	617 733 833	721 845 953	833 965 1081
3	17 25 31		7 73 103	31 109 151		103 205 271	151 265 343		271 409 511	343 493 607		511 685 823	607 793 943		823 1033 1207
4	31 41 49	23 65 89	7 97 137	17 137 193	49 185 257	89 241 329	137 305 409	193 377 497	257 457 593	329 545 697	409 641 809	497 745 929	593 857 1057	697 977 1193	809 1105 1337
5	49 61 71	41 89 119		1 169 239	31 221 311	71 281 391	119 349 479	d z c	239 509 679	311 601 791	391 701 911	479 809 1039		679 1049 1319	791 1181 1471
6	71 85 97		47 157 217	23 205 289		49 325 457	97 397 553		217 565 769	289 661 889		457 877 1153	553 997 1297		769 1261 1609
7	97 113 127	89 149 191	73 193 263		17 305 431	23 373 527	71 449 631	127 533 743	191 625 863	263 725 991		431 949 1271	527 1073 1423	631 1205 1583	743 1345 1751
8	127 145 161	119 185 233	103 233 313	79 289 401	47 353 497	7 425 601	41 505 713	97 593 833	161 689 961	233 793 1097	313 905 1241	401 1025 1393	497 1153 1553	601 1289 1721	713 1433 1897
9	161 181 199		137 277 367	113 337 463		41 481 679	7 565 799		127 757 1063	199 865 1207		367 1105 1519	463 1237 1687		679 1525 2047
10	199 221 241	191 269 329		151 389 529	119 461 641	79 541 761	31 629 889	d z c	89 829 1169	161 941 1321	241 1061 1481	329 1189 1649		529 1469 2009	641 1621 2201
11	241 265 287	233 317 383	217 377 487	193 445 599	161 521 719		73 697 983	17 797 1127	47 905 1279	119 1021 1439	199 1145 1607	287 1277 1783	383 1417 1967	487 1565 2159	599 1721 2359
12	287 313 337		263 433 553	239 505 673		167 673 937	119 769 1081		1 985 1393	73 1105 1561		241 1369 1921	337 1513 2113		553 1825 2521
13	337 365 391	329 425 503	313 493 623	289 569 751	257 653 887	217 745 1031		113 953 1343	49 1069 1511	23 1193 1687	103 1325 1871	191 1465 2063	287 1613 2263	391 1769 2471	503 1933 2687
14	391 421 449	383 485 569	367 557 697		311 725 977	271 821 1129	223 925 1289	167 1037 1457	103 1157 1633	31 1285 1817		137 1565 2209	233 1717 2417	337 1877 2633	449 2045 2857
15	449 481 511			401 709 919		329 901 1231	281 1009 1399	d z c	161 1249 1759	89 1381 1951		79 1669 2359			391 2161 3031

Таблица 10.1

h_1	g_1	h_7	g_7	h_{17}	g_{17}	h_{23}	g_{23}	h_{31}	g_{31}	h_{41}	g_{41}
2	3	4	5	7	9	7	11	10	13	8	13
1	1	1	3	2	5	4	3	3	7	5	3
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	1	2	-1	3	-1	-1	5	4	-1	-2	7
1	-1	-3	5	-4	7	6	-7	-5	9	9	-11
m_1	n_1	m_7	n_7	m_{17}	n_{17}	m_{23}	n_{23}	m_{31}	n_{31}	m_{41}	n_{41}
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113
z_1	c_1	z_7	c_7	z_{17}	c_{17}	z_{23}	c_{23}	z_{31}	c_{31}	z_{41}	c_{41}
29	41	97	137	305	431	373	527	629	889	505	713
5	7	17	23	53	73	65	89	109	151	89	119
1	1	5	1	13	7	17	7	25	17	29	1
1	-1	13	-17	25	-31	37	-47	41	-49	85	-113
5	-7	73	-103	137	-193	205	-289	221	-311	481	-679
p_1	t_1	p_7	t_7	p_{17}	t_{17}	p_{23}	t_{23}	p_{31}	t_{31}	p_{41}	t_{41}
70	99	234	331	736	1041	900	1273	1518	2147	1218	1723
12	17	40	57	126	179	154	219	260	369	208	297
2	3	6	11	20	33	24	41	42	67	30	59
0	1	-4	9	-6	19	-10	27	-8	33	-28	57
-2	3	-30	43	-56	81	-84	121	-90	131	-198	283

Таблица 10.2

h_{47}	g_{47}	h_{49}	g_{49}	h_{71}	g_{71}	h_{73}	g_{73}	h_{79}	g_{79}	h_{89}	g_{89}
11	17	13	17	16	21	12	19	15	23	15	19
6	5	4	9	5	11	7	5	8	7	4	11
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-1	7	5	-1	6	-1	-2	9	-1	9	7	-3
8	-9	-6	11	-7	13	11	-13	10	-11	-10	17
m_{47}	n_{47}	m_{49}	n_{49}	m_{71}	n_{71}	m_{73}	n_{73}	m_{79}	n_{79}	m_{89}	n_{89}
157	217	185	257	281	391	193	263	289	401	241	329
60	97	72	113	110	171	70	123	112	177	88	153
37	23	41	31	61	49	53	17	65	47	65	23
-14	51	-10	51	-12	73	-36	89	-18	83	-42	107
65	-79	61	-71	85	-97	125	-161	101	-119	149	-191
z_{47}	c_{47}	z_{49}	c_{49}	z_{71}	c_{71}	z_{73}	c_{73}	z_{79}	c_{79}	z_{89}	c_{89}
905	1279	1069	1511	1625	2297	1105	1561	1669	2359	1381	1951
157	217	185	257	281	391	193	263	289	401	241	329
37	23	41	31	61	49	53	17	65	47	65	23
65	-79	61	-71	85	-97	125	-161	101	-119	149	-191
353	-497	325	-457	449	-631	697	-983	541	-761	829	-1169
p_{47}	t_{47}	p_{49}	t_{49}	p_{71}	t_{71}	p_{73}	t_{73}	p_{79}	t_{79}	p_{89}	t_{89}
2184	3089	2580	3649	3922	5547	2666	3771	4028	5697	3332	4713
374	531	442	627	672	953	456	649	690	979	570	811
60	97	72	113	110	171	70	123	112	177	88	153
-14	51	-10	51	-12	73	-36	89	-18	83	-42	107
-144	209	-132	193	-182	267	-286	411	-220	321	-340	489

Таблица 10.3

h ₉₇	g ₉₇	h ₁₀₃	g ₁₀₃	h ₁₁₃	g ₁₁₃	h ₁₁₉	g ₁₁₉	h ₁₁₉	g ₁₁₉	h ₁₂₇	g ₁₂₇
7	37	13	21	16	25	18	23	19	29	22	29
6	13	8	5	9	7	5	13	10	9	7	15
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	11	-3	11	-2	11	8	-3	-1	11	8	-1
16	-9	14	-17	13	-15	-11	19	12	-13	-9	17
m ₉₇	n ₉₇	m ₁₀₃	n ₁₀₃	m ₁₁₃	n ₁₁₃	m ₁₁₉	n ₁₁₉	m ₁₁₉	n ₁₁₉	m ₁₂₇	n ₁₂₇
397	553	233	313	337	463	349	479	461	641	533	743
156	241	80	153	126	211	130	219	180	281	210	323
85	71	73	7	85	41	89	41	101	79	113	97
-14	99	-66	139	-44	129	-48	137	-22	123	-16	129
113	-127	205	-271	173	-217	185	-233	145	-167	145	-161
Z ₉₇	C ₉₇	Z ₁₀₃	C ₁₀₃	Z ₁₁₃	C ₁₁₃	Z ₁₁₉	C ₁₁₉	Z ₁₁₉	C ₁₁₉	Z ₁₂₇	C ₁₂₇
2297	3247	1325	1871	1937	2737	2005	2833	2665	3767	3085	4361
397	553	233	313	337	463	349	479	461	641	533	743
85	71	73	7	85	41	89	41	101	79	113	97
113	-127	205	-271	173	-217	185	-233	145	-167	145	-161
593	-833	1157	-1633	953	-1343	1021	-1439	769	-1081	757	-1063
p ₉₇	t ₉₇	p ₁₀₃	t ₁₀₃	p ₁₁₃	t ₁₁₃	p ₁₁₉	t ₁₁₉	p ₁₁₉	t ₁₁₉	p ₁₂₇	t ₁₂₇
5544	7841	3196	4521	4674	6611	4838	6843	6432	9097	7446	10531
950	1347	546	779	800	1137	828	1177	1102	1563	1276	1809
156	241	80	153	126	211	130	219	180	281	210	323
-14	99	-66	139	-44	129	-48	137	-22	123	-16	129
-240	353	-476	681	-390	563	-418	603	-312	457	-306	451

Таблица 10.4

h ₁₃₇	g ₁₃₇	h ₁₅₁	g ₁₅₁	h ₁₆₁	g ₁₆₁	h ₁₆₁	g ₁₆₁	h ₁₆₇	g ₁₆₇	h ₁₉₁	g ₁₉₁
17	21	17	27	20	31	25	33	23	35	24	31
4	13	10	7	11	9	8	17	12	11	7	17
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-5	-3	13	-2	13	9	-1	-1	13	10	-3
-14	23	16	-19	15	-17	-10	19	14	-15	-13	23
m ₁₃₇	n ₁₃₇	m ₁₅₁	n ₁₅₁	m ₁₆₁	n ₁₆₁	m ₁₆₁	n ₁₆₁	m ₁₆₇	n ₁₆₇	m ₁₉₁	n ₁₉₁
305	409	389	529	521	719	689	961	673	937	625	863
104	201	140	249	198	323	272	417	264	409	238	387
97	7	109	31	125	73	145	127	145	119	149	89
-90	187	-78	187	-52	177	-18	163	-26	171	-60	209
277	-367	265	-343	229	-281	181	-199	197	-223	269	-329
Z ₁₃₇	C ₁₃₇	Z ₁₅₁	C ₁₅₁	Z ₁₆₁	C ₁₆₁	Z ₁₆₁	C ₁₆₁	Z ₁₆₇	C ₁₆₇	Z ₁₉₁	C ₁₉₁
1733	2447	2225	3143	3001	4241	3989	5639	3893	5503	3601	5089
305	409	389	529	521	719	689	961	673	937	625	863
97	7	109	31	125	73	145	127	145	119	149	89
277	-367	265	-343	229	-281	181	-199	197	-223	269	-329
1565	-2209	1481	-2089	1249	-1759	941	-1321	1037	-1457	1465	-2063
p ₁₃₇	t ₁₃₇	p ₁₅₁	t ₁₅₁	p ₁₆₁	t ₁₆₁	p ₁₆₁	t ₁₆₁	p ₁₆₇	t ₁₆₇	p ₁₉₁	t ₁₉₁
4180	5913	5368	7593	7242	10243	9628	13617	9396	13289	8690	12291
714	1019	918	1307	1240	1761	1650	2339	1610	2283	1488	2113
104	201	140	249	198	323	272	417	264	409	238	387
-90	187	-78	187	-52	177	-18	163	-26	171	-60	209
-644	921	-608	873	-510	739	-380	561	-420	617	-598	867

Таблица 10.5

h ₁₉₉	g ₁₉₉	h ₂₁₇	g ₂₁₇	h ₂₁₇	g ₂₁₇	h ₂₂₃	g ₂₂₃	h ₂₃₃	g ₂₃₃	h ₂₃₉	g ₂₃₉
28	37	23	29	24	37	27	41	27	35	22	27
9	19	6	17	13	11	14	13	8	19	5	17
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-1	11	-5	-2	15	-1	15	11	-3	12	-7
-11	21	-16	27	17	-19	16	-17	-14	25	-19	31
m ₁₉₉	n ₁₉₉	m ₂₁₇	n ₂₁₇	m ₂₁₇	n ₂₁₇	m ₂₂₃	n ₂₂₃	m ₂₃₃	n ₂₃₃	m ₂₃₉	n ₂₃₉
865	1207	565	769	745	1031	925	1289	793	1097	509	679
342	523	204	361	286	459	364	561	304	489	170	339
181	161	157	47	173	113	197	167	185	119	169	1
-20	201	-110	267	-60	233	-30	227	-66	251	-168	337
221	-241	377	-487	293	-353	257	-287	317	-383	505	-673
z ₁₉₉	c ₁₉₉	z ₂₁₇	c ₂₁₇	z ₂₁₇	c ₂₁₇	z ₂₂₃	c ₂₂₃	z ₂₃₃	c ₂₃₃	z ₂₃₉	c ₂₃₉
5009	7081	3233	4567	4297	6073	5353	7567	4573	6463	2885	4073
865	1207	565	769	745	1031	925	1289	793	1097	509	679
181	161	157	47	173	113	197	167	185	119	169	1
221	-241	377	-487	293	-353	257	-287	317	-383	505	-673
1145	-1607	2105	-2969	1585	-2231	1345	-1889	1717	-2417	2861	-4039
p ₁₉₉	t ₁₉₉	p ₂₁₇	t ₂₁₇	p ₂₁₇	t ₂₁₇	p ₂₂₃	t ₂₂₃	p ₂₃₃	t ₂₃₃	p ₂₃₉	t ₂₃₉
12090	17099	7800	11033	10370	14667	12920	18273	11036	15609	6958	9843
2072	2937	1334	1899	1776	2521	2214	3139	1890	2683	1188	1697
342	523	204	361	286	459	364	561	304	489	170	339
-20	201	-110	267	-60	233	-30	227	-66	251	-168	337
-462	683	-864	1241	-646	939	-544	801	-700	1017	-1178	1683

Таблица 10.6

h ₂₄₁	g ₂₄₁	h ₂₅₇	g ₂₅₇	h ₂₆₃	g ₂₆₃	h ₂₇₁	g ₂₇₁	h ₂₈₁	g ₂₈₁	h ₂₈₇	g ₂₈₇
11	61	31	17	12	47	25	39	28	43	31	47
10	21	13	9	7	19	14	11	15	13	16	15
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-9	19	5	-1	-2	9	-3	17	-2	17	-1	17
28	-17	3	11	11	1	20	-23	19	-21	18	-19
m ₂₄₁	n ₂₄₁	m ₂₅₇	n ₂₅₇	m ₂₆₃	n ₂₆₃	m ₂₇₁	n ₂₇₁	m ₂₈₁	n ₂₈₁	m ₂₈₇	n ₂₈₇
1061	1481	653	887	725	991	821	1129	1009	1399	1217	1697
420	641	234	419	266	459	308	513	390	619	480	737
221	199	185	49	193	73	205	103	229	161	257	223
-22	243	-136	321	-120	313	-102	307	-68	297	-34	291
265	-287	457	-593	433	-553	409	-511	365	-433	325	-359
z ₂₄₁	c ₂₄₁	z ₂₅₇	c ₂₅₇	z ₂₆₃	c ₂₆₃	z ₂₇₁	c ₂₇₁	z ₂₈₁	c ₂₈₁	z ₂₈₇	c ₂₈₇
6145	8687	3733	5273	4157	5873	4721	6671	5825	8233	7045	9959
1061	1481	653	887	725	991	821	1129	1009	1399	1217	1697
221	199	185	49	193	73	205	103	229	161	257	223
265	-287	457	-593	433	-553	409	-511	365	-433	325	-359
1369	-1921	2557	-3607	2405	-3391	2249	-3169	1961	-2759	1693	-2377
p ₂₄₁	t ₂₄₁	p ₂₅₇	t ₂₅₇	p ₂₆₃	t ₂₆₃	p ₂₇₁	t ₂₇₁	p ₂₈₁	t ₂₈₁	p ₂₈₇	t ₂₈₇
14832	20977	9006	12739	10030	14187	11392	16113	14058	19883	17004	24049
2542	3603	1540	2193	1716	2441	1950	2771	2408	3417	2914	4131
420	641	234	419	266	459	308	513	390	619	480	737
-22	243	-136	321	-120	313	-102	307	-68	297	-34	291
-552	817	-1050	1507	-986	1419	-920	1329	-798	1163	-684	1009

Таблица 10.7

h ₂₈₇	g ₂₈₇	h ₂₈₉	g ₂₈₉	h ₃₁₁	g ₃₁₁	h ₃₁₃	g ₃₁₃	h ₃₂₉	g ₃₂₉	h ₃₂₉	g ₃₂₉
34	45	25	31	23	37	29	37	26	41	33	43
11	23	6	19	14	9	8	21	15	11	10	23
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-1	13	-7	-5	19	13	-5	-4	19	13	-3
-13	25	-20	33	24	-29	-18	31	23	-27	-16	29
m ₂₈₇	n ₂₈₇	m ₂₈₉	n ₂₈₉	m ₃₁₁	n ₃₁₁	m ₃₁₃	n ₃₁₃	m ₃₂₉	n ₃₂₉	m ₃₂₉	n ₃₂₉
1277	1783	661	889	725	977	905	1241	901	1231	1189	1649
506	771	228	433	252	473	336	569	330	571	460	729
265	241	205	23	221	31	233	103	241	89	269	191
-24	289	-182	387	-190	411	-130	363	-152	393	-78	347
313	-337	569	-751	601	-791	493	-623	545	-697	425	-503
Z ₂₈₇	C ₂₈₇	Z ₂₈₉	C ₂₈₉	Z ₃₁₁	C ₃₁₁	Z ₃₁₃	C ₃₁₃	Z ₃₂₉	C ₃₂₉	Z ₃₂₉	C ₃₂₉
7397	10457	3761	5311	4129	5831	5197	7343	5165	7297	6865	9703
1277	1783	661	889	725	977	905	1241	901	1231	1189	1649
265	241	205	23	221	31	233	103	241	89	269	191
313	-337	569	-751	601	-791	493	-623	545	-697	425	-503
1613	-2263	3209	-4529	3385	-4777	2725	-3841	3029	-4271	2281	-3209
p ₂₈₇	t ₂₈₇	p ₂₈₉	t ₂₈₉	p ₃₁₁	t ₃₁₁	p ₃₁₃	t ₃₁₃	p ₃₂₉	t ₃₂₉	p ₃₂₉	t ₃₂₉
17854	25251	9072	12833	9960	14089	12540	17737	12462	17627	16568	23433
3060	4337	1550	2211	1702	2427	2146	3051	2132	3033	2838	4027
506	771	228	433	252	473	336	569	330	571	460	729
-24	289	-182	387	-190	411	-130	363	-152	393	-78	347
-650	963	-1320	1889	-1392	1993	-1116	1609	-1242	1787	-928	1353

Таблица 10.8

h ₃₃₇	g ₃₃₇	h ₃₄₃	g ₃₄₃	h ₃₅₃	g ₃₅₃	h ₃₅₉	g ₃₅₉	h ₃₆₇	g ₃₆₇	h ₃₈₃	g ₃₈₃
37	49	29	45	32	49	35	53	32	41	36	47
12	25	16	13	17	15	18	17	9	23	11	25
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-1	-3	19	-2	19	-1	19	14	-5	14	-3
-14	27	22	-25	21	-23	20	-21	-19	33	-17	31
m ₃₃₇	n ₃₃₇	m ₃₄₃	n ₃₄₃	m ₃₅₃	n ₃₅₃	m ₃₅₉	n ₃₅₉	m ₃₆₇	n ₃₆₇	m ₃₈₃	n ₃₈₃
1513	2113	1097	1513	1313	1823	1549	2161	1105	1519	1417	1967
600	913	416	681	510	803	612	937	414	691	550	867
313	287	265	151	293	217	325	287	277	137	317	233
-26	339	-114	379	-76	369	-38	363	-140	417	-84	401
365	-391	493	-607	445	-521	401	-439	557	-697	485	-569
Z ₃₃₇	C ₃₃₇	Z ₃₄₃	C ₃₄₃	Z ₃₅₃	C ₃₅₃	Z ₃₅₉	C ₃₅₉	Z ₃₆₇	C ₃₆₇	Z ₃₈₃	C ₃₈₃
8765	12391	6317	8927	7585	10721	8969	12679	6353	8977	8185	11569
1513	2113	1097	1513	1313	1823	1549	2161	1105	1519	1417	1967
313	287	265	151	293	217	325	287	277	137	317	233
365	-391	493	-607	445	-521	401	-439	557	-697	485	-569
1877	-2633	2693	-3793	2377	-3343	2081	-2921	3065	-4319	2593	-3647
p ₃₃₇	t ₃₃₇	p ₃₄₃	t ₃₄₃	p ₃₅₃	t ₃₅₃	p ₃₅₉	t ₃₅₉	p ₃₆₇	t ₃₆₇	p ₃₈₃	t ₃₈₃
21156	29921	15244	21561	18306	25891	21648	30617	15330	21683	19754	27939
3626	5139	2610	3707	3136	4449	3710	5259	2624	3729	3384	4801
600	913	416	681	510	803	612	937	414	691	550	867
-26	339	-114	379	-76	369	-38	363	-140	417	-84	401
-756	1121	-1100	1593	-966	1411	-840	1241	-1254	1811	-1054	1539

Таблица 10.9

h ₃₉₁	g ₃₉₁	h ₃₉₁	g ₃₉₁	h ₄₀₁	g ₄₀₁	h ₄₀₉	g ₄₀₉	h ₄₃₁	g ₄₃₁	h ₄₃₃	g ₄₃₃
27	43	40	53	31	39	30	47	30	37	36	55
16	11	13	27	8	23	17	13	7	23	19	17
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-5	21	14	-1	15	-7	-4	21	16	-9	-2	21
26	-31	-15	29	-22	37	25	-29	-25	41	23	-25
m ₃₉₁	n ₃₉₁	m ₃₉₁	n ₃₉₁	m ₄₀₁	n ₄₀₁	m ₄₀₉	n ₄₀₉	m ₄₃₁	n ₄₃₁	m ₄₃₃	n ₄₃₃
985	1337	1769	2471	1025	1393	1189	1631	949	1271	1657	2303
352	633	702	1067	368	657	442	747	322	627	646	1011
281	71	365	337	289	79	305	137	305	17	365	281
-210	491	-28	393	-210	499	-168	473	-288	593	-84	449
701	-911	421	-449	709	-919	641	-809	881	-1169	533	-617
Z ₃₉₁	C ₃₉₁	Z ₃₉₁	C ₃₉₁	Z ₄₀₁	C ₄₀₁	Z ₄₀₉	C ₄₀₉	Z ₄₃₁	C ₄₃₁	Z ₄₃₃	C ₄₃₃
5629	7951	1024	1448	5861	8279	6829	9649	5389	7609	9577	1353
		9	9								7
985	1337	1769	2471	1025	1393	1189	1631	949	1271	1657	2303
281	71	365	337	289	79	305	137	305	17	365	281
701	-911	421	-449	709	-919	641	-809	881	-1169	533	-617
3925	-5537	2161	-3031	3965	-5593	3541	-4991	4981	-7031	2833	-3983
p ₃₉₁	t ₃₉₁	p ₃₉₁	t ₃₉₁	p ₄₀₁	t ₄₀₁	p ₄₀₉	t ₄₀₉	p ₄₃₁	t ₄₃₁	p ₄₃₃	g ₄₃₃
1358	1920	2473	3498	1414	2000	1647	2330	1299	1838	2311	3269
0	9	8	7	0	1	8	7	8	7	4	1
2322	3307	4240	6009	2418	3443	2820	4009	2220	3169	3960	5617
352	633	702	1067	368	657	442	747	322	627	646	1011
-210	491	-28	393	-210	499	-168	473	-288	593	-84	449
-1612	2313	-870	1291	-1628	2337	-1450	2091	-2050	2931	-1150	1683

Таблица 11.

Z _i	C _i
12c _{i0} +17z _{i0}	17c _{i0} +24z _{i0}
2c _{i0} + 3z _{i0}	3c _{i0} + 4z _{i0}
0c _{i0} + 1z _{i0}	1c _{i0} + 0z _{i0}
-2c _{i0} + 3z _{i0}	3c _{i0} - 4z _{i0}
-12c _{i0} +17z _{i0}	17c _{i0} -24z _{i0}
p _i	t _i
29c _{i0} +41z _{i0}	41c _{i0} +58z _{i0}
5c _{i0} + 7z _{i0}	7c _{i0} +10z _{i0}
1c _{i0} + 1z _{i0}	1c _{i0} + 2z _{i0}
1c _{i0} - 1z _{i0}	-1c _{i0} + 2z _{i0}
5c _{i0} - 7z _{i0}	-7c _{i0} +10z _{i0}

Таблица 12.1

z ₁	c ₁	p ₁	t ₁												
29	41	70	99	169	239	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	7	12	17	29	41	70	99	169	239	...	...	...	...	...	...
1	1	2	3	5	7	12	17	29	41	70	99	169	239	...	...
...	...	0	1	1	1	2	3	5	7	12	17	29	41	70	99
...	...	...	...	...	...	0	1	1	1	2	3	5	7	12	17

Таблица 12.2

z ₇	c ₇	p ₇	t ₇												
97	137	234	331	565	799	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
17	23	40	57	97	137	234	331	565	799	...	...	...	...	...	...
5	1	6	11	17	23	40	57	97	137	234	331	565	799	...	...
...	...	-4	9	5	1	6	11	17	23	40	57	97	137	234	331
...	...	...	...	...	...	-4	9	5	1	6	11	17	23	40	57

Таблица 12.3

z ₁₇	c ₁₇	p ₁₇	t ₁₇												
305	431	736	1041	1777	2513	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
53	73	126	179	305	431	736	1041	1777	2513	...	...	...	...	...	...
13	7	20	33	53	73	126	179	305	431	736	1041	1777	2513	...	...
...	...	-6	19	13	7	20	33	53	73	126	179	305	431	736	1041
...	...	...	...	...	...	-6	19	13	7	20	33	53	73	126	179

Таблица 12.4

z ₂₃	c ₂₃	p ₂₃	t ₂₃												
373	527	900	1273	2173	3073	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
65	89	154	219	373	527	900	1273	2173	3073	...	...	...	...	...	...
17	7	24	41	65	89	154	219	373	527	900	1273	2173	3073	...	...
...	...	-10	27	17	7	24	41	65	89	154	219	373	527	900	1273
...	...	...	...	...	...	-10	27	17	7	24	41	65	89	154	219

Таблица 12.5

z ₃₁	c ₃₁	p ₃₁	t ₃₁												
62	88	151	214	366	518	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
9	9	8	7	5	3										
10	15					151	214	366	518	...	...	...	...	...	...
9	1	260	369	629	889	8	7	5	3						
										151	214	366	518	...	...
25	17	42	67	109	151	260	369	629	889	8	7	5	3		
...	...	-8	33											151	214
				25	17	42	67	109	151	260	369	629	889	8	7
...	...	...	...	...	...	-8	33	25	17	42	67	109	151	260	369

Таблица 12.6

z ₄₁	c ₄₁	p ₄₁	t ₄₁												
50	71	121	172	294	415	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	3	8	3	1	9										
	11					121	172	294	415	...	...	...	...	...	...
89	9	208	297	505	713	8	3	1	9						
										121	172	294	415	...	...
29	1	30	59	89	119	208	297	505	713	8	3	1	9		
...	...	-28	57											121	172
				29	1	30	59	89	119	208	297	505	713	8	3
...	...	...	...	...	...	-28	57	29	1	30	59	89	119	208	297

Таблица 12.7

z ₄₇	c ₄₇	p ₄₇	t ₄₇												
90	127	218	308	527	745	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	9	4	9	3	7										
15						127	218	308	527	745	...	...	...	...	...
7	217	374	531	905	9	4	9	3	7						
										127	218	308	527	745	...
37	23	60	97	157	217	374	531	905	9	4	9	3	7		
...	...	-14	51											127	218
				37	23	60	97	157	217	374	531	905	9	4	9
...	...	...	...	...	...	-14	51	37	23	60	97	157	217	374	531

Таблица 12.8

Z ₄₉	C ₄₉	P ₄₉	t ₄₉												
1069	1511	2580	3649	6229	8809	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
185	257	442	627	1069	1511	2580	3649	6229	8809	...	...	...	...	...	...
41	31	72	113	185	257	442	627	1069	1511	2580	3649	6229	8809	...	...
...	...	-10	51	41	31	72	113	185	257	442	627	1069	1511	2580	3649
...	...	...	...	...	...	-10	51	41	31	72	113	185	257	442	627

Таблица 13.

h	g	d	h	g	d	h	g	d	h	g	d	h	g	d	h	g	d
1	1	1															
0	1	1															
1	-1	1															
-2	3	1															
2	3	1	4	5	7	6	7	23	8	9	47	10	11	79	12	13	119
1	1	1	1	3	7	1	5	23	1	7	47	1	9	79	1	11	119
0	1	1	2	-1	7	4	-3	23	6	-5	47	8	-7	79	10	-9	119
1	-1	1	-3	5	7	-7	11	23	-11	17	47	-15	23	79	-19	29	119
3	5	7	5	7	1	7	9	17	9	11	41	11	13	73	13	15	113
2	1	7	2	3	1	2	5	17	2	7	41	2	9	73	2	11	113
-1	3	7	1	1	1	3	-1	17	5	-3	41	7	-5	73	9	-7	113
4	-5	7	0	1	1	-4	7	17	-8	13	41	-12	19	73	-16	25	113
4	7	17				8	11	7	10	13	31				14	17	103
3	1	17				3	5	7	3	7	31				3	11	103
-2	5	17				2	1	7	4	-1	31				8	-5	103
7	-9	17				-1	3	7	-5	9	31				-13	21	103
5	9	31	7	11	23	9	13	7	11	15	17	13	17	49	15	19	89
4	1	31	4	3	23	4	5	7	4	7	17	4	9	49	4	11	89
-3	7	31	-1	5	23	1	3	7	3	1	17	5	-1	49	7	-3	89
10	-13	31	6	-7	23	2	-1	7	-2	5	17	-6	11	49	-10	17	89
6	11	49	8	13	41				12	17	1	14	19	31	16	21	71
5	1	49	5	3	41				5	7	1	5	9	31	5	11	71
-4	9	49	-2	7	41				2	3	1	4	1	31	6	-1	71
13	-17	49	9	-11	41				1	1	1	-3	7	31	-7	13	71
7	13	71				11	17	47	13	19	23				17	23	49
6	1	71				6	5	47	6	7	23				6	11	49
-5	11	71				-1	7	47	1	5	23				5	1	49
16	-21	71				8	-9	47	4	-3	23				-4	9	49
8	15	97	10	17	89	12	19	73				16	23	17	18	25	23
7	1	97	7	3	89	7	5	73				7	9	17	7	11	23
-6	13	97	-4	11	89	-2	9	73				2	5	17	4	3	23
19	-25	97	15	-19	89	11	-13	73				3	-1	17	-1	5	23
9	17	127	11	19	119	13	21	103	15	23	79	17	25	47	19	27	7
8	1	127	8	3	119	8	5	103	8	7	79	8	9	47	8	11	7
-7	15	127	-5	13	119	-3	11	103	-1	9	79	1	7	47	3	5	7
22	-29	127	18	-23	119	14	-17	103	10	-11	79	6	-5	47	2	1	7
10	19	161				14	23	137	16	25	113				20	29	41
9	1	161				9	5	137	9	7	113				9	11	41
-8	17	161				-4	13	137	-2	11	113				2	7	41
25	-33	161				17	-21	137	13	-15	113				5	-3	41
11	21	199	13	23	191				17	27	151	19	29	119	21	31	79
10	1	199	10	3	191				10	7	151	10	9	119	10	11	79
-9	19	199	-7	17	191				-3	13	151	-1	11	119	1	9	79
28	-37	199	24	-31	191				16	-19	151	12	-13	119	8	-7	79
12	23	241	14	25	233	16	27	217	18	29	193	20	31	161			
11	1	241	11	3	233	11	5	217	11	7	193	11	9	161			
-10	21	241	-8	19	233	-6	17	217	-4	15	193	-2	13	161			
31	-41	241	27	-35	233	23	-29	217	19	-23	193	15	-17	161			

Таблица 14.

h_1	g_1	h_{17}	g_{17}	h_{41}	g_{41}	h_{49}	g_{49}	h_{73}	g_{73}	h_{89}	g_{89}	h_{97}	g_{97}	h_{113}	g_{113}
70	99	152	215	292	413	234	331	432	611	374	529	316	447	572	809
29	41	63	89	121	171	97	137	179	253	155	219	131	185	237	335
12	17	26	37	50	71	40	57	74	105	64	91	54	77	98	139
5	7	11	15	21	29	17	23	31	43	27	37	23	31	41	57
2	3	4	7	8	13	6	11	12	19	10	17	8	15	16	25
1	1	3	1	5	3	5	1	7	5	7	3	7	1	9	7
0	1	-2	5	-2	7	-4	9	-2	9	-4	11	-6	13	-2	11
1	-1	7	-9	9	-11	13	-17	11	-13	15	-19	19	-25	13	-15
-2	3	-16	23	-20	29	-30	43	-24	35	-34	49	-44	63	-28	41
5	-7	39	-55	49	-69	73	-103	59	-83	83	-117	107	-151	69	-97

Таблица 15.

h_7	g_7	h_{23}	g_{23}	h_{31}	g_{31}	h_{47}	g_{47}	h_{71}	g_{71}	h_{79}	g_{79}	h_{103}	g_{103}	h_{119}	g_{119}
128	181	186	263	326	461	244	345	524	741	302	427	442	625	360	509
53	75	77	109	135	191	101	143	217	307	125	177	183	259	149	211
22	31	32	45	56	79	42	59	90	127	52	73	76	107	62	87
9	13	13	19	23	33	17	25	37	53	21	31	31	45	25	37
4	5	6	7	10	13	8	9	16	21	10	11	14	17	12	13
1	3	1	5	3	7	1	7	5	11	1	9	3	11	1	11
2	-1	4	-3	4	-1	6	-5	6	-1	8	-7	8	-5	10	-9
-3	5	-7	11	-5	9	-11	17	-7	13	-15	23	-13	21	-19	29
8	-11	18	-25	14	-19	28	-39	20	-27	38	-53	34	-47	48	-67
-19	27	-43	61	-33	47	-67	95	-47	67	-91	129	-81	115	-115	163

Литература

1. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра. № 47-48 [619-620]. 20 декабря 2005. – (с.72-74).
2. Коротков А.В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова) (Приложение III). – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194 с.
3. Начала Евклида. Книги I-VI. – М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
4. 4.Сяхович В. И. Пифагоровы точки. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 288 с.

КОРОТКОВ А.В.

К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С БОЛЬШИМ КОЛИЧЕСТВОМ ПЕРЕМЕННЫХ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S_2 = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса [1]

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в *криптологии (криптографии и криптоанализе)*.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [2] известно, что

$$x_2 = m^2 - n^2, y_2 = 2mn, z_2 = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

$$\text{т.е. } x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними

также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности, причем удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников [3].

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1},$$

где z_{2k+1} и z_{2k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_{2k} прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$$(x_2 + y_2)_{k+1} = 6(x_2 + y_2)_k - (x_2 + y_2)_{k-1}.$$

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполнимы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{2k+1} = 5(x_{2k} + x_{2k-1}) - x_{2k-2}$$

$$y_{2k+1} = 5(y_{2k} + y_{2k-1}) - y_{2k-2}.$$

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами катетов, то этому способу классификации соответствует определенный способ классификации значений m и n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенным модулем разности между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2m_{k+1}m_k)^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды являются генераторами взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Площадь прямоугольного треугольника

$$S_2 = x_2 y_2 z_2 / 2 = mn(m^2 - n^2) = nm^3 - n^3 m = m_{k+1} m_k (m_{k+1}^2 - m_k^2),$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов. Расчет площадей прямоугольных треугольников в каждом ряду с соответствующим модулем разности между длинами катетов может осуществляться не только по приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением:

$$S_{2k+1} = 35(S_{2k} - S_{2k-1}) + S_{2k-2},$$

соответствующим каждому из рядов пифагоровых троек.

Вместе с тем, определенный интерес представляет выяснение числа решений полиномиального уравнения с большим числом переменных (большим двух) в целых числах. Такое уравнение в общем случае может быть записано в виде

$$x_2^2 + (y_2^2 + \dots + y_k^2) = z_k^2.$$

Это уравнение отвечает метрике k -мерного собственно-евклидова пространства.

Можно показать, что имеет место соотношение

$$(m^2 + n^2) + (((m^2 + n^2) - 1) / 2)^2 = (((m^2 + n^2) + 1) / 2)^2.$$

Это соответствует теореме Пифагора

$$x_3^2 + y_3^2 = (x_2^2 + y_2^2) + y_3^2 = x_2^2 + (y_2^2 + y_3^2) = z_3^2,$$

$$\text{причем } x_2^2 + ((x_2^2 - 1) / 2)^2 = ((x_2^2 + 1) / 2)^2 = z_3^2$$

$$\text{и } x_2^2 = m^2 + n^2.$$

Это соотношение позволяет найти для целочисленной правой части сумму квадратов трех целочисленных координат, т.е. можно вести разговор о четверках «пифагоровых» чисел. Они определяются двумя переменными m и n , причем для целочисленных значений пифагоровых четверок чисел имеют место целочисленные значения m и n . Приведенное выше соотношение строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_2 , y_2 , y_3 , z_3 . Для примера в таблице 1 приведены по-парные значения m и n , занимающие бесконечный ряд чисел, классифицирующих прямоугольные треугольники по модулю разности между длинами двух катетов

[3],

а

в

таблице 2 – четверки соответствующих этим значениям «пифагоровых» чисел.

Необходимо отметить закономерность построения рядов «пифагоровых» четверок чисел в каждом из классов, а именно:

$$y_{3n+1} = 35(y_{3n} - y_{3n-1}) + y_{3n-2}$$

$$z_{3n+1} = 35(z_{3n} - z_{3n-1}) + z_{3n-2}.$$

Выясним теперь, какие целые числа могут быть объемами прямоугольных, трехгранных призм с целыми длинами ребер

$$S_3 = t^3 = x_2 y_2 z_2 / 2 = (nm^3 - n^3 m) ((m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 - 1) / 2,$$

так что это уравнение относится к классу уравнений восьмой степени. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения объемов прямоугольных трехгранных призм однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных модулем разности между длинами наименьших катетов.

Расчет объемов прямоугольных трехгранных призм в каждом ряду с соответствующим модулем разности между длинами наименьших ребер может осуществляться не только приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением

$$S_{3k+1} = (35(S_{2k} - S_{2k-1}) + S_{2k-2})(35(y_{3k} - y_{3k-1}) + y_{3k-2}).$$

Для примеров в таблице 3 приведены результаты значений объемов прямоугольных трехгранных призм с целыми длинами ребер для верхней части пифагоровых четверок из таблицы 2. Таким образом, получен ответ на поставленный вопрос о решении полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными.

Для решения полиномиальных уравнений второй степени с большим числом переменных $x_2, y_2, z_2, \dots, y_k$ можно воспользоваться тем обстоятельством, что при переходе от трехмерного пространства чисел к многомерному, каждая следующая компонента может быть рассчитана по формуле

$$x_k^2 + ((x_k^2 - 1)/2)^2 = ((x_k^2 + 1)/2)^2,$$

соответствующей формуле

$$(m^2 + n^2) + (((m^2 + n^2) - 1)/2)^2 = (((m^2 + n^2) + 1)/2)^2,$$

в которой положено $x_k^2 = m^2 + n^2$.

В этом случае, очевидно,

$$y_{k+1}^2 = ((y_k^2 - 1)/2)^2,$$

$$z_{k+1}^2 = ((z_k^2 + 1)/2)^2,$$

так что имеют место рекуррентные соотношения

$$y_{k+1} = (y_k^2 - 1)/2,$$

$$z_{k+1} = (z_k^2 + 1)/2.$$

Для примера приведем значения одной из последовательности «пифагоровых» наборов целых чисел. Для $x_2=3$ имеем последовательности

для y_k 4, 12, 84, 3612, ...

и для z_k 5, 13, 85, 3613, ...

Вместе с тем некоторые из значений z_k являются не простыми, а составными из произведений простых чисел. В этих местах имеют место раздвоения указанных последовательностей чисел. Приведем некоторые из них.

Для $x_2=3$ имеем последовательности

для y_k 4, 12, 84, 3612, 6526884, ...
132, 12324, ...

и для z_k 5, 13, 85, 3613, 6526885, ...
157, 12325, ...

Для $x_2=21$ имеем последовательности

для y_k 20, 420, 88620, 3926840820, ...
55980, ...

и для z_k 29, 421, 88621, 3926840821, ...
104821, ...

Такое разветвление последовательностей чисел напоминает цепную реакцию. Очевидно, что числа в последовательностях интенсивно нарастают, а нахождение их разложения на разность и сумму квадратов представляет серьезную трудность. Укажем, в связи с этим, простой способ нахождения разности и суммы квадратов составных чисел из произведений нечетных чисел. Он связан с таблицей умножения нечетных чисел, представленной в таблице 4. В таблице 5 представлено соответствующее разложение произведений нечетных чисел

$$z_k = a_k b_k = a_k^2 - b_k^2 = (a_k + b_k)(a_k - b_k),$$

$$\text{при этом } m_k = (a_k + b_k)/2, \text{ и } n_k = (a_k - b_k)/2$$

В качестве примера $209 = 19 \cdot 11$,

так что $m_k = (19 + 11)/2 = 15$, а $n_k = (19 - 11)/2 = 4$, в результате, $15^2 - 4^2 = 209$.

Таблица 1.

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

Таблица 2.

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
12	144	684	2112	5100
13	145	685	2113	5101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
420	4704	21012	62304	146340
421	4705	21013	62305	146341
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
14280	159612	711624	2107404	4945512
14281	159613	711625	2107405	4945513
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
485112	5421924	24172104	71580612	167976120
485113	5421925	24172105	71580613	167976121
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
16479540	184185624	821137812	2431624584	5706217620
16479541	184185625	821137813	2431624585	5706217621
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
559819260	6256889112	27894511404	82603646424	193843398012
559819261	6256889113	27894511405	82603646425	193843398013
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
19017375312	212550044004	947592247824	2806092345012	6584969289840
19017375313	212550044005	947592247825	2806092345013	6584969289841
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
646030941360	7220444606844	32190241912512	95324536075164	223695112431600
646030941361	7220444606845	32190241912513	95324536075165	223695112431601

Таблица 3.

72	8640	143640	1064448	5049000
88200	11007360	217978488	1906502400	10479407400
101959200	12736079928	253110424320	2219412522600	12221329472352

Таблица 4.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135
7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	189
9	27	45	63	81	99	117	135	153	171	189	207	225	243
11	33	55	77	99	121	143	165	187	209	231	253	275	297
13	39	65	91	117	143	169	195	221	247	273	299	325	351
15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345	375	405
17	51	85	119	153	187	221	255	289	323	357	391	425	459
19	57	95	133	171	209	247	285	323	361	399	437	475	513
21	63	105	147	189	231	273	315	357	399	441	483	525	567
23	69	115	161	207	253	299	345	391	437	483	529	575	621
25	75	125	175	225	275	325	375	425	475	525	575	625	675
27	81	135	189	243	297	351	405	459	513	567	621	675	729

Таблица 5.

1.0	2.1	3.2	4.3	5.4	6.5	7.6	8.7	9.8	10.9	11.10	12.11	13.12	14.13
2.1	3.0	4.1	5.2	6.3	7.4	8.5	9.6	10.7	11.8	12.9	13.10	14.11	15.12
3.2	4.1	5.0	6.1	7.2	8.3	9.4	10.5	11.6	12.7	13.8	14.9	15.10	16.11
4.3	5.2	6.1	7.0	8.1	9.2	10.3	11.4	12.5	13.6	14.7	15.8	16.9	17.10
5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	10.1	11.2	12.3	13.4	14.5	15.6	16.7	17.8	18.9
6.5	7.4	8.3	9.2	10.1	11.0	12.1	13.2	14.3	15.4	16.5	17.6	18.7	19.8
7.6	8.5	9.4	10.3	11.2	12.1	13.0	14.1	15.2	16.3	17.4	18.5	19.6	20.7
8.7	9.6	10.5	11.4	12.3	13.2	14.1	15.0	16.1	17.2	18.3	19.4	20.5	21.6
9.8	10.7	11.6	12.5	13.4	14.3	15.2	16.1	17.0	18.1	19.2	20.3	21.4	22.5
10.9	11.8	12.7	13.6	14.5	15.4	16.3	17.2	18.1	19.0	20.1	21.2	22.3	23.4
11.10	12.9	13.8	14.7	15.6	16.5	17.4	18.3	19.2	20.1	21.0	22.1	23.2	24.3
12.11	13.10	14.9	15.8	16.7	17.6	18.5	19.4	20.3	21.2	22.1	23.0	24.1	25.2
13.12	14.11	15.10	16.9	17.8	18.7	19.6	20.5	21.4	22.3	23.2	24.1	25.0	26.1
14.13	15.12	16.11	17.10	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.0

Литература

- 1.Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра.№ 47-48 [619-620].20 декабря 2005.– (с.72-74).
- 2.Начала Евклида. Книги I-VI.– М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
- 3.Коротков А.В. К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах// см. настоящее издание, с.117-130.

ОСОБЕННОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: m -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S_2 = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в *криптологии* (*криптографии и криптоанализе*).

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [1] известно, что

$$x_2 = m^2 - n^2, y_2 = 2mn, z_2 = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

$$\text{т.е.} \quad x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

где

$$y_2 = 2mn,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними

также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах (таблица 1). Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности, причем удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников [2].

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1},$$

где z_{2k+1} и z_{2k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_{2k} прямоугольных треугольников в столбце пифагоровых троек с одинаковым значением модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами катетов, то этому способу классификации соответствует определенный способ классификации значений m и n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенным модулем разности между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2m_{k+1}m_k)^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды являются генераторами взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Площадь прямоугольного треугольника

$$S_2 = x_2 y_2 / 2 = (m^2 - n^2)(mn) = nm^3 - n^3 m = (m_{k+1}^2 - m_k^2)(m_{k+1} m_k),$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены вели-

чинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов.

Таким образом, получен ответ на поставленный вопрос о решении полиномиальных уравнений второй степени с двумя переменными.

Вместе с тем, определенный интерес представляет выяснение числа решений полиномиального уравнения с большим числом переменных (большим двух) в целых числах, в частности, равное трем. Такое уравнение в общем случае может быть записано в виде $x_2^2 + (y_2^2 + y_3^2) = z_3^2$.

Это уравнение отвечает метрике трехмерного евклидова пространства.

Решение полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными можно получить исходя из совпадающих значений второй и третьей строк таблицы 1. Так, например, число 25 встречается в третьей строке со значением $m=4$ и $n=3$ и во второй строке со значением $k=12$ и $t=13$. Таким образом, выполняется равенство $4^2 + 3^2 = 25 = 13^2 - 12^2$, что равносильно равенству $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, то есть $x_2^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_3^2$. Число решений такого уравнения, очевидно, бесконечно. Их удобно представлять в виде таблицы 2. Фрагмент этой таблицы представлен ниже

m, n, k, t $=3, 4, 12, 13$	$m^2 + n^2 = t^2 - k^2 = 25$
	$k^2 + m^2 = t^2 - n^2 = 153$
$t^2 = 169$	$n^2 + k^2 = t^2 - m^2 = 160$

Очевидно, что сумма строк правого столбца равняется $2t^2$. Отметим, что среди чисел третьих строк таблицы 1 встречаются квадраты чисел в соответствии с теоремой Ферма.

Укажем на некоторые особенности решений уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах. Во-первых, из таблицы 1 следует, что все нечетные числа представимы в виде разности квадратов двух целых чисел

$$c = a \cdot b = ((b+a)/2)^2 - ((b-a)/2)^2.$$

Числа класса 1 сравнений по mod4 представимы также в виде суммы квадратов двух целых чисел. Числа класса 1 сравнений по mod4 представимы кроме того в виде произведения двух целых чи-

сел класса 1 сравнений по mod4. В случае равенства одного из них единице, второе является простым числом.

Из таблицы 2 следует, что решения уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах вида

$$m^2+n^2+k^2=t^2$$

образуют для t класс нечетных чисел, включающий все нечетные числа кроме 1 и 5 (вырожденный случай). Из этой же таблицы следует, что каждое решение содержит два четных и два нечетных числа причем четные числа являются числами одного и того же класса вычетов по mod4. Это показано вплоть до $t=59$, что позволяет выдвинуть гипотезу аналогичную гипотезе Гольдбаха для четных чисел, то есть предположить, что квадрат каждого нечетного невырожденного числа t представим в виде суммы квадратов трех взаимно простых чисел с t . Более того, каждое нечетное число представимо в виде разности двух квадратов и, следовательно, квадрат нечетного числа представим в виде суммы четырех квадратов чисел. Из таблицы 2 следует также, что каждое решение содержит два четных и два нечетных числа причем четные числа являются числами одного и того же класса вычетов по mod4.

Из сказанного следуют соотношения (таблица 5)

$$m^2+n^2+k^2=t^2=s^2-r^2$$

и, следовательно, $s^2=m^2+n^2+k^2+r^2$.

Числа m , n , k , t , r , s образуют последовательности бесконечной протяженности в обе стороны. Кроме того, последовательным значениям чисел m соответствует одно и то же решение уравнения Диофанта, равное -1, а между рядами чисел nk , tk , tn имеют место одни и те же значения определителей.

Более того удастся связать числа m , n , k и t друг с другом с помощью формул

$$4(m^2+n^2)(t-k)^2+((m^2+n^2)-(t-k)^2)^2=((m^2+n^2)+(t-k)^2)^2,$$

$$4(k^2+m^2)(t-n)^2+((k^2+m^2)-(t-n)^2)^2=((k^2+m^2)+(t-n)^2)^2,$$

$$4(n^2+k^2)(t-m)^2+((n^2+k^2)-(t-m)^2)^2=((n^2+k^2)+(t-m)^2)^2.$$

Эти формулы для распространенного частного случая $t-k=1$ дают соотношение:

$$(m^2+n^2)+(((m^2+n^2)-1)/2)^2=(((m^2+n^2)+1)/2)^2.$$

Отметим также уникальную особенность решений полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что как и в случае двух переменных, четверки чисел

решений уравнения образуют периодическую зависимость, определяемую рекуррентным соотношением

$$z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1},$$

где в качестве z_{2k+1} , z_{2k} , z_{2k-1} выступают три последовательных значения величин n , k и t при одном и том же значении величины m . Некоторые из последовательностей решений представлены в таблице 3.

Таким образом, решения полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными образуют бесконечные последовательности четверок целых чисел, так что число решений оказывается бесконечным.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых четверок. Во-первых, пифагоровы четверки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях. Во-вторых, каждой диагонали параллелепипеда соответствует два ряда пифагоровых четверок. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки чисел, а плоскости числовых последовательностей классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в таблице 6. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскости, которая может быть продлена до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1}$$

(при постоянном значении первой координаты), а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа, указанного в верхней строчке над данным рядом чисел.

Отметим возможность формирования некоторых последовательностей чисел бесконечной длины. Так

$$t_i^2 - 2p_i^2 = d_i^2 \text{ и } c_i^2 - 2z_i^2 = -d_i^2,$$

$$\text{т. е. } d_i^2 + p_i^2 + p_i^2 = t_i^2 \text{ и } -d_i^2 + z_i^2 + z_i^2 = c_i^2,$$

$$\text{а, также. } (2c_i)^2 - 8z_i^2 = -(2d_i)^2 \text{ и } (2t_i)^2 - 8p_i^2 = (2d_i)^2,$$

$$\text{т. е. } (2d_i)^2 + (2c_i)^2 + z_i^2 = (3z_i)^2 \text{ и } -(2d_i)^2 + (2t_i)^2 + p_i^2 = (3p_i)^2.$$

Эти два способа формирования последовательностей чисел определяют для разных d_i бесконечное число последовательностей чисел бесконечной длины собственноевклидового и псевдоевклидового характеров, как показано в таблицах 7 и 8. Кроме того, как видно из таблиц 4 и 6 ими не завершается определение последовательностей чисел, например, отсутствует последовательность $\dots, 22, 4, 2, 8, 46, \dots$. В таблицах 9 приведены иные способы формирования последовательностей бесконечной длины для чисел d_i соответствующих значениям $8k+1$ и $8k-1$, а также регулярным значениям определителей и уравнения Диофанта.

Таблица 1.

m\п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	4 3 5	8 0 8														
3	6 8 10	12 5 13	18 0 18													
4	8 15 17	16 12 20	24 7 25	32 0 32												
5	10 24 26	20 21 29	30 16 34	40 9 41	50 0 50											
6	12 35 37	24 32 40	36 27 45	48 20 52	60 11 61	72 0 72										
7	14 48 50	28 45 53	42 40 58	56 33 65	70 24 74	84 13 85	98 0 98									
8	16 63 65	32 60 68	48 55 73	64 48 80	80 39 89	96 28 100	112 15 113	128 0 128								
9	18 80 82	36 77 85	54 72 90	72 65 97	90 56 106	108 45 117	126 32 130	144 17 145	162 0 162							
10	20 99 101	40 96 104	60 91 109	80 84 116	100 75 125	120 64 136	140 51 149	160 36 164	180 19 181	200 0 200						
11	22 120 122	44 117 125	66 112 130	88 105 137	110 96 146	132 85 157	154 72 170	176 57 185	198 40 202	220 21 221	242 0 242					
12	24 143 145	48 140 148	72 135 153	96 128 160	120 119 169	144 108 180	168 95 193	192 80 208	216 63 225	240 44 244	264 23 265	288 0 288				
13	26 168 170	52 165 173	78 160 178	104 153 185	130 144 194	156 133 205	182 120 218	208 105 233	234 88 250	260 69 269	286 48 290	312 25 313	338 0 338			
14	28 195 197	56 192 200	84 187 205	112 180 212	140 171 221	168 160 232	196 147 245	224 132 260	252 115 277	280 96 296	308 75 317	336 52 340	364 27 365	392 0 392		
15	30 224 226	60 221 229	90 216 234	120 209 241	150 200 250	180 189 261	210 176 274	240 161 289	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	420 29 421	450 0 450	
16	32 255 257	64 252 260	96 247 265	128 240 272	160 231 281	192 220 292	224 207 305	256 192 320	288 175 337	320 156 356	352 135 377	384 112 400	416 87 425	448 60 452	480 31 481	512 0 512

Таблица 2.

1,2,2,3	5	4,5,20,21	41	6,14,27,31	232	5,8,44,45	89
	5		416		765		1961
9	8	441	425	961	925	2025	2000
2,3,6,7	13	4,13,16,21	185	6,21,22,31	477	16,20,37,45	656
	40		272		520		1625
49	45	441	425	961	925	2025	1769
1,4,8,9	17	8,11,16,21	185	14,18,21,31	520	11,18,42,47	445
	65		320		637		1885
81	80	441	377	961	765	2209	2088
2,6,9,11	40	3,14,18,23	205	7,16,28,33	305	4,9,48,49	97
	85		333		833		2320
121	117	529	520	1089	1040	2401	2385
6,6,7,11	72	6,13,18,23	205	8,20,25,33	464	1,10,50,51	101
	85		360		689		2501
121	85	529	493	1089	1025	2601	2600
3,4,12,13	25	9,12,20,25	225	15,18,26,35	549	14,17,46,51	485
	153		481		901		2312
169	160	625	544	1225	1000	2601	2405
2,5,14,15	29	12,15,16,25	369	3,8,36,37	73	12,19,48,53	505
	200		400		1305		2448
225	221	625	481	1369	1360	2809	2665
2,10,11,15	104	2,7,26,27	53	10,14,35,39	296	3,10,54,55	109
	125		680		1325		2925
225	221	729	725	1521	1421	2916	3016
1,12,12,17	145	7,14,22,27	245	13,14,34,39	365	10,18,51,55	424
	145		533		1325		2701
289	288	729	680	1521	1352	3025	2925
8,9,12,17	145	10,10,23,27	200	4,24,33,41	592	7,8,56,57	113
	208		629		1105		3185
289	225	729	629	1681	1665	3249	3200
1,6,18,19	37	11,12,24,29	265	9,24,32,41	657	16,17,52,57	545
	325		697		1105		2929
361	360	841	720	1681	1600	3249	2993
6,10,15,19	136	5,6,30,31	61	2,18,39,43	328	9,22,54,59	565
	261		925		1525		2997
361	325	961	936	1849	1845	3481	3400

Таблица 3.

...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
1,2,2,3	5	2,3,6,7	13	1,4,8,9	17
	5		40		65
9	8	49	45	81	80
1,12,12,17	145	2,7,26,27	53	1,6,18,19	37
	145		680		325
289	388	729	725	361	360
1,70,70,99	4901	2,39,150,155	1525	1,32,100,105	1025
	4901		22504		10001
9801	9800	24025	24021	11025	11024
1,408,408,577	166465	2,227,874,903	51533	1,186,582,611	34597
	166465		763880		338725
322929	322928	815409	815405	373321	373320
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
2,6,9,11	40	3,4,12,13	25	2,5,14,15	29
	85		153		200
121	117	169	160	225	221
2,26,29,39	680	3,14,18,23	205	2,21,42,47	445
	845		333		1768
1521	1517	529	520	2209	2205
2,150,165,223	22504	3,80,96,125	6409	2,121,238,267	14645
	27229		9225		56648
49729	49725	15625	15616	71289	71285
2,874,961,1299	763880	3,466.558,727	217165	2,705,1386,1555	497029
	923525		311373		1921000
1687401	1687397	528529	528520	2418025	2418021
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Таблица 4.

2,1830,4785,5123	3348904	3,1900,10596,10765	3610009	2,1661,8078,8247	2758925
	22896229		112275225		65254088
26245129	26245125	115885225	115885216	68013009	68013005
2,314,821,879	98600	3,326,1818,1847	106285	2,285,1386,1415	81229
	674045		3305133		1921000
772641	772637	3411409	3411400	2002225	2002221
2,54,141,151	2920	3,56,312,317	3145	2,49,238,243	2405
	19885		97353		56648
22801	22797	100489	100480	59049	59045
2,10,25,27	104	3,10,54,55	109	2,9,42,43	1768
	629		2925		1773
729	725	3025	3016	1849	1845
2,6,9,11	40	3,4,12,13	25	2,5,14,15	29
	85		153		200
121	117	169	160	225	221
2,26,29,39	680	3,14,18,23	205	2,21,42,47	445
	845		333		1768
1521	1517	529	520	2209	2205
2,150,165,223	22504	3,80,96,125	6409	2,121,238,267	14645
	27229		9225		56648
49729	49725	15625	15616	71289	71285
2,874,961,1299	763880	3,466.558,727	217165	2,705,1386,1555	497029
	923525		311373		1921000
1687401	1687397	528529	528520	2418025	2418021
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Таблица 5.

m	n	k	t	Δ_{nk}	Δ_{tk}	Δ_{tn}	$m_k^2 - 2m_{k-1}^2$
1	606	1002	1171	24	10	22	-1
1	104	172	201	24	10	22	-1
1	18	30	35	24	10	22	-1
1	4	8	9	24	10	22	-1
1	6	18	19	24	10	22	-1
1	32	100	105	24	10	22	-1
1	186	582	611	24	10	22	-1

Таблица 6.

-12	-2	0	2	12
...	...	...	...	...
2,-238,49,243	2,-42,9,43	2,-14,5,15	2,-42,21,47	2,-238,121,267
2,-34,-19,39	2,-6,-3,7	2,-2,1,3	2,-6,9,11	2,-34,53,63
2,34,-19,39	2,6,-3,7	2,2,1,3	2,6,9,11	2,34,53,63
2,238,49,243	2,42,9,43	2,14,5,15	2,42,21,47	2,238,121,267
2,1394,457,1467	2,246,81,259	2,82,29,87	2,246,93,263	2,1394,529,1491
...	...	...	...	...
-48	-8	0	8	48
...	...	...	...	...
1,338,746,819	1,60,132,145	1,22,46,51	1,72,144,161	1,410,818,915
1,32,100,105	1,6,18,19	1,4,8,9	1,18,30,35	1,104,172,201
1,-2,-2,3	1,0,0,1	1,2,2,3	1,12,12,17	1,70,70,99
1,100,32,105	1,18,6,19	1,8,4,9	1,30,18,35	1,172,104,201
1,746,338,819	1,132,60,145	1,46,22,51	1,144,72,161	1,818,410,915
...	...	...	...	...
-228	-38	0	38	228
...	...	...	...	...
2,4378,4019,5943	2,774,711,1051	2,266,247,363	2,822,771,1127	2,4666,4379,6399
2,638,551,843	2,114,99,151	2,46,43,63	2,162,159,227	2,926,911,1299
2,26,7,27	2,6,3,7	2,10,11,15	2,54,63,83	2,314,367,483
2,94,211,231	2,18,39,43	2,14,23,27	2,66,99,119	2,382,571,687
2,1114,1979,2271	2,198,351,403	2,74,127,147	2,246,411,479	2,1402,2339,2727
...	...	...	...	...
-336	-56	0	56	336
...	...	...	...	...
3,8010,5246,9575	3,1416,928,1693	3, 486,322,583	3,1500,1004,1805	3,8514,5702,10247
3,1176,724,1381	3,210,130,247	3,84,56,101	3,294,206,359	3,1680,1180,2053
3,54,10,55	3,12,4,13	3,18,14,23	3,96,80,125	3,558,466,727
3,156,248,293	3,30,46,55	3,24,28,37	3,114,122,167	3,660,704,965
3,1890,2390,3047	3,336,424,541	3,126,154,199	3,420,500,653	3,2394,2846,3719
...	...	...	...	...
-636	-106	0	106	636
...	...	...	...	...
2,8714,10565,13695	2,1542,1869,2423	2,538,649,843	2,1686,2025,2635	2,9578,11501,14967
2,1166,1453,1863	2,210,261,335	2,94,113,147	2,354,417,547	2,2030,2389,3135
2,10,25,27	2,6,9,11	2,26,29,39	2,150,165,223	2,874,961,1299
2,622,569,843	2,114,105,155	2,62,61,87	2,258,261,367	2,1486,1505,2115
2,5450,5261,7575	2,966,933,1343	2,346,337,483	2,1110,1089,1555	2,6314,6197,8847
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Таблица 7.1

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_1	p_1	p_1	t_1	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_1	z_1	z_1	c_1
1,70,70,99	1	70	70	99	1,29,29,41	1	29	29	41
1,12,12,17	1	12	12	17	1,5,5,7	1	5	5	7
1,2,2,3	1	2	2	3	1,1,1,1	1	1	1	1
1,0,0,1	1	0	0	1	1,1,1,-1	1	1	1	-1
1,-2,-2,3	1	-2	-2	3	1,5,5,-7	1	5	5	-7

Таблица 7.2

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_7	p_7	p_7	t_7	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_7	z_7	z_7	c_7
7,234,234,331	7	234	234	331	7,97,97,137	7	97	97	137
7,40,40,57	7	40	40	57	7,17,17,23	7	17	17	23
7,6,6,11	7	6	6	11	7,5,5,1	7	5	5	1
7,-4,-4,9	7	-4	-4	9	7,13,13,-17	7	13	13	-17
7,-30,-30,43	7	-30	-30	43	7,73,73,-103	7	73	73	-103

Таблица 7.3

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{17}	p_{17}	p_{17}	t_{17}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{17}	z_{17}	z_{17}	c_{17}
17,736,736,1041	17	736	736	1041	17,305,305,431	17	305	305	431
17,126,126,179	17	126	126	179	17,53,53,73	17	53	53	73
17,20,20,33	17	20	20	33	17,13,13,7	17	13	13	7
17,-6,-6,19	17	-6	-6	19	17,25,25,-31	17	25	25	-31
17,-56,-56,81	17	-56	-56	81	17,137,137,-193	17	137	137	-193

Таблица 7.4

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{23}	p_{23}	p_{23}	t_{23}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{23}	z_{23}	z_{23}	c_{23}
23,900,900,1273	23	900	900	1273	23,373,373,527	23	373	373	527
23,154,154,219	23	154	154	219	23,65,65,89	23	65	65	89
23,24,24,41	23	24	24	41	23,17,17,7	23	17	17	7
23,-10,-10,27	23	-10	-10	27	23,37,37,-47	23	37	37	-47
23,-84,-84,121	23	-84	-84	121	23,205,205,-289	23	205	205	-289

Таблица 7.5

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{31}	p_{31}	p_{31}	t_{31}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{31}	z_{31}	z_{31}	c_{31}
31,1518,1518,2147	31	1518	1518	2147	31,629,629,889	31	629	629	889
31,260,260,369	31	260	260	369	31,109,109,151	31	109	109	151
31,42,42,67	31	42	42	67	31,25,25,17	31	25	25	17
31,-8,-8,33	31	-8	-8	33	31,41,41,-49	31	41	41	-49
31,-90,-90,131	31	-90	-90	131	31,221,221,-311	31	221	221	-311

Таблица 7.6

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{41}	p_{41}	p_{41}	t_{41}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{41}	z_{41}	z_{41}	c_{41}
41,1218,1218,1723	41	1218	1218	1723	41,505,505,713	41	505	505	713
41,208,208,297	41	208	208	297	41,89,89,119	41	89	89	119
41,30,30,59	41	30	30	59	41,29,29,1	41	29	29	1
41,-28,-28,57	41	-28	-28	57	41,85,85,-113	41	85	85	-113
41,-198,-198,283	41	-198	-198	283	41,481,481,-679	41	481	481	-679

Таблица 7.7

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{47}	p_{47}	p_{47}	t_{47}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{47}	z_{47}	z_{47}	c_{47}
47,2184,2184,3089	47	2184	2184	3089	47,905,905,1279	47	905	905	1279
47,374,374,531	47	374	374	531	47,157,157,217	47	157	157	217
47,60,60,97	47	60	60	97	47,37,37,23	47	37	37	23
47,-14,-14,51	47	-14	-14	51	47,65,65,-79	47	65	65	-79
47,-144,-144,209	47	-144	-144	209	47,353,353,-497	47	353	353	-497

Таблица 7.8

$d_i^2+p_i^2+p_i^2=t_i^2$	d_{49}	p_{49}	p_{49}	t_{49}	$-d_i^2+z_i^2+z_i^2=c_i^2$	d_{49}	z_{49}	z_{49}	c_{49}
49,2580,2580,3649	49	2580	2580	3649	49,1069,1069,1511	49	1069	1069	1511
49,442,442,627	49	442	442	627	49,185,185,257	49	185	185	257
49,72,72,113	49	72	72	113	49,41,41,31	49	41	41	31
49,-10,-10,51	49	-10	-10	51	49,61,61,-71	49	61	61	-71
49,-132,-132,193	49	-132	-132	193	49,325,325,-457	49	325	325	-457

Таблица 8.1

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_1$	z_1	$2c_1$	$3z_1$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_1$	p_1	$2t_1$	$3p_1$
2,29,82,87	2	29	82	87	2,70,198,210	2	70	198	210
2,5,14,15	2	5	14	15	2,12,34,36	2	12	34	36
2,1,2,3	2	1	2	3	2,2,6,6	2	2	6	6
2,1,-2,3	2	1	-2	3	2,0,2,0	2	0	2	0
2,5,-7,15	2	5	-7	15	2,-2,6,-6	2	-2	6	-6

Таблица 8.2

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_7$	z_7	$2c_7$	$3z_7$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_7$	p_7	$2t_7$	$3p_7$
14,97,274,291	14	97	274	291	14,234,662,702	14	234	662	702
14,17,46,51	14	17	46	51	14,40,114,120	14	40	114	120
14,5,2,15	14	5	2	15	14,6,22,18	14	6	22	18
14,13,-34,39	14	13	-34	39	14,-4,18,12	14	-4	18	12
14,73,-206,219	14	73	-206	219	14,-30,86,90	14	-30	86	90

Таблица 8.3

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{17}$	z_{17}	$2c_{17}$	$3z_{17}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{17}$	p_{17}	$2t_{17}$	$3p_{17}$
34,305,862,915	34	305	862	915	34,736,2082,2208	34	736	2082	2208
34,53,146,159	34	53	146	159	34,126,358,378	34	126	358	378
34,13,14,39	34	13	14	39	34,20,66,60	34	20	66	60
34,25,-62,75	34	25	-62	75	34,-6,38,18	34	-6	38	18
34,137,-386,411	34	137	-386	411	34,-56,162,168	34	-56	162	168

Таблица 8.4

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{23}$	z_{23}	$2c_{23}$	$3z_{23}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{23}$	p_{23}	$2t_{23}$	$3p_{23}$
46,373,1054,1119	46	373	1054	1119	46,900,2546,2700	46	900	2546	2700
46,65,178,195	46	65	178	195	46,154,438,462	46	154	438	462
46,17,14,51	46	17	14	51	46,24,82,72	46	24	82	72
46,37,-94,111	46	37	-94	111	46,-10,54,30	46	-10	54	30
46,205,-578,615	46	205	-578	615	46,-84,242,252	46	-84	242	252

Таблица 8.5

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{31}$	z_{31}	$2c_{31}$	$3z_{31}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{31}$	p_{31}	$2t_{31}$	$3p_{31}$
62,629,1778,1887	62	629	1778	1887	62,1518,4294,4554	62	1518	4294	4554
62,109,302,327	62	109	302	327	62,260,738,780	62	260	738	780
62,25,34,75	62	25	34	75	62,42,134,126	62	42	134	126
62,41,-98,123	62	41	-98	123	62,-8,66,24	62	-8	66	24
62,221,-622,663	62	221	-622	663	62,-90,262,270	62	-90	262	270

Таблица 8.6

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{41}$	z_{41}	$2c_{41}$	$3z_{41}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{41}$	p_{41}	$2t_{41}$	$3p_{41}$
82,505,1426,1515	82	505	1426	1515	82,1218,3446,3654	82	1218	3446	3654
82,89,238,267	82	89	238	267	82,208,594,624	82	208	594	624
82,29,2,87	82	29	2	87	82,30,118,90	82	30	118	90
82,85,-226,255	82	85	-226	255	82,-28,114,84	82	-28	114	84
82,481,-1358,1443	82	481	-1358	1443	82,-198,566,594	82	-198	566	594

Таблица 8.7

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{47}$	z_{47}	$2c_{47}$	$3z_{47}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{47}$	p_{47}	$2t_{47}$	$3p_{47}$
94,905,2558,2715	94	905	2558	2715	94,2184,6178,6552	94	2184	6178	6552
94,157,434,471	94	157	434	471	94,374,1062,1122	94	374	1062	1122
94,37,46,111	94	37	46	111	94,60,194,180	94	60	194	180
94,65,-158,195	94	65	-158	195	94,-14,102,42	94	-14	102	42
94,353,-994,1059	94	353	-994	1059	94,-144,418,432	94	-144	418	432

Таблица 8.8

$4d_i^2+z_i^2+4c_i^2=9z_i^2$	$2d_{49}$	z_{49}	$2c_{49}$	$3z_{49}$	$-4d_i^2+p_i^2+4t_i^2=9p_i^2$	$2d_{49}$	p_{49}	$2t_{49}$	$3p_{49}$
98,1069,3022,3207	98	1069	3022	3207	98,2580,7298,7740	98	2580	7298	7740
98,185,514,555	98	185	514	555	98,442,1254,1326	98	442	1254	1326
98,41,62,123	98	41	62	123	98,72,226,216	98	72	226	216
98,61,-142,183	98	61	-142	183	98,-10,102,30	98	-10	102	30
98,325,-914,975	98	325	-914	975	98,-132,386,396	98	-132	386	396

Таблица 9.1

-68	-12	$c_1(-4)$	-12	-68	$d_1(0)$	48	8	$z_1(0)$	-8	-48
-679	-113	1	119	713	41	481	85	29	89	505
-103	-17	1	23	137	7	73	13	5	17	97
-7	-1	1	7	41	1	5	1	1	5	29
-7	-1	1	7	41	-1	5	1	1	5	29
-103	-17	1	23	137	-7	73	13	5	17	97
28	4	$t_1(-4)$	-28	-164		-20	-4	$p_1(-4)$	-20	-116
283	57	59	297	1723		-198	-28	30	208	1218
43	9	11	57	331		-30	-4	6	40	234
3	1	3	17	99		-2	0	2	12	70
3	1	3	17	99		-2	0	2	12	70
43	9	11	57	331		-30	-4	6	40	234
Δ_1	Δ_1	Δ_1	Δ_1			Δ_1	Δ_1	Δ_1	Δ_1	
-96	-96	-96	-96	-6		48	48	48	48	-6
-16	-16	-16	-16	-1		8	8	8	8	-1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
16	16	16	16	1		-8	-8	-8	-8	1
				1*16						-1*8
Δ_1	Δ_1	Δ_1	Δ_1			Δ_1	Δ_1	Δ_1	Δ_1	
96	96	96	96	6		-48	-48	-48	-48	6
16	16	16	16	1		-8	-8	-8	-8	1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
-16	-16	-16	-16	-1		8	8	8	8	-1
				1*16						-1*8
$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$						
41^2	41^2	41^2	41^2	41^2						
7^2	7^2	7^2	7^2	7^2						
1^2	1^2	1^2	1^2	1^2						
-1^2	-1^2	-1^2	-1^2	-1^2						
-7^2	-7^2	-7^2	-7^2	-7^2						
$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$	$\pm d_1^2$						
41^2	41^2	41^2	41^2	41^2						
7^2	7^2	7^2	7^2	7^2						
1^2	1^2	1^2	1^2	1^2						
-1^2	-1^2	-1^2	-1^2	-1^2						
-7^2	-7^2	-7^2	-7^2	-7^2						

Таблица 9.1.1.

				m_1	n_1							Δ_1		$\pm d_1^2$
...	-345	152	-41	70	99	268	635	1538	3711	8960	...	1^2	...	1^2
...	-143	63	-17	29	41	111	263	637	1537	3711	...	-1^2	...	-1^2
...	-59	26	-7	12	17	46	109	264	637	1538	...	1^2	...	1^2
...	-25	11	-3	5	7	19	45	109	263	635	...	-1^2	...	-1^2
...	-9	4	-1	2	3	8	19	46	111	268	...	1^2	...	1^2
...	-7	3	-1	1	1	3	7	17	41	99	...	-1^2	...	-1^2
...	5	-2	1	0	1	2	5	12	29	70	...	1^2	...	1^2
...	-17	7	-3	1	-1	-1	-3	-7	-17	-41	...	-1^2	...	-1^2
...	39	-16	7	-2	3	4	11	26	63	152	...	1^2	...	1^2
...	-95	39	-17	5	-7	-9	-25	-59	-143	-345	...		...	-1^2
				z_1	c_1							Δ_1		$\pm d_1^2$
...	-143	63	-17	29	41	111	263	637	1537	3711	...	$2*1^2$	...	1^2
...	-25	11	-3	5	7	19	45	109	263	635	...	$2*1^2$	...	-1^2
...	-7	3	-1	1	1	3	7	17	41	99	...	$2*1^2$	...	1^2
...	-17	7	-3	1	-1	-1	-3	-7	-17	-41	...	$2*1^2$	...	-1^2
...	-95	39	-17	5	-7	-9	-25	-59	-143	-345	...		...	1^2
				p_1	t_1							Δ_1		$\pm d_1^2$
...	-345	152	-41	70	99	268	635	1538	3711	8960	...	$-2*1^2$	...	1^2
...	-59	26	-7	12	17	46	109	264	637	1538	...	$-2*1^2$	...	-1^2
...	-9	4	-1	2	3	8	19	46	111	268	...	$-2*1^2$	...	1^2
...	5	-2	1	0	1	2	5	12	29	70	...	$-2*1^2$	...	-1^2
...	39	-16	7	-2	3	4	11	26	63	152	...		...	1^2

Таблица 9.2

-476	-84	$c_7(-28)$	-84	-476	$d_7(0)$	336	56	$z_7(0)$	-56	-336
-2209	-367	7	409	2447	137	1565	277	97	305	1733
-289	-47	7	89	527	23	205	37	17	65	373
-1	1	7	41	239	1	1	1	5	29	169
-193	-31	7	73	431	-17	137	25	13	53	305
-1633	-271	7	313	1871	-103	1157	205	73	233	1325
196	28	$t_7(-28)$	-196	-1148		-140	-28	$p_7(-28)$	-140	-812
921	187	201	1019	5913		-644	-90	104	714	4180
121	27	41	219	1273		-84	-10	24	154	900
1	3	17	99	577		0	2	12	70	408
81	19	33	179	1041		-56	-6	20	126	736
681	139	153	779	4521		-476	-66	80	546	3196
Δ_7	Δ_7	Δ_7	Δ_7			Δ_7	Δ_7	Δ_7	Δ_7	
-2240	-2240	-2240	-2240	-20		1120	1120	1120	1120	-20
-336	-336	-336	-336	-3		168	168	168	168	-3
224	224	224	224	2		-112	-112	-112	-112	2
1680	1680	1680	1680	15		-840	-840	-840	-840	15
				7*16						-7*8
Δ_7	Δ_7	Δ_7	Δ_7			Δ_7	Δ_7	Δ_7	Δ_7	
2240	2240	2240	2240	-20		-1120	-1120	-1120	-1120	-20
336	336	336	336	-3		-168	-168	-168	-168	-3
-224	-224	-224	-224	2		112	112	112	112	2
-1680	-1680	-1680	-1680	15		840	840	840	840	15
				-7*16						7*8
$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$						
137^2	137^2	137^2	137^2	137^2						
23^2	23^2	23^2	23^2	23^2						
1^2	1^2	1^2	1^2	1^2						
-17^2	-17^2	-17^2	-17^2	-17^2						
-103^2	-103^2	-103^2	-103^2	-103^2						
$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$	$\pm d_7^2$						
137^2	137^2	137^2	137^2	137^2						
23^2	23^2	23^2	23^2	23^2						
1^2	1^2	1^2	1^2	1^2						
-17^2	-17^2	-17^2	-17^2	-17^2						
-103^2	-103^2	-103^2	-103^2	-103^2						

Таблица 9.2.1.

				m_7	n_7							Δ_7		$\pm d_7^2$
...	-1153	508	-137	234	331	896	2123	5142	12407	29956	...	7^2	...	7^2
...	-479	211	-57	97	137	371	879	2129	5137	12403	...	-7^2	...	-7^2
...	-195	86	-23	40	57	154	365	884	2133	5150	...	7^2	...	7^2
...	-89	39	-11	17	23	63	149	361	871	2103	...	-7^2	...	-7^2
...	-17	8	-1	6	11	28	67	162	391	944	...	7^2	...	7^2
...	-55	23	-9	5	1	7	15	37	89	215	...	-7^2	...	-7^2
...	93	-38	17	-4	9	14	37	88	213	514	...	7^2	...	7^2
...	-241	99	-43	13	-17	-21	-59	-139	-337	-813	...	-7^2	...	-7^2
...	575	-236	103	-30	43	56	155	366	887	2140	...	7^2	...	7^2
...	-1391	571	-249	73	-103	-133	-369	-871	-2111	-5093	...	-7^2	...	-7^2
				z_7	c_7							Δ_7		$\pm d_7^2$
...	-479	211	-57	97	137	371	879	2129	5137	12403	...	$2*7^2$	...	7^2
...	-89	39	-11	17	23	63	149	361	871	2103	...	$2*7^2$	...	-7^2
...	-55	23	-9	5	1	7	15	37	89	215	...	$2*7^2$	...	7^2
...	-241	99	-43	13	-17	-21	-59	-139	-337	-813	...	$2*7^2$	...	-7^2
...	-1391	571	-249	73	-103	-133	-369	-871	-2111	-5093	...	-7^2	...	7^2
				p_7	t_7							Δ_7		$\pm d_7^2$
...	-1153	508	-137	234	331	896	2123	5142	12407	29956	...	$-2*7^2$	...	7^2
...	-195	86	-23	40	57	154	365	884	2133	5150	...	$-2*7^2$	...	-7^2
...	-17	8	-1	6	11	28	67	162	391	944	...	$-2*7^2$	...	7^2
...	93	-38	17	-4	9	14	37	88	213	514	...	$-2*7^2$	...	-7^2
...	575	-236	103	-30	43	56	155	366	887	2140	...	7^2	...	7^2

Таблица 9.3

-1156	-204	c ₁₇ (-68)	-204	-1156	d ₁₇ (0)	816	136	z ₁₇ (0)	-136	-816
-7031	-1169	17	1271	7609	431	4981	881	305	949	5389
-983	-161	17	263	1561	73	697	125	53	193	1105
-23	-1	17	103	601	7	17	5	13	73	425
-311	-49	17	151	889	-31	221	41	25	109	629
-2999	-497	17	599	3577	-193	2125	377	137	445	2533
476	68	t ₁₇ (-68)	-476	-2788		-340	-68	p ₁₇ (-68)	-340	-1972
2931	593	627	3169	18387		-2050	-288	322	2220	12998
411	89	123	649	3771		-286	-36	70	456	2666
11	9	43	249	1451		-6	4	30	176	1026
131	33	67	369	2147		-90	-8	42	260	1518
1251	257	291	1489	8643		-874	-120	154	1044	6110
Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇			Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	
-17136	-17136	-17136	-17136	-63		8568	8568	8568	8568	-63
-2720	-2720	-2720	-2720	-10		1360	1360	1360	1360	-10
816	816	816	816	3		-408	-408	-408	-408	3
7616	7616	7616	7616	28		-3808	-3808	-3808	-3808	28
				17*16						-17*8
Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇			Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	Δ ₁₇	
17136	17136	17136	17136	-63		-8568	-8568	-8568	-8568	-63
2720	2720	2720	2720	-10		-1360	-1360	-1360	-1360	-10
-816	-816	-816	-816	3		408	408	408	408	3
-7616	-7616	-7616	-7616	28		3808	3808	3808	3808	28
				-17*16						17*8
±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²						
431 ²	431 ²	431 ²	431 ²	431 ²						
73 ²	73 ²	73 ²	73 ²	73 ²						
7 ²	7 ²	7 ²	7 ²	7 ²						
-31 ²	-31 ²	-31 ²	-31 ²	-31 ²						
-193 ²	-193 ²	-193 ²	-193 ²	-193 ²						
±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²	±d ₁₇ ²						
431 ²	431 ²	431 ²	431 ²	431 ²						
73 ²	73 ²	73 ²	73 ²	73 ²						
7 ²	7 ²	7 ²	7 ²	7 ²						
-31 ²	-31 ²	-31 ²	-31 ²	-31 ²						
-193 ²	-193 ²	-193 ²	-193 ²	-193 ²						

Таблица 9.3.1.

				m ₁₇	n ₁₇							Δ ₁₇		±d ₁₇ ²
...	-3627	1598	-431	736	1041	2818	6677	16172	39021	94214	...	17 ²	...	17 ²
...	-1505	663	-179	305	431	1167	2765	6697	16159	39015	...	-17 ²	...	-17 ²
...	-617	272	-73	126	179	484	1147	2778	6703	16184	...	17 ²	...	17 ²
...	-271	119	-33	53	73	199	471	1141	2753	6647	...	-17 ²	...	-17 ²
...	-75	34	-7	20	33	86	205	496	1197	2890	...	17 ²	...	17 ²
...	-121	51	-19	13	7	27	61	149	359	867	...	-17 ²	...	-17 ²
...	167	-68	31	-6	19	32	83	198	479	1156	...	17 ²	...	17 ²
...	-455	187	-81	25	-31	-37	-105	-247	-599	-1445	...	-17 ²	...	-17 ²
...	1077	-442	193	-56	81	106	293	692	1677	4046	...	17 ²	...	17 ²
...	-2609	1071	-467	137	-193	-249	-691	-1631	-3953	-9537	...	-17 ²	...	-17 ²
				z ₁₇	c ₁₇							Δ ₁₇		±d ₁₇ ²
...	-1505	663	-179	305	431	1167	2765	6697	16159	39015	...	2*17 ²	...	17 ²
...	-271	119	-33	53	73	199	471	1141	2753	6647	...	2*17 ²	...	-17 ²
...	-121	51	-19	13	7	27	61	149	359	867	...	2*17 ²	...	17 ²
...	-455	187	-81	25	-31	-37	-105	-247	-599	-1445	...	2*17 ²	...	-17 ²
...	-2609	1071	-467	137	-193	-249	-691	-1631	-3953	-9537	...	-17 ²	...	17 ²
				p ₁₇	t ₁₇							Δ ₁₇		±d ₁₇ ²
...	-3627	1598	-431	736	1041	2818	6677	16172	39021	94214	...	-2*17 ²	...	17 ²
...	-617	272	-73	126	179	484	1147	2778	6703	16184	...	-2*17 ²	...	-17 ²
...	-75	34	-7	20	33	86	205	496	1197	2890	...	-2*17 ²	...	17 ²
...	167	-68	31	-6	19	32	83	198	479	1156	...	-2*17 ²	...	-17 ²
...	1077	-442	193	-56	81	106	293	692	1677	4046	...	-17 ²	...	17 ²

Таблица 9.4

-1564	-276	$c_{23}(-92)$	-276	-1564	$d_{23}(0)$	1104	184	$z_{23}(0)$	-184	-1104
-8561	-1423	23	1561	9343	527	6065	1073	373	1165	6617
-1169	-191	23	329	1951	89	829	149	65	241	1381
-17	1	23	137	799	7	13	5	17	97	565
-497	-79	23	217	1279	-47	353	65	37	157	905
-4529	-751	23	889	5311	-289	3209	569	205	661	3761
644	92	$t_{23}(-92)$	-644	-3772		-460	-92	$p_{23}(-92)$	-460	-2668
3569	723	769	3891	22577		-2496	-350	396	2726	15960
489	107	153	811	4713		-340	-42	88	570	3332
9	11	57	331	1929		-4	6	40	234	1364
209	51	97	531	3089		-144	-14	60	374	2184
1889	387	433	2211	12833		-1320	-182	228	1550	9072
Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}			Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	
-28336	-28336	-28336	-28336	-77		14168	14168	14168	14168	-77
-4416	-4416	-4416	-4416	-12		2208	2208	2208	2208	-12
1840	1840	1840	1840	5		-920	-920	-920	-920	5
15456	15456	15456	15456	42		-7728	-7728	-7728	-7728	42
				23*16						-23*8
Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}			Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	Δ_{23}	
28336	28336	28336	28336	-77		-14168	-14168	-14168	-14168	-77
4416	4416	4416	4416	-12		-2208	-2208	-2208	-2208	-12
-1840	-1840	-1840	-1840	5		920	920	920	920	5
-15456	-15456	-15456	-15456	42		7728	7728	7728	7728	42
				-23*16						23*8
$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$						
527^2	527^2	527^2	527^2	527^2						
89^2	89^2	89^2	89^2	89^2						
7^2	7^2	7^2	7^2	7^2						
-47^2	-47^2	-47^2	-47^2	-47^2						
-289^2	-289^2	-289^2	-289^2	-289^2						
$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$	$\pm d_{23}^2$						
527^2	527^2	527^2	527^2	527^2						
89^2	89^2	89^2	89^2	89^2						
7^2	7^2	7^2	7^2	7^2						
-47^2	-47^2	-47^2	-47^2	-47^2						
-289^2	-289^2	-289^2	-289^2	-289^2						

Таблица 9.4.1.

				m_{23}	n_{23}							Δ_{23}		$\pm d_{23}^2$
...	-4435	1954	-527	900	1273	3446	8165	19776	47717	115210	...	23^2	...	23^2
...	-1841	811	-219	373	527	1427	3381	8189	19759	47707	...	-23^2	...	-23^2
...	-753	332	-89	154	219	592	1403	3398	8199	19796	...	23^2	...	23^2
...	-335	147	-41	65	89	243	575	1393	3361	8115	...	-23^2	...	-23^2
...	-83	38	-7	24	41	106	253	612	1477	3566	...	23^2	...	23^2
...	-169	71	-27	17	7	31	69	169	407	983	...	-23^2	...	-23^2
...	255	-104	47	-10	27	44	115	274	663	1600	...	23^2	...	23^2
...	-679	279	-121	37	-47	-57	-161	-379	-919	-2217	...	-23^2	...	-23^2
...	1613	-662	289	-84	121	158	437	1032	2501	6034	...	23^2	...	23^2
...	-3905	1603	-699	205	-289	-373	-1035	-2443	-5921	-14285	...	-23^2	...	-23^2
				z_{23}	c_{23}							Δ_{23}		$\pm d_{23}^2$
...	-1841	811	-219	373	527	1427	3381	8189	19759	47707	...	$2*23^2$	...	23^2
...	-335	147	-41	65	89	243	575	1393	3361	8115	...	$2*23^2$	...	-23^2
...	-169	71	-27	17	7	31	69	169	407	983	...	$2*23^2$	...	23^2
...	-679	279	-121	37	-47	-57	-161	-379	-919	-2217	...	$2*23^2$	...	-23^2
...	-3905	1603	-699	205	-289	-373	-1035	-2443	-5921	-14285	...	$2*23^2$	...	23^2
				p_{23}	t_{23}							Δ_{23}		$\pm d_{23}^2$
...	-4435	1954	-527	900	1273	3446	8165	19776	47717	115210	...	$-2*23^2$	...	23^2
...	-753	332	-89	154	219	592	1403	3398	8199	19796	...	$-2*23^2$	...	-23^2
...	-83	38	-7	24	41	106	253	612	1477	3566	...	$-2*23^2$	...	23^2
...	255	-104	47	-10	27	44	115	274	663	1600	...	$-2*23^2$	...	-23^2
...	1613	-662	289	-84	121	158	437	1032	2501	6034	...	$-2*23^2$	...	23^2

Литература

1. Начала Евклида. Книги I-VI.— М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
2. Коротков А. В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). — Новочеркасск: УПЦ "Набла" ЮРГТУ (НПИ), 2007. —194с.

К НАХОЖДЕНИЮ РЕШЕНИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: m -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S_2 = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в *криптологии* (*криптографии и криптоанализе*).

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [1] известно, что

$$x_2 = m^2 - n^2, y_2 = 2(mn)^1, z_2 = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2(mn)^1)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

где

$$y_2 = 2(mn)^1,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними

также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах (таблица 1). Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности, причем удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников [2].

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1},$$

где z_{2k+1} и z_{2k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_{2k} прямоугольных треугольников в столбце пифагоровых троек с одинаковым значением модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами катетов, то этому способу классификации соответствует определенный способ классификации значений m и n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенным модулем разности между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2(m_{k+1}m_k))^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды являются генераторами взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Площадь прямоугольного треугольника

$$S_2 = x_2 y_2 / 2 = (m^2 - n^2)(mn)^1 = nm^3 - n^3 m = (m_{k+1}^2 - m_k^2)(m_{k+1}m_k)^1 = S_{2k},$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены вели-

чинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов.

Таким образом, получен ответ на поставленный вопрос о решении полиномиальных уравнений второй степени с двумя переменными.

Вместе с тем, определенный интерес представляет выяснение числа решений полиномиального уравнения с большим числом переменных (большим двух) в целых числах, в частности, равное трем. Такое уравнение в общем случае может быть записано в виде $x_2^2 + (y_2^2 + y_3^2) = z_3^2$.

Это уравнение отвечает метрике трехмерного собственноевклидова пространства.

Решение полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными можно получить исходя из совпадающих значений второй и третьей строк таблицы 1. Так, например, число 25 встречается в третьей строке со значением $m=4$ и $n=3$ и во второй строке со значением $k=12$ и $t=13$. Таким образом, выполняется равенство $4^2 + 3^2 = 25 = 13^2 - 12^2$, что равносильно равенству $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, то есть $x_2^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_3^2$. Число решений такого уравнения, очевидно, бесконечно. Их удобно представлять в виде таблицы 2. Фрагмент этой таблицы представлен ниже

m, n, k, t $=3,4,12,13$	$m^2 + n^2 = t^2 - k^2 = 25$
	$k^2 + m^2 = t^2 -$ $n^2 = 153$
$t^2 = 169$	$n^2 + k^2 = t^2 -$ $m^2 = 160$

Очевидно, что сумма строк правого столбца равняется $2t^2$.

Более того, удастся связать числа m , n , k и t друг с другом с помощью формул

$$4(m^2 + n^2)(t - k)^2 + ((m^2 + n^2) - (t - k)^2)^2 = ((m^2 + n^2) + (t - k)^2)^2,$$

$$4(k^2 + m^2)(t - n)^2 + ((k^2 + m^2) - (t - n)^2)^2 = ((k^2 + m^2) + (t - n)^2)^2,$$

$$4(n^2 + k^2)(t - m)^2 + ((n^2 + k^2) - (t - m)^2)^2 = ((n^2 + k^2) + (t - m)^2)^2.$$

Эти формулы для распространенного частного случая $t - k = 1$ дают соотношение:

$$(m^2 + n^2) + (((m^2 + n^2) - 1)/2)^2 = (((m^2 + n^2) + 1)/2)^2.$$

Отметим, что среди чисел третьих строк таблицы 1 встречаются квадраты чисел в соответствии с теоремой Ферма.

Важным направлением задач алгебраической геометрии является также выяснение числа решений полиномиального уравнения третьей степени, т. е. выяснение того, какие числа прямоугольных треугольников могут быть функциями третьей степени.

Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения сторон прямоугольных треугольников, соответствующих уравнению третьей степени. С этой целью рассмотрим стороны прямоугольных треугольников определяемых соотношениями

$$x_2 = m^3 - n^3, y_2 = 2(mn)^{3/2}, z_2 = m^3 + n^3,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно стороны прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^3 - n^3)^2 + (2(mn)^{3/2})^2 = (m^3 + n^3)^2,$$

$$\text{т.е. } x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

$$\text{где } y_2 = 2(mn)^{3/2},$$

что соответствует обобщению теоремы Пифагора на случай прямоугольных треугольников, определяемыми уравнением третьей степени. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах (таблица 3).

Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Причем теперь не удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с сторонами x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку не удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами сторон, то этому способу классификации не соответствует найденный ранее способ классификации значений m и n , причем

$$(m_{k+1}^3 - m_k^3)^2 + ((2m_{k+1}m_k)^{3/2})^2 = (m_{k+1}^3 + m_k^3)^2,$$

что соответствует обобщению ранее найденной формулы на случай прямоугольных треугольников, определяемых уравнением третьей степени.

Для прямоугольного треугольника, определяемого уравнением третьей степени, имеет место соотношение

$$x_2 y_2 / 2 = (m^3 - n^3)(mn)^{3/2} = (m_{k+1}^3 - m_k^3)(m_{k+1}m_k)^{3/2},$$

так что это уравнение не относится к классу эллиптических уравнений и не является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число решений этого уравнения бесконечно. Значения этой функции для прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n .

Таким образом, полиномиальные уравнения третьей степени вполне разрешимы. Они характеризуют значения сторон прямоугольных треугольников.

Решение полиномиальных уравнений третьей степени с тремя переменными можно получить исходя из совпадающих значений второй и третьей строк таблицы 3. Так, например, число 91 встречается в третьей строке со значением $m=4$ и $n=3$ и во второй строке со значением $k=5$ и $t=6$. Таким образом, выполняется равенство $4^3 + 3^3 = 91 = 6^3 - 5^3$, что равносильно равенству $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, то есть $x_2^3 + y_2^3 + y_3^3 = z_3^3$. Число решений такого уравнения, очевидно, бесконечно. Их удобно представлять в виде таблицы 4. Фрагмент этой таблицы представлен ниже

m, n, k, t $=3,4,5,6$	$m^3+n^3=t^3-k^3=$ 91
	$k^3+m^3=t^3-$ $n^3=152$
$t^3=216$	$n^3+k^3=t^3-$ $k^3=189$

Очевидно, что сумма строк правого столбца равняется $2t^3$.

Более того удастся связать числа m , n , k и t друг с другом с помощью формул

$$4(m^3+n^3)(t^3/2-k^3/2)^2+((m^3+n^3)-(t^3/2-k^3/2)^2)^2=((m^3+n^3)+(t^3/2-k^3/2)^2)^2,$$

$$4(k^3+m^3)(t^3/2-n^3/2)^2+((k^3+m^3)-(t^3/2-n^3/2)^2)^2=((k^3+m^3)+(t^3/2-n^3/2)^2)^2,$$

$$4(n^3+k^3)(t^3/2-m^3/2)^2+((n^3+k^3)-(t^3/2-m^3/2)^2)^2=((n^3+k^3)+(t^3/2-m^3/2)^2)^2.$$

Отметим, что среди чисел третьих строк таблицы 3 не встречаются кубы чисел в соответствии с теоремой Ферма.

Важным направлением задач алгебраической геометрии является также выяснение числа решений полиномиального уравнения четвертой и более высоких степеней, т. е. выяснение того, какие числа прямоугольных треугольников могут быть функциями четвертой и более высоких степеней.

Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения сторон прямоугольных треугольников, соответствующих

уравнению четвертой степени. С этой целью рассмотрим стороны прямоугольных треугольников определяемых соотношениями

$$x_2 = m^4 - n^4, y_2 = 2(mn)^2, z_2 = m^4 + n^4,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно стороны прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^4 - n^4)^2 + (2(mn)^2)^2 = (m^4 + n^4)^2,$$

$$\text{т.е. } x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

$$\text{где } y_2 = 2(mn)^2,$$

что соответствует обобщению теоремы Пифагора на случай прямоугольных треугольников, определяемыми уравнением четвертой степени. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах (таблица 5).

Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Причем теперь не удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку не удастся классифицировать не прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами сторон, то этому способу классификации не соответствует найденный ранее способ классификации значений m и n , причем

$$(m_{k+1}^4 - m_k^4)^2 + ((2m_{k+1}m_k)^2)^2 = (m_{k+1}^4 + m_k^4)^2,$$

что соответствует обобщению ранее найденной формулы на случай прямоугольных треугольников, определяемых уравнением четвертой степени.

Для прямоугольного треугольника, определяемого уравнением четвертой степени, имеет место соотношение

$$x_2 y_2 / 2 = (m^4 - n^4)(mn)^2 = (m_{k+1}^4 - m_k^4)(m_{k+1}m_k)^2,$$

так что это уравнение не относится к классу эллиптических уравнений и не является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения этой функции для прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n .

Таким образом, полиномиальные уравнения четвертой степени вполне разрешимы. Они характеризуют значения сторон прямоугольных треугольников.

Решение полиномиальных уравнений четвертой степени с тремя переменными можно получить исходя из совпадающих значений второй и третьей строк таблицы 5. Расчет значений таблицы 5 не выявил совпадающие значения во второй и третьей строках при значениях m, n, k, t вплоть до 700. Известно лишь одно число такого рода [3] $m=2682440$ и $n=15365639$ $k=18796760$ и $t=20615673$, так что выполняется равенство

$2682440^4 + 15365639^4 = 55796336382216426134042739041 = 20615673^4 - 18796760^4$, что равносильно равенству $x_2^4 + y_2^4 + y_3^4 = z_3^4$. Число решений такого уравнения, очевидно, бесконечно. Их удобно представлять в виде таблицы. Фрагмент этой таблицы представлен ниже

$m=2682440, n=15365639,$ $k=18796760, t=20615673$	$m^4 + n^4 = t^4 - k^4$ $=55796336382216426134042739041$
	$n^4 + k^4 = t^4 - m^4$ $=180578302297086378679015539041$
$t^4 = 180630077292169281088848499041$	$k^4 + m^4 = t^4 - n^4$ $=124885515905035757364638720000$

Очевидно, что сумма строк правого столбца равняется $2t^4$.

Более того удастся связать числа m, n, k и t друг с другом с помощью формул

$$4(m^4 + n^4)(t^2 - k^2)^2 + ((m^4 + n^4) - (t^2 - k^2)^2)^2 = ((m^4 + n^4) + (t^2 - k^2)^2)^2,$$

$$4(m^4 + n^4)(t^2 - k^2)^2 + ((m^4 + n^4) - (t^2 - k^2)^2)^2 = ((m^4 + n^4) + (t^2 - k^2)^2)^2,$$

$$4(m^4 + n^4)(t^2 - k^2)^2 + ((m^4 + n^4) - (t^2 - k^2)^2)^2 = ((m^4 + n^4) + (t^2 - k^2)^2)^2.$$

Отметим, что среди чисел третьих строк таблицы 5 не встречаются четвертые степени чисел в соответствии с теоремой Ферма.

Важным направлением задач алгебраической геометрии является также выяснение числа решений полиномиального уравнения более высокой степени (более четырех), т. е. выяснение того, какие числа прямоугольных треугольников могут быть функциями более высокой степени (более четырех).

Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения сторон прямоугольных треугольников определяемых уравнениями высокой степени (более четырех). С этой целью рассмотрим стороны прямоугольных треугольников определяемых соотношениями

$$x_2 = m^l - n^l, y_2 = 2(mn)^{l/2}, z_2 = m^l + n^l,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно стороны прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^l - n^l)^2 + (2(mn)^{l/2})^2 = (m^l + n^l)^2,$$

$$\text{т.е. } x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

$$\text{где } y_2 = 2(mn)^{l/2},$$

что соответствует обобщению теоремы Пифагора на случай прямоугольных треугольников определяемым уравнениями более высокой степени. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_2, y_2, z_2 . Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Причем теперь не удастся классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику соответствуют определенные значения m и n . Поскольку не удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами сторон, то этому способу классификации не соответствует найденный ранее способ классификации значений m и n , причем

$$(m_{k+1}^l - m_k^l)^2 + (2(m_{k+1}m_k)^{l/2})^2 = (m_{k+1}^l + m_k^l)^2,$$

что соответствует обобщению ранее найденной формулы на случай прямоугольных треугольников, определяемых уравнением степени l .

Для прямоугольного треугольника имеет место соотношение

$$x_2 y_2 / 2 = (m^l - n^l)(mn)^{l/2} = (m_{k+1}^l - m_k^l)(m_{k+1}m_k)^{l/2},$$

так что это уравнение не относится к классу эллиптических уравнений и не является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число решений этого уравнения бесконечно. Значения этой функции для прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n .

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2·1 ¹ 0 2												
2	2·2 ¹ 3 5	2·4 ¹ 0 8											
3	2·3 ¹ 8 10	2·6 ¹ 5 13	2·9 ¹ 0 18										
4	2·4 ¹ 15 17	2·8 ¹ 12 20	2·12 ¹ 7 25	2·16 ¹ 0 32									
5	2·5 ¹ 24 26	2·10 ¹ 21 29	2·15 ¹ 16 34	2·20 ¹ 9 41	2·25 ¹ 0 50								
6	2·6 ¹ 35 37	2·12 ¹ 32 40	2·18 ¹ 27 45	2·24 ¹ 20 52	2·30 ¹ 11 61	2·36 ¹ 0 72							
7	2·7 ¹ 48 50	2·14 ¹ 45 53	2·21 ¹ 40 58	2·28 ¹ 33 65	2·35 ¹ 24 74	2·42 ¹ 13 85	2·49 ¹ 0 98						
8	2·8 ¹ 63 65	2·16 ¹ 60 68	2·24 ¹ 55 73	2·32 ¹ 48 80	2·40 ¹ 39 89	2·48 ¹ 28 100	2·56 ¹ 15 113	2·64 ¹ 0 128					
9	2·9 ¹ 80 82	2·18 ¹ 77 85	2·27 ¹ 72 90	2·36 ¹ 65 97	2·45 ¹ 56 106	2·54 ¹ 45 117	2·63 ¹ 32 130	2·72 ¹ 17 145	2·81 ¹ 0 162				
10	2·10 ¹ 99 101	2·20 ¹ 96 104	2·30 ¹ 91 109	2·40 ¹ 84 116	2·50 ¹ 75 125	2·60 ¹ 64 136	2·70 ¹ 51 149	2·80 ¹ 36 164	2·90 ¹ 19 181	2·100 ¹ 0 200			
11	2·11 ¹ 120 122	2·22 ¹ 117 125	2·33 ¹ 112 130	2·44 ¹ 105 137	2·55 ¹ 96 146	2·66 ¹ 85 157	2·77 ¹ 72 170	2·88 ¹ 57 185	2·99 ¹ 40 202	2·110 ¹ 21 221	2·121 ¹ 0 242		
12	2·12 ¹ 143 145	2·24 ¹ 140 148	2·36 ¹ 135 153	2·48 ¹ 128 160	2·60 ¹ 119 169	2·72 ¹ 108 180	2·84 ¹ 95 193	2·96 ¹ 80 208	2·108 ¹ 63 225	2·120 ¹ 44 244	2·132 ¹ 23 265	2·144 ¹ 0 288	
13	2·13 ¹ 168 170	2·26 ¹ 165 173	2·39 ¹ 160 178	2·52 ¹ 153 185	2·65 ¹ 144 194	2·78 ¹ 133 205	2·91 ¹ 120 218	2·104 ¹ 105 233	2·117 ¹ 88 250	2·130 ¹ 69 269	2·143 ¹ 48 290	2·156 ¹ 25 313	2·169 ¹ 0 338
14	2·14 ¹ 195 197	2·28 ¹ 192 200	2·42 ¹ 187 205	2·56 ¹ 180 212	2·70 ¹ 171 221	2·84 ¹ 160 232	2·98 ¹ 147 245	2·112 ¹ 132 260	2·126 ¹ 115 277	2·140 ¹ 96 296	2·154 ¹ 75 317	2·168 ¹ 52 340	2·182 ¹ 27 365
15	2·15 ¹ 224 226	2·30 ¹ 221 229	2·45 ¹ 216 234	2·60 ¹ 209 241	2·75 ¹ 200 250	2·90 ¹ 189 261	2·105 ¹ 176 274	2·120 ¹ 161 289	2·135 ¹ 144 306	2·150 ¹ 125 325	2165 ¹ 104 346	2·180 ¹ 81 369	2·195 ¹ 56 394
16	2·16 ¹ 255 257	2·32 ¹ 252 260	2·48 ¹ 247 265	2·64 ¹ 240 272	2·80 ¹ 231 281	2·96 ¹ 220 292	2·112 ¹ 207 305	2·128 ¹ 192 320	2·144 ¹ 175 337	2·160 ¹ 156 356	2·176 ¹ 135 377	2192 ¹ 112 400	2·208 ¹ 87 425

Таблица 2.

1,2,2,3	5	4,5,20,21	41	6,14,27,31	232	5,8,44,45	89
	5		416		765		1961
9	8	441	425	961	925	2025	2000
2,3,6,7	13	4,13,16,21	185	6,21,22,31	477	16,20,37,45	656
	40		272		520		1625
49	45	441	425	961	925	2025	1769
1,4,8,9	17	8,11,16,21	185	14,18,21,31	520	11,18,42,47	445
	65		320		637		1885
81	80	441	377	961	765	2209	2088
2,6,9,11	40	3,14,18,23	205	7,16,28,33	305	4,9,48,49	97
	85		333		833		2320
121	117	529	520	1089	1040	2401	2385
6,6,7,11	72	6,13,18,23	205	8,20,25,33	464	1,10,50,51	101
	85		360		689		2501
121	85	529	493	1089	1025	2601	2600
3,4,12,13	25	9,12,20,25	225	15,18,26,35	549	14,17,46,51	485
	153		481		901		2312
169	160	625	544	1225	1000	2601	2405
2,5,14,15	29	12,15,16,25	369	3,8,36,37	73	12,19,48,53	505
	200		400		1305		2448
225	221	625	481	1369	1360	2809	2665
2,10,11,15	104	2,7,26,27	53	10,14,35,39	296	3,10,54,55	109
	125		680		1325		2925
225	221	729	725	1521	1421	2916	3016
1,12,12,17	145	7,14,22,27	245	13,14,34,39	365	10,18,51,55	424
	145		533		1325		2701
289	288	729	680	1521	1352	3025	2925
8,9,12,17	145	10,10,23,27	200	4,24,33,41	592	7,8,56,57	113
	208		629		1105		3185
289	225	729	629	1681	1665	3249	3200
1,6,18,19	37	11,12,24,29	265	9,24,32,41	657	16,17,52,57	545
	325		697		1105		2929
361	360	841	720	1681	1600	3249	2993
6,10,15,19	136	5,6,30,31	61	2,18,39,43	328	9,22,54,59	565
	261		925		1525		2997
361	325	961	936	1849	1845	3481	3400

Таблица 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$2 \cdot 1^{3/2}$ 0 2										
2	$2 \cdot 2^{3/2}$ 7 9	$2 \cdot 4^{3/2}$ 0 16									
3	$2 \cdot 3^{3/2}$ 26 28	$2 \cdot 6^{3/2}$ 19 35	$2 \cdot 9^{3/2}$ 0 54								
4	$2 \cdot 4^{3/2}$ 63 65	$2 \cdot 8^{3/2}$ 56 72	$2 \cdot 12^{3/2}$ 37 91	$2 \cdot 16^{3/2}$ 0 128							
5	$2 \cdot 5^{3/2}$ 124 126	$2 \cdot 10^{3/2}$ 117 133	$2 \cdot 15^{3/2}$ 98 152	$2 \cdot 20^{3/2}$ 61 189	$2 \cdot 25^{3/2}$ 0 250						
6	$2 \cdot 6^{3/2}$ 215 217	$2 \cdot 12^{3/2}$ 208 224	$2 \cdot 18^{3/2}$ 189 243	$2 \cdot 24^{3/2}$ 152 280	$2 \cdot 30^{3/2}$ 91 341	$2 \cdot 36^{3/2}$ 0 432					
7	$2 \cdot 7^{3/2}$ 342 344	$2 \cdot 14^{3/2}$ 335 351	$2 \cdot 21^{3/2}$ 316 370	$2 \cdot 28^{3/2}$ 279 407	$2 \cdot 35^{3/2}$ 218 468	$2 \cdot 42^{3/2}$ 127 559	$2 \cdot 49^{3/2}$ 0 686				
8	$2 \cdot 8^{3/2}$ 511 513	$2 \cdot 16^{3/2}$ 504 520	$2 \cdot 24^{3/2}$ 485 539	$2 \cdot 32^{3/2}$ 448 576	$2 \cdot 40^{3/2}$ 387 637	$2 \cdot 48^{3/2}$ 296 728	$2 \cdot 56^{3/2}$ 169 855	$2 \cdot 64^{3/2}$ 0 1024			
9	$2 \cdot 9^{3/2}$ 728 730	$2 \cdot 18^{3/2}$ 721 737	$2 \cdot 27^{3/2}$ 702 756	$2 \cdot 36^{3/2}$ 665 793	$2 \cdot 45^{3/2}$ 604 854	$2 \cdot 54^{3/2}$ 513 945	$2 \cdot 63^{3/2}$ 386 1072	$2 \cdot 72^{3/2}$ 217 1241	$2 \cdot 81^{3/2}$ 0 1458		
10	$2 \cdot 10^{3/2}$ 999 1001	$2 \cdot 20^{3/2}$ 992 1008	$2 \cdot 30^{3/2}$ 973 1027	$2 \cdot 40^{3/2}$ 936 1064	$2 \cdot 50^{3/2}$ 875 1125	$2 \cdot 60^{3/2}$ 784 1216	$2 \cdot 70^{3/2}$ 657 1343	$2 \cdot 80^{3/2}$ 488 1512	$2 \cdot 90^{3/2}$ 271 1729	$2 \cdot 100^{3/2}$ 0 2000	
11	$2 \cdot 11^{3/2}$ 1330 1332	$2 \cdot 22^{3/2}$ 1323 1339	$2 \cdot 33^{3/2}$ 1304 1358	$2 \cdot 44^{3/2}$ 1267 1395	$2 \cdot 55^{3/2}$ 1206 1456	$2 \cdot 66^{3/2}$ 1115 1547	$2 \cdot 77^{3/2}$ 988 1674	$2 \cdot 88^{3/2}$ 819 1843	$2 \cdot 99^{3/2}$ 602 2060	$2 \cdot 110^{3/2}$ 331 2331	$2 \cdot 121^{3/2}$ 0 2662
12	$2 \cdot 12^{3/2}$ 1727 1729	$2 \cdot 24^{3/2}$ 1720 1736	$2 \cdot 36^{3/2}$ 1701 1755	$2 \cdot 48^{3/2}$ 1664 1792	$2 \cdot 60^{3/2}$ 1603 1853	$2 \cdot 72^{3/2}$ 1512 1944	$2 \cdot 84^{3/2}$ 1385 2071	$2 \cdot 96^{3/2}$ 1216 2240	$2 \cdot 108^{3/2}$ 999 2457	$2 \cdot 120^{3/2}$ 728 2728	$2 \cdot 132^{3/2}$ 397 3059
13	$2 \cdot 13^{3/2}$ 2196 2198	$2 \cdot 26^{3/2}$ 2189 2205	$2 \cdot 39^{3/2}$ 2170 2224	$2 \cdot 52^{3/2}$ 2133 2261	$2 \cdot 65^{3/2}$ 2072 2322	$2 \cdot 78^{3/2}$ 1981 2413	$2 \cdot 91^{3/2}$ 1854 2540	$2 \cdot 104^{3/2}$ 1685 2709	$2 \cdot 117^{3/2}$ 1468 2926	$2 \cdot 130^{3/2}$ 1197 3197	$2 \cdot 143^{3/2}$ 866 3528
14	$2 \cdot 14^{3/2}$ 2743 2745	$2 \cdot 28^{3/2}$ 2736 2752	$2 \cdot 42^{3/2}$ 2717 2771	$2 \cdot 56^{3/2}$ 2680 2808	$2 \cdot 70^{3/2}$ 2619 2869	$2 \cdot 84^{3/2}$ 2528 2960	$2 \cdot 98^{3/2}$ 2401 3087	$2 \cdot 112^{3/2}$ 2232 3256	$2 \cdot 126^{3/2}$ 2015 3473	$2 \cdot 140^{3/2}$ 1744 3744	$2 \cdot 154^{3/2}$ 1413 4075
15	$2 \cdot 15^{3/2}$ 3374 3376	$2 \cdot 30^{3/2}$ 3367 3383	$2 \cdot 45^{3/2}$ 3348 3402	$2 \cdot 60^{3/2}$ 3311 3439	$2 \cdot 75^{3/2}$ 3250 3500	$2 \cdot 90^{3/2}$ 3159 3591	$2 \cdot 105^{3/2}$ 3032 3718	$2 \cdot 120^{3/2}$ 2863 3887	$2 \cdot 135^{3/2}$ 2646 4104	$2 \cdot 150^{3/2}$ 2375 4375	$2 \cdot 165^{3/2}$ 2044 4706
16	$2 \cdot 16^{3/2}$ 4095 4097	$2 \cdot 32^{3/2}$ 4088 4104	$2 \cdot 48^{3/2}$ 4069 4123	$2 \cdot 64^{3/2}$ 4032 4160	$2 \cdot 80^{3/2}$ 3971 4221	$2 \cdot 96^{3/2}$ 3880 4312	$2 \cdot 112^{3/2}$ 3753 4439	$2 \cdot 128^{3/2}$ 3584 4608	$2 \cdot 144^{3/2}$ 3367 4825	$2 \cdot 160^{3/2}$ 3096 5096	$2 \cdot 176^{3/2}$ 2765 5427

Таблица 4.

3,4,5,6	91	29,34,44,53	63693	28,53,75,84	170829	45,69,79,97	419634
	152		109573		443827		584164
216	189	148877	124488	592704	570752	912673	821548
1,6,8,9	217	12,19,53,54	8587	50,61,64,85	351981		
	513		150605		387144		
729	728	157464	155736	614125	489125		
3,10,18,19	1027	15,42,49,58	77463	20,54,79,87	165464		
	5859		121024		501039		
6859	6832	195112	191737	658503	650603		
7,14,17,20	3087	22,51,54,67	143299	26,55,78,87	183951		
	5256		168112		492128		
8000	7657	300763	290115	658503	640927		
4,17,22,25	4977	36,38,61,69	101528	38,48,79,87	165464		
	10712		273637		547911		
15625	15561	328509	281853	658503	603631		
18,19,21,28	12691	7,54,57,70	157807	21,43,84,88	88768		
	15093		185536		601965		
21952	16120	343000	342657	681472	672211		
11,15,27,29	4706	14,23,70,71	14911	25,31,86,88	45416		
	21014		345744		651681		
24389	23058	357911	355167	681472	665847		
2,17,40,41	4921	34,39,65,72	98623	17,40,86,89	68913		
	64008		313929		640969		
68921	68913	373248	333944	704969	700056		
6,32,33,41	32984	38,43,66,75	134379	25,38,87,90	70497		
	36153		342368		674128		
68921	68705	421875	367003	729000	713375		
16,23,41,44	16263	31,33,72,76	65728	58,59,69,90	400491		
	73017		403039		523621		
85184	81088	438976	409185	729000	533888		
3,36,37,46	46683	25,48,74,81	126217	32,54,85,93	190232		
	50680		420849		646893		
97336	97309	531441	515816	804357	771589		
27,30,37,46	46683	19,60,69,82	222859	19,53,90,96	155736		
	70336		335368		735859		
97336	77653	551368	544509	884736	877877		

Таблица 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$2 \cdot 1^2$ 0 2											
2	$2 \cdot 2^2$ 15 17	$2 \cdot 4^2$ 0 32										
3	$2 \cdot 3^2$ 80 82	$2 \cdot 6^2$ 65 97	$2 \cdot 9^2$ 0 162									
4	$2 \cdot 4^2$ 255 257	$2 \cdot 8^2$ 240 272	$2 \cdot 12^2$ 175 337	$2 \cdot 16^2$ 0 512								
5	$2 \cdot 5^2$ 624 626	$2 \cdot 10^2$ 609 641	$2 \cdot 15^2$ 544 706	$2 \cdot 20^2$ 369 881	$2 \cdot 25^2$ 0 1250							
6	$2 \cdot 6^2$ 1295 1297	$2 \cdot 12^2$ 1280 1312	$2 \cdot 18^2$ 1215 1377	$2 \cdot 24^2$ 1040 1552	$2 \cdot 30^2$ 671 1921	$2 \cdot 36^2$ 0 2592						
7	$2 \cdot 7^2$ 2400 2402	$2 \cdot 14^2$ 2385 2417	$2 \cdot 21^2$ 2320 2482	$2 \cdot 28^2$ 2145 2657	$2 \cdot 35^2$ 1776 3026	$2 \cdot 42^2$ 1105 3697	$2 \cdot 49^2$ 0 4802					
8	$2 \cdot 8^2$ 4095 4097	$2 \cdot 16^2$ 4080 4112	$2 \cdot 24^2$ 4015 4177	$2 \cdot 32^2$ 3840 4352	$2 \cdot 40^2$ 3471 4721	$2 \cdot 48^2$ 2800 5392	$2 \cdot 56^2$ 1695 6497	$2 \cdot 64^2$ 0 8192				
9	$2 \cdot 9^2$ 6560 6562	$2 \cdot 18^2$ 6545 6577	$2 \cdot 27^2$ 6480 6642	$2 \cdot 36^2$ 6305 6817	$2 \cdot 45^2$ 5936 7186	$2 \cdot 54^2$ 5265 7857	$2 \cdot 63^2$ 4160 8962	$2 \cdot 72^2$ 2465 10657	$2 \cdot 81^2$ 0 13122			
10	$2 \cdot 10^2$ 9999 10001	$2 \cdot 20^2$ 9984 10016	$2 \cdot 30^2$ 9919 10081	$2 \cdot 40^2$ 9744 10256	$2 \cdot 50^2$ 9375 10625	$2 \cdot 60^2$ 8704 11296	$2 \cdot 70^2$ 7599 12401	$2 \cdot 80^2$ 5904 14096	$2 \cdot 90^2$ 3439 16561	$2 \cdot 100^2$ 0 20000		
11	$2 \cdot 11^2$ 14640 14642	$2 \cdot 22^2$ 14625 14657	$2 \cdot 33^2$ 14560 14722	$2 \cdot 44^2$ 14385 14897	$2 \cdot 55^2$ 14016 15266	$2 \cdot 66^2$ 13345 15937	$2 \cdot 77^2$ 12240 17042	$2 \cdot 88^2$ 10545 18737	$2 \cdot 99^2$ 8080 21202	$2 \cdot 110^2$ 4641 24641	$2 \cdot 121^2$ 0 29282	
12	$2 \cdot 12^2$ 20735 20737	$2 \cdot 24^2$ 20720 20752	$2 \cdot 36^2$ 20655 20817	$2 \cdot 48^2$ 20480 20992	$2 \cdot 60^2$ 20111 21361	$2 \cdot 72^2$ 19440 22032	$2 \cdot 84^2$ 18335 23137	$2 \cdot 96^2$ 16640 24832	$2 \cdot 108^2$ 14175 27297	$2 \cdot 120^2$ 10736 30736	$2 \cdot 132^2$ 6095 35377	$2 \cdot 144^2$ 0 41472
13	$2 \cdot 13^2$ 28560 28562	$2 \cdot 26^2$ 28545 28577	$2 \cdot 39^2$ 28480 28642	$2 \cdot 52^2$ 28305 28817	$2 \cdot 65^2$ 27936 29186	$2 \cdot 78^2$ 27265 29857	$2 \cdot 91^2$ 26160 30962	$2 \cdot 104^2$ 24465 32657	$2 \cdot 117^2$ 22000 35122	$2 \cdot 130^2$ 18561 38561	$2 \cdot 143^2$ 13920 43202	$2 \cdot 156^2$ 7825 49297
14	$2 \cdot 14^2$ 38415 38417	$2 \cdot 28^2$ 38400 38432	$2 \cdot 42^2$ 38335 38497	$2 \cdot 56^2$ 38160 38672	$2 \cdot 70^2$ 37791 39041	$2 \cdot 84^2$ 37120 39712	$2 \cdot 98^2$ 36015 40817	$2 \cdot 112^2$ 34320 42512	$2 \cdot 126^2$ 31855 44977	$2 \cdot 140^2$ 28416 48416	$2 \cdot 154^2$ 23775 53057	$2 \cdot 168^2$ 17680 59152
15	$2 \cdot 15^2$ 50624 50626	$2 \cdot 30^2$ 50609 50641	$2 \cdot 45^2$ 50544 50706	$2 \cdot 60^2$ 50369 50881	$2 \cdot 75^2$ 50000 51250	$2 \cdot 90^2$ 49329 51921	$2 \cdot 105^2$ 48224 53026	$2 \cdot 120^2$ 46529 54721	$2 \cdot 135^2$ 44064 57186	$2 \cdot 150^2$ 40625 60625	$2 \cdot 165^2$ 35984 65266	$2 \cdot 180^2$ 29889 71361
16	$2 \cdot 16^2$ 65535 65537	$2 \cdot 32^2$ 65520 65552	$2 \cdot 48^2$ 65455 65617	$2 \cdot 64^2$ 65280 65792	$2 \cdot 80^2$ 64911 66161	$2 \cdot 96^2$ 64240 66832	$2 \cdot 112^2$ 63135 67937	$2 \cdot 128^2$ 61440 69632	$2 \cdot 144^2$ 58975 72097	$2 \cdot 160^2$ 55536 75536	$2 \cdot 176^2$ 50895 80177	$2 \cdot 192^2$ 44800 862

Литература

1. Начала Евклида. Книги I-VI.— М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
2. Коротков А. В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). — Новочеркасск: УПЦ "Набла" ЮРГТУ (НПИ), 2007.— 194с.
3. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра. №47-48. 2005.— (72-74с).

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С.

**ДИСКРЕТНЫЕ АЛГЕБРЫ
(МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ АЛГЕБРЫ)**

Введение

Есть серьезная проблема, связанная с квантованием пространства и с квантованием времени. Квантованные величины занимают не непрерывный, а дискретный ряд числовых величин со своим значением. Это говорит о том, что нужно построить алгебры, которые бы определялись не непрерывным рядом чисел, скажем действительными величинами, а дискретными, предположим, целыми числами. То, что используется в системах алгебра действительных чисел для построения векторных алгебр, определяется главным образом тем, что математики пытались создавать системы с делением системы комплексных чисел, кватернионов, октанионов – то есть системы с делением. Векторные алгебры – это системы без деления, а поэтому могут задействовать числа, лежащие в основе расширяемых систем, определяемыми системами без деления, например, рядом целых чисел или натуральных чисел. Это системы без деления, каждому целому числу нельзя сопоставить обратное целое число, например, двойке обратное число $\frac{1}{2}$. 0,5 – это не целое число, поэтому необходимо строить также алгебры, векторные алгебры, которые бы базировались на системах не действительных чисел, а, например, на системах целых чисел, системах чисел без деления. Это позволило бы создавать векторные алгебры для квантованных величин, в частности для квантованных пространственных величин и временных величин квантованного пространства-времени.

Если задействовать в векторных алгебрах целые числа, то, как не трудно видеть – понятие скалярного и векторного произведения векторов формируется за счет алгебраических сумм и произведений целых чисел, а, следовательно, эти величины также целые, как скалярное произведение векторов, так и векторное произведение двух векторов, а также нескольких векторов, определяется целыми значениями. Затруднения могут возникать только при нахождении модулей векторов, потому что модуль вектора связан с операцией извлечения квадратного корня из чисел, а извлечение квадратного корня из целых чисел не всегда дает целые числа. Это единственное

затруднение. Если избегать применения понятия модуля, а пользоваться понятием квадрата модуля, квадрата интервала двух векторов, то это затруднение исключается, оно отпадает. Следовательно, такие алгебры могут быть построены для дискретного ряда значений числовых величин, то есть могут быть использованы для дискретизации пространственно-временных величин, а вслед за этим, и всех производных от них величин. Это – одно из направлений работы: *создание квантованных векторных алгебр в рамках семимерной парадигмы* [2;3].

Практическое применение результатов данного направления следующее. Физика сейчас рассматривает целый ряд квантованных значений, например, положение электрона в атоме водорода связано с рассмотрением орбит, которые квантованы и определяются целыми положительными значениями N , где $N = 1, 2, 3, 4$ и т. д.

Это фундаментальный физический результат. То есть величины – например, радиус орбит электронных оболочек в атоме квантован – а вслед за ним квантованы и такие понятия как энергия, момент импульса – это все квантованные величины. Это мы их рассматривали как непрерывные, а поэтому использовали алгебры непрерывные, но в принципе понятие квантования времени и пространства – это очень важное понятие, и физиками широко используется [1;6]. Это старая эпистемологическая проблема, занимавшая в свое время И.Канта: о соответствии математического описания физической реальности.

Развитие квантовой физики могло бы пойти по другому пути, и многих противоречий удалось бы избежать, если бы более точная модель пространства – времени была бы известна в начале XX в. – в момент начала исследований микромира [4,с.1], могли бы быть иными и основные философские вопросы фундаментальной физики начала XXI в.

В литературе повсеместно рассматриваются алгебры над полем действительных чисел [3]. Вместе с тем представляют определенный интерес алгебры над кольцами целых чисел и классов сравнений по модулю. Практическая значимость таких алгебр может быть в использовании указанных алгебр в физических приложениях, где дискретность величин приобретает существенное значение. В случае применения одномерных колец целых чисел или классов сравнений по модулю имеют место очевидные действия [5].

Одномерные числа

I. Определение одномерных чисел.

Одномерными числами $\mathbf{a}$ назовем элементы колец дискретных чисел $\mathbf{a}=(a_0)$, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых чисел вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Числа $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи: $\mathbf{a}=\mathbf{b}$

или $(a_0)=(b_0)$, если $a_0=b_0$.

2. Суммой чисел $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ называется число $\mathbf{a+b}=(a_0+b_0)$, т.е.

$$\mathbf{a+b}=(a_0)+(b_0)=(a_0+b_0).$$

3. Произведением чисел $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ называется число $\mathbf{ab}=(a_0b_0)$,

$$\text{т.е.} \quad \mathbf{ab}=(a_0)(b_0)=(a_0b_0),$$

4. Число (a_0) отождествляется с числом a_0 , т.е. $(a_0)=a_0$.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$\mathbf{ma}=(m)(a_0)=(ma_0),$$

$$\text{т.е.} \quad \mathbf{ma}=(ma_0),$$

где m -одномерное число.

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a+b})+\mathbf{c}=((a_0)+(b_0))+(c_0)=((a_0+b_0)+c_0),$$

$$\mathbf{a+ (b+c)}=(a_0)+((b_0)+(c_0))=(a_0+(b_0+c_0)),$$

$$\text{т.е.} \quad (\mathbf{a+b})+\mathbf{c}=\mathbf{a+(b+c)}.$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a+b}=(a_0)+(b_0)=(a_0+b_0),$$

$$\mathbf{b+a}=(b_0)+(a_0)=(b_0+a_0),$$

$$\text{т.е.} \quad \mathbf{a+b=b+a}.$$

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a+0}=(a_0)+(0)=(a_0+0)=(a_0),$$

т.е. $\mathbf{a+0=a}$, так что число (0) отождествляется с числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a+(-a)}=(a_0)+(-a_0)=(a_0-a_0)=(0),$$

т.е. $\mathbf{a+(-a)=0}$, так что число $(-a_0)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=((a_0)(b_0))(c_0)=(a_0b_0)(c_0),$$

$$a(bc) = (a_0)((b_0)(c_0)) = (a_0)(b_0c_0),$$

$$\text{т.е.} \quad (ab)c = a(bc).$$

6. Коммутативность умножения:

$$ab = (a_0)(b_0) = (a_0b_0),$$

$$ba = (b_0)(a_0) = (b_0a_0),$$

$$\text{т.е.} \quad ab = ba.$$

7. Дистрибутивность:

$$(a + b)c = ((a_0) + (b_0))(c_0) = (a_0 + b_0)(c_0) = ((a_0 + b_0)c_0),$$

$$ac + bc = (a_0c_0) + (b_0c_0) = ((a_0 + b_0)c_0),$$

$$\text{т.е.} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0)(1) = (a_01) = (a_0) = a.$$

Итак, одномерные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух одномерных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = (a_0b_0).$$

Двухмерные числа

I. Определение двухмерных чисел.

Двухмерными числами a назовем упорядоченные пары $a = (a_0, a_1)$ одномерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с одномерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары одномерных чисел $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи: $a = b$

$$\text{или} \quad (a_0, a_1) = (b_0, b_1) = \begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$, т.е.

$$a + b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

3. Произведением пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара

$$ab = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\text{т.е.} \quad ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению одномерных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с одномерным числом a_0 , т.е. $(a_0, 0) = a_0$.

В данном определении двухмерных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы и произведения, нет речи о каком-либо извлечении квадратного корня из отрицательных или положительных чисел, а также нуля. Все определения формулируются в терминах одномерных чисел и действий над ними.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$ta = (t, 0)(a_0, a_1) = (ta_0 + \alpha a_1 0, ta_1 + a_0 0) = (ta_0, ta_1),$$

$$\text{т.е. } ta = (ta_0, ta_1),$$

где t – одномерное число.

Пары $a = (a_0, a_1)$ и $\bar{a} = (a_0, -a_1)$, отличающиеся знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$a\bar{a} = (a_0, a_1)(a_0, -a_1) = (a_0 a_0 - \alpha a_1 a_1, a_0 a_1 - a_0 a_1) = (a_0^2 - \alpha a_1^2, 0),$$

$$\text{т.е. } a\bar{a} = a_0^2 - \alpha a_1^2,$$

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $a_0^2 = a_1^2 = 0$ при $\alpha = -1$, $a_0^2 = a_1^2$ при $\alpha = 1$, $a_0^2 = 0$ при $\alpha = 0$.

Двухмерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{a}} = (\overline{a_0, -a_1}) = (a_0, a_1) = a,$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{a}} = a.$$

$$2. \overline{ab} = (a_0 b_0 + \alpha b_1 a_1, -(a_0 b_1 + b_0 a_1)),$$

$$\bar{b}\bar{a} = (b_0, -b_1)(a_0, -a_1) = (b_0 a_0 + \alpha a_1 b_1, -(b_0 a_1 + a_0 b_1)),$$

$$\text{т.е. } \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

$$3. a + \bar{a} = (a_0, a_1) + (a_0, -a_1) = (a_0 + a_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

$$4. \overline{a+b} = (a_0 + b_0, -(a_1 + b_1)) = (a_0, -a_1) + (b_0, -b_1) = \bar{a} + \bar{b}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a+b)+c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$a+(b+c) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения одномерных чисел $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения одномерных чисел $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Ассоциативность умножения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{c} &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0b_0 + \alpha b_1a_1)c_0 + \alpha c_1(a_0b_1 + b_0a_1), (a_0b_0 + \alpha b_1a_1)c_1 + c_0(a_0b_1 + b_0a_1)), \\ \mathbf{a}(\mathbf{bc}) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 + \alpha c_1b_1, b_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= (a_0(b_0c_0 + \alpha c_1b_1) + \alpha (b_0c_1 + c_0b_1)a_1, a_0(b_0c_1 + c_0b_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1b_1)a_1). \end{aligned}$$

В силу коммутативности умножения одномерных чисел $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

6. Коммутативность умножения:

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1b_1, b_0a_1 + a_0b_1).$$

В силу коммутативности умножения одномерных чисел $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(a_1 + b_1), (a_0 + b_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{ac} + \mathbf{bc} &= (a_0c_0 + \alpha c_1a_1, a_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1b_1, b_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(a_1 + b_1), (a_0 + b_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \end{aligned}$$

$$\text{т.е.} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

8. Наличие единицы:

$$\mathbf{a1} = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_0 \cdot 1 + \alpha 0a_1, a_0 \cdot 0 + 1a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a}.$$

Итак, двумерные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, \\ &a_0b_1 + b_0a_1). \end{aligned}$$

Четырехмерные числа

I. Определение четырехмерных чисел.

Четырехмерными числами $\mathbf{a}$ назовем упорядоченные пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ двумерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с двумерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары двумерных чисел $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи: $\mathbf{a}=\mathbf{b}$

$$\text{или } (a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению двумерных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с двумерным числом.

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0\bar{a}_0-\alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1+\bar{a}_0a_1)=(|a_0|^2-\alpha|a_1|^2, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=|a_0|^2-\alpha|a_1|^2,$$

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2=|a_1|^2=0$ при $\alpha = -1$, $|a_0|^2=|a_1|^2$ при $\alpha = 1$, $|a_0|^2=0$ при $\alpha = 0$.

Четырехмерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{\mathbf{a}}}=(\bar{\bar{a}}_0, -\bar{a}_1)=(\bar{a}_0, a_1)=(a_0, a_1)=\mathbf{a},$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}.$$

$$2. \overline{\mathbf{ab}}=(\overline{a_0b_0+ab_1\bar{a}_1}, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1))=$$

$$=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}=(\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1+\bar{a}_0b_1)),$$

т.е. $\overline{ab} = \overline{b} \overline{a}$.

$$3. \mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}} = (a_0, a_1) + (\overline{a_0}, -a_1) = (a_0 + \overline{a_0}, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

$$4. \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = (\overline{a_0 + b_0}, -(a_1 + b_1)) = (\overline{a_0}, -a_1) + (\overline{b_0}, -b_1) = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения двухмерных чисел

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения двумерных чисел $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1})c_0 + \alpha c_1(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1),$$

$$(a_0b_1 + \alpha b_1\overline{a_1})c_1 + c_0(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1)) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1})c_0 + \alpha c_1(\overline{b_1}a_0 + \overline{a_1}b_0), (\overline{b_0}a_1 + \alpha$$

$$a_1\overline{b_1})c_1 + c_0(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1)),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1}, \overline{b_0}c_1 + c_0b_1) =$$

$$= (a_0(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1}) + \alpha(\overline{b_0}c_1 + c_0b_1)\overline{a_1}, \overline{a_0}(\overline{b_0}c_1 + c_0b_1) +$$

$$(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1})a_1).$$

В силу коммутативности умножения двухмерных чисел

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}).$$

6. Некоммутативность умножения:

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1 + b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1\overline{b_1}, \overline{b_0}a_1 + a_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\overline{a_1+b_1}), (\overline{a_0+b_0})c_1+c_0(a_1+b_1))= \\
&= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\overline{a_1}+\overline{b_1}), (\overline{a_0}+\overline{b_0})c_1+c_0(a_1+b_1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{ac+bc} &= (a_0c_0+\alpha c_1\overline{a_1}, \overline{a_0}c_1+c_0a_1) + (b_0c_0+\alpha c_1\overline{b_1}, \overline{b_0}c_1+c_0b_1) = \\
&= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\overline{a_1}+\overline{b_1}), (\overline{a_0}+\overline{b_0})c_1+c_0(a_1+b_1)),
\end{aligned}$$

т.е.

$$(\mathbf{a+b})\mathbf{c}=\mathbf{ac+bc}.$$

8. Наличие единицы:

$$\mathbf{a1}=(a_0, a_1)(1, 0)=(a_01+\alpha 0\overline{a_1}, \overline{a_0}0+1a_1)=(a_0, a_1)=\mathbf{a}.$$

Итак, четырехмерные числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{ab}=(a_0b_0+\alpha b_1a_1+\alpha b_2a_2-\alpha^2 a_3b_3, \\
\quad a_0b_1+b_0a_1-\alpha b_2a_3+\alpha a_2b_3, \\
\quad a_0b_2-\alpha b_3a_1+b_0a_2+\alpha a_3b_1, \\
\quad a_0b_3-b_2a_1+b_0a_3+a_2b_1).
\end{array}$$

Восьмимерные числа

I. Определение восьмимерных чисел.

Восьмимерными числами $\mathbf{a}$ назовем упорядоченные пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ четырехмерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с четырехмерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары четырехмерных чисел $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи: $\mathbf{a=b}$

$$\text{или } (a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара $\mathbf{a+b}=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$\mathbf{a+b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0+\alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1+b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1+b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственнокмплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению четырехмерных чисел.

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с четырехмерным числом.

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = (a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (a_0\bar{a}_0 - \alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1 + \bar{a}_1a_0) = (|a_0|^2 - \alpha|a_1|^2, 0),$$

т.е. $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = |a_0|^2 - \alpha|a_1|^2$,

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2 = |a_1|^2 = 0$ при $\alpha = -1$, $|a_0|^2 = |a_1|^2$ при $\alpha = 1$, $|a_0|^2 = 0$ при $\alpha = 0$.

Восьмимерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{\bar{\mathbf{a}}} = (\bar{\bar{a}}_0, -\bar{a}_1) = (\bar{\bar{a}}_0, a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a},$$

$$\text{т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}.$$

$$2. \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = (\overline{a_0b_0 + ab_1\bar{a}_1}, -(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)) =$$

$$= (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}} = (\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1 + \bar{a}_0b_1)),$$

т.е. $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}$.

$$3. \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = (a_0, a_1) + (\bar{a}_0, -a_1) = (a_0 + \bar{a}_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

$$4. \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = (\overline{a_0 + b_0}, -(a_1 + b_1)) = (\bar{a}_0, -a_1) + (\bar{b}_0, -b_1) = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения четырехмерных чисел $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения четырехмерных чисел $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Альтернативность умножения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{b} &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1)(b_0, b_1) = \\ &= ((a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_0 + \alpha b_1(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1), (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)) = \\ &= ((a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_0 + \alpha b_1(\bar{b}_1a_0 + \bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)) = \\ \mathbf{a}(\mathbf{bb}) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(b_0, b_1)) = (a_0, a_1)(b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1, \bar{b}_0b_1 + b_0b_1) = \\ &= (a_0(b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1) + \alpha(\bar{b}_0b_1 + b_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0b_1 + b_0b_1) + (b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1)a_1). \end{aligned}$$

В силу равенств $\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}$ и $\mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}$ одномерным числам $(\mathbf{ab})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{bb})$.

6. Некоммутативность умножения:

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1 + a_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \\ \mathbf{ac} + \mathbf{bc} &= (a_0c_0 + \alpha c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)), \end{aligned}$$

т.е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

8. Наличие единицы:

$$\mathbf{a}\mathbf{1} = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_0 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 \cdot \bar{a}_1, \bar{a}_0 \cdot 0 + 1 \cdot a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a}.$$

Итак, восьмимерные числа составляют некоммутативное, альтернативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1 + \alpha b_2a_2 - \alpha^2 a_3b_3 + \alpha b_4a_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 b_7a_7, \\ &\quad a_0b_1 + b_0a_1 - \alpha b_2a_3 + \alpha a_2b_3 - \alpha b_4a_5 + \alpha a_4b_5 + \alpha^2 a_6b_7 - \alpha^2 b_6a_7, \\ &\quad a_0b_2 - \alpha b_3a_1 + b_0a_2 + \alpha a_3b_1 - \alpha b_4a_6 + \alpha^2 a_7b_5 + \alpha a_4b_6 - \alpha^2 b_7a_5, \\ &\quad a_0b_3 - b_2a_1 + b_0a_3 + a_2b_1 - \alpha b_4a_7 + \alpha a_6b_5 + \alpha a_4b_7 - \alpha b_6a_5, \\ &\quad a_0b_4 - \alpha b_5a_1 - \alpha b_6a_2 + \alpha^2 a_3b_7 + b_0a_4 + \alpha a_5b_1 + \alpha a_6b_2 - \alpha^2 b_3a_7, \\ &\quad a_0b_5 - b_4a_1 + \alpha b_6a_3 - \alpha a_2b_7 + b_0a_5 + a_4b_1 - \alpha a_6b_3 + \alpha b_2a_7, \\ &\quad a_0b_6 + \alpha b_7a_1 - b_4a_2 - \alpha a_3b_5 + b_0a_6 - \alpha a_7b_1 + a_4b_2 + \alpha b_3a_5, \\ &\quad a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 + b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5). \end{aligned}$$

Особенностью многомерных чисел является, в частности, то, что произведение двух чисел с одномерными значениями $a_0 = b_0 = 0$ дает возможность получать скалярное и векторное произведения двух многомерных векторов:

$$ab = -(ab) + [ab],$$

где $(ab) = -(\alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 - \alpha^2 b_3 a_3 + \alpha a_4 b_4 - \alpha^2 a_5 b_5 - \alpha^2 a_6 b_6 + \alpha^3 a_7 b_7)$

и $[ab] = (\alpha(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \alpha(a_4 b_5 - a_5 b_4) - \alpha^2(a_7 b_6 - a_6 b_7),$

$(\alpha(a_4 b_6 - a_6 b_4) - \alpha^2(a_5 b_7 - a_7 b_5) + \alpha(a_3 b_1 - a_1 b_3),$

$(\alpha(a_6 b_5 - a_5 b_6) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \alpha(a_4 b_7 - a_7 b_4),$

$(\alpha(a_5 b_1 - a_1 b_5) - \alpha^2(a_7 b_3 - a_3 b_7) + \alpha(a_6 b_2 - a_2 b_6),$

$(\alpha(a_7 b_2 - a_2 b_7) + \alpha(a_3 b_6 - a_6 b_3) - (a_1 b_4 - a_4 b_1),$

$(\alpha(a_1 b_7 - a_7 b_1) - (a_2 b_4 - a_4 b_2) + \alpha(a_5 b_3 - a_3 b_5),$

$(-(a_3 b_4 - a_4 b_3) - (a_6 b_1 - a_1 b_6) - (a_2 b_5 - a_5 b_2))$

для семимерных векторных алгебр;

$$(ab) = -(\alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 - \alpha^2 b_3 a_3)$$

и $[ab] = (\alpha(a_2 b_3 - a_3 b_2),$

$\alpha(a_3 b_1 - a_1 b_3),$

$-(a_1 b_2 - a_2 b_1))$

для трехмерных векторных алгебр;

$$(ab) = -\alpha a_1 b_1$$

и $[ab] = 0$

для одномерных векторных алгебр.

В рассмотренных алгебрах все операции и результаты операций сформулированы в рамках целочисленных значений величин. Скалярное и векторное произведения двух векторов, а вслед за этим все операции над ними (например, смешанное и двойное векторное произведения) также целочисленные, что может представлять интерес для ряда разделов физики, а также для когнитологии [3], криптологии и вычислительной техники/информатики (включая нейросети, нейрокомпьютеры, нейройчицы и работы в области искусственного интеллекта) [3].

Обсуждение

Итак, алгебры вообще и векторные алгебры в частности связаны с использованием полей действительных чисел. Т.е. рассматриваются над объектами непрерывной природы. Тем не менее, как уже указывалось во Введении, в физическом плане отмечена дискретность целого ряда величин. В частности, орбит движения (радиусов движения) электронов, т.е. радиусов электронных оболочек в атоме, молекулах и т.д. Это намекает на то, что целый ряд величин может быть дискретным. И стоит вопрос: а как ввести дискретность, интервал величин, изменение величин и т.д.?

В математическом плане это может быть обеспечено путем использования дискретных алгебр, то есть алгебр, которые используют не действительные поля, или поля вообще, а кольца, то есть, не рассматривая вопрос, связанный с делением. Такими кольцами могут быть кольца целых чисел, либо кольца в сравнении по модулю. И те и другие кольца известны, широко используются, но в плане построения векторных алгебр не применялись. Если использовать эти кольца как объект для рассмотрения в векторных алгебрах, то очень многие величины векторных алгебр связаны с понятием сложения, вычитания и умножения величин, но не используют операцию деления величин.

Очень многие величины строятся именно так. К ним относятся такие понятия, как: скалярное произведение двух векторов, скалярный квадрат вектора, векторное произведение двух векторов, а также все объекты, связанные с комбинацией скалярного и векторного произведения. В частности, квадрат векторного произведения двух векторов, смешанное произведение двух векторов, двойное векторное произведение двух векторов, целый ряд иных величин, причем, это названы величины, относящиеся только к трехмерным векторным алгебрам.

Если же использовать семимерные векторные алгебры, то к этим величинам будет добавлен целый ряд других функций, таких как векторное произведение трех, четырех, пяти, шести векторов, смешанное произведение четырех, семи векторов, целый ряд других величин и функций. Все эти величины над полями, над кольцами целых чисел либо кольцами чисел в сравнении по модулю, классов в сравнении по модулю, оказываются целочисленными, то есть дискретизированными – таким образом, мы имеем дело с построением дискретных векторных алгебр.

Надо отметить, что дискретизация накладывает некоторые отпечатки и на векторные алгебры, в частности, теория вращения должна быть существенно изменена, поскольку в нее входят не дискретизированные величины – косинуса и синуса – тригонометрического либо гиперболического. В таком варианте эти величины должны быть также дискретизированы, то есть должен применяться не непрерывный ряд значений, а другой дискретизированный ряд значений, в том числе тригонометрических и гиперболических функций.

Литература

1. Вяльцев А.Н. Дискретное пространство-время. – М.: Ком-Книга, 2007.– 400с.
- 2.Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.– 244с.
- 3.Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространства (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.–194с.
4. Рылов Ю.А. Птолемеевость традиционной программы исследований микромира и альтернативная исследовательская программа// Физическая мысль России. 2001. № 1.– (с.1-23).
- 5.Фадеев Д.К. Лекции по алгебре.– М.: Наука, 1984.– 416с.
6. Смолин Л. Атомы пространства и времени//В мире науки.2004.№4.– (с.48-57).

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С.

**МНОГОЗНАЧНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ,
БУЛЕВЫ МНОГОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ
И ДИСКРЕТНЫЕ (МНОГОМЕРНЫЕ
ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ) АЛГЕБРЫ**

Основным недостатком булевой алгебры логики, получившей широкое распространение и применение – в том числе в вычислительной технике – с точки зрения идентификации и управления объектами, обладающими сознанием (интеллектом), является то, что данная логика одномерна, то есть описывает лишь действительные логические состояния и не учитывает иных, в том числе – мнимых, ввиду чего с XX в. начинают разрабатываться многомерные (например, воображаемая логика Н.А. Васильева [1] – и ее частичный анализ в монографии В.А. Смирнова [12]) – и многозначные логики [7].

В работах А.А. Зиновьева [7] словосочетание «комплексная логика» встречается с 70-х гг. XX в., в частности, для обозначения связи лексики с формальным логическим аппаратом в рамках традиционной булевой (формальной/действительной) логики. Комплексная логика А.А. Зиновьева послужила прообразом для А.С. Ионова и Г.А. Петрова – авторов из НГУ им. Ярослава Мудрого (они вкладывают в указанный термин принципиально иное содержание) [2]. Они занимались вопросами идентификации сложных технических систем, а начиная с середины 80-х гг. XX в. [3] приступили к разработке основ комплексной логики, названной по аналогии с комплексными числами и связывающей воедино действительные и мнимые части логических состояний объектов [4]. Ими была также сформулирована соответствующая комплексная интерпретация логических законов [4] и намечены подходы к описанию комплексной теории вероятностей для 4-значной комплексной логики [5]; введение в [6] понятий положительных, отрицательных и мнимых множеств позволило перейти к формированию основ алгебры 9-значной комплексной логики и ее применению к управлению системами с интеллектом. (В скобках следует отметить, что с т.з. системологии системы условно делятся на рефлексивные и не-рефлексивные. Рефлексивные системы эффективны в стандартных

ситуациях, на которые они заранее программируются, а нерerefлексивные системы эффективны там, где нет однозначности действий, но допускается многозначность [14, с. 137].)

Из вышесказанного понятно, что работы в данном направлении ведутся, и они имеют непосредственное практическое применение.

Зададимся вопросом: в чем разница между многозначными алгебрами логики и булевыми многомерными алгебрами [8; 9]? Дело вот в чем. Дело в том, что многозначность и многомерность – это разные понятия. Булева алгебра имеет два состояния в каждой переменной – нуль и один, то есть два знака, два значения: нуль и один. То есть булева алгебра двузначна. Небулева алгебра также двузначна. Это – двузначная алгебра как класс, собственно алгебр, как кольцо вычетов по модулю два. Там тоже два состояния – нуль и один. Хотя она и не булева, поскольку закон сложения отличается от законов сложения в булевой алгебре. Трёхзначные и четырёхзначные логики соответственно также одномерные – и они имеют три либо четыре состояния.

Например, были в свое время (в 60-е и 70-е гг. XX в.) элементы, которые давали значение нуль, значение единица, либо значение минус единица. Это были элементы, которые реализовывали трехзначную логику, но не было разработано алгебры для этой логики, не было законов сложения, законов умножения, свойств этих законов, то есть свойств алгебр. Итак, речь идет в данном случае об одномерных двузначных, трехзначных и четырехзначных логиках.

Многомерные логики или алгебры булевы либо небулевы многомерные отличаются тем, что в данном случае имеет место параллельное действие логических систем одномерных. Например, две одномерные системы можно увязать в одну двухмерную систему. Это с одной стороны. Точно так, три одномерные системы можно увязать в одну трехмерную систему, либо n -одномерных можно увязать в одну n -мерную алгебру. Число представляется не одним разрядом, а многими разрядами, n -разрядами, причем в каждом разряде действует соответственно значности логики число состояний, в каждом разряде нуль – один, например, в булевой алгебре, а число разрядов может быть n -мерным.

Вот в чем принципиальное отличие. Принципиально это точно так же, как многомерные векторные алгебры могут быть построены с системой действительных чисел. Но там числа имеют неопределенную значимость, то есть могут иметь и нуль, и один, и два, и

три, и пять, и тысячу, и миллион, и миллиард значений числа, то есть числа не дискретизированны. Кроме того, числа не обязательно целые и не обязательно рациональные, но числа действительные – это отличает кардинально алгебру дискретную (целочисленную) от алгебры непрерывных значений. Алгебры вообще и векторные алгебры в частности связаны с использованием полей действительных чисел. То есть они рассматриваются над объектами непрерывной природы. Тем не менее, в физическом плане отмечена дискретность целого ряда величин, в частности, орбит движения (радиусов движения) электронов, т.е. радиусов электронных оболочек в атоме, молекулах и т.д. Это намекает на то, что целый ряд величин может быть дискретным. И стоит вопрос: а как ввести дискретность, интервал величин, изменение величин и т.д.?

В математическом плане это может быть обеспечено путем использования дискретных алгебр, то есть алгебр, которые используют не действительные поля, или поля вообще, а кольца, то есть, не рассматривая вопрос, связанный с делением. Такими кольцами могут быть кольца целых чисел, либо кольца в сравнении по модулю. И те и другие кольца известны, широко используются, но в плане построения векторных алгебр не применялись (поэтому стоит ввести для их обозначения термин «дискретные (многомерные целочисленные) алгебры» [11]).

Если использовать эти кольца как объект для рассмотрения в векторных алгебрах, то очень многие величины векторных алгебр связаны с понятием сложения, вычитания и умножения величин, но не используют операцию деления величин. Очень многие величины строятся именно так. К ним относятся такие понятия, как: скалярное произведение двух векторов, скалярный квадрат вектора, векторное произведение двух векторов, а также все объекты, связанные с комбинацией скалярного и векторного произведения. В частности, квадрат векторного произведения двух векторов, смешанное произведение двух векторов, двойное векторное произведение двух векторов, целый ряд иных величин, причем это названы величины, относящиеся только к трехмерным векторным алгебрам.

Если же использовать семимерные векторные алгебры, то к этим величинам будет добавлен целый ряд других функций, таких как: векторное произведение трех, четырех, пяти, шести векторов, смешанное произведение четырех, семи векторов, целый ряд других величин и функций. Все эти величины над полями, над кольца-

ми целых чисел либо кольцами чисел в сравнении по модулю, классов в сравнении по модулю, оказываются целочисленными, то есть дискретизированными, то есть мы имеем дело с построением дискретных векторных алгебр.

Надо отметить, что дискретизация накладывает некоторые отпечатки и на векторные алгебры, в частности, теория вращения должна быть существенно изменена, поскольку в нее входят не дискретизированные величины – косинуса и синуса – тригонометрического либо гиперболического. В таком варианте эти величины должны быть также дискретизированны, то есть должен применяться не непрерывный ряд значений, а другой дискретизированный ряд значений, в том числе тригонометрических и гиперболических функций.

Литература

1. Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. – М.: Наука, 1980. – 264 с.
2. Ионов А.С., Петров Г.А. Алгебра 9-значной комплексной логики и ее применение [Электронный ресурс]. – URL : psi-logic.shadanakar.org
3. Ионов А.С. Комплексная логика для идентификации систем, учитывающих возможные ошибки. – 13 с.– Деп. в. ВИНТИ, от 16.09.88. № 7018-B88.
4. Ионов А.С., Петров Г.А. Интерпретация логических законов комплексной логикой// Вестник Новг. гос. ун-та. Сер. Технические науки. – 2001. – № 17.
5. Ионов А.С., Петров Г.А. К построению основ теории вероятности комплексных логических событий//Вестник Новг. гос. ун-та, Сер. Технические науки. – 2004. – № 26.
6. Ионов А.С. Построение основ алгебры комплексной логики на базе расширения теории множеств// Вестник Новг. гос. ун-та. Сер. Математика и информатика. – 2002. – № 22; Ионов А.С., Петров Г.А. Принципы построения гиперкомплексной логики// Искусственный интеллект 2004: сб. трудов Междунар. науч. конф. Таганрог-Донецк, т. 1, 2004; Ионов А.С., Петров Г.А. Основы алгебры 9-значной комплексной логики // Вестник Новг. гос. ун-та, Сер. Технические науки. – 2004. – № 28.
7. Зиновьев А.А. Комплексная логика//Зиновьев А.А. Очерки комплексной логики. – М.: Наука, 1970; М.: Эдиториал УРСС,

- 2000.; см. также: Зиновьев А.А. Философские проблемы многозначной логики/Вступ. ст. В.А.Лекторского. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. —144с. (Из наследия А.А.Зиновьева); Карпенко А.С. Развитие многозначной логики. Изд.3-е, перераб. и доп.— М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 448с.; Многозначные логики и их применения. В 2-х тт./Сост. О.М.Аншаков, Д.В.Виноградов, В.К.Финн; Под ред. В.К.Финна.— М.: Издательство ЛКИ, 2008.
8. Коротков А.В. Многомерные булевы алгебры//Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). — Новочеркасск: УПЦ ЮРГТУ (НПИ), 2007. — 194 с. — (с. 180–185).
 9. Коротков А.В. Многозначные алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. — (С. 17–23).
 10. Коротков А.В. Не Булевы алгебры логики // Информационные системы и технологии. Теория и практика. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. — (С. 23–29).
 11. Коротков А.В. Многомерные целочисленные алгебры// Информационные системы и технологии. Теория и практика. — Шахты: ГОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2009. — (С. 6-15).
 12. Логико-философские труды В.А. Смирнова/Под ред. В.И. Шалака. — М.: Эдиториал УРССС, 2001. — 592 с.
 13. Прангишвили И.В., Пащенко Ф.Ф., Бусыгин Б.П. Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе. — М.: Наука, 2001. — 525 с.

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С.

МНОГОЗНАЧНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ БУЛЕВЫ И НЕБУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ В ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ

Введение

Логика искусственного интеллекта базируется на модели (вернее – моделях) естественного интеллекта – на том, как работает мозг человека. Поэтому ИИ может быть описан на основании работы человеческого мозга. (Поскольку представления о природе человеческого сознания, полученные в когнитивной психологии (и проецируемые на модели искусственного интеллекта), по замечанию И.З.Цехмистро, „не идут дальше выяснения функциональных сторон его деятельности: памяти, логико-вычислительных операций, способности к прогнозированию и т.п., которые с той или иной степенью достоверности могут быть смоделированы в различных кибернетических устройствах“ [11, с.4]).

Но – очень трудно установить алгебру логики, которую в реальности задействует мозг, а, следовательно, алгебра логики искусственных интеллектуальных систем пока ещё не окончательно построена. Поэтому булев вариант – весьма хороший вариант для построения логических устройств и систем ИИ, но он не единственный – могут быть и другие варианты. И в частности небулевы логические алгебры – для построения искусственных интеллектуальных систем.

Евклидова геометрия применима вплоть до атомных и молекулярных структур – это однозначно. Хотя бы по той причине, что теорема Пифагора, пифагоровы тройки как показано ранее, во многих работах – могут быть использованы для описания спектра атома водорода – т.е. атомной структуры [3]. Но если на уровне атома использована евклидова геометрическая схема, то почему она не может быть на более масштабном уровне – на уровне структуры мозга либо на уровне структуры галактик? Т.е. следует отметить: очень возможно, что мозг использует евклидовы геометрические преобразования. Но это неизученный в когнитологии и нейронауке вопрос. Точно так же мозг мог задействовать неевклидову и псевдоевклидову геометрические схемы на ряду с исполь-

зованием евклидовой геометрической схемы, потому что псевдоевклидовы алгебры повторяют свойства алгебр евклидовых, спинорные и изовекторные вычисления повторяют свойства алгебр спинорных и изовекторных евклидовых. И очень возможно, что псевдоевклидова схема используется в природе для построения античастиц [2], в то время как евклидова схема используется для построения теории частиц. Поскольку процессы мышления аниэнтропийны [6], то очень возможно, что эта схема используется мозгом (заметим в скобках, что при моделировании работы мозга всегда следует различать: *термодинамику мозга (информационные и термодинамические процессы в психических структурах), информационные процессы сознания и мышления, физические модели психических процессов, психоинформационные структуры, а также изменённые состояния сознания*).

Булева алгебра

Булева алгебра появилась ещё в XIX веке. В вычислительной технике она применяется с середины XX-го века. Булева алгебра двужначна и одномерна. Это числа с двумя состояниями, которые условно называют нуль и единица. Они дают соответствующие операции сложения и умножения этого числа, в результате булева алгебра обладает целым рядом полезных, очень важных свойств, позволивших широко применять ее на практике, в алгебре логики, а также самое главное – в технике логических, арифметических и преобразовательных устройств. Булева алгебра хорошо разработана и изложена, говорить о ней много не надо [1; 8; 9]. Необходимо отметить прецедент, который возникает в булевой алгебре.

Во-первых, наличие операций сложения не сопровождается операцией вычитания, то есть, отсутствует противоположность операции сложения. Булевому числу нельзя сопоставить противоположное число. В алгебре, например, действительных чисел, все обстоит иначе. Эта алгебра характеризует поле – математическое понятие, набор математических операций, одна из которых – операция вычитания. Так вот, имеется система в теории сравнений, которая может работать с классом вычетов по модулю. Эта теория хорошо разработана и изложена в литературе. Она имеет возможность построения чисел по модулю два классов сравнений и классов вычетов по модулю два. Это – та же система с двумя числами

нуль и единица, но эта система не имеет уже операций вычитания, и в результате имеет отличающуюся от булевой алгебры операцию сложения, где единица плюс единица в этой алгебре есть нуль, в то время как в булевой алгебре единица плюс единица есть единица.

Это очень существенное отличие, позволяющее построить новую алгебру. Эта алгебра обладает целым рядом полезных свойств, теми же, что и, например, в алгебре действительных чисел, хотя она дополнена свойствами чисто логических систем. В этой алгебре A равняется нулю, а не A , как в булевой алгебре, если A – число. Отличительные свойства этой небулевой одномерной алгебры от булевой одномерной алгебры характеризует целый ряд возможностей и создает целый ряд алгебр. Это в отношении одномерной алгебры булевой и небулевой.

Теперь в отношении многомерной алгебры. В принципе, булева алгебра может быть расширена до многомерного варианта, до N – мерного, где N – произвольное число, путем применения операции умножения. Умножение в этой алгебре прямое – умножение двух чисел. Эта работа была опубликована в одной из книг, там показано, что булева алгебра может быть N – мерна, то есть число может быть записано в N - мерной форме. Операнды в N - мерной форме есть результаты операций в N - мерной форме. Это создает возможности использования этой алгебры по ряду назначений, в частности, при построении логических многомерных устройств, либо логически-арифметических многомерных устройств. Однако, прямое произведение двух величин, все- таки, обладает некоторыми существенными недостатками, поэтому в практике действительных чисел используют не только прямое произведение двух величин, но и произведение многомерных величин, построенных не по способу прямого произведения. Такими числами, кроме действительных одномерных чисел, являются комплексные числа, например, двумерные числа, кватернионные четырехмерные числа, октанионы восьмимерные числа, а также числа, характеризующие векторные алгебры, одномерные векторные алгебры, трехмерные векторные алгебры, семимерные векторные алгебры. То есть в алгебре действительных чисел имеются целый ряд возможностей расширения, но уж, поскольку, система сравнений классов вычетов по модулю обладает свойствами, близкими к свойствам действительных чисел, в частности, обладает вычитанием, то можно строить алгебры логики многомерной, используя те же процедуры для произведения

чисел, что и алгебры многомерной для действительных чисел. В частности, процедура удвоения Гамильтона может быть использована для построения двумерной алгебры логики и одномерной векторной алгебры. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к комплексным, логическим числам даст четырехмерные логические числа и трехмерную векторную алгебру. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к кватернионным числам, даст октанионную систему чисел – логических чисел и семимерную векторную алгебру логики, то есть, известная процедура умножения по отношению к числам классов вычетов по модулю дает возможность построить целый ряд совершенно новых алгебр. Следовало бы отметить еще одно важное применение – речь идет о дискретных алгебрах с бесконечным модулем в данном случае, вернее, это – алгебра действительных чисел, но только расширена она до четырех восьмимерных (одно-трех и семимерный вариант). Дело в том, что в векторных алгебрах, алгебрах кватернионов, комплексных чисел и октанионов используются операции сложения и умножения, а также операции скалярного произведения и векторного произведения двух векторов векторной алгебры. Если числа занимают чисто дискретный ряд значений, например, приобретают только целые значения, то результаты всех практических операций будут принимать целые значения. То есть, эта алгебра в значительной степени воспроизводит дискретную алгебру, если речь не идет об извлечении квадратного корня. Скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение трех векторов, двойное векторное произведение трех векторов, – есть и другие многомерные операции, которые будут иметь целочисленные значения, многомерные целочисленные значения, это может иметь существенное применение для описания дискретных величин, которые, в последнее время, на протяжении уже, пожалуй, ста лет широко используются физиками.

Надо сказать, что алгебры булевой логики уже исполнилось двести лет и весь мир её широко задействует, изучает и получает знания в этой системе.

Если бы хотя бы частичку знаний прибавить вне булевых алгебр логики, то это было бы значительное достижение.

Многозначные логики были давно. Во второй половине XX века предпринимались попытки реализации многозначных логик

в вычислительной среде электронно-вычислительных машин второго поколения феррито-диодных. (Впоследствии это привело к машинным арифметикам Н.П. Брусенцова и И.Я.Акушского). Для этого необходимо создать соответствующую физическую среду. На логических магнитных элементах пытались построить десятичную систему исчисления. Намагничивали железо – ферритовые элементы – небольшими «ступеньками». В результате уровень повышался. Но суть в том, что большое число разрядов – вернее не разрядов, а **позиций** приводило к сбою в работе электронно-вычислительной машины. И это вынудило прекратить эксперименты подобного рода и обратиться к двузначной, а вернее двоичной алгебре логики – булевой алгебре логики: 0 и 1. Это лучше в том плане, что обеспечивается высокая точность и надежность результатов вычислений. Это – в отношении двоичной логики. Но двоичная логика, как выясняется, не единственная: алгебра Буля само собой, а, к примеру, алгебра логики вычетов по модулю два ($\text{mod}=2$) – также само собой. Алгебру логики вычетов по модулю два, насколько нам известно, никто не рассматривал в том плане, поскольку считали, что это просто функция иного характера – функция сложения по модулю два в булевой алгебре. Т.е. рассматривали это как функцию булевой алгебры, а не как самостоятельную алгебру. По крайней мере, нам такое рассмотрение неизвестно.

Там, например, – в алгебре вычетов по модулю два – видоизменяются законы де Моргана, и целый ряд других соотношений булевой алгебры. Это совсем другая алгебра, потому, что у неё иначе задана операция сложения. Все алгебры характеризуются набором основных операций: сложения и умножения. И в данном случае алгебра будет иной, нежели Булева, потому, что у неё совсем другой вариант сложения (операция сложения). В отношении троичной логики всё ещё более многообразно. Троичных логик масса. Но, например логика троичная соответствующая алгебре вычетов по модулю три ($\text{mod}=3$) пока что неизвестна: о ней никто ничего не говорит на научных конференциях и конгрессах, нет ничего в Интернете и в литературе. Т.е. собственно троичных логик много, в результате много троичных алгебр, но все алгебры разнятся, как это отмечалось выше, операциями сложения и умножения. Операция сложения по модулю три даёт совершенно новый вариант алгебры. Точно так же алгебры по

модулю $N \pmod{N}$ – это алгебры вычетов – класс вычетов по модулю N . Таких алгебр много и все они отличаются модулем... но было бы замечательно использовать хотя бы трёхпозиционную алгебру! Толком до этого дело пока что не дошло, хотя трёхпозиционные алгебры изучались, но все они, как было отмечено выше, разнятся операциями сложения и умножения, а поэтому все различны и никто их не сводил в систему класса вычетов по модулю три.

Многозначные булевы и небулевы алгебры логики [4, с.17]. Многозначные алгебры логики — это как раз алгебры логики, которые используют классы сравнения по модулю и это изложено, как мы полагаем, в достаточном объеме [4;5]. Сначала идет определение простейшего свойства различных многозначных алгебр логики, использующих классы сравнения по модулю 2, 3, 4, в частности. Показано, что, найденные свойства этих алгебр, причем это хорошо изученные свойства, и они есть в литературе. По крайней мере, двужначные алгебры логики вычетов по модулю два обладают основными свойствами линейных алгебр. Это ассоциативное сложение, коммутативное сложение, наличие нуля, наличие противоположных действий, дистрибутивность левое-правое, коммутативность умножения. Наличие единицы и наличие обратных элементов.

Кроме того, расписаны функции 2, 3, 4- значных алгебр логики классов сравнения по модулю 2, 3 и 4. В табл.1 [4, с.20] приведены свойства алгебр логики классов сравнения по модулю 2.

Таблица 7

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
a·b	0	0	0	1
a · $\bar{b}$	0	0	1	0
a	0	0	1	1
$\bar{a} \cdot b$	0	1	0	0
b	0	1	0	1
a+b	0	1	1	0
$\bar{\bar{a}} \cdot \bar{b}$	0	1	1	1
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	0	0	0

$\overline{\overline{a + b}}$	1	0	0	1
$\overline{b}$	1	0	1	0
$\overline{a \cdot b}$	1	0	1	1
$\overline{a}$	1	1	0	0
$\overline{a \cdot \overline{b}}$	1	1	0	1
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Это собственно классы чётных и нечётных чисел. Здесь показаны все 16 функций в табл.7, которые возникают в этой алгебре. Эти функции отличаются от булевых функций, но, тем не менее, они весьма близки, потому, что операция умножения сохраняется. И операция инверсирования тоже сохраняется. Т.е. уже это говорит о том, что данные алгебры логики могут быть реализованы с помощью одного элемента И-НЕ. И – операция умножения, НЕ – инверсия. Единственная сложность – это операция сложения. Операция сложения может быть также реализована с помощью элементов И – НЕ. Проблем при этом не возникает. Т.е. техническая реализация алгебр при построении логических устройств такого типа затруднений не вызывает. Достаточно одного функционального элемента И – НЕ, чтобы реализовать любую логическую задачу в этой алгебре.

Таблица 2

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
a·b	0	0	0	1
a·$\overline{b}$	0	0	1	0
a	0	0	1	1
$\overline{a} \cdot b$	0	1	0	0
b	0	1	0	1
a+b	0	1	1	0
$\overline{a \cdot \overline{b}}$	0	1	1	1
$\overline{a \cdot b}$	1	0	0	0
$\overline{\overline{a + b}}$	1	0	0	1
$\overline{b}$	1	0	1	0
$\overline{\overline{a \cdot b}}$	1	0	1	1
$\overline{a}$	1	1	0	0
$\overline{a \cdot \overline{b}}$	1	1	0	1
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	0

1	1	1	1	1

Применимость новых логик в искусственных интеллектуальных системах

В любом случае, следует исходить из стандартных описаний применения булевой алгебры, которые фигурируют от учебников дискретной математики до научных статей, то же самое верно и в применении к не булевым алгебрам логики. А вот применимость многозначных и многомерных алгебр небулевых в искусственных интеллектуальных системах, было бы, наверное, целесообразно рассмотреть.

Трёхзначной логикой можно заниматься в двухзначной системе по классу сравнений модуля два. Почему? Потому, что там, в отличие от булевых алгебр, есть противоположный элемент. Т.е. используется операция минус единица – чего нет в булевой алгебре. Т.о. получается, что алгебра сравнений по модулю два класса сравнений по модулю два имеет значения: 0, 1, -1. Т.е. три значения использованы. В булевой алгебре это ввести и использовать нельзя, потому что там нет противоположного элемента. А тут есть. Т.е. алгебра сравнений по модулю два, вообще говоря, трёхзначная, если используется операция вычитания. Т.е. она имеет не только операции сложения и умножения, но и противоположную операции сложения операцию вычитания. **Она сразу реализует трёхзначную логику.** Вот, собственно, **«квазиквантовый» компьютер.** (Следует заметить, что в истории электронно-вычислительных машин был прецедент: в 1958г. В СССР была создана Н.П.Бруснецовым первая и единственная в мире троичная ЭВМ «Сетунь» и том же году И.Я.Акушским была создана суперпроизводительная специализированная ЭВМ с использованием системы счисления в остатках. Для этого была использована специфическая машинная арифметика. Реализовать ЭВМ на многозначных/многомерных булевых и небулевых алгебрах логики можно на любых физических и технологических принципах. Самый простой – на феррит-диодных (от ферритового кольца можно сделать сколько угодно отводов-проводников), на полупроводниковых элементах, это также биомолекулярный компьютер (ДНК-компьютер), оптоэлектронный, оптический, на сверхпроводящих элементах, нейрооптические, нано – во всех мыслимых вариантах и т.д. [7; 10]).

Многозначные и многомерные алгебры логики позволяют делать очень и очень много вещей, которые не позволяет булева алгебра. Достаточно сказать, что наличие операции вычитания в алгебре класса сравнений по модулю два, например, либо вообще по произвольному модулю даёт совершенно новые возможности. В частности, это позволяет построить собственно комплексные, собственно кватернионные, собственно октанионные алгебры – двумерные, четырёхмерные, восьмимерные алгебры логики – потому, что они задействуют наличие операции вычитания. Ничего подобного в булевой алгебре сделать невозможно. Т.е. тут расширяется класс используемых операций вычислений. Классы операций вычислений здесь уже совсем другие.

Кроме того, двумерная комплексная алгебра, кватернионно четырёхмерная и восьмимерная октанионная алгебры – дискретны. Они позволяют построить алгебры векторные, в частности трёхмерные и семимерные логические дискретные алгебры. Это совершенно новые классы объектов дискретной математики. Причем широко используемый класс объектов для непрерывных математик, а в дискретных математиках совершенно не используемый. Наличие операции вычитания позволяет этого достигнуть. Т.е. это совершенно новый класс алгебр, совершенно новый класс логических устройств, а, следовательно, совершенно новый пласт знаний, прежде всего в искусственном интеллекте.

Логика в ИИ связаны, прежде всего, с наличием операции, противоположной операции сложения не булевых алгебр логики. Т.е. наличие операции вычитания — и именно эта операция позволяет добиться принципиально новых систем построения логических алгебр, а вслед за этим — дискретных интеллектуальных систем, логических элементов и систем. Наличие операции вычитания даёт очень ценные свойства логических алгебр. Достаточно сказать для примера, чтобы мы имели в системе действительных чисел, если б не было операции вычитания? Мы бы потеряли очень много! Точно так мы теряем очень многое в алгебрах логики, если не предусматриваем операцию вычитания.

Заключение

Т.о. следует полагать, что основа логик в ИИ уже достаточно подробно описана. По крайней мере, вот в сборнике научных трудов «Информационные системы и технологии» две статьи А.В.Короткова: «Многозначные алгебры логики» и «Небулевы алгебры логики» [4; 5] ... Детали ещё можно дополнять, но это процесс, который уже можно доверить другим специалистам в этом вопросе. Достаточно подробно эти вещи изложены. Если будут возникать какие-то сомнения, то их следует анализировать и устранять.

Тут единственно что: необходима патентная работа по построению технических средств на базе новой алгебры логики. Там несколько иные преобразования, даже в алгебре логики как класса вычетов по модулю два. Там совсем другие преобразования. Но эти преобразования позволяют обеспечить построение технических средств. И устройств на базе тех же логических устройств И- НЕ или совокупности И- ИЛИ- НЕ – реальной трудности не возникает, потому что есть соответствующая математика. Определенно трудный вопрос остаётся о системах минимизации логических структур, т.е. оптимизации логических структур. Но это – вопрос не той степени трудности, чтобы на нём тормозиться. Хотя при наличии сил можно было бы им заняться.

Преимущества, которые открываются на этом направлении: во-первых, алгебра небулева характера класса вычетов по модулю два включает в себя не только нуль и единицу, но и отрицательные числа – минус единицу – т.е. это уже можно рассматривать как трёхпозиционную алгебру. Положительный уровень, нуль, отрицательный уровень – напряжение, либо давление, либо другая физическая величина: это совершенно новый класс технических средств – трёхпозиционный класс технических средств. Это значительно удобней, чем значительно масштабней можно осуществлять преобразования да что говорить представьте себе: систему чисел действительную, но уберите отрицательные числа. Это наглядный пример того, что мы теряем в булевых алгебрах логики. Мы теряем отрицательные значения чисел. И это очень сильно сужает класс рассматриваемых образований. Очень важно, что в кармане: один рубль или минус один рубль? Уже это даёт очень серьёзные преимущества систем, не булевых по отношению к булевым можно

привести ещё ряд примеров, но это не обязательно: такая алгебра найдёт своё применение наряду с булевой.

Но можно определено сказать, что булева логическая система уже устарела. Нужно пересматривать и модернизировать, тем более, что сам логический аппарат остается близким, но не таким как в булевых алгебрах.

Соображения в отношении ИИ такого характера: природа всегда из двух зол выбирает меньшее, оно же лучшее. Из двух систем выбирает лучшую систему. Это закон природы: идет обычно прогресс, а не деградация. Так вот лучшая алгебраическая система, в том числе в случае с использованием вышеописанного логического аппарата, не ограничивается только нейронаукой, нейрокибернетикой и нейроинформатикой. Вопрос о том, какие и как модели работы мозга будут применяться, безусловно, важен. Нейронаука должна ответить на вопрос: используются ли сигналы (в процессе мышления) только одного знака плюс единица или и в том числе минус единица и нуль? Если электрические потенциалы коры головного мозга положительны и только положительны, либо разнополярны, то сразу станет понятен интерес к этим видам устройств. Если использовать отрицательные потенциалы наряду с положительными, то это будет серьезнейшим толчком для применения таких логических устройств в искусственных системах (ИИ). (Впрочем, это уже не принципиально важно: уже разработана троичная микросхема)

Возможно, уже этот ответ получен, но в литературе он нам не пока не попадался. Если отрицательные потенциалы используются наряду с положительными в мозгу человека – то вопрос решен в пользу небулевых систем. Т.е. в мозгу в реальности работают двух- либо трёхпозиционные вычислительные системы.

Литература

- 1.Владимиров Д.А. Булевы алгебры. – М.: Наука, 1969.
- 2.Коротков А.В. Элементы трех- и семимерных изовекторных и спинорных псевдоевклидовых исчислений. — Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2008.— 60с.
- 3.Коротков А.В. Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов//Сознание и физическая реальность. 2009. №11. — (с.17-31).

4.Коротков А.В. Многозначные алгебры логики// Информационные системы и технологии. Теория и практика: сб. научн. Тр./Под ред. Н.А.Березы.— Шахты: Издательство ЮРГУЭС, 2008. — 188с. — (с.17-23).

5.Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика: сб. научн. Тр./Под ред. Н.А.Березы.— Шахты: Издательство ЮРГУЭС, 2008. — 188с. — (с.23-29).

6.Кобозев Н.И. Исследование в области термодинамики процессов информации и мышления. — М.: Издательство Московского университета, 1971. — 195с.

7.Крылов С.М. Неокибернетика: Алгоритмы, математика эволюция и технологии будущего.— М.: Издательство ЛКИ, 2008.— 288с.

8.Сикорский Р. Булевы алгебры. — М.: Мир, 1969.

9.Сайт «Математическая логика» EqWorld

10. Уразаев В.Г. ТРИЗ в электронике. — М.: Техносфера, 2006.— 320с.

11.Цехмистро И.З. Поиски квантовой концепции физических оснований сознания. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьковском ун-те, 1981. — 176с.

КОРОТКОВ А.В., ЧУРАКОВ В.С.

**ЗАМЕЧАНИЕ ПО СТАТЬЕ В.В.ОРЛОВА
«СТРУКТУРА ПАМЯТИ ЧЕЛОВЕКА:
ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ»**

Орлов В.В. занимается голографической моделью памяти. В работе «Структура памяти человека: голографическая модель» [1] Орлов В.В. излагает материал по способам математического описания процессов памяти человека, что характерно для современных нейронных моделей. Он предлагает голографическую запись информации оформлять в виде унитарной матрицы. Это очень интересный вариант – во-первых, потому что унитарные матрицы обладают уникальными свойствами. Однако, преждевременно говорить об успехах. Унитарные матрицы возможны самого различного формата: это квадратные матрицы первого, второго, n -го порядка... Им присущ любой порядок.

Трудно предположить, что мозг человека обладает возможностью создания способов обработки информации для многомерных случаев произвольного порядка – как очень малого, так и очень большого.

Во-вторых, есть способы построения унитарных матриц со специальными свойствами – это SU_n матрицы – матрицы, которые также унитарны, но – со специальными свойствами (n -размерность или порядок матриц). Унитарная матрица, умноженная на ей обратную, должна давать единицу: это произведение двух матриц. Т.е. обратная матрица является также унитарной и это резко изменяет структуру матрицы. Необходимо отметить, что на заре развития техники вычисления элементарных частиц SU_2 матрицы были принципиально важны – специальные унитарные матрицы второго порядка. Вслед за этим, SU_3 матрицы точно также обладают уникальными свойствами. Достаточно сказать, что наличие слова *специальные* резко изменяет число параметров унитарной матрицы – уменьшает его. SU_2 матрица имеет три независимых действительных величины, SU_3 матрица размера три на три с комплексными коэффициентами из девяти комплексных коэффициентов – только восемь действительных независимых параметров. Из девяти комплексных только восемь действительных – т.е. не восемнадцать па-

раметров в девяти комплексных коэффициентах важны, а только восемь. Точно так же можно строить матрицы унитарные со специальными свойствами большого размера. Но это плохо, поскольку, с одной стороны увеличивает возможность, а с другой стороны – увеличивает число параметров, подлежащих обработке в мозгу.

В работах А.В. Короткова по семимерному векторному анализу изложены вопросы получения унитарных матриц, специальных унитарных матриц шестого порядка, т.е. с тридцатьюшестью коэффициентами не комплексными, т.е. семидесятидвумя действительными параметрами (см. Приложения в [2]; Приложения I и II в [3]). Но ограничение настолько серьезно, что из семидесятидвух действительных параметров только семь параметров независимы. Все остальные получаются путём преобразований и зависят от этих семи параметров. Т.о. есть возможность построения SU_6 матриц унитарных семипараметровых. Это соответствует технике семимерного векторного исчисления и семимерного физического мира.

Построена уже теория поля, теория элементарных частиц, спинорная и изовекторная алгебра на базе таких матриц. Т.о. мы полагаем, что мозг человека не должен обрабатывать матрицы унитарные произвольного размера. Значительно удобнее обрабатывать матрицы относительно небольшого размера с относительно небольшим числом независимых параметров.

Литература

1. Орлов В.В. Структура памяти человека: голографическая модель//Информационные системы и технологии. Теория и практика: сб.научн.тр./под ред. А.Н.Березы.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008.– 188с. – (с.79-83).

2. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 196с.

3. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семиметричного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194с.

МНОГОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ А.В.КОРОТКОВА ДЛЯ НЕЙРОСЕТЕЙ И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРОВ

Рассмотрим применение семимерной парадигмы А.В.Короткова [1;2] (в рамках семимерной парадигмы А.В.Коротков разработал: дискретные алгебры [многомерные целочисленные алгебры], многозначные алгебры логики и не булевы алгебры логики [3;4;5;6]) – для нейросетей и нейрокомпьютеров – на примере применения многомерных алгебр А.В.Короткова [3;6].

Р.Солсо [7] описывает когнитивный подход (в котором разрабатываются модели и структуры восприятия работы человеческого мозга) и его компьютерные аналогии – компьютерную метафору, в которой задействована булева алгебра. Для булевой алгебры характерно то, что, во-первых, наличие операций сложения не сопровождается операцией вычитания, то есть, отсутствует противоположность операции сложения. Булевому числу нельзя сопоставить противоположное число. В алгебре, например, действительных чисел, все обстоит иначе. Эта алгебра характеризует поле – математическое понятие, набор математических операций, одна из которых – операция вычитания. Так вот, имеется система в теории сравнений, которая может работать с классом вычетов по модулю. Эта теория хорошо разработана и изложена в литературе. Она имеет возможность построения чисел по модулю 2 классов сравнений и классов вычетов по модулю два. Это – та же система с двумя числами ноль и единица, но эта система не имеет уже операций вычитания, и в результате имеет отличающуюся от булевой алгебры операцию сложения, где единица плюс единица в этой алгебре есть ноль, в то время как в булевой алгебре единица плюс единица есть единица. Это очень существенное отличие, позволяющее построить новую алгебру.

Необходимо отметить также то, что система сравнений классов вычетов по модулю N может принимать произвольное значение, не только 2, но 3, 4 и вообще N . Классы вычетов по модулю N дают многопозиционные и многозначные системы чисел. Необходимо отметить, что многомерные алгебры логики и многозначные алгебры логики могут найти, прежде всего, применение в построении моделей мозга человека, потому что, именно в этих системах –

нейросетях, формируется слишком большое число узлов нейронов (синапсов) – взаимосвязанных направлений, распространение сигналов, то есть по сути дела, речь идет о многомерной логике, использующей мозг человека для своей реализации.

Таким образом, многомерная логика задействована в нейросетях головного мозга – и в логических устройствах и вообще в логических устройствах произвольного назначения. Многомерная логика может быть перспективна для применения в следующих направлениях: для построения логических устройств, в частности нейротехнических устройств (нейрочипов и нейрокомпьютеров) и нейросетей. Возможны следующие направления развития:

- Направление первое – построение алгебры логики, как класса вычетов по модулю 2, – одномерной алгебры логики, которая дает прецедент, отличающийся от одномерной булевой алгебры (это первое).
- Направление второе – расширение значения модуля свыше N , равное 2 дает классы сравнений по модулю N , где N принимает произвольное число. Это одномерные алгебры. В результате, как системы сравнений класса по модулю N , такое число класса, вообще говоря, может быть бесконечно большим (это второе).
- Третье – построение многомерных алгебр путем применения расширения булевой алгебры одномерной в виде произведения как прямого произведения двух величин, дает возможность построить булевы многомерные алгебры произвольной размерности. N может меняться как угодно произвольным образом.
- Четвертое – очень важно применение алгебр сравнений по модулю N , в частности, по модулю 2 для построения двумерных, четырехмерных, восьмимерных алгебр логики, а также одномерных, трехмерных, семимерных векторных алгебр логики. Это – очередное применение. И, наконец, самый важный момент – построение многомерных дискретных алгебр логики, где использован известный способ расширения удвоения произведений Гамильтона и возможны двухмерные, четырехмерные, восьмимерные алгебры дискретные, а также одномерные, трехмерные, семимерные векторные алгебры дискретные. Здесь число не ограничено, может иметь любые значения и, поэтому, это уже не алгебра логики, а чисто алгебра.

Итак, в настоящей статье мы рассмотрели возможность применения многомерных алгебр логики для построения нейросетей и нейрокомпьютеров.

Литература

1. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля.— Новочеркасск: Набла, 1996. — 244с.

2.Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).— Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.— 194с.

3.Коротков А.В. Многомерные булевы алгебры// Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).— Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.— 194с.

4.Коротков А.В. Многозначные алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика.— Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008.— (с.17-23)

5. Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика.— Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. — (с.23-29).

6.Коротков А.В. Многомерные целочисленные алгебры// Проблемы экономики, науки и образования в сервисе: Сб.научн.трудов. — Новочеркасск: «НОК», 2008. —186с.

7. Солсо Р. Когнитивная психология.— 6-е изд. — СПб.: Питер, 2006.— 596с.: ил.

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА В НЕЙРОСЕТЯХ

Рассмотрим применение семимерной парадигмы А.В.Короткова [1;2] для нейросетей и нейрокомпьютеров (в данном случае – проанализируем применение пифагоровых чисел в нейросетях [3]).

Таблица 1 из статьи «Особенности решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах» [3] позволяет получить ряды пифагоровых троек, сформированных по значению модуля разности двух катетов, в частности, первый столбец таблицы 2 характеризуется модулем разности катетов, равному 1.

Эти значения для величины Z , например, для величины гипотенузы прямоугольных треугольников принимает строго дискретный ряд значений 5, 29, 169, 985 – ни одного числа в промежутке и т.д. Это говорит о том, что, классифицируя числа, можно получать очень быстро нарастающие значения множеств. Эти значения связаны между собой рекуррентной взаимосвязью $z_{n+1}=6z_n-z_{n-1}$. То есть для трех последовательных чисел гипотенуз прямоугольных треугольников выполняется эта зависимость. Например, 6 умножить на 29 – (это вторая строка минус 5 первой строки дает 169 – значение гипотенузы третьей строки. Это все таблица 2), причем в очень быстро нарастающей последовательности: 5, 29, 169 при значении где-то в 18-ой позиции уже где-то 15 разрядов чисел.

Найти это число путем анализа или вычислений, даже с помощью вычислительных машин прямым способом по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$ весьма сложно. Найти же то же самое число путем применения рекуррентной взаимосвязи очень просто: восемнадцать тактов – и мы имеем 15-ти разрядное число, соответствующее значению гипотенузы, точно так легко вычисляются значения катетов как x , так и y . То есть при вычислении этих величин нет необходимости находить три числа (раз), связанных между собой, как сумма квадратов чисел, чтобы равнялось квадрату третьего числа (два), а достаточно применить простое рекуррентное соотношение, линейное практически, то есть, без возведения в квадрат и без извлечения корней, находится число по указанной выше рекуррентной формуле $z_{n+1}=6z_n-z_{n-1}$. То есть, очень простая рекуррентная зависимость, и эти числа разыскиваются мгновенно для очень большого числа разрядов в этих числах, потому что быстро нарастающая последовательность.

Таблица 1.

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
5	17	37	65	101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
29	97	205	353	541
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
169	565	1193	2053	3145
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
985	3293	6953	11965	18329
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
5741	19193	40525	69737	106829
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
33461	111865	236197	406457	622645
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
195025	651997	1376657	2369005	3629041
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
4684660	15661496	33068412	56905408	87172484
4684659	15661503	33068435	56905455	87172563
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
27304196	91281912	192736908	331669184	508078740
27304197	91281905	192736885	331669137	508078661
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
159140520	532029948	1123352944	1933109508	2961299640
159140519	532029955	1123352967	1933109555	2961299719
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
927538920	3100897804	6547380848	11266988052	17259719416
927538921	3100897797	6547380825	11266988005	17259719337
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
5406093004	18073356848	38160932052	65668818616	100597016540
5406093003	18073356855	38160932075	65668818663	100597016619
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
31509019100	105339243312	222418211556	382745923832	586322380140
31509019101	105339243305	222418211533	382745923785	586322380061
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
183648021600	613962102996	1296348337192	2230806724188	3417337263984
183648021599	613962103003	1296348337215	2230806724235	3417337264063
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1070379110496	3578433374692	7555671811688	13002094421484	19917701204080
1070379110497	3578433374685	7555671811665	13002094421437	19917701204001
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
6238626641380	20856638145128	44037682532844	75781759804528	116088869960180
6238626641379	20856638145135	44037682532867	75781759804575	116088869960259
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
36361380737780	121561395496104	256670423385468	441688464405872	676615518557316
36361380737781	121561395496097	256670423385445	441688464405825	676615518557237
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 2.

4	12	24	40	60
3	5	7	9	11
5	13	25	41	61
20	48	88	140	204
21	55	105	171	253
29	73	137	221	325
120	304	572	924	1360
119	297	555	893	1311
169	425	797	1285	1889
696	1748	3276	5280	7760
697	1755	3293	5311	7809
985	2477	4645	7489	11009
4060	10212	19152	30880	45396
4059	10205	19135	30849	45347
5741	14437	27073	43649	64165
23660	59496	111568	179876	264420
23661	59503	111585	179907	264469
33461	84145	157793	254405	373981
137904	346792	650324	1048500	1541320
137903	346785	650307	1048469	1541271
195025	490433	919685	1482781	2179721
803760	2021228	3790308	6111000	8983304
803761	2021235	3790325	6111031	8983353
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
4684660	11780604	22091592	35617624	52358700
4684659	11780597	22091575	35617593	52358651
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
27304196	68662368	128759176	207594620	305168700
27304197	68662375	128759193	207594651	305168749
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
159140520	400193632	750463532	1209950220	1778653696
159140519	400193625	750463515	1209950189	1778653647
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
927538920	2332499396	4374021948	7052106576	10366753280
927538921	2332499403	4374021965	7052106607	10366753329
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
5406093004	13594802772	25493668224	41102689360	60421866180
5406093003	13594802765	25493668207	41102689329	60421866131
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
31509019100	79236317208	148587987328	239564029460	352164443604
31509019101	79236317215	148587987345	239564029491	352164443653
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640
183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Что это может характеризовать? Если геометрия природы рассматривается как евклидова геометрия, где числа x , y , z весьма прин-

ципиальны, то значения координат могут быть найдены простым рекуррентным соотношением, что очень редко снижает промежуток времени, необходимый для решения, для нахождения решения, то есть для принятия решения с другой точки зрения. Если говорить о работе нейронных систем, например, то есть нейронные сети могут перерабатывать пифагоровы числа не путем возведения в квадрат и суммирования чисел, а путем нахождения этих чисел рекуррентным способом, то есть значительно быстрее принимать логические решения.

Еще хотелось отметить. Ряды пифагоровых троек имеют по два значения, совпадающих для гипотенузы. Это позволяет рассматривать не только ряды линейного характера, а ряды, формируемые плоскостями числовых последовательностей. Более того, в этой работе показано, что можно не только плоскости числовых последовательностей рассматривать, но можно рассматривать также кубы – т.е. пространства трёхмерные числовых последовательностей. О чём это говорит?

Это говорит о том, что для принятия решений нейронные сети (если такую модель использовать), могут находить числа, соответствующие тем или иным предпосылкам значительно быстрее, причём не только в линейном отношении, но и в отношении плоскостей нейронных сетей, а также пространственных трёхмерных структур нейронных сетей.

Вряд ли кто представляет себе, что такое реальный процесс мышления... Исходя из вышесказанного, будем считать, что процесс мышления связан с переработкой определённых чисел. И если эти числа соответствуют пифагоровым числам, то процесс переработки может быть чрезвычайно ускорен в связи с рекуррентными соотношениями. То есть в этом как раз, и проявляется нейронная структура – в процессе быстрой переработки чисел.

Неевклидовы структуры нашли применение главным образом, для анализа не трёхмерных структур, а четырёхмерных пространственно-временных структур. Т.е. это несколько иная структура уже не евклидова структура. Пифагоровы числа характеризуют евклидовы структуры. Неевклидовы структуры имеют серьезное отличие от евклидовых трёхмерных структур только при чрезвычайно больших скоростях – скоростях, близких к скорости света. Там уже сказываются отличия четырёхмерных пространственных структур от трёхмерных пространственных структур. В обыденной жизни

вполне можно обходиться трёхмерными евклидовыми пространственными представлениями.

Итак, пифагоровы числа в нейросетях дают ускорение переработки информации (на этом можно строить алгоритмы)

Кроме евклидовых пространственных трехмерных представлений, при моделировании работы мозга и нейронных сетей, можно рассматривать трёхмерные псевдоевклидовы пространственные представления индекса два. Причем, математика – т.е. векторная алгебра таких представлений – уже получена. Исследователи исходят из стандартного представления о мозге как объекте евклидовой геометрии (и соответственно о процессах мышления), но в реальности процессы мышления могут быть и неевклидовы (либо – дополнительными к евклидовым).

Литература

1.Коротков А.В Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля.– Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.

2.Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.– 194с.

3.Коротков А.В. Особенности решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах См. также в настоящем издании, стр.

РАЗМЫШЛЕНИЯ ОБ ОБРАЗЕ И ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИИ В ИНФОРМАТИКЕ

Образ можно понимать двояко: как некое обобщение объекта – и тогда это объектно-ориентированная программирование, это объектно-ориентированный подход. И по существу, подход к представлению знаний в информационных системах, когда под знанием понимаются хорошо структурированные данные или данные данных. Но этот путь уже достаточно хорошо проработан, и каких-либо ярких результатов, которые позволяли бы принимать решения на основе образов и т.д. – достичь не удалось.

А если рассматривать образ как некую категорию философско-семиотическую (рассматривать образы как графику – иконическое представление образов или как абстрактные образы – образы максимально высокого порядка), то тогда можно говорить об образности мышления с точки зрения не языка, как такового – естественного языка или псевдоестественного языка – а с т.з. неких ассоциативных восприятий человеком ситуаций и объектов. Эти ассоциативные восприятия порождают, прежде всего, аудиовизуальные картины, с которыми связаны определенные воспоминания, наработанные действия, реакции и т.п. (Здесь следует отметить подход А.Ю.Хренникова [49]).

Отсюда мы можем говорить, что образ – это есть некая ассоциация и это есть часть ассоциативного человеческого мышления. Причем он воспринимается всегда на двух уровнях: как ассоциация долговременной памяти – т.е. структурированная каким-то образом – и как ассоциация, связанная с неким контекстом. Т.е. обязательно с неким контекстом – с окружающей средой обязательно, с ситуацией, которая складывается вокруг объекта и ситуация внутри – гиперситуация – включая сюда и самого человека – с его опытом, с его эвристическими приёмами, наработками и т.д.

Поэтому можно рассматривать образ, как отображение на ассоциативно-нейронной сети совокупности объектов, составляющих ситуацию и совокупности связей между этими объектами – именно объектами как категориями в том же объектно-ориентированном подходе и ряде других подходов.

Чем должна быть описана такая образность? Прежде всего, начнем с человека – а, следовательно, это время, это трёхмерное пространство, и сенсорика: звук, обоняние, осязание. Очевидно, что трёхмерность – восприятие трёхмерного пространства – это видео-ряд в динамике, обязательно в динамике, потому что, как нам представляется, образность проявляется именно как следствие динамического развития ситуации или динамического поведения объекта в этой ситуации (или, по выражению У.Эко – «характерная форма *временного иконического знака* (т.е. движения)» [57, с.204]).

Вот пример: если мы видим из далека движущийся объект, то мы его ассоциируем и создаем образ движущегося объекта. Но, по мере приближения к нему, мы оцениваем его скорость, размеры, ускорение, его трёхмерные характеристики, включая цвет и т.д. – и мы можем сделать вывод, что это: легковой автомобиль, трактор или танк (находим соответствующий фрагмент в сборнике научных статей В.Я. Режабека: «Все это с очевидностью показывает, — добавляет Аквинат, — что мы узнаем нечто прежде смутно и лишь позднее отчетливо» [2, с. 360]).

В другом месте Аквинат замечает: кто увидел дом, еще не различает отчетливо его части. Можно сказать, что «смутное нам более известно, чем отчетливое» [2, с. 358] – См.: [38, с.177-178]).

Нам представляется, что образность – это взаимодействие объекта и человека, и поведение объекта в ситуации в окружающем мире. Как следствие, мы должны оценивать эти вот все характеристики окружающего мира и здесь вот то, что называется семимерность – здесь может быть действительно восприятие его именно в семимерном пространстве. За счет того, что координаты семимерны, человек на уровне образности воспринимает эту семимерную пространственность, т.е. возможно он воспринимает не трёхмерный мир (3D), а семимерный мир (7D) [16; 29; 30] – и неявно воспринимает все эти характеристики, все эти координаты. Поэтому можно попытаться моделировать ситуации и объекты именно в рамках семимерия – и динамику анализировать в рамках семимерного подхода. По части координат можно взять параметры органов чувств человека – вот в этом ключе, потому что это не только пространственное трёхмерие, но это цвет, запах, звук – три координаты – и это время (в семимерном подходе А.В.Короткова: 7D плюс время [29;30]). Но здесь следует всё вышесказанное проанализировать – и

тогда может быть, стоит попробовать промоделировать именно такой ассоциативный ряд.

Причем, его можно иногда сводить к трёхмерию, например, если речь идёт о распознавании текстовой информации. Хотя, тем не менее, оно всё равно ассоциируется с ритмом, движением, скоростью и т.д.

Проблема: распознавание.

Цель: принятие решений. В условиях, скажем, неопределённости; управление объектами и классификация объектов – как первая задача – отнесение их к каким-то категориям, чтобы потом можно было принимать решения. Пожалуй, вот такая задача. Примеры: это динамические объекты, управление боем, это распознавание ситуации на перекрестке, и т.д. *Т.о. – это динамические объекты, распознавание, классификация и принятие решений по управлению.* В этих задачах это весьма и весьма важно. Гибкие автоматизированные производства, которые работают по программе – там этого нет, а в других областях, которые очень динамично изменяются, к коим относятся: социум, политические ситуации, виртуальная реальность и нейрокомпьютинг [4;54].

Сложные сети, такие как Интернет, являются очень большими сложными системами в понимании «большие» и «сверх большие» системы, которые характеризуются неоднородностью, динамичностью, постоянной изменчивостью, т.е. высокой динамикой и, прежде всего сложностью и неоднородностью. Вот в таких вот системах – а это не только компьютерные технологии, но это и социум, это и политические ситуации, это экономика в рамках именно гиперэкономики (под гиперэкономикой следует понимать глобальные экономические тенденции, тренды и их реализации – можно назвать некоторые из них: это ТНК, международные организации, Фонд Рокфеллера, и МВФ, который оказывает влияние на внутреннюю социальную политику и экономику стран-заёмщиков, и их взаимодействие между собой, потому, что они не являются формально координируемыми из одного какого-то центра управления (анализу этой проблематике посвящено множество работ. См. например [17;19;21;37]), но то, что они взаимодействуют между собой и взаимовлияют – это очевидно, и как следствие – эти тенденции очень тяжело проявляются в традиционных финансово-экономических характеристиках и показателях. Финансово-экономические кризисы и обвалы – которые возможно и спрогнозированы и организованы кем-то (дельцами с Уолл-стрита – держателями крупнейшего в мире

бандитского общака – ФРС (финансовой резервной системы USA)) [44;45], но на уровне тех характеристик, которые сейчас оцениваются в биржевой аналитике типа индекса Доу-Джонса и т.д. – они не позволяют составлять реалистичные прогнозы с высокой степенью вероятности, иначе кризисов бы и не было, или они не были бы столь тяжки).

Есть какие-то факторы или характеристики, которые лежат за численными характеристиками – это очевидно – *и это как раз образы*. Это образы, это движения. Это даже такие игры, как шахматы, го и т.д. Т.е. сложные игры с высокой комбинаторикой, с высокой степенью свободы... это также коллективные игры, такие как футбол – достаточно сложная система с т.з. описания. Вот круг задач, в которых это подлежит решению. Но это всё достаточно сыро, потому что очень трудно понять, что же такое образ – потому, что здесь следует провести анализ: что под этим понимается в философии, психологии и буддизме, в котором много говорится об образности, о майи, что наш мир – это только иллюзия, и что такое иллюзия?

В индо-буддийской традиции «**Майя** (санскр. *maia* – «иллюзия», «видимость»)) – особая сила (**шакти**), или энергия, одновременно скрывающая истинную природу мира и помогающая этому миру проявиться во всем своем многообразии» [23, с.496]. (Примерно так же иллюзия трактуется в буддизме [13; 25]).

В психологии психический образ возникает в процессе деятельности, а под деятельностью понимают динамическую систему «взаимодействий субъекта с миром, в процессе которых происходит возникновение и воплощение в объекте психического образа и реализация опосредованных им отношений субъекта в предметной действительности» [31, с.84]. При этом деятельность, согласно С.Л. Рубинштейну, исходит из тех или иных мотивов и направляется на определенную цель, разрешая ту или задачу и выражает определенное отношение человека к окружающему, вбирая в себя, таким образом, всю работу сознания и всю полноту непосредственного переживания [31].

В психологии – точнее в когнитивной психологии – проблема образа и недискурсивного мышления – т.е. мышления образами – к настоящему времени достаточно хорошо разработаны (образное мышление в психологии зачастую противопоставляется понятийному: недискурсивное – дискурсивному) [43]. А это позволило ис-

пользовать когнитивистские наработки в когнитивном моделировании [7;28].

Как отмечает В.Я.Режабек: «Особый вклад в разработку теории зрительного восприятия принадлежит Дж. Гибсону и М. Вартофскому.

Согласно Дж. Гибсону, мир отбрасывает свое отображение в мозг, и это отображение служит сырьем, предназначенным для критической оценки, просеивания, упорядочивания и хранения информации. Зрительное восприятие начинается с рассмотрения света. Информация, собираемая зрением, состоит из пространственных и временных световых структур. Реальные объекты задаются перцептивной системе (не обязательно зрительной) посредством света, звуковых волн, химических веществ, теплового излучения или гравитационных полей, энергетические импульсы которых проецируются на органы чувств, будучи переносчиками информации, переносчиками ее паттернов. Дж. Гибсон подчеркивает: «Извлечение информации — процесс активный и непрерывный, т. е. он никогда не прерывается и не прекращается. Море энергии, в ней мы живем, течет и изменяется без явных пауз. Даже мельчайшие доли энергии, которые воздействуют на рецепторы глаз, ушей, носа, языка, кожи представляют собой не последовательность, а поток» [12]. И в другом месте: «Информация, содержащаяся в свете и задающая нечто, не похожа и не должна быть похожа на то, что она задает. Она не копирует задаваемый объект, не является чем-то подобным ему, она даже не является его точной проекцией. В свете, который попадает в глаз наблюдателя, ничто не копируется — ни форма объекта, ни его поверхность, ни вещество, ни его цвет, ни тем более его движение. Однако все это в свете задано» [12].

Культурно-исторический взгляд отличает подход к перцептивным моделям у М. Вартофского. По М. Вартофскому, зрительное восприятие — это не простой результат каузального внешнего стимула, или ответ на этот стимул. Это переработанный ответ, настроенный на определенную цель. В своем генезисе восприятие непосредственно присоединено к практическому взаимодействию с внешним миром, свойства и структуры которого трансформированы всеми формами человеческой деятельности. М. Вартофский подчеркивал, что в качестве системного отклика сама природа сенсорного события включает совокупность положений тела, условий и множество «фи-

зико-химических свойств ткани, мускулов, лимфы, крови, энзимов и т.д.» [11].

Воспринимает, указывал М. Вартофский, не тот или иной орган, а весь организм посредством того или иного органа. Восприятие — это не созерцание, т. е. не пассивное получение входных сигналов. Восприятие — это социальная, а не просто биологическая или нейрофизиологическая деятельность. Происходящие в рамках восприятия процессы антиципации, ознакомления, поиска сходства, формирования установки; селективность и концентрация восприятия; его связи с потребностями, намерениями и чувствами, с когнитивными и теоретическими структурами — «все это говорит о неразрывном единстве восприятия со всей совокупностью тех социальных и индивидуальных отношений, в которых оно функционирует и которые оно выражает» [10]. В другом месте Вартофский пишет, что каждый акт ощущения, не говоря уже о воображении или мышлении, связан с историей вида — *homo sapiens*. «...Ощущение, которое я имею, мысль, которую я думаю, желание, которое я испытываю, действие, которое я выполняю, — все это сплавлено с моей личной биографией, историей моего вида, моими социальными и историческими прошлым, настоящим и будущим» (11, с.217).

Через 30 с лишком лет такая постановка вопроса стала разрабатываться отечественной философской мыслью. В программной статье Е. Князевой и А. Турובה «Познающее тело. Новые подходы в эпистемологии» внимание философского (и культурного) сообщества в нашей стране привлекается к тому обстоятельству, что нельзя понять работу человеческого ума, когнитивные функции человеческого интеллекта, если ум абстрагирован от организма, его телесности, эволюционно обусловленных способностей восприятия посредством органов чувств (глаз, ушей, носа, языка, рук), от организма, включенного в особую ситуацию, экологическое окружение. «То, что познается и как познается, зависит от строения тела и его конкретных функциональных особенностей, способностей восприятия и движения в пространстве» [27], — утверждают отечественные авторы» (Цит. по: [38, с.189-190]). Это перекликается с высказыванием В.И. Вернадского о неевклидовом характере пространства живого вещества биосферы, впоследствии получившей развитие в ныне забытой работе С.В.Петухова «Высшие симметрии, преобразования и инварианты в биологических объектах» [27а, с.260-273].

В философии *образ* определяется (в «Философской энциклопедии») как: ОБРАЗ – 1) В специальном (филос.) смысле О. – одно из осн. понятий теории познания, характеризующее результат отражательной (познавательной) деятельности субъекта. 2) В широком смысле (в науч. обиходе) термин "О." употребляется: а) по отношению к видам чувств. отображения (ощущениям, восприятиям и представлениям), не распространяясь на абстрактное мышление, в) как синоним терминов "копия", "отображение", "содержание отражения", "сведение", "сообщение", "знание", а также "информация" в широком смысле слова (см., напр., Н. Винер, Кибернетика и общество, М., 1958, с. 31); 3) В математике О. – матем. объект, рассматриваемый как результат преобразования др. матем. объекта, к-рый для первого служит прообразом. Напр., функции мн. переменных в матем. анализе можно рассматривать как О. геометрич. объектов (прообразов) n -мерного пространства (см. *Пространство* в математике).

В материалистич. гносеологии понятие О. является фундаментальной категорией; оно употребляется по отношению к видам чувственного отражения и абстрактного мышления и рассматривается как сложное единство объективного и субъективного. О. объективен по своему источнику — отражаемому объекту, и субъективен по способу (форме) своего существования. Важнейшей характеристикой субъективной формы является идеальный характер О. (см. об этом в ст. *Кибернетика*) . В указанной статье читаем: «...для высокоорганизованных живых систем содержание сигналов, т.е. информация, выступает в качестве идеального образа. В образе нет ни грана вещества; образ — это не субстанциональное свойство; оно возникает в результате замещения воздействующего объекта его материальным впечатком в отражательном аппарате, т.е. как изоморфный (или гомоморфный) представитель, или модель объекта» [51, с.111].

«**Образ мысленный** – формат перцептивной мысленной репрезентации когнитивной информации об объектах и событиях, отсутствующих в поле восприятия» [50, с.594]. Философия позволяет формировать образы себя и мира и абстрактные образы: счастья, свободы, времени и т.д.

Но самое главное – философия позволяет переосмыслить образ, в частности в нашем случае – позволяет сделать переход от философии непосредственно к информатике. В данном случае «образ

обладает рядом свойств, которые и обеспечивают более высокую концентрацию вероятности $p(x, y)$ по сравнению с понятием» [14, с.188], поскольку включает в себя важнейшие свойства: определенность, ассимиляцию, целостность, конкретность и лаконизм [14, с.188-190], а также, поскольку, как отмечает С.И.Валянский, "в процессе взаимодействия между различными системами происходит обмен информацией, то естественно передается и воспринимается не вся информация, содержащаяся в каком-либо объекте, а лишь некоторая её часть, считающаяся ценной. Назовем эту часть «образом полной информации» или сокращенно просто «**образом**»" [8, с.37]. (Т.о. здесь просматривается разница между естественным интеллектом, который отбирает, сортирует и запоминает информацию не всю подряд – как это присуще искусственному интеллекту – а по степени её ценности, выборочно, либо сворачивая её до метафор: «Всё есть число», «Всё есть атомы и пустота» – либо образов – абстрактных или визуальных, иконических. Вспоминаются и высказывания об образе отдельных философов. Так, например, Фома Аквинский утверждал: *Nihil potest homo intellegere sine phantasmata* (человек ничего не может понять без образов). Это повторяет и Джордано Бруно: «Мыслить – значит размышлять в образах». И сама собой всплывает теория образов А.Бергсона [5;6]. Далее, в хронологическом порядке, следовало бы проследить развитие философской мысли об образе до наших дней [3;9;18;24;40]).

(Здесь следует привести верное замечание К.Майнцера: «В наши дни большинство используемых в ИИ философских теорий не извлекаются непосредственно из соответствующей литературы, но это не делает их менее интересными с философской точки зрения. Тем не менее ряд авторов известных экспертных систем испытали непосредственное влияние философов» [33, с.235]).

Здесь следует провести анализ. Надо будет попробовать как-то это всё реализовывать. Нейронные сети как достаточно гибкая структура – самообучающаяся многослойная ассоциативная – надо подумать, что же на вход туда подавать? Может быть, им подавать множество векторов, описывающих какую-то ситуацию... многомерных векторов – и может быть, именно семимерных векторов. В отношении распознавания и прогнозов в частности, экономических, но, может, быть, динамику какую-то посмотреть... Например – компьютерные игры: их эволюцию, с одной стороны, эволюцию поведения персонажей – т.е. игры-стрелялки – имитация управления

боем – одна из задач, которая сейчас достаточно актуальна – распознавание объекта [28;55], определение в динамике – т.е. что это: танк, БТР, БМП (как пишет А.Д.Урсул: «В живой природе аналог осмыслению – опознавание объектов, а именно над проблемой опознавания объектов (образов) работает современная техническая мысль. Опознавание выступает как отождествление и различение образа и объекта, как их соответствие или несовпадение. Ясно, что без опознавания (узнавания) объектов невозможно существование живых существ. Опознавание является основой возникновения прагматических свойств информации (в логическом аспекте, – в действительности они взаимосвязаны)» [48,с.120]).

В любом случае здесь имеет место связанная с информацией и распознаванием образов теория отражения, довольно хорошо разработанная отечественными исследователями [18;46]. Напомним, что в этом случае фигурируют: среда взаимодействия/линия связи (передачи информации), объект познания в качестве источника сообщения, субъект познания (либо его элемент) в качестве адресата, помехи, а также кодирующее и декодирующее устройства [48,с.98]. По линии связи передаются знаки (в данном случае, в целях упрощения, считаем, что нет ни знаков, ни кодирующего-декодирующего устройств).

«В этом случае информация передается от объекта познания к субъекту и формирует в последнем образ – отражение объекта. Образ в этом случае детерминирован объектом, между ними существует причинно-следственное отношение (здесь речь идет в основном о чувственной ступени познания, например, об ощущениях и восприятиях.

Что является содержанием образа (отражения)? С одной стороны, это содержание обусловлено наличием субъекта, ибо отражение происходит именно в нем, а с другой стороны – отражения не было бы, если бы не было объекта познания, и содержание объекта оказывается первичным в отражательном процессе (является источником информации). Решение антиномии «содержание образа находится в образе и в то же время вне его» решается на пути выявления инварианта, т. е. того общего, сохраняющегося, что присуще и образу и объекту. Очевидно, что одним из таких инвариантов является информация, переданная от объекта к субъекту, она присуща и образу, и объекту, а не только тому и другому в отдельности. Поэтому содержанием отражения является информация (а не сам объект по-

знания и не тело мозга человека), хотя мы не можем сказать, что информация исчерпывает все содержание отражения. Вывод о том, что информация является содержанием (а более осторожно – существенной частью, стороной этого содержания) отражения является исходным пунктом для дальнейших рассуждений, когда схема познания усложняется введением кодирующих и декодирующих устройств, воспроизводящих и аннулирующих знаки», – пишет А.Д.Урсул [48,с.98].

Или распознавание ситуации, определение вероятности возможности продвижения и действий – и соответственно, включение каких-то программ противодействия. Этим НАТОВцы-западноевропейцы занимаются уже лет десять. Но у них ничего хорошего из этого не получилось, а проблема здесь вот в чем: может быть – это ещё один вариант или направление развития: вся проблема роботов и систем распознавания – *это отсутствие глаза* (вспоминается кем-то давно сказанное, что глаз – это участок мозга, вынесенный на поверхность головы). По сути дела в компьютерных программах реальная трёхмерность пространства не воспроизводится никоим образом! **Всё дело – в отсутствии воспроизводимой трёхмерности.** *Проблема всех искусственных систем, роботизированных, прежде всего систем, в отсутствии нормального трёхмерного человеческого зрения.* Попытки технически воспроизвести трёхмерность результата не дают (надежды возлагаются на нанотехнологии в электронике: с их помощью появится возможность создать человеческий глаз 1:1 [32;47], К.Майнцер возлагает надежды на развитие перспективной технологии клеточной нейронной сети (КНС) [33], а Ю.И.Неймарк – на многомерную геометрию [34]).

(Или, как технически формулирует проблему С.М.Соколов: это «проблемы комплексирования средств аппаратной поддержки и разработки математического обеспечения систем машинного видения – *систем технического зрения* (СТЗ) [42, с.37]). См. также: [20;33;34;36;41;42;53;54;55].

Трёхмерный мир воспринимается трёхмерным человеческим глазом (как соразмерное-соразмерным), что нашло отражение в чертежах. На чертежах трёхмерный объект, например шар, куб, параллелепипед – либо ещё какой объект – изображается в трёх проекциях: вид спереди, вид сбоку, вид сверху. По крайней мере, три двухмерных объекта формируют один трёхмерный объект. Это используется везде в начертательной геометрии, перешло в компью-

терную геометрию на компьютерах, т.е. все программы, такие как: Компас 3D, T-FLEX CAD 3D, например, в трёхмерном изображении формируют объект по трём проекциям. **Три проекции двумерных составляют один трёхмерный объект.** Семимерный объект очень труден для восприятия человеком, потому что мозг приспособлен более для обработки малого количества информации, поэтому достаточно трёх координат.

Но если бы речь шла об уточнении трёхмерных объектов, то есть рассматривался бы семимерный объект, то мозг человека может быть заменён электронно-вычислительной машиной (ЭВМ) – компьютером. Как компьютер формирует семимерные объекты? Семимерный объект, как показано в математике А.В.Короткова [29;30], представляется семью трёхмерными объектами. Семь трёхмерных проекций объектов формируют один семимерный объект. Т.е. 21 двумерный чертёж в плоскости даст представление о семимерном объекте (данный подход близок к подходу Ю.И.Неймарка [34]). Вот подход: подход компьютерный, а не умозрительный. Умозрительно ни человек, ни органы чувств человека не приспособлены для исследования более чем трёхмерных объектов. Но, тем не менее, специальная теория относительности, общепризнанная, четырёхмерна. Человек её осознать не может, но использует.

Но вот что касается компьютерного распознавания объектов... распознавания визуальных образов компьютером... не получается, потому, что нет ничего подобного глазу...

Вопрос можно сформулировать так: *как можно из семимерия получить (сформировать, построить, собрать) трёхмерный объект (глаз)?*

Семимерный глаз можно построить, используя семь координат, а трёхмерный – как частный случай: пренебрегаем четырьмя координатами, и вместо семи трёхмерных структур типа определителя три на три остаётся один. Один определитель третьего порядка определяет трёхмерный объект в части векторного произведения двух векторов. Всё! Трёхмерный объект есть! Математически. А, следовательно, и компьютерно. [В дополнение следует добавить, что разработаны тренажеры быстрого транспортных средств: катеров, вертолетов и самолетов с дополнительным измерением – «скоростью». Под скоростью пони-

мается изменение положения сидения под проходящем обучением человеком-пилотом имитируемого транспортного средства]».

Стереоскопия не становится трёхмерностью с т.з. человека. Все эти перцептроны, нейроны и т.д. — технически не позволяют реализовать трёхмерность человеческого глаза (заметим в скобках: в цветном телевидении трёхмерность реализована посредством применения трёх лучей. Кроме того, «телевизионное изображение пример того, как дискретные элементы материи создают образы непрерывной виртуальной реальности. Телевизионное изображение может отобразить любую имитационную картину реальности в динамическом режиме — хотя оно и создается статической конструкцией люминофорных ячеек образующих экран телевизионной трубки и лучами с движущимися одноподобными элементарными частицами» [22, с.242]). Попытки искусственно воссоздать такие системы ничего хорошего на деле не дали и ни к чему не привели (в глубине резкости, глубине восприятия). Отсюда можно сделать вывод, что динамика трёхмерности воспринимается всё-таки более многомерно, чем сама трёхмерность. Возможно, что это воспринимается вначале на уровне образа, а потом транслируется в некий язык, т. е. структурирует, а мы этот промежуточный этап пропускаем — просто пропускаем и как следствие пытаемся сразу перевести на какой-то структурированный язык сразу же, т.е. непосредственное восприятие внешнего мира — в язык. *А промежуточный этап образности и совокупность его, т.е. существование языка образного мышления игнорируется.* Можно ли его назвать именно языком? С т.з. семантики, синтаксиса, словаря и т.д.? Возможно. Но что это такое? Т.е. какие там элементы языка, какой алфавит, какие правила построения? Они нам не очень известны.

Может, быть, стоит, подумать о представлении на уровне образов, понимая под этим ассоциативные восприятия, связанные с какими-то действиями, а затем перевод их в более формальный язык, скажем формализованный какой-то язык — и здесь посмотреть на трёхмерность и на семимерность. Всё-таки восприятие, как нам представляется, не трёхмерно. Даже в чисто физическом плане. Иначе когда бы мы смотрели стереокино или кинофильмы в 3D версии, то мы бы в нём как бы жили... (На этот счёт стоит привести отличный пример Р.О. ди Бартини: «...На плоском экране события даны в (2+1) — мерном отображении. Математическое описание событий на языке (2+1) — мерной формалистики связано с непре-

одолимыми трудностями. Перемещение в третьем, мнимом для $(2+1)$ – мерного мира пространственном измерении неадекватно выражены проективным преобразованием углов и отрезков, метрика этих преобразований не однозначно определяет сохранение или изменение размеров приближающихся или удаляющихся предметов. Тем не менее, глядя на экран с некоторого расстояния под не очень острым углом, нам нетрудно перекодировать её информацию на язык наших $(3+1)$ – мерных представлений [39,с.130]).

Но мы ведь в нём не живем... не воспринимаем как реальность... что нам мешает? Следует посмотреть: либо всё-таки мы каким-то образом воспринимаем семимерие с т.з. физических координат, которые нам даны на подсознательном уровне, либо в качестве координат выступают такие параметры, как обоняние, осязание, цвет, динамика. И тогда мы это всё вместе начинаем воспринимать как некую реальность (о чём и идёт речь в вышеуказанной статье Е.Князевой и А.Туробова [27], внимание к которой привлекает Е.Я.Режабек [38]).

Проведенное выше рассуждение о возможной реализации образа на многомерной математической базе (семимерной парадигме А.В.Короткова) – можно применить и в альтернативном подходе [26;35] как в пределах марковской, так и немарковской парадигм [1;56].

Литература

1.Азроянц Э.А., Харитонов А.С., Шелепин Л.А. Немарковские процессы как новая парадигма//Вопросы философии. 1999. №7. – (с.94-104).

2.Аквинский Ф. Комментарий к «Физике» Аристотеля//Философия природы в античности и в средние века. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – 608с.

3.Арлычев А.Н. Сознание: информационно-деятельностный подход.– М.: КомКнига, 2005. –136с.

4. Антонова О.А., Соловьев С.В. Теория и практика виртуальной реальности: логико-философский анализ. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. Ун-та, 2008. – 168с.

5.Бергсон А. Опыт о непосредственных данных сознания// Бергсон А. Собр. Соч. в 4-тт. Т.1.– М.: Московский клуб, 1992.

6.Бергсон А. Материя и память// Бергсон А. Собр. Соч. в 4-тт. Т.1.– М.: Московский клуб, 1992.

7. Валькман Ю.Р. Категории «образ» и «модель» в когнитивных процессах// Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS' 03) и «Интеллектуальные САПР» (CAD' 03). Научное издание. – М.: Физматлит, 2003. Т.2. – (с.318-323).

8.Валянский С.И. Хронотроника и эволюция социальных систем. – М.: «АИРО-XXI», 2006. – 76с.

9.Визуальный образ (Междисциплинарные исследования)/Рос. Акад. Наук, Ин-т философии; Отв. Ред. И.А.Герасимова.– М.: ИФРАН, 2008. – 247с.

10.Вартофский М. Модели. Репрезентация и научное понимание/Пер. сангл. Общая ред. и послесл. И.Б.Новика и В.Н.Садовского.– М.: Прогресс, 1988. – 507с.

11.Вартофский М. К критическому материализму//Современная прогрессивная философская и социологическая мысль в США: Сборник пер. с англ./[Предисл. Д.Сомервилла]; Общ. ред. д-ров филос. наук В.В.Мшвениерадзе, А.Г.Мысливченко; Посл. д-ра филос. наук В.В.Мшвениерадзе. – М.: «Прогресс», 1977.

12.Гибсон Дж. Экологический подход к зрительному восприятию.– М., 1988.

13.Говинда А. Психология раннего буддизма. Основы тибетского мистицизма. – СПб, 1993.

14. Голицын Г.А. Образ как концентратор информации//Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве.– М.: Прогресс-Традиция, 2002. – 496с. – (с.183-190).

15.Грегори Р.Л. Разумный глаз: Как мы узнаём то, что нам не дано в ощущениях. Пер. с англ. Изд.4-е. – М.: Едиториал УРСС, 2010.– 240с., цв. вкл.

16. Гуревич Д.В. Догма трехмерности.– СПб.: Издат. Дом «ПапиРус», 2007. –108 с.

17. Делягин М.Г. Мировой кризис: Общая теория глобализации: Курс лекций.– 3-е изд., пераб. и доп.– М.: ИНФРА-М, 2003. – 768с.

18.Евин И.А. Синергетика сознания.– М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.– 128с.

19.Егишянц С.А. Тупики глобализации: Торжество прогресса или игры сатанистов? – М.: «ВЕЧЕ», 2004. – 448с.

20.Закревский А.Д. Логика распознавания. Изд.2-е, доп.– М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144с.

21. Зиновьев А.А. Запад. – М.: ЗАО Изд-во Центрополиграф, 2000. – 509с.

22. Иванов М.Г. Антигравитационные двигатели «летающих тарелок»: Теория гравитации. Изд. 3-е, испр. и доп.– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.– 440с.

23. Индийская философия: Энциклопедия/Отв.ред. М.Т.Степанянц; Ин-т философии РАН.– М.: Вост.лит.; Академический Проект; Гаудемаус, 2009.– 950с.

24. Капитонова Т.А. Нейросетевое моделирование в распознавании образов: философско-методические аспекты. – Минск: Белорус. Наука, 2009. –131с.

25. Касевич В.Б. Буддизм. Картина мира. Язык.– 2-е изд.– СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. – 282с.

26. Клименко А.В. Основы естественного интеллекта. Рекуррентная теория самоорганизации. Версия 3.– Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1994.– 304с.

27. Князева Е., Туробов А. Познающее тело. Новые подходы в эпистемологии//Новый мир. 2002. №11. – (с.136-154); 27а. Система.Симметрия.Гармония/ Под ред В.С.Тюхтина, Ю.А.Урманцева.– М.: Мысль, 1988.– 315, [2] с.

28. Колодина Н. И. Когнитивное моделирование структурированности мыслительного процесса и построение образа// Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS' 03) и «Интеллектуальные САПР» (CAD' 03). Научное издание. – М.: Физматлит, 2003. Т.2. – (с.294-309).

29. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля.– Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.

30. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидоваго и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194с.; Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидоваго и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. – 266с.

31. Краткий психологический словарь/Сост. Л.А.Карпенко; Под общ. Ред. А.В.Петровского, М.Г.Ярошевского.– М.: Политиздат, 1985.

32. Крылов С.М. Неокибернетика: Алгоритмы, математика эволюции и технологии будущего.— М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 288с.
33. Майнцер К. Сложносистемное мышление: Материя, разум, человечество. Новый синтез. Пер. с англ./Под ред. и с предисл. Г.Г.Малинецкого.— М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 464с.
34. Неймарк Ю.И. Многомерная геометрия и распознавание образов//Соросовский образовательный журнал. 1996. №7. — (с.119-123).
35. Поликарпов В.С., Курейчик В.М., Поликарпова Е.В., Курейчик В.В. Философские проблемы искусственного интеллекта. — М.: Физматлит, 2008. —266с.
36. Психология машинного зрения/под ред. П.Уинстона.пер. с англ.— М.: Издательство «Мир», 1978. — 344с.
37. Рамоне И. Геополитика хаоса/Пер. с франц.И.А.Егорова. — М.: ТЕИС, 2001. — 128с.
38. Режабек Е.Я. В поисках рациональности (статьи разных лет): научное издание.— М.: Академический проект, 2007. —383с.
39. Роберт Орос ди Бартини — советский авиаконструктор, физик-теоретик, философ. Статьи по физике и философии/Составитель А.Н.Маслов.— М.: «Самообразование», 2009. — 224с.
40. Розин В.М. Визуальная культура и восприятие: Как человек видит и понимает мир. Изд. 4-е, доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 272с.
41. Сойфер В.А. Компьютерная обработка изображений//Вестник РАН.2001.т.71.32.— (с.19-129).
- 42.Соколов С.М. Проблемы машинного видения в робототехнике и автоматизации производства//Робототехника, прогноз, программирование/Под ред.Г.Г.Малинецкого; Предисл. Ю.П.Попова и Г.Г.Малинецкого. — М.: Издательство ЛКИ, 2008.— 208с.
43. Солсо Р. Когнитивная психология.— 6-е изд.— СПб.: Питер, 2006. — 589с.
44. Стариков Н. Кризис: Как это делается.— СПб.: Питер, 2009. — 304с.
45. Стикс Г. Наука о пузырях и крахах//В мире науки. 2009.№10.— (с.38-45).
- 46.Тюхтин В.С. Теория отражения в свете современной науки.— М., 1971.

47. Уразаев В.Г. ТРИЗ в электронике. – М.: Техносфера, 2006. – 320с.
48. Урсул А.Д. Информация. – М.: Издательство «Наука», 1971. – 295с.
49. Хренников А.Ю. Моделирование процессов мышления в радиических системах координат. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296с.
50. Философия. Энциклопедический словарь / Под ред. А.А.Ивина. – М.: Гардарики, 2004. – 1072 с.
51. Философская Энциклопедия: Кибернетика. Т.2. «Дизъюнкция-Комическое». – М.: Издательство «Советская энциклопедия», 1962. – 575с.
52. Философская Энциклопедия: Образ. Т. 4. «Наука логики – Сигети». – М.: Издательство «Советская энциклопедия», 1967. – 591с. – (с.111).
53. Черри К. Человек и информация (критика и обзор)/Пер. с англ. В.И.Кули и В.Я.Фридмана. – М.: Издательство «Связь», 1972. – 368с.
54. Шапиро Д.И. Виртуальная реальность и проблемы нейрокомпьютинга. – М.: РФК Имидж Лаб, 2008. – 454с. с ил.
55. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение/Пер. С англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 752с., 8с. ил.
56. Шелепин Л.А. Становление новой парадигмы//Философия науки. – Вып. 7. Формирование современной естественнонаучной парадигмы. – М., 2001. – 270с.
57. Эко У. Отсутствующая структура. Введение в семиологию/Перев. с итал. В.Г.Резник и А.Г. Погоняйло. – СПб.: «Симпозиум», 2004. – 544с.

СУММАТОР НА НЕБУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ (НА КЛАССЕ ВЫЧЕТОВ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЮ ДВА)

Модель нейрона используется в понятии суммирования логических сигналов. В булевой алгебре суммирование логических сигналов обеспечивается наличием единицы на выходе сумматора, если хотя бы по одному входу действует единичный уровень. Либо – по любым комбинациям входа – единичные уровни. И только отсутствие единиц на всех входах обеспечивает наличие низкого уровня на выходе – нуль. Это – в булевой алгебре.

В алгебре логики, которая строится на классе вычетов чисел по модулю два, совсем иная ситуация. Суммирование сигналов – двух сигналов на входе даёт высокий уровень на выходе в том случае, если совпадают значения входных сигналов на входе. Т.е. либо обе единицы, либо оба нули. Тогда будет единица на выходе. А если не совпадают значения нуль и один на входе по двум каналам, то на выходе будет нуль [4].

Вот существенная разница алгебр логики из классов вычетов по модулю два по сравнению с алгеброй логики Буля. Т.е. элементы суммирования обеспечивают нам совсем другую функцию на выходе как функцию входных сигналов. Элементы умножения одни и те же. Т.е. алгебра логики задачу умножения выполняет одинаковым образом: это одни и те же процедуры и одни и те же функции обеспечиваются на выходе. Есть отличие в элементах суммирования сигналов. Но это ведёт за собой отличие в уровнях сигналов на выходе логических устройств вообще.

Т.о. вот чем отличаются алгебры логики Буля от алгебры логики на классе вычетов по модулю два. Это касается любых логических устройств: как нейронных, так и не нейронных — любые логические устройства будут строиться аналогично. Т.е. отличие будет в элементах суммирования; везде, где есть знак, сумма – будет другая функция, выполняемая этими элементами.

Т.е. процесс проектирования логических устройств и построения на них, к примеру, нейронных структур, будет несколько иным. (Эти устройства будут иметь несколько входов; и не только нейронных, но и вообще логических). Поскольку в данном случае речь у нас идёт о нейронных элементах и сетях как о частном случае логи-

ческих устройств. Это целое направление, но по отношению к алгебре логики — частный случай. Нейронные структуры — это логические сети. Частный случай логических сетей общего класса. Нейрон просто напросто использует алгебру логики и поэтому является логической структурой [5]. Остальные элементы все те же самые. Элемент И — тот же самый, а вот элемент ИЛИ будет выполнять совсем другую операцию, совсем другие преобразования входных сигналов в выходной сигнал. Т.о. будут различаться структуры.

В литературе есть соответствующие описания [1], а также авторские свидетельства на технические устройства [2; 3].

Литература

1. Евстигнев В.Г. S-ичный сумматор. — Электронная техника. Сер. 10, 1986, вып. 5(59). — (с.17–19).
2. Евстигнеев В.Г. S-ичный сумматор. Авт. свид. №1273925.
3. Евстигнеев В.Г., Евстигнеева О.В. Устройство для сложения n -разрядных чисел в избыточной системе счисления. Авт. свид №. 1188731.
4. Коротков А.В. Многомерные алгебры полей сравнений по $\text{mod}=2$ //См.настоящее издание, с.46-52.
5. Оссовский С. Нейронные сети для обработки информации. — М.: «Финансы и статистика», 2004. — 344с., ил.

**О ПРИМЕНЕНИИ В КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ
СИСТЕМАХ МНОГОЗНАЧНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ
БУЛЕВЫХ И НЕБУЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛОГИКИ
И ПИФАГОРОВЫХ ЧИСЕЛ**

Ответить на вопрос о защите информации можно следующим образом: тот, кто использует полный набор кодов, имеет превосходство над теми, которые не знают этих кодов (речь идет о шифрах с открытым ключом [1;6]). Это уже защита информации, то есть, кто владеет определенными знаниями, тот владеет и защитой этих знаний (информации). Либо если кому-то станут доступны эти знания, тот раскрывает чужой секрет. Криптография используется сотни лет и имеет множество наработок [1; 5; 6;7; 8; 9].

Что ещё можно использовать для защиты информации? Защита информации может быть реализована не только на булевой алгебре логики, но и на самых различных алгебрах логики (многозначных и многомерных булевых и небулевых) – в частности, в алгебре вычетов по модулю два [2].

В алгебре логики вычетов по модулю два – что и каким образом можно было бы сделать?

В алгебре вычетов по модулю два используется другая операция сложения, нежели в булевой алгебре. Т.е. совсем другой способ получения результата для тех же операторов и результат будет отличаться от алгебры булевой [2]. Т.е. если человек работает в алгебре вычетов по модулю два, то он работает с отличными результатами, нежели в булевой алгебре логики.

Использование множества различных операций позволяет лучше защитить информацию. Например, если известен конкретный результат, то его можно защитить, путем применения к нему какой-нибудь процедуры, – например, сложения или умножения – присовокупляется какое-нибудь число (всё это давно и хорошо описано в литературе. См. [1; 9]).

Т.е результат будет совершенно иным, нежели тот, который имеется в используемой алгебре. Корреспонденту от этого числа следует отнять известное ему число. Тем самым получится предыдущий результат. Так вот, это один из простейших и хорошо извест-

ных способов защиты информации, т.е. путем искажения результата вычислений определенное, однозначно известное только двум корреспондентам число (метод искажения кода), — получается результат совсем иной [1; 9]. Т.о. в алгебре вычетов по модулю два [2] можно в частности, использовать эту процедуру [1; 2; 9].

Проблемы криптографии актуальны не только в булевой алгебре логики, но и в многозначных алгебрах логики, а также и в алгебре логики вычетов по модулю два. Те же самые криптографические процедуры будут защищать информацию путём, как уже было сказано выше, искажения кодов [9]. Если брать проблему более широко, то например, в криптографии зачастую используются простые числа [1; 5]. Но это уже не в алгебрах логики.

Произведение двух больших чисел простого характера дает уже составное число значительно большей разрядности. Если разрядность достаточно высока, то разложить это число на два составных числа очень тяжело. Например, если сто разрядные числа в десятичной системе исчисления разложить на два пятидесяти разрядных числа, результатом которых является их произведение — очень сложно. Причём, чем больше разрядность, тем сложность всё более возрастает. Например, разрядность двести — это два сто разрядных числа. Такие числа получить очень сложно. Для этого придется задействовать основные вычислительные ресурсы мира, работающие непрерывно в течении года. Т.о. целый год информация будет надёжно обеспечена защитой. Это — очень полезный инструмент для защиты информации и он широко используется в криптографической практике. Т.е. многоразрядные простые числа представляют собой существенный интерес для криптографии.

На стр. 29 работы А.В.Короткова «Элементы классификации пифагоровых чисел» [4] показано, что пифагоровы числа, касаясь гипотенуз прямоугольного треугольника, зачастую просты.

Таблица 7.

Z_1	
1	1
5	5
29	29
165	13^2
985	$5 \cdot 197$
5741	5741
33461	33461
195021	$5^2 \cdot 29 \cdot 265$
113668	$137 \cdot 829$
662510	$37 \cdot 17905$
3861396	$5 \cdot 13^2 \cdot 4569$
22505868	$229 \cdot 98278$
131173812	$29 \cdot 1549 \cdot 29201$
764537004	$5 \cdot 53 \cdot 197 \cdot 146445$
4456048214	4456048214
25971752284	$61 \cdot 1301 \cdot 3272601$
151374465494	$5 \cdot 52734529 \cdot 5741$
882275040682	$13^2 \cdot 29 \cdot 180019392$
5142275778591	$593 \cdot 1101341 \cdot 7873$
29971379630901	$5 \cdot 389 \cdot 4605197 \cdot 33461$
174686002006841	174686002006841
101814463241013	$890220016097 \cdot 1143$
593418179245399	$5^2 \cdot 29 \cdot 197 \cdot 269 \cdot 238321 \cdot 6481$
3458694612231381	919621008304013761
20158749494142890	$13^2 \cdot 293 \cdot 407107649779$
117493802352625960	$5 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 20468307053 \cdot 829$
684804064621612874	684804064621612874
3991330585377051287	$29 \cdot 109 \cdot 120159269 \cdot 5741 \cdot 18304$
23263179447640694845	$5 \cdot 37 \cdot 53535197 \cdot 1311797 \cdot 17905$
135587746100467117807	135587746100467117807

Причем, в ряду относительно коротком, таких простых чисел очень много. В частности, в табл. 7 простыми числами являются числа: 5, 29, 5741, 33461. Число 44560482149 — так же простое число. Наконец число, которое является всего лишь тридцатым числом в ряду, является тоже простым числом:

13558774610046711780701. Т.е. таких чисел очень много в прямоугольных треугольниках относительно гипотенуз прямоугольных треугольников. Т.о. это можно использовать для поиска простых чисел большой разрядности, что является очень сложной задачей. Поиск больших чисел большой разрядности в данном случае, если взять не тридцатое, а трёхсотое значение гипотенуз прямоугольных треугольников в ряду с определенной разностью — модулем разности двух катетов, то очень быстро можно получать числа большой разрядности, причем простые. Это весьма существенно для криптографии, поскольку как было отмечено выше, поиск простых чисел большой разрядности является актуальной задачей криптографии, криптографических систем. Вот что собственно можно использовать из теории пифагоровых чисел в криптографических системах. Это очень важный результат.

Выше уже было сказано, что в алгебре логики вычетов по модулю два наложение двух кодов меняет код числа. И если наложение хотя бы одного из них неизвестно никому, то это весьма эффективная защита информации, прежде всего, актуальной (секретной) информации.

Вторым важным моментом для криптографических систем с поиском простых чисел больших разрядностей являются, как было уже сказано в статье А.В.Короткова [3] «совершенные числа». Совершенные числа тоже разыскиваются достаточно быстро, потому что там ряд чересстрочный, а совершенных чисел очень мало. Можно даже сказать, что совершенные числа столь же редки, как и совершенные люди.

Совершенные числа в значительной части своей так же являются простыми числами и это является очень важным результатом. Причем с совершенными простыми числами связано и новое простое число также большой разрядности. Произведение двух таких чисел даёт двойную квадратичную зависимость по разрядности результата. Т.е. даёт уже не простое число, а составное из двух простых чисел большой разрядности. Это — криптографическая задача, причем нам не попадался результат по поиску второго числа большой разрядности, связанный с простыми совершенными числами. А он есть [3].

Литература

1. Земор Ж. Курс криптографии. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006.– 256с.
2. Коротков А.В. Алгебра одномерных полей сравнений по $\text{mod}=2$ //Коллективная монография «Многозначные и многомерные булевы и не булевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и в криптографических системах». – Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011.– См. настоящее издание, стр. .
3. Коротков А.В. К вопросу классификации натурального ряда чисел//Проблемы экономики, науки и образования в сервисе-08: сб. научн. трудов/Под ред.В.С.Чуракова. – Новочеркасск: Издательство «НОК», 2009.– 181с.– (с.83-86).
4. Коротков А.В. Элементы классификации пифагоровых чисел. – Новочеркасск: Набла, 2009. – 73с.
- 5.Крэндэлл Р., Померанс К. Простые числа: Криптографические и вычислительные аспекты. Пер. с англ./Под ред. и с предисл. В.Н.Чубрикова.– М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 664с.
6. Молдовян Н.А., Молдовян А.А. Введение в криптосистемы с открытым ключом. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
7. Сингх С. Книга шифров: тайная история шифров и их расшифровки/Пер. с англ. А.Галыгина.– М.: Мир энциклопедий Анита+, Астрель, 2009. – 464с.
8. Хоффман Л.Дж. Современные методы защиты информации. – М.: Советское радио, 1980.
9. Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. Изд. 3, перераб. и доп. – М.: Издательство «НАУКА», 1973. – 511с.

ЧУРАКОВ В.С

БЕСЕДА С А.В.КОРОТКОВЫМ О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ И ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИМЕНЕНИИ СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ МНОГОРАЗРЯДНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ ЧИСЛА И АЛГЕБРЫ

– Анатолий Васильевич, Вы можете сказать: что такое многоразрядные числа? Дать определение?

– Многоразрядные?..

– Да. Многоразрядные числа. Дать им определение. Что считать многоразрядными числами?

Ну, если говорить о строгом определении, то строгого определения я не давал... В принципе, конечно, надо обоснованно давать каждое определение. Я боюсь быть неточным, но, по крайней мере, **следует не путать понятия многомерных, многопозиционных и многоразрядных чисел.** Например, если число представляется в позиционной системе исчисления любой двоичной, десятичной, восьмеричной – какой угодно – позиционной и число больше основания системы, например, двоичное число в двоичной системе представлено как число десять. Само число больше, чем основание. То в этом случае не удаётся в одном разряде представить значение числа. Значение числа в одном разряде можно представить только от нуля до основания. В данном случае от нуля до двух, вернее – до единицы включительно. Ноль – один. Тогда число два представляется как два в первой степени, а число один как два в нулевой степени.

Число ноль составляет основу двоичной системы счисления. Число десять в одном разряде уже не представишь. Но можно ввести несколько разрядов числа. Например, в первой позиции в первом разряде будет число значением от нуля до единицы умноженное на два в нулевой степени, во втором разряде – значения нуля либо единицы, умноженное на два в первой степени, в третьем – на два во второй степени, и т.д. Т.е. число например, «три» в двоичной системе исчисления представляется уже как один – один, число два –

как один-нуль и никак иначе в двоичной системе. А для числа «десять» уже потребуется один- нуль- один – нуль, т.е. четыре разряда. Т.о. разрядность системы связана с тем, что выбирается основанием системы, но оно всегда конкретно, а числа могут быть очень большими, значительно большими, чем основание системы. Поэтому число приходится представлять многоразрядным. Это то, что относится к разрядности. Но можно найти обоснование названия разрядности. Это в принципе, известные вещи. Двоичная система исчисления уж куда более как известна. Булева, в частности, алгебра. **Это в отношении разрядности.**

В отношении размерности. Многомерные числа, одномерные числа –здесь следует исходить из того факта, что пространство измерений может быть различным. Если это пространство физическое, то это может быть точка на линии (она определяется одним числом, действительным числом в данном случае которое может принимать значения от минус бесконечности до плюс бесконечности, т.е. в одном значении размерности стоит одно действительное число, потому что кроме действительных, есть и другие числа). Если мы хотим задать положение точки на плоскости физического пространства, то это потребует введения дополнительной размерности. На линейке уже точку в пространстве как плоскость не определишь (точку можно указать только на линии).

Для точки на плоскости уже потребуются два значения действительных чисел. Одно значение будет относиться к размерности X , а другое – к размерности Y .

Это не обязательно физические величины. Это могут быть информационные числа, самые различные числа в системах, которые возникают (с объектом одновременно могут быть связаны несколько чисел). Размерность может быть, вообще говоря, произвольной. N -мерные евклидовы пространства, к примеру. Они могут быть произвольной размерности. Линейные векторные пространства, которые алгебраически относятся к евклидовым пространствам – имеют любую произвольную размерность вплоть до бесконечномерных. В многомерных системах чисел осуществляется связь между значениями чисел, лежащих на разных числовых осях (простейший случай: на осях X и Y). На каждой оси указывается по одному числу. А с этими двумя числами связаны уже числа, характеризующие функцию, взаимосвязь этих чисел. Например, размерности могут быть не только одномерные, двумерные комплексные

числа, дуальные и двойные в том числе. Кватернионы четырехмерные числа, трёхмерные векторные алгебры, октанионные восьмимерные числа, семимерные векторные алгебры, и т.д. Т.е. размерности связаны в данном случае с выделением координат для каждого числа (координатных осей) и указанием чисел, определяющих точку. В семимерном пространстве будет семь действительных величин, определяющих точку. Т.е. точку определяет значение n координаты в n -мерной системе координат (или в пространственной системе). **Это то, что касается размерности. Многомерности.**

Т.е. с разрядностью и многомерностью в данном случае всё более или менее понятно. **Есть ещё многопозиционность. N-позиционные системы.** Это определение я нигде не встречал, хотя такие числа и применяются. Представим себе поток чисел на бирже. На фондовой бирже участвуют в данном процессе несколько компаний. Пронумеруем их. Присвоим им номера от первого до n -го номера включительно (пусть это будут известные компании: «Лукойл», «Газпром» и т.д.). Т.е. каждой компании выделяется своя позиция. Поскольку компаний много, то будет n -позиций, соответствующих n -компаниям.

Эти числа не связаны между собой реально, вернее напрямую, непосредственно (косвенным образом они между собою увязаны, но прямо, непосредственно, они никак между собою не связаны). Например, цена на нефть на бирже на данный момент времени характеризует определенное значение стоимости акций «Газпрома», «Лукойла» и всех прочих нефтяных компаний. Но эта цена может быть выражена в действительных числах – каких-нибудь фондовых единицах (индексах). Это действительные значения рубля, доллара, йены, евро и т.д. (в переведенной недавно работе двух иностранных авторов, посвященной эконофизике – Монтенья Росарио Н. и Стенли Г. Юджин «Введение в эконофизику: Корреляции и сложность в финансах» – предлагается использовать в экономической науке ряд разделов из статистической физики, а под многомерными пространствами у них фигурируют акции компаний (см. с. 136): если, к примеру, у вас есть акции шести компаний, то $n = 6$ – т.е. пространство шестимерно).

Как производится обработка информации? Производится она в текущий момент времени и реально позволяет знать значения всех величин. Обновление информации осуществляется очень часто, чуть ли не ежесекундно. Т.е. все данные, которые были получены в

течение этой секунды (предыдущей секунды), по купле-продаже акций, должны быть внесены в распечатки, оценено состояние биржи (биржевой индекс – Доу- Джонс, например), состояние каждой компании, стоимость каждой компании, стоимость акций, предлагаемых к покупке или к продаже. Т.е. одновременно по всем n -позициям производится однотипная обработка информации (обработка данных). Это могут быть параллельные вычисления, но в реальном времени необходимо осуществлять очень быстрое изменение информационных процессов. **Это первый момент. Это то, что касается многопозиционных действительных чисел.**

Но они, как правило, влекут за собой всякого рода определения таких же позиций, таких же названий и чисел действительных, вернее сказать – действительные числа здесь частный случай. Например, n -позиционная система действительных чисел включает композиционные системы целых чисел. Т.е. многие процессы описываются не действительными числами, а целыми числами. Например, вот даже когда рассматриваются пифагоровы числа, то каждый треугольник оценивается несколькими целыми числами. При целочисленном решении уравнения Пифагора. И эти числа необязательно однопозиционные. Потому, что связь однопозиционных систем между собой определяет многопозиционную систему. Кроме целых чисел, могут быть рассмотрены поля рациональных чисел – и точно также, иррациональных чисел. **Надо сказать, что размерность этих названных чисел равна единице. Т.е. это – одномерные числа.** Затем можно найти такие же определения p -адических систем (см. работы А.Ю.Хренникова), систем сравнения нахождения вычетов по модулю, по целому модулю, и т.д. Т.о. намечается целая цепочка одномерных чисел, которые могут быть использованы в многопозиционных системах.

Надо отметить, что в многопозиционных системах могут быть не только одномерные числа (выше они были уже перечислены, но была пропущена булева алгебра. Булева алгебра тоже однопозиционная одномерная система). Дело в том, что в каждой позиции, могут рассматриваться не только одномерные числа, но и многомерные числа. Например, каждая позиция заполняется комплексными числами, а они уже – двумерные. Т.е. однопозиционная двумерная система комплексных чисел. Или кватернионных, октанионных, или векторных алгебр. Например, трёхмерных векторных алгебр. Так, если мы собираемся отслеживать одновременно поведение де-

сяти самолетов, находящихся в воздухе, вблизи друг друга, то мы должны в реальном масштабе времени контролировать положение каждого из десяти самолётов, а эти положения – трёхмерные, то получается что тут надо указывать многомерные числа (трёхмерные) – это первое определение сюда уже входит и кроме трёхмерности, многопозиционность, т.е. десять самолётов. Т.о. идёт поток информации о положении десяти самолётов в одном и том же пространстве, а само пространство трёхмерное. Я не готов ответить чисто математическим языком, указать, что такое многоразрядность, многомерность, либо многопозиционность. Но то, что эти классы чисел выделяются в самостоятельные группы, это определено.

–А многоразрядные алгебры? С ними как?

Это, пожалуй, было несколько неточно названо мною. Когда я ещё не задумывался о многопозиционных системах, назвал их многоразрядными. *Это ошибочно.* В частности, шёл разговор о многоразрядных булевых алгебрах. Вернее и лучше было бы говорить о **многопозиционных булевых алгебрах**. Т.е. разрядность булевой алгебры – мы знаем – двоичная система. Разрядность – набор позиций двоичных чисел с различным весом... а **многоразрядная булева алгебра – это всё-таки ошибочное название...** зря я назвал многоразрядным ... *следует говорить о многопозиционности.* Но в то время до многопозиционности дело ещё не дошло. И только когда была сделана попытка объединить все различные системы счисления в классы систем счисления, то тут уже появилось понятие многопозиционности.

По крайней мере, говоря о многоразрядной булевой алгебре или алгебре не булевого типа, не стоило бы говорить о многоразрядности/многомерности. А в принципе булева алгебра точно также обрабатывает потоки информации не только в действительных числах (например: многопозиционных действительных чисел), но и в булевом варианте, т.е. обработка осуществляется собственно двоичных чисел. Либо, если уж говорить о дискретных алгебрах, то это опять-таки не обязательно булевы алгебры, не обязательно, чтобы у этих алгебр было основание «два». Основание может быть не только «два», основание может быть «три». В частности, почему я разделил/выделил в отдельные группы многопозиционные числа?.. N-позиционные числа, в частности, булевы алгебры (предположим

даже, что это – одномерная булева алгебра, она обладает определенными свойствами, а именно: она обладает свойствами по сложению-умножению двух величин, а также шестнадцати определяемых ими функций). Операция сложения в булевой алгебре приводит к тому, что значение единица плюс единица даёт единицу. А это не всегда желаемо. Например, числа по модулю два содержат операцию сложения единица плюс единица равняется нуль. Т.е. булева алгебра логически не вытекает из алгебры по модулю два, а вот алгебра по модулю два вытекает из алгебр сравнений по модулю m , где m – произвольное число. Т.е. сразу осуществляется операция сложения не только для чисел по модулю два, но и чисел по модулю три, по модулю четыре, пять, шесть и вообще m . Причем эта операция вытекает автоматически.

А почему не применяют многоуровневые системы чисел, а применяют двух уровневые значения чисел? Прежде всего, по той причине, что построенные логические устройства чётко разделяют положения нуль и положение единицы. А в многопозиционных алгебрах необязательно это значение равно двум. Есть и трёх уровневые алгебры, и многоуровневые. Так, во второй половине XX века проводились эксперименты такого рода: ферриты пытались намагничивать по десяти уровням. Нашли устройство, определяющее три четкие позиции. Например, реле, включённое вправо – единица, влево – минус единица, промежуточная позиция – это – нуль... Трёхпозиционные системы есть, но они не применяются потому, что нет соответствующих алгебр. Потому, что три переменных с тремя состояниями имеют множество функций. Две переменные с тремя состояниями и то уже дают девять функций. Две переменные с двумя состояниями дают шестнадцать функций... А с тремя состояниями – это уже надо использовать перемножение ... (см.: Коротков А.В. Многозначные алгебры логики // Информационные системы и технологии. Теория и практика: сб. научн. Тр./Под ред. Н.А.Березы. – Шахты: Издательство ЮРГУЭС, 2008. – 188с. – с. 22.). Так вот, в статье «Многозначные алгебры логики» на с.18, автоматически заполнены значения операций сложения-умножения для алгебр вычетов по модулю два, по модулю три, и по модулю четыре. Моментально заполняются все эти таблицы для алгебр двухзначных – нуль и один, но и трёхзначных: нуль, один и минус один, а также четырёхзначных, пяти и шести...

То же самое в булевом варианте осуществить очень сложно. Но до определённого значения, куда мы можем дойти... Алгебры сравнений вытекают из алгебр действительных чисел. Т.е. как только определена алгебра действительных чисел, то сразу определяется алгебра сравнения, а булевы варианты алгебр таким свойством не обладают... они ни откуда не вытекают – нет алгебры действительных чисел, которая бы при перемножении двух единиц давала бы единицу... и при сложении двух единиц давала бы единицу... Сложение двух единиц в алгебре действительных чисел даёт двойку, т.е. выходит за рамки двух уровневых систем. А в отношении функций – для двух переменных шестнадцати функций, а вот табл.9 уже относится к алгебрам трёхуровневым и таких значений переменных m . Очень много. Табл. 9: две переменные a и b с четырьмя состояниями образуют шестнадцать комбинаций состояний независимых от них четыре в шестнадцатой степени функций. А с тремя состояниями две переменные образуют три в квадрате состояний девять комбинаций состояний, не зависящих от них три в девятой степени – т.е. 19683 функции. Это не булева алгебра, где всего лишь 16 функций. А это 19683 функций. Вот третий уровень.

Почему до сих пор задействованы двухуровневые алгебры логики?.. Почему до сих пор нет реальных выходов на трёхуровневые алгебры логики?.. Не потому, что нет технических средств – они, в общем-то есть, но нет алгебр логики. Нет вот этой самой таблицы. Для сложения и для умножения соответственно. Вот как только эти таблицы заполнятся (табл. 3 и табл.4), для трёх уровневых алгебр на с.17, так сразу можно будет начинать работать с трёхпозиционными алгебрами. Но это не простая задача. Это повторяю, не шестнадцать простых булевых функций. Это в отношении трёхуровневой алгебры.

–А многоразрядные одномерные числа?

Многоразрядные одномерные числа представляются точно так же, как и многоразрядные двумерные числа. Только многоразрядные булевы алгебры либо алгебры по модулю два. Число определяется основанием системы счисления и значением числа. Если число больше основания системы исчисления, то одного разряда недостаточно для указания любого значения числа. Поэтому приходится применять многоразрядные двух позиционные числа. Лучше сказать

–двухуровневые числа, т.е. нуль и один. В действительных числах основание системы счисления может быть тоже в принципе различным: девять, десять, сто двадцать девять – никто не запрещает менять основания системы счисления. Можно менять. Но как выяснилось, наиболее удобное основание для человеческого восприятия, да и машиной тоже (т.е. форма представления для электронно-вычислительных машин) – равно десяти. Т.е. десятичная система исчисления, в которой числа представляются от нуля до девяти в этой системе занимают одну позицию. Один разряд. А если нам надо представлять число, к примеру, девятнадцать, то мы не сможем в одном разряде десятичной системы поместить или назвать это число. Поэтому число девятнадцать представляется уже двумя разрядами. Первый разряд как десять в нулевой степени, умноженное на число и это число от нуля до девяти. В данном случае это число девять, а второе число десять в первой степени. Это уже второй разряд и в данном случае для девятнадцати он равен единице. Т.е. число девятнадцать записывается в двух разрядах десятичной системы.

А если бы мы применили 32-ичную систему? В этом случае, число девятнадцать мы писали бы в одном разряде, и другие числа включительно до числа тридцать один тоже бы там поместили. Вычислительные машины способны работать не в двоичной системе, и даже не в десятичной. Когда речь идёт о больших числах, об очень больших числах, то возникает необходимость сокращения длины числа. И это приводит к необходимости изменения основания системы счисления. Так, к примеру, была система с основанием пятьсот двенадцать. (А можно и значительно большее число положить в основание системы счисления). Т. е. там число пятьсот одиннадцать будет записано как значение пятьсот одиннадцать. По основанию системы 512-и. А вот число пятьсот одиннадцать, записанное в двоичной системе, требует не один разряд, а восемь разрядов, по крайней мере. Можно посчитать, как число пятьсот одиннадцать будет выглядеть в двоичной системе...

Удобно это? Для больших чисел – нет. Приходится делать очень большой разрядности вычислительные машины. А это неудобно. Потому что вычислительная техника в основном сейчас пока 32 разрядная и ей на замену идёт 64 разрядная. Если только это не машина какого-то сверхважного назначения. Там уж воленс-ноленс идут на увеличение числа разрядов. **Т.е. это то, что касается разрядности действительных чисел.** Здесь следовало бы заметить,

что указать действительное число в одном разряде, т.е. значение от нуля до девяти – мы можем в одном разряде. Но любое число, которое больше, чем число десять, к примеру, требует двух разрядов. А число сто уже трёх разрядов. Сто. Один- ноль – ноль. А число миллион – это уже шесть разрядов или семь разрядов. Т.е. разрядность числа – это не выдумка, это реальная жизненная необходимость: указать значения основания системы счисления и указать значения числа в каждом разряде по этому основанию. Основание раньше было девять, на Руси использовалось основание девять всего лишь тысячу лет назад.

Но через арабов была введена арабская система счисления (которая вообще-то арабская по названию, а по происхождению – индийская) – десятичная как наиболее удобная. А вот, например, в музыке используется основание двенадцать как наиболее целесообразное. Семь основных нот и пять дополнительных. В одной октаве. Число двенадцать имеет очень важное значение (Это действительно так: у многих народов в древности счет шел на дюжины – т.е. в основании была двенадцатиричная система счисления. Двенадцать – число сакральной арифметики: это двенадцать знаков Зодиака, двенадцать апостолов Христа, двенадцать месяцев, двенадцать часов дня и ночи, двенадцать врат Небесного Града, двенадцать плодов на Космическом Древе, двенадцать функциональных клавиш на компьютере – и т.д.).

Как выяснилось в физике, исследуя разного рода колебания, записывая различные графики изучаемых процессов, исследователи пришли к выводу, что наиболее удобно и чаще всего человеком воспринимается двенадцать частот. Я в одной из работ ссылался на эту статью. Число двенадцать имеет большое число делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Если взять число десять, то тут число делителей: 1, 2, 5, 10. Т.е. четыре делителя, а в двенадцатиричной системе – шесть делителей. Это для малого числа. А для чисел, кратных двенадцати, очень резко повышается значение числа делителей. *А число делителей определяет гармоника в системе.* Т.е. частоты, кратные данной частоте. Например, мы нажимаем клавишу, и там с частотой десять кГц (кГц) – одно число делителей получается и возбуждаются струны музыкального инструмента, определённое число струн, но если число двенадцать, то большее число струн будет возбуждаться, звуки будут генерироваться более разнообразные (и соответственно, восприниматься они будут как более мягкие и красивые).

Т.е. число двенадцать очень важное и имеет важное практическое значение не только в музыке, но в том числе и для космических объектов, в частности планетных систем. В МГУ занимаются данной проблематикой (исследовательская группа С.Э.Шноля) – и выявили, что число двенадцать наиболее удобно для целей естественных систем.

Т.е. основание системы счисления может быть вообще выбрано произвольно. Но есть обоснование целесообразности выбора того или иного основания системы. Основание, равное двум – это очень важное основание: оно используется в современных вычислительных машинах. Основание десять тоже очень важное, но, как выясняется, есть системы счисления не хуже: это системы с основанием двенадцать, или с основаниями очень большими, к примеру, двести пятьдесят шесть. Но это только в том случае, если есть производственная необходимость.

– В своё время Вами, Анатолий Васильевич, были опубликованы две работы по многомерным алгебрам логики: по многомерной булевой алгебре, и по многомерной алгебре небулевой, алгебре вычетов по модулю два — алгебре логики многомерной.

Ну здесь я вынужден несколько повториться... Повторить многое из вышесказанного, но уже в отношении заданного вопроса... вариации на заданную тему, короче говоря... ну и в дополнение к данной теме...

Представляется интересным результат по многомерным алгебрам. В этих алгебрах после внимательного анализа, пожалуй, следовало бы говорить *не о многомерности, а о многоразрядности*. Но это — несовпадающие понятия (у них и значения разные): многоразрядным числом мы могли бы называть число, например целое число, связанное с телефонными кодами. Т.е. *телефонный номер характеризует многозначное число*. Таких чисел может быть сколько угодно много даже при ограниченной разрядности. Это касается целых чисел. Но это не касается алгебр.

Многоразрядные алгебры могут обеспечивать выполнение алгебраических операций, например операций сложения и умножения в каждом разряде – в каждом разряде независимо друг от друга. Т.е. можно было бы обеспечивать операции сложения и умножения в

каждом разряде независимо друг от друга для многоразрядных целочисленных алгебр. Можно пойти дальше: строится цепь чисел, подобно телефонным номерам, но не из целых чисел, а из действительных чисел. Т.е. она включает в себя не только целые числа, причём положительные числа, но и целые отрицательные числа, числа рациональные и числа иррациональные, любые действительные числа. Конечно, пока ещё довольно трудно себе представить, где можно использовать такие алгебры, но то, что они найдут применение со временем в определённых областях, это однозначно.

Т.е. многоразрядная алгебра действительных чисел представляет собой многоразрядное число, вернее многоразрядную цепочку действительных чисел: пять, шесть, семь, миллион – какого угодно числа разрядов. Причём в каждом разряде выполняются свои операции умножения и сложения. Т.е. получается, что можно построить не только известную одноразрядную алгебру действительных чисел, всеми нами признаваемую, но и можно строить по аналогии многоразрядные алгебры действительных чисел.

Если идти дальше, то можно строить многоразрядные алгебры целых чисел, т.е. с целыми числами в каждом из разрядов алгебр с операциями умножения и сложения – результат будет целочисленным. *Т.о. это уже не алгебра над полями действительных чисел, а алгебра над кольцами целых чисел.*

Очередным шагом будет алгебра вычетов по модулю N , но не одноразрядная, как принято, а многоразрядная алгебра по модулю N . Т.е. результат алгебраических операций свёртывается по конкретному модулю в каждом из разрядов многоразрядного числа. Следующей ступенькой, если ограничить себя модулем два, то получается многоразрядная алгебра вычетов по модулю два небулевого типа. Это уже алгебра логики. Если изменить операцию сложения в этой алгебре, то это будет многоразрядная алгебра логики булевого характера, т.е. появляется цепочка многоразрядных алгебраических систем действительных чисел многоразрядных, целых чисел, вычетов по модулю, вычетов по модулю два, булевых алгебр логики многоразрядных.

Поэтому, видимо принятое мною обозначение многомерных алгебр логики вычетов по модулю два либо булевой алгебры логики, не очень удачно, лучше было бы говорить о многоразрядных. Но это несовпадающие значения. Дело в том, что в многоразрядной алгебре нужно ограничивать результаты операций в каждом разряде только

над числами этого разряда. Это характеризуется прямой суммой в прямом произведении величин. Т.е. частным случаем получения многоразрядного числа многомерностей многоразрядных чисел. Поэтому не стоило бы путать понятие многоразрядного числа и многомерного числа. В многоразрядном числе в каждом разряде действуют операнды, связанные только с этим разрядом. Например, шестым разрядом многомерного пятнадцати разрядного числа такое пятнадцати разрядное число уже другое и будет давать результат в пятом разряде, связанным с двумя числами пятого разряда и только ими.

В многомерных числах, видимо стоит ограничиться числами, в которых результаты операций связаны не с одним и тем же разрядом, даже простейшее комплексное число следовало бы считать двухмерным числом — не двух разрядным, а двухмерным. Потому что, хотя операция сложения выполняется также, как и в многоразрядном числе, операция умножения выполняется иначе. Например, для двух чисел $a_1 a_2$ и $b_1 b_2$ двух комплексных чисел результат операций произведения двух чисел даёт: a_1 на b_1 минус $a_2 b_2$. Т.о. задействованы числа, как первого разряда, так и второго разряда. *Т.е. в многомерных числах задействованы числа различных разрядов.* Точно так же и для второго разряда: $a_1 b_2 + b_1 a_2$. Т.е. задействованы числа, как из первого, так и из второго разряда. Поэтому комплексные числа стоит относить к многоразрядным числам, вернее к многомерным числам. В данном случае к двухмерным числам.

Аналогичным образом получаются многомерными четырехмерные кватернионы, восьмимерные октанионы, трёхмерные векторные алгебры, семимерные векторные алгебры. Всё это одноразрядные многомерные числа. Двухмерные, четырёх-, восьмимерные, трёх-, семимерные — но одноразрядные. Поэтому, если проводить аналогию с телефонными номерами, то многомерные алгебры следовало бы назвать многоразрядными. Т.е. можно получить цепочку комплексных чисел произвольной разрядности, естественно, что двухмерных, и считать это многоразрядным комплексным числом.

Насколько я понимаю, такая задача в математике ещё не ставилась и не изучалась. Но, в этом случае, можно было бы анализировать результаты взаимодействия комплексных чисел не только в одном разряде, а одновременно в большом числе разрядов. Что это может дать? Вот один из возможных аспектов использования таких чисел: для простоты одномерных многоразрядных тех же действительных чисел, т.е. первые из рассмотренных чисел — это перечень,

например, табличных значений — предположим, стоимости акций различных предприятий. Если под первым предприятием поставить завод «Гидропривод», а под вторым банк «Сбербанк», под третьим предприятием ещё что-то, и т.д., то появляется цепочка действительных чисел — как телефонный код, только не целых чисел, а действительных чисел. Текущие результаты будут всё время меняться, т.е. все эти цепочки действительных чисел дают непрерывную цепь изменений, вернее сказать — динамику этих цепочек — и в результате получается набор действительных чисел, как для завода «Гидропривод», так и для «Сбербанка», так и для остальных предприятий. Полагаю, что это может дать такие же полезные результаты, в частности, в экономике. Хотя экономика — это сугубо частный случай.

Я считаю, что следует разделить *понятия многоразрядности и многомерности: чётко их определить и с многоразрядными числами связать числа действительные, целые, числа вычетов по модулю, числа — алгебры логики по модулю два, булевы алгебры логики — это в одномерном многоразрядном варианте, а многомерном многоразрядном варианте будут фигурировать: алгебры комплексных чисел, двойных, дуальных (например, алгебры кватернионов, псевдокватернионов, алгебры октанионов и псевдооктанионов), многомерные трёхмерные в многоразрядном варианте — трёхмерные векторные алгебры, т.е. многоразрядные трёхмерные векторные алгебры, многоразрядные семимерные векторные алгебры, вообще — многоразрядные алгебры произвольного типа.*

Т.е. принятие многоразрядности может дать новые свойства чисел и их практических приложений, в частности, в экономике. Хотя можно рассматривать многоразрядные одномерные числа, это, например температура, давление. Температура меняется непрерывно в различных точках. Если брать географические пункты для Москвы, Ростова-на-Дону, Калининграда, Омска и Томска то это — многоразрядность, но одномерная, — потому что температура характеризуется одним числом. Точно так же по давлению воздуха, например, ну и т.д. Прикладных применений может быть множество.

– Анатолий Васильевич, а как получить семимерные объекты?

Изучение таких разделов знания, как математические основы кибернетики, алгебры логики, теория класса, теория множеств, затем — топология базируется на булевой алгебре. Но эти чрезвычайно важные разделы знания могут иметь альтернативный вариант по сравнению с булевым вариантом. На варианте булевой алгебры построены все эти разделы наук. Появление небулевой алгебры даёт совершенно новый способ определения этих разделов знания. Это связано с изменением процедуры логического сложения т.е. логического объединения в конечном счёте.

В моей работе «Элементы семимерного векторного исчисления» это определяется так: берётся область значения (логического сложения), равного единице (внутри, а за пределами равного нулю) — одной переменной и второй переменной — имеется область значения, внутри которой имеется значение единицы, а за её пределами равная нулю.

Логическое сложение даёт следующее: как и логическое объединение, единица в результате логического сложения определяет область, полностью заполняющую область «один» и область «два». В том числе, область объединения «один» и «два»: пересечение.

А в небулевом варианте — область пересечения выбрасывается из рассмотрения и результаты сложения в этой области равны нулю, а не единице. Вот отличие. Т.е. получается ущербный диск типа как солнечное затмение Луной: диск Солнца или Луны меняется, накрываясь тенью.

По крайней мере, процедуры — логическое сложение и логическое объединение видоизменяются, и все результаты вышеперечисленных наук тоже будут изменяться, будут другими. Это очень важно для перечисленных областей знания. В том числе и для нейрокибернетики, нейроинформатики, нейроматематики и когнитологии в целом. А также алгебры логики, математических основ кибернетики — всё меняется.

–Но всё-таки как, каким образом получаются семимерные объекты?

Для этого следует использовать семимерную векторную алгебру.

Семимерная векторная алгебра определяет операции сложения и умножения, в том числе умножения не просто на скаляр, а умножение двух векторных величин. Векторное произведение двух векторов.

Векторное произведение двух векторов в семимерном варианте определяется формулой, приведенной на с.17 моей монографии «Элементы семимерного векторного исчисления» за 1996 год. Даже простой взгляд на эту формулу позволяет сделать вывод о том, что векторное произведение двух векторов определяется суммой семи однотипных в математическом отношении – определителей третьего порядка. Вот: первый, второй, третий, четвёртый, пятый, шестой, седьмой – семь определителей третьего порядка. А сам определитель третьего порядка является векторным произведением двух трёхмерных векторов. И в результате даёт значение, например, ротор вектора – трёхмерного векторного поля вихреобразного.

Вот эта как раз схема и позволяет говорить, что семимерное пространство может рассматриваться как совокупность семи трёхмерных векторных пространств. В теории поля это означает, что семимерное векторное поле может рассматриваться как совокупность семи трёхмерных векторных полей. Вот и всё в отношении векторного произведения двух векторов – абсолютно всё. Необходимо помнить, что в семимерном варианте кроме векторного произведения двух векторов есть векторные произведения трёх векторов. Там же на с. 20, 21, 22 – векторное произведение четырёх векторов.

Векторное произведение четырёх, пяти, шести векторов — это дополнительные функции как аналоги построения полей из комбинации более сложных конфигураций векторов, но уже не двух векторов, а трёх, четырёх, пяти, шести. Но даже если рассмотреть векторное произведение трёх векторов на с.22, то векторное произведение трёх векторов так же определяется совокупностью семи однотипных определителей четвёртого порядка. Т.е. векторное поле, составленное из совокупности трёх семимерных векторных полей, распадается на совокупность семи полей, определяемых определителем четвёртого порядка. Но в трёхмерном варианте совокупность четырёх векторов разлагается по трём векторам, так что векторное произведение трёх векторов — семимерных векторов — при рассмотрении трёхмерных векторов, т.е. когда четыре любые координаты полагаются равными нулю, то уже определяется нулём (обращается в нуль).

Т.е. векторное произведение трёх векторов в трёхмерном случае равно нулю, а в семимерном случае — это достаточно сложная функция семи определителей четырёх векторов. Точно так для определителей четвёртого, пятого, шестого порядка. Четвёртый порядок рассмотрен в частности, на с. 27, результаты для пяти векторов на с. 34, для шести векторов векторное произведение определяется на с. 49 и уже не распадается на сумму семи определителей, а определяется одним определителем седьмого порядка. Векторное произведение шести векторов, как и векторное произведение двух векторов в трёхмерном пространстве является определителем третьего порядка, так и в случае векторного произведения шести векторов в семимерном пространстве оно определяется одним определителем седьмого порядка.

Это — всё новые функции: в трёхмерии они обращаются в нуль. В трёхмерии — это простейший случай: частный случай семимерных преобразований. Это функции, с которыми связаны законы сохранения векторных величин — точно так, как и с векторным произведением двух векторов в трёхмерном пространстве связан момент импульса. Так и здесь: это новые векторные функции, которые в трёхмерии не имеют места, обращаются в нуль, а в семимерии во все не нули — это новые законы сохранения векторных величин. Уже не момента импульса, а более сложных векторных функций.

– В отношении закрытой тематики: можно ли применить к боевым разработкам?

Я инженер-электрик, кандидат технических наук — в отличие от кандидатов и докторов физико-математических наук, учёных-физиков — мне пришлось в институте (НПИ–Новочеркасском политехническом институте) досконально изучать трёхмерное векторное исчисление в координатной записи, а не в тензорном виде и не в обобщённом виде, а в координатном виде, — с тем, чтобы подставлять числа в соответствующие координаты векторов и получать результаты опять-таки в виде чисел, а не в виде каких-нибудь математических символов другого типа, но только в виде чисел. Конечно, мне пришлось работать в ОКТБ «Старт» и «Орбита».

А эти ОКТБ были организациями закрытого типа. Приходилось заниматься техническими науками и только ними на работе — и технической проблематикой соответственно. Это было в те време-

на...в советское время, короче, когда каждый занимался своим делом... «Поразительные успехи» т.н. суверенной/суеверной/ сувенирной демократии» в кошмарном сне никому не могли бы присниться... Напомню наиболее значимые из них за последнее время: путинские ракеты не летают (из тринадцати запусков семь или восемь неудачных, а путинские шпионы не шпионят [Чем они вообще занимались в USA? Закладывали логические бомбы в критические точки инфраструктуры USA? Нет, для этой простой работы у этих «тёщинных сынков» ума нет. Следовательно, это стадо орангутангов находилось в USA на откорме]. Раз так, то можно было бы отдать производство ракет товарищам китайцам на аутсорсинг — напомню, что они преуспели в производстве одноразовых вещей, коими являются и ракеты... Шпионаж тоже можно отдать им на аутсорсинг... Впрочем, разведка дело тонкое: то, чем занимались шпионы, которые не шпионы и примкнувшая к ним милка-сексапилка, с успехом и гораздо эффективнее занимается небезызвестный Андрей Масалович. И называется это «корпоративная разведка»).

В частности, моя кандидатская диссертация была посвящена техническим вопросам. В открытом варианте она называлась бы примерно так: «Исследования и разработка системы управления быстродействующими электромагнитными механизмами бортовых систем».

Борт — понятие растяжимое... (Борт это: самолёт, ракета, подлодка, космический корабль, космический спутник... Борт — это автономная управляемая система, иначе говоря). Алгебрами тут не пахнет. Применяется только трёхмерная векторная алгебра. И только она могла быть задействована.

1975 году я представлял к защите кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Ведущей организацией мне был назначен научно-исследовательский институт приборостроения в г. Москве. Я сделал доклад по диссертационной работе в этом институте, и по окончании доклада начальник одного из отделов института Семён Абрамович Франштейн задал вопрос: „Анатолий Васильевич, не могли бы Вы объяснить такое явление: общепризнано, что трёхмерное векторное исчисление дало теорию гироскопических систем, и эта теория говорит о том, что с повышением скорости вращения гироскопов увеличивается точность сохранения положения оси гироскопа. Однако наши инжене-

ры столкнулись с такой проблемой: когда скорость гироскопа оказалась чрезвычайно большой, то стали появляться дополнительные ошибки, непонятно откуда возникающие и из теории не следующие. Гироскоп с большой скоростью оказался менее точен по сохранению положения оси, нежели гироскопы с низкими скоростями“.

Этот вопрос заставил меня задуматься о том, чем могли быть вызваны дополнительные ошибки...

И я пришел к выводу, что дополнительные ошибки могут быть связаны с более высокими производными от радиуса вектора по времени, начиная не только от скорости и ускорения, то есть первой и второй производной, но и третьей производной, четвёртой и т.д. Мы их не учитываем в теории трёхмерных систем, в то же время, эти ошибки при больших скоростях и больших скоростях изменения величин, могут быть весьма существенными и давать серьёзную погрешность в плане получения высокоточных гироскопических систем. Это явилось основой для начала исследования многомерных алгебр, в которых могут иметь принципиальное значение высокие производные, высокие в порядке от векторных величин.

Я, изучив соответствующую литературу по гироскопам, случайно оказался на проходившей в Москве научной конференции, где с докладом по экспериментам с гироскопами выступал пулковский астроном Николай Александрович Козырев. Консультации с Н.А.Козыревым и монография А.В.Павлова «Оптикоэлектронные приборы» (1974 года издания), посвященная измерению температуры планет Солнечной системы на базе спутниковых технологий, привели меня к созданию теории гравитационно-гироскопного поля. Моя «Теория гравитационно-гироскопного поля» совершенно не совпадает, а просто воспринимает как частный случай теорию тяготения И.Ньютона и сильно бы изменила теорию тяготения А.Эйнштейна. Очень сильно. *Потому, что теория тяготения Эйнштейна рассмотрена в криволинейных координатах, в то время как теория в прямолинейных пространствах до сих пор не изучена. Не был получен ответ на вопрос: какова сила взаимодействия двух движущихся гравитирующих масс? Для неподвижных масс – это теория тяготения И.Ньютона, для движущихся в криволинейном пространстве – теория А.Эйнштейна. А для движущихся в прямолинейных инерциальных системах координат вопрос до сих пор открытый.*

Я хочу сказать, что моя семимерная парадигма и все её приложения берут начало в 1975 году и имеют самое непосредственное отношение к Советской Космической Программе (КСП).

На конференции в БАУМАНКЕ в 2004 году интересовался один учёный товарищ: как можно использовать семимерные разработки в прикладных целях? Можно ли их использовать для отслеживания целей? Для идентификации целей?

Трёхмерные векторные вычисления используются не только для описания движений, но и для создания различного рода систем изображения. В частности, голограммы. Голограмма – это уже не реальный объект, это точная копия реального объекта. Но визуальное изображение не связано с реальным объектом, т.е. можно пальцем проткнуть голограмму – и при этом мы не наткнемся на бюст Владимира Ильича Ленина (Поясню про бюст В.И.Ленина: это была одна из первых советских голограмм для открытого показа. Она демонстрировалась в одном из павильонов ВДНХ в конце 60-х годов прошлого века).

Это изображение, это фантом, не существующий реально, а являющийся изображением реального объекта. Трёхмерие используется для создания голограмм. Точно так же семимерие можно использовать для создания голограмм более сложного типа как совокупность голограмм трёхмерных – т.е. это изображение физического объекта более сложного типа – семимерного объекта. Это изображение, относящееся к фантому совсем другого случая, совсем другого способа образования (получения) фантома. В частности, совокупность семи векторных произведений формируют одно векторное произведение семимерных векторов. Т.е. совокупность семи голограмм трёх мерных даёт характеристику одной семимерной голограммы. Она распадается на семь трёхмерных голограмм, на семь фантомов, а сама является одним сложным фантомом.

Вот собственно для построения большого числа фантомов можно использовать семимерное векторное исчисление, которое вдруг неожиданным (неопределенным, непостижимым) образом складываются и дают один семимерный фантом (для примера: семь голографических бюстов В.И.Ленина, успешно преодолевающих противоракетную систему (ПРО) USA).

– Анатолий Васильевич, а как, по-Вашему, семимерие можно использовать для описания аномальных явлений?

Ну, ответить на этот вопрос можно так: с аномальностями мы связываем ненормальное поведение объектов, которые ведут себя не так как все известные объекты, но а-нормально, ненормально. Точно так же, как и семимерные объекты, семимерная алгебра может восприниматься как аномальная алгебра в трёхмерии. Но это не трёхмерная алгебра, известная, изученная и описанная, нет – в данном случае, это аномальная алгебра по отношению к алгебре трёхмерной.

И уж если мы говорим, что существуют аномальные физические объекты, то можно попытаться использовать аномальные математические объекты и алгебры для описания поведения этих аномальных физических объектов и физических явлений. Математика семимерия есть, и из неё можно взять очень много полезного, которое в трёхмерии никем никогда не рассматривалось.

– Как можно смоделировать экстраординарные ситуации?

(К примеру, описать биения детали в станке при обработке на высоких оборотах?)

Трёхмерная алгебра строится на понятиях обобщённых координат — и к обобщённым координатам в трёхмерии относят три величины: радиус-векторы, скорости и ускорения. Всё! Обобщённых координат более высокого порядка не рассматривают, считают их пренебрежимо малыми, равными нулю. Поэтому уравнения динамики трёхмерного объекта описывают с помощью применения этих величин: радиус-вектора, скорости и ускорения. Это применяется в классической механике Ньютона и в электродинамике. Более высокие порядки величин не рассматривают, пренебрегают ими. Однако мы знаем, что ускорение может изменяться по величине и по направлению. Т.е. третья координата, вернее, третья производная радиуса-вектора, не равная нулю. Например, вот минский коллега по пифагоровым числам В.И. Сяхович рассматривает задачи изменения ускорения при взлёте самолета и при разбеге самолёта. При разбеге самолёта третья производная радиуса – вектора по времени уже не равна нулю. Т.е. это реальный физический трёхмерный объ-

ект, которым уравнения динамики Ньютона пренебрегают. Так вот в обобщённые координаты семимерного векторного пространства, семимерной векторной алгебры будут входить уже не три координаты – радиус – вектор, скорость и ускорение, а семь: радиус-вектор, скорость, ускорение, вторая производная радиус-вектора по времени, третья производная, четвёртая производная, пятая производная, шестая производная — и только седьмой производной в семимерном пространстве придется пренебрегать.

Т.е. семимерный случай физического объекта уже не пренебрегает высокими производными: третьей, четвертой, пятой, шестой – не обращает их в нуль. Т.о. это более точное описание поведения физического тела (физического объекта или явления). И мы им не пренебрегаем. А поэтому математика, конечно же, усложняется. Но зато она при этом даёт ряд замечательных результатов в отношении законов сохранения величин (новых величин) наряду с общеизвестными и общеупотребительными трёхмерными законами сохранения: энергии, импульса, момента импульса. И это, прежде всего, имеет значение при точном описании поведения физического объекта. При грубом описании можно пренебрегать этими величинами, а при точном – нет. Вот почему гироскоп (механический гироскоп) на высокой скорости даёт большие ошибки – высокой скорости соответствует высокое ускорение, и незначительные изменения ускорения приведут к третьей производной, которая внесёт свой вклад в изменение измеряемой величины, пренебрегать которой уже не следует (поскольку она приводит к ошибке). Вот собственно, что даёт семимерие. Оно даёт очень много. Но повторяю: физики наши забыли о координатной записи величин, которые нужны инженерам и техникам для получения значений точек и чисел. Физики преимущественно работают с абстрактными величинами и объектами. Увлечение абстрактной математикой привело к появлению абстрактной физики, – физики, в которой напрочь отсутствует собственно физическое содержание, физический смысл, физическая реальность, но зато доминирует абстракция.

– Как лучше всего в искусственном интеллекте (ИИ) реализовать семимерие?

ИИ, его математическое описание сейчас преимущественно связывают с алгебрами логики. А алгебры логики Булевы. Булева

алгебра логики определяет две операции: логического сложения и логического умножения булевого типа. Третья операция дополнение элемента. Вот на базе этих операций строятся все процедуры по изучению поведения физических, биологических, описания нейрокибернетики, нейроинформатики и социальных объектов. Мне хотелось бы отметить, что одномерный булевый вариант даёт очень много, но далеко не всё. Можно рассмотреть многомерные случаи булевы. В частности, с операциями сложения и умножения построенными по способу прямой суммы и прямого произведения. Такие булевы алгебры, мною как показано в одной из работ, могут быть и двумерными и вообще говоря, n -мерными.

Т.е. многомерный случай булевых алгебр – это более сложное описание физических, биологических и социальных объектов. Требуется отметить, что булевый вариант даёт описание математических основ кибернетики, алгебры классов, теории множеств, топологии, и ряда других разделов математики. Чрезвычайно важных разделов математики.

Топология используется для описания физических объектов.

О машинных арифметиках

– Анатолий Васильевич, а что Вы можете сказать о машинных арифметиках?

Могу только сказать, что это вопрос многоплановый, а сама тема всё ещё далека от завершения. То, что широко используется булева алгебра – это замечательно, но это не единственный вариант. Булева алгебра всё-таки избыточна. Избыточна в том плане, что требует для записи информации в двоичном варианте в двоичном коде большое число разрядов. Большое число разрядов – это очень неудобно с одной стороны представлять так числа, а с другой стороны – скорость обработки информации за счёт этого получается недостаточно высокой. Конечно, ЭВМ (компьютеры) работают с большими скоростями, но всегда есть желание и необходимость иметь ещё более скоростные и более эффективные и высокопроизводительные машины. Что же можно предложить более эффективное (лучшее)?

Был рассмотрен целый ряд алгебр и способов представления информации, т.е. записи чисел в кодах. Запись чисел в двоичном ко-

де, как уже отмечалось выше, на самом деле не очень удачна. Например, даже десятичный код такой же позиционный, как и двоичный код, но в нём в одном разряде записываются числа от нуля до девяти. Т.е. десять чисел, а не два как в двоичном коде один-нуль — и всё! Т.о. десятичные коды наиболее интересны не только для вычислительной техники, но и вообще повсеместно используются в повседневной человеческой практике.

Дело в том, что это очень компактная запись информации, а с другой стороны очень удобна в восприятии. В ней разряды разнятся только позицией числа, а само число представляется удобно и легко обрабатывается самыми простыми и примитивными методами и средствами. Например, ЭВМ в двоичном коде произведут обработку информации, но выдачу результата полученной информации всё равно обеспечат в десятичном коде. Применяются для этого двоично-десятичные коды. И для записи информации машины преобразуют двоичную запись информации в десятичную: машина выдаёт информацию оператору ЭВМ в десятичном коде.

Т.е. уже здесь появляется некоторая избыточность: нужны устройства для преобразования двоичного кода в десятичный и обратно из десятичного кода в двоичный. Так вот: это уже избыток, это время, это средства... В общем, всё это не очень-то удачно. Но, тем не менее, двоично-десятичные коды как пример задействования различных кодов довольно удобен и используется в вычислительной практике. Это довольно хороший способ представления информации, однако, это не единственная возможность.

Так, в советское время строились вычислительные машины на совершенно иной арифметике, нежели арифметика двоичная. В частности, использовались числа Фиббоначи. Этот код тоже позиционный, но он относится к позиционным кодам с изменяемым весом разряда. Числа Фиббоначи — это, например, последовательность чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 и т.д.

Т.е. идёт суммирование предыдущих двух чисел для очередного разряда, для третьего разряда и рекуррентный код определяется в этом случае только началом чисел: если первыми стоят 1 и 1, то следующее число 2. Началом могли бы быть и 1 и 2, то в этом случае следующее число было бы 3. Т.е. определено начало и определён набор весов разрядов.

Такие числа Фиббоначи, конечно, сложны для восприятия и для запоминания. Конечно, это и на практике не очень-то удобно, пото-

му что меняется вес разряда: то 3, то 5, то 8 и т.д. Но с другой стороны, эти числа позволяют записывать довольно компактно информацию большого формата, большой размерности. Большие числа требуются, вообще-то говоря, для запоминания больших рядов разрядов. Ни двоичные, ни двоично-десятичные коды этого не обеспечивают.

Очень интересен вопрос о построении вычислительных устройств на таких принципах – и такие устройства были созданы в своё время в Советском Союзе – это ЭВМ Н.П. Брусенцова и ЭВМ И.Я. Акушского. ЭВМ И.Я. Акушского использовала числа в остаточных классах. Это числа по модулю N , числа алгебры сравнения по модулю N . Здесь разрядность числа определяется модулем, а модуль – произволен. Он может быть: 3, 4, 29 – и вообще любым числом. А модуль определяет вес разряда. Такие машины были построены и очень успешно работали. Особенно удобно использовать такие машины при вычислениях в реальном масштабе времени, причём больших массивов информации, когда информация записывается в виде больших чисел. Очень больших чисел. В этом случае этот вариант предпочтителен даже при сравнении с двоичным кодом. Он не избыточен с одной стороны, а с другой стороны представляет собою плотную запись информации. Было выпущено значительное количество таких ЭВМ (они применялись на подводных лодках, в авиации и космонавтике... Устанавливались на «бортах», короче... В наших организациях ОКТБ «Старт» и «Орбита» они тоже имелись...). Короче, такие машины были созданы и успешно работали...

И сейчас всё чаще и чаще при обработке больших массивов информации используют те или иные специальные (специфические) коды. Что можно в заключение ещё сказать?.. Вопрос не завершён. Т.е. даже нет такого понятия как *семимерная физика*. Можно считать, что с *трёхмерной физикой* вопрос решенный. А в отношении физики семимерной вопрос всё ещё пока открытый. Т.е. способы кодирования информации с одной стороны, и способы приёма, хранения, переработки, выдачи информации с другой стороны тоже ещё не завершены, не изучены окончательно и здесь ещё всё впереди. Возможно, что появятся десятичные ЭВМ, работающие в десятичных кодах (не обязательно работать всё время исключительно в двоичных кодах).

– Спасибо, Вам Анатолий Васильевич. Но тут возникает вот какой вопрос: а Ваши алгебры логики многозначные и многомерные, булевы и не-булевы они относятся к машинным арифметикам или представляют собою самостоятельное явление, лишь местами частично пересекающееся с машинными арифметиками? Или они идут вообще как-то отдельно сами по себе? Можно ли их отнести к машинным арифметикам или они представляют собой что-то отдельное?

Небулевы алгебры... Самая близкая к булевой алгебре – это алгебра вычетов по модулю два, алгебра сравнений по модулю два. Она также двоичная как и булева алгебра, но обладает другим набором свойств. Набором свойств каких? В алгебрах вычетов по модулю два, в алгебрах сравнения по модулю два в принципе можно рассматривать даже отрицательные числа и операцию вычитания совершать. В алгебре сравнений по любому модулю используются числа как положительные, так и отрицательные. Это один нюанс. Это позитивный нюанс, который может дать положительные решения. Оптимальные. Второй нюанс. Алгебра вычетов по модулю два симметрична. Т.е. операция сложения в алгебре по модулю два отличается от булевой алгебры. В булевой алгебре нет симметрии в выражениях для операции сложения. Это исключается в алгебре сравнений по модулю два. Наконец, алгебра сравнений по модулю два – это рассмотрение своего рода алгебры действительных чисел, но только если взять два класса чисел: чётные и нечётные.

Т.е. это алгебра действительных чисел, вообще говоря, чётных либо нечётных действительных чисел. Это говорит о том, что такие алгебры можно строить на основе алгебр действительных чисел. И это тоже очень полезный вариант. Потому что свойства этой алгебры будут совпадать со свойствами алгебры действительных чисел, а это самые приличные свойства в вычислительной математике. Такие числа имеют следующие свойства: ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность, умножение, сложение, вычитание... Наличие единицы, наличие нуля... противоположные элементы – это элементы отрицательного характера. Т.е. всё это может дать дополнительные результаты, эффекты и так далее. Более того. Эта алгебра является подалгеброй более широких алгебр. Например, кро-

ме алгебры действительных чисел используются алгебры комплексных чисел, алгебры кватернионов, алгебры октанионов. Это алгебры самостоятельные, многомерные.

Аналогичным путём можно пытаться идти и при построении машинных арифметик. Т.е. арифметик действительных чисел. Итак, получается: алгебры действительных комплексных октанионов, кватернионов. Вслед за ними идут алгебры дискретных чисел, т.е. это когда числа принимают только дискретные значения, например, только целые или натуральные. Это решения уравнения в целых числах того же уравнения Пифагора, это возможность построения многомерных целочисленных алгебр, где вместо действительного числа A используется набор натуральных чисел (вернее сказать – натуральных отрицательных чисел), т.е. целых чисел.

На основе алгебры действительных чисел можно построить алгебры многомерные, в том числе дискретные. В том числе принимающие значения исключительно 0 и 1. Это булева алгебра сравнения по модулю два. Это один из самых простых вариантов. Следующие варианты развития этих алгебр – это алгебры по модулю три, по модулю четыре, по любому простому модулю – это уже многомерные случаи алгебр, алгебр большой размерности.

Булева алгебра всего этого создать не может. Т.е. что я хочу сказать? Вопрос о рассмотрении алгебраических систем ещё не завершён.

Могут найтись более предпочтительные схемы, нежели булева схема и тогда вычислительные машины будут строиться не обязательно на основе булевой алгебры, но и на не булевых алгебрах, в том числе. В частности, в советское время, как было сказано выше, были созданы ЭВМ не булевого типа. Вовсе не булевого типа. В них использовались машинные арифметики опять-таки не булевого типа.

Руководители-ренегаты советской державы уничтожили отечественную вычислительную технику. Она была не хуже, а может быть и многократно лучше по своим свойствам, чем западная.

...Но всё ещё впереди. Полагаю, что найдутся технические решения, в которых будет применяться не двоичная булева алгебра.

– Анатолий Васильевич, что бы Вы хотели сказать в заключение нашей беседы?

–Во-первых, я недавно узнал из телепередачи по ТВЦ, что в Институте высоких температур РАН в результате исследований шаровой молнии удалось установить, что в её ядре находится многомерный объект... И планируется использовать искусственно образованную шаровую молнию на носу высокоскоростного самолёта для улучшения лётно-технических характеристик путём воздействия на окружающую среду.

Во-вторых, я хотел бы сказать кое-что о некоторых свих работах... Прежде всего – в моей работе под названием «Нахождение решений полиномиальных уравнений второй степени целых чисел» показан следующий интересный нюанс. А именно: таблица 1 позволяет построить системы чисел пифагоровых троек, классифицируемых по определенному признаку, например, по модулю разности двух катетов. Оказывается, что модуль разности двух катетов принимает строго определенные значения, например, один, семь, семнадцать и т.д. В статье об этом говорится. Так вот, если построить цепочку чисел соответствующей, например, модулю разницы между катетами, равными единице, то получается последовательность: 1, 5, 29, 169, 985, 5741 и т.д.– для гипотенуз прямоугольного треугольника с целочисленными значениями сторон, всех трех сторон.

Эта последовательность строгая и оказывается, что она связана следующим рекуррентным соотношением – тройкой последовательных чисел. Третье число тройки равняется величине 6, второго числа тройки без первого числа, последовательных чисел гипотенузы в прямоугольных треугольниках. Например, 169 равняется 29 на 6 отнять 5. Эта последовательность выполняется для всех прямоугольных треугольников с разницей модуля – с модулем разницы катетов, равным единице. Но не только единице, но и 7, 17, 23 и т.д. Что это даёт?

Необходимо отметить, что гипотенузы прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами определяются нечетными числами класса 1 с вычетом по модулю 4. (Выше уже было сказано, что это означает). То есть 5, 29, 169 отличаются от числа делимого на четыре только одной единицей. Поэтому это класс один по модулю четыре.

Но самое главное, среди этих чисел очень много простых чисел. Практически значительная часть чисел, определяющих гипотенузу простые числа.

В-третьих, последовательность рекуррентно настолько быстро возрастает, что уже где-то 18-ое число последовательности характеризуется, по крайней мере, 20-ю разрядами. Тридцатое число в этой последовательности содержит 24 разряда и число простое. Я его перечислил: 68480406462161287469. Вот такое число и оно уже возникает на тридцатом шагу. Таких чисел очень много в этих системах. А, как известно, в криптографии используют простые числа, т.е. произведение двух простых чисел даёт возможность свободной публикации кода – и только тот, кто знает, как разложить эти числа на два множителя, может расшифровать эти коды (это шифры с открытым ключом). Т.е. эти последовательности могут найти применение в криптографии и в криптологических устройствах (криптотехнике).

Необходимо отметить следующее: что эта закономерность $z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1}$, имеет прямое отношение к теореме Пифагора и более того, следовательно, к евклидовой геометрии. Поскольку евклидова геометрия является геометрией классической физики, то это уравнение должно иметь прямое отношение к теоретической физике. Трудно найти процессы, которые описывались бы этой последовательностью. Число последовательности бесконечно велико, но, тем не менее, необходимо полагать, что в физических задачах эти последовательности найдут самое прямое применение. Прежде всего, там, где числа меняются по определенному, строго заданному закону и имеют значения целочисленных величин. Естественно с коэффициентом пропорциональности, которой может быть целочисленным.

Например, целый ряд величин меняются по строго определенному закону. Так, мы знаем, что цикличность в природе имеет самое прямое значение для физических явлений, прежде всего сутки (24 часа) – то есть период обращения Земли вокруг своей оси. Во-вторых, земной год – 365, 25 оборотов вокруг своей оси создает прохождение полностью по орбите начальную точку. Потом 1461 сутки – 4 года, которые включают 3 не високосных и 1 високосный год. Наконец, цикличность, определяемая солнечной активностью. Эта величина, близкая к 11-ти годам. То есть величины в природе имеют циклические изменяемые значения и к тому же строго опре-

деленные. Среди них могут быть такие, которые меняются по закону $z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1}$,

Если это так, то пифагорова система чисел и евклидова геометрия получают дополнительный стимул развития – как геометрических воззрений, так и чисто физических исследований.

Число 161. Если 10 и 3 десятых умножить на 365, то это число простое, оно ни на что не делится. Но оно входит в определенную последовательность. Если считать $z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1}$, – то вот эта последовательность. 37616571081429 – это в сутках – то есть вот тут уже суток тысяча лет, то есть можно прогнозировать периодические изменения в семь лет, поэтому очень важно знать все эти значения периода для колебаний земной коры: это минуты, часы. Значения для земной коры: четырнадцать минут, двадцать восемь минут (всё это приводится в соответствующей литературе), 57 минут, 87 минут. Чилийское землетрясение зафиксировали в полуторачасовой период. То есть, *они находятся в периодической зависимости*. Если это так, то они должны соответствовать евклидовой геометрии.

– А Вы знаете, Анатолий Васильевич, что ещё отметили: вот делается запуск Шатла, запускают Шатл в USA, а где-нибудь в Китае происходит землетрясение. Знаете об этом? Нет? Не знаете?

– Я не знаю, но усилия возникают довольно серьезные: как на оболочку Земли, так и на атмосферу давление очень сильное... поэтому вполне возможно, что где-то давление вызывает перенапряжения...

– Так ведь они действительно вызывают перенапряжения на другой стороне Земли.

– Ну и что?.. Для Земли длина гравитационной волны, равная радиусу Земли, не в счёт.

– У Вас получается, что расчёт периодичности природных явлений даёт одни значения, а искусственные накладки дают совсем другое. Понимаете?

– Я понимаю. Но есть природные явления...

–Вы проанализировали природные явления... выявили их естественную периодичность...

– Ну да. Например, вот тут где-то в литературе (да вот хотя бы это книги: Гордиец Б.Ф. «Солнечная активность и Земля»; Жарков В.Н. «Внутреннее строение Земли и планет» – ну и прочие той же направленности) – я встретил значение, практически равное столетнему циклу. Это десятилетний цикл, но, в общем, есть значения, которые совпадают с планетными явлениями. Один год, четыре года, десять лет, сто лет. Эти цифры зафиксированы. По движению планет Солнечной системы. И по солнечной активности. Вот эти цифры всегда следует знать при анализе подобного рода природных явлений. Если оно, это явление, спровоцировано техническим фактором, то оно уже будет выделяться на общем колебательном фоне с уже выявленной периодичностью.

Но самое главное, о чем уже было сказано выше – то, что цепочку чисел, соответствующую модулю разницы между катетами, равными единице, даёт последовательность: 1, 5, 29, 169, 985, 5741 и т.д. – для гипотенуз прямоугольного треугольника – есть не что иное, как целочисленные варианты евклидовой геометрии, а наша физика базируется на евклидовой геометрии. *Теоретическая физика евклидова*. Если брать классический вариант – общую теорию относительности или специальную теорию относительности – то природа должна использовать эти ряды, поскольку они возникают в евклидовой геометрии и в числах Пифагора. То есть эти числа могут дать не только пользу криптографическому анализу, но и найти чисто физическое применение.

Например, были зафиксированы двух- и четырех часовые циклы Луны, а также – четырехлетний цикл Земли: за четыре года Земля проходит четыре колебания оси, вокруг плоскости орбиты.

Зафиксированы также длиннопериодные колебания (больше суток), и короткопериодные (земные, вернее – внутри земные: колебания ядра Земли), потому что длительность прохождения гравитационных волн относительно короткое. Гравитационная волна проходит от одной стороны оболочки Земли до другой, отражается и возвращается в обратном направлении, создавая колебательные процессы.

Бессмысленно повторять опыты Джозефа Вебера, хотя бы по той причине, что техника поиска гравитационных волн Вебера не подтверждается теоретическими изысканиями (недавно я прочитал

«работу» его последователя К.Торна «Черные дыры и складки времени». Давно я так не смеялся! Ну и мошенник! Вот кому место в Осколково! А сколько у него пустопорожней болтовни! Так, на стр. 538 написано: "Сахаров, Андрей Дмитриевич (1921-1989) советский физик-теоретик, «отец» водородной бомбы (глава 6), ближайший друг, соратник и соперник Зельдовича (главы 6 и 7), впоследствии стал диссидентом, реабилитирован в период гласности".

Из указанной главы шестой это никак не следует. История создания советского ядерного оружия написана и напечатана в журнальных публикациях и книгах, как на русском, так и на английском языках.

Если бы, К. Торн, был действительно учёным, а не пустопорожним болтуном, то не преминул бы проконсультироваться у специалистов по истории советской науки – хотя бы у Лорена Р. Грэхема, к примеру. Так вот, если б он это сделал, то Л.Р. Грэхем обязательно довёл бы до его сведения такую вот небольшую выдержку из работы Ю.Б.Харитона.

Ю.Б. Харитон с 1946-го по 1992 годы был бессменным научным руководителем ядерного оружейного центра в Арзамасе-16. Просто процитирую патриарха:

«В 1946 г. **Гуревич, Зельдович, Померанчук и Харитон** передали **Курчатову**... оценки возможности осуществления термоядерного взрыва. В июне 1948 г. ...**под руководством Тамма** была создана специальная группа, в которую **был включен Сахаров** и в задачу которой входило выяснить возможности создания водородной бомбы. ... 12 августа 1953 г. в СССР по схеме, предложенной **Сахаровым** и названной у нас «слоем», был успешно испытан первый в мире реальный водородный заряд. В этом заряде в качестве термоядерного горючего был использован, по предложению **Гинзбурга**, литий в виде твёрдого химического соединения. ... своей громоздкостью эта конструкция вызывала чувство неудовлетворённости. ... поиски сконцентрировались на использовании в полной мере энергии атомного взрыва ... чего ни «слойка», ни тем более «труба» не обеспечивали. ... Мысль об использовании атомного взрыва для сжатия термоядерного горючего и его поджига настойчиво пропагандировал **Виктор Александрович Давиденко**, руководитель экспериментального ядерно-физического подразделения института ... обращаясь к теоретикам, в первую очередь **к Зельдовичу и Сахарову**, требовал, чтобы они вплотную занялись тем, что

у нас получило название «атомного обжигания» (АО). В связи с этим 14 января 1954 г. **Зельдович** написал записку **Харитону**, сопроводив её поясняющей схемой: «В настоящей записке сообщаются предварительная схема устройства для АО сверхъизделия и оценочные расчёты её действия. **Применение АО было предложено В.А. Давиденко**» ... толчком для перехода от платонических рассуждений о сжати термоядерного горючего атомным взрывом к конкретной работе послужило высказывание **замминистра среднего машиностроения Завенягина**, который был в курсе идей, обсуждавшихся у теоретиков ... Руководителями работ были определены **Забабахин, Зельдович, Романов, Сахаров и Франк-Каменецкий**.

...Вскоре в Челябинске-70 была создана конструкция термоядерной бомбы, которую можно было ставить на вооружение. Её **основными разработчиками были Забабахин, Романов и Феоктистов**. А несколько позднее **Бабаевым и Трутневым** было внесено существенное усовершенствование в конструкцию водородного заряда, которое было успешно отработано в 1958 г. и предопределило современный облик отечественных водородных зарядов».

Я привел такой значительный отрывок из воспоминаний отца ядерного оружия Харитона, чтобы без пересказов, из первых уст сказать о подлинных создателях советского ядерного оружия, одним из которых был и физик-теоретик Сахаров. Одним из. Да, «из первой десятки». Но никак не «отцом водородной бомбы».

Ю.Б. Харитон, В. Б. Адамский, Ю.Н. Смирнов

«О создании советской водородной (термоядерной) бомбы»

http://wsyachina.narod.ru/history/thermonuclear_bomb_1.html

Ну это – мошенник К.Торн. Ну а редактор перевода В.Б. Брагинский куда смотрел? Неужто на старости лет тоже записался в «славную» когорту дебилов-антисоветчиков? Кстати, в USA существует т.н. «Ассоциация ученых-патриотов». Ну да, та самая, «патриоты» которой в прошлом году предложили заменить ядерный удар по нашим городам на ядерные удары по нашим военным объектам и нашей инфраструктуре. Вы представляете, если бы да кабы была принята на вооружение бомба-слоёнка Андрея свет Дмитриевича Сахарова, то как бы смеялись все эти ученые-агрессоры? Что, не представляете? Ну так я помогу... Примерно вот так: Гы-гы-гы... Вы слышали, Смит, Советы приняли на вооружение сахаров-

скую бомбу – слоёнку... Ха-ха-ха... Так вот, они грозятся сбросить её на Нью-Йорк, Лос-Анджелес, Чикаго и Сан-Франциско: слоёв много – на всех хватит! Что, так и сказали? Да? .. Ха-ха-ха... Ой не могу! Ну щас со смеху лопну! Гы-гы-гы...

Кстати, вспомнилось по случаю: во времена операции «Перестройка» издали в пропагандистских целях безумным многомиллионным тиражом шизофренические писания Сахарова. Никто их, разумеется, не покупал, – кому нужна такая галиматья?... Тогда весь тираж пустили на туалетную бумагу – по прямому назначению, так сказать. Да, из сахаровского тиража вышла прекраснейшая советская туалетная бумага... Да разве могло быть иначе?... Ведь не зря же Ленка Боннэр от всей души и от всего сердца лупила его сковородкою по бестолковке! По бестолковке!.. Вот и причина его глюков!

А ещё, читая К.Торна, почему-то вспомнились америкосские президенты – презики, как я их называю, забавные, юморные, шухарные такие ребята, я вам скажу... Вот старина Рейган, к примеру... тот в детстве своем сопливом играя в ковбоя, набросил лассо на шею своей мамочки да и удушил её, весело смеясь... или вот, их сегодняшний поджаристый и с красивыми белыми зубами, что нефть из Мексиканского залива стаканам пил – ну прям как те тебе французы пьют одно стаканом красное вино... Так вот, узнал он о смерти горячо любимой бабушки в далёкой знойной Африке, в центральной её части, на исторической стало быть родине, – и сразу прыг в самолёт! да и в Африку! Прилетел, отрезал уши ужасно горячо любимой бабушки, в соль – да и засушил их на солнышке... Всё правильно сделал по обычаю предков... У них так: у кого сушёные уши бабушки – тот и хозяин клана...).

– **Анатолий Васильевич, это всё называется дискурс.** Один очень прогрессивный иудей (И.Шамир) даже книжку такую специально написал... «Хозяева дискурса» она называется... Хозяева – это USA и Израиль... а у нас – их холуи-шестёрки из вконец распоясавшейся «пятой колонны»...

– Ну, вот ещё... Да мы этих «хозяев» и их холуёв из «пятой колонны» всегда в состоянии «опустить», оттянутся на них в полный рост и по полной программе, спокойно вытереть о них ноги... все эти млечино-свинидзе-злобины-пивоваровы и прочая компашка придурковатых антисоветчиков – энтвэшников эт сеттера – пугала огородные. Ими только ворон пугать...

Ну да это я немножечко отвлёкся...Итак, возвращаюсь к нашей теме...

Дело в том, что электромагнитные колебания были открыты сразу же, как только появилась теория электромагнитного поля – и Герц моментально создал технику, реализующую приём и излучение электромагнитных волн – настолько быстро пошло развитие техники, что уже через двадцать лет появилось радио Попова.

Дж. Вебер и компания будут долго-долго искать гравитационные волны без соответствующей теории. А теория такова – необходимо ответить на вопрос: какова сила взаимодействия между двумя движущимися массами? Дело в том, что в природе колебаний должны быть задействованы вынужденные колебания и так называемые резонансы волн. Создавать резонанс волн, не зная, что такое изучаемая волна (какой она природы) и как её создать – это бессмысленное мероприятие. Так вот, повторяю ещё раз: следует ответить на вопрос: какова сила взаимодействия между двумя движущимися массами? **Тогда опыты по поиску гравитационных волн будут поставлены должным образом и дадут нужный результат.**

Ну и совсем кратко в отношении работы «Представление натуральных чисел в виде суммы восьми квадратов» – это тоже касается тематики чисел, тоже показывается незавершенность системы построения числовых систем.

Числа могут быть рассмотрены совершенно с иными свойствами нежели, те которые сейчас широко задействованы. Итак, речь идёт **о представлении натуральных чисел в виде суммы восьми квадратов**. Со времён Лагранжа и Эйлера известны принципиальные решения в области теории чисел, теории простых чисел в частности, характеризуемое тем, что Эйлер рассмотрел не только числа двумерные для решения уравнений второго порядка с несколькими переменными (с двумя переменными в частности). Которые уже были рассмотрены и изучены и была построена система представления действительных чисел отдельных классов с помощью этих двумерных систем. В частности, было показано, что числа – нечётные числа, которые получаются путём сравнения по модулю четыре, причём числа типа $4n+1$ принимают любое значение, и совпадают с числами, которые могут быть использованы для построения прямоугольных треугольников.

В частности, их гипотенуз. Т.е. все гипотенузы прямоугольных треугольников, построенных на взаимно-простых катетах, дают

значения числа, которое соответствует классификации чисел по модулю четыре и тип числа $4n+1$. Т.е. эти числа используются для классификации натуральных чисел. Вслед за этим простых и так далее. Эйлер развил эту тему. Он получил тождество, которое носит его имя (тождество Эйлера): произведение двух чисел, представленных суммой квадратов четырёх координат – равняется числу, представляемому как сумма четырёх квадратов.

Литература

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Издательство «Советское радио», 1968. – 439с.
2. Воловик Г.Е., Минеев В.П. Физика и топология. – М.: Знание, 1980. – 64с.
3. Гордиец Б.Ф., Марков В.Н., Шелепин Л.А. Солнечная активность и Земля. – М.: Знание, 1980. №5. – 64с.
4. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. 2-е изд. – М.: Наука. Глав.ред. физико-мат. литературы, 1983. – 416с.
5. Коротков А.В., Чураков В.С. Семимерная парадигма: новый подход к реальному изучению гравитации и её связи со временем//Время и человек (Человек в пространстве концептуальных времён): сборник научных трудов/Под научн. ред. В.С.Чуракова. – Новочеркасск: «НОК», 2008. – 316 с. – (Библиотека времени. Вып. 5). – (с.177-186).
6. Монтенья Росарио Н., Стенли Г. Юджин. Введение в эконофизику: Корреляции и сложность в финансах. Пер. с англ./Под ред. В.Я.Габескерия. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 192 с.
7. Пospelов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. Учеб. Пособие для втузов. – М.: «Высш. Школа», 1970. –308с. с илл.
8. Сяхович В.И. Пифагоровы точки. — Минск: БГУ, 2007.— 288с.
9. Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы». Вып. 3/Сост. А.С. Печенцов, В.Б. Султанов.— М.: КДУ, 2004. – 256с., ил.

**Коротков А.В. Список научных работ,
посвященных трех- и семимерному пространствам**

1. Коротков А.В. Векторная алгебра и поля семимерного псевдоевклидова пространства. Деп. рук. ВИНТИ, № 5527-B90.
2. Коротков А.В. Свойства двумерных псевдоевклидовых числовых систем. Деп. рук. ВИНТИ, № 3429-B90.
3. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
4. Коротков А.В., Коротков В.А. Восьмимерное псевдоевклидово пространство-время. Деп. рук. ВИНТИ, № 1577-B91.
5. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в гравитационногироскопном поле четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3775-B91.
6. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в поле восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1578-B91.
7. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное гравитационногироскопное поле и волны в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3773-B91.
8. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное поле и волны в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1579-B91.
9. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 46 с.
10. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория гравитационногироскопного поля. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 42 с.
11. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения гравитационногироскопного поля четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3774-B91.
12. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения поля восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1576-B91.
13. Коротков А.В., Коротков В.А. Элементы семимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 66 с.
14. Коротков А.В. Семимерное спинорное и векторное исчисления в задачах теории поля. – Новочеркасск: Набла, 1997. – 45с.

15. Коротков А.В. Элементы трех и семимерного изовекторного и спинорного исчисления.– Новочеркасск: Набла, 1999.
16. Коротков А.В. Мы живем в семимерном мире//Материалы 2-ой Международной научно-технической конференции «Новые технологии управления движением технических объектов». Том 2.– Новочеркасск: НГТУ, 1999.
17. Коротков А.В. Гиперкомплексные числа//Проблемы экономики, науки и образования в сервисе: Сб. научн. Трудов/ Под ред. П.Д. Кравченко.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2004.– 251с.– (с.236-241).
18. Коротков А.В. Представление группы преобразований вращения трехмерного псевдоевклидова пространства индекса два//Проблемы экономики, науки и образования в сервисе: Сб. научн. Трудов/под ред. П.Д. Кравченко.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 285с.– (с.200-201).
19. Коротков А.В. Вращения в трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса два// Изучение времени: концепции, модели, подходы, гипотезы и идеи: Сб. научн. тр./ под ред. В.С. Чуракова. (Библиотека времени. Вып 2).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 262с.– (с.222-230).
20. Коротков А.В. Векторы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса три: Сб. научн. тр./под ред. В.С. Чуракова. (Библиотека времени. Вып 2).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 262с.– (с.231-238).
21. Коротков А.В., Чураков В.С. Введение в философию семимерия (анализ пространственной размерности, постановка проблемы, целей и задач исследования) // Интеграл культуры: журнал волгодонских философов и гуманитариев. 2005. №3. – (с.38-55).
22. Коротков А.В., Чураков В.С. Многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени) // Проблема времени в культуре, философии и науке: Сб. научн. тр./ под ред. В.С. Чуракова. (Библиотека времени. Вып 3).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2006.– 155с. – (с.15-20).
23. Коротков А.В. Элементы составного семимерного векторного исчисления.– Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 39с.
24. Коротков А.В. Семимерные полилинейные скалярные функции и формы. – Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 67с.

25. Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех – и семимерного векторных исчислений. –Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 79с.
26. Коротков А.В. Элементы трёх- и семимерных изовекторных и спинорных псевдоевклидовых исчислений. – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2008.– 60 с.
27. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007.– 194с.; Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Изд 2-е, испр. и доп. – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010.–266с.
28. Коротков А.В. Товарно-денежное поле в экономике.– Новочеркасск, 2009.; Коротков А.В. Товарно-денежное поле в экономике//Формы и смыслы времени (философский, теоретический и практический аспекты изучения времени): сб. научн. трудов под ред. В.С.Чуракова (серия «Библиотека времени». Вып. 7). – Новочеркасск, 2010.
29. Korotkov A.V. Elements of heptadimensional vector and spinor calculus. – Novocherkassk, NOK, 2000.

БАБКИНА Т.А., МЕШКОВ В.Е.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЧЕТКИХ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

Современное состояние информационных систем и технологий характеризуется рядом проблем концептуального характера. Прежде всего, это настоятельная потребность резкого повышения производительности вычислительных систем, обусловленная следующими причинами:

- лавинообразный рост доступных распределенно электронных документов в глобальных сетях;
- высокая и постоянно растущая сложность больших систем, требующих новых подходов к моделированию (например, глобальные сети, социальные системы, глобальные экономические системы и т.д.).

Положение усугубляется отсутствием новых парадигм в области архитектуры вычислительных систем и логики представления и обработки данных [3].

На этом фоне растет число различных подходов к построению логических базисов, отличных от классического двоичного. С одной стороны, это говорит о насущной потребности построения новых логических систем, а с другой – большое количество и разнообразие логик и, как следствие, практических их применений, явно указывает на кризис в области построения систем обработки данных. Наблюдается явная тенденция специализации с учетом прикладных задач и областей применения. В тоже время актуальной становится задача выбора и-или построения нового универсума, способного в новых условиях заменить двоичную логику (и двоичную систему счисления).

Пожалуй, наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительное продвижение в этом направлении сделано 30 лет тому назад профессором Калифорнийского университета (Беркли)

Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа «Fuzzy Sets», появившаяся в 1965 г. в журнале *Information and Control*, № 8, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным толчком к развитию новой математической теории.

Что же предложил Заде? Во-первых, он расширил классическое канторовское понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале $(0;1)$, а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им нечеткими (*fuzzy*). Л. Заде определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода *modus ponens* и *modus tollens*.

Введя затем понятие лингвистической переменной и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л. Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений.

Первые применения нечетких систем управления состоялись в Европе, наиболее интенсивно внедряются такие системы в Японии. Спектр приложений их широк: от управления процессом отправления и остановки поезда метрополитена, управления грузовыми лифтами и доменной печью до вычислительных устройств, стиральных машин и СВЧ-печей. При этом нечеткие системы позволяют повысить качество продукции при уменьшении ресурсо- и энергозатрат и обеспечивают более высокую устойчивость к воздействию мешающих факторов по сравнению с традиционными системами автоматического управления.

Другими словами, новые подходы позволяют расширить сферу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории.

Смещение центра исследований нечетких систем в сторону практических приложений привело к постановке целого ряда проблем таких, как новые архитектуры компьютеров для нечетких вычислений, элементная база нечетких компьютеров и контроллеров, инструментальные средства разработки, инженерные методы расчета и разработки нечетких систем управления и мн. др.

Анализ нечетких логических систем

Проанализируем подробно сравнительный анализ основных операций различных систем нечетких логик с точки зрения воз-

возможности построения новых архитектурных решений в области вычислительных систем.

Со времени опубликования работ Заде в области нечетких логик появилось несколько принципиально различных, а также сходных между собой логических нечетких систем, в т.ч. двузначная логика, трехзначная логика Лукасевича, трехзначная логика Шестакова, n-значная логика Россета, ∞ -значная логика МакНатона, семи-мерная логика Короткова и т.п. И тут появляется еще один вопрос – какая логическая система является наиболее подходящей для решения конкретной задачи в области нечетких логик, например, в области построения вычислительных устройств.

Для этих целей проанализируем несколько существующих подходов к нечеткости по следующим критериям:

1. высказывания;
2. границы множества;
3. центр множества.

Результаты анализа представим таблично.

Результаты анализа

Логическая система	Высказывания	Границы множества	Центр множества
Двузначная логика	И – истина Л – ложно	$v = \mathcal{J}(И) = 1$ $a = \mathcal{J}(Л) = 0$	$c = 1/2$ не используется
Трехзначная (Лукасевич) 1920 г.	И – истина Л – ложно Н – неопределенно	$v = \mathcal{J}(И) = 1$ $a = \mathcal{J}(Л) = 0$	$c = \mathcal{J}(Н) = 1/2$
Трехзначная (Шестаков) 1960 г.	И – истина Л – ложно Н – неопределенно	$v = \mathcal{J}(И) = +1$ $a = \mathcal{J}(Л) = -1$	$c = \mathcal{J}(Н) = 0$
n-значная логика (Россет) 1945 г.	ПИ – истина ПЛ – ложно (n-2) – не ПИ, не ПЛ	$v = \mathcal{J}(ПИ) = 1$ $a = \mathcal{J}(ПЛ) = n$	$c = (1+n)/2$
∞ -значная логика (МакНатон) 1951 г.	ПИ – истина ПЛ – ложно ∞ – множество не (ПИ, ПЛ)	$v = \mathcal{J}(ПИ) = 1$ $a = \mathcal{J}(ПЛ) = 0$	$c = 1/2$
R_∞ -функция Рвачева 1953 г.	∞ – множество Не (ПИ, ПЛ)	$v = \infty$ $a = -\infty$	$c = 0$
R1-функция			
Семимерная логика (Коротков)	И – истина Л – ложно	$v = \mathcal{J}(И) = 1$ $a = \mathcal{J}(Л) = 0$	

Теперь определим и проанализируем для данных нечетких логик основные операции:

- 1) дизъюнкция;
- 2) конъюнкция;
- 3) отрицание.

Логическая система	Определение значений истинности (Дизъюнкция)	Определение значений истинности (Конъюнкция)	Определение значений истинности (Отрицание)
Двухзначная логика	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(p \cap q) = \min[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(\neg p) = 1 - \mathcal{J}(p)$
Трехзначная (Лукаевич) 1920 г.	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(p \cap q) = \min[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(\neg p) = 1 - \mathcal{J}(p)$
Трехзначная (Шестаков) 1960 г.	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(p \cap q) = \min[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(\neg p) = -\mathcal{J}(p)$
n-значная логика (Россет) 1945 г.	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(p \cap q) = \min[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(\neg p) = n + 1 - \mathcal{J}(p)$
∞ -значная логика (МакНатон) 1951 г.	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(p \cap q) = \min[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$\mathcal{J}(\neg p) = 1 - \mathcal{J}(p)$
R_∞ -функция Рвачева 1953 г.	$X \cup_\infty Y = 1/(1+\infty)[(X+Y) + \sqrt{X \cdot X + Y \cdot Y - 2\infty XY}]$ $-1 < [\infty(X, Y)] \leq +1$	$X \cap_\infty Y = 1/(1+\infty)[(X+Y) - \sqrt{X \cdot X + Y \cdot Y - 2\infty XY}]$ $-1 < [\infty(X, Y)] \leq +1$	$\neg X = -X$
R1-функция	$X \cup_1 Y = 0.5(X+Y + X-Y) \equiv \max(X, Y)$	$X \cap_1 Y = 0.5(X+Y - X-Y) \equiv \min(X, Y)$	$\neg X = -X$
Семимерная логика (Коротков)	$\mathcal{J}(p \cup q) = \max[\mathcal{J}(p), \mathcal{J}(q)]$	$p \oplus q = (p \cap \bar{q}) \cup (\bar{p} \cap q)$	$\mathcal{J}(\neg p) = 1 - \mathcal{J}(p)$

Семимерное пространство характеризуется тем, что все пространственные направления совершенно одинаковые, т.е. пространство изотропно по своим свойствам. В то же время мы имеем не только понятия векторов, но и понятия изменения векторов, положения хотя бы векторов в пространстве. Следовательно, нужно оценивать характер изменения этих положений векторов в пространстве – и это уже с необходимостью приводит к применению понятия времени как скалярной величины, по которой можно осуществлять дифференцирования векторных величин. Поэтому более верной концепцией, наверное, будет рассматривать не просто семимерное пространство, а восьмимерное пространство – время.

Основное различие в определении значений истинности выявлено для конъюнкции.

А ведь в зависимости от того, какова процедура сложения и какова процедура умножения чисел, получаются те или иные значения, вернее свойства линейных векторных пространств. Рассмотрим данный аспект подробнее.

В булевой алгебре задействованы только два значения величин – нуль и один, и известны операции сложения и умножения.

Операция умножения двух дискретных величин булевой алгебры определяется свойствами обычной операции умножения двух действительных.

А вот с операцией сложения двух булевых величин не все обстоит так гладко, потому что, хоть три первых значения нуль плюс нуль, нуль нуль плюс один, один плюс нуль есть один, а вот один плюс один есть один в булевой алгебре, и это не соответствует значениям действительных чисел, где сумма для единицы плюс единицы есть двойка, то есть совсем другое число, нежели единица. Возникает логическое противоречие.

Поэтому, в дополнение к булевой алгебре можно привести также другую алгебру – алгебру, получаемую на основе теории сравнения чисел по определенному модулю.

При этом если рассматривать алгебру в сравнении по модулю 2, то все числа, все целые числа разбиваются на два класса – класс целых четных чисел и класс целых нечетных чисел. Они имеют одно и то же значение остатка при делении на 2. Целые числа имеют остаток 0, нечетные числа, нецелые, а четные числа имеют остаток 0, а нечетные числа имеют остаток 1. То есть все целые числа разбиваются на два класса – класс целых четных чисел, класс ноль и класс нечетных чисел класс один.

Так вот, если посмотреть теории сравнений по модулю 2, расположить все числа, то умножение чисел определяется также обычной операцией умножения целых чисел. А вот со сложением дело обстоит иначе – если класс нуль четные числа, а класс один включает нечетные числа, то четное плюс четное есть четное, то есть ноль плюс ноль есть ноль, четное плюс нечетное, нуль плюс один и один плюс нуль есть один, потому что четное плюс нечетное есть нечетное число, а вот четное, вернее нечетное, плюс нечетное, то есть один плюс один есть всегда число четное, то есть нуль, то есть, это говорит о том, что один плюс один в этой алгебре есть нуль. В отличие от булевой алгебры, где один плюс один есть один. А это совсем другая процедура умножения и сложения, то есть это совсем другая алгеб-

ра. Это уже небулева алгебра, это алгебра также над нулем и единицей, но совсем другими свойствами обладающая, что показано в таблице сравнительного анализа нечетких логик.

Аналогично, можно привести основные операции алгебры логики при сравнении чисел по модулю 3, 4 и т.д., описанные в статьях А.В. Короткова, В.С. Чуракова и В.Е. Мешкова.

Заключение

Одной из попыток построения вычислительных систем на новом архитектурном и вычислительном базисе была идея разработки параллельных и векторных компьютеров. В основе векторных компьютеров лежит концепция конвейеризации, т.е. явного сегментирования арифметического устройства на отдельные части, каждая из которых выполняет свою подзадачу для пары операндов [2]. В основе параллельного компьютера лежит идея использования для решения одной задачи нескольких процессоров, работающих сообща, причем процессоры могут быть как скалярными, так и векторными [2]. Гибридные схемы параллельных векторных компьютеров демонстрируют высокую производительность, и нашли применение для решения широкого класса задач. Однако открытым остается вопрос о соответствующей такому подходу математической и логической основе (и как следствие новой элементной базе).

Представляется вполне возможным построение нового аппаратного базиса на основе множественной небулевой семимерной алгебры А.В. Короткова [1].

Таким образом, исследование показывает, что для решения задачи построения вычислительных устройств на основе нечетких логик наиболее подходящей является семимерная логика, предложенная А.В. Коротковым, т.к. только ее применение может привести к открытию и построению принципиально новых микропроцессорных устройств, не известных ранее.

Литература

1. Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерная модель сознания на основе многомерных булевой и небулевой алгебр А.В. Короткова//Труды Междунар. конф. «Интеллектуальные системы» (AIS'08) и «Интеллектуальные САПР» (CAD 2008). В 4 т. Т. 2. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.
2. Цилькер Б.Я., Орлов С.А. Организация ЭВМ и систем. – СПб.: Питер, 2004. – 668 с.
3. Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф. Базы знаний интеллектуальных систем. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.

О ТРЁХ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Современное состояние информационных систем и технологий характеризуется рядом проблем концептуального характера. Прежде всего, это потребность резкого повышения производительности вычислительных систем, обусловленная следующими причинами:

- лавинообразный рост доступных электронных документов в глобальных сетях;
- высокая и постоянно растущая сложность больших систем, требующих новых подходов к моделированию (например, глобальные сети, социальные системы, глобальные экономические системы и т.д.).

На этом фоне растет число различных подходов к построению вычислительных систем, например, ДНК компьютеры, квантовые компьютеры, молекулярные компьютеры, нанокomпьютеры и др.

Рассмотрим эти подходы подробнее. Например, молекулярные компьютеры.

Молекулярные компьютеры

Что такое молекулярный компьютер? Это устройство, в котором вместо кремниевых чипов, применяемых в современных компьютерах, работают молекулы и молекулярные ансамбли. В основе новой технологической эры лежат так называемые „интеллектуальные молекулы“. Такие молекулы (или молекулярные ансамбли) могут существовать в двух термодинамически устойчивых состояниях, каждое из которых имеет свои физические и химические свойства. Перевернуть молекулу из одного состояния в другое (переключать) можно с помощью света, тепла, химических агентов, электрического и магнитного поля и т.д. Фактически такие переключаемые бистабильные молекулы – это наноразмерная двухбитовая система, воспроизводящая на молекулярном уровне функцию классического транзистора.[14, с.25-27]

Особенно интересны такие превращения бистабильных молекул, после которых сильно меняется электронная конфигурация. Напри-

мер, после изомеризации в молекуле образуется единая сопряжённая электронная система, следовательно, появляется способность проводить электрический ток. Могут меняться и другие свойства: спектры поглощения сдвигаться в видимую область, возникать нелинейные оптические свойства и, что особенно ценно, флуоресценция (рисунок 1).

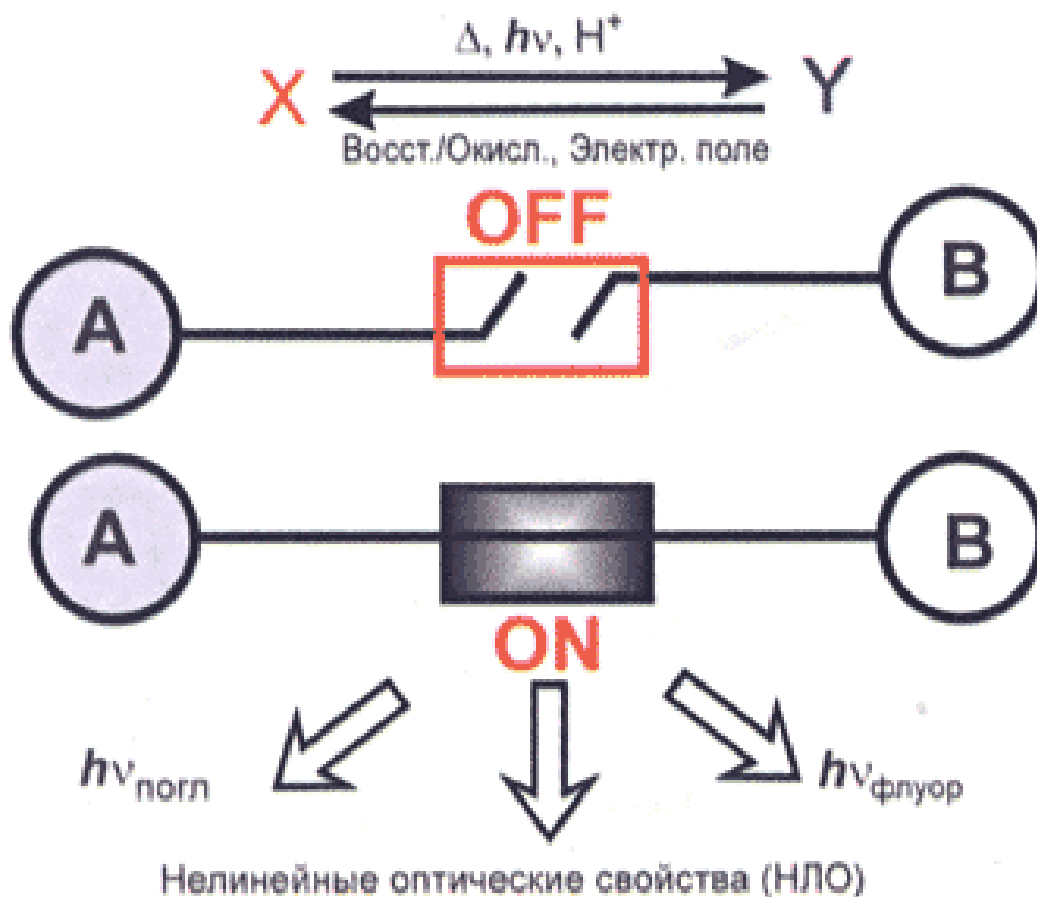


Рисунок 1 – Бистабильные молекулярные системы

Интерес к созданию молекулярных компьютеров не случаен. Производительность компьютера пропорциональна количеству транзисторов на единице площади интегральной схемы. На процессорном чипе современного компьютера можно расположить до 3,9 млрд. транзисторов (Корпорация Altera), и намного больше разместить уже вряд ли удастся, поскольку доведённые до совершенства технологии их производства достигли своего пика. Транзистор (рисунок 2) – это два электрода на кремниевой подложке, ток между которыми регулируется потенциалом, подаваемым на третий управляющий электрод – затвор. Критический элемент кремниевого транзистора, из-за которого нельзя сделать его намного меньше, – толщина изолирующего слоя оксида кремния между затвором и проводящим слоем. [2, с. 18-22]

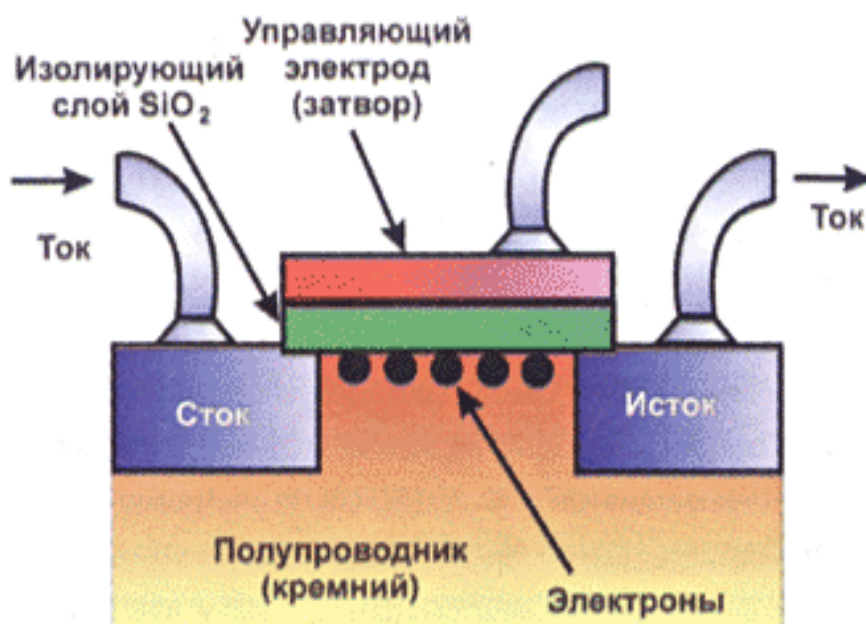


Рисунок 2 – Кремниевый транзистор

Вся современная цифровая техника построена, в основном, на полевых МОП (металл-оксид-полупроводник) – транзисторах (МОПТ), как более экономичных, по сравнению с БТ, элементах. Иногда их называют МДП (металл-диэлектрик-полупроводник)-транзисторы. Международный термин – MOSFET (metal-oxide-semiconductor field effect transistor). Транзисторы изготавливаются в рамках интегральной технологии на одном кремниевом кристалле (чипе) и составляют элементарный «кирпичик» для построения микросхем логики, памяти, процессора и т. п. Размеры современных МОПТ составляют от 90 до 25 нм.

Ещё в 1959 году Ричард Фейнман указал на то, что молекулы, обладающие определёнными свойствами, смогут работать как переключатели и заменить собой транзисторы, а технический прогресс сделает возможным и манипуляции с отдельными атомами и молекулами. Это предсказание начинает сбываться. Размеры молекулярного транзистора на два порядка меньше самых миниатюрных кремниевых. [15, с.34-38]

Поскольку, как мы уже говорили, производительность компьютера пропорциональна количеству транзисторов, размещаемых на единице площади, то выигрыш в производительности будет огромным. Так, если уменьшить размер транзистора до молекулярных размеров (примерно до одного нанометра), то на единице площади интегральной схемы поместится в миллион раз больше транзисторов. Если ещё вдобавок к этому время отклика

уменьшится до фемтосекунд (на шесть порядков) – а именно таково характеристическое время протекания элементарной стадии химической реакции, – то эффективность молекулярного компьютера может оказаться в 100 миллиардов раз выше, чем современного кремниевого.

Архитектура каждого компьютера включает три основных элемента: переключатели, память, соединяющие провода. Все элементы в молекулярных компьютерах будут отличаться от их же аналогов в нынешних вычислительных устройствах. Бистабильные молекулы – переключатели будут управляться световыми и электрическими импульсами или электрохимическими реакциями. Память может работать на принципе „запоминания“ оптических или магнитных эффектов, а проводниками могут стать нанотрубки или сопряжённые полимеры. [16, с.56-57]

Сейчас уже созданы многочисленные варианты всех основных составляющих компьютера будущего. Рассмотрим их по отдельности.

Наиболее эффективные молекулярные переключатели основаны на фотохромных соединениях, которые изомеризуются при переходе в высшие возбуждённые электронные состояния. Это может быть процесс цис-транс-изомеризации, перициклических превращений, фотопереноса протона. После переключения кардинально перестраивается электронная конфигурация системы (рисунок 1), а её геометрия остаётся практически прежней. Перспективны также топологические изомеры супрамолекул – например, переключатель, описанный Д.Ф. Стоддардом и Д. Хисом, которые сотрудничают с фирмой „Хьюлетт Паккард“ (рисунок 3).

Монослой молекул катенана помещают между металлическим и кремниевым электродами. После электрохимического окисления супрамолекулы на одной из её частей появляется дополнительный положительный заряд. Поскольку в исходной форме эта часть соседствует с одноимённым зарядом, то после окисления плюсы отталкиваются и молекула перегруппировывается. Образуется вторая стабильная форма, и меняется электрическое сопротивление. Главное достоинство такого переключателя – его исключительно высокая устойчивость. Цикл окисления-восстановления катенана можно совершать 10–20 тысяч раз без заметного разрушения супрамолекулярной системы.[3, с. 101-105]

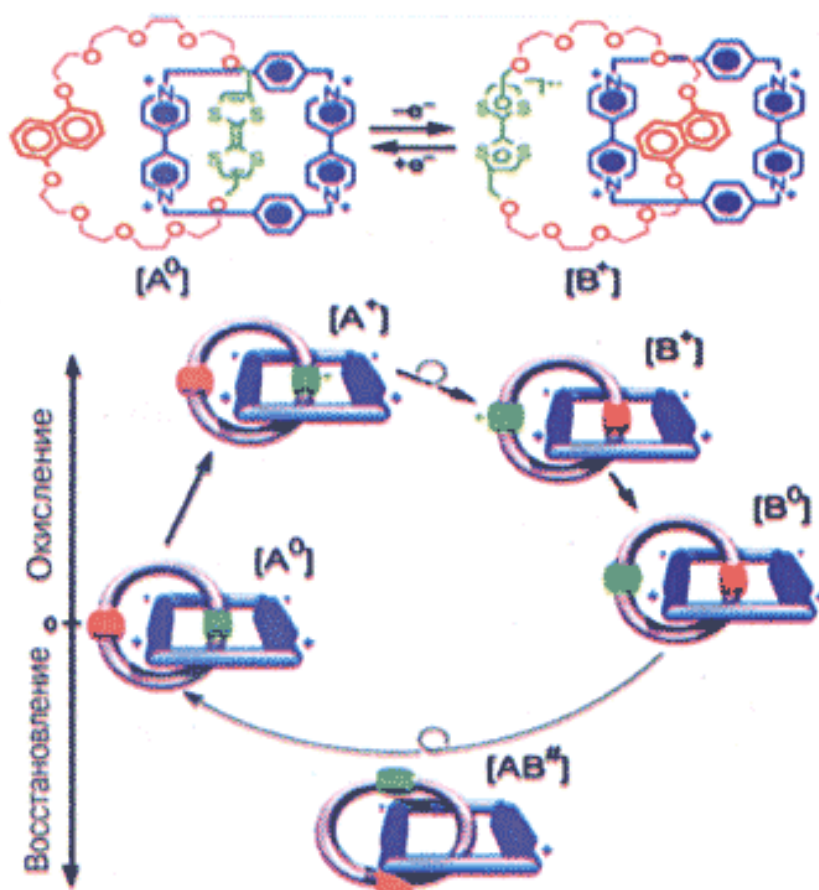


Рисунок 3 – Молекулярный переключатель. Переключение происходит при воздействии электрического поля (+2 В; –2 В), а считывание – измерением сопротивления (0,1 В)

Память молекулярного компьютера основана на тех же принципах, что и переключатели, в её основе – бистабильные молекулярные структуры и их же превращения. Конечно, для различных типов памяти потребуются различные характеристики этих превращений, а чтобы обеспечить долгое хранение записанной информации, будут нужны системы с большим временем жизни изомера Y (рисунок 1). Учёные предполагают, что в молекулярных компьютерах можно будет записывать оптическую информацию не только на поверхности активной среды, как это делается в настоящее время, а в полном объёме – то есть память станет трёхмерной. Если использовать для записи весь объём образца, то плотность записи на трёхмерном носителе с тем же источником света будет уже $6,5 \cdot 10^{12}$ бит/см³, на четыре порядка больше. Если же применять более жёсткое излучение, то объём записываемой информации увеличивается ещё на порядок.

Чтобы записать информацию в объёме образца или, по крайней мере, на нескольких его слоях, нужна новая система записи. Для этого используют метод двухфотонного поглощения. Суть метода в том, что необходимая для записи энергия ($h\nu$) доставляется двумя фокусируемыми в нужной точке лазерными пучками с частотами ν_1 и ν_2 , подобранными так, чтобы $h\nu = h\nu_1 + h\nu_2$ (рисунк 4). [4, с. 11-14], [5, с. 202-214]

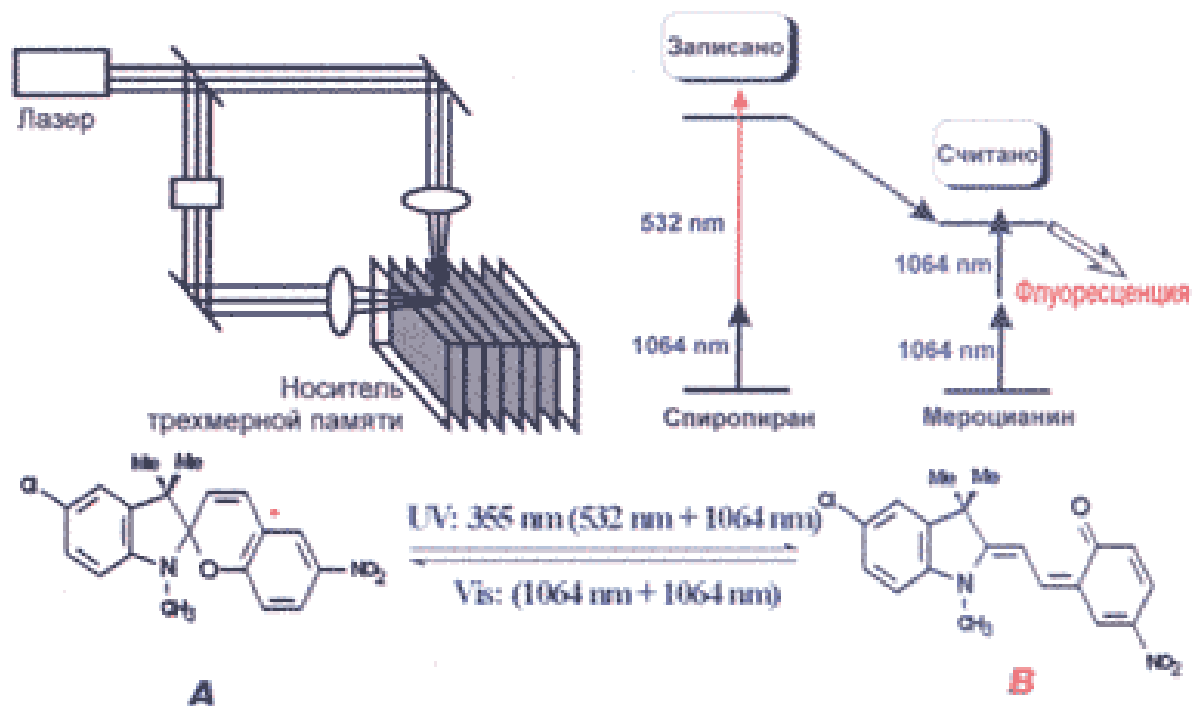


Рисунок 4 – Механизм трёхмерной (3D) молекулярной памяти

Впервые принципиальную возможность такой схемы показал П. Рентцепис (Калифорнийский университет) в конце 80-х годов XX века. Он использовал для этого, в частности, фотохромную спиропирановую систему. Поглотив два фотона, молекула А перегруппируется в окрашенную мероцианиновую форму В. Считывание записанной таким образом информации происходит при регистрации флуоресценции молекулы В, также возбуждаемой двухквантовым переходом. К числу лучших фотохромных систем принадлежат фульгиды индольного ряда (рисунок 5).

Очень интенсивные исследования по созданию органической трёхмерной памяти ведутся в Японии под руководством М. Ирие. В качестве объекта выбраны другие молекулы – диарилэтены (рисунок 6), но принцип их работы тот же, что и у фульгидной системы. М. Ирие – куратор совместного проекта Международного научно-технологического центра (МНТЦ), в котором также участвуют Институт Органической химии им. Н.Д. Зелинского РАН, Фотохи-

мический центр РАН и НИИ физической и органической химии Ростовского государственного университета.

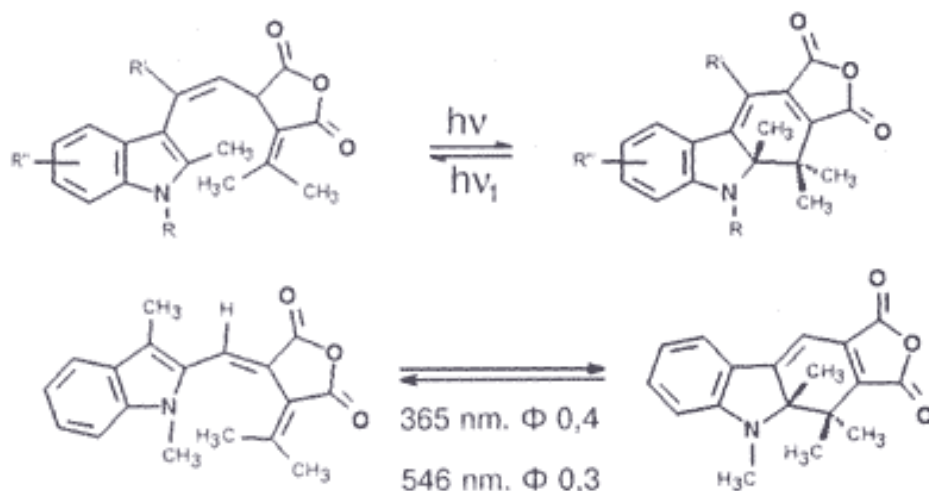


Рисунок 5 – 3- и 2-индолилфульгиды для трёхмерной оптической памяти

Другой перспективный подход к созданию молекулярной памяти продемонстрировали недавно М. Рид (Йельский университет) и Д. Тур (компания „Хьюлетт Паккард“). Они сделали сэндвич примерно из 1000 молекул ароматического дитиола и поместили его между золотыми электродами (рисунок 7). При определённом напряжении, поданном на электроды, этот сэндвич удерживает электроны (то есть хранит данное состояние в памяти) в течение примерно 10 минут (стандартная кремниевая динамическая память DRAM удерживает всего на миллисекунды).

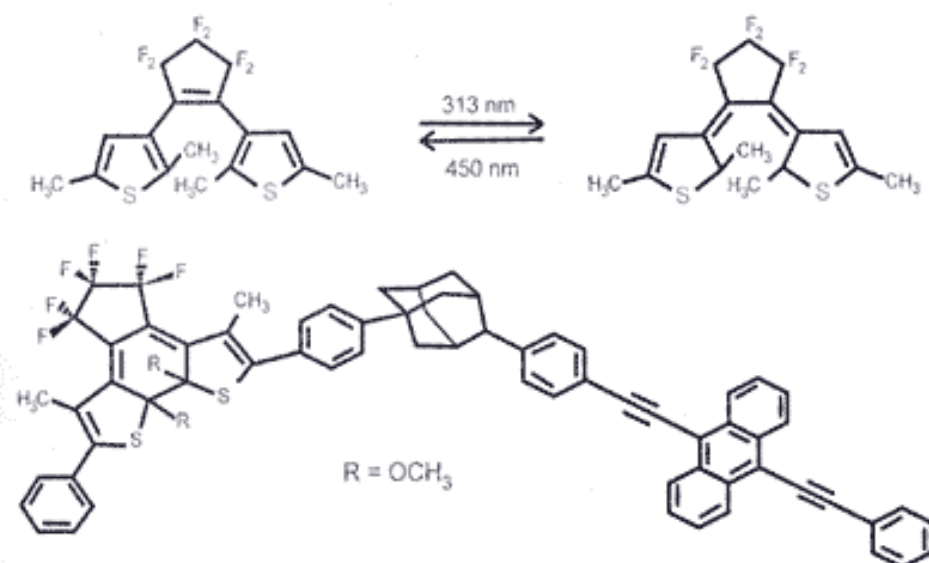


Рисунок 6 – Диарилэтены для трёхмерной оптической памяти



Рисунок 7 – Ещё один вариант молекулярной памяти – „электронная присоска“. Сандвич из 1000 молекул поместили между золотыми электродами

При напряжении 5В ученым удалось поддерживать ток в 0,2 микроампера, что соответствует потоку 10^{12} электронов в секунду. Это намного больше того, что они ожидали после теоретических расчётов. Интересно, что электроны проходят через молекулу без рассеяния тепла. Авторы исследования думают, что их „электронная присоска“, как они её назвали, может служить прототипом нового поколения динамической памяти. [6, с. 3-5], [7, с.34-41]

Наконец, третий компонент молекулярных компьютеров – проводники, обеспечивающие сообщение между молекулярными транзисторами и молекулярными устройствами памяти. Дизайн проводников, также имеющих наноскопические размеры, учёные ведут по трём основным направлениям. Первое – это проводящие полимеры: допированный полиацетилен (Нобелевская премия 2000 года), политиофен, полианилин и др. Второе – различные органические проводники, которые обладают достаточно высокой проводимостью, до 10^2 - 10^3 с/м. Все они представляют собой длинные сопряжённые молекулы, в которых электрон переносится по цепи π -связей (рисунок 8). [8, с.14-15], [9, с.32-33]

Если к концам такой сопряжённой цепи присоединить металл-содержащие группы, то окисление или восстановление одной из них обеспечит достаточную проводимость по всей цепи. Комбинируя допированные (проводящие) и недопированные (со свойствами изоляторов или полупроводников) участки полимеров, можно получать электрические контуры с нужными свойствами.[10, с.123-124]

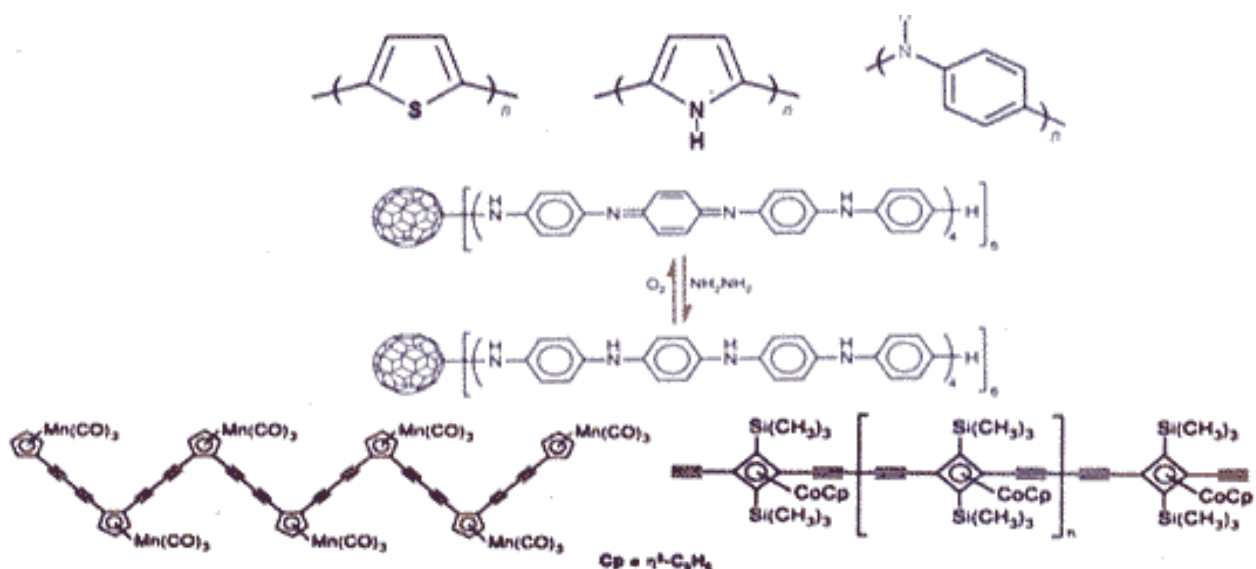


Рисунок 8 – Молекулярные провода

Особые надежды возлагаются на третий тип проводников – нанотрубки. Это великолепный материал для молекулярной электроники. Нанотрубки с однослойными или многослойными стенками получают при прохождении электрического разряда между двумя графитовыми электродами. Длина одностенных нанотрубок может достигать микрометров (диаметр около 1 нм), причём на отрезках по 150 нм сохраняются металлические свойства. Углеродные или боразотные нанотрубки можно заполнять металлами и получать, таким образом, одномерные проводники, состоящие из цепочек атомов металлов. С одностенными нанотрубками удаётся сделать ещё более интересные вещи. [11, с.12-17]

При помощи атомно-силового микроскопа, скручивая однослойную нанотрубку, удалось получить участки, на которых сопротивление достигает 50 килоОм, в результате чего образуется барьер для движения электрона. При определённом напряжении можно переключать состояния одностенной нанотрубки: „проводимое“ – „непроводимое“, перемещая один-единственный электрон. Фактически это прототип транзистора на одном электроны. Существует также прототип транзистора на одной молекуле, который изучают в Корнельском и Гарвардском университетах (рисунок 9).

Молекулярные транзисторы, память и проводники – три составные части будущего молекулярного компьютера, и в их создании по отдельности, как мы видим, есть значительные успехи. Но самая сложная задача – собрать все компоненты в работающее устройство. До её решения ещё далеко. Однако путь, по которому надо идти, вполне ясен: это принцип молекулярного

распознавания, ответственный за самосборку и самоорганизацию сложных ансамблей и агрегатов молекул. Этот же принцип лежит в основе происхождения жизни, и именно его использует природа для создания таких сложных структур, как двойная спираль ДНК, жидкие мембраны и глобулярные протеины.[12, с.456-457]

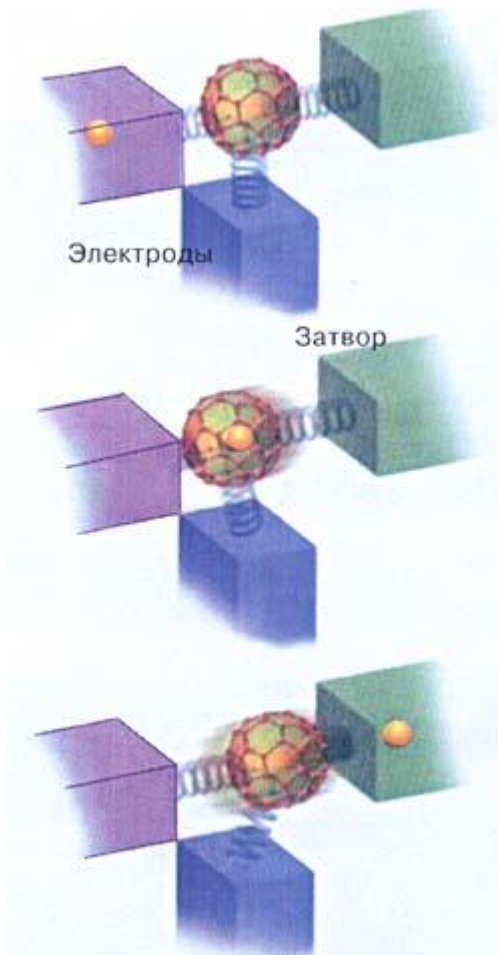


Рисунок 9 – Транзистор на одной молекуле. Бакибол (60 ат. углерода) удерживается между электродами электрическими силами.

Пока эта задача не решена, учёные предполагают делать гибридные устройства, сочетающие достоинства молекулярного подхода с наиболее успешными технологическими вариантами, найденными для кремниевых технологий. Гибридные устройства можно сделать, например, используя повышенное сродство атомов серы в органических молекулах к тяжёлым металлам (рисунок 10), особенно золоту. Так создаются контакты между металлическими электродами и молекулярными проводниками.[13, с.12-14]

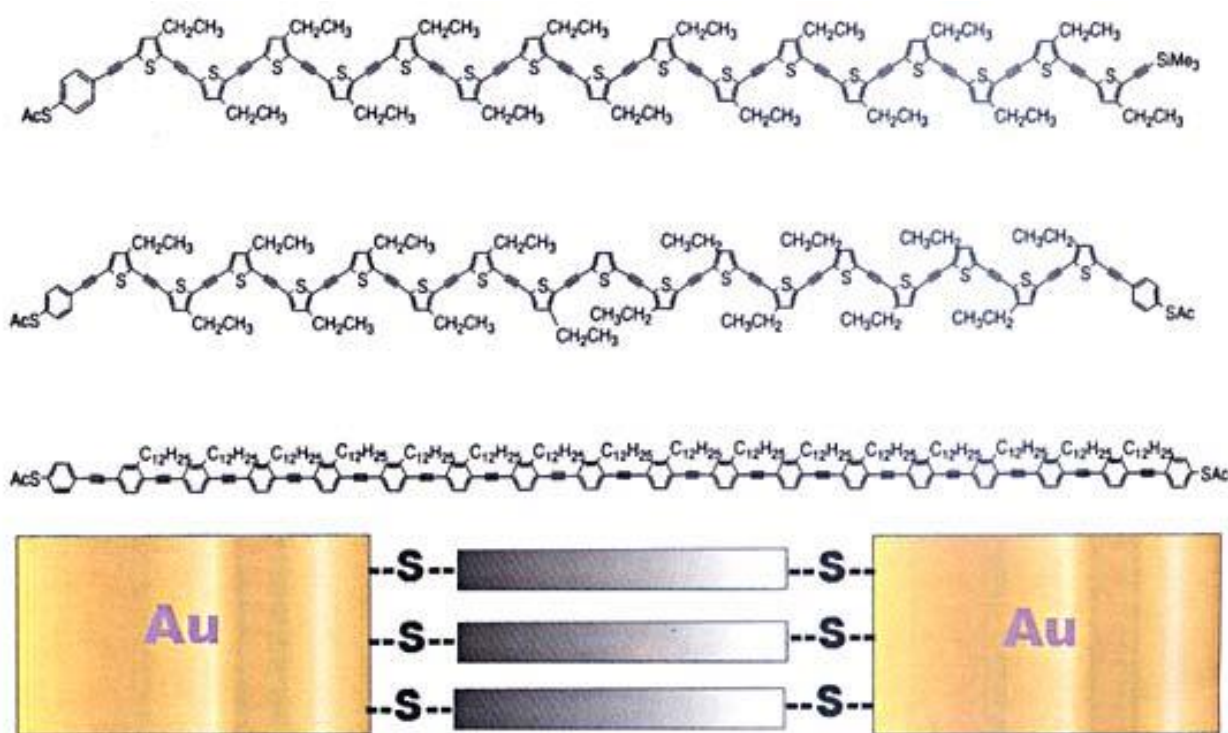


Рисунок 10 – Гибридное устройство: молекулярный проводник и золотые электроды

До сих пор мы рассматривали примеры, когда все функции компонентов компьютера обеспечиваются передвижением электронов в сложных молекулярных ансамблях. [19, с.56-57]

Между тем эти функции могут взять на себя и фотоны. Уже предложены различные варианты фотонных устройств, например молекулярный фотонный транзистор (рисунок 11).

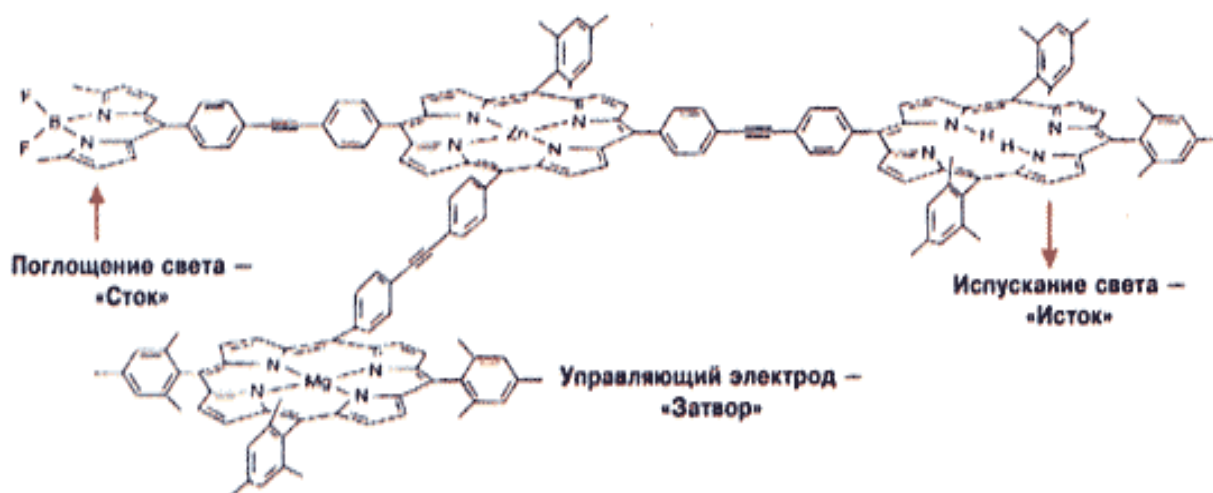


Рисунок 11 – Молекулярный фотонный транзистор

В фотонном транзисторе фрагмент молекулы, поглощающий квант света (дипиррильбородифторид), играет роль стокового электрода, следующая молекула (цинковый порфирин) – проводника, а последний излучающий порфириновый фрагмент молекулы соответствует электроду истока. Магниевого порфина работает как

управляющий электрод – затвор. Если окислить этот затвор, то после поглощения света перенос энергии происходит не на цинковый порфирин, а на неизлучающий магниевый. В компьютерах на подобных транзисторах, регулирование всей его работы будет происходить с помощью света.[17, с.10-11], [18, с.33-34]

По прогнозам молекулярные компьютеры будут распространены к 2020–2030 году. Это не значит, что существующее поколение кремниевых компьютеров полностью и сразу отомрёт, просто рядом с ним появится более мощная генерация, в т.ч. компьютеры на квантовых точках, ДНК-компьютеры.

Квантовые компьютеры

Квантовый компьютер – это компьютер, в котором в качестве битов выступают квантовые объекты, например спины электронов или ядер. Такой компьютер станет ещё одним шагом вперёд по сравнению с молекулярным. В квантовом компьютере вместо значений „0“ или „1“, как у классического бита, у нас будет квантовый бит (кубит). Кубит может принимать несколько различных значений – нормированных комбинаций двух основных состояний спина, что даёт большое число сочетаний (рисунок 12). [20, с.11-12]

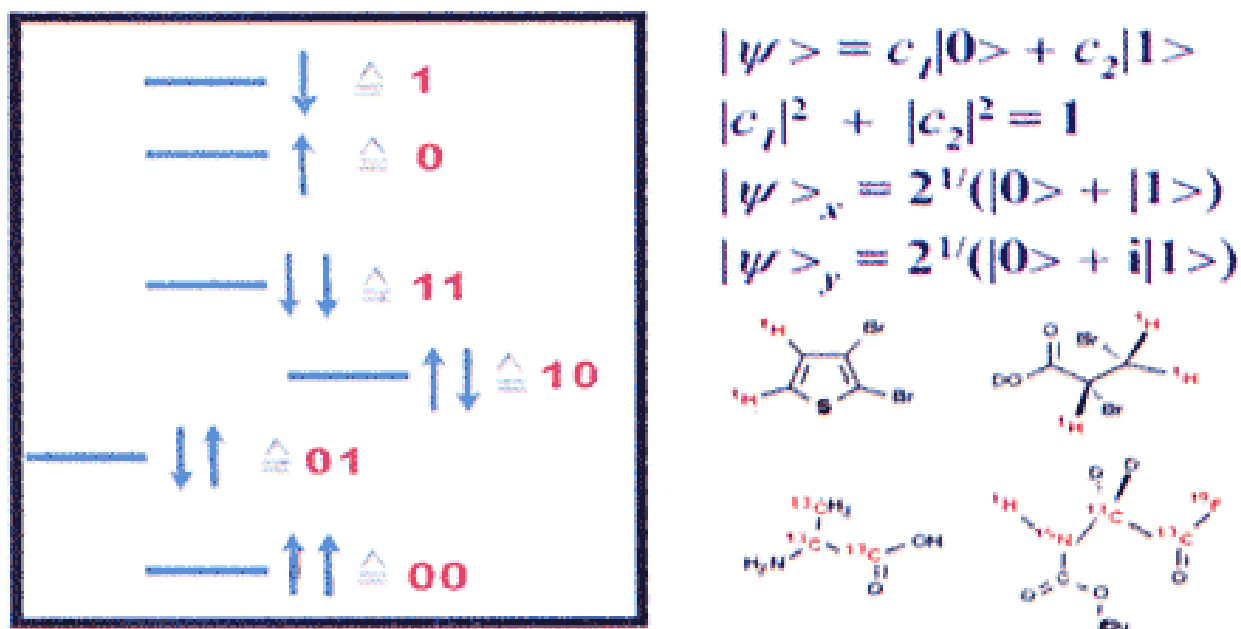


Рисунок 12 – Квантовые компьютеры. Квантовый бит – это спин электрона или ядра

Так, 32 кубита могут образовать около 4 миллиардов состояний, а при наборе из 300 кубитов квантовый компьютер в принципе способен найти 2^{300} возможных решений – это число примерно равно

числу всех элементарных частиц во Вселенной. Уже разработаны алгоритмы для квантовых компьютеров, причём значительный вклад в эту работу внесён отечественными учёными (например, А.А.Ляпуновым).[21, с.56-59]

В том случае, когда роль кубитов выполняют спины ядер, связанные спин-спиновыми взаимодействиями, в качестве квантового компьютера можно использовать спектрометр ЯМР. Тогда при помощи различных импульсных последовательностей можно задать любые соотношения между кубитами. Группа Д. Оушеломы (Калифорнийский университет) сообщила о том, что им удалось с помощью комбинации импульсов трёх лазеров перемещать сигнал между квантовыми кубитами. Передача сигнала занимала около ста фемтосекунд ($1 \text{ фс} = 10^{-15} \text{ с}$). Изучены возможности 7-кубитового квантового компьютера, созданного на металлоорганической молекуле с семью гетероядерными спинами (рисунок 13). [22, с.45-46], [23, с.67-68], [26, с. 3-29]

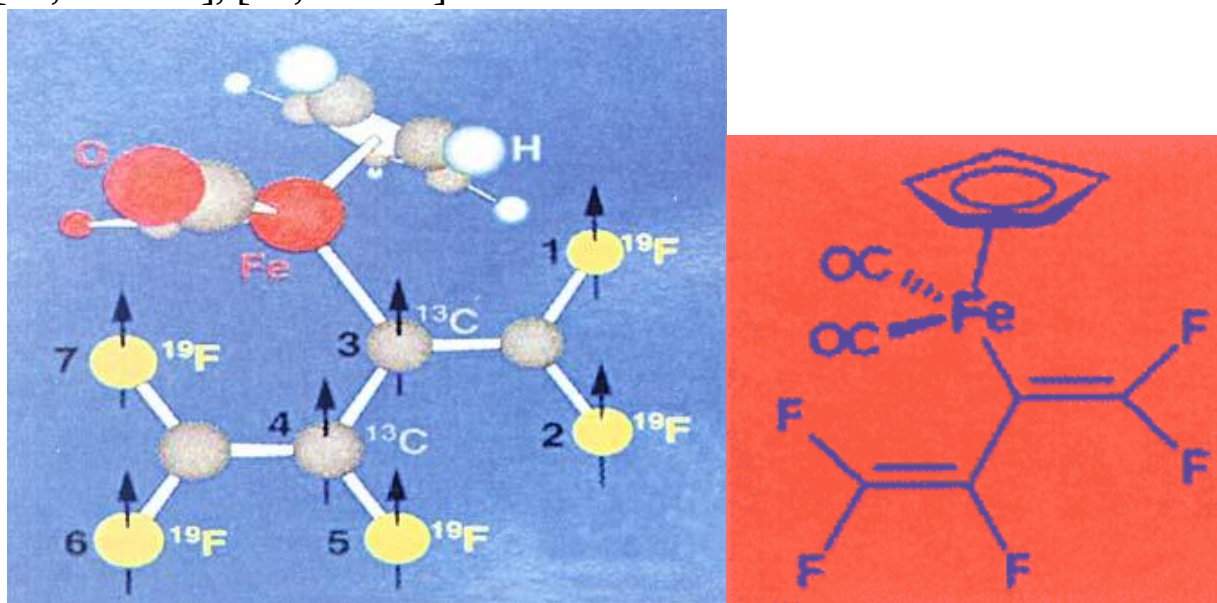


Рисунок 13 – 7-кубитовый квантовый компьютер на молекуле с семью гетероядерными спинами

ДНК – компьютеры

Еще один интересный новый подход – ДНК-компьютеры.

Вычисления на ДНК – это раздел области молекулярных вычислений, нового междисциплинарного направления исследований на границе молекулярной биологии и компьютерных наук. Основная идея ДНК-вычислений – построение новой парадигмы вычислений, новых моделей, новых алгоритмов на основе знаний о стро-

ении и функциях молекулы ДНК и операций, которые выполняются в живых клетках над молекулами ДНК при помощи различных ферментов. Основные надежды, которые возлагаются на область ДНК-вычислений в практическом смысле – это новые методы синтеза веществ и объектов на молекулярном уровне.

Область ДНК-вычислений несет новые идеи для специалистов по нанотехнологиям, идеи, связанные с программируемым синтезом структур на наноуровне, со сборкой методами «снизу вверх» с использованием механизмов самоорганизации и самоформирования на молекулярном уровне [1, с.25-34].

Для специалистов в области компьютерных наук, теории вычислений, парадигма ДНК-вычислений интересна новыми открывающимися возможностями: новыми моделями вычислений, новыми алгоритмами, возможностью решения задач, не решаемых в рамках классической парадигмы вычислений, возможностью исследования процессов массового параллелизма, которые средствами классической парадигмы даются трудно.

Специалистам по молекулярной биологии область ДНК-вычислений может дать новые идеи, которые развивались ранее в компьютерных науках, новые инструментальные средства, новые подходы в моделировании живого вещества на молекулярном уровне.

Опыт междисциплинарного диалога между математиками, специалистами по генетике и молекулярной биологии уже существует. Этот диалог начался с идей А.А.Ляпунова и продолжался долгие годы в Новосибирском университете и Институте цитологии и генетики СО АН СССР.

При этом в контексте ДНК-вычислений могут быть переосмыслены и использованы и существующие математические модели синтеза различных молекулярных структур [4], и огромный накопленный к настоящему времени экспериментальный потенциал.

Молекула ДНК представляет собой двойную ленту, составленную из четырех оснований: А (аденин), Т (тимин), Г (гуанин), Ц (цитозин).

На вопрос о том, смогут ли ДНК-вычислители конкурировать в будущем с существующими процессорами, Э. Шапиро отвечает, что такой вопрос даже не ставится. Как и многие другие исследователи, Э. Шапиро полагает, что основное назначение ДНК вычислителей – это тонкий химический синтез, сборка нужных молекул и кон-

струкций. В самом деле, собственно вычисление – обработка входной последовательности, занимает очень малое время. Значительное время тратится на то, чтобы понять, какой собственно результат получен.

В лаборатории молекулярных вычислений в Калифорнийском технологическом институте под руководством Э. Винфри (E.Winfree) успешно разрабатываются методы синтеза различных поверхностей при помощи ДНК. Оказывается, можно использовать двумерные плитки различной формы, которые могут взаимодействовать по локальным правилам (соединяться друг с другом), для того, чтобы получить в результате взаимодействия множества плиток желаемую глобальную структуру. При этом под вычислением понимается процесс создания такой структуры. [17, с.114-123], [18, с.102-111]

Разберем простейший пример вычисления, который приводится в работах сотрудников лаборатории Э. Винфри. Пусть необходимо реализовать простейший алгоритм – счетчик. Для этого нам понадобятся рабочие элементы четырех типов (рисунок 15), и элементы, задающие граничные условия – трех типов (рисунок 16).

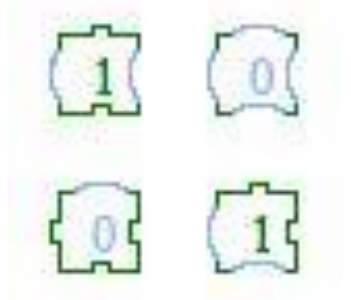


Рисунок 15 – Рабочие элементы

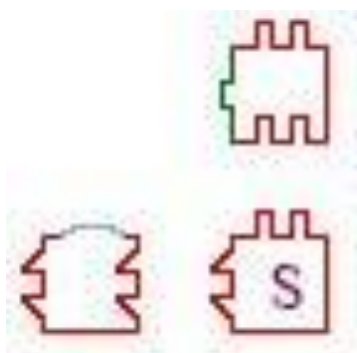


Рисунок 16 – Элементы, задающие граничные условия

Правило создания структуры чрезвычайно простое: во главу угла ставится плитка S, две оставшиеся граничные плитки выкладываются в направлении вверх и влево, затем, справа налево ряд за

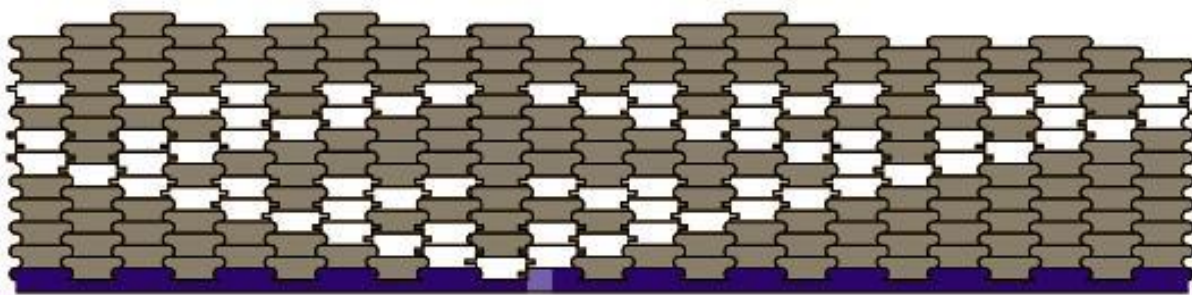


Рисунок 19 – Ковер Серпинского из плиток

Далее, каждой плитке ставится в соответствие молекула ДНК. В реальном опыте используются несколько иные плитки, чем показанные на рисунке 4.

В результате опыта под атомно-силовым микроскопом можно видеть следующую структуру (рисунок 20) На рисунке видно, что в результате опыта получаются достаточно большие (порядка десятков слоев) структуры, в которых количество ошибок не слишком велико (ошибки отмечены крестиками).

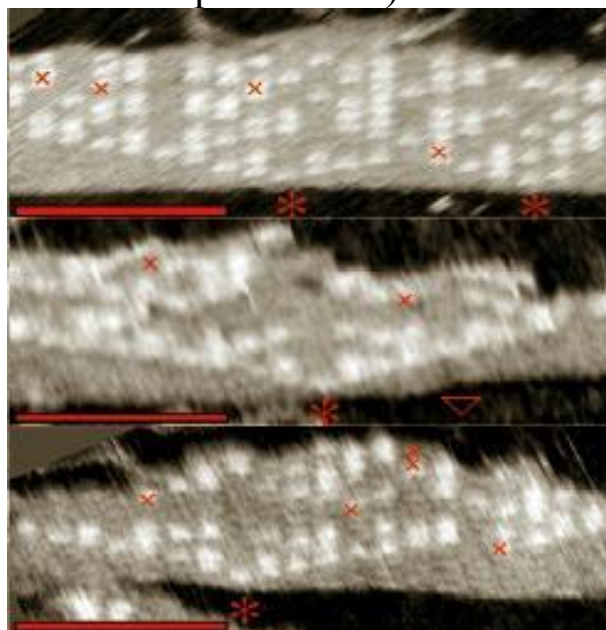


Рисунок 20 – Синтез ковра Серпинского при помощи ДНК

Методика, разработанная в лаборатории Э.Винфри, позволяет синтезировать и трехмерные объекты – например, микротрубочки [11, с. 75-77].

После проведения опытов возникает потребность в общих моделях молекулярных вычислений, которые бы позволяли проектировать новые эксперименты и обобщать существующие.

Модель параллельной фильтрации (Parallel Filtering Model)

Происхождение данной модели уходит корнями в эксперимент Элдмана. Описание модели приводится по [12, с.37-45]. В модели основной упор делается на фильтрацию потому, что множество всевозможных решений задачи получается уже на первом шаге за счет того, что взаимодействующие молекулы ДНК спроектированы нужным образом. А основная часть алгоритма – это извлечение нужного результата из множества всевозможных результатов.

Пробирка – это мультимножество слов (конечных строк) над алфавитом $\{A, C, G, T\}$. Мультимножество – это, по сути, объединение множеств, каждое из которых содержит элементы только одного типа, или же о мультимножестве можно думать как о множестве, которое определяется множеством неповторяющихся элементов, каждому из которых приписано натуральное число, означающее количество элементов данного типа в мультимножестве. Следующие основные операции были первоначально определены для пробирок, т.е. мультимножеств одинарных цепочек ДНК. Однако их подходящие модификации будут применяться и к двойным цепочкам.

Слить. Образовать объединение $N_1 \cup N_2$ (в смысле мультимножеств) двух данных пробирок N_1 и N_2 .

Размножить. Изготовить две копии данной пробирки N .

Обнаружить. Возвратить значение *истина*, если данная пробирка N содержит, по крайней мере, одну цепочку ДНК, в противном случае возвратить значение *ложь*.

Разделить (или Извлечь). По данным пробирке N и слову w над алфавитом $\{A, C, G, T\}$ изготовить две пробирки $+(N, w)$ и $-(N, w)$ такие, что $+(N, w)$ состоит из всех цепочек в N , содержащих w в качестве (последовательной) подстроки, а $-(N, w)$ состоит из всех цепочек в N , которые не содержат w в качестве подстроки.

Разделить по длине. По данным пробирке N и целому числу n , изготовить пробирку $(N, \leq n)$, состоящую из всех цепочек из N длины не больше n .

Разделить по префиксу (суффиксу). По данным пробирке N и слову w , изготовить пробирку $B(N, w)$ (соответственно $E(N, w)$), состоящую из всех цепочек в N , начало (соответственно конец) которых совпадает со словом w .

В приведенных терминах стадия фильтрации в опыте Эдлмана может быть описана следующей программой, которая начинает свою работу после того, как произошло сшивание всех нужных молекул и в пробирке N образовалось множество всех возможных путей в графе G . (Каждый из олигонуклеотидов s_i , $0 \leq i \leq 6$, имеет длину 20).

(1) ввести (N)

(2) $N \leftarrow B(N, s_0)$ // выделить все цепочки, которые начинаются с вершины S_0

(3) $N \leftarrow E(N, s_6)$ // выделить все цепочки, которые заканчиваются на S_6

(4) $N \leftarrow (N, \leq 140)$ // выделить все цепочки длиной не больше 140

(5) для i от 1 до 5 выполнить $N \leftarrow N + (N, s_i)$ // для каждой из вершин от s_1 до s_5 выделить // только те цепочки, которые содержат данную вершину

(6) обнаружить (N) // true если осталась хоть одна цепочка, false – в противном случае.

Плиточная модель

Существует задача об отыскании набора геометрических фигур на плоскости (плиток), которыми Евклидова плоскость может быть покрыта только непериодическим образом. В 1961 г. было показано, что невозможно создать алгоритм, который определяет, можно ли покрыть плоскость при помощи заданного набора плиток, или нет. Позже был предъявлен набор из 20426 плиток, которыми можно покрыть плоскость только непериодически. В дальнейшем количество плиток было сокращено сначала до 104, а затем и до 6, и, наконец, до двух (рисунок 21) [20, с.45-47].

Интересен следующий факт: Р. Пенроуз получил свой набор из 2-х плиток путем различных манипуляций *разрезания и склеивания* над набором Робинсона из 6 плиток.

В свете мысли о задаче покрытия и мысли об экспериментах Э.Винфри, в которых исходным материалом служат наборы плиток, которые затем преобразуются в молекулы ДНК, рождается идея о разработке парадигмы ДНК-вычислений именно в «плиточных терминах». При этом ДНК-вычислитель будет представлять собой клеточный автомат из клеток произвольной формы, а локальные пра-

вила взаимодействия клеток будут определяться их формой. С одной стороны, такой автомат будет дискретным, т.к. будет состоять из отдельных взаимодействующих плиток, и к нему будет применимо понятие шага. А с другой стороны, локальные правила задаются за счет непрерывной формы границы взаимодействующих плиток. Данный подход сразу же обеспечивает возможность описания параллельных процессов, которые изначально присущи ДНК-вычислителю. При всей фантастичности данного подхода, нельзя не признать, что он несет значительный эвристический потенциал.

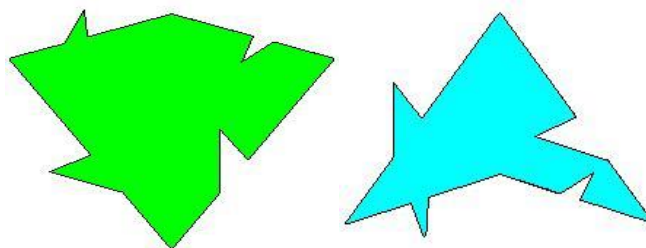


Рисунок 21 – Плитки Пенроуза, которыми плоскость может быть заполнена только неперiodическим образом

Теоретическим базисом «плиточной» модели могут быть, с одной стороны, все работы, относящиеся к проблеме покрытия (Ванга, Бергера, Робинсона, Пенроуза), с другой стороны – работы Э. Винфри, направленные на получение нужных структур на практике, а с третьей – работы по теории клеточных автоматов с «квадратными клетками».

Покажем, с какими инструментальными средствами можно работать в рамках этой парадигмы.

Помимо разработки новых алгоритмов и новых принципов вычислений, область молекулярных вычислений интересна для специалистов по компьютерным наукам как источник задач создания инструментальных средств для работы с последовательностями ДНК, молекулами, замощениями.[23, с. 156-158]

Симулятор Xgrow разработан в лаборатории молекулярных вычислений Калифорнийского технологического института Э.Винфри. Он использует в своей работе модели aTAM (abstract Tile Assembly Model) и kTAM (kinetic Tile Assembly Model), описанные в работах [16, с.67-69] и [17, с.34-37] соответственно. Попросту говоря, симулятор Xgrow позволяет имитировать процесс синтеза различных структур, получая на входе набор плиток, а также позволяет оце-

нить возможные ошибки при создании структуры. Например, на рис. 30 представлен процесс моделирования синтеза структуры «ковер Серпинского».

Система Namot была разработана в 1994-1995 годах в Лос-Аламосской лаборатории США. Namot расшифровывается как Nucleic Acid MOdeling Tool. Она представляет собой графическое средство работы с молекулярными структурами. С ее помощью можно составлять структуры из атомов, задавать связи в трехмерном пространстве, строить последовательности молекулярных операций. Внешний вид программы с собранной молекулярной структурой показан на рисунке 22.

С точки зрения компьютерных наук и математического моделирования, дальнейшее развитие парадигмы ДНК-вычислений, по-видимому, обещает нам новые методы построения и анализа моделей: вместо того, чтобы упрощать, строить иерархии упрощенных моделей, мы, по-видимому, сможем учитывать в моделях большое количество вариантов и параметров, а параметрами порядка станут какие-то биологические параметры модели.

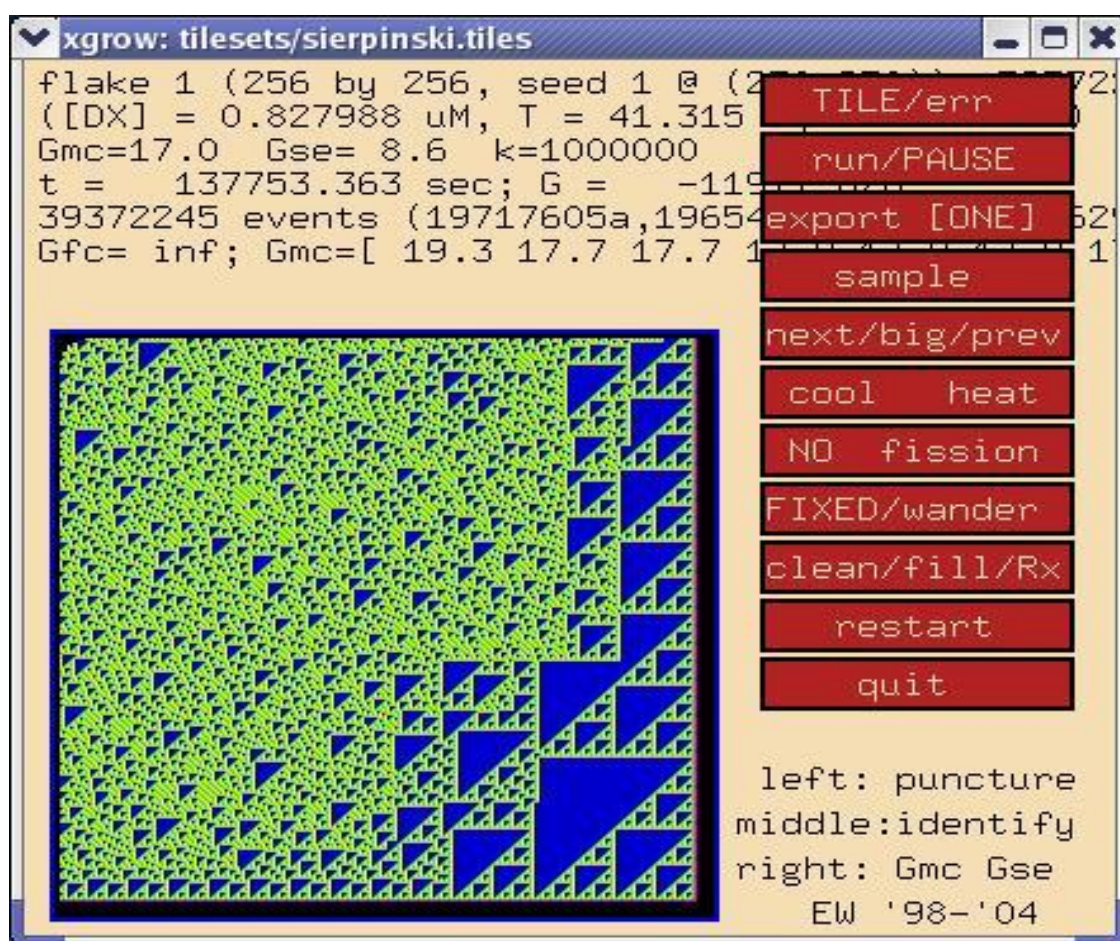


Рисунок 22 – Симулятор Xgrow в работе

Дальнейшее развитие области ДНК-вычислений требует значительных междисциплинарных усилий. С одной стороны, специалисты по теории вычислений и математическому моделированию представляют себе ситуацию на уровне молекул чрезвычайно упрощенно. С другой стороны, возможно как раз в силу недооценки сложности ситуации они располагают арсеналом идей, которые могут быть применены для молекулярной сборки, а также методами построения моделей процессов, происходящих на молекулярном уровне. Участие же в исследованиях по ДНК-вычислениям, с одной стороны, специалистов по молекулярной биологии, которые смогут ответить на вопросы принципиальной осуществимости тех или иных идей сборки, и специалистов – нанотехнологов, которые понимают, какие структуры и объекты нужно синтезировать, и какие структуры могут быть синтезированы при текущем уровне развитии технологий, является решающим.

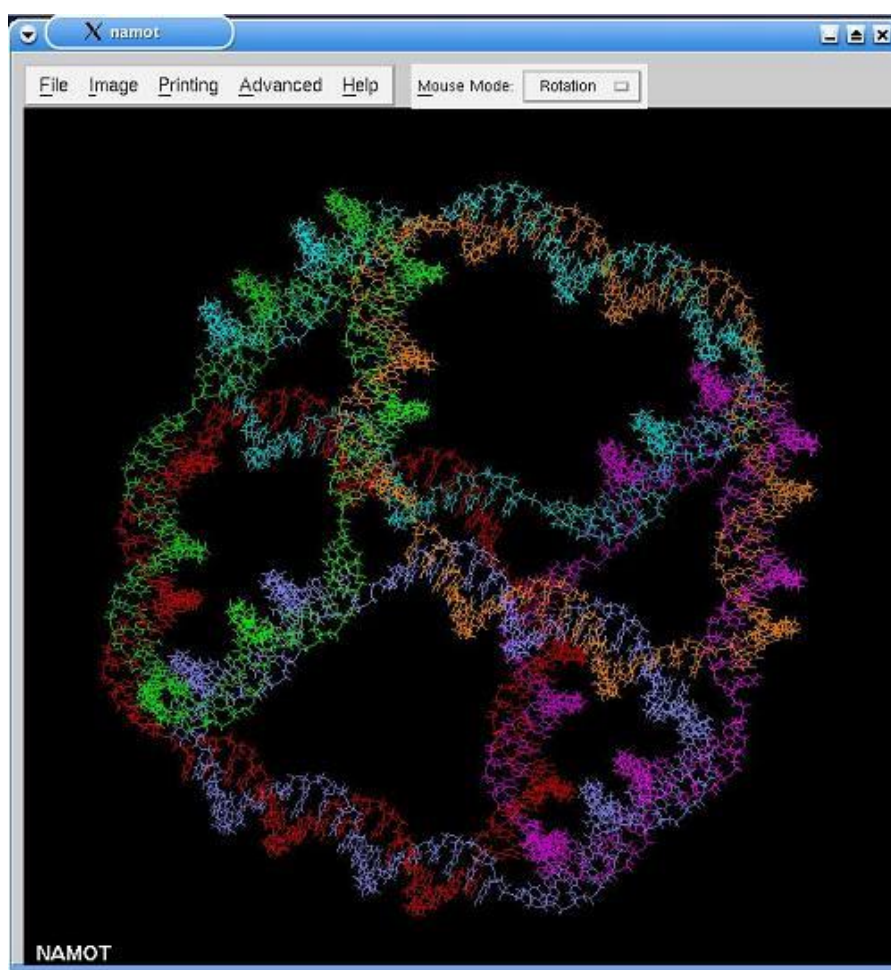


Рисунок 23 – Namot в действии

Нанокomпьютеры

Третья технология, которая нас интересует – это нанокomпьютер.

Нанокomпьютер – это:

1. квантовый или механический компьютер нанометровых размеров с высокой производительностью;
2. компьютер, логические элементы которого имеют молекулярные размеры; контроллер наноробота должен быть нанокomпьютером;
3. компьютер микроскопических размеров, разрабатываемый на основе нанотехнологий.

Разумеется, терминологические проблемы – не главное, чем озабочены сегодня исследователи, творцы нового компьютерного железа.

Изменение физических свойств материалов при уменьшении размеров рабочих элементов логических устройств, способы сборки этих устройств и их системной интеграции, возможность детерминированного управления их функционированием, потери информации и термодинамика наноустройств, физические пределы представления и обработки информации в них, – эти и многие другие важнейшие проблемы составляют сегодня список тем научных исследований и разработок.[1, с. 10]

Нанoeлектроника, нанокomпьютеры, нанороботы и молекулярно-механические автоматы не просто переведут информационные технологии на более совершенную элементную базу.

С переходом на уровень нанотехнологий станет возможным снижение минимально допустимых размеров компьютера до субклеточного уровня. Плотность хранения информации в искусственных системах уже сейчас может превышать плотность информации, кодирующей наследственность человека. Способы представления информации в системах, созданных человеком, почти достигли физических пределов, установленных фундаментальными законами природы.

Нанокomпьютеры будут развиваться одновременно по нескольким направлениям, реализующим различные способы представления информации – на основе квантовой логики, классической логики, нейробиологии, а также некоторые другие, которым в настоящее

время трудно дать определение, – генетические, молекулярно-биологические, молекулярно-механические и др.

Технически в настоящее время наиболее развито направление, в основе которого лежит использование электронных нанотранзисторов, в том числе одноэлектронных (SET, single-electron transistor), включая также транзисторы с поляризованными электронами (спинтронные транзисторы). В таких транзисторах уже достигнут квантовомеханический предел передачи классической информации, налагаемый принципом Паули и принципом неопределенности Гейзенберга. Достигнут также и уровень тепловыделения, определяемый принципом Ландауэра при потере бита информации в необратимых вычислениях. Несмотря на то, что реального применения SET в компьютерной технике не зафиксировано, проработка различных архитектурных вариантов будущих нанокomпьютеров на их основе идет.

При этом роль физических критериев, определяющих границы реализуемости вычислительных структур, является, несомненно, определяющей.

Термодинамика нанокomпьютера

Объемная плотность транзисторов в разрабатываемых интегральных наносхемах предельно высока. В таких условиях вопросы энергетики перспективного нанокomпьютера оказываются чрезвычайно важными. Существует фундаментальное ограничение плотности упаковки логических элементов, связанное уже не с атомной структурой вещества, а с термодинамикой вычислительного процесса как такового. Его суть выражается принципом Ландауэра, согласно которому потеря одного бита информации ведет к выделению тепловой энергии, равной $k_B T \ln 2$, где k_B – постоянная Больцмана, T – температура процессора. В настоящее время просматриваются различные пути решения проблемы перегрева процессора. Например, – реализация обратимых вычислений. Это возможно при организации вычислительного процесса на основе принципов квантовой информатики.

Ближе к воплощению другой путь, позволяющий ориентироваться на уже существующие принципы организации вычислительного процесса. Согласно принципу Ландауэра, при работе в рамках классической логики любое переключение транзистора приводит к

выделению тепла, пропорционального температуре транзистора. Если понизить температуру транзистора, можно будет понизить напряжение питания и, следовательно, уменьшить тепловыделение (снижать напряжение питания без снижения температуры процессора нельзя, так как это приведет к сбоям в работе).

Как сильно требуется охладить процессор, чтобы добиться существенного выигрыша в тепловыделении? Из основного соотношения Ландауэра видно, что охлаждение процессора даже до температуры жидкого азота ($77,4\text{ }^{\circ}\text{K}$) не дает больших преимуществ, так как снижает тепловыделение по сравнению с режимом работы при комнатной температуре всего лишь в четыре раза. То есть если процессор без охлаждения рассеивал, допустим, мощность 60 Вт, то при температуре жидкого азота он будет рассеивать мощность 15 Вт.

Охлаждение до температуры жидкого гелия ($4,2\text{ }^{\circ}\text{K}$) понижает температуру вычислительного процесса примерно в сто раз, что дает для рассматриваемого случая мощность рассеяния 600 мВт. Производительность нанокomпьютера, охлаждаемого жидким гелием, можно оценить следующим образом.

Теплота испарения жидкого гелия примерно равна $3 \cdot 10^3$ Дж/л. Таким образом, одного кубического миллиметра жидкого гелия, расходуемого за 1 секунду при температуре $4,2\text{ }^{\circ}\text{K}$, будет достаточно для отвода ландауэровского тепла от машины с вычислительной производительностью примерно $5 \cdot 10^{19}$ бит/с. Если предположить, что одновременно будет переключаться 100 млн. одноэлектронных транзисторов, то рабочая частота нанокomпьютера может быть выше 100 ГГц, а тепловыделение – лишь 3 мВт. Создание криогенного наночипа – дело вполне реальное, так как в системе замкнутого оборота криогенного кулера должно быть всего-навсего несколько кубических миллиметров жидкого гелия.

С другой стороны, $3\text{ }^{\circ}\text{K}$ – это температура космоса. Суперкомпьютерные центры, расположенные на геостационарных орбитах с космическим холодом, оснащенные мощными информационными каналами связи с Землей, – новое направление развития IT-бизнеса в будущем.

Известны и другие физические механизмы, используя которые, можно оптимизировать термодинамику классического компьютера. Дело в том, что принцип Ландауэра выводится в предположении, что вычислительная среда характеризуется одной температурой T .

Однако в физике известны среды с двумя и более температурами, то есть являющиеся термодинамически неравновесными. Пример – всем хорошо известные газоразрядные лампы дневного света. Атомно-молекулярная подсистема здесь характеризуется комнатной температурой (300 °K), а система свободных электронов – температурой в 30–50 раз большей (10000 °K).

Поэтому в вычислительной среде можно создавать переохлажденную рабочую подсистему с очень низкой температурой, а по завершении вычислительного процесса считывать результат еще до того, как начнут сказываться потери информации в результате возвращения системы к состоянию теплового равновесия. Последовательная реализация такого подхода подводит нас к идее оптимального сочетания квантового и классического построения вычислительных систем. Например, можно использовать взаимодействие холодных квантовых пучков легких частиц с массивами более теплых тяжелых частиц.

Такие компьютеры уже существуют. Это – оптические компьютеры. В них низкоэнтропийные пучки света проходят через оптическую систему практически без тепловых потерь. Ландауэровское тепло выделяется лишь в детекторах излучения при считывании результата. В этом и состоит главный «секрет» современного чуда – оптоволоконных систем связи. На данный момент в оптических компьютерах реализуются «самые холодные» вычисления. Что касается электронных компьютеров, то для них тоже можно реализовать вычислительный процесс в термодинамически неравновесных условиях, так как масса электрона во много раз меньше массы атомов. Например, возможно создание вычислительных наноструктур с пучками переохлажденных электронов, распространяющихся в решетке из тяжелых атомов. Транзисторы, в которых электроны пролетают через рабочий канал, практически не испытывая тепловых столкновений с атомами, уже созданы – это баллистические транзисторы. Следующий шаг – создание баллистических транзисторов с холодными электронами.

Согласно принципу Ландауэра, тепловыделение компьютера, достигшего предельных физических характеристик, пропорционально произведению: $W \sim P \cdot T$. В то же время для компьютера, находящегося, например, в космосе, единственный способ отвода тепла – тепловое излучение. На самом деле, излучение фотонов в

пространство – это и есть реальный физический механизм «сброса» энтропии, образующейся в процессе необратимых вычислений.

Согласно закону Стефана-Больцмана, мощность теплового излучения абсолютно черного тела пропорциональна T^4 . Условие теплового баланса дает $P \sim T^3$, – допустимая вычислительная мощность очень быстро растет с ростом температуры вычислительной среды.

Разработки высокотемпературных полупроводниковых материалов ведутся уже более четверти века. Самый перспективный из них – алмаз, высокотемпературный полупроводник с шириной зоны около 5 эВ. Созданные на его основе транзисторы являются рекордсменами по рабочим температурам. Уже в конце 1980-х были созданы алмазные транзисторы, способные работать при температуре выше 1000 °К на частоте несколько десятков гигагерц. В настоящее время хорошо отработаны технологии получения нанокластеров алмаза. Их получают как россыпью, так и в тонких нанопленках. Следует лишь помнить, что при температуре выше 1700 °К начинается процесс превращения алмаза в графит.

Для целей полупроводниковой литографии используются ускорители элементарных частиц в качестве источников коротковолнового излучения. Однако литография, пусть даже в рентгеновском или электронно-лучевом исполнении, оказывается малопроизводительной из-за большого брака уже при разрешении 10–20 нм.

Поиски альтернативных способов изготовления нанотранзисторов и сборки из них компьютеров составляют еще одно важное направление современных исследований в области нанотехнологий. Так, с разработкой сканирующего туннельного микроскопа оказалось возможным манипулировать отдельными атомами и молекулами – захватывать их в одном месте и укладывать в строго определенном порядке в другом. Однако производительность таких наноманипуляторов оказалась слишком низкой, чтобы на нее можно было рассчитывать при сборке больших интегральных наночипов.

В настоящее время весьма популярны идеи химического синтеза вычислительных наноструктур, а также их самосборки. Такие технологии привлекательны тем, что позволяют достичь высокой степени параллелизма, автоматического контроля качества и высокой производительности в таких малых пространственных масштабах, где использование технологий макромира невозможно или неэффективно. Ведутся также исследования в области самовоспроиз-

водства наноструктур. Все это должно осуществляться непосредственно под управлением механизмов нанометрового масштаба в среде, содержащей строительные блоки нанометрового и субнанометрового размера.

Окружающая нас действительность наглядно показывает, что в природе самосборка не только возможна, но и успешно осуществляется в виде более сложного процесса – самовоспроизводства. Достаточно вспомнить о механизме репликации молекул ДНК. В 1952 году к теоретическому описанию процесса самовоспроизводства приступил один из величайших кибернетиков XX века Дж. фон Нейман (1903–57). Результаты его работы были опубликованы лишь в 1966 году, уже после смерти автора [24]. Нейман показал, что существует некоторая пороговая сложность автомата, начиная с которой самовоспроизводство возможно. Им также была высказана идея, что, начиная с некоторого более высокого уровня сложности такой процесс возможен с нарастанием сложности создаваемых систем. Нейман построил конкретную математическую модель самовоспроизводящейся структуры на основе клеточного автомата. В основе модели Неймана лежало представление о двумерной регулярной среде элементарных ячеек, обладающих конечным числом состояний и определенной функцией переходов. Современные технологии производства наноустройств еще далеки от практической реализации самовоспроизводства в том виде, как его описал Нейман, однако идея синтеза вычислительной среды в виде двумерного массива элементарных транзисторных ячеек начинает сегодня отчетливо прослеживаться в экспериментальных работах, ведущихся в некоторых крупных исследовательских центрах мира (IBM, Bell Labs и др.).

Успеху данного направления во многом способствует стремление нанокластеров некоторых химических элементов к самоорганизации с образованием регулярных структур. Специалисты из Communications Research Laboratory (Япония), ведущие исследования в этом направлении, прямо заявляют, что целью их разработок является создание клеточного автомата – большой матрицы простых идентичных компонентов нанометрового масштаба, или клеток. Клетки сообщаются с помощью сигналов, передаваемых по цепочке от клетки к клетке. Изготовить такую конструкцию в Японии надеются путем химического синтеза.

Схемотехника и архитектура

Примеры первых наиболее успешных экспериментов по массовому производству компонентов электронных схем с применением нанотруб, фуллеренов и других «магических» кластеров показали, что основу вычислительной среды будущего нанокomпьютера будет составлять регулярная, для начала – двухмерная, матрица, образованная нанотранзисторами размером 2–10 нм. При этом молекулярно-кластерными методами можно будет создавать наиболее мелкие элементы схем, требующие высокого пространственного разрешения порядка 0,5–1 нм, недоступного для литографии.

В первую очередь – это область регулируемого проводящего канала транзистора. Цепи же переноса сигналов между транзисторными ячейками можно будет создавать литографическими методами с шириной проводящей дорожки 5–20 нм. Такой гибридный способ производства транзисторов уже сейчас позволяет исключить из технологической цепочки сложные операции легирования полупроводника. Плотность упаковки электронных компонентов на чипе будет определяться значением 1000–10000 транзисторов на квадратный микрон.

В силу особых сложностей переноса предельно слабых сигналов на большие расстояния, схемотехника нанокomпьютера будет строиться по блочно-модульному принципу. Базовый блок будет представлять собой макроячейку с элементами памяти на несколько бит, программируемой логической матрицей на входе и интерфейсными элементами входа-выхода. Цепи переноса сигнала между макроячейками будут организованы с использованием принципов приборов с зарядовой связью (charge coupled devices, CCD), а также с использованием спинтронных каналов переноса информации в магнитных полупроводниках. Использование механизма кулоновской блокады позволит передавать сигналы предельно малыми пакетами, вплоть до одноэлектронных. Макроячейки можно собирать далее в матрицы и суперматрицы, создавая таким образом универсальные программируемые вычислительные среды типа современных устройств PLD (programmable logic devices) или FPGA (free programmable gate arrays). Использование спинтронной схемотехники позволит создавать на том же чипе быстродействующую энергонезависимую память сверхвысокой плотности, не стираемую при выключении питания.

Несмотря на то, что основные рабочие элементы разрабатываемых нанотранзисторов имеют некремниевую основу, уже имеется проработка технологии их изготовления с системной интеграцией на кремниевой подложке. Использование кремния позволяет наиболее эффективно приспособить технологические возможности современной микроэлектроники для нужд наноэлектроники. В частности, базовый кремниевый кристалл может быть использован для создания интерфейсного обрамления наночипа в стандарте TTL. Темп нынешних работ таков, что к тому времени, когда рынок электроники будет наполнен устройствами мезоэлектроники с разрешением 20–30 нм (примерно через десять лет), должны появиться первые экспериментальные образцы универсальных программируемых молекулярно-кластерных и спинтронных чипов с кремниевым интерфейсным TTL-обрамлением. Все это выглядит вполне реальным, так как базисные логические функции типа ИЛИ-НЕ на основе углеродных нанотрубок уже изготовлены и испытаны.

В свою очередь, на их основе можно будет создавать нанопроцессоры, наночипы памяти и полнофункциональные однокристалльные нанокomпьютеры. По своему разнообразию мир нанокomпьютеров будет необычайно широк. Нанокomпьютеры минимального размера в несколько микрон смогут содержать сотни тысяч транзисторов. Однокристалльные нанокomпьютерные гиганты с размером кристалла порядка дюйма будут содержать уже триллионы транзисторов. Для обеспечения их работы на предельной частоте порядка 1000 ГГц понадобятся специальные меры по снижению ландауэровского тепловыделения. [27, с.15-17]

В заключение следует упомянуть о радиационной опасности, грозящей нанокomпьютерам со стороны обычных материалов, используемых в электронике. Дело в том, что в числе незначительных примесей, всегда присутствующих даже в самых чистых материалах, есть радиоактивные элементы. Особую опасность представляют альфа-активные изотопы тория. Одна альфа-частица с типовой энергией 1 МэВ даже в условиях обычной микроэлектроники при попадании в кристалл способна освободить из связанного состояния миллионы электронов.

Сейчас это явление актуально для чипов памяти типа DRAM. С ним борются, применяя помехоустойчивое кодирование.

Основное внимание мы уделили современному состоянию и перспективам развития электронных нанокomпьютеров.

Таким образом, мы показали что подходов к организации вычислительных систем в современном мире много, а следовательно, проблема является актуальной и значимой.

Литература

1. Нанотехнология в ближайшем десятилетии. Прогноз направления исследований. /Под ред. М.К. Роко, Р.С. Уильямса и П. Аливисатоса. Пер. с англ. – М.: Мир, 2002 – 292с.
2. Малинецкий Г.Г., Митин Н.А., Науменко С.А. Нанобиология и синергетика. Проблемы и идеи. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 29 за 2005г.
3. Ратнер В.А. Генетика, молекулярная кибернетика: Личности и проблемы. – Новосибирск: Наука, 2002. – 272с.
4. Козлов Н.Н., Кугушев Е.И., Сабитов Д.И., Энеев Т.М. Компьютерный анализ процессов структурообразования нуклеиновых кислот. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 42, 2002г.
5. Глик Б., Пастернак Дж. Молекулярная биотехнология. Принципы и применение. Пер. с англ. – М.: Мир, 2002. – 589с.
6. Франк-Каменецкий М.Д. Век ДНК. – М.: КДУ, 2004. – 240с.
7. Adleman L.M., Computing with DNA, Scientific American, August 1998, p. 34-41.
8. Shapiro E. Programmable and autonomus computing machine made of biomolecules//Letters to nature, vol 414, 22 november 2001.
9. Soloveichik D, Winfree E. The computational Power of Benenson Automata. // Preprint submitted to arXiv.org, 21 December 2004.
10. Rothmund P., Papadakis N, Winfree E. Algorighmic Self-Assembly of DNA Sierpinski Triangles. // Plos Biology, December 2004, Volume 2, Issue 12.
11. Rothmund P., Ekani-Nkodo A., Papadakis N., Kumar A., Fygenson D.K., Winfree E. Design and Characterization of Programmable DNA Nanotubes. //J. AM. CHEM. SOC. 2004, 126, 16344-16352.
12. Паун Г., Розенберг Г., Саломаа А. ДНК-компьютер. Новая парадигма вычислений. – М.: Мир, 2004. – 528с.
13. Смейл С. Математические проблемы следующего столетия // Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. Современные проблемы хаоса и нелинейности. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 стр.

14. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ. под ред. А.Шеня. – М.: МЦНМО: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 2-е изд., стереотип. – 960 с.
15. Istvan Katsanyi. Molecular Computing Solutions of some Classical Problems.
16. Winfree, E. Simulations of Computing by Self-Assembly. Presented at DNA Based Computers IV; published as Caltech CS Tech Report 1998.22, (25 pages).
17. Winfree, E., Bekbolatov R. Proofreading tile sets: error correction for algorithmic self-assembly. // DNA 9.
18. Winfree E., Liu F., Wenzler L.A., Seeman N.C. Design and Self-assembly of two-dimensional DNA crystals. //Nature, vol. 394, 6 august 1998.
19. Албертс Б., Брей Д., Льюис Дж., Рэфф М., Робертс К., Уотсон Дж. Молекулярная биология клетки. – М.: Мир, 1993, т.1.
20. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики: Пер. с англ. /Общ.ред. В.О.Малышенко. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 384с.
21. Физическая энциклопедия, т. 2. Под ред. А. М. Прохорова. – М.: Советская энциклопедия, 1990.
22. Математическая энциклопедия, т. 2. Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Советская энциклопедия, 1979.
23. Управление молекулярными и квантовыми системами/ Под ред. А. Л. Фрадкова, О. А. Якубовского. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
24. Von Neumann J., Theory of self-reproducing automata (edited and completed by Arthur W. Burks), Univ. of Illinois Press, Urbana, 1966. Русское издание: фон Нейман Дж., Теория самовоспроизводящихся автоматов. – М.: Мир, 1971.
25. Минкин В.И. Молекулярные компьютеры//Химия и жизнь-XXI век. – 2004. – N2. – с. 13-17.
26. Валиев К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления, УФН. – 2005. – т. 175. – с. 3–39.
27. Жувикин Г. Нанокomпьютеры//Компьютерра. №3 от 25 января 2005 года.– с.15-17.

БАБКИНА Т.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОЙ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В данной статье изложена попытка построить модели основных логических элементов на основе многомерной булевой логики, в частности многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова. Целью исследования является нахождение логического базиса для построения новых элементов и узлов вычислительных систем.

Даже самые сложные преобразования цифровой информации реализуются логическими элементами в соответствии с формулами алгебры логики.[1, с.15]

И тут возникает вопрос: возможно ли построить логический базис отличный от классического двоичного. В современной науке экспоненциально растет число подходов в области архитектуры вычислительных систем.

В данной статье изложена попытка построить модели основных логических элементов на основе многомерной булевой логики. Многомерные логики или алгебры булевы либо небулевы многомерные отличаются от многозначных тем, что в данном случае имеет место параллельное действие логических систем одномерных. Например, две одномерные системы можно увязать в одну двухмерную систему. Точно так же n -одномерных – в одну n -мерную алгебру.

В качестве математической основы для построения моделей воспользуемся частным случаем n -мерных алгебр, а именно, в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова.

Определим основные свойства математической среды для моделирования, а именно, многомерной булевой алгебры.

Многомерной Булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со свойствами коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, совместности и т.д.

Кроме того, S содержит элементы $\mathbf{1}=(1,1,1,1,1,1,1)$ и $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0,0,0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ из S

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)+(0,0,0,0,0,0,0)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) \cdot (1,1,1,1,1,1,1)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1}=\mathbf{a}$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) \cdot (0,0,0,0,0,0,0)=(0,0,0,0,0,0,0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0}=\mathbf{0}$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) + (1,1,1,1,1,1,1) = (1,1,1,1,1,1,1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

для каждого элемента $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4,\bar{a}_5,\bar{a}_6,\bar{a}_7)$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$) такой, что

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) + (\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4,\bar{a}_5,\bar{a}_6,\bar{a}_7) = (a_1+\bar{a}_1,a_2+\bar{a}_2,a_3+\bar{a}_3,a_4+\bar{a}_4,a_5+\bar{a}_5,a_6+\bar{a}_6,a_7+\bar{a}_7) = (1,1,1,1,1,1,1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) \cdot (\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}_4,\bar{a}_5,\bar{a}_6,\bar{a}_7) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2, a_3 \cdot \bar{a}_3, a_4 \cdot \bar{a}_4, a_5 \cdot \bar{a}_5, a_6 \cdot \bar{a}_6, a_7 \cdot \bar{a}_7) = (0,0,0,0,0,0,0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

Так же в многомерной семимерной булевой алгебре имеют место законы поглощения, двойственность, законы де Моргана, т.е. ее свойства повторяют свойства одномерной булевой алгебры, как показал А.В. Коротков для n -мерных булевых алгебр [2, с. 180-185].

Моделирование осуществим с использованием языковых средств VB пакета инструментальных средств MS Visual Studio, т.к. это программное обеспечение поддерживает новые и улучшенные объекты, включает среду разработки с обновленным интерфейсом и др. Все это позволяет решить задачу моделирования наилучшим образом.

Разработаем формы, отражающие работу логических элементов следующего вида (на примере элемента ИЛИ (OR))[3, с. 233], [4, с. 126-127], [5], [6, с.1-2]:

Рисунок 1 – Форма для логического элемента ИЛИ (OR)

Аналогично получены результаты $b+c$ и $c+a$.

При нажатии кнопки Reset происходит сброс параметров и установка значений по умолчанию.

Таким образом, мы показали, что построение основных логических элементов на основе многомерной булевой алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова возможно, следовательно – возможно и открытие и построение принципиально новых логических устройств, построенных по тому же принципу и производительностью выше существующих.

Литература:

1. Глинкин Е.И. Схемотехника аналого-цифровых преобразователей: Монография. 2-е изд., испр. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. – 160 с.
2. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194 с.; Майоров С.А., Новиков Г.И., Немолочнов О.Ф. и др. Проектирование цифровых вычислительных машин / Под ред. С.А. Майорова. – М.: Высшая школа, 1972. – 344 с., ил.
3. Киносита К., Асада К., Карацу О. Логическое проектирование СБИС: Пер. с япон. – М.: Мир, 1988. – 309 с., ил.
4. <http://www.play-hookey.com/digital/>
5. Meher, PK, J. Valls, T.-B. Juang, K. Sridharan, and K. Maharatna, "50 Years of CORDIC: Algorithms, Architectures, and Applications," *IEEE Trans. IEEE Trans. Circuits and Systems I*, Vol. 56, No. 9, pp. 1893-1907, September 2009.

БАБКИНА Т.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ НЕБУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

В данной статье показан пример построения моделей основных логических элементов на основе небулевой алгебры логики, в частности представлена модель для логического ИЛИ(OR). Целью исследования является нахождение логического базиса для построения новых элементов вычислительных систем.

Логические элементы представляют лишь небольшую часть устройств, выполняющих обработку и преобразование двоичных сигналов. В общем случае устройства, оперирующие с двоичной информацией, подразделяются на два больших класса: комбинационные логические схемы (дискретные автоматы без памяти) и последовательностные логические схемы (дискретные автоматы с памятью). Таким образом, попытка построения основных логических элементов с использованием логики, отличной от булевой – это только начало работы по построению систем на новом архитектурном и вычислительном базисе.

Процесс проектирования логических элементов – это последовательность этапов синтеза и анализа. На этапе синтеза осуществляется проектирование схемы, реализующей заданный закон функционирования. В связи с тем, что формальные методы синтеза применимы только при известной идеализации элементов схемы, а во многих случаях могут быть использованы только интуитивные методы, этап синтеза должен завершаться этапом анализа (логического моделирования), когда на основе описания спроектированной схемы воспроизводится закон ее функционирования [4, с.25-26].

Логическое моделирование заключается в построении математической модели исследуемого устройства – системы соотношений, описывающей поведение этого устройства с заданной точностью, и последующем анализе поведения этой модели по ее реакции на входные воздействия [5, с.78].

Логическое моделирование представляет собой процедуру реализации работы логической схемы с помощью ЭВМ. Цель логического моделирования состоит в том, чтобы выполнить функцию

проектируемой схемы без ее физической реализации; в случаях, когда какие-либо изменения схемы после ее изготовления сделать не легко (например, в СБИС), логическое моделирование оказывается эффективным инструментом для проверки правильности или верификации проекта.

С помощью моделирования решаются следующие задачи [4, с.34]:

1. проверка правильности логического функционирования схемы;
2. проверка временных характеристик схемы;
3. анализ состязаний сигналов и рисков сбоя.

К характеристикам алгоритмов моделирования относятся:

1. точность;
2. быстродействие.

В некоторых литературных источниках выделяется еще одна характеристика алгоритмов моделирования: объем оперативной и внешней памяти, который они требуют для своего корректного функционирования. Однако, эта характеристика имеет незначительную ценность в условиях современных запоминающих устройств, емкость которых непрерывно возрастает и достигает колоссальных величин.

Формально говоря, под точностью моделирования понимается степень соответствия результатов моделирования истинному поведению исследуемой схемы. Особую сложность в данном контексте вызывает моделирование последовательностных схем в связи с неопределенностью начальных состояний и состязаний между сигналами. Еще труднее адекватно моделировать переходные процессы, однако для большинства важных задач это и не требуется: достаточно правильно вычислять установившиеся значения сигналов [4, с.101-103].

Адекватность является важнейшей характеристикой алгоритмов моделирования и определяется в зависимости от целей моделирования. В случае моделирования на уровне логических элементов, задача оказывается достаточно простой, если требуется определить только логические значения. Однако, если моделирование осуществляется с точностью до формы сигнала, то необходимы более подробные сведения о форме сигнала вплоть до времен задержек элементов. При этом усложняются модели элементов и процедура обработки [5, с.141-143].

Точность моделирования зависит от [4, с.106-107]:

1. принятых моделей цифровых устройств,
2. принятых моделей элементов,

3. принятых моделей сигналов,
4. выбранного способа учета временных соотношений между сигналами.

Обработка при логическом моделировании происходит со скоростью, которая существенно ниже скорости обработки на реальных элементах. Обработка в аппаратуре осуществляется параллельно, в то время как в подавляющем большинстве методов моделирования она происходит последовательно [6, с.56]. Наиболее быстрыми являются алгоритмы двоичного моделирования без учета задержек, где реальный порядок срабатывания элементов не принимается во внимание. Существенно ниже быстродействие алгоритмов двоичного моделирования с учетом задержек элементов. Быстродействие алгоритмов, принимающих во внимание не только номинальные задержки элементов, но и их разброс, еще ниже [5, с.122].

Для увеличения быстродействия моделирования применяются наиболее современные технологии параллельной и распределенной обработки. Выбор метода моделирования заключается в нахождении компромисса между требуемой скоростью моделирования схем и степенью детальности получаемых выходных данных.

В данной статье изложена попытка моделирования элементов логических схем на основе вычетов по модулю 2..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами [2, с.24-27]:

операция сложения

=2		

операция умножения

=2		

В таком случае таблица истинности имеет вид:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \cdot b$	0	0	0	1
$a + b$	0	1	1	0
$\bar{a}$	1	1	0	0
$\bar{b}$	1	0	1	0

В нашем случае моделирование осуществлялось с использованием языковых средств VB пакета инструментальных средств MS Visual Studio.[2, с.24-27]

Согласно таблице истинности были разработаны формы, отражающие работу логических элементов с двумя входами и одним выходом, следующего вида (на примере элемента ИЛИ (OR))[6, с.205], [7, с.15]:

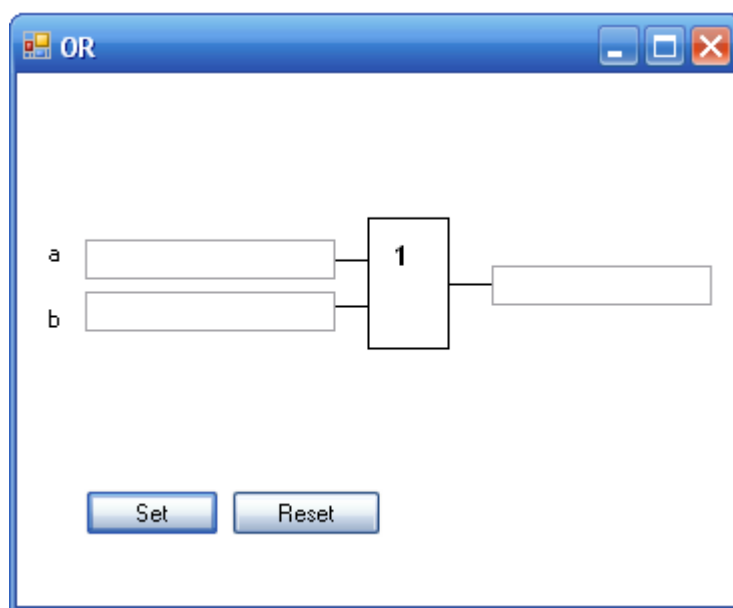


Рисунок 1 – Форма для логического элемента ИЛИ (OR)

В текстовых полях TextBox вводятся значения переменных a и b. При нажатии кнопки Set в третьем поле на выходе элемента вычисляется результат. Значения a и b вводятся в поля TextBox1 и TextBox2 и представляют собой символьные массивы заданной длины. Далее каждый массив преобразуется к числовому типу, и элементы массива обрабатываются согласно таблице истинности элемента ИЛИ. При этом используются конструкции типа if. Результат выполнения операции записывается в TextBox3. При нажа-

тии кнопки Reset происходит сброс параметров и установка значений по умолчанию:

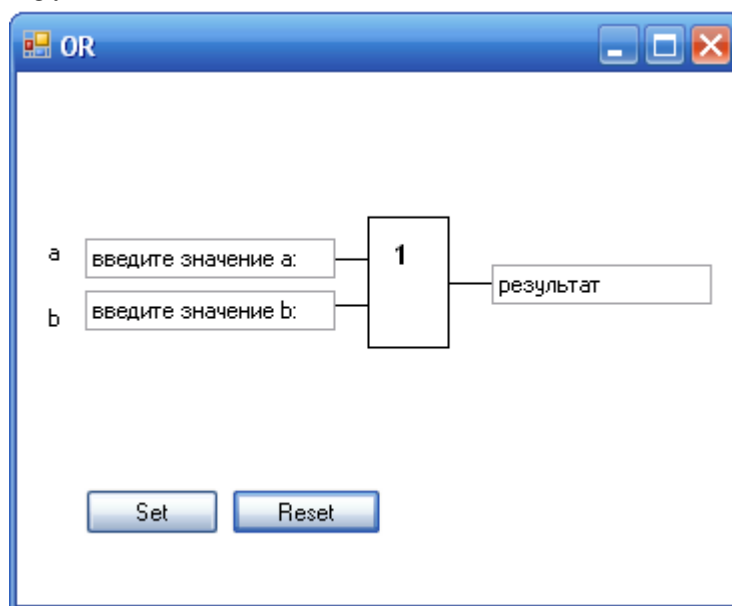


Рисунок 2 – Значения по умолчанию установлены
Введем в форму значения и получим результат:

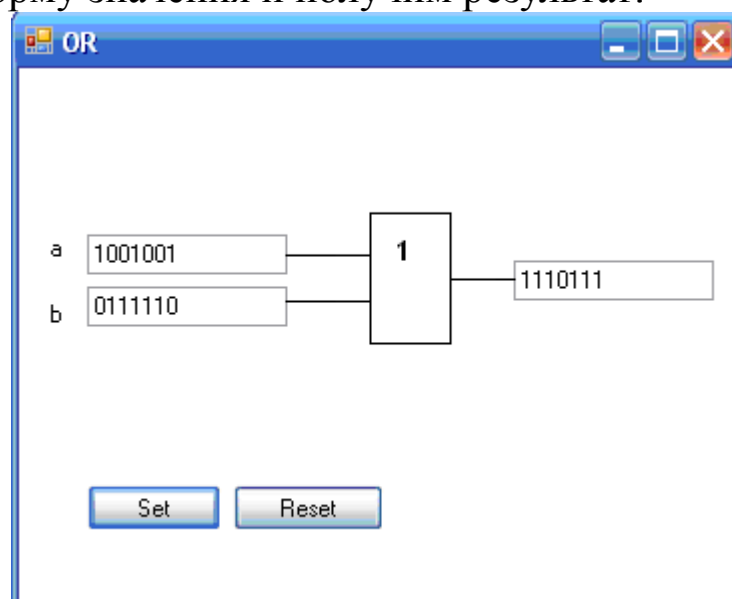


Рисунок 3 – Пример работы логического элемента ИЛИ (OR) для заданных a и b

Таким образом, мы показали что построение основных логических элементов на основе небулевой алгебры логики возможно, следовательно – возможно и открытие и построение принципиально новых логических устройств, построенных по тому же принципу и производительностью выше существующих.

Литература

1. Глинкин Е.И. Схемотехника аналого-цифровых преобразователей: Монография. 2-е изд., испр. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. – 160 с.
2. Коротков А.В. Не булевы алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика: Сб. научн. тр./под ред. А.Н.Березы. – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008. – 188 с.– (с.23-29).
3. Зельдин Е.А. Цифровые интегральные микросхемы в информационно-измерительной аппаратуре. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1986. – 280 с.: ил.
4. Майоров С.А., Новиков Г.И., Немолочнов О.Ф. и др. Проектирование цифровых вычислительных машин/Под ред. С.А. Майорова. – М.: Высшая школа, 1972. – 344 с., ил.
5. Бадулин С.С., Барнаулов В.А., Бердышев В.А. и др. Автоматизированное проектирование цифровых устройств / Под ред. С.С. Бадулина. – М.: Радио и связь, 1981. – 240 с., ил.
6. Киносита К., Асада К., Карацу О. Логическое проектирование СБИС: Пер. с япон. – М.: Мир, 1988. – 309 с., ил.
7. Meher, PK, J. Valls, T.-B. Juang, K. Sridharan, and K. Maharatna, "50 Years of CORDIC: Algorithms, Architectures, and Applications," *IEEE Trans. IEEE Trans. Circuits and Systems I* , Vol. 56, No. 9, pp. 1893-1907, September 2009.

БАБКИНА Т.А.
РАЗРАБОТКА ОСНОВНЫХ УСТРОЙСТВ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАШИНЫ НА БАЗЕ МНОГОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ
ЛОГИКИ В РАМКАХ СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ
А.В. КОРОТКОВА

В данной статье изложена попытка построить модели логических устройств на основе многомерной булевой логики, в частности многомерной алгебры логики А.В.Короткова. В статье представлены модели сумматора и полусумматора. Целью исследования является построение новых элементов и узлов вычислительных систем.

В процессе разработки основных устройств вычислительной машины на базе многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В. Короткова был решен ряд вопросов, связанных с использованием в цифровых машинах многомерной булевой алгебры логики. В частности, были уточнены достоинства применения многомерной булевой алгебры логики в цифровых машинах, разработана система элементов, обеспечивающая экономную реализацию схем.

Почему для разработки выбрана именно многомерная булева алгебра логики? Ответ дает А.В. Коротков в своей книге «Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова)». Он пишет: «Одномерное векторное число – это пространство на линейке, пространство чисел на линейке. Трёхмерное векторное число, трёхмерное векторное пространство теперь нам всем хорошо понятно со времён Гамильтона, но не ранее того. Многомерное векторное пространство, определяемое линейной векторной алгеброй, как того требует трёхмерное векторное исчисление, может быть получено путём расширения трёхмерных векторных пространств, трёхмерной векторной алгебры. Таким образом, мы должны в линейном векторном пространстве ввести векторное и скалярное произведения двух векторов. Это, собственно, основная задача теории многомерных чисел – ввести, определить скалярное, первое и второе векторное произведения двух векторов. Подходов к такому определению немного. В

общем виде определение этих понятий ничего не даёт, кроме путаницы.

Следует исходить из тех принципов, которыми пользовался ещё Гамильтон при построении трёхмерного векторного исчисления. Он сначала построил путём расширения комплексных чисел алгебру кватернионов, а затем из неё получил скалярное векторное произведение двух векторов в трёхмерном векторном пространстве, т.е. в пространстве векторных кватернионов. Если идти по этому пути, то следует расширять, удваивать систему кватернионов до системы октонионов, что сделал Кэли в 1844 году, но дальнейшие преобразования использовать такие же, какие использовал Гамильтон при получении трёхмерного векторного числа и четырёхмерного кватернионного числа. Если идти по этому пути, то единственно возможной алгеброй, которая получается из алгебры кватернионов, является семимерная векторная алгебра со скалярным, евклидового характера и векторным произведением двух векторов» [4, с.56-57].

Полученные данным методом схемы устройств экономнее аналогичных схем, известных в литературе, а также отличаются более высоким быстродействием.

Определим основные свойства математической среды для моделирования, а именно, многомерной булевой алгебры.

Многомерной Булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со свойствами коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности, совместности и т.д.

Кроме того, S содержит элементы $\mathbf{1}=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $\mathbf{0}=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ из S

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

для каждого элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7)$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$) такой, что

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2, a_3 + \bar{a}_3, a_4 + \bar{a}_4, a_5 + \bar{a}_5, a_6 + \bar{a}_6, a_7 + \bar{a}_7) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) \cdot (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) = (\mathbf{a}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2, \mathbf{a}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}_3, \mathbf{a}_4 \cdot \bar{\mathbf{a}}_4, \mathbf{a}_5 \cdot \bar{\mathbf{a}}_5, \mathbf{a}_6 \cdot \bar{\mathbf{a}}_6, \mathbf{a}_7 \cdot \bar{\mathbf{a}}_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой семимерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) \cdot ((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7)) = (\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1), \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2), \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3), \mathbf{a}_4 \cdot (\mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4), \mathbf{a}_5 \cdot (\mathbf{a}_5 + \mathbf{b}_5), \mathbf{a}_6 \cdot (\mathbf{a}_6 + \mathbf{b}_6), \mathbf{a}_7 \cdot (\mathbf{a}_7 + \mathbf{b}_7)) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) + ((\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7)) = (\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1), \mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2), \mathbf{a}_3 + (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3), \mathbf{a}_4 + (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{b}_4), \mathbf{a}_5 + (\mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{b}_5), \mathbf{a}_6 + (\mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{b}_6), \mathbf{a}_7 + (\mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{b}_7)) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7)} = \overline{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4, \mathbf{a}_5 + \mathbf{b}_5, \mathbf{a}_6 + \mathbf{b}_6, \mathbf{a}_7 + \mathbf{b}_7)} = (\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4 \cdot \bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5 \cdot \bar{\mathbf{b}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6 \cdot \bar{\mathbf{b}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7 \cdot \bar{\mathbf{b}}_7) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) \cdot (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{b}}_5, \bar{\mathbf{b}}_6, \bar{\mathbf{b}}_7),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) \cdot (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{b}}_5, \bar{\mathbf{b}}_6, \bar{\mathbf{b}}_7)} = \overline{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{b}_4, \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{b}_5, \mathbf{a}_6 \cdot \mathbf{b}_6, \mathbf{a}_7 \cdot \mathbf{b}_7)} = \overline{(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4 + \bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5 + \bar{\mathbf{b}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6 + \bar{\mathbf{b}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7 + \bar{\mathbf{b}}_7)} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) + (\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{b}}_3, \bar{\mathbf{b}}_4, \bar{\mathbf{b}}_5, \bar{\mathbf{b}}_6, \bar{\mathbf{b}}_7),$$

$$\text{, т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \quad \overline{\overline{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7)}} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7), \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \text{ т.е. } \bar{1} = 0,$$

$$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \text{ т.е. } \bar{0} = 1;$$

$$12) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) + (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{a}}_4, \bar{\mathbf{a}}_5, \bar{\mathbf{a}}_6, \bar{\mathbf{a}}_7) \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7) = (\mathbf{a}_1 + \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4 + \bar{\mathbf{a}}_4 \cdot \mathbf{b}_4, \mathbf{a}_5 + \bar{\mathbf{a}}_5 \cdot \mathbf{b}_5, \mathbf{a}_6 + \bar{\mathbf{a}}_6 \cdot \mathbf{b}_6, \mathbf{a}_7 + \bar{\mathbf{a}}_7 \cdot \mathbf{b}_7) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_3, \mathbf{a}_4 + \mathbf{b}_4, \mathbf{a}_5 + \mathbf{b}_5, \mathbf{a}_6 + \mathbf{b}_6, \mathbf{a}_7 + \mathbf{b}_7) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6, \bar{a}_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) = (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2), a_3 \cdot (\bar{a}_3 + b_3), a_4 \cdot (\bar{a}_4 + b_4), a_5 \cdot (\bar{a}_5 + b_5), a_6 \cdot (\bar{a}_6 + b_6), a_7 \cdot (\bar{a}_7 + b_7)) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4, a_5 \cdot b_5, a_6 \cdot b_6, a_7 \cdot b_7) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$\begin{aligned} & 13) (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) + \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \cdot (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) \cdot (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6, \bar{c}_7) = \\ & = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2, \\ & a_3 \cdot b_3 + a_3 \cdot c_3 + b_3 \cdot \bar{c}_3, a_4 \cdot b_4 + a_4 \cdot c_4 + b_4 \cdot \bar{c}_4, \\ & a_5 \cdot b_5 + a_5 \cdot c_5 + b_5 \cdot \bar{c}_5, a_6 \cdot b_6 + a_6 \cdot c_6 + b_6 \cdot \bar{c}_6, a_7 \cdot b_7 + a_7 \cdot c_7 + b_7 \cdot \bar{c}_7) = \\ & (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot \bar{c}_2, a_3 \cdot c_3 + b_3 \cdot \bar{c}_3, a_4 \cdot c_4 + b_4 \cdot \bar{c}_4, \\ & a_5 \cdot c_5 + b_5 \cdot \bar{c}_5, a_6 \cdot c_6 + b_6 \cdot \bar{c}_6, a_7 \cdot c_7 + b_7 \cdot \bar{c}_7), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}}, \\ & ((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)) \cdot ((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) + \\ & (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)) \cdot ((b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) + (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6, \bar{c}_7)) = \\ & = ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2), \\ & (a_3 + b_3) \cdot (a_3 + c_3) \cdot (b_3 + \bar{c}_3), (a_4 + b_4) \cdot (a_4 + c_4) \cdot (b_4 + \bar{c}_4), \\ & (a_5 + b_5) \cdot (a_5 + c_5) \cdot (b_5 + \bar{c}_5), (a_6 + b_6) \cdot (a_6 + c_6) \cdot (b_6 + \bar{c}_6), (a_7 + b_7) \cdot (a_7 + c_7) \cdot (b_7 + \bar{c}_7)) = \\ & ((a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + \bar{c}_2), (a_3 + c_3) \cdot (b_3 + \bar{c}_3), (a_4 + c_4) \cdot (b_4 + \bar{c}_4), \\ & (a_5 + c_5) \cdot (b_5 + \bar{c}_5), (a_6 + c_6) \cdot (b_6 + \bar{c}_6), (a_7 + c_7) \cdot (b_7 + \bar{c}_7)), \\ & \text{т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}). \end{aligned}$$

Таким образом, свойства многомерных булевых алгебр повторяют свойства одномерной булевой алгебры.

Представим таблицу истинности для $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ [4, с. 180-186]:

Таблица истинности

a	0	0	0	0	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	1	0
a·b	0	0	0	0	0	0	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0
c·a	0	0	0	0	0	1	0
a+b	0	0	1	1	1	1	1
b+c	0	1	1	1	0	1	1
c+a	0	1	0	1	1	1	1
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0

$(a \cdot b) \cdot c$	0	0	0	0	0	0	0
$a + (b + c)$	0	1	1	1	1	1	1
$(a + b) + c$	0	1	1	1	1	1	1
$a + b \cdot c$	0	0	0	1	1	1	1
$(a + b) \cdot (a + c)$	0	0	0	1	1	1	1
$a \cdot a$	0	0	0	0	1	1	1
$a + a$	0	0	0	0	1	1	1
$a \cdot b = a$	+	+	+	+	-	-	+
$a + b = b$	+	+	+	+	-	-	+
$a \cdot b = b$	+	+	-	-	+	+	+
$a + b = a$	+	+	-	-	+	+	+
$a \cdot 1$	0	0	0	0	1	1	1
$a + 0$	0	0	0	0	1	1	1
$a \cdot 0$	0	0	0	0	0	0	0
$a + 1$	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{a}$	1	1	1	1	0	0	0
$\bar{b}$	1	1	0	0	1	1	0
$\bar{c}$	1	0	1	0	1	0	1
$a \cdot \bar{a}$	0	0	0	0	0	0	0
$a + \bar{a}$	1	1	1	1	1	1	1
$a \cdot (a + b)$	0	0	0	0	1	1	1
$a + a \cdot b$	0	0	0	0	1	1	1
$\bar{a} + \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	0	0	0	0	0
$\bar{a} \cdot \bar{b}$	1	1	1	1	1	1	0
$\bar{a} + \bar{b}$	1	1	1	1	1	1	0
$\bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	0	0	0
$b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	0	1
$\bar{a} + b$	1	1	1	1	0	0	1
$b + \bar{c}$	1	0	1	1	1	0	1
$a + \bar{a} \cdot b$	0	0	1	1	1	1	1
$a \cdot (a + b)$	0	0	0	0	0	0	1
$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1
$a \cdot c + b \cdot \bar{c}$	0	0	1	0	0	1	1
$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1
$(a + c) \cdot (b + \bar{c})$	0	0	0	1	1	0	1

Относительно выбора системы элементов, то есть относительно того, какие операции должны непосредственно выполнять отдель-

ные элементы, можно заметить следующее. Нет необходимости в том, чтобы операции, выполняемые отдельными элементами, были непременно полными базисными операциями используемой алгебры. Такой выбор элементов может привести к неоправданному увеличению количества оборудования при реализации схем.

Реализация схем

Моделирование осуществим с использованием языковых средств VB пакета инструментальных средств MS Visual Studio, т.к. это программное обеспечение поддерживает новые и улучшенные объекты, включает среду разработки с обновленным интерфейсом и др. Все это позволяет решить задачу моделирования наилучшим образом.

Разработаем формы, отражающие работу полусумматора и сумматора, согласно представленной выше таблице истинности [2, с.1-5], [1].

Пример модели полусумматора и сумматора

В текстовых полях TextBox вводятся значения переменных $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7)$. При нажатии кнопки **Вычислить** вычисляется результат. Значения переменных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ представляют собой символьные массивы заданной длины – размерности семь. Далее элементы массива обрабатываются согласно таблице истинности.

При нажатии кнопки **Контроль** появляется таблица истинности и можно проконтролировать правильность вычислений при необходимости.

Таким образом, мы показали, что построение логических устройств, построенных по принципу многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В. Короткова возможно.

Литература:

1. URL: <http://www.play-hookey.com/digital/>
2. Meher, PK, J. Valls, T.-B. Juang, K. Sridharan, and K. Maharatna, "50 Years of CORDIC: Algorithms, Architectures, and Applications," *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, Vol. 56, No. 9, pp. 1893-1907, September 2009.
3. Коротков А.В., Чураков В.С. Многозначные алгебры логики, булевы многомерные алгебры и дискретные (многомерные целочисленные) алгебры// Информационные системы и технологии. Теория и практика: Сб. науч. Тр./редкол.: А.Н.Бережа [и др.]. – Шахты: ГОУ ВПО «ЮР-ГУЭС», 2009. – 210 с.–(с.24-28).
4. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2007. – 194 с.

МЕШКОВ В.Е., ПРУДИЙ А.В., КОЗОБРОД А.В.

СИНТЕЗ ТОПОЛОГИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ ВЕДЕНИЕ

Наибольшее влияние на эффективность работы IP-сети в среде Ethernet может оказать топология проложенной сети, физическое расположение и емкость линий связи, способ и логика соединения различных сетевых устройств, таких как повторители, мосты и разветвители.

Следует также отметить, что в настоящее время происходит слияние сетевых технологий в области компьютеров с технологиями телефонии, например использование, с одной стороны для сетей Ethernet телефонной проводки (витая пара), и появление, с другой стороны IP-телефонии, которая в настоящий момент уже весьма активно используется всеми крупными международными провайдерами телефонной связи, удешевляя ее в разы. Так же происходит поглощение не только телефонных, но и других технологий, например – радиовещание, телевидение, здесь также можно привести массу примеров.

Неудивительно, что при таком бурном развитии сетевых технологий предъявляются повышенные требования к пропускной способности сети и как следствие, повышаются требования к физической и логической структуре сети. Следовательно, весьма логичным будет применить для разработки сети какие-либо математические методы, что позволило бы снизить влияние человеческих ошибок, как на стадии проектирования, так и в последствии при работе сети.

В данной работе сделана попытка применить теорию графов и теорию генетических алгоритмов для осуществления трассировки топологии сетей, построенных на технологии Ethernet. Проводится сравнительный анализ различных алгоритмов оптимизации и проводится обоснование выбора одного из них для использования в подсистеме автоматизированного проектирования ЛВС.

Синтез топологии вычислительной сети

В наиболее общем виде задача синтеза топологии информационно-вычислительной сети часто формируется следующим образом. Заданы число и расположение источников и получателей ин-

формации, требования к потокам сообщений между парами источник-получатель, известна стоимость оборудования сети [2]. Необходимо минимизировать стоимость всех линий на множестве возможных топологий, пропускных способностей каналов передачи и способах выбора пути (маршрута) передачи при ограничениях на пропускную способность каналов, среднюю задержку в передаче информации и надежность сети. Часто минимизируют среднюю задержку в сети при ограничениях на стоимость сети [3].

Требования к потокам сообщений в большинстве случаев задаются в виде матрицы тяготений (требований на передачу потоков информации $F = \|f_{ij}\|$, где f_{ij} – средняя интенсивность потока из узла a_i , предназначенная узлу a_j . Стоимости оборудования сети должны быть заданы для всех потенциальных линий связи в зависимости от их пропускной способности c_i в виде функции затрат:

$$s_i(c_i), i=1, 2, 3 \dots m. \quad (0.1)$$

Где $s_i(c_i)$ – стоимость i -й линии связи при ее пропускной способности c_i ;

m – число линий связи.

Множество линий связи, соответствующее возможной топологии обозначим V . Число линий связи при N узлах может достигать до $N_c = N \cdot (N - 1) / 2$, если допустима любая связь между узлами.

Обозначим $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – вектор средних величин потоков через линии связи при оптимальных маршрутах потоков сообщений, λ_i – средний поток сообщений (информации) в i -й линии. Такой вектор Λ называется многопродуктовым потоком. Он является результатом суммирования однопродуктовых потоков:

$$\lambda_i = \sum \lambda_i^{j,k} (j, k = \overline{1, N}) \quad (0.2)$$

где $\lambda_i^{j,k}$ – поток от узла a_j к узлу a_k , направляемый по i -й линии связи.

Матрица F и способ выбора путей передачи информации (маршрутов) однозначно определяют вектор Λ .

Обозначим также $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ – вектор пропускных способностей линии связи, T – среднюю величину задержки передачи, $[T]$ – максимально допустимую величину средней задержки. Тогда задача выбора топологии ЛВС может быть сформулирована следующим образом.

Заданы расположение источников и получателей информации, матрица требований на передачу потоков F , функции затрат $s_i(c_i)$ для всех потенциальных линий связи.

Требуется минимизировать $S(B,C) = \sum_{i=1}^m s_i(c_i)$, где B множество линий связи мощностью m , соответствующих возможной топологии, при условиях $\lambda_i \leq c_i$ для всех i , $T \leq [T]$. Под мощностью будем понимать число реальных (проводных) линий связи в канале связи.

Кроме того, обычно накладываются некоторые ограничения на множество B . Например, можно учесть требования к надёжности, поставив ограничение, чтобы сеть была двусвязной (что бы между любой парой узлов было не менее двух независимых путей) или трехсвязной. Если не накладывать ограничений на множество B , то полученная топологическая структура, очевидно будет в классе деревьев.

В связи с многообразием требований, алгоритмической сложностью, невозможностью перебора всех вариантов строгое решение задачи оптимизации ЛВС большой размерности невозможно даже с помощью ЭВМ, кроме того, на этапе проектирования сети известны лишь приблизительные характеристики требований на передачу потоков информации, поэтому использование точных методов решения является нерациональным, т.к. под точным методом в данном случае можно понимать только полный перебор. В настоящее время в практике проектирования структуры ЛВС наибольшее применение нашли квазиоптимальные эвристические методы [4].

Математическая формулировка экстремальной задачи однокритериального выбора

Многие прикладные проблемы, связанные с задачами выбора, управления и проектирования, сводятся, как правило, к принятию решения на основе исследования математических моделей. Каждая *математическая модель* отображает взаимосвязь тех количественных свойств объекта, которые являются существенными для решаемой задачи [1].

Предположим, что конкретный объект (техническое устройство, физический или технологический процесс, экономическая система и т.д.) может быть охарактеризован конечной совокупностью существенных свойств, которые могут быть объективно измерены.

Количественная оценка существенных свойств осуществляется с помощью величин, называемых *параметрами*. Можно выделить следующие типы параметров:

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_m)$ – *внешние параметры*, характеризующие внешнюю по отношению к объекту среду и оказывающие влияние на его функционирование;

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – *внутренние параметры*, характеризующие свойства отдельных элементов объекта.

В определении конкретных значений внутренних параметров, так же называемых *управляемыми переменными*, фактически состоит акт принятия решения.

Объединенную совокупность внешних и внутренних параметров будем называть *множеством входных параметров*.

Величины, характеризующие свойства объекта в целом как системы, будем называть *выходными параметрами (характеристиками)*, которые можно только измерять или вычислять, но непосредственно изменять нельзя. Обозначим их вектором $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$.

Управляемые переменные $\vec{x}$ и характеристики $\vec{\varphi}$ определяют существенные свойства исследуемого объекта, а внешние параметры $\vec{c}$ являются, как правило, константами и характеризуют внешнюю среду. При этом внутренние параметры $\vec{x}$ играют роль независимых переменных, а выходные параметры $\vec{\varphi}$ являются зависящими от них величинами. Будем считать, что соотношения, выражающие эти зависимости, заданы в виде “черного ящика”, который имеет n входов x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и s выходов φ_j , $j = 1, 2, \dots, s$.

В процессе принятия решения значения управляемых переменных $\vec{x}$ и $\vec{\varphi}$ могут варьироваться в некоторых пределах, определяемых системой неравенств:

$$x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, i = \overline{1, n}; \varphi_j^- \leq \varphi_j(\vec{x}) \leq \varphi_j^+, j = \overline{1, s}, \quad (0.1)$$

где $(x_i^-, x_i^+), (\varphi_j^-, \varphi_j^+)$ – нижнее и верхнее предельно-допустимые значения, соответственно, для i -ой переменной и j -ой характеристики. Область управляемых переменных, в которой выполняется система ограничений (2.1), будем называть *областью поиска* D , а любой вектор $\vec{x}$, принадлежащий множеству D – *допустимым решением*.

Для выбора из области поиска D одного или нескольких “лучших” допустимых решений часто приходится вводить *критерий оптимальности* Q – количественный показатель, посредством кото-

рого осуществляется объективное измерение в некоторой числовой шкале Y какого-либо одного наиболее важного для задачи принятия решения выходного параметра φ_i . Здесь под *измерением по шкале Y* понимается отображение Q , которое каждому решению $\bar{x} \in D$ ставит в соответствие числовую оценку $Q(\bar{x}) \in Y$ таким образом, чтобы отношения между числами сохраняли бинарные отношения предпочтения между решениями:

$$1) \bar{x}^1 \text{ “предпочтительнее” } \bar{x}^2 \text{ } (\bar{x}^1 P \bar{x}^2) \text{ тогда и только тогда, когда } Q(\bar{x}^1) < Q(\bar{x}^2) \quad (0.2)$$

2) $\bar{x}^1$ “не менее предпочтительнее” $\bar{x}^2$ ($\bar{x}^1 R \bar{x}^2$) тогда и только тогда, когда

$$Q(\bar{x}^1) \leq Q(\bar{x}^2) \quad (0.3)$$

3) $\bar{x}^1$ “эквивалентно” $\bar{x}^2$ ($\bar{x}^1 I \bar{x}^2$) тогда и только тогда, когда

$$Q(\bar{x}^1) = Q(\bar{x}^2) \quad (0.4)$$

Из соотношений 2.2, 2.3 и 2.4 следует, что механизм выбора “лучшего” решения сводится к отбору тех и только тех решений, которые доставляют наименьшее значение критерию оптимальности Q в области поиска D :

$$Q^* = Q(\bar{x}^*) = \min_{\bar{x} \in D} Q(\bar{x}), \quad (0.5)$$

где $\bar{x}^*$ - *оптимальное решение*; $Q^* = Q(\bar{x}^*)$ – наименьшее значение критерия оптимальности, получаемое при принятии оптимального решения $\bar{x}^* \in D$.

Выражение (2.5) является математической записью модели принятия оптимального решения, называемой *экстремальной задачей однокритериального выбора*. В том случае, когда решение задачи (2.5) можно свести к анализу значений критерия оптимальности Q для конечного числа решений $\bar{x} \in D$ (например, заданных числом перестановок $n!$, числом сочетаний C_n^m или просто дискретным множеством допустимых вариантов) экстремальная задача однокритериального выбора относится к классу *экстремальных задач переборного типа*.

Понятие “оптимальное решение”

Минимизируемая многопараметрическая функция $Q(\bar{x})$, выражающая зависимость критерия оптимальности Q от управляемых переменных $\bar{x}$ [7], может быть как унимодальной, так и многоэкс-

тремальной функцией. Независимо от вида функции $Q(\bar{x})$ оптимальное решение $\bar{x}^* \in D$ должно удовлетворять условию:

$$Q(\bar{x}^*) \leq Q(\bar{x}) \text{ для всех } \bar{x} \in D. \quad (0.6)$$

В случае *униmodalной функции* (одно-экстремальной функции, которая может быть разрывной, не дифференцируемой и т.д.) оптимальное решение задачи (2.5) является единственным и достигается в точке *локального минимума* $\bar{x}^*$:

$$Q(\bar{x}^*) \leq Q(\bar{x}) \text{ для всех } \bar{x} \in d(\bar{x}^*, \varepsilon), \quad (0.7)$$

где $d(\bar{x}^*, \varepsilon)$ - ε -окрестность точки локального минимума $\bar{x}^* \in D$.

В случае *многоэкстремальной функции* (функции $Q(\bar{x})$, имеющей несколько локальных минимумов $\bar{x}^k$, $k=1..l$ в области поиска D) оптимальное решение задачи (2.5) является *глобальным минимумом* – наименьшим из всех локальных минимумов:

$$Q^* = Q(\bar{x}^*) = \min_{1 \leq k \leq l} Q(\bar{x}^k), \quad (0.8)$$

где $\bar{x}^k$ – k -ый локальный минимум функции $Q(\bar{x})$;

l – число локальных минимумов в области поиска D .

В общем случае оптимальное решение задачи (2.5) может достигаться на некотором подмножестве допустимых решений $\Omega \subseteq D$, удовлетворяющих условию:

$$Q(\bar{x}) = Q^* \text{ для всех } \bar{x} \in \Omega. \quad (0.9)$$

Тогда, в зависимости от постановки задачи однокритериального выбора, требуется либо перечислить все решения, принадлежащие подмножеству Ω , либо указать любое одно из решений этого подмножества.

В заключение данного раздела приведем отличия генетических алгоритмов от поисковых методов оптимизации.

1. Генетические алгоритмы осуществляют прямое манипулирование бинарными строками $E(\bar{x})$, с помощью которых закодированы в двоичном коде допустимые решения $\bar{x} \in D$, а не самими внутренними параметрами x_i , $i = \overline{1, n}$, заданными действительными числами.

2. Генетические алгоритмы в каждом t -ом поколении оперируют одновременно со всей совокупностью из v допустимых решений $\bar{x}^k \in D$, образующих множество технических решений P^t , с целью получения хромосомного набора популяции следующего поколения P^{t+1} .

Таким образом генетические алгоритмы на каждой итерации, совпадающей с текущим поколением, позволяют определять v новых допустимых решений, в то время как классические методы по-

иска на каждой итерации определяют единственное новое допустимое решение. Например, градиентный метод минимизации реализуется с помощью рекуррентного выражения:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{k}^k - \lambda \nabla Q(\bar{k}^k), k=0,1,2,\dots \quad (0.10)$$

где $\bar{x}^0$ – начальное приближение;

$\nabla Q(\bar{k}^k)$ – градиент минимизируемой функции;

λ – шаг вдоль градиента.

3. Генетические алгоритмы основаны на вероятностных схемах преобразования бинарных строк $E(\bar{x})$, составляющих хромосомный набор популяции P^t , которые моделируют биологические механизмы популяционной генетики.

4. Генетические алгоритмы – это методы нулевого порядка, стратегия поиска в которых построена только на вычислении значений критерия оптимальности Q и не требует знания дополнительной информации о производных, константе Липшица и т.д., что характерно для градиентных и квази-ньютоновских методов.

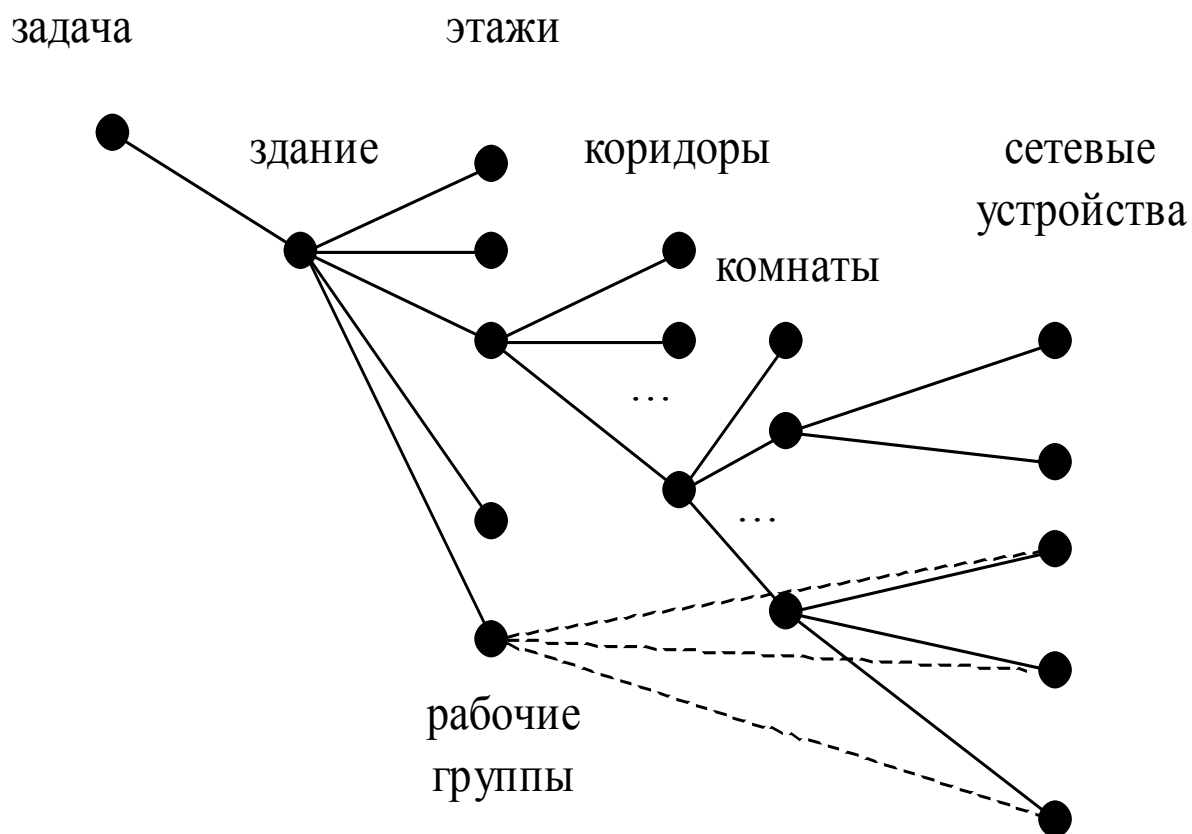
5. Генетические алгоритмы являются робастными методами по отношению к виду минимизируемой функции, т.к. при их применении не требуется, чтобы критерий оптимальности был непрерывным, дифференцируемым, унимодальным и т.д. Они осуществляют поиск оптимального решения по одной и той же стратегии как для унимодальных, так и для многоэкстремальных функций.

Базовая структура генетического алгоритма приведена в подразделе «Базовая структура генетического алгоритма» раздела «Основные алгоритмы и вычисления».

Алгоритм декомпозиции основных задач проектирования ЛВС с откладыванием

Данный алгоритм является основой, на которой находятся все другие алгоритмы, а также способен рекуррентно обращаться сам к себе. Его первым этапом является обзор, и возможное сокращение числа устройств, ожидающих подключения. Такое сокращение происходит за счет разбиения множества всех устройств в сети на подсети, причем в случае выделения подсети из общей сети происходит разделение сегментов, адресного пространства и пространства широковещательных запросов, а следовательно, уменьшается средняя задержка по сети. Те устройства, которые не попали в основную сеть являются отложенными задачами. Далее, алгоритм использует

двухступенчатую схему, описанную выше для генерации и оптимизации технического решения, для обнаружения экстремумов оптимизируемого в целевой функции параметра (параметров). После чего алгоритм обращается сам к себе для решения тех задач, которые оказались отложенными (если они есть).



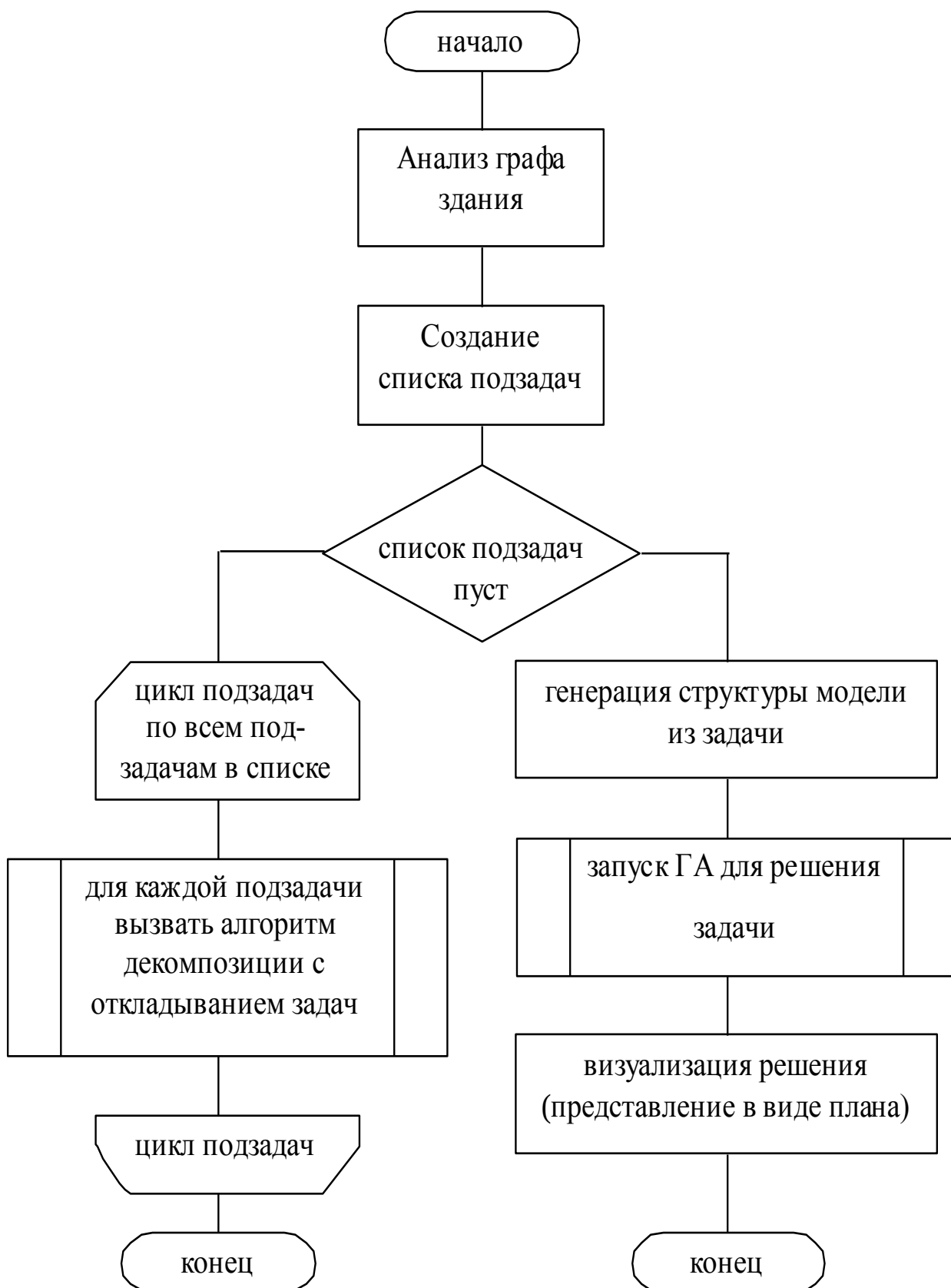


Рисунок 1.2 Алгоритм декомпозиции с откладыванием задач

Алгоритм трассировки коаксиального кабеля

Алгоритм трассировки коаксиального кабеля является одной из вариаций общеизвестной задачи о коммивояжере. Задача о коммивояжере сводится к следующему: на карте существует несколько городов, соединенных дорогами. Перед коммивояжером стоит задача посетить все города, каждый только один раз, при этом общая длина пути должна быть минимальна.

Рабочие станции, соединенные коаксиальным кабелем, соединяются одна за другой, по технологии «Общая шина». При этом аналогия с задачей коммивояжера очевидна, разница состоит только в том, что при прокладке коаксиального кабеля граф, описывающий топологию сети, в отличие от графа, описывающего маршрут коммивояжера не будет замкнутым.

Алгоритм трассировки кабеля в пределах одной комнаты

При трассировке кабеля в пределах комнаты алгоритм трассировки должен учитывать не только геометрическое расположение сетевых устройств внутри комнаты, но и их взаимное расположение. Это связано прежде всего с тем, что часто сетевые устройства расположены друг относительно друга на расстоянии, меньшем, чем минимальная длина кабеля, нормированная в условиях эксплуатации сетевого оборудования.

на рисунке 1.3 приведен алгоритм, проводящий подобную трассировку с учетом всех возможных расположении сетевых устройств.

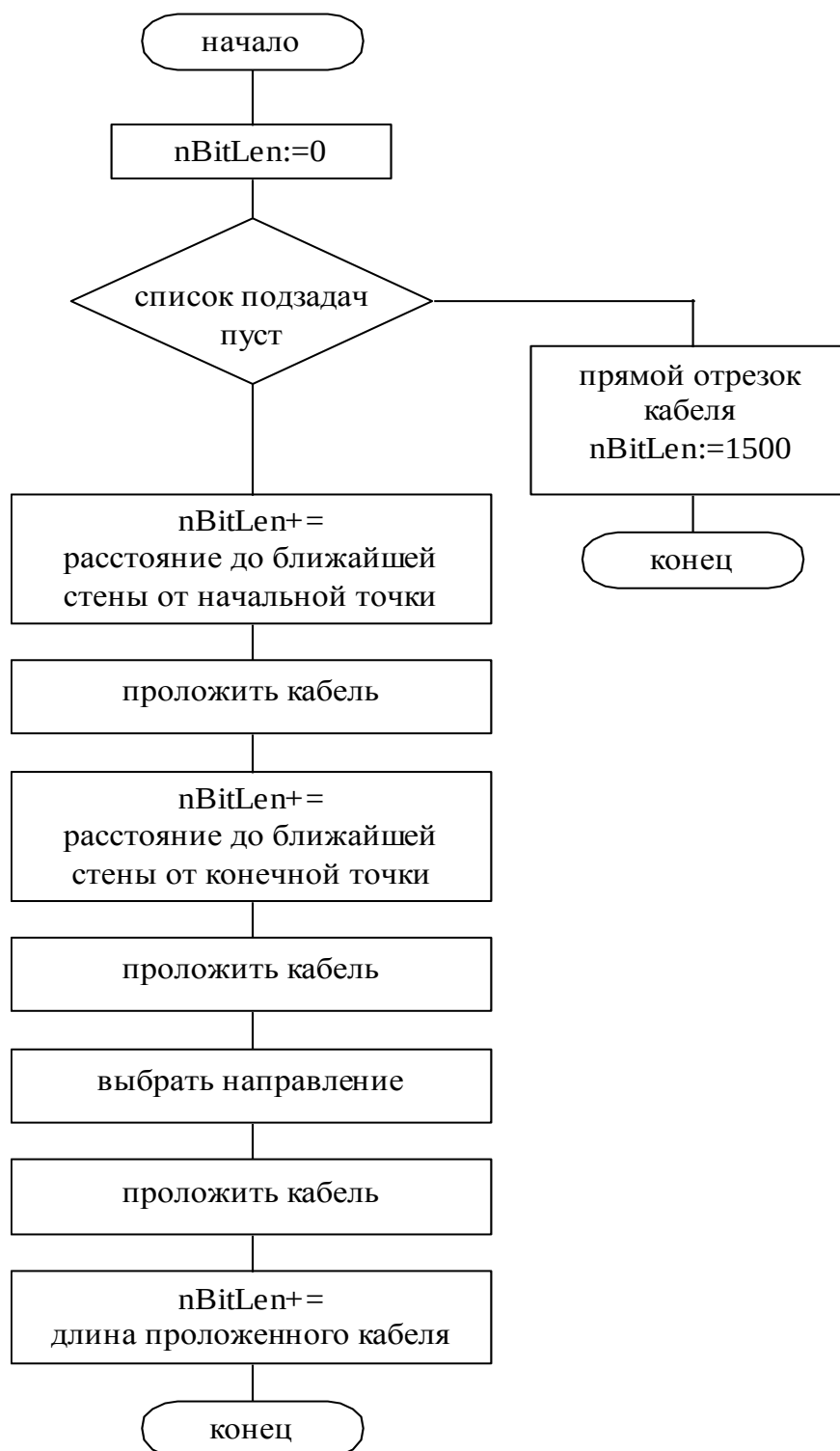


Рисунок 1.3 Алгоритм трассировка кабеля в пределах одной комнаты

Алгоритм трассировки витой пары по зданию

Алгоритм трассировки витой пары по зданию используется как часть алгоритма декомпозиции при разборе сложности задачи, что позволяет определить, к какому уровню сложности следует отнести

объект, который подлежит подключить к какому-либо сетевому устройству.

Структурная схема алгоритма приведена на рисунке 1.4.

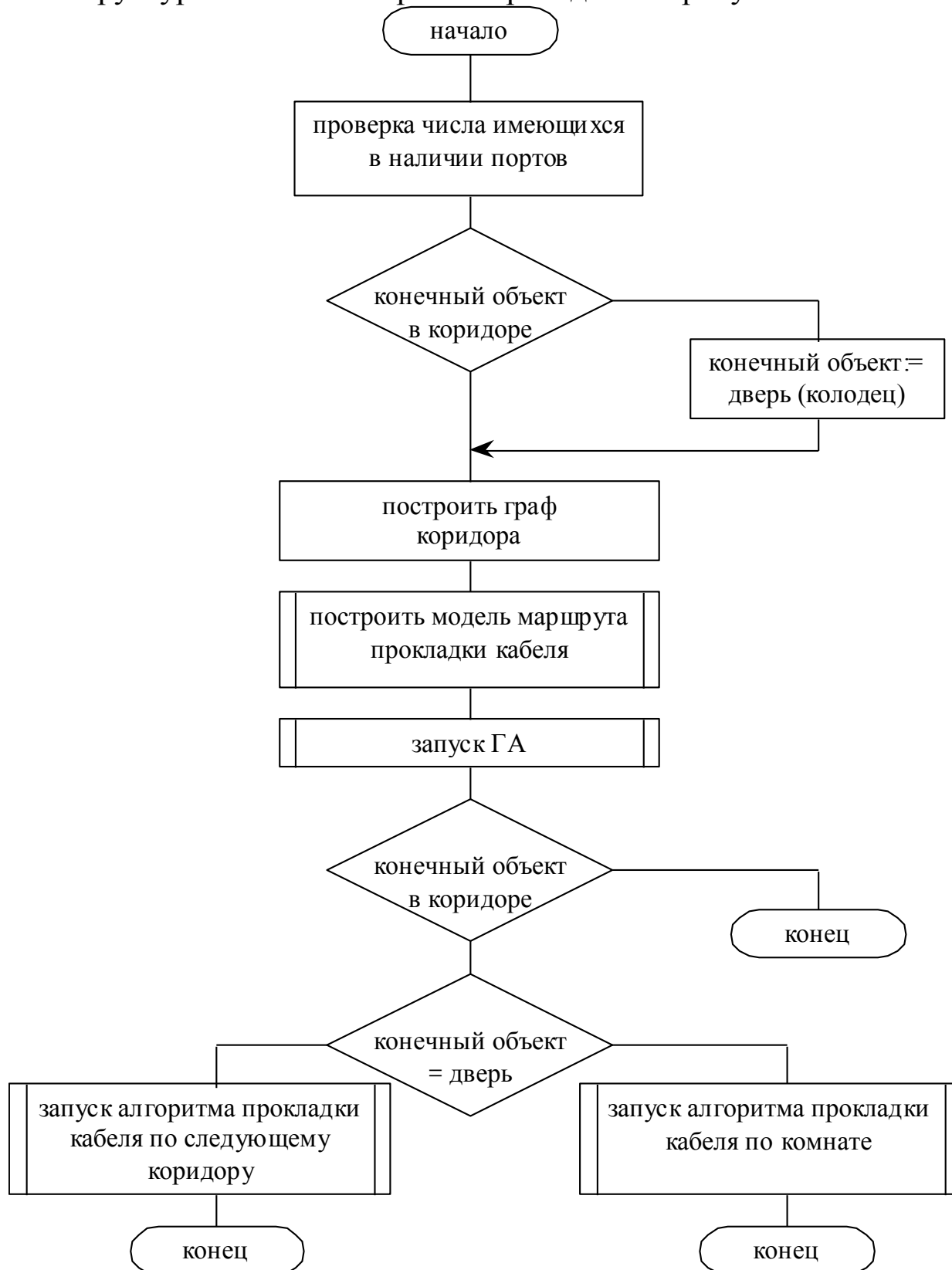


Рисунок 1.4 Алгоритм трассировка кабеля по зданию

Данный алгоритм используется на двух этапах работы алгоритма декомпозиции – на прокладке магистральной сети здания, для трассировки кабеля от хаба к хабу, и во время разводки отдельных оконечных сетевых устройств, находящихся в различных комнатах. В этом случае данный алгоритм осуществляет трассировку кабеля до пределов комнаты (двери), а для дальнейшей трассировки осуществляет вызов алгоритма трассировки кабеля в пределах одной комнаты.

Литература

1. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техніка, 1977. – 766 с.
2. Мешков В.Е. Применение генетических алгоритмов при создании локальных вычислительных сетей. Теория, методы и средства измерений, контроля и диагностики: Материалы II Международной научно-практической конференции, ЮРГТУ (НПИ). – Новочеркасск: ООО «Темп», 2001. Ч.4.
3. Мешков В.Е., Гуня И.Н. и др. Решение задач синтеза схем с регулярной структурой как экстремальной задачи переборного типа. Информационные технологии в науке и образовании: Сб. науч. трудов/ДГАС. – Шахты: ДГАС, 1998. – Вып. 28.
4. Мешков В.Е., Береза А.Н. Решение задачи синтеза топологии ЛВС на основе эволюционных методов проектирования. Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (AIS'05) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2005). Научное издание в 4-х томах. – М. ФИЗМАТЛИТ. 2005. Т4. – 256с. – ISBN 5-9221-0621-х.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЕВСТИГНЕЕВ В.Г.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ АРИФМЕТИКИ. РЕТРОСПЕКТИВНЫЙ ВЗГЛЯД*

Цель этой статьи – напомнить специалистам конца 90-х о достижениях отечественной науки в области вычислительной техники в 70–80-х годах. Одно из направлений, где был достигнут значительный успех, – компьютерные арифметики. Сегодня даже школьники знают, что вычислительная техника работает в двоичной системе счисления, и мало кто задумывается над вопросом: только ли эта система пригодна для построения компьютеров. Возможно, некоторым такой вопрос покажется неактуальным. Однако автор статьи, принимавший непосредственное участие в создании самой передовой для своего времени вычислительной техники, придерживается иной точки зрения, и не без оснований...

70–80-е годы усилиями советских ученых С.А.Лебедева, В.М.Глушкова, М.А.Карцева, И.Я.Акушского, Д.И.Юдицкого, Г.Я.Гуськова, В.С.Семенихина, И.В. Прангишвили, Н.Я.Матюхина и многих других были созданы образцы вычислительной техники, превосходящие по своим параметрам, новизне идей и архитектуре все мировые достижения. В качестве примера назову лишь некоторые из вычислительных машин тех лет: серия ЭВМ класса БЭСМ и “Эльбрус”, ЭВМ “Стрела”, серии ЭВМ М-20, М-220, 5Э76, “Мир”, ПС и др. И лишь после того, как СССР стал воспроизводить ЭВМ класса IBM-360 (ЕС ЭВМ) и копировать, а не разрабатывать микроэлектронную элементную базу, судьба советской вычислительной техники была предрешена. Ответственность за это лежит не на ученых и разработчиках, а на руководстве страны.

В те же годы в СССР коллективы ученых исследовали и разрабатывали различные арифметики, позволявшие создавать ЭВМ с более высокой скоростью обработки данных по сравнению с широ-

* Текст печатается по изданию: В. Евстигнеев. Компьютерные арифметики. Ретроспективный взгляд // Запрос недовочная компьютерная арифметика/electktronics.ru>journal/1903

ко распространенной двоичной системой счисления. Так, под руководством И.Я. Акушского и Д.И. Юдицкого была создана ЭВМ К-340 на основе системы счисления в остаточных классах, которая длительное время выпускалась нашей промышленностью и отличалась высокой производительностью и надежностью. Коллективом специалистов во главе с В.М. Глушковым были созданы и запущены в производство ЭВМ серии “Мир” с новой архитектурой и системой программирования, позволявшие производить вычисления с переменной (регулируемой) разрядностью. Тогда же под руководством И.В.Прангишвили разрабатываются и производятся ЭВМ серии ПС на основе ассоциативных процессоров с параллельной архитектурой, а под руководством М.А.Карцева – высокопроизводительные, высоконадежные вычислительные комплексы большой разрядности (до 512 двоичных разрядов) для специальных применений.

В начале 80-х годов появляются первые публикации советских ученых о Фибоначчиевой системе счисления [1] и иерархических системах счисления [2], которые позволяли создавать более высокопроизводительные и надежные вычислительные средства на основе новых элементов микроэлектроники, в том числе и многозначных. Одновременно разрабатываются и алгоритмы выполнения арифметических операций в ЭВМ, основанные на новых арифметиках.

Кратко опишем наиболее интересные системы счисления для вычислительных устройств, быстроедействие и надежность которых превосходят аналоги, основанные на двоичной арифметике.

Знако-разрядная система счисления

Число в знако-разрядной системе счисления [3], как и в любой позиционной системе, можно записать в виде ... где $x_i = \{-R, -R+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, R\}$, $S=2R$ или $S=2R+1$. При таком подходе, естественно, возникает избыточность представления, которая по сравнению с двоичной может быть выражена в соответствии с методикой, изложенной в работе [3].

В таблице указана относительная избыточность (S) для некоторых значений $S=2k-3$ ($K=4, 5, 6, 7$) и $S=2k$ ($K=3, 4, 5, 6, 7$). При основаниях $S=2k$, обеспечивающих простоту совмещения знако-разрядной системы с двоичной, избыточность максимальна и

уменьшается с ростом S . Максимум избыточности представления знако-разрядной системы (100%) достигается при $S=21$. Однако при значениях $S=2k-3$ избыточность знако-разрядной системы минимальна, что и отражено в таблице. Сложение двух чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется в два такта. В первом такте формируются поцифровые промежуточные суммы w_i и цифры поразрядных переносов t_i , которые могут принимать значения -1 , 0 и $+1$, т.е. $x_i + y_i = w_i + t_i \cdot S$. Во втором такте формируется окончательная сумма путем сложения цифр промежуточных разрядных сумм и соответствующих им цифр поразрядных переносов, т.е. $Z_i = w_i + t_{i+1}$. Умножение чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется последовательным сложением (вычитанием) и сдвигом вправо результатов умножения множимого на S -ичные цифры множителя, начиная с младшего S -ичного разряда. Деление чисел подчиняется общим правилам деления в S -ичной системе счисления. Основным достоинством знако-разрядной системы счисления является то, что сигнал переноса при выполнении операции сложения распространяется не далее соседнего разряда, а время выполнения операции не зависит от разрядности операндов. То есть любая операция сложения выполняется за два такта (под тактом здесь понимается время вычисления разрядной суммы. – Авт.).

Фибоначчиева система счисления

Среди позиционных весомозначных систем счисления есть системы, в которых веса разрядов выражаются не известным соотношением $D_i = S_i$, а другими, например числами ряда Фибоначчи, т.е. $D_i = D_{i-2} + D_{i-1}$. В этом случае система счисления называется Фибоначчиевой. Другой пример позиционной весомозначной системы счисления с нетрадиционным законом формирования весов разрядов – так называемая полиадическая система счисления. Веса разрядов в ней определяются выражением $D_i = p_i \cdot D_{i-1}$, где p_i – взаимно-простые числа. Остановимся на Фибоначчиевой системе счисления. В работе [1] показано, что любое натуральное число N может быть представлено в двоичной r -системе счисления при $r \geq 0$, весами разрядов в которой являются числа Фибоначчи. При этом после каждой единицы слева направо следует не менее r нулей. Так, например, при $r=1$ число 75 в двоичной 1-системе счисления

можно записать как

$$75 = 1001010100 = 1\text{Ч}_{55} + 0\text{Ч}_{34} + 0\text{Ч}_{21} + 1\text{Ч}_{13} + 0\text{Ч}_8 + 1\text{Ч}_5 + 0\text{Ч}_3 + 1\text{Ч}_2 + 0\text{Ч}_1 + 0\text{Ч}_0.$$

Одно и то же число N в p -Фибоначчиевой системе счисления может иметь несколько представлений, которые получаются друг из друга путем последовательного применения к двоичным изображениям Фибоначчиевого числа операций свертки и развертки двоичных разрядов. Свертка (нормализация) состоит в замене двух рядом стоящих единиц на одну в старшем разряде. Развертка – обратный процесс.

Отметим две особенности сложения значащих разрядов в двоичной 1-системе счисления. Во-первых, при суммировании единиц возникает перенос не одной единицы (как в классической двоичной системе счисления), а нескольких одновременно. Во-вторых, единицы можно складывать двумя способами. В первом способе при сложении i -х разрядов чисел в i -м разряде промежуточной суммы записывается 1 и возникают переносы двух единиц одновременно – в $(i-1)$ -й и в $(i-p-1)$ -й разряды. При втором способе сложения единиц в соответствующем $(i-m)$ разряде промежуточной суммы записывается 0 (как и в классической двоичной арифметике) и возникает перенос $p+1$ единиц (одна единица – в старший $(i+1)$ -й и p единиц – в младшие $(i-p-1)$, $(i-p-2)$, ..., $(i-2p)$ разряды).

Наиболее рациональный способ умножения двоичных Фибоначчиевых чисел в 1-системе счисления аналогичен умножению в классической двоичной, хотя и обладает своей спецификой [1]. Основным способ деления чисел ($Z=X/Y$) в Фибоначчиевой системе счисления: накапливаются кратные числам Фибоначчи значения делителя, т.е. $N=Y\text{Ч}K_j$ ($K_j=1,2,3,5,\dots$). Кратные делителя сравниваются с делимым, начиная с максимального кратного. В зависимости от результата сравнения формируется частное, т.е. ... Избыточность представления чисел в Фибоначчиевой двоичной 1-системе счисления по сравнению с классической двоичной колеблется от 28% до 45%. Следовательно, данная система требует для представления чисел на 28–45% больше двоичных разрядов, чем двоичная. Кроме того, из-за междвоичных переносов и большего количества самих разрядов в представлении числа алгоритмы сложения, вычитания, умножения и деления не могут быть быстрее соответствующих алгоритмов двоичной системы. Однако достоинство Фибоначчиевой системы счисления – в том, что ее избыточность позволяет обнару-

живать ошибки при выполнении арифметических преобразований данных. По утверждению автора системы [1], процент обнаруживаемых ошибок достигает 99,99%. Несмотря на очевидную непрактичность Фибоначчиевой системы счисления для конструирования цифровых вычислительных устройств, работы создателя системы и его учеников представляют собой значительный научный результат, который показывает неисследованность разнообразия систем счисления и необходимость поиска систем с новыми качествами.

Система остаточных классов

Система остаточных классов (СОК) – это непозиционная система счисления, числа в которой представляются остатками от деления на выбранную систему оснований $P_1, P_2, \dots, P_n$ и являются взаимнопростыми числами. Операции сложения, вычитания и умножения над числами в СОК производятся независимо по каждому основанию без переносов между разрядами (основаниями). Диапазон представимых чисел $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n$ [4]. Если задан ряд положительных взаимнопростых чисел $P_1, P_2, \dots, P_n$, то целое положительное число A , представленное в виде набора наименьших положительных остатков (вычетов) от деления числа A на выбранные основания $P_1, P_2, \dots, P_n$, можно записать в виде $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, ... где $[]$ – целочисленное деление. Это и есть запись числа в СОК. Если исходные числа A, B , их сумма $A+B$ и их произведение $A \cdot B$ находятся в диапазоне $[0, P)$, то результаты операций сложения $A+B$ и умножения AB могут быть однозначно представлены соответственно остатками g_i и r_i по тем же основаниям P_i , т.е. $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ $A+B = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $AB = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, где ...

Рассмотрим примеры выполнения операций сложения и умножения чисел в СОК. Пусть основаниями системы являются $P_1=2, P_2=3, P_3=5, P_4=7$. Диапазон представимых чисел в данной системе $P=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=210$. Требуется сложить числа $A=34$ и $B=87$. По выбранным основаниям числа A и B в СОК будут иметь вид $A=(0, 1, 4, 6)$, $B=(1, 0, 2, 3)$.

Сложим числа A и B ... Легко проверить, что число $A+B$, представленное по выбранным основаниям как $(1, 1, 1, 2)$, равно 121. Пусть требуется умножить числа $A=17$ и $B=8$. $A=(1, 2, 2, 3)$, $B=(0, 2, 3, 1)$ В самом деле, число $A \cdot B$, представленное по выбранным основаниям как $(0, 1, 1, 3)$, равно 136. Такие операции, как деление,

сравнение и др., требующие информации о величине всего числа, в СОК выполняются по более сложным алгоритмам. И в этом заключается существенный недостаток данной системы счисления, сдерживающий ее широкое применение в качестве компьютерной арифметики. Однако сегодня даже в самых современных компьютерах при работе с большими и супербольшими числами используют СОК, ибо только эта арифметика позволяет получать результаты вычислений в реальном времени. В таких случаях в качестве оснований СОК применяют величины, близкие к 2^m (m – двоичная разрядность компьютера), например $2^{m-1}-1$, 2^{m-1} , $2^{m-1}+1$ и т.д. Компьютер вычисляет результат по одному из модулей за один проход. Другие области применения СОК – помехоустойчивое кодирование, криптография и т.п. Начиная с 1952 года специалисты многих стран мира, включая и СССР, занимались проблемой повышения скорости выполнения “неудобных” операций в СОК. Особую роль в решении данной проблемы сыграл Израиль Яковлевич Акушский. Немалый вклад в эту область науки внесли также Д.И.Юдицкий, В.М.Амербаев, А.А.Коляда.

Иерархические системы счисления

В конце 80-х – начале 90-х годов родилась идея соединения позиционных и непозиционных систем счисления, т.е. конструирования иерархических систем, которые должны сочетать в себе положительные стороны включенных в них систем счисления и быть свободными от их недостатков [5, 6]. Принцип построения иерархических систем в целом прост. Выбирается некоторая внешняя система счисления $A=$, где a – алфавит системы, а $W=W_0$, W_r – ее сигнатура. Сигнатура состоит из двух частей: операционной (W_0), содержащей символы операций системы, и реляционной (W_r), содержащей символы отношений. Цифры, т.е. элементы алфавита A этой системы, записываются в виде слов (кодов) другой (внутренней) системы счисления $B=$. Такую систему обозначают $A[B]$.

Рассмотрим пример. Пусть A – десятичная позиционная система, а B – двоичная система. Тогда $a=\{0,1,2,...,9\}$, $b=\{0,1\}$. Двоичное кодирование цифр системы A (десятичной) производится, например, тетрадами: $0 \textcircled{R} 0000$, $1 \textcircled{R} 0001$, ..., $9 \textcircled{R} 1001$. Тогда число 23 (десятичное) запишется в иерархической системе счисления в виде двух тетрад (0010, 0011). Система $A[B]$ в нашем примере – хорошо

известная двоично-кодированная десятичная система, применяемая для представления десятичных чисел в современных ЭВМ.

Очевидно, что степень вложенности иерархической системы может быть и более двух. Иначе говоря, существуют иерархические системы счисления $A_0[A_1[A_2\ldots[A_n]\ldots]$ с основаниями $S_0, S_1, \ldots, S_n$, причем $S_0 > S_1 > \ldots > S_n$. Система счисления (двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная), для которых $S_0 = S_1 \cdot 2^{m_1}$, $S_1 = S_2 \cdot 2^{m_2}$, ..., $S_n = S_{n-1} \cdot 2^{m_n}$ на уровне представления являются безызбыточными. Если данное условие не выполняется, система избыточна (например, двоично-кодированная десятичная).

Позиционно-остаточная система счисления

При конструировании иерархических систем счисления большой интерес представляет сочетание систем различных типов. Рассмотрим систему вида $A[B]$, для которой A – позиционная система счисления с основанием S , а B – система счисления в остаточных классах с базовыми модулями $P_1, P_2, \ldots, P_r$, такими, что $P_i S$, $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_r$. Такую систему называют позиционно-остаточной системой счисления. Неравенство $P_i S$ – необходимое и достаточное условие однозначного представления цифр $0, 1, \ldots, S-1$ позиционной системы наборами вычетов по модулям $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Однако учитывая необходимость корректной реализации арифметических операций в системе $A[B]$ (например, формирование переноса и т.п.), можно поставить более жесткое условие $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_r \cdot 2^s$.

Весьма важен выбор величины основания S позиционной системы счисления и модулей системы счисления в остаточных классах. Отдавая дань двоичной системе счисления, можно выбирать $S = 2^m$. В этом случае модули СОК и их произведение должны удовлетворять условию $P_i \cdot 2^{m+1}$. Для человека же наиболее удобны основания, кратные 10 (100, 1000 и т.д.).

Двоично-кодированная десятичная система – в известной мере компромисс между человеком и компьютером. Но ее относительная избыточность – 26,5%. Чтобы преодолеть данный недостаток, ряд исследователей предлагают для арифметики с плавающей запятой вместо основания 10 использовать 100 [7]. Тогда для хранения двух десятичных цифр достаточно иметь семь двоичных разрядов вместо восьми (избыточность представления – 22,7%). Переход к основанию 1000 позволяет размещать три десятичные цифры в 10 двоич-

ных разрядах вместо 12 (избыточность представления – 2,35%). Расплата за экономичное представление чисел при переходе к основаниям вида $10n$ – более сложные алгоритмы кодирования и декодирования таких чисел. Однако на уровне машинного представления арифметика все равно остается двоичной. Арифметические операции в позиционно-остаточной системе счисления выполняются отдельно над цифрами внешней и внутренней системы. Такая ступенчатая реализация операций позволяет практически без изменений переносить алгоритмы внешней системы счисления на операции в системе $A[B]$. При этом “цифровые” операции системы счисления A заменяются процедурами системы счисления B .

Знако-разрядная позиционно-остаточная система счисления

Еще один пример иерархической системы счисления – знако-разрядная система с основанием S , цифры которой представляются в системе остаточных классов с базовыми модулями $P=P_1, P_2, \dots, P_r$ [8]. Достоинство данной системы счисления – высокая скорость выполнения арифметических операций над разрядными цифрами и минимальная длина пути распространения переноса между S -ичными разрядами (не далее соседнего разряда). Высокое быстродействие достигается за счет того, что при суммировании в каждом S -ичном разряде ($S > 2$) одновременно формируются три величины: $x_i + u_i$, $x_i + u_i - 1$, $x_i + u_i + 1$. Затем одна из них выбирается в качестве результата в зависимости от значения сигнала переноса t_i , принимающего значения $-1, 0, +1$.

Таким образом, появляется возможность параллельной обработки на нескольких компьютерах больших чисел с основаниями $S=2m$. Обработать большие числа в “реальном времени” способны даже двоичные персональные компьютеры, работающие по алгоритмам знако-разрядной позиционно-остаточной системы счисления.

Новейшие западные технологии, появляющиеся на российском рынке, в совокупности с отечественными разработками в области недвоичных компьютерных арифметик и синтеза новых способов и алгоритмов ускорения вычислений открывают перед разработчиками вычислительных систем новые возможности. Автор будет рад любым контактам со специалистами, заинтересовавшимися изложенными в статье идеями.

Литература

1. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерений. – М.: Сов.радио, 1997.
2. Евстигнеев В.Г. Недвоичная машинная арифметика и специализированные процессоры. – М.: МИФИ СЕРВИС и АО “ИН-СОФТ”, 1992. (Отсутствует в библиотеках страны. Ссылка автора на неё недействительна).
3. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М.: Высшая школа, 1970.
4. Акушский И.Д., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов. радио, 1968.
5. Евстигнев В.Г. S-ичный сумматор. – Электронная техника. Сер. 10, 1986, вып. 5(59), с.17–19.
6. Евстигнеев В.Г. S-ичный сумматор. Авт. свид. №1273925.
7. Schoichet S.R. The LISP Machine. Mini-Micro System, 1978, №11(5), p. 68–74.
8. Евстигнеев В.Г., Евстигнеева О.В. Устройство для сложения n-разрядных чисел в избыточной системе счисления. Авт. свид. №. 1188731.

ЕВСТИГНЕЕВ В.Г.

НЕДВОИЧНЫЕ КОМПЬЮТЕРНЫЕ АРИФМЕТИКИ**

(ЗАО «МНИТИ»)

В статье с позиций сегодняшнего дня делается попытка оценить вклад Советских ученых прошлого столетия в развитие вычислительной техники Советского Союза и показать диапазон научных исследований в этой области и в частности в разработке новых компьютерных арифметик и их внедрении в создание принципиально новых вычислительных систем, намного опережавших достижения западных и в первую очередь американских специалистов в этой области. И только постепенное технологическое отставание Советской микроэлектронной промышленности не позволило сбыться смелым и много обещающим идеям Советских ученых того времени. Автор статьи сумел внести свой скромный вклад в общую копилку прогресса вычислительной техники того времени.

В 70 – 80 годы двадцатого столетия усилиями советских ученых С.А. Лебедева, В.М. Глушкова, М.А. Карцева, И.Я. Акушского, Д.И. Юдицкого, Г.Я. Гуськова, В.С. Семенихина, И.В. Прангишвили, Н.Я. Матюхина и многих других были созданы образцы вычислительной техники, превосходящие по своим параметрам, новизне идей и архитектуре все мировые достижения. В качестве примера назову лишь некоторые из вычислительных машин тех лет: серия ЭВМ класса БЭСМ И «Эльбрус», ЭВМ «Стрела», серии ЭВМ М-20, М-220, 5Э76, «Мир», ПС и др. и лишь после того, как СССР стал воспроизводить ЭВМ класса IBM-360 (ЕС ЭВМ) и копировать, а не разрабатывать микроэлектронную элементную базу, судьба советской вычислительной техники была предрешена. Ответственность за это лежит не на ученых и разработчиках, а на руководстве страны.

В те же годы в СССР коллективы ученых исследовали и разрабатывали различные арифметики, позволявшие создавать ЭВМ с более высокой скоростью обработки данных по сравнению с широко распространенной двоичной системой счисления. Так, под руко-

* Текст печатается по изданию: Евстигнеев В.Г. Недвоичная компьютерная арифметика // [housea.ru>index.php/computer/50450](http://housea.ru/index.php/computer/50450)

водством И. Я. Акушского и Д. И. Юдицкого была создана ЭВМ К-340 на основе системы счисления в остаточных классах, которая длительное время выпускалась нашей промышленностью и отличалась высокой производительностью и надежностью. Коллективом специалистов во главе с В. М. Глушковым были созданы и запущены в производство ЭВМ серии «Мир» с новой архитектурой и системой программирования, позволявшие производить вычисления с переменной (регулируемой) разрядностью. Тогда же под руководством И.В. Прангишвили разрабатываются и производятся ЭВМ серии ПС на основе ассоциативных процессоров с параллельной архитектурой, а под руководством М.А. Карцева – высокопроизводительные, высоконадежные вычислительные комплексы большой разрядности (до 512 двоичных разрядов) для специальных применений.

В начале 80-х годов появились первые публикации советских ученых о Фибоначчиевой системе счисления [1] и иерархической системе счисления, которые позволяли создавать более высокопроизводительные и надежные вычислительные средства на основе новых элементов микроэлектроники, в том числе и многозначных. Одновременно разрабатываются и алгоритмы выполнения арифметических операций в ЭВМ, основанные на новых арифметиках.

Кратко опишем наиболее интересные системы счисления для вычислительных устройств, быстродействие и надежность которых превосходят аналоги, основанные на двоичной арифметике.

Знако-разрядная система счисления

Число в знако-разрядной системе счисления [2], как и в любой позиционной системе, можно записать в виде

$$X = \sum_{i=m}^n x_i S^{-i}$$

где $x_i = \{-R, -R + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, R\}$, $S = 2R$ или $S = 2R + 1$.

Сложение двух чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется в два такта. В первом такте формируются поцифровые промежуточные суммы ω_i и цифры поразрядных переносов t_i , которые могут принимать значения -1, 0 и +1, т.е. $x_i + y_i = \omega_i + t_i S$.

Во втором такте формируется окончательная сумма путем сложения цифр промежуточных разрядных сумм и соответствующим им цифр поразрядных переносов, т.е. $Z_i = \omega_i + t_{i+1}$

Умножение чисел в знако-разрядной системе счисления выполняется последовательным сложением (вычитанием) и сдвигом вправо результатов умножения множимого на S -ичные цифры множителя, начиная с младшего S -ичного разряда. Деление чисел подчиняется общим правилам деления в S -ичной системе счисления.

Основным достоинством знако-разрядной системы счисления является то, что сигнал переноса при выполнении операции сложения распространяется не далее соседнего разряда, а время выполнения операции не зависит от разрядности операндов. То есть любая операция сложения выполняется за два такта (под тактом здесь понимается время вычисления разрядной суммы).

Фибоначчиева система счисления

Среди позиционных весомозначных систем счисления есть системы, в которых веса разрядов выражаются не известным соотношением $\Delta_i = S_i$, а другими, например числами ряда Фибоначчи, т.е. $\Delta_t = \Delta_{t-2} + \Delta_{t-1}$. в этом случае система счисления называется Фибоначчиевой. Другой пример позиционной весомозначной системы счисления с нетрадиционным законом формирования весов разрядов – так называемая полиадическая система счисления. Веса разрядов в ней определяются выражением

$$\Delta_i = p_i \Delta_{i-1}, \text{ где } p_i, - \text{взаимно -простые числа.}$$

Остановимся на Фибоначчиевой системе счисления. В работе [1] показано, что любое натуральное число N может быть представлено в двоичной p -системе счисления при $p \geq 0$, весами разрядов в которой являются числа Фибоначчи. При этом после каждой единицы слева направо следует не менее p нулей. Так, например, при $p=1$ число 75 в двоичной 1-системе счисления можно записать как $75 = 1001010100 = 1 \times 55 + 0 \times 34 + 0 \times 21 + 1 \times 13 + 0 \times 8 + 1 \times 5 + 0 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 1$

Отметим две особенности сложения значащих разрядов в двоичной 1-системе счисления. Во-первых, при суммировании единиц возникает перенос не одной единицы (как в классической двоичной системе счисления), а нескольких одновременно. Во-вторых, единицы можно складывать двумя способами. В первом способе при сложении i -х разрядов чисел в i -м разряде промежуточной суммы записывается 1 и возникают переносы двух единиц одновременно – в $(i-1)$ -й и в $(i-p-1)$ -й разряды. При втором способе сложения единиц в соответствующем $(i-m)$ разряде промежуточной суммы записывает-

ся 0 (как и в классической двоичной арифметике) и возникает перенос $p+1$ единиц (одна единица – в старший $(i+1)$ -й и p единиц – в младшие $(i-p-1), (i-p-2), \dots, (i-2p)$ разряды).

Наиболее рациональный способ умножения двоичных Фибоначчиевых чисел в 1-системе счисления аналогичен умножению в классической двоичной, хотя и обладает своей спецификой [1].

Основной способ деления чисел ($Z=X/Y$) в Фибоначчиевой системе счисления: накапливаются кратные числам Фибоначчи значения делителя, т.е. $N=Y-K_j$ ($K_j=1,2,3,5,\dots$). Кратные делителя сравниваются с делимым, начиная с максимального кратного. В зависимости от результата сравнения формируется частное, т.е.

$$Z = \sum K_i$$

Несмотря на очевидную непрактичность Фибоначчиевой системы счисления для конструирования цифровых вычислительных устройств, работы создателя системы и его учеников представляют собой значительный научный результат, который показывает неисследованность разнообразия систем счисления и необходимость поиска систем с новыми качествами.

Система остаточных классов

Система остаточных классов (СОК) – это непозиционная система счисления, числа в которой представляются остатками от деления на выбранную систему оснований $P_1, P_2, \dots, P_n$ и являются взаимнопростыми числами. Операции сложения, вычитания и умножения над числами в СОК производятся независимо по каждому основанию без переносов между разрядами (основаниями). Диапазон представимых чисел $P = P_1, P_2, \dots, P_n$ [3].

Если задан ряд положительных взаимнопростых чисел $P_1, P_2, \dots, P_n$, то целое положительное число A на выбранные основания $P_1, P_2, \dots, P_n$, можно записать в виде $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$$a_i = A - \lfloor \frac{A}{P_i} \rfloor P_i, i = 1, 2, \dots, n$$

где $\lfloor \rfloor$ – целочисленное деление. Это и есть запись числа в СОК.

Если исходные числа A, B , их сумма $A+B$ и их произведение $A \cdot B$ находятся в диапазоне $(0, P)$, то результаты операций сложения $A+B$ и умножения $A \cdot B$ могут быть однозначно представлены соответственно остатками γ_i и p_i по тем же основаниям P_i , т.е.

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$A + B = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

$$A \cdot B = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\gamma_i = a_i + \beta_i - \left[\frac{a_i + \beta_i}{P_i} \right] P_i$$

$$p_i = a_i + \beta_i - \left[\frac{a_i \beta_i}{P_i} \right] P_i$$

где $[]$ – целочисленное деление. Это и есть запись числа в СОК.

Такие операции, как деление, сравнение и др., требующие информации о величине всего числа, в СОК выполняются по более сложным алгоритмам. И в этом заключается существенный недостаток данной системы счисления, сдерживающий ее широкое применение в качестве компьютерной арифметики. Однако сегодня даже в самых современных компьютерах при работе с большими и супербольшими числами используют СОК, ибо только эта арифметика позволяет получать результаты вычислений в реальном времени. В таких случаях в качестве оснований СОК применяют величины, близкие 2^m (m -двоичная разрядность компьютера), например $2^{m-1}-1$, 2^{m-1} , $2^{m-1}+1$ и т.д. Компьютер вычисляет результат по одному из модулей за один проход. Другие области применения СОК – помехоустойчивое кодирование, криптография и т. п.

Начиная с 1952 года специалисты многих стран мира, включая и СССР, занимались проблемой повышения скорости выполнения «неудобных» операций в СОК. Особую роль в решении данной проблемы сыграл И.Я. Акушский. Немалый вклад в эту область науки внесли также Д.И. Юдицкий, В.М. Амербаев, А.А. Коляда.

Иерархические системы счисления

В конце 80-х – начале 90-х годов родилась идея соединения позиционных и непозиционных систем счисления, т. е. конструирования иерархических систем, которые должны сочетать в себе положительные стороны включенных в них систем счисления и быть свободными от их недостатков [4, 5]. Принцип построения иерархических систем в целом прост. Выбирается некоторая внешняя система счисления $A = \langle a, \Omega \rangle$, где a - алфавит системы, а $\Omega = \Omega_0, \Omega_r$ – ее сигнатура. Сигнатура состоит из двух частей: операционной (Ω_0), содержащей символы операций системы, и реляционной (Ω_r), содержащей символы отношений. Цифры, т.е. элементы алфавита A этой системы, записываются в виде слов (кодов) другой (внутренней) системы счисления $B = \langle \beta, \Omega \rangle$. Таковую систему обозначают $A[B]$.

Рассмотрим пример. Пусть A – десятичная позиционная система, а B – двоичная система. Тогда

$\alpha = \{0,1,2,\dots,9\}$, $\beta = \{0,1\}$. Двоичное кодирование цифр системы A (десятичной) производится, например, тетрадами:

$$0 \rightarrow 0000, 1 \rightarrow 0001, \dots, 9 \rightarrow 1001$$

Тогда число 23 (десятичное) запишется в иерархической системе счисления в виде двух тетрад (0010, 0011). Система $A[B]$ в нашем примере – хорошо известная двоично-кодированная десятичная система, применяемая для представления десятичных чисел в современных ЭВМ.

Очевидно, что степень вложенности иерархической системы может быть и более двух. Иначе говоря, существуют иерархические системы счисления $A_0[A_1[A_2\dots[A_n]\dots]]$ с основаниями $S_0, S_1, \dots, S_n$, причем $S_0 > S_1 > \dots > S_n$. Система счисления (двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная), для которых

$$S_0 = S_1 2^m, \quad S_1 = S_2 2^m, \dots, S_n = S_{n-1} 2^m,$$

на уровне представления являются безызыбыточными. Если данное условие не выполняется, система избыточна (например, двоично-кодированная десятичная) [4].

Позиционно-остаточная система счисления

При конструировании иерархических систем счисления большой интерес представляет сочетание систем различных типов. Рассмотрим систему вида $A[B]$, для которой A – позиционная система счисления с основанием S , а B – система счисления в остаточных классах с базовыми модулями $P_1, P_2, \dots, P_r$, такими, что $P = P_1, P_2, \dots, P_r$. Такую систему называют позиционно-остаточной системой счисления [6].

Неравенство $P \geq S$ – необходимое и достаточное условие однозначного представления цифр $0, 1, \dots, S-1$ позиционной системы наборами вычетов по модулям $P_1, P_2, \dots, P_r$. Однако учитывая необходимость корректной реализации арифметических операций в системе $A[B]$ (например, формирование переноса и т.п.), можно поставить более жесткое условие $P = P_1, P_2, \dots, P_r \geq 2S$.

Весьма важен выбор величины основания S позиционной системы счисления в статочных классах. Отдавая дань двоичной системе счисления, можно выбирать $S \geq 2^m$. В этом случае модули СОК и их произведение должны удовлетворять условию $P \geq 2^{m+1}$.

Для человека же наиболее удобны основания, кратные 10 (100, 1000 и т. д.).

Двоично-кодированная десятичная система – в известной мере компромисс между человеком и компьютером. Но ее относительная избыточность – 26,5%. Чтобы преодолеть данный недостаток, ряд исследователей предлагают для арифметики с плавающей запятой вместо основания 10 использовать 100 [5]. Тогда для хранения двух десятичных цифр достаточно иметь семь двоичных разрядов вместо восьми (избыточность представления -22,7%). Переход к основанию 1000 позволяет размещать три десятичные цифры в 10 двоичных разрядах вместо 12 (избыточность представления – 2,35%). Расплата за экономическое представление чисел при переходе к основаниям в вида 10^n – более сложные алгоритмы кодирования и декодирования таких чисел. Однако на уровне машинного представления арифметика все равно остается двоичной.

Арифметические операции в позиционно-остаточной системе счисления выполняются отдельно над цифрами внешней и внутренней системы. Такая ступенчатая реализация операций позволяет практически без изменений переносить алгоритмы внешней системы счисления на операции в системе $A[B]$. При этом «цифровые» операции системы счисления A заменяются процедурами системы счисления B . [5]

Знако-разрядная позиционно-остаточная система счисления

Еще один пример иерархической системы счисления – знако-разрядная система с основанием S , цифры которой представляются в системе остаточных классов с базовыми модулями $P=P_1, P_2, \dots, P_r$. Достоинство данной системы счисления -высокая скорость выполнения арифметических операций над разрядными цифрами и минимальная длина пути распространения переноса между S -ичными разрядами (не далее соседнего разряда). Высокое быстродействие достигается за счет того, что при суммировании в каждом S -ичном разряде ($S>2$) одновременно формируются три величины:

$$x_i + y_i, x_i + y_i - 1, x_i + y_i + 1.$$

Затем одна из них выбирается в качестве результата в зависимости от значения сигнала переноса t_i , принимающего значения -1, 0, +1. [7,8,9,10]

Таким образом, появляется возможность параллельной обработки на нескольких компьютерах больших чисел с основаниями $S=2^m$. Обработать большие числа в «реальном времени» способны даже двоичные персональные компьютеры, работающие по алгоритмам знако-разрядной позиционно-остаточной системы счисления.

Новейшие западные технологии, появляющиеся на российском рынке, в совокупности с отечественными разработками в области недвоичных компьютерных арифметик и синтеза новых способов и алгоритмов ускорения вычислений открывают перед разработчиками вычислительных систем новые возможности.

Литература

1. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерений. – М.: Сов. Радио, 1997.
2. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М. Высшая школа, 1970.
3. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М. Сов. Радио, 1968.
4. Schoichet S.R. The LISP Machine. Mini-Micro System, 1978, №11(5). – (p. 68-74).
5. Евстигнеев В.Г. S-ичный сумматор. – Электронная техника. Сер. 10, 1986, вып. 5(59). – (с.17-19).
6. Евстигнеев В.Г. Недвоичная машинная арифметика и специализированные процессоры. – М. МИФИ СЕРВИС и АО «ИНСОФТ», 1992. (Отсутствует в библиотеках страны. Ссылка автора на неё недействительна).
7. Евстигнеев В.Г. Евстигнеева О.В. Устройство для сложения многоразрядных q-ичных чисел. Авторское свидетельство № 1163321.
8. Евстигнеев В.Г. S-ичный сумматор. – Авторское свидетельство № 1273925.
9. Евстигнеев В.Г. Евстигнеева О.В. Устройство для сложения p-разрядных чисел в избыточной системе счисления. – Авторское свидетельство № 1188731.
10. Евстигнеев В.Г. Сумматор в знакоразрядной позиционно-остаточной системе счисления. – Авторское свидетельство № 1383349.

ТРОИЧНОЕ КОНСТРУКТНОЕ КОДИРОВАНИЕ БУЛЕВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ*

Булева алгебра – первооснова, или начало, всякой науки, исследующей взаимосвязи, будь то логика, математика, информатика или, скажем, структурная лингвистика. Ввиду же фундаментальности наук этого рода не будет преувеличением усмотреть в ней и начало науки вообще – способности рассуждать, умозаключать, доказывать.

Компьютерная информатика также "произрастает" из булевой алгебры, что наиболее очевидно. Однако дальнейшее развитие способности компьютера, становление "искусственного интеллекта", оставляет желать лучшего. Впрочем, при нынешнем засилии формализма и естественный человеческий интеллект оказывается под угрозой – поневоле превращаемся в роботов.

Пора бы придать компьютерной информатике здравый диалектический характер.

В этой статье речь пойдет об усовершенствованной конструктивной реализации булевой алгебры в диалоговой системе структурированного программирования ДССП [1-3].

Конструктами в ДССП называются нестандартные, определяемые (конструируемые) пользователем типы данных, введением которых достигается высокоуровневая специализация этой системы в заданном классе приложений. Комплекс программ, обеспечивающий возможность декларирования конструктивных переменных и реализующий базисный набор операций конструкта, называется, поддерживающим этот конструкт *конструктивом* [4]. Специализация и развитие ДССП в нужном направлении осуществляется дозагрузкой соответствующих конструктивов.

Конструкты типа "булево выражение" предоставляют возможность оперирования переменными, принимающими в качестве значений n -арные выражения булевой алгебры, и функционально полный набор базисных операций, позволяющих в сочетании с штат-

* Текст печатается по изданию: Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С. Троичное конструктивное кодирование булевых выражений // computer – museum.ru>histussr/trilog22.hrm

ными средствами конструирования программ в ДССП эффективно реализовать логико-алгебраические процедуры [5].

Функционально конструкт определяется форматом принимаемых переменными значений и набором интерпретирующих эти значения базисных операций. Формат характеризуется структурой, информационной емкостью и способами доступа. Например, формат "вектор битов" с параметром n – длина вектора предоставляет доступ к отдельным битам по их номерам, а также к вектору в целом. Вектор битов надлежащим выбором базисных операций можно интерпретировать как двоичное число без знака, либо со знаком, как целое, либо дробное и т. п. Но тот же вектор битов можно интерпретировать как n -арную элементарную конъюнкцию (либо дизъюнкцию), приняв в качестве базисных операций побитные инверсию, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Принцип отображения булевых выражений конструктами в простейших случаях заключается во взаимно однозначном сопоставлении входящих в выражение букв-переменных (следуя Аристотелю, будем называть их *терминами*) последовательно пронумерованным компонентам-битам в формате конструкта. Другими словами, каждая переменная представлена в формате конструкта собственным битом. Значение же, принимаемое битом, указывает статус его переменной в отображаемом выражении. Например, элементарная конъюнкция $xuz'u$ отображается вектором 1101 при условии, что неинвертированному термину сопоставлена цифра 1, а инвертированному – цифра 0.

Заметим, что всевозможные 2^n n -арные элементарные конъюнкции пронумерованы значениями отображающего n -битного вектора, интерпретируемыми как двоичные натуральные числа. В приведенном примере номера последовательно убывают от 1111 для $xuzi$ до 0000 для $x'u'z'u'$.

Эта нумерация использована в конструкте, отображающем булевы выражения в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ). Его формат – 2^n -компонентный вектор битов, пронумерованных n -битными числами от 11...1 до 00...0, и таким образом однозначно сопоставленных n -арным элементарным конъюнкциям. Биты, соответствующие входящим в отображаемое СДНФ-выражение конъюнкциям, принимают значение 1, а все прочие – значение 0. Например, при $n = 2$ отображающий вектор состоит из 4-х битов, пронумерованных числами 11, 10, 01, 00, которым соот-

ветствуют элементарные конъюнкции xu , xu' , $x'u$, $x'u'$, так что выражение $xu \vee x'u$ отобразится в 1010, а выражение $xu' \vee x'u \vee x'u'$ отобразится в 0111.

Конструкт описанного типа, названный *двоичной ДК-шкалой*, позволяет эффективно компьютеризовать алгебру n -арных СДНФ-выражений. Очевидно, что операции конъюнкции и дизъюнкции над такими выражениями сводятся к побитным конъюнкциям и дизъюнкциям ДК-шкал, а операция отрицания-дополнения СДНФ-выражения – к побитной инверсии его ДК-шкалы. Существенное достоинство ДК-шкалы – ее экономность: произвольная n -арная булева функция кодируется 2^n битами.

Выражения в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ-выражения) аналогично отображаются n -арной двоичной КД-шкалой. Вернее, 2^n -битный вектор допускает ДК-интерпретацию и КД-интерпретацию: ДК – это дизъюнкция элементарных конъюнкций (СДНФ), а КД – конъюнкция элементарных дизъюнкций (СКНФ).

Наряду с ДК- и КД-шкалами не лишены смысла и менее экономные конструкты на основе формата *цепь* элементарных конъюнкций либо дизъюнкций. Цепь – это совокупность n -арных векторов, допускающая добавление, удаление, а также перестановку отдельных ее членов. В отличие от шкалы, где членам СНФ-выражения сопоставлены позиции битов-компонент отображающего вектора, так что номера позиций кодируют соответствующие члены, в цепи коды членов СНФ-выражения содержатся непосредственно и могут располагаться в любой последовательности, в частности, упорядочиваться по тому или иному критерию, что способствует дальнейшему развитию конструктивной алгебры.

Шкалы и цепи, основанные на отображении элементарных конъюнкций и дизъюнкций векторами битов (двоичные конструкты), позволяют компьютеризовать алгебру совершенных нормальных форм, СДНФ- и СКНФ-выражений. В системе с двоичными конструктами эффективно реализуются процедуры синтеза и преобразования СНФ-выражений, такие как тождественное преобразование выражения в двойственную форму, инвертирование, получение дополнения, получение дуала (выражения, двойственного данному), получение единого выражения из нескольких заданных по предписанным взаимосвязям, выявление и доказательство отноше-

ний, в которых состоят сопоставляемые выражения, решение булевых уравнений [5, 6].

Компьютеризация булевой алгебры в полном объеме достигнута применением конструкторов, в основу которых положен вектор трехзначных элементов (тритов). Конструкторы этого рода естественно называть троичными. О том, что в троичном коде успешно преодолевается несовершенство двоичного кодирования, убедительно свидетельствует троичный симметричный код чисел, в котором три значения трита интерпретируются как 1, 0, -1 т. е. к двоичным 1 и 0 добавлена отрицательная единица. Не имеющих удовлетворительного решения в двоичном коде проблем представления чисел со знаком и округления чисел в симметричном троичном коде просто нет.

Точно так же компенсируется неполноценность отображения вектором битов элементарных конъюнкции и дизъюнкции, оказывающаяся причиной того, что двоичные конструкторы отображают булевы выражения только в совершенных нормальных формах. Используемые в них для представления элементарных конъюнкций и дизъюнкций n -битные векторы способны кодировать только индивидуальные конъюнкции и предполные дизъюнкции, но не могут отобразить элементарную конъюнкцию или дизъюнкцию, в которой некоторые термины умалчиваются ("элиминированы" по Булю-Порецкому), т. е. в которой статус терминов трехзначен: неинвертированное вхождение, вхождение под знаком инверсии, невхождение.

Сопоставив этим состояниям значения трита 1, -1, 0, которые далее ради удобства будем обозначать +, -, 0, получаем отображение n -тритным вектором не только индивидуальных конъюнкций и предполных дизъюнкций, но и элементарных n -арных конъюнкций и дизъюнкций произвольного вида. Так, конъюнкциям $x y z' u$, $x z' u$, $y z'$, z' будут соответствовать значения 4-тритного конструктора-вектора К-типа: ++-+, +0-+, 0+-0, 00-0, а дизъюнкциям $x' \vee y' \vee z \vee u'$, $x' \vee z \vee u'$, $y' \vee z$, z – значения 4-тритного конструктора-вектора Д-типа: --+-, -0+-, 0-+0, 00+0.

Построенные на n -тритных векторах ДК- и КД-цепи при должным образом пересмотренных наборах интерпретирующих базисных процедур способны отображать теперь не только СНФ-выражения, но и произвольное булево выражение в нормальной форме с фиксированным порядком размещения терминов в элементарных конъюнкциях и дизъюнкциях. Например, выражение $x y \vee x' u$, отображимое 2-арной двоичной ДК-цепью 11 01, троичной 2-

арной цепью отображимо как в СДНФ ++ -+, так и в минимальной ДНФ 0+, а выражение $xu' \vee x'u \vee x'u'$ (двоичная ДК-цепь 10 01 00) троичной ДК-цепью отображается в четырех вариантах: +- -+ --, +- -0, 0- -+, -0 0-, -0 0-, т. е. в СДНФ, в двух тупиковых и в минимальной ДНФ.

Угадывается "алгебраическая полнота" троичного отображения, и в булевой алгебре она действительно имеет место: посредством троичных конструкторов удастся перепоручить компьютеру практически все, что может делать в булевой алгебре человек и даже то, чего еще не может (например, минимизации произвольного булева выражения [7]).

Описанное усовершенствование компьютерной реализации булевой алгебры представляет собой один из результатов конструктивного подхода к информатике. Результат фундаментальный, поскольку касается основы и вместе с тем открывает пути совершенствования последующих ступеней – алгебраизации силлогистики, модальной и диалектической логики [8], упорядочения теории вероятностей и нечетких множеств [9, 10].

Литература

1. Брусенцов Н. П., Златкус Т. В., Руднев И. А. ДССП-диалоговая система структурированного программирования // Программное оснащение микрокомпьютеров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. С. 11-40.
2. Брусенцов Н. П. Микрокомпьютеры. – М.: "Наука", 1985. С. 141-170.
3. Развиваемый адаптивный язык РАЯ диалоговой системы программирования ДССП / Н. П. Брусенцов, В. Б. Захаров, И. А. Руднев, С. А. Сидоров, Н. А. Чанышев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 80 с.
4. Концептуальная характеристика РИИИС-процессора / Н. П. Брусенцов, С. П. Маслов, Х. Рамиль Альварес, С. А. Сидоров // Интегрированная система обучения, конструирования программ и разработки дидактических материалов. – М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 1996 г. С. 16-43.
5. Владимирова Ю. С. Конструктивная реализация булевой алгебры // Интегрированная система обучения, конструирования программ и разработки дидактических материалов. – М.: Изд-во ф-та ВМиК МГУ, 1996 г. С. 44-69.

6. Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С. Решение булевых уравнений // Методы математического моделирования. – М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 59-68. Solution of Boolean Equations. // Computational mathematics and modeling, Vol. 9 , № 4, 1998, pp. 287-295.
7. Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С. Троичный минимизатор булевых выражений // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. С. 205-207.
8. Брусенцов Н. П. Трехзначная диалектическая логика // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. С. 36-44.
9. Брусенцов Н. П., Деркач А. Ю. Логическая модель теории вероятностей и нечетких множеств Заде // Цифровая обработка информации и управление в чрезвычайных ситуациях. Материалы Второй международной конференции (28-30 ноября 2000 г., Минск.) – Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 2000. Том 1, с. 41-44.
10. Брусенцов Н. П., Деркач А. Ю. Трехзначная логика, нечеткие множества и теория вероятностей // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. С. 88-91.
11. Заметки о трехзначной логике
12. Доложено на Ломоносовских чтениях 2002 г. на факультете ВМиК МГУ.
13. Опубликовано в: Программные системы и инструменты: Тематический сборник № 3 // Под ред. Л. Н. Королева.- М. Издательский отдел ВМиК МГУ, 2002, с. 6-10.

УПОРЯДОЧЕНИЕ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ*

Инструментальную основу современной информатики составляет булева алгебра с базисными операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, определенными таблицами, в которых набор значений как операндов, так и результатов операций исчерпывается двумя, интерпретируемыми обычно как «истина» и «ложь» и обозначаемыми соответственно цифрами «1» и «0», либо буквами: русскими «И», «Л», латинскими «Т», «L». Это алгебра двухзначной «логики высказываний», отождествляющей символ операции отрицания « $\neg$ » с частицей «не-», символ конъюнкции « $\wedge$ » – с грамматическим союзом «и», символ дизъюнкции « $\vee$ » – с «или». Истолковываемые таким образом символы операций называют *логическими связками*.

Выражения булевой алгебры представляют собой составные высказывания, «истинность» которых вычислима посредством определяющих связки таблиц. Применение же связок к выражениям и выявление действующих при этом алгебраических законов приводит к *исчислению высказываний*. Впрочем, последнее предпочитают формулировать с привлечением неэлементарной связки – *материальной импликации*, сопоставляемой отношению следования в естественных языках, которому она, увы, в сущности не тождественна. Таким образом, получилось исчисление, необыкновенно благоприятное для исследователей парадоксов, но на практике более чем бесполезное, ибо не соответствует здравому смыслу.

Каноническая, обходящаяся без импликации, булева алгебра семантическими парадоксами не омрачена, но и ее постулаты не вполне адекватны реальности и здравомыслию. Вследствие принятого в этой алгебре «априорного» закона исключенного третьего вне ее пределов оказались и модальности, и аристотелева силлогистика, иными словами, и интуиционизм, и диалектика.

Что-то в булевой алгебре не так, как должно быть по логике бытия. Прежде всего подозрение падает на операцию булева отрицания, которая почему-то определена так, что порождает *дополне-*

* Текст печатается по изданию: Н.П. Брусенцов. Упорядочение булевой алгебры // ternarycomp.narod.ru>arrangement.doc

ние отрицаемого до рассматриваемого многообразия возможностей (до *универсума*), т.е. в смысле «все то, что не А», где А – отрицаемое. Но ведь по здравому смыслу *отрицанием* данной определенности признается любая несовместимая с ней (противоречащая ей) определенность из имеющихся в универсуме. И ясно, что отрицание составных (неэлементарных) определенностей неоднозначно. Например, отрицаниями простейшей составной определенности xu – *конъюнкции* (совместности) элементарных определенностей x и y – будут: $x', y', x'y, xu', x'y', x' \vee y'$.

В булевой алгебре из этих шести принято последнее, *отрицание-дополнение*. Оно «замечательно» тем, что не оставляет места промежуточному третьему: все, что не отрицается, утверждается и обратно, так что алгебра булевых выражений сохраняет свойственную элементарным определенностям двухзначность. Но оно не столь элементарно как диаграммальная *инверсия* $x'y'$, сводящаяся к инвертированию в отрицаемом выражении всех вхождений каждой элементарной определенности, каждого термина.

Условимся обозначать дополнение префиксом « $\neg$ », а инверсию – постфиксом «штрих». Инверсия и дополнение, например, конъюнкции xu выразятся так:

$$(xu)' \equiv x'y', \quad \neg(xu) \equiv xu' \vee x'y \vee x'y' \equiv x' \vee y'$$

В отличие от инверсии как потерминного инвертирования выражения, отрицание-дополнение достигается исключением отрицаемого

выражения xu из характеризующей универсум полной дизъюнкции $xu \vee xu' \vee x'y \vee x'y' \equiv 1$. Затем полученное СДНФ-выражение минимизируется в $x' \vee y'$, оказывающееся *двойственным* (дуалом) тому, что дала инверсия. Таким образом, булево дополнение $\neg e$ выражения e есть дуал его инверсии e' :

$$\neg e \equiv \delta(e')$$

Операция получения двойственного (дуала) δ состоит во взаимозамене в выражении-операнде символов $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$.

Данное соотношение обратимо – инверсия в свою очередь есть дуал дополнения:

$$e' \equiv \delta(\neg e).$$

Однако инверсия, как уже было сказано, элементарней дополнения. Это видно из того, что функциональную полноту булевой алгебры обеспечивает пара дополнение-конъюнкция, либо же пара дополнение-дизъюнкция, тогда как в системе с инверсией необхо-

димы и конъюнкция, и дизъюнкция. Дело в том, что неперменный в определении дополнения закон исключенного третьего $e \vee \neg e \equiv 1$ на инверсию не распространяется и поэтому тождество де Моргана

$$x \wedge y \equiv \neg (\neg x \vee \neg y),$$

определяющее посредством дополнения конъюнкцию через дизъюнкцию и обратно, в случае инверсии не имеет места. В силлогистике инверсии соответствует контражность, а дополнению – контррадикторность [1].

Базисные операции алгебры, поименованные и обозначенные каждая собственным знаком (функтором), определены, с одной стороны, чисто формально таблицами истинности и предписаниями механических манипуляций, производимых над последовательностями символов, отображающими алгебраические выражения. С другой стороны, эти операции имеют содержательную интерпретацию (истолкование, смысл, семантику), и не одну.

Выражения булевой алгебры обычно истолковывают как *высказывания* – предложения, принимающие одно из двух значений «истинности», или как атрибуты классов, к которым относится либо, наоборот, не может относиться классифицируемая по представленным элементарными терминами *критериям* (признакам) вещь. С классами связана *объемная* (экстенциональная) интерпретация выражений, согласно которой подклассы называют содержащимися во включающих их классах и подчиненными им, что составляет диаметрально противоположность принятой в естественном рассуждении *смысловой* (интенциональной) интерпретации. Интенционально атрибут класса *содержится* в атрибутах его подклассов и *подчинен* каждому из них, *сказывается* о каждом, *необходимо присущ* каждому включенному в него, *необходимо следует* из него.

Рассмотрим конкретные примеры интенциональной интерпретации простейшего булева выражения – элементарной конъюнкции. В n -терминном универсуме, т.е. при различении по n первичным критериям, имеем n -местную (n -арную) конъюнкцию, каждой из компонент которой придается один из трех статусов: *необходимо присущее* / *антиприсущее* / *привходящее*. Булева конъюнкция содержит (необходимо) присущие ей термины непосредственно, без каких-либо функциональных знаков, каждый антиприсущий термин – под знаком инверсии, привходящие термины не содержатся (умалчиваются). Например, в трехтерминном x, y, z -универсуме конъюнкции $x y z'$ присущи x и y , антиприсущи z , конъюнкции же $x z'$

присуще x , антиприсуще z , а умалчиваемое в ней y – привходяще, т.е. необходимо не присуще и не антиприсуще.

Еще одна практически важная интерпретация булевых выражений – *теоретико-множественная* [2]. Та же конъюнкция xyz' истолковывается как множество, которому *принадлежат* элементы x , y и *антипринадлежит* (не может принадлежать) элемент z . Конъюнкция xz' представляет собой нечеткое множество, которому необходимо принадлежит x , антипринадлежит z , а элемент y не принадлежит и не антипринадлежит с необходимостью (безусловно). Элементы обретают привходящий статус в результате дизъюнкции множеств, например: $xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$ [3].

Конъюнкции без умолчания терминов являются четкими, категорическими множествами в традиционном понимании. Дизъюнкции конъюнкций (ДНФ-выражения) представляют собой нечеткие множества. Множества вообще, четкие и нечеткие, условимся называть *совокупностями*. Произвольное булево выражение в теоретико-множественной (совокупностной) интерпретации истолковывается как совокупность первичных терминов. Операция инверсии выражения инвертирует представленную этим выражением совокупность терминов, превращая принадлежащие ей в антипринадлежащие, антипринадлежащие в принадлежащие, а привходящие оставляя без изменения.

К булевым выражениям как к совокупностям терминов применимы, помимо инверсии, операции пересечения, объединения и теоретико-множественной разности. Примеры:

$$(xyz')' \equiv x'y'z$$

$$xyz' \cap xz \equiv xyz' \cap (xyz \vee xy'z) \equiv xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$$

$$xyz' \cup xz \equiv xyz' \cup (xyz \vee xy'z) \equiv xyz$$

$$xyz' \setminus xz \equiv xyz' \cap (xz)' \equiv xyz' \cap x'z' \equiv x'z'$$

Вместе с тем, базисные булевы операции (связки) – конъюнкция и дизъюнкция – обретают новое истолкование как конъюнкция и дизъюнкция совокупностей. Четкая совокупность (множество) формируется путем конъюнкции нечетких, например: $xz' \wedge xy \equiv xyz'$. Нечеткие совокупности суть дизъюнкции четких, например: $xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$.

Совокупностная интерпретация булевых выражений естественно изоморфна их интенциональной и экстенциональной интерпретациям. Так, элементарная конъюнкция, не содержащая привходящих (умалчиваемых) терминов, т.е. представляющая четкую сово-

купность терминов, интенционально понимается как *индивидуное* в принятом универсуме понятие, а экстенционально – как атрибут индивидуального класса. Нечетким совокупностям соответствуют размытые, содержащие несущественные термины, понятия и неиндивидуальные классы. Нельзя, однако, отождествлять (и даже смешивать) категории класса и множества, как это принято в логике, и в традиционной, и в математической.

Посредством базисных связок – инверсии, конъюнкции и дизъюнкции – выразима произвольная n -местная (n -терминная, n -арная) *булева функция*. Более того, в нормальных формах (ДНФ и КНФ) инвертируются только первичные термины, а в совершенных нормальных формах (СДНФ и СКНФ) нет умалчивания терминов. Выражение в совершенной дизъюнктивной форме представляет собой дизъюнкцию индивидуальных (n -терминных) конъюнкций, определяющую класс соответствующих этим конъюнкциям четких совокупностей (множеств) терминов. Этому классу соответствует в алгебре 2-й степени (в булевой алгебре дизъюнктов) четкая совокупность n -терминных индивидов, которые в логике предикатов называют «предметами». Нечеткой совокупности таких индивидов, допускающей привходящую принадлежность ей некоторых из них, в алгебре 1-й степени соответствует класс с привходящей включенностью в него отдельных подклассов – *нечеткий класс*.

Например, характеристическая функция отношения следования, представленного в аристотелевой силлогистике общеутвердительным суждением «*Всякое x есть y* » («*Всякому x присуще y* », « *y содержится в x* », « *y необходимо следует из x* »), выражается конъюнкцией дизъюнктов вида:

$$\bigvee x y \bigvee x' y' \bigvee x' y$$

где знак интегральной дизъюнкции, аналога интегральной суммы, – дизъюнкт $\bigvee$ – символизирует дизъюнкцию значений, принимаемых поддизъюнктным выражением на элементах характеризующей совокупности, распространенную на всю эту совокупность.

Рассматриваемая нечеткая совокупность 2-й степени характеризуется необходимой принадлежностью ей индивидов $x y$ и $x' y'$, необходимой непринадлежностью (антипринадлежностью) $x y'$ и привходящей принадлежностью индивида $x' y$, который в выражении умалчивается. Атрибут соответствующего этой совокупности индивидов класса в алгебре 1-й степени определяется как общий всем ее членам, т.е. дизъюнкцией атрибутов всех необходимо при-

надлежащих совокупности, а также привходящих индивидов. В рассматриваемом примере такой нечеткой дизъюнкцией будет

$$xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$$

где σ – символ третьего «значения истинности» – *привходящего*: не-0 и не-1, а нечто безусловное, некатегоричное, оцениваемое как вероятность, либо как доля (часть, процент) дискретного значения $1: 0 < \sigma < 1$.

Эта небулева дизъюнкция выражает характеристическую функцию *импликации*, которая в двухзначной булевой алгебре огрублена в «материальную импликацию» $(x \rightarrow y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$ и, вместе с тем, в «эквивалентность» $(x \leftrightarrow y) \equiv xy \vee x'y'$.

Возвращаясь к выражению нечеткой совокупности 2-й ступени – характеристической функции отношения *необходимого следования*, приведем другие выражения этой совокупности, полученные путем тождественного преобразования представленного выше ее выражения:

$$\forall xy \forall x'y' \forall x'y \equiv \forall x \forall x'y' \forall y' \equiv \forall x \wedge (x' \vee y) \forall y'$$

Каждое из этих выражений выявляет в отношении необходимого следования y из x ту или иную его характерную черту, позволяет, так сказать, посмотреть на него с разных сторон. Согласно первому выражению, y следует из x , если в универсуме имеются (существуют) вещи класса xy и класса $x'y'$, но не может быть вещей класса $x'y$. Второе выражение требует существования классов x и y' , исключая существование класса $x'y$. В третьем выражении требование существования класса $x'y$ преобразовано в удовлетворенность каждой из вещей условию материальной импликации $x \rightarrow y \equiv x' \vee y$.

То, что всеобщая удовлетворенность импликации равносильна несуществованию (т.е. исключенности) $x'y$, еще раз указывает на несущественность в ее СДНФ-выражении члена $x'y$. А то, что удовлетворенность импликации не означает необходимого следования (кроме нее требуется существование x и существование y'), снимает проблему «строгих» и «сильных» импликаций, опровергая вместе с тем общепринятое «положение», будто бы из противоречия следует все что угодно. Импликация действительно удовлетворяется в случае противоречивости антецедента, но ведь противоречивое не существует, а из несуществующего ничто не может следовать.

Однако возвратимся к 1-й ступени, с тем чтобы уточнить и четко сформулировать принципы, положенные в ее основание. Состав-

ляя первооснову булевой алгебры, 1-я ступень является тем самым и фундаментом всех последующих, определяемых посредством этой алгебры разделов информатики – теории множеств, арифметики и теории чисел, числовых функций, а главное – искусства достоверного рассуждения (доказательства), которое по Аристотелю «будучи способом исследования, прокладывает путь к началам всех учений» [4, 101b3].

Оптимальное упорядочение информатики в целом достижимо лишь при оптимальной упорядоченности ее основания – булевой алгебры, а порядок в алгебре задается выбором ее *базиса* – совокупности первичных операций, посредством которых выражаются все прочие функции. Впрочем, базисом обычно называют минимальную функционально полную систему операций. Однако при таком понимании возникает затруднение с той же булевой алгеброй, в которой базисными операциями служат $\neg$, $\wedge$, $\vee$, а из них выделяются два минимальных функционально полных набора: $\neg$, $\wedge$ и $\neg$, $\vee$. Что же называть ее базисом?

Условимся называть базисом алгебры функционально полную, не обязательно минимальную, совокупность *элементарных* операций, применяемых в «правильных» выражениях этой алгебры. Понимаемый таким образом базис может быть минимальным либо избыточным, как это имеет место в булевой алгебре с операциями дополнения, конъюнкции и дизъюнкции. Для упорядочения же существенно, чтобы базисные операции были элементарными, несоставными.

Элементарный избыточный базис булевой алгебры составляют операции *инверсии*, *конъюнкции* и *дизъюнкции*.

Операция инверсии булева выражения определена как инвертирование каждого вхождения каждого из имеющихся в этом выражении терминов. Например:

$$(x' \vee y)' \equiv x \vee y', (xy)' \equiv x'y, (x'y \vee x'y)' \equiv x'y \vee xy', 0' \equiv (xx')' \equiv x'x \equiv 0.$$

Операции конъюнкции и дизъюнкции выражений однозначно определены присущими им законами дистрибутивности и поглощения, однако в оптимально упорядоченной системе они реализуемы более просто и эффективно, например, как соответственно пересечение и объединение представляющих данные выражения совокупностей их СДНФ-членов. *Упорядочение* (синоним «структурирования») – это выявление в рассматриваемом естественного порядка взаимосвязей и неуклонное подчинение ему в процессе исследова-

ния и развития системы. Образцами упорядочения, к сожалению не получившими должного понимания и применения, являются «Упорядочение дел человеческих» и «Великая дидактика» Яна Амоса Коменского, а в наше время – «Структурированное программирование» Эдсгера Дейкстры. Основоположником упорядочения следует признать первооткрывателя диалектики Гераклита, который указал на существование всеобщего естественного миропорядка и назвал его *Логосом*. С учетом дальнейшей модификации смысла этого слова следует истолковывать его как адекватное отображение указанного миропорядка в сознании и в языке людей, в информатике.

По-видимому, фундаментальный принцип и метод упорядочения состоит в выявлении и последовательном использовании спиралеобразной иерархии компонент отображаемой взаимосвязи. Например, компонентами молекул полагаются атомы, в свою очередь сконструированные из компонент атомного уровня, которые затем декомпонуются на более элементарные составляющие, и т.д. Хотя можно ведь «слепить» молекулу и непосредственно из элементарных частиц. В «неструктурированном программировании» именно так и делали, пока Э.Дейкстра не выступил с призывом «Разделяй и властвуй», впрочем, належащего понимания не получившим.

В булевой алгебре структурирование состоит в том, что выражения, отображающие функции терминов-переменных, конструируются не непосредственно из терминов и базисных связок, а в виде иерархии, на нижнем уровне которой порождаются стандартные подвыражения, используемые в качестве компонент, связываемых друг с другом базисными связками на следующем уровне. Наглядный пример естественного структурирования выражений – совершенные нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) выражения булевой функции n переменных – это дизъюнкция n -терминных (индивидуальных) конъюнкций, представляющая собой четкую, альтернативную, совокупность (*класс*) индивидов в n -терминном универсуме. Кстати, операция отрицания-дополнения булева выражения равносильна инверсии этой совокупности индивидов. Действительно, из составляющих n -терминный универсум 2^n индивидуальных конъюнкций (из полной совокупности их) подсовокупность членов СДНФ-выражения соответствует именуемому данным выражением классу, а инверсия этой совокупности, т.е. до-

полняющая до 2^n подсовокупность, в той же дизъюнктивной форме представляет собой выражение дополнительного класса, является отрицанием-дополнением исходного СДНФ-выражения. Короче говоря, операция отрицания-дополнения СДНФ-выражения сводится к инвертированию совокупности его членов.

Аналогично обнаруживается, что конъюнкция СДНФ-выражений сводится к *пересечению*, а дизъюнкция – к *объединению* совокупностей членов каждого из этих выражений. Например:

$$(xy \vee xy' \vee x'y') \wedge (xy \vee x'y \vee x'y') \equiv xy \vee x'y'$$

$$(xy \vee x'y) \vee (xy' \vee x'y) \equiv xy \vee xy' \vee x'y$$

В совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ) выражение представлено конъюнкцией предполных дизъюнкций, т.е. дополнений индивидуальных конъюнкций. Например, выражение характеристической функции $x \leftrightarrow y$ отношения эквивалентности, состоящее в СДНФ из двух индивидов: $xy \vee x'y'$, в СКНФ оказывается конъюнкцией дизъюнкций: $(x \vee y')(x' \vee y)$, причем дизъюнкции эти суть дополнения индивидов $x'u$ и xy' из СДНФ-выражения функции антиэквивалентности: $xy' \vee x'y$. Операция отрицания-дополнения СКНФ-выражения, как и СДНФ, сводится к инвертированию совокупности его членов. Однако конъюнкции СКНФ-выражений соответствует не пересечение, а *объединение*, и дизъюнкции – не объединение, а *пересечение* совокупности их членов. Примеры:

$$(x' \vee y)(x \vee y') \wedge (x' \vee y) \equiv (x' \vee y)(x \vee y')$$

$$(x' \vee y)(x \vee y') \vee (x' \vee y) \equiv x' \vee y$$

$$\neg(x \vee y) \equiv (x \vee y')(x' \vee y)(x' \vee y')$$

В n -терминном универсуме n -арные элементарные конъюнкции определяют четкие совокупности (*множества*) терминов, тогда как связывание дизъюнкцией порождает нечеткие совокупности (*классы*). И те и другие можно *потерминно* инвертировать, пересекать, объединять, формируя из выражений-операндов выражения-результаты, определяющие искомые совокупности. Примеры:

$$\text{инверсия: } (x' \vee y)' \equiv x \vee y'$$

$$\text{пересечение: } x' \bigcap y \equiv (x'y \vee x'y') \bigcap (xy \vee x'y) \equiv x'y \vee x'y' \equiv x'$$

$$\text{объединение: } x' \bigcup y \equiv (x'y \vee x'y') \bigcup (xy \vee x'y) \equiv xy \vee x'y' \equiv y$$

Несложно выявить алгебраические законы, которым подчинены понимаемые таким образом операции пересечения, объединения и инверсии булевых выражений, т.е. сформулировать положения (аксиомы), формально определяющие эти операции.

Пересечение и объединение, подобно конъюнкции и дизъюнкции, идемпотентны и коммутативны:

$$\begin{array}{ll} x \cap x \equiv x & x \cup x \equiv x \\ x \cap y \equiv y \cap x & x \cup y \equiv y \cup x \end{array}$$

Они взаимно дистрибутивны одно относительно другого, а также относительно конъюнкции и дизъюнкции:

$$\begin{array}{ll} (x \cap y) \cup z \equiv (x \cup z) \cap (y \cup z) & (x \cup y) \cap z \equiv (x \cap z) \cup (y \cap z) \\ (x \cap y) \vee z \equiv (x \vee z) \cap (y \vee z) & (x \cup y) \vee z \equiv (x \vee z) \cup (y \vee z) \\ (x \cap y) \wedge z \equiv xz \cap yz & (x \cup y) \wedge z \equiv xz \cup yz \\ (x \wedge y) \cap z \equiv (x \cap z) \wedge (y \cap z) & \text{и т.д.} \end{array}$$

Инверсия булева выражения формально означает инвертирование каждого вхождения каждого из входящих в это выражение терминов с сохранением неизменными всех иных связок. При этом инверсия первичного (элементарного) термина x удовлетворяет аксиомам:

$$(x')' \equiv x, x \cap x' \equiv 0, x \cup x' \equiv 1, x \wedge x' \equiv 0, x \vee x' \equiv 1$$

Содержательно инверсия термина означает изменение на противоположный его статуса как члена совокупности. Инвертируются, в сущности, не термины, а их статусы в рассматриваемой совокупности: принадлежность ей термина x заменяется антипринадлежностью (исключенностью принадлежности) – x' , антипринадлежность же x' заменяется принадлежностью x . Так что инвертируются не термины, а совокупности. Инверсией же отдельного термина называют, допуская «вольность речи», инверсию однотерминной совокупности, однотерминного булева выражения.

Точно так же, пересечение и объединение – это пересечение и объединение совокупностей. Пересечение формирует совокупность, содержащую только те термины, которые принадлежат всем пересекающимся совокупностям, т.е. позволяет извлечь из данного набора характеристик общую для них сущность. Объединение, наоборот, признает антипринадлежащими результирующей совокупности лишь те термины, которые антипринадлежат каждой из объединяемых совокупностей, так что формируется наименее строгая характеристика определяемого объекта.

Собственно отдельные термины суть символы элементарных (не конкретизируемых в принятом универсуме) определенностей, конъюнкцией и дизъюнкцией которых, а также их инверсий, образуются простейшие составные выражения булевой алгебры – *элементарные конъюнкции* и *дизъюнкции*. Они представляют собой первичные не-

элементарные определенности, к которым также применимы операции конъюнкции и дизъюнкции. Вместе с тем, они интерпретируются и как совокупности элементарных определенностей, преобразуемые посредством их инверсии, пересечения и объединения.

Конъюнкция булевых выражений (КНФ) представляет собой совокупность *необходимых* условий того, что охарактеризовано этой конъюнкцией в целом. Поэтому представленный КНФ-выражением объект имеет место (необходимо дан) лишь в случае, когда даны все члены КНФ. Обратно, из данности КНФ-выражения необходимо следует данность каждого его члена.

Дизъюнкция булевых выражений (ДНФ) определяет характеризуемый ею объект дизъюнктивным (альтернативным) перечнем *достаточных*, но не необходимых, условий – подвыражений более строгих, чем ДНФ-выражение в целом. Это различные конкретизации объектов обозначенного ДНФ-выражением класса. Из данности класса следует *возможность* каждого из относящихся к этому классу объектов (подклассов), становящаяся *необходимостью* при наложении надлежащих дополнительных условий.

Начало иерархически упорядоченной булевой алгебры, или основание ее первой ступени, составляют инверсия и конъюнкция *первичных* (несоставных, недекомпозируемых) терминов. Комбинация (“суперпозиция”) этих операций порождает простейший тип составного булева выражения – *элементарную конъюнкцию*. Алгебра элементарных конъюнкций замкнута и функционально полна в том смысле, что инверсии и конъюнкции выражений этого типа суть тоже элементарные конъюнкции, а всякая представимая в виде элементарной конъюнкции функция терминов реализуема посредством операций инверсии и конъюнкции. Порождая элементарные конъюнкции, эти операции применимы затем и к ним самим, наряду с потерминными операциями пересечения и объединения их как совокупностей терминов.

В n -терминном универсуме всего 3^n различных элементарных конъюнкций, из которых 2^n индивидные (без умалчивания терминов), соответствующие четким совокупностям, т.е. множествам присущих характеризуемым ими индивидам первичных определенностей. Неиндивидные (“нечеткие”) элементарные конъюнкции именуют неиндивидные классы рассматриваемых «предметов», представляя собой нечеткие совокупности присущих им определенностей. Следует заметить, что понятие индивида (“предмета”,

«вещи») относительно: n -терминная элементарная конъюнкция представляет собой индивид только в n -терминном универсуме, т.е. при вхождении в нее всех принятых в этом универсуме терминов, а с введением в универсум новых терминов прежняя индивидность n -терминной конъюнкции утрачивается. Таким образом, индивидные конъюнкции отображают сущности «вещей» с предопределенным в универсуме огрублением.

Вторая ступень алгебраической иерархии строится посредством тех же операций инверсии и конъюнкции, но применяемых теперь не к первичным терминам, а к индивидам. Они представлены n -терминными элементарными конъюнкциями и в отличие от терминов, предполагающихся ортогональными, т.е. совмещаемыми друг с другом в любых сочетаниях, попарно несовместимы. Поэтому совокупность индивидов немыслима как нераздельное единство, не может быть «единичной вещью». Она может быть лишь набором, группой взятых вместе, *сосуществующих*, единичных вещей. Так сказать, конъюнкцией их существований.

Существование в универсуме U «вещи», охарактеризованной булевой функцией первичных терминов (атрибутом) f , есть *принадлежность* $f \in U$ – отношение, равносильное присущности U существования f :

$$U = U \wedge \forall f$$

Интегральная дизъюнкция («дизъюнкт») $\forall f$ есть дизъюнкция значений, принимаемых атрибутом f на элементах совокупности U , распространенная на всю эту совокупность, т.е. на весь универсум. *Сосуществование* (сопринадлежность совокупности U) «вещей» f и g выражается соответственно конъюнкцией их существований:

$$U = U \forall f \forall g$$

Отношения существования и сосуществования выразимы при помощи квантора существования $\exists$ логики предикатов: $\forall f = \exists p f(p)$, $\forall f \forall g = \exists p f(p)g(p)$, где p – «предметная переменная». Однако ввиду отмеченной выше относительности понятия «предмета» (индивида) и обусловленной им неоправданной усложненности алгебры, вместо кванторов с предметной переменной целесообразней использовать аналоги интегральной суммы и произведения – интегральные дизъюнкцию и конъюнкцию (дизъюнкт и конъюнкт). При этом алгебра совокупностей 2-й ступени (совокупностей индивидов) с базисными операциями инверсии и конъюнкции полностью воспро-

изводит булеву алгебру 1-й ступени, но теперь применительно не к первичным терминам, а к дизъюнктам и конъюнктам.

Конкретная совокупность индивидов в n -терминном универсуме отображается конъюнкцией неинвертированных и инвертированных дизъюнктов от n -арных элементарных конъюнкций. Например, в x, y -универсуме совокупность индивидов xy и $x'y'$, представляющая собой отношение актуальной эквивалентности $x \Leftrightarrow y$, выражается в виде $V_{xy}V'_{x'y'}V'_{x'y}V_{x'y'}$, а нечеткая совокупность индивидов, соответствующая отношению актуального (необходимого) следования $x \Rightarrow y$, получается элиминацией в этом выражении дизъюнкта $V'_{x'y}$: $V_{xy}V'_{x'y'}V_{x'y'}$.

В алгебре 1-й ступени эти совокупности отображены выражениями общих атрибутов принадлежащих им индивидов, т.е. дизъюнкциями n -арных конъюнкций (СДНФ-выражениями), представляющими собой отношения потенциальной эквивалентности $x \leftrightarrow y$ в виде $xy \vee x'y'$ и потенциального следования $x \rightarrow y$ в виде $xy \vee \sigma x'y' \vee x'y'$. Буква σ означает привходящий статус индивида $x'y'$ – не принадлежит с необходимостью и не антипринадлежит. В обычной булевой алгебре подобная возможность отображения привходящего не предусмотрена, поэтому отношение следования представлено в ней «материальной импликацией»: $xy \vee x'y \vee x'y'$ – общим атрибутом совокупности $V_{xy}V'_{x'y'}V_{x'y}V_{x'y'}$, соответствующей частному случаю отношения следования. Другим частным случаем следования является эквивалентность $V_{xy}V'_{x'y'}V'_{x'y}V_{x'y'}$.

Налицо взаимно однозначное соответствие СДНФ-выражения общего для всех элементов совокупности индивидов атрибута дизъюнктному выражению самой этой совокупности: оба выражения содержат одну и ту же информацию, знание одного из них позволяет воссоздать другое. При этом инверсия совокупности индивидов равнозначна булеву отрицанию-дополнению общего атрибута ее членов. Выходит, что в булевой алгебре в качестве базисной операции отрицания избрана инверсия 2-й ступени, тогда как поистине базисная инверсия 1-й ступени (инверсия всех вхождений первичных терминов) просто проигнорирована. Правда, в случае однотерминного выражения эти инверсии неразличимы. Однако, только в нем единственном.

Установленное соответствие СДНФ-выражения общего атрибута индивидов совокупности ее дизъюнктному выражению означает также равнозначность конъюнкции (дизъюнкции) СДНФ-выражений

и пересечения (объединения) их дизъюнктивных аналогов. Другими словами, конъюнкция (дизъюнкция) булевых выражений осуществима путем пересечения (объединения) совокупностей членов СДНФ этих выражений, что технически существенно проще традиционной процедуры, использующей законы дистрибутивности.

Истолкование булевой алгебры терминов как теоретико-множественной алгебры индивидов, т.е. реализация булева отрицания инвертированием совокупности членов СДНФ-выражения, а конъюнкции и дизъюнкции путем соответственно пересечения и объединения «СДНФ-совокупностей», радикально упрощает, в частности, процедуру решения булевых уравнений, которая играет в алгебре логики наиважнейшую роль. По мнению самого Буля, предмет логики заключается именно в решении логических уравнений [5], а если иметь в виду математическую логику, то это безоговорочно так, ибо математическая она потому, что сводит умозаключение (вывод, доказательство) к решению уравнения. Впрочем, современная «математическая логика», предпочтя импликацию, уравнениями и вовсе не занимается.

Логическим, или булевым, уравнением называют равенство

$$f = g$$

в котором f, g – булевы функции терминов $x_1, x_2, \dots, x_n$, а знак $=$ символизирует заданность отношения эквивалентности (равносильности), выполняющегося на тех наборах (n -ках) значений терминов $x_1, x_2, \dots, x_n$, на которых значения, принимаемые функциями f и g , совпадают. Совокупность таких n -ок алгебраисты называют отношением равенства функций f и g . Запись $f = g$ означает связанность f и g отношением эквивалентности: $(f \leftrightarrow g) = 1$, подобно тому как $x = 1$ означает данность (наличие) термина x .

Решением булева уравнения относительно термина x_i называют рекурсивную функцию $x_i = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, удовлетворяющую заданному уравнению. Но ведь не лишено смысла и решение относительно одного из индивидов, т.е. совокупности терминов, а также относительно дизъюнкции тех или иных индивидов, т.е. некоторой булевой функции терминов, частным случаем которой является и термин x_i .

Положим, что функции f и g (левая и правая части уравнения) представлены СДНФ-выражениями, т.е. дизъюнкциями индивидов. Ясно, что индивид удовлетворяет уравнению, если он входит в обе его части либо не входит ни в левую, ни в правую часть. Назо-

вем такой индивид *парным* [6, с.47]. Индивиды же, входящие в одну из частей, но не входящие в другую (*непарные* индивиды), уравнению не удовлетворяют. Разделение индивидов на парные и непарные радикально упрощает получение решений, а также тождественные преобразования уравнений. Действительно, выражаемое уравнением отношение сохраняется неизменным при переносе непарных индивидов из одной части уравнения в другую, а также при добавлении в обе части либо исключении из обеих частей парных индивидов.

Приведение к так называемой «нулевой» форме, в которой правая часть уравнения представляет собой пустую дизъюнкцию (обозначается цифрой «0»), достигается исключением всех парных индивидов и переносом всех непарных в левую часть. «Единичная» форма с обозначаемой цифрой «1» полной дизъюнкцией в правой части получается добавлением в обе части уравнения не представленных в них парных индивидов и переносом из левой части в правую всех непарных, в результате чего в правой части образуется полная дизъюнкция. Примеры:

$$1) xyz \vee xyz' = xyz' \vee x'y'z' \text{ тождественно } xyz \vee x'y'z' = 0$$

$$2) xy' \vee x'y' = x'y' \text{ тождественно } xy \vee x'y \vee x'y' = xy \vee xy' \vee x'y \vee x'y', \\ \text{тождественно } xy \vee x'y \vee x'y' = 1, \text{ тождественно } xy' = 0.$$

Решение уравнения относительно одного из индивидов, либо термина, либо произвольного атрибута получается путем тождественного преобразования, формирующего в левой части СДНФ-выражение искомого объекта.

Например, решение уравнения из примера 2) относительно термина x получается преобразованием к виду:

$$xy \vee xy' = xy, \text{ где } xy \vee xy' = x(y \vee y') = x,$$

т.е. решение в канонической форме будет:

$$x = xy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ при } y = 0 \end{array} \right.$$

$$x = \left\{ \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{привходяще при } y = 1 \end{array} \right.$$

Решение этого же уравнения относительно термина y :

$$xy \vee x'y = xy \vee xy' \vee x'y$$

$$y = xy \vee xy' \vee x'y$$

$$y = x \vee y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{привходяще при } x = 0 \end{array} \right.$$

$$y = \left\{ \right.$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

Решение относительно индивида xu :

$$xu = xu \vee xu'$$

$$xu = x$$

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

$$xu = \begin{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

Решение относительно $x \vee y$:

$$xu \vee xu' \vee x'y = xu \vee xu'$$

$$x \vee y = x$$

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

$$x \vee y = \begin{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

Решение уравнения из примера 1) относительно термина x :

$$xyz \vee x'y'z' = 0$$

$$xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee xy'z' = xyz' \vee xy'z \vee xy'z' \vee x'y'z'$$

$$x = x(yz' \vee y'z) \vee y'z'$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } y = z = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \end{cases} \text{привходяще при } y \neq z$$

$$\begin{cases} 0 & \text{при } y = z = 1 \end{cases}$$

Как видно, решение уравнения относительно заданного атрибута заключается в преобразовании уравнения к виду, при котором СДНФ-выражение атрибута составляет левую часть в СДНФ-выражении уравнения, обе части которого затем минимизируются. Сущность минимизации СДНФ-выражений в том, что булевы функции терминов, представленные дизъюнкциями индивидуальных конъюнкций, переводятся обратно в неиндивидуальное (“несовершенное”) представление [3]. Дизъюнкции индивидов порождают термины и неиндивидуальные классы терминов, подобно тому как конъюнкцией терминов образуются индивиды.

Впрочем, так называемая *двойственность* дизъюнкции и конъюнкции этим не исчерпывается: индивидуальным конъюнкциям однозначно соответствуют их «дуалы» – предполные дизъюнкции, конъюнкция которых порождает совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) булевых выражений. Возникает точно такая же иерархия ступеней, как рассмотренная выше ассоциирующая с СДНФ, однако полностью двойственная, т.е. вместо индивидуальных конъюнкций теперь предполные n -арные дизъюнкции терминов, дизъюнкция индивидов, составляющая СДНФ, стала конъюнкцией терминов.

юнкцией двойственных индивидам предполных дизъюнкций, дизъюнкты индивидов – конъюнктами предполных дизъюнкций.

Формально выражение, двойственное данному, получается взаимозаменой в нем всех конъюнкций дизъюнкциями и всех дизъюнкций конъюнкциями. Содержательно оно есть дополнение инверсии данного, что равносильно инверсии его дополнения:

$$\delta e = \neg e' = (\neg e)'$$

Поэтому для преобразования выражения e в двойственную форму надо выполнить над ним (в любом порядке) операции инверсии, дополнения и дуалирования, т.е. взаимозамены конъюнкций с дизъюнкциями. Например, перевод в КНФ выражения $xu \vee x'u \vee x'u'$:

$$\neg(xu \vee x'u \vee x'u') = xu', (xu')' = x'u, \delta(x'u) = x \vee u';$$

перевод в КНФ выражения $xu \vee \sigma x'u \vee x'u'$:

$$\neg(xu \vee \sigma x'u \vee x'u') = xu' \vee \sigma x'u, (xu' \vee \sigma x'u)' = x'u \vee \sigma xu',$$

$$\delta(x'u \vee \sigma xu') = (x' \vee y)(x \vee y' \vee \sigma);$$

перевод в ДНФ выражения $(x \vee y)(x' \vee y)(x' \vee y')$:

$$\neg(x \vee y)(x' \vee y)(x' \vee y') = (x \vee y'), \delta(x \vee y') = xu', (xu')' = x'u.$$

Проще получается дополнение выражения e , представленное в двойственной форме:

$$\neg e = \delta(e') = (\delta e)'.$$

Это дуал инверсии данного выражения либо инверсия дуала его – процедура, унифицирующая правила де Моргана отрицания конъюнкции

$$\neg(xu) = \neg x \vee \neg u \text{ и отрицания дизъюнкции } \neg(x \vee y) = \neg x \neg y.$$

Существенно, что КНФ есть совокупность *необходимых*, а ДНФ – *достаточных* условий того, что представлено выражением в целом. Двойственность формы сопряжена с фундаментальной парой содержательных критериев – необходимости и достаточности.

Произвольное выражение булевой алгебры, как в ДНФ, так и в КНФ, представимо при помощи трех функторов-связок: инверсии, конъюнкции и дизъюнкции, составляющих базис этой алгебры. Прочие функторы, такие как дополнение, дуалирование, пересечение, объединение, подчинение, обозначают операции над выражениями, в нормальных формах не используемые (“небазисные”). Дизъюнкты и конъюнкты, а также символ привходящего σ , к «классической» булевой алгебре не относятся и составляют необходимое расширение, вернее, развитие ее, связанное с построением 2-й ступени и с допущением нечетких атрибутов совокупности индивидов.

Дизъюнктивная форма начинается с элементарной конъюнкции, выражающей в ее n -арном варианте *единичное* (индивид) в n -терминном универсуме. Все прочие, нечеткие (неиндивидные) выражения в ДНФ суть дизъюнкции элементарных конъюнкций. В частности, дизъюнкция 2^n-1 индивидов есть «предполная дизъюнкция», составляющая дополнение недостающего в ней 2^n -го индивида, в совокупности с которым она становится «полной», т.е. универсумом.

Конъюнктивная форма устроена аналогично, но начинается с противоположного – с элементарной дизъюнкции, которая в n -арном варианте является предполной дизъюнкцией, т.е. дополнением противоположного ей индивида до универсума. Совершенной нормальной формой предполной дизъюнкции называется дизъюнкция 2^n-1 индивидов, а минимальной формой – n -арная элементарная дизъюнкция.

Литература

1. Брусенцов Н.П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998.

2. Брусенцов Н.П., Деркач А.Ю. Трехзначная логика, нечеткие множества и теория вероятности // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. Под редакцией чл.-корр. РАН Л.Н. Королева. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. – (С. 88-91).

3. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Трехзначный минимизатор булевых выражений // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. Под редакцией чл.-корр. РАН Л.Н. Королева. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. – (С. 205-207).

4. Аристотель. Топика. // Сочинения в четырех томах. Том 2. – М.: «Мысль», 1978.

5. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Решение булевых уравнений // Методы математического моделирования. – М.: «Диалог МГУ», 1998. – (С. 59-68).

6. Брусенцов Н.П. Начала информатики. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1994.

Доложено на Ломоносовских чтениях 2002 г. на факультете ВМиК МГУ. Опубликовано в «Программные системы и инструменты». Тематический сборник № 3. Под ред. Л.Н.Королева. – М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2002. – (С. 11-27). А также «Реставрация логики». – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2005. – (С. 50-68).

ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ НА МАГНИТНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ С ПИТАНИЕМ ИМПУЛЬСАМИ ТОКА*

В 1956–1957 гг. в Вычислительном центре Московского государственного университета были разработаны элементы для построения цифровых схем¹, являющихся вариантом магнитных усилителей с питанием импульсами тока [1]. В последующие годы опыт применения этих элементов в ряде устройств показал, что они могут надежно работать в цифровых схемах с тактовой частотой 200 кгц при нормальных климатических условиях.

Основными достоинствами элементов являются: простота устройства и недефицитность используемых деталей (ферритовые сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса и германиевые диоды), большой срок службы, незначительное потребление энергии и, как будет здесь показано, возможность с их помощью экономно строить различные логические узлы. В 1961 г. элементы освоены в серийном производстве.

Элементарные логические операции

Основным способом осуществления логических операций при помощи магнитных усилителей с питанием импульсами тока является алгебраическое сложение ампер-витков, создаваемых управляющими (входными) обмотками. На рис. 1 показано выполнение этим способом операции запрета АВ.

При описании работы схемы удобно рассматривать магнитный усилитель как управляемый трансформатор тока, у которого в цепь нагрузки последовательно включен диод, запертый напряжением Е.

* Текст печатается по изданию: Н. П. Брусенцов. Построение логических схем на магнитных усилителях с питанием импульсами тока // Магнитные элементы систем автоматики, телемеханики, измерительной и вычислительной техники. – Киев: Изд-во АН У СССР, 1964. – (с.361-367).

¹ В работе, связанной с созданием элементов, на различных этапах участвовали сотрудники Вычислительного центра МГУ В. М. Березин, В. Я. Бедрединов, Л. М. Бедрединова, В. В. Веригин, В. В. Веригина, Н. Д. Дмитриади, Е. В. Журавлева, Н. С. Карцева, С. П. Маслов, В. П. Розин, А. М. Тишулина, Б. Я. Фельдман.

Диод предотвращает возникновение тока в цепи нагрузки трансформатора при намагничивании сердечника управляющими импульсами. Напряжение E предотвращает возникновение токов в цепях связи трансформаторов под действием э. д. с. управляющих обмоток.

Введением этого напряжения достигается коренное улучшение характеристик усилителя: 1) необходимая для уверенного срабатывания энергия управляющего импульса не зависит от количества связанных со входами усилителя цепей и определяется практически только потерями на перемагничивание сердечника; 2) выход усилителя является совершенным генератором тока, причем амплитуда выходных импульсов i_{CB} в первом приближении пропорциональна амплитуде импульсов тока питания. В реальных схемах напряжение E получается пропусканием токов питания i_I и i_{II} через общее для всех цепей связи нелинейное сопротивление, обладающее характеристикой стабилитрона [2].

Стабильность амплитуды импульсов тока на выходе усилителя позволяет просто стандартизовать управляющие ампер-витки: все входные обмотки должны иметь одинаковое число витков и соединяться друг с другом во избежание разветвлений тока только последовательно. При этом ампер-витки, создаваемые возбужденными входными обмотками, будут различаться только знаком, который определяется направлением включения обмотки.

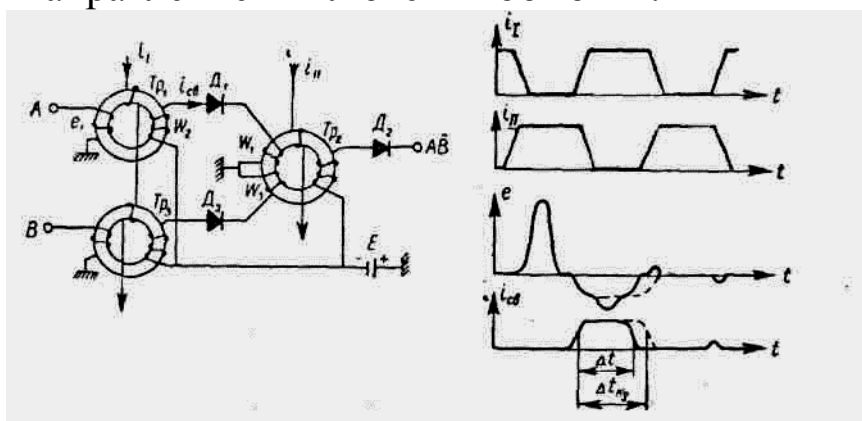


Рис.1

Положительно включенная обмотка (положительный вход усилителя) создает ампер-витки, противоположные по знаку ампер-виткам обмотки питания. Возбуждение положительной обмотки импульсом тока в течение управляющего полупериода вызывает появление импульса на выходе усилителя в следующем рабочем полупериоде. Отрицательно включенная или «запрещающая» обмотка при возбужде-

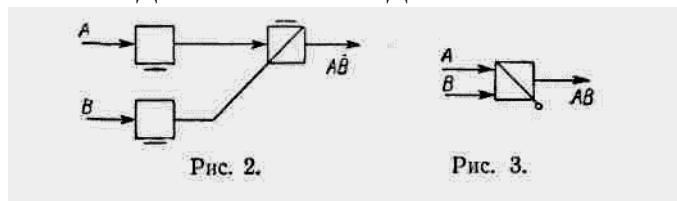
нии ее импульсов тока полностью компенсирует эффект положительной обмотки и, таким образом, запрещает передачу сигнала усилителем.

На рис. 1 усилитель с трансформатором Tr_2 , выполняющий операцию $A\bar{B}$, имеет положительную обмотку ω_1 и отрицательную обмотку ω_3 . Импульс тока на выходе усилителя появляется только в том случае, если была возбуждена обмотка ω_1 и не была возбуждена обмотка ω_3 .

При изображении магнитных усилителей на логических схемах применяются следующие условные обозначения: усилитель представляется квадратиком, положительные входы – стрелками, направленными к квадратику, обмотки запрета – линиями, перечеркивающими квадратик, выход усилителя – стрелкой, направленной от квадрата. Принадлежность усилителя к первому или второму каналу питания обозначается черточкой, помещенной соответственно под квадратиком или над ним. Схема, данная на рис. 1, может быть изображена условно, как показано на рис. 2.

Наряду с операцией запрета $A\bar{B}$, при построении логических схем на магнитных усилителях используются операции «И», «ИЛИ» и непрерывные серии импульсов.

Операция «И» осуществляется при помощи усилителя с постоянно возбужденной обмоткой запрета. Эта обмотка условно обозначается перечеркивающей квадратик линией с кружком на конце (рис. 3). Импульс тока на выходе такого усилителя получается только в том случае, когда на его входы поступят одновременно два совпадающих по времени сигнала. Операция «ИЛИ» может быть реализована двумя способами: 1) присоединением нескольких выходов к одному входу благодаря наличию диода в выходной цепи каждого усилителя (рис. 4,а); 2) использованием отдельных входных обмоток (рис. 4,б), если соединение выходов нежелательно.



Квадратиком с двойным контуром на рис. 4, б обозначен усилитель, рассчитанный на одновременное возбуждение двух положительных входных обмоток. Параллельное присоединение к выходу этого усилителя двух входов является просто условным изображе-

нием на логической схеме, которому в действительности соответствует последовательное соединение двух входных обмоток.

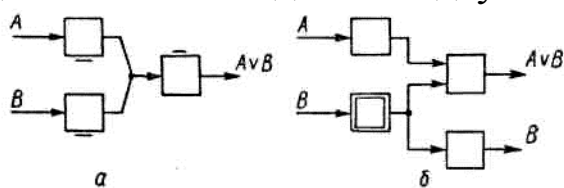


Рис. 4.

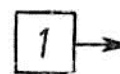


Рис. 5.

Непрерывная серия импульсов получается при помощи усилителя с постоянно возбужденной положительной обмоткой (генератор единиц). Условное обозначение такого усилителя дано на рис. 5.

Ограничения при построении схем

Составление схем из описанных элементов было бы совсем несложно, если бы входы и выходы этих элементов можно было соединять друг с другом в любых комбинациях, заботясь лишь о правильном осуществлении заданных логических функций.

Использование реальных элементов связано с рядом ограничений, существенно усложняющих построение схем.

Первым ограничением является нагрузочная способность усилителя. Амплитуда импульса тока на выходе усилителя практически не изменяется при варьировании нагрузки в широких пределах, но длительность этого импульса зависит от нагрузки очень сильно. Например, если стандартный усилитель, рассчитанный на возбуждение одного входа, нагрузить двумя входами, то длительность его входного импульса уменьшится на 30%. Эту нестабильность можно ослабить, увеличив потребляемую мощность, однако это приведет к удорожанию элементов, поэтому признано целесообразным допустить значительную нестабильность, учитывая ее при составлении схем. Для построения схем необходимыми оказались усилители с двумя значениями нагрузочной способности: 1) простой усилитель, — обеспечивающий номинальную длительность импульса при нагрузке одним положительным входом; 2) более мощный усилитель, — обеспечивающий номинальную длительность при нагрузке двумя положительными входами.

Номинальная длительность выходного импульса выбрана такой, чтобы она могла обеспечить уверенное срабатывание усилителя при подаче этого импульса на его положительный вход. Длительность выходного импульса простого усилителя в режиме короткого замы-

кания (при работе на запрещающую обмотку) выбрана равной длительности импульсов тока питания с минусовым допуском.

Такую же длительность имеет импульс более мощного усилителя при нагрузке на один вход, а режим короткого замыкания для более мощного усилителя недопустим.

Второе ограничение обусловлено тем, что во избежание размагничивающего действия невозбужденных обмоток запрета при перемагничивании сердечника ампер-витками положительной входной обмотки суммарная э. д. с. последовательно соединенных обмоток запрета не должна существенно превышать напряжения E , запирающего диод в цепи связи. Величина напряжения E принята приблизительно равной амплитуде э. д. с, возникающей на одной обмотке, поэтому недопустимо соединение обмоток запрета, расположенных на сердечниках, которые могут перемагничиваться одновременно.

Кроме того, имеются менее строгие ограничения, являющиеся следствием несовершенства гистерезисной характеристики реальных сердечников.

Перечисленные ограничения могут быть сформулированы в виде правил, которые необходимо соблюдать при составлении схем:

1. Выход простого элемента не должен возбуждать одновременно более одного положительного входа.
2. Выход более мощного элемента не должен возбуждать одновременно менее одного и более двух положительных входов.
3. Выход, возбуждающий положительный вход элемента, обладающего обмоткой запрета, должен быть нагружен не менее чем выход, работающий на эту обмотку запрета.
4. Если обмотки запрета нескольких элементов соединены в общую цепь, то недопустимо одновременное срабатывание более чем одного из этих элементов.
5. Количество параллельно соединенных выходов не должно превышать пяти.
6. Количество последовательно соединенных входных обмоток не должно превышать десяти.

Основные приемы построения схем

Сформулированные выше ограничения могут показаться слишком тяжелыми для того, чтобы данные элементы можно было практически использовать для построения схем. Однако, если в качестве основного приема построения логики применить переключение одного выходного сигнала между входами нескольких усилителей, соблюсти эти ограничения при составлении реальных схем не так уж трудно.

Простейшей иллюстрацией этого приема является схема, где сигнал A при отсутствии сигнала B проходит через верхний усилитель, а под действием сигнала B переключается в нижний канал (рис. 6,а). Как видно, в схеме этого переключателя соблюдены все перечисленные выше правила. Аналогичный переключатель на n выходов (рис. 6,б) получается простым добавлением усилителей, выполняющих операцию «И». Два других полезных приема – применение взаимного запрета сигналов и использование генератора единиц для получения инвертированного сигнала – показаны на примере схемы двухзарядного двоичного дешифратора (рис. 7).

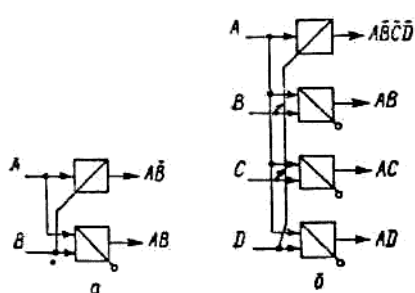


Рис. 6.

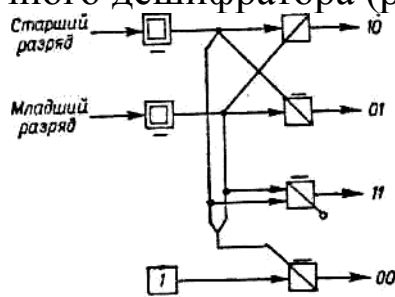


Рис. 7.

Построение троичных схем

При осуществлении цифровых схем, работающих в троичном коде, элементарная троичная ячейка образуется соединением двух магнитных усилителей таким образом, что импульс, поданный на положительный вход первого усилителя, запрещает второй усилитель, а импульс, поданный на положительный вход второго усилителя, запрещает первый усилитель (рис. 8). Применительно к использованию троичной системы счисления с цифрами 1; 0; -1 можно условиться, что наличие импульса на первом (верхнем) входе элемента обозначает цифру 1, наличие импульса на втором входе

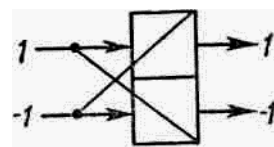


Рис. 8.

обозначает цифру -1 , отсутствие импульсов на обоих входах соответствует цифре 0 . Очевидно, что при одновременном поступлении импульсов на оба входа также получается нулевой эффект, что вполне логично: $1+(-1) = 0$. Следует отметить, что наличие этой взаимной компенсации сигналов в троичном элементе существенно повышает устойчивость его работы – в случае, когда сигналы ни на один из входов не подаются, происходит взаимная компенсация поступающих на оба входа элемента паразитных сигналов.

В качестве примера троичной схемы (рис. 9) показан двухразрядный троичный дешифратор. Импульсы, представляющие двухразрядный троичный код, подаются одновременно на входы дешифратора «младший разряд» и «старший разряд». В зависимости от поступившей на входы комбинации получается импульс на одном из девяти выходов дешифратора. При отсутствии импульсов на входах происходит непрерывная выдача импульсов на выход «00».

Интересно отметить, что исключением из схемы троичного дешифратора усилителей и соединений, связанных с «отрицательными единицами», получается двоичный дешифратор, приведенный на рис. 7.

Другими примерами троичных схем являются представленный на рис. 10 полусумматор и построенные на основе его сумматор и счетчик [3, 4]. Работа троичного полусумматора описывается выражениями, определяющими цифру разряда суммы S и переноса Q в зависимости цифр соответствующего разряда слагаемых A и B :

$$S = A\bar{b}_p\bar{b}_n + B\bar{a}_p\bar{a}_n + a_n b_n - a_p b_p$$

$$Q = a_p b_p - a_n b_n$$

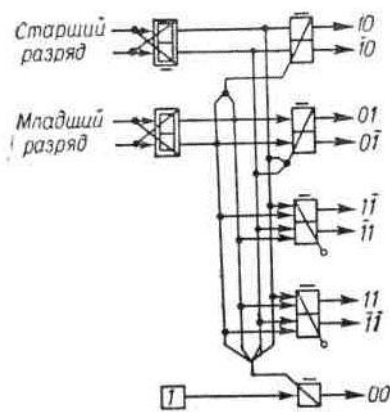


Рис. 9.

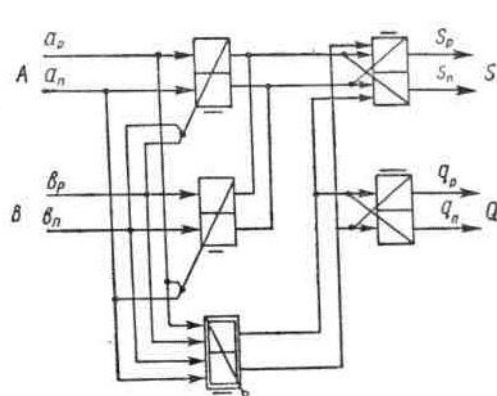


Рис. 10.

Где

$$A = a_p - a_n$$

$$B = b_p - b_n$$

a_p, a_n, b_p, b_n — двоичные переменные

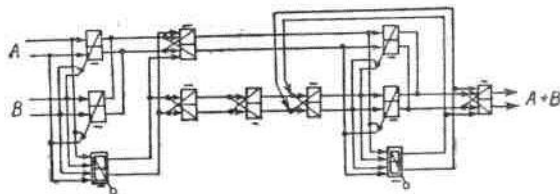


Рис. 11.

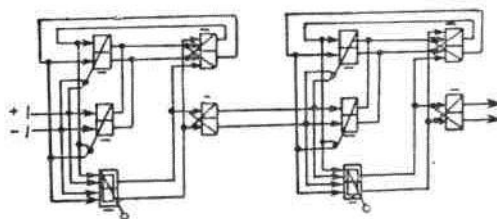


Рис. 12.

Знаки «+» и «-» — употреблены в их обычном арифметическом значении.

Представление троичной переменной в виде разности двух двоичных переменных соответствует реализации троичного элемента в виде двух взаимно скомпенсированных двоичных элементов.

Троичный сумматор (рис. 11) производит сложение чисел с учетом их знаков, т. е. является алгебраическим.

Троичный счетчик (рис. 12) является реверсивным в том смысле, что из числа импульсов, поступивших на положительный вход, вычитается число импульсов, поступивших на отрицательный вход счетчика.

Как и в дешифраторе, исключением из схемы троичного сумматора и счетчика элементов, связанных с «отрицательной единицей», можно получить схемы двоичного сумматора и двоичного счетчика.

Литература

1. Н. П. Брусенцов, Цифровые элементы типа магнитных усилителей с питанием импульсами тока. Всесоюзное совещание по магнитным элементам автоматики, телемеханики и вычислительной техники, М., 1957 (аннотация).
2. Н. П. Брусенцов, Логический элемент. Авторское свидетельство № 145070, «Бюллетень изобретений», 1962, № 4.
3. Н. П. Брусенцов, Сумматор последовательного действия. Авторское свидетельство № 133679, «Бюллетень изобретений», 1960, № 22.
4. Н.П. Брусенцов, С.П. Маслов, Троичный счетчик. Авторское свидетельство, № 145065, «Бюллетень изобретений», 1962, № 4.

БРУСЕНЦОВ Н.П.

ОПЫТ РАЗРАБОТКИ ТРОИЧНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ*

В процессе разработки вычислительной машины «Сетунь» [1, 2] был решен ряд вопросов, связанных с использованием в цифровых машинах троичной системы счисления. В частности, были уточнены достоинства применения троичной системы в цифровых машинах, создан метод синтеза троичных переключательных схем, разработана система элементов, обеспечивающая экономную реализацию троичных схем.

Достоинства троичной системы счисления

Достоинства, которыми обладает троичная система счисления с точки зрения использования ее в цифровых машинах, обусловлены тем, что основание этой системы мало и оно нечетно. Из малости основания следует экономность кодирования чисел и простота (по отношению к системам с большими основаниями) выполнения поразрядных операций. Из нечетности основания следует возможность симметричного относительно нуля расположения значений цифр, при котором имеет место ряд ценных свойств.

Троичное кодирование несколько экономнее (на 5,4%) двоичного, причем для представления произвольного числа с одной и той же точностью троичных разрядов требуется в 1,58 раза меньше, чем двоичных (и только в 2,10 раза больше, чем десятичных).

Следует отметить частный случай, в котором троичное кодирование оказывается экономнее двоичного на 25%. В симметричной троичной системе для представления чисел 0, 1 и -1 достаточно одного разряда, то время как в двоичной системе требуется два разряда, причем оба используются полностью, то есть никакое число, помимо трех указанных, этими разрядами не может быть представлено.

Определенным достоинством симметричной троичной системы является возможность в случае представления чисел с порядками

* Текст печатается по изданию: Брусенцов Н.П. Опыт разработки троичной вычислительной машины// Вестник Московского университета. 1965. №2.— (с.39-48).

выбрать. Для значений нормализованной мантиссы x интервал $0,5 < x < 1,5$, вероятность получения ненормализованного результата при перемножении двух произвольных нормализованных чисел для этого интервала равна 23,8%, в то время как для интервала $0,5 < x < 1,0$, применяемого обычно в двоичных машинах, она составляет 37,4%.

Оценивая троичную систему с точки зрения удобства выполнения или иных операций над числами, нетрудно заметить, что троичные поразрядные (логические) операции сложнее соответствующих двоичных операций, так как в троичном разряде три цифры, а в двоичном – только две. Однако это усложнение является минимальным в том смысле что основание три является наименьшим после двух. В то же время ценой этого усложнения полностью устраняются трудности, возникающие в двоичной системе при введении относительных чисел. Многочисленность практически применяемых способов представления относительных чисел в двоичной системе счисления – от дополнительного и обратного кодов и их модификаций до использования основания «минус два» – свидетельствует о том, что проблема представления относительных чисел в этой системе не имеет безупречного решения. В троичной системе счисления при симметричном относительно нуля расположении значений цифр проблемы представления относительных чисел нет, так как при наличии положительных и отрицательных цифр положительные и отрицательные числа имеют естественное представление.

Симметричное относительно нуля расположение значений цифр не является необходимым условием естественного представления относительных чисел – для этого достаточно того, чтобы в системе счисления использовались цифры обоих знаков (например, в четверичной системе: $-1, 0, 1, 2$ или $-2, -1, 0, 1$). Однако симметричным расположением обусловлены следующие важные свойства.

1. Коды чисел, одинаковых по абсолютной величине и противоположных по знаку, различаются только знаками цифр.
2. Операция изменения знака числа является поразрядной и сводится к изменению знаков всех значащих цифр (следствие 1-го свойства).
3. При данном количестве разрядов точность представления положительных и отрицательных чисел одинакова.

4. Всякая старшая часть точного представления числа является наилучшим при содержащемся в ней количестве значащих цифр приближенным представлением этого числа (отсутствие проблемы округления).

Троичная система счисления с цифрами 0, 1, -1 , являясь самой простой из симметричных систем, представляет собой наиболее элементарную естественную систему для относительных чисел, подобно тому, как двоичная система с цифрами 0, 1 является наиболее элементарной системой для положительных (точнее, для неотрицательных) чисел.

Относительная по сравнению с двоичными сложность троичных поразрядных операций в известной степени искупается тем, что они содержательнее соответствующих двоичных операций. Например, операция поразрядного умножения в троичной симметричной системе и в отличие от двоичного поразрядного умножения (конъюнкции) позволяет не только извлекать цифры тех или иных разрядов числа, но и изменять знак любой извлеченной цифры. Другими словами, в троичном варианте эта операция помимо функции извлечения обладает функцией изменения знака цифр числа (и, следовательно, изменения знака числа в целом), причем возможно комбинированное использование этих функций.

Рассмотренный пример свидетельствует о том, что набор троичных операций, обеспечивающий непосредственное выполнение определенных функций, может быть компактнее функционально равноценного набора двоичных операций. Это относится не только к поразрядным операциям. Отсутствие в симметричной системе проблемы округления чисел, помимо того что в машине не приходится устраивать аппарата округления, означает также, что не надо предусматривать двух вариантов арифметических операций – с округлением и без округления. Одна операция сдвига в троичной симметричной системе счисления эквивалентна трем различным двоичным операциям: 1) логическому сдвигу, 2) арифметическому сдвигу без округления, 3) арифметическому сдвигу с округлением [2].

Изложенное приводит к выводу, что троичная система счисления в ее симметричном варианте обладает по сравнению с двоичной системой существенными преимуществами, уступая ей только в простоте выполнения поразрядных операций. Указанные преимущества можно реализовать при использовании троичной системы в цифровых машинах.

Наибольшего эффекта следует ожидать от применения троичной системы в машинах последовательного действия. Сложность поразрядных операций не приведет в последовательной машине к заметному увеличению оборудования, потому что преобразование всех разрядов числа производится последовательно одной и той же схемой, составляющей по оборудованию незначительную часть машины. С другой стороны, при последовательной работе, благодаря компактности троичных чисел, время выполнения операций типа сложения сократится в 1,58 раза по сравнению с временем выполнения этих операций над двоичными числами в дополнительном или в обратном коде и не менее чем в 2 раза по сравнению со случаем двоичных чисел в прямом коде. Время выполнения операции умножения методом последовательного суммирования частичных произведений сократится в $1,58^2 \sim 2,5$ раза.

Таким образом, применение троичной системы счисления в машине последовательного действия помимо реализации преимуществ естественного представления относительных чисел и отсутствия округления позволяет существенно повысить скорость выполнения арифметических операций.

Синтез троичных схем

Излагаемый метод синтеза троичных переключательных схем основан на представлении трехзначных переменных посредством двузначных компонент. Это позволяет применить для решения значительной части задачи хорошо разработанный аппарат двузначной логики. Полученные данным методом схемы троичных устройств экономнее аналогичных схем, известных в литературе.

Основу рассматриваемой алгебры составляют следующие операции над переменными $x, y, z, \dots$, принимающими значения 0, 1, -1:

1. Операция декодирования, или разложения трехзначной переменной x на двузначные компоненты

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq k \\ 0, & \text{если } x = k, k = 0, 1, -1 \end{cases}$$

2. Операция логического сложения, определяемая табл. 1.

Таблица 1

X	0	0	1	0	-1	1	-1	1	-1
y	0	1	0	-1	0	-1	1	1	-1
$x+y$	0	1	1	-1	-1	0	0	1	-1

3. Операция умножения, совпадающая с арифметической операцией умножения, определенной для чисел 0, 1, -1.

Операции булевой алгебры над двузначными переменными являются частными случаями перечисленных операций:

$$\bar{x}_k = (x_k)_0,$$

$$x_k \vee y_k = x_k + y_k,$$

$$x_k \wedge y_k = x_k y_k$$

Операция логического сложения, определенная табл. 1, удовлетворяет переместительному закону и закону идемпотентности. Для операции умножения справедливы переместительный, сочетательный и распределительный по отношению к логическому сложению законы.

Из определения операции декодирования следует, что при любом значении трехзначной переменной одна из ее компонент равна единице и две компоненты равны нулю. Это позволяет выразить каждую компоненту через две другие:

$$x_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_{-1} = \overline{x_1 + x_{-1}}$$

$$x_1 = \bar{x}_0 \bar{x}_{-1} = \overline{x_0 + x_{-1}}$$

$$x_{-1} = \bar{x}_0 \bar{x}_1 = \overline{x_0 + x_1}$$

Таким образом, трехзначная переменная x однозначно определяется заданием двух ее компонент, например

$$x = x_1 + (-1)x_{-1}$$

Написание этой формулы можно упростить, условившись обозначать операцию логического сложения с предварительным умножением второго слагаемого на -1 знаком «минус»

$$x = x_1 - x_{-1}$$

Если представленная этим способом трехзначная переменная является функцией $f(x, y, \dots, u)$ трехзначных переменных $x, y, \dots, u$, то ее компоненты f_i и f_{-1} будут булевыми функциями $2n$ двузначных переменных $x_1, x_{-1}, y_1, \dots, u_1, u_{-1}$, являющихся компонентами трехзначных переменных $x, y, \dots, u$:

$$f(x, y, \dots, u) = f_1(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1}) - f_{-1}(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1})$$

Существенно, что на любом наборе значений двузначных переменных $x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1}$ хотя бы одна из функций f_1 и f_{-1} обязательно обращается в нуль (поскольку две компоненты трехзначной переменной одновременно не могут быть отличными от нуля).

Для построения выражений функций-компонент f_1 и f_{-1} функций $f(x, y, \dots, u)$ должна быть задана таблица. Выражения f_1 и f_{-1} следует строить в дизъюнктивной нормальной форме, чтобы затем попарным объединением соответствующих членов этих выражений можно было из компонент образовать трехзначные переменные.

Пример 1. Построить выражение функции $f(x, y)$ заданно табл. 2.

Таблица 2

X	0	0	1	0	-1	1	-1	1	-1
Y	0	1	0	-1	0	-1	1	1	-1
$f(x, y)$	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1

В результате разложения на компоненты получается табл. 3 (в составлении ее нет практической необходимости, так как выражения функций-компонент можно получить, пользуясь табл. 2 непосредственно).

Таблица 3

x_1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
x_{-1}	0	0	0	0	1	0	1	0	1
y_1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
y_{-1}	0	0	0	1	0	1	0	0	1
f_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
f_{-1}	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Выражения функций-компонент, полученные на основании табл. 3, имеют вид

$$f_1(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}) = x_1 y_1 + x_{-1} y_{-1}$$

$$f_{-1}(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}) = x_1 y_{-1} + x_{-1} y_1$$

Искомая функция $f(x, y)$ составляется из найденных компонент и преобразуется указанным выше способом:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f_1 - f_{-1} = x_1 y_1 + x_{-1} y_{-1} - (x_1 y_{-1} + x_{-1} y_1) = \\
 &= x_1 y_1 + x_{-1} y_{-1} - x_1 y_{-1} - x_{-1} y_1 = (x_1 - x_{-1}) y_1 - (x_1 - x_{-1}) y_{-1} \\
 &= x y_1 - x y_{-1} = x(y_1 - y_{-1}) = xy
 \end{aligned}$$

Может показаться, что преобразования, произведенные в этом примере, не вполне корректны, поскольку операция логического сложения не удовлетворяет сочетательному закону. Однако некорректности здесь нет. Операция логического сложения не удовлетворяет сочетательному закону потому, что при ее определении было принято $x+x=x$ и вместе с тем

$x+(-1)x=0$. Достаточно исключить случай сложения, в котором значения слагаемых различны по знаку, и сочетательный закон будет в силе. Но именно этот случай заведомо исключен при сложении компонент трехзначной переменной, так как положительная и отрицательная компоненты не могут принять отличные от нуля значения одновременно. Следовательно, использование сочетательного закона для логического сложения при преобразовании составленных описанным способом выражений допустимо.

Пример 2. Построить выражения функций троичного полу-сумматора: суммы $s(x, y)$ и переноса $q(x, y)$, заданных табл. 4.

Таблица 4

X	0	0	1	0	-1	1	-1	1	-1
Y	0	1	0	-1	0	-1	1	1	-1
$s(x, y)$	0	1	1	-1	-1	0	0	-1	1
$q(x, y)$	0	0	0	0	0	0	0	1	-1

На основании таблицы получают следующие выражения функций-компонент:

$$S_1 = x_1 \bar{y}_1 \bar{y}_{-1} + y_1 \bar{x}_1 \bar{x}_{-1} + x_{-1} y_{-1}$$

$$S_{-1} = x_{-1} \bar{y}_1 \bar{y}_{-1} + y_{-1} \bar{x}_1 \bar{x}_{-1} + x_1 y_1$$

$$q = x_1 y_1$$

$$q_{-1} = x_{-1} y_{-1}$$

Составленные из этих компонент выражения искомых функций преобразуются к виду

$$s(x, y) = s_1 - s_{-1} = x_1 y_1 \bar{y}_{-1} + y_1 \bar{x}_1 \bar{x}_{-1} - q(x, y)$$

$$q(x, y) = q_1 - q_{-1} = x_1 y_1 - x_{-1} y_{-1}$$

В случае, когда для реализации полусумматора применяются элементы с активным нулем, выражение функции $s(x,y)$ можно

$$x_0 = \bar{x}_1 \bar{x}_{-1} \text{ и } y_0 = \bar{y}_1 \bar{y}_{-1}$$

упростить, введя нулевые компоненты

$$s(x, y) = xy_0 + yx_0 - q(x, y).$$

Из приведенных здесь рассуждений и примеров вытекает следующий порядок построения аналитического выражения функции трехзначных переменных $f(x, y, \dots, u)$, заданной таблично:

1. Функция f и переменные $x, y, \dots, u$ при помощи операции декодирования заменяются парами двузначных компонент $f_1, f_{-1}, x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1}$
2. Функции-компоненты $f_1(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1})$ и $f_{-1}(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1})$ выражаются в дизъюнктивной нормальной форме (по возможности минимизированной).

Выражение трехзначной функции составляется из выражения функций-компонент по формуле

$$f(x, y, \dots, u) = f_1(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1}) - f_{-1}(x_1, x_{-1}, y_1, y_{-1}, \dots, u_1, u_{-1})$$

4. Полученное выражение преобразуется путем объединения компонент в трехзначные переменные и приведения его к виду, удобному для реализации данной системой элементов.

Относительно выбора системы элементов, то есть относительно того, какие операции должны непосредственно выполнять отдельные элементы, можно заметить следующее. Нет необходимости в том, чтобы операции, выполняемые отдельными элементами, были непременно полными базисными операциями используемой алгебры. Такой выбор элементов может привести к неоправданному увеличению количества Оборудования при реализации схем. Например, если применить элемент, осуществляющий операцию умножения трехзначных переменных, то, будучи конструктивно более сложным по сравнению с элементом, осуществляющим умножение трехзначной переменной на двузначную, и тем более по сравнению с элементом умножения двузначных переменных, он в подавляющем числе случаев, как показывает анализ выражений различных функций трехзначной логики, будет использован вместо более простых элементов для выполнения умножения двузначных переменных или трехзначных на двузначные. Исходя из этого целесообразно отказаться от элемента, реализующего умножение трехзначных переменных, и ввести элемент, умножающий трехзначную переменную на двузначную (а мо-

жет быть, и элемент умножения двузначных переменных). При этом операция умножения трехзначных переменных будет составной:

$$xy = xy_1 - xy_{-1}.$$

Реализация троичных схем

Оправдавшая себя на практике техника построения недорогих и высоконадежных троичных устройств была разработана на базе быстродействующих магнитных усилителей с питанием импульсами тока [3].

На рис. 1 в качестве иллюстрации этой техники представлена принципиальная схема одного звена троичного сдвигающего регистра с двухфазным (двухтактным) питанием. Звено состоит из двух включенных друг за другом элементов: первый элемент питается импульсами тока фазы I, второй – импульсами тока фазы II, которая противоположна фазе I. Каждый элемент состоит из двух магнитных усилителей, а каждый усилитель содержит трансформатор с ферритовым сердечником и диод.

Управляющие (входные) обмотки усилителей, составляющих элемент, соединены так, что импульс тока, поданный на вход 1, возбуждает верхний усилитель и препятствует возбуждению нижнего усилителя, а импульс тока, поданный на вход -1 , возбуждает нижний усилитель и препятствует возбуждению верхнего. Таким образом, передача троичного кода по регистру производится по двум каналам: по верхнему каналу передаются «единицы», по нижнему – «минус единицы». При одновременной подаче импульсов на оба входа элемента имеет место взаимная компенсация управляющих ампервитков, и оба усилителя остаются невозбужденными, что соответствует нулевому состоянию.

Если ко входам элемента подключить параллельно выходы двух элементов, через которые будут синхронно поступать последовательности импульсов, соответствующие троичным кодам x и y , то произойдет логическое сложение этих кодов согласно данному выше определению операции логического сложения. Короче говоря, элемент троичного сдвигающего регистра реализует операцию логического сложения двух трехзначных переменных.

При составлении логических схем элементы изображают условно парами квадратиков, каждый из которых соответствует магнитному усилителю. Стрелка, упирающаяся в квадратик, обо-

значает положительно включенную управляющую обмотку, линия, перечеркивающая квадратик, – отрицательно включенную управляющую обмотку.

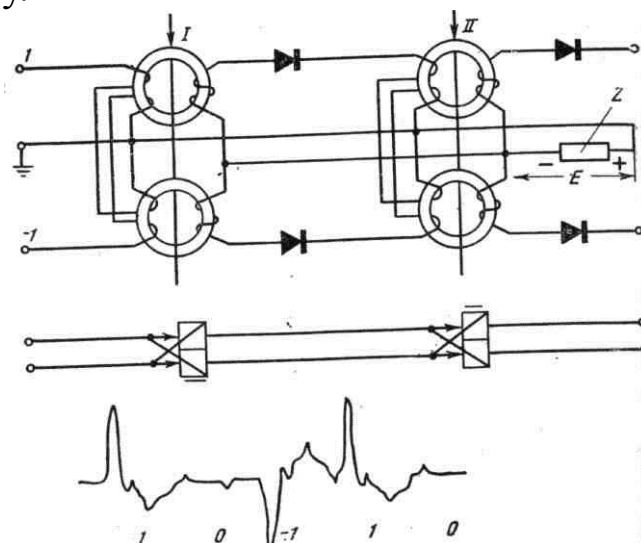


Рис. 1. Схема одного звена троичного сдвигающего регистра, ее условное обозначение и осциллограмма напряжения в точке 1

Следует отметить, что количество оборудования и потребление энергии на разряд в данном троичном регистре оказываются не большими, чем в двоичных регистрах с подавлением помех при помощи компенсирующих трансформаторов.

Благодаря тому что составляющие элемент магнитные усилители обладают независимыми выходами, передаваемая элементом переменная x всегда доступна в виде ее компонент x_1 и x_{-1} , то есть операция поразрядного декодирования выполняется ячейкой без дополнительных затрат оборудования. Кроме того, такие операции, как инвертирование $f(x)=-x$ и объединение компонент $f(x)=x_1+x_{-1}$, могут быть осуществлены простой коммутацией соединяющих элементы проводов.

На рис. 2 изображены принципиальные схемы и условные обозначения трех элементов, осуществляющих операции типа умножения над трехзначными переменными $x, y, z, \dots$ и двузначными переменными $x' y', z', \dots$:

- а) $f(x, y')=xy'$ (нормально закрытый клапан),
- б) $f(x, y', z')=xy'z'$ (нормально открытый клапан),
- в) $f(x, y', z' u')=x'y'-z'u'$ (клапан с независимыми входами).

Каждый из этих элементов, подобно элементу троичного сдвигающего регистра, представляет собой пару магнитных усилителей с соответствующим образом соединенными управляющими обмотками.

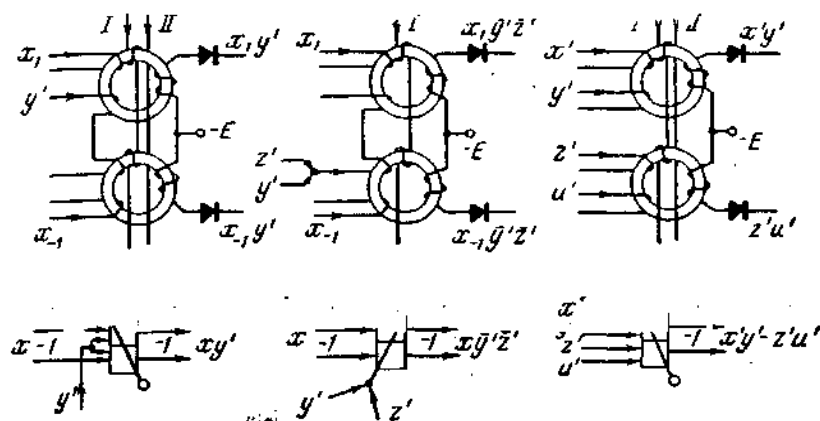


Рис. 2. Элементы, реализующие операции типа умножения

В качестве примера реализации переключательных функций трехзначной логики на рис. 3 приведена схема, осуществляющая операцию умножения трехзначных переменных согласно формуле $xy = xy_1 - xy_{-1}$.

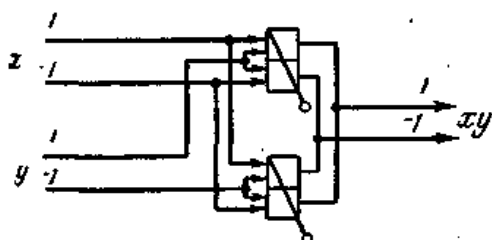


Рис. 3. Реализация операции умножения трехзначных переменных

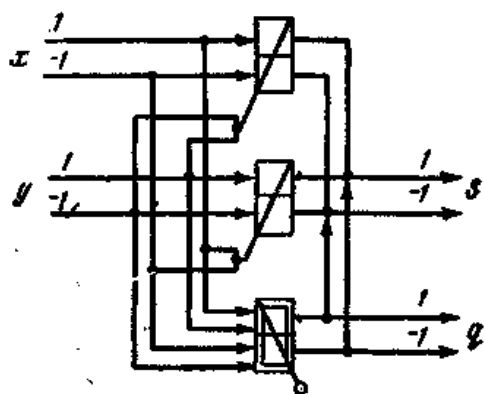


Рис. 4. Схема троичного полусумматора

На рис. 3-4 представлена схема троичного полусумматора, построенного в соответствии с выражениями частичной суммы s и переноса q , которые были получены в предыдущем разделе.

Схема последовательного троичного сумматора с двумя входами, составленного из двух полусумматоров, изображена на рис. 5. Следует отметить экономность этой схемы по сравнению с известными схемами троичных сумматоров [4, 5, 6], что является свидетельством эффективности изложенного метода построения троичных схем.

Определенное представление об экономности арифметических и Управляющих схем машины «Сетунь» в целом дает сравнение этих схем по количеству оборудования с соответствующими схемами двоичного варианта данной машины. Расчет показывает, что количество троичных элементов в арифметическом устройстве и устройстве управления машины «Сетунь» в два раза меньше коли-

чества аналогичных по технике двоичных элементов, необходимого для реализации этих устройств при использовании двоичной системы.

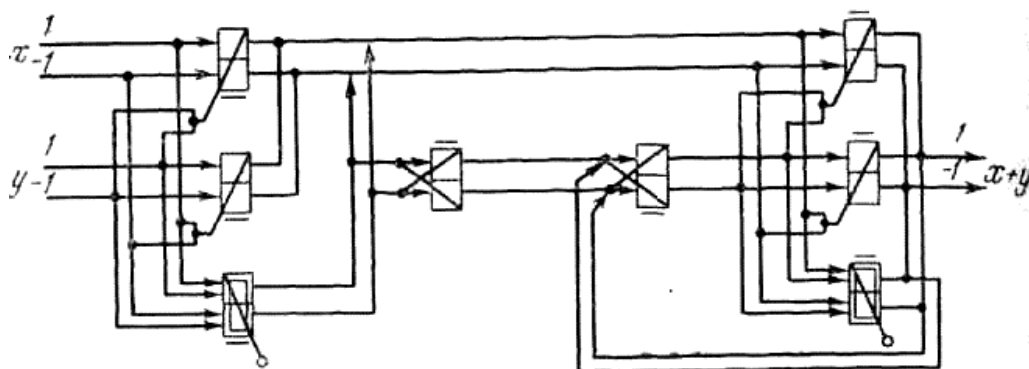


Рис. 5. Схема последовательного троичного сумматора с двумя входами

Так как троичные элементы машины «Сетунь» по числу деталей и потребляемой мощности можно считать равноценными двоичным элементам того же типа, то экономия оборудования в троичном варианте арифметических и управляющих схем по отношению к двоичному варианту составляет 50%. Это означает также, что троичный вариант цифровой машины может оказаться целесообразным даже в том случае, когда каждый троичный элемент по оборудованию будет равноценен двум двоичным.

Литература

1. Брусенцов Н. П. Вычислительная машина «Сетунь» Московского государственного университета. «Материалы научно-технической конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники»». Киев, 1960. – (стр. 226-234).
2. Брусенцов Н. П., Жоголев Е. А., Веригин В. В., Маслов С. П., Ишулина А. М. Малая автоматическая цифровая машина «Сетунь» «Вестн Моск ун-та», матем., мех., № 4, 3-12, 1962.
3. Брусенцов Н. П. Построение логических схем на магнитных усилителях с питанием импульсами тока. «Магнитные элементы систем автоматики телемеханики, измерительной и вычислительной техники». Изд-во АН УССР, Киев, 1964.
4. Lee C. V., Chen W. H. Several-valued combinational switching circuits. «Communication and Electronics», No. 25, 278-282, 1956.
5. Alexander W. The Ternary computer. «Electronics and Power», 36-39, February, 1964.
6. Варшавский В. И. Трехзначная мажоритарная логика. «Автоматика и телемеханика», XXV, № 5, 673-684, 1964.

**БРУСНЕЦОВ Н.П., ЖОГОЛЕВ Е.А., ВЕРИГИН В.В.,
МАСЛОВ С.П., ТИШУЛИНА А.М.**

МАЛАЯ АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЦИФРОВАЯ МАШИНА «СЕТУНЬ»*

В Вычислительном центре МГУ разработана малая автоматическая цифровая машина «Сетунь». Целью разработки вычислительной машины «Сетунь» было создание недорогой машины для решения научно-технических и хозяйственных задач средней сложности в вузах, конструкторских бюро, на заводах, в научно-исследовательских институтах и лабораториях. Другими словами, имелась в виду малая автоматическая вычислительная машина, рассчитанная на массовое использование. Исходя из этого, к машине были предъявлены следующие требования:

1. Скорость работы – несколько сот операций в секунду.
2. Точность вычислений – 6–8 верных десятичных знаков,
3. Простота и удобство программирования.
4. Надежность в эксплуатации и неприязательность в техническом обслуживании.
5. Умеренные габариты, небольшое потребление энергии.
6. Использование недорогих и недефицитных материалов и деталей.

Рассматривая эти требования в совокупности, можно заметить, что некоторые из них являются трудносовместимыми. Например, создание значительных удобств для программистов влечет за собой усложнение машины и увеличение количества оборудования, что ведет к снижению надежности и повышению стоимости как самой машины, так и ее эксплуатации.

Наиболее полное удовлетворение предъявленным требованиям было получено путем:

1. создания удобств для программистов с помощью специальных обслуживающих программ;
2. применения двухступенчатой системы памяти;

* Текст печатается по изданию: Н.П. Бруснецов, Е.А. Жоголев, В.В. Веригин, С.П. Маслов, А.М. Тишулина Малая автоматическая цифровая машина «Сетунь» // Вестник Московского университета. Математика. 1962. №4.– (с.3-12).

3. построения схем на магнитных элементах;
4. использования троичной системы счисления.

Удобства для программистов, помимо инженерного пути, связано с усложнением машины, могут быть реализованы программным путем, то есть разработкой систем стандартных подпрограмм, введением компилирующих и интерпретирующих систем, программирующих программ и т. д. Этот способ создания удобств является значительно совершенным и гибким, чем инженерный. Наличие нескольких вариантов обслуживающих систем позволяет проще удовлетворить различные потребности программистов, приспособить машину для эффективного решения определенного класса задач, кроме того, в эти системы сравнительно быстро могут быть внесены дополнения и изменения, отражающие новые идеи в программировании. При таком способе создания удобств достаточно, чтобы машина могла выполнять ограниченный набор сравнительно простых операций и ее поэтому легче сделать надежной, простой в эксплуатации и дешевой. Однако такая машина должна обладать определенным запасом мощности: необходима дополнительная емкость памяти для хранения обслуживающих программ и некоторый запас скорости для компенсации замедления счета, вызываемого работой этих программ.

Создание запаса емкости запоминающего устройства практически удорожает машину, если ее основная память реализована на магнитном барабане.

Запас скорости можно получить путем добавления запоминающей устройства небольшой емкости на ферритовых сердечниках, которое связано с магнитным барабаном групповой передачей информации, используется в качестве оперативной памяти. Расчеты показывают что скорость работы «Сетуни», которая снабжена быстродействующей ступенью памяти емкостью в 162 ячейки по 9 троичных разрядов, в 8–9 раз превосходит ту скорость, которой обладала бы эта машина, если бы она была оснащена только магнитным барабаном²; с другой стороны, скорость работы «Сетуни» только в 5–6 раз ниже скорости, которой обладала бы машина, если бы барабан в ней был заменен быстродействующим запоминающим устройством той же емкости.

² Не имеется ввиду использование оптимального программирования.

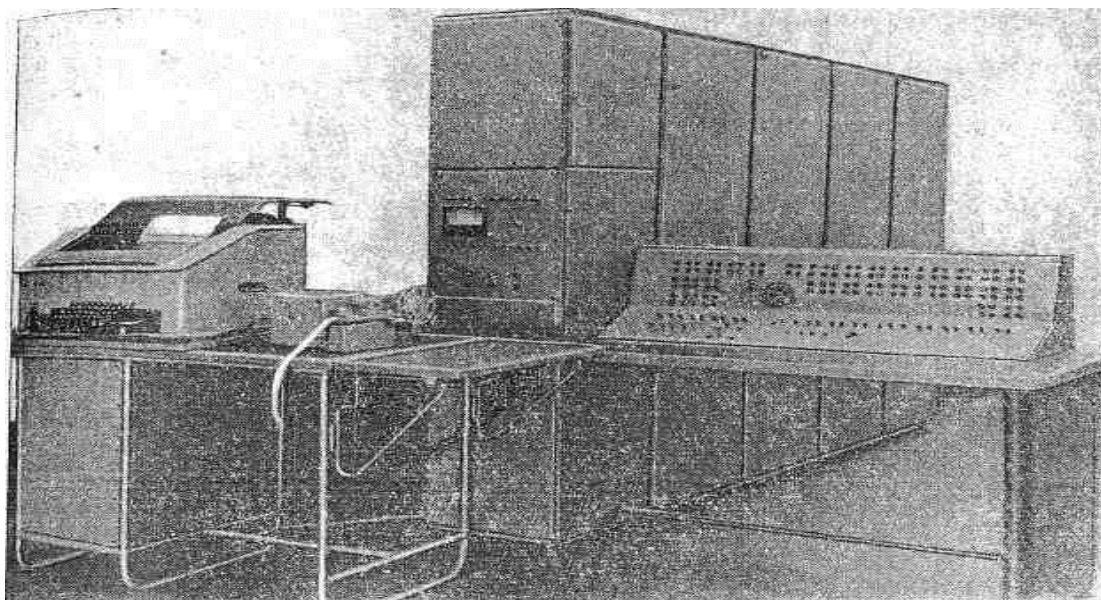
Использование в качестве основного элемента схем машины магнитного усилителя с тактовой частотой 200 кГц вместе с примет: троичной системы счисления позволили обеспечить требуемую скорость выполнения операции при помощи простого и экономного арифметического устройства с сумматором последовательного действия. В связи с тем что при одной и той же точности представления чисел троичное слово в 1,6 раза короче двоичного, операции, подобные сложению, в троичном последовательном арифметическом устройстве выполняются в 1,6 раза быстрее, чем в двоичном.

Троичная система счисления с цифрами 0, 1, -1 обладает, кроме того, и другими преимуществами по сравнению с двоичной системой. Благодаря наличию в этой системе «положительной» и «отрицательной» цифр, в коде числа нет особого разряда знака, что существенно упрощает логику арифметических операций.

Тот факт, что наилучшее округление числа до k верных троичных знаков получается отбрасыванием младших знаков, начиная с $(k+1)$ -го, избавляет от необходимости устраивать в машине аппарат округления и вводить варианты арифметических операции, различающиеся наличием или отсутствием округления.

Сказанное о знаке и округлении означает также, что операция сдвига в троичной системе счисления совмещает в себе функции таких разновидностей двоичного сдвига, как логический сдвиг, арифметический сдвиг без округления, арифметический сдвиг с округлением. Вообще, равноценный с точки зрения программиста набор выполняемых машиной операций в троичном варианте машины получается более компактным, чем в двоичном.

Требования относительно надежности, габаритов и потребления энергии были удовлетворены использованием в качестве основного элемента логических схем машины специально разработанного быстродействующего магнитного усилителя. Этот усилитель состоит из миниатюрного трансформатора с ферритовым сердечником и полупроводникового диода причем в схемах усилители соединяются друг с другом без посредства каких-либо электрических деталей, за исключением соединительных проводов. Общее количество магнитных усилителей в машине – 3500. количество других элементов сравнительно мало: транзисторов – 330, электронных ламп – 37, электромагнитных реле – 10.



Вычислительная машина «Сетунь»

Основные параметры машины

«Сетунь» – одноадресная машина последовательного действия, оперирующая с числами с фиксированной запятой.

Числа и команды в машине представлены троичным кодом с цифрами 1,0,–1. Машина оперирует с 18-разрядными (длинными) и 9-разрядными (короткими) троичными кодами, причем запятая стоит всегда после второго разряда, то есть все числа по модулю меньше 4,5.

Команды представляются девятью троичными разрядами, из которых пять старших составляют адресную часть, три – код операции и один (младший) используется в качестве признака модификации адреса. При выполнении команд, содержащих в этом разряде 1 или –1, их адресная часть автоматически изменяется соответственно прибавлением или вычитанием числа, хранящегося в специальном 5-разрядном регистре (индекс-регистре).

Память машины состоит из двух ступеней: а) оперативного запоминающего устройства на ферритовых сердечниках емкостью в 162 ячейки по 9 троичных разрядов; б) запоминающего устройства на магнитном барабане емкостью в 1944 ячейки по 9 троичных разрядов.

Передача информации между запоминающими устройствами производится зонами, содержащими по 54 девятиразрядных кода.

Ввод данных в машину осуществляется с пятипозиционной бумажной перфоленты посредством фотоэлектрического вводного устройства, работающего со скоростью 800 знаков в секунду.

Вывод данных производится путем печати и перфорации на бумажной ленте со скоростью 7 знаков в секунду. Возможен вывод как троичных кодов (команд), так и буквенно-цифрового текста с заданием произвольной формы бланка.

Контроль исправности машины осуществляется путем выполнения тест-программ в профилактических режимах.

Питание машины производится от сети трехфазного тока 220/380 в. Потребляемая мощность – 2,5 ква. Охлаждение естественное.

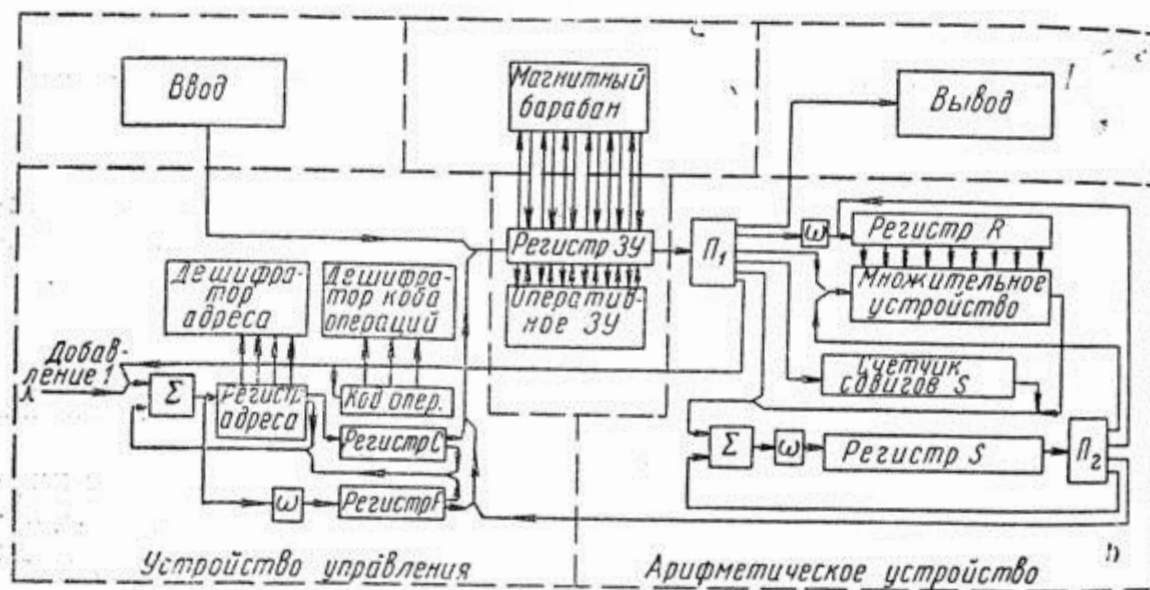
Машина оформлена в виде шкафа 2,9X1,85X0,5 м с пультом управления 1,6X0,6X1 м и стола внешних устройств 1,2X0,8X0,75 м.

Для установки машины требуется площадь 25–30 м².

Блок-схема и система команд машины

Машина состоит из шести функциональных устройств: 1) арифметического устройства, 2) устройства управления, 3) оперативного запоминающего устройства, 4) устройства ввода, 5) устройства вывода 6) запоминающего устройства на магнитном барабане.

Передача информации между блоками, в том числе ввод и вывод ее из машины, производится через оперативное запоминающее устройство. Это устройство обладает 9 разрядным сдвигающимся регистром, посредством которого информация, поступающая на его вход в последовательной форме, преобразуется в параллельную форму для записи в запоминающее устройство, а информация, считываемая параллельно из запоминающего устройства, преобразуется в последовательную форму. Эта информация направляется в то или иное устройство в



Блок-схема вычислительной машины «Сетунь»

Зависимости от состояния переключателя Π_1 , которое в каждый момент определяется выполняемой программой.

Арифметическое устройство машины осуществляет выполнение команд сложения, вычитания, умножения, поразрядного умножения, сдвига, нормализации, а также команд посылки чисел в регистры арифметического устройства и записи результата в оперативное запоминающее устройство.

В арифметическом устройстве имеется два регистра: регистр множителя R и регистр результата S (аккумулятор). Регистр R состоит из 18 триггеров, управляющих ключами множительного устройства. Регистр S представляет собой 18-разрядный триггерный регистр со сдвигом влево и вправо.

Число из регистра S посредством переключателя Π_2 может быть направлено по одному из четырех каналов. При выполнении команды сложения или вычитания оно подается на вход сумматора арифметического устройства одновременно с поступлением на второй вход этого сумматора числа, выбранного из оперативной памяти. При умножении число из регистра S может быть послано либо в регистр R в качестве сожителя, либо на вход множительного устройства в качестве множимого. В случае записи содержимого регистра S в оперативную память переключатель Π_2 соединяет выход регистра S с входом регистра запоминающего устройства.

В регистр S число может быть принято из запоминающего устройства, из множительного устройства и из счетчика сдвигов

при нормализации, причем во всех случаях оно проходит через сумматор.

Прием числа в регистр S сопровождается выработкой признака ω , $\omega(S)$, по правилу: если число положительно, то $\omega = 1$, если отрицательно, то $\omega = -1$, если равно нулю, то $\omega = 0$.

При поступлении числа в регистр R или в регистр модификации F устройства управления вырабатывается по тому же правилу признак ω , $\omega(R)$ или $\omega(F)$.

В зависимости от значения этого признака ω производится передача управления при выполнении команд условного перехода. При операциях, не связанных с выработкой признака ω , сохраняется его значение, выработанное предыдущей операцией.

В устройстве управления имеется три регистра: 9-разрядный регистр команды K, 5-разрядный регистр адреса команды C и 5-разрядный регистр модификации (индекс-регистр) F.

Регистр K состоит из двух частей: 5-разрядного триггерного регистра со сдвигом вправо, в который помещаются адреса чисел и команд при выборке этих чисел и команд из оперативного запоминающего устройства и четырех триггеров кода операции, из которых три определяют характер последовательности управляющих импульсов в зависимости от принятого на них кода, а четвертый управляет механизмом модификации адресной части команды.

Устройство управления обладает собственным сумматором, с помощью которого производится последовательное изменение адресов выполняемых команд и осуществляются операции, связанные с регистром модификации F, в том числе и сама модификация адресных частей команд.

К моменту начала операции адрес подлежащей выполнению команды принимается в регистр C, а сама команда – в регистр K, причем первыми поступают младшие разряды команды, содержащие признак модификации и код операции. Адресная часть команды проходит в регистр K через сумматор, на второй вход которого может быть подано содержимое индекс-регистра F с положительным или отрицательным знаком в зависимости от признака модификации.

Установленная в регистре K модифицированная адресная команды в зависимости от характера выполняемой операции используется или как адрес числа, выбираемого из оперативной памяти, или как адрес, по которому в память производится запись числа,

или как адрес команды, которой должно быть передано управление, или как условное число, содержащее информацию об обмене группой кодов между оперативной памятью и магнитным барабаном, а также о работе с внешними устройствами.

При работе машины с длинными ячейками (18 разрядов) чтение (запись) производится дважды: сначала считываются или записываются 9 младших разрядов числа, а затем – 9 старших разрядов. Адрес длинной ячейки памяти содержит в пятом разряде–1; адрес ее половины, соответствующей младшим разрядам, содержит в этом разряде 1; адрес старшей половины – 0.

При выполнении команд безусловной передачи управления, так же как и условной, в том случае если передача управления действительно производится, принятая в регистр К адресная часть команды передачи управления воспринимается как адрес новой команды; происходит выборка этой команды из памяти и прием ее в регистр К, в то время как сам адрес передается из регистра А в регистр С. Если же передача управления не должна производиться, то механизм выборки очередной команды работает так, как при всякой другой операции, а именно: адрес выполненной команды направляется из регистра С через сумматор в регистр К, причем в соответствующий момент на второй вход сумматора подается импульс, под действием которого происходит последовательное увеличение адреса, благодаря чему в регистр К поступает адрес следующей по порядку команды.

Структура цикла, соответствующего той или иной операции, задается распределителем импульсов (на блок-схеме не показан), который представляет собой замкнутую в кольцо линию задержки, в различных точках которой имеются ответвления, выдающие управляющие импульсы в нужный момент в зависимости от кода выполняемой операции. Время пробега импульса по распределителю в большинстве операций равно 180 *мксек*. При выполнении операций умножения, сдвига, нормализации и записи из регистра S в память длина кольца распределителя импульсов и соответственно длительность цикла увеличиваются. При выполнении операций передачи управления в случае, если передача происходит, длина этого кольца и длительность цикла уменьшаются до 100 *мксек*.

Во время работы с магнитным барабаном или с устройствами ввода – вывода основное устройство управления становится в жду-

щий режим, подчиняясь импульсам, поступающим из автономных устройств управления магнитным барабаном, вводом и выводом.

При работе в однократном режиме кольцо распределителя импульсов размыкается, и для выполнения каждой команды необходимо подать на вход распределителя пусковой импульс. Этот импульс формируется схемой одного импульса при каждом нажатии на кнопку «пуск» пульта управления. В случае, когда машина находится в автоматическом режиме, поступивший в распределитель пусковой, импульс циркулирует в его кольце до тех пор, пока работа машины не будет прервана одним из «остановов»: командой «останов», переполнением в регистре S , кнопкой «останов» или ключом «одноактивный режим» на пульте управления.

Система команд машины дана в помещенной ниже таблице. В этой таблице код операции вместе с признаком модификации, положенным равным нулю, записывается с помощью двух девятиричных цифр. Цифры с черточкой наверху обозначают соответствующие «отрицательные» цифры (например, символ $\bar{3}$ обозначает -3).

Система команд машины «Сетунь»

Код операции	Название операции	Содержание команды	Выработка ω	Время выполнения команды в мксек
$\bar{3}\bar{3}$	Считывание с МБ	$[M^*] \rightarrow [\Phi_\alpha]$	Сохраняется	7500
$\bar{3}0$	Ввод—вывод	Ввод в Φ_α Вывод из Φ_α	Сохраняется	—
$\bar{3}\bar{3}$	Запись на МБ	$[M^*] \rightarrow [\Phi_\alpha]$	Сохраняется	7500
$\bar{2}\bar{3}$	Нормализация	$Норм (S) \rightarrow (A^*); N \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	$275 + 5 N $
$\bar{2}0$	Сдвиг	$Сдв (S) на (A^*) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	$290 + 5 N $
$\bar{2}\bar{3}$	Запись из S	$(S) \rightarrow (A^*)$	$\omega (S)$	18
$\bar{1}\bar{3}$	Сложение в F	$(A^*) + (F) \rightarrow (F)$	$\omega (F)$	225
$\bar{1}0$	Посылка в F	$(A^*) \rightarrow (F)$	$\omega (F)$	180
$\bar{1}\bar{3}$	Сложение в C с посылкой в F	$(A^*) + (C) \rightarrow (F)$	$\omega (F)$	180
$0\bar{3}$	Запись из F	$(F) \rightarrow (A^*)$	$\omega (F)$	180
00	Безусловный переход (БП)	$A^* \rightarrow (C)$	Сохраняется	100
03	Запись из C	$(C) \rightarrow (A^*)$	Сохраняется	180
$\bar{1}\bar{3}$	Условный переход VII— $\bar{1}$	$A^* \rightarrow (C) \text{ при } \omega = \bar{1}$	Сохраняется	100, 180
$\bar{1}0$	Условный переход VII—0	$A^* \rightarrow (C) \text{ при } \omega = 0$	Сохраняется	100, 180
$\bar{1}\bar{3}$	Условный переход VII—1	$A^* \rightarrow (C) \text{ при } \omega = 1$	Сохраняется	100, 180
$\bar{2}\bar{3}$	«Останов»	«Останов»; $(A^*) \rightarrow (R)$	$\omega (R)$	—
$\bar{2}0$	Поразрядное умножение	$(A^*) \cdot (S) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	180
$\bar{2}\bar{3}$	Посылка в R	$(A^*) \rightarrow (R)$	$\omega (R)$	180
$\bar{3}\bar{3}$	Вычитание в S	$(S) - (A^*) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	180
$\bar{3}0$	Посылка в S	$(A^*) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	180
$\bar{3}\bar{3}$	Сложение в S	$(S) + (A^*) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	180
$\bar{4}\bar{3}$	Умножение — $\bar{1}$	$(A^*) + (S) (R) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	320
$\bar{4}0$	Умножение — 0	$(S) \rightarrow (R); (A^*) (R) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	320
$\bar{4}\bar{3}$	Умножение — 1	$(S) + (A^*) (R) \rightarrow (S)$	$\omega (S)$	320

Примечание: Операции с кодом $\bar{4}\bar{3}$, $\bar{4}0$, $\bar{4}\bar{3}$ в настоящее время не используются.

При написании команд к такому коду операции необходимо прибавить значение признака модификации команды.

Символы $[M]$ или $[\Phi_\alpha]$ обозначают содержимое зоны M магнитного барабана или соответственно зоны Φ оперативной памяти, где $\alpha = -1, 0, 1$; символы (A) , (S) , (R) , (F) и (C) обозначают соответственно содержимое ячейки A оперативной памяти, регистров S , R , F , и C ; символ $\Rightarrow$ означает посылку результата или содержимого зоны, указанных слева от этого символа на место величины или соответственно содержимого зоны, указанных справа от этого символа. Например, запись $(S) \Rightarrow$ означает: послать содержимое регистра S на место содержимого ячейки A .

Звездочкой помечаются модифицированные адреса или их составные части.

Операция сдвига производит сдвиг содержимого регистра S $|N|$ разрядов, где N рассматривается как 5-разрядный код, хранящийся в ячейке A^* , то есть $N = (A^*)$. Сдвиг производится влево при $N > 0$ и вправо при $N < 0$. При $N = 0$ содержимое регистра S не изменяется.

Операция нормализации производит сдвиг (S) при $(S) \neq 0$ в таком направлении и на такое число разрядов $|N|$, чтобы результат, посылаемый в ячейку A^* , был по модулю больше $1/2$, но меньше $3/2$, то есть в двух старших разрядах результата была записана комбинация троичных цифр 01 или 01: При этом в регистр S посылается число N (5-разрядный код), знак которого определяется направлением сдвига, а именно: $N > 0$ при сдвиге вправо, $N < 0$ при сдвиге влево. При $(S) = 0$ или при $1/2 < |(S)| < 3/2$ в ячейку A^* посылается (S) , а в регистр S посылается $N = 0$.

Остальные операции, содержащиеся в таблице, ясны без дополнительных пояснений.

Система математического обслуживания машины

Разработка системы математического обслуживания проводилась в следующих направлениях:

Создание библиотеки стандартных подпрограмм.

Создание различных вариантов интерпретирующих систем.

При составлении стандартных подпрограмм учитывались особенности машины. Поэтому данные о времени их работы, а также о занимаемом ими месте в памяти в какой-то степени позволяют су-

дить о том, насколько эффективно будет использоваться машина, если не пожалеть усилий на составление хорошей программы.

Основу библиотеки составили подпрограммы для выполнения четырех арифметических действий и вычисления элементарных функции в режиме плавающей запятой. Каждая из этих подпрограмм занимает не более одной зоны памяти и выполняется не медленнее, чем в 8500 мксек.

Ряд подпрограмм служит для решения некоторых типовых задач: решения системы линейных алгебраических уравнений, вычисления интегралов, интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.

Подпрограмма решения системы линейных алгебраических уравнений, основанная на методе Гаусса с выбором главного элемента и оперирующая с числами, представленными в режиме с плавающей запятой, в виде мантиссы и порядка, производит решение системы. 14-го порядка за 3,5 мин. и системы 26-го порядка за 14 мин., включая в обоих случаях время ввода в машину подпрограммы и исходной матрицы (в десятичной системе счисления), а также время печати результатов решения (тоже в десятичной системе). Время работы этой подпрограммы в некотором смысле показательно, так как различные «матричные» задачи наиболее неблагоприятны для машины с такой структурой памяти, какая реализована на машине «Сетунь».

С целью усовершенствования аппарата программирования машины разработано несколько вариантов интерпретирующих систем, которые осуществляют автоматизацию обмена информацией между магнитным барабаном и оперативной памятью, введение плавающей запятой использование стандартных подпрограмм. Основу одной из этих систем составляет интерпретирующая программа ИП-2 и соответствующая библиотека стандартных подпрограмм, в которой имеются подпрограммы для выполнения арифметических действий с плавающей запятой и подпрограммы для вычисления элементарных функций. В рамках этой системы магнитный барабан функционирует как оперативная память. Для указания местонахождения кодов на магнитном барабане вводятся обобщенные адреса (9-разрядные троичные коды), так что на барабане образуется сплошной массив ячеек памяти с последовательными адресами. Программа вычислений и информация, необходимая для ее работы, находятся на магнитном барабане. Оперативная память играет в

этой системе роль буферного запоминающего устройства, в которое вызывается для выполнения очередная часть (зона) программы и зона информации, необходимость в которой возникает в процессе вычислений. Кроме того, в оперативной памяти постоянно хранится основная часть интерпретирующей программы ИП-2.

Основная программа выполняется в режиме частичной интерпретации, а именно выполняются обычные машинные команды до тех пор, пока не возникает необходимость использовать обобщенные адреса (потребуется информация, хранящаяся в данный момент на магнитном барабане), обратиться к какой-либо стандартной подпрограмме или перейти к выполнению команды, расположенной в другой зоне основной программы; в этих случаях происходит обращение к ИП-2.

Интерпретирующая программа ИП-2 выполняет следующие функции:

- реализует обращение к стандартным подпрограммам, и в частности производит пересылку информации с одного места памяти на другое;
- производит передачу управления по обобщенному адресу (обобщенный переход);
- продолжает выполнение линейных (без передач управления) кусков программы при переходе от одной зоны программы к другой.

Интерпретирующая программа ИП-2 оперирует с числами, представленными в режиме с плавающей запятой с 18-разрядной мантиссой и 5-разрядным порядком. Такое представление чисел позволяет вести вычисления с восемью верными десятичными знаками в диапазоне от 10^{-19} до 10^{+19} .

В другом варианте интерпретирующей программы – ИП-3 – числа представлены более компактно: 13 разрядов – мантисса, 5 разрядов – порядок (каждое число помещается в длинной ячейке). Это представление чисел позволяет вести вычисления примерно с шестью верными десятичными знаками, в том же диапазоне от 10^{-19} до 10^{+19} . Система ИП-3 выполняет примерно те же функции, что и ранее рассмотренная система ИП-2.

Интерпретирующая система, являясь начальным шагом на пути создания системы математического обслуживания, значительно облегчает процесс программирования на машине «Сетунь», причем это достигается без заметного увеличения времени счета ввиду то-

го, что в этой системе производятся в большинстве случаев только существенно необходимые обращения к магнитному барабану, а интерпретация тех или иных псевдокоманд осуществляется, как правило, между такими обращениями к магнитному барабану, не вызывая значительного увеличения времени счета. Основные стандартные подпрограммы, как было Указано выше, успевают также выполняться за время одного оборота барабана.

Опыт использования этих интерпретирующих программ показывает, что, несмотря на замедление, вызываемое их работой, производительность машины удовлетворяет тем требованиям, которые первоначально были предъявлены к ней: При желании можно более эффективно использовать тот «запас» скорости, которым обладает машина «Сетунь». Подсчеты показывают, что средняя оперативная скорость работы машины с учетом обращений к магнитному барабану по крайней мере выше 800–900 операций в секунду. Например, при решении систем линейных алгебраических уравнений по указанной выше программе средняя оперативная скорость машины 1100÷1200 операций в секунду. При решении других задач (расчет характеристик нейтронного детектора методом Монте-Карло, расчет электронной плотности кристаллических структур, вычисление некоторых интегралов и другие) средняя оперативная скорость машины 2000÷4500 операций в секунду.

ТРЕХЗНАЧНАЯ МАЖОРИТАРНАЯ ЛОГИКА*

Рассматриваются вопросы построения трехзначных дискретных вычислительных и управляющих схем, построенных из трехзначных мажоритарных элементов. Показывается функциональная полнота трехместной мажоритарной функции и операции диаметрального отрицания в трехзначной логике. Предлагается метод синтеза схем и приводятся примеры синтеза. В качестве трехзначного мажоритарного элемента могут быть использованы трехстабильный параметрон, а также транзисторные схемы и схемы на туннельных диодах.

1. Введение

В последнее время неоднократно предпринимались попытки построения троичных вычислительных и управляющих схем. Преимущества последних перед двоичными не очевидны и, возможно, их вообще нет, хотя ниже мы постараемся показать, что, по крайней мере, для построения двоичных схем применение трехстабильных элементов может оказаться интересным.

Известно (см., например, [1]), что расстройкой контура можно перевести параметрон в трехстабильный режим. При выполнении ряда условий область существования трехстабильного режима становится достаточно широкой для устойчивой работы. В трехстабильном режиме параметрон может генерировать колебания в фазе с опорным сигналом, в противофазе с опорным сигналом и не возбуждаться в течение такта подачи напряжения подкачки. Колебания параметрона возникают только в случае подачи внешнего сигнала, фаза которого задает фазу выходного сигнала. Далее будем рассматривать параметрон, имеющий три входа, т. е. параметрон, фаза колебаний которого определяется фазой алгебраической суммы трех входных напряжений. В установившемся режиме амплитуда колебаний в контуре параметрона достаточно стабильна для того, чтобы считать, что сигнал имеет либо стандартную амплитуду A , либо 0 . Если состояние каждого канала, передающего информацию, зако-

* Текст печатается по изданию: В. И. Варшавский. Трехзначная мажоритарная логика // Автоматика и телемеханика. 1964. №5. Т. XXV. – (с. 673-684).

дировать переменной x , то этой переменной можно приписать следующие значения:

отсутствие колебаний, $x = 0$,

колебания в фазе 0, $x = +1$,

колебания в фазе π , $x = -1$.

Нетрудно заметить, что алгебраическое сложение значений переменных правильно отражает процесс суммирования сигналов. Очевидно также, что трехстабильный параметрон, имеющий три входа, реализует следующую трехместную операцию, которую далее будем называть трехзначной мажоритарной функцией

$$x \Delta y \Delta z = \begin{cases} +1, & \text{если } x + y + z \geq +1, \\ 0, & \text{если } x + y + z = 0, \\ -1, & \text{если } x + y + z \leq -1. \end{cases}$$

Простым переключением входной обмотки легко осуществляется операция диаметрального отрицания $\bar{x} = -x$

Простота указанных операций позволяет реализовать их довольно широким классом схем, к которым, очевидно, будут применимы полученные ниже результаты.

Указанных двух операций достаточно для построения любой функции трехзначной логики, и, следовательно, из трехзначных мажоритарных элементов может быть построена любая троичная истинностная схема (схема без памяти). Докажем это.

Теорема 1. Система функций $x \Delta y \Delta z$ и $\bar{x}$ функционально полна в трехзначной логике.

Доказательство. Для доказательства функциональной полноты достаточно показать, что функции

$$\text{макс}(x, y), \text{мин}(x, y) \text{ и } f_0(x) = \begin{cases} +1, & x = \sigma \\ -1, & x \neq \sigma \end{cases}$$

могут быть выражены через $x \Delta y \Delta z$ и $\bar{x}$ [2].

Заметим прежде всего, что $\text{мин}(x, y) = \overline{\text{макс}(\bar{x}, \bar{y})}$. Далее

$$f_{-1}(x) = \bar{x} \Delta x \Delta -1, f_{+1} = x \Delta x \Delta -1,$$

$$f_0 = f_{-1}(x) \Delta f_{+1}(x) \Delta -1$$

$$\text{макс}(x, y) = (x \Delta y \Delta -1) \Delta x \Delta 1$$

Справедливость этих выражений проверяется подстановкой, что и доказывает теорему.

2. Синтез пирамидальных схем

Для дальнейшего изложения удобно ввести ряд дополнительных обозначений. Функцию одной переменной будем иногда изображать в виде вектора-строки

$$\Phi(x) = \|\Phi(-1), \Phi(0), \Phi(+2)\|$$

а функцию двух переменных – в виде матрицы

$$\Phi(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} \Phi(-1, +1) & \Phi(0, +1) & \Phi(+1, +1) \\ \Phi(-1, 0) & \Phi(0, 0) & \Phi(+1, 0) \\ \Phi(-1, -1) & \Phi(0, -1) & \Phi(+1, -1) \end{vmatrix}$$

Применение базисных операций к вектору-строке или к матрицам сводится к применению этих операций к соответствующим элементам векторов и матриц. Так, например,

$$= \begin{vmatrix} \Phi_1(x_0) & \overline{\Delta \Phi_2(x_1)} \Delta & \Phi_3(x_0, x_1) = \\ \Phi_1(-1) & \overline{\Delta \Phi_2(1)} \Delta & \Phi_3(-1, 1) & \Phi_1(0) & \overline{\Delta \Phi_2(1)} \Delta & \Phi_1(0, 1) & \Phi_1(1) & \overline{\Delta \Phi_2(+1)} \Delta & \Phi_3(1, 1) \\ \Phi_1(-1) & \overline{\Delta \Phi_2(0)} \Delta & \Phi_3(-1, 0) & \Phi_1(0) & \overline{\Delta \Phi_2(0)} \Delta & \Phi_1(0, 0) & \Phi_1(1) & \overline{\Delta \Phi_2(0)} \Delta & \Phi_3(1, 0) \\ \Phi_1(-1) & \overline{\Delta \Phi_2(-1)} \Delta & \Phi_3(-1, -1) & \Phi_1(0) & \overline{\Delta \Phi_2(-1)} \Delta & \Phi_1(0, -1) & \Phi_1(1) & \overline{\Delta \Phi_2(-1)} \Delta & \Phi_3(1, -1) \end{vmatrix}$$

Определим вектор-константу $q = \| q, q, q \|$ и матрицу-константу

$$q = \begin{vmatrix} q & q & q \\ q & q & q \\ q & q & q \end{vmatrix} \quad (q = -, 0, +1)$$

Приведенные обозначения самостоятельного смысла не имеют и введены лишь для удобства дальнейшего изложения.

Рассмотрим теперь методы синтеза схем из трехзначных мажоритарных элементов.

Теорема 2. Любая функция трехзначной логики представима в виде

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = [x_0 \Delta x_0 \Phi(0, \dots, x_{n-1})] \Delta$$

$$\Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(-1, \dots, x_{n-1}) \Delta 1] \Delta x_0 \Delta 1 \} \Delta$$

$$\Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(+1, \dots, x_{n-1}) \Delta - 1] \Delta x_0 - \Delta 1 \}$$

Доказательство. Для краткости обозначим

$$\Phi(q, \dots, x_{n-1}) = \Phi(q), \bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Phi(0)$$

$$= \| +1 \Delta + 1 \Delta \Phi(0), 0 \Delta 0 \Delta \Phi(0), -1 \Delta - 1 \Delta \Phi(+1) \|$$

Так как

$$q \Delta q \Delta \Phi(0) = q \text{ при } q \neq 0,$$

$$\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta \Phi(0) = \| +1, \Phi(0), -1 \|$$

$$[x_0 \Delta \Phi(-1) \Delta 1] \Delta x_0 \Delta 1 = \| \Phi(-1), +1, +1 \|$$

$$[x_0 \Delta \Phi(+1) \Delta 1] \Delta x_0 \Delta - 1 = \| -1, -1, \Phi(+1) \|$$

Следовательно

$$[\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta \Phi(0)] \Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(-1) \Delta 1] \Delta x_0 \Delta 1 \} \Delta$$

$$\Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(+1) \Delta - 1] \Delta x_0 \Delta - 1 \} = \| \Phi(-1), \Phi(0), \Phi(+1) \| = \Phi(x_0, \dots, x_{n-1})$$

Что и требовалось доказать.

Замечание.

$$[\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta \Phi(0)] \Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(-1) \Delta 1] \Delta x_0 \Delta 1 \} \Delta$$

$$\Delta \{ [x_0 \Delta \Phi(+1) \Delta - 1] \Delta x_0 \Delta - 1 \} = [\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta \Phi(0)] \Delta$$

$$\Delta \{ [\bar{x}_0 \Delta \Phi(-1) \Delta - 1] \Delta \bar{x}_0 \Delta - 1 \} \Delta \{ [\bar{x}_0 \Delta \Phi(+1) \Delta - 1] \Delta x_0 \Delta - 1 \}$$

Теорема 2 дает метод синтеза последовательным исключением переменных. Такой метод обычно называют методом разложения по переменным, а соответствующие схемы – пирамидальными схемами.

Рассмотрим простой пример. Пусть функция двух переменных задана матрицей

$$y = \Phi(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$\Phi(-1, x_1) = \|-1, 0, +1\| = x_1, \Phi(+1, x_1) = \|+1, 0, -1\| = \bar{x}_1$$

$$\Phi(0, x_1) = \|0, +1, +1\| = x_1 \Delta 1 \Delta 0$$

Откуда

$$y = [\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta (x_1 \Delta 1 \Delta 0)] \Delta [(x_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta x_0 \Delta + 1] \Delta [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta x_0 \Delta - 1]$$

Заметим однако, что указанный метод не приводит к схемам с минимальным количеством оборудования. В рассмотренном примере разложение по переменной x_1 приводит к более сложной схеме. В то же время полученное в примере выражение может быть упрощено и приведено либо к виду

$$y = [\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_0 \Delta (x_1 \Delta 1 \Delta 0)] \Delta [(x_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta x_0 \Delta + 1] \Delta [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta x_0 \Delta - 1]$$

либо к виду

$$y = [(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta x_0 \Delta 1] \Delta (x_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta - 1$$

Справедливость полученных выражений легко проверяется подстановкой. В этой работе не будут рассматриваться вопросы минимизации схем; это должно стать темой самостоятельного исследования.

В некоторых случаях более эффективными являются разложения другого типа, которые определяются теоремой 3.

Теорема 3. Любая функция трехзначной логики представима в виде

А

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = & \{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1}] \Delta \\ & \Delta [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1}) \Delta x_0 \Delta \bar{x}_1] \Delta \\ & \Delta [[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1}] \Delta \\ & \Delta \{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta - 1\} \Delta \\ & \Delta \{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \Delta + 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta + 1\} \} \end{aligned}$$

Где

$$\Phi^k_{x_0 x_1} = \Phi[(x_1 + k)_{\text{mod } 3}, x_1, \dots, x_{n-1}]$$

Доказательство. Так как

$$x_1 = \|-1, 0, +1\|, (x_1 + 1)_{\text{mod } 3} = \|0, +1, -1\|$$

$$(x_1 - 1)_{mod 3} = \parallel +1, -1, 0 \parallel$$

То

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \left\| \begin{array}{ccc} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \end{array} \right\|$$

+

где $\Phi^k_{x_0 x_1}$ – функции, определенные в условии теоремы,

$$A = [(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_2 \Delta - 1) \Phi^{-1}_{x_0 x_1}] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \Delta \left\| \begin{array}{ccc} +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \left\| \begin{array}{ccc} +1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & = 1 \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$B = [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta \Phi^0_{x_0 x_1}) \Delta x_0 \Delta \bar{x}_1] = [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 0) \Delta (x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 0) \Delta \Phi^0_{x_0 x_1}] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \end{array} \right\| \Delta \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \end{array} \right\| \Delta \Phi^0_{x_0 x_1} \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ -1 & \Phi^0_{x_0 x_1} & +1 \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & +1 & +1 \end{array} \right\|$$

$$B = [(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1}] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \end{array} \right\| \Delta \left\| \begin{array}{ccc} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \end{array} \right\| \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \left\| \begin{array}{ccc} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ +1 & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & -1 \end{array} \right\|$$

и требовалось доказать.

$$A \Delta B \Delta B = \Gamma =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} +1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & -1 \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \Delta \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ -1 & \Phi^0_{x_0 x_1} & +1 \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & +1 & +1 \end{array} \right\| \Delta$$

$$\Delta \left\| \begin{array}{ccc} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ +1 & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & -1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} +1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & -1 \end{array} \right\|$$

$$D = [(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1] = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{array} \right\| \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1 =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1 \Delta 0 \\ -1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1 \Delta 0 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \end{array} \right\|$$

$$E = D \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta - 1 = \left\| \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1 \Delta 0 \\ -1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta - 1 \Delta 0 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \end{array} \right\| \Delta$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} \Delta - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \end{vmatrix} \\
& \mathcal{K} = [(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \Delta - 1] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \Delta 1 = \\
& = \begin{vmatrix} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta 1 \Delta 0 & +1 \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \Delta 1 \Delta 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \\
& \mathcal{H} = \mathcal{K} = \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta 1 = \begin{vmatrix} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \Delta 1 \Delta 0 & +1 \\ \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \Delta 1 \Delta 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \Delta \\
& \Delta \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \Delta 1 = \begin{vmatrix} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} \\
& \Gamma \Delta \mathcal{E} \Delta \mathcal{H} = \begin{vmatrix} +1 & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & -1 \end{vmatrix} \Delta \begin{vmatrix} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} \\ \Phi^{-1}_{x_0 x_1} & \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} \\ \Phi^0_{x_0 x_1} & \Phi^{+1}_{x_0 x_1} & \Phi^{-1}_{x_0 x_1} \end{vmatrix} = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать

Добавления к теореме 3. Теорема 3 имеет несколько видоизменений, которые в некоторых случаях позволяют получать более простые реализации.

Первый случай:

$$\begin{aligned}
& \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \{[(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 \bar{x}_1}] \Delta \\
& \Delta [(x_0 \Delta x_1 \Delta \Phi^0_{x_0 \bar{x}_1}) \Delta x_0 \Delta x_1] \Delta \\
& \Delta [(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{-1}_{x_0 x_1}] \Delta \\
& \Delta [(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 \bar{x}_1} \Delta 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta 1 \Delta \\
& \Delta [(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta \Phi^{-1}_{x_0 \bar{x}_1} \Delta - 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta - 1 \Delta \}
\end{aligned}$$

Где $\Phi^k_{x_0 \bar{x}_1} = \Phi[(x_1 + \bar{k})_{\text{mod } 3} \ x_1, \dots, x_{n-1}]$ и матричное представление имеет вид

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \Phi^0_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^{+1}_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^{-1}_{x_0 \bar{x}_1} \\ \Phi^{-1}_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^0_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^{+1}_{x_0 \bar{x}_1} \\ \Phi^{+1}_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^0_{x_0 \bar{x}_1} & \Phi^0_{x_0 \bar{x}_1} \end{vmatrix}$$

Второй случай:

$$\begin{aligned}
& \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta 1) \Delta \Phi^{+1}_{x_0 x_1} (+1)] \Delta \\
& \Delta [(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta \Phi^0_{x_0 x_1}) \Delta x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta] \Delta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta \Phi_{x_0 x_1}^{-1} - (-1)] \Delta \\ & \Delta\{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta \Phi(-1, +1) \Delta 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta 1\} \Delta \\ & \Delta\{[(\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta + 1) \Delta \Phi(+1, -1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta + 1) \Delta - 1]\}, \end{aligned}$$

Где $\Phi_{x_0 x_1}^k(q) = \Phi[(x_1 + k)_{mod 3}, x_1, \dots, x_{n-1}]$ произвольно определенная при $x_1 = q$ $\Phi(-1, +1)$ функция, полученная из $\Phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ при $x_0 = -1$ и $x_1 = +1$; $\Phi(+1, -1)$ функции, получения $\Phi = (x_0, \dots, x_{n-1})$ при $x_0 = +1$ и $x_1 = -1$.

Матричное представление при этом имеет вид

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \Phi(-1, +1) & \Phi_{x_0 x_1}^{-1}(-1) & \Phi_{x_0 x_1}^0 \\ \Phi_{x_0 x_1}^{-1}(-1) & \Phi_{x_0 x_1}^0 & \Phi_{x_0 x_1}^{+1}(+1) \\ \Phi_{x_0 x_1}^0 & \Phi_{x_0 x_1}^{+1}(+1) & \Phi(+1, -1) \end{vmatrix}$$

Третий случай:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = & \{[(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{+1}(-1)] \Delta \\ & \Delta[(x_0 \Delta x_1 \Delta \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^0) \Delta x_0 \Delta x_1] \Delta \\ & \Delta[(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{-1}(+1)] \Delta \\ & \Delta\{[(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta \Phi(-1, -1) \Delta 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta 1\} \Delta \\ & \Delta\{[(\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta \Phi(+1, +1) \Delta - 1] \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta - 1\} \end{aligned}$$

Обозначения аналогичны п.2. Матричное представление имеет вид

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^0 & \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{+1}(-1) & \Phi(+1, +1) \\ \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{-1}(+1) & \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^0 & \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{+1}(-1) \\ \Phi(-1, -1) & \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^{-1} & \Phi_{x_0 \bar{x}_1}^0 \end{vmatrix}$$

Доказательства дополнительной аналогии доказательству основного случая теоремы.

Применение теоремы 3 рассмотрим на примере синтеза полного троичного однообразного сумматора. Работа сумматора задана табл. 1, в которой x_0 и x_1 значения слагаемых в данном разделе, p – значение переноса из предыдущего разряда, C – значение суммы в данном разряде и P – перенос в следующий разряд

Заметим, что так как $C = (x_0 + x_1 + p)_{mod 3}$, то

$$C_{x_0 \bar{x}_1}^0 = (\bar{x}_1 + x_1 + p)_{mod 3} = p$$

Таблица 1

x_0-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1-1	0+1
x_1-1	-1-1-1	0	0	0+1+1+1-1-1-1	0	0	0+1+1+1-1-1-1	0	0	0+1+1+1+1
$p-1$	-1-1-1-1-1-1-1-1-1	0	0	0	0	0	0	0	0+1+1+1+1+1+1+1+1	
C	0+1-1+1-1	0-1	0+1+1-1	0-1	0+1	0+1-1-1	0+1	0+1-1+1-1	0	
$P-1$	-1	0-1	0	0	0	0-1	0	0	0	0+1

$$C_{x_0 \bar{x}_1}^{+1} = (\bar{x}_1 + 1 + x_1 + p)_{mod 3} = (p + 1)_{mod 3} = \|0, +1, -1\|$$

$$= (p\Delta 1\Delta 0)\Delta(\bar{p}\Delta\bar{p}\Delta 1)\Delta - 1$$

$$C_{x_0 \bar{x}_1}^{-1} = (\bar{x}_1 - 1 + x_1 + p)_{mod 3} = (p - 1)_{mod 3} = \|-1, -1, 0\|$$

$$= (p\Delta - 1\Delta 0)\Delta(\bar{p}\Delta\bar{p}\Delta - 1)\Delta 1$$

Следовательно, в соответствии с первым случаем дополнения к теореме 3 окончательно имеем

$$C = \{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta(p + 1)_{mod 3}]\Delta[(x_0\Delta x_1\Delta p)\Delta x_0\Delta x_1]\Delta$$

$$\Delta[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta(p - 1)_{mod 3}]\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta(p + 1)_{mod 3}\Delta 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta 1\}\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta(p - 1)_{mod 3}\Delta - 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta + 1)\Delta - 1\}$$

Из табл.1 определяем

$$P_{x_0 \bar{x}_1}^0 = 0, P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1} = \begin{vmatrix} 0 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, P_{x_0 \bar{x}_1}^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Где $P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1} = \psi_1(x_1, p)$ и $P_{x_0 \bar{x}_1}^{-1} = \psi_1(x_2, p)$

Таблица 1

Используя третий случай дополнения к теореме 3, имеем

$$P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1} = \{[(\bar{x}_1\Delta\bar{p}\Delta 1)\Delta(\bar{x}_1\Delta p\Delta 1)\Delta p]\Delta[(x_1\Delta\bar{p}\Delta 0)\Delta x_1\Delta p]\Delta$$

$$\Delta[(\bar{x}_0\Delta\bar{p}\Delta - 1)\Delta(\bar{x}_1\Delta\bar{p}\Delta - 1)\Delta(p + 1)_{mod 3}]\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{p}\Delta - 1)\Delta - 1\Delta + 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{p}\Delta - 1)\Delta 1\}\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{p}\Delta 1)\Delta 1\Delta - 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{p}\Delta + 1)\Delta - 1\}$$

Очевидные упрощения дают

$$P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1} = \{[(x_1\Delta p\Delta - 1)\Delta(x_1\Delta p\Delta - 1)\Delta p]\Delta(\bar{x}_1\Delta\bar{p}\Delta 0)\Delta$$

$$\Delta[(x_1\Delta p\Delta + 1)\Delta[(x_1\Delta p\Delta + 1)\Delta(p + 1)_{mod 3}]]$$

Аналогично

$$P_{x_0 \bar{x}_1}^{-1} = [(x_1\Delta p\Delta - 1)\Delta(x_1\Delta p\Delta - 1)\Delta(p + 1)_{mod 3}p]\Delta(x_1\Delta\bar{p}\Delta 0)\Delta$$

$$\Delta[(x_1\Delta p\Delta + 1)\Delta[(x_1\Delta p\Delta + 1)\Delta p]]$$

откуда

$$P = \{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1}]\Delta[(x_0\Delta x_1\Delta 0)\Delta$$

$$\Delta[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta P_{x_0 \bar{x}_1}^{-1}]\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta P_{x_0 \bar{x}_1}^{+1}\Delta 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta - 1)\Delta 1\}\Delta$$

$$\Delta\{[(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta P_{x_0 \bar{x}_1}^{-1}\Delta - 1]\Delta(\bar{x}_0\Delta\bar{x}_1\Delta 1)\Delta - 1\}$$

Так как в формуле для $C = (x_0 \Delta x_1 \Delta p) \Delta x_0 \Delta x_1 = [(x_0 \Delta x_1 \Delta 0) \Delta (x_0 \Delta x_1 \Delta 0) \Delta p]$ учетом использования выхода одного элемента для входа на нескольких схема содержит 32 мажоритарных элемента, не считая синхронизирующих задержек.

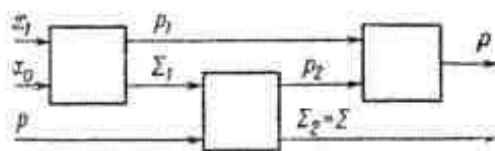


Рис. 1

Как уже указывалось выше, предлагаемые методы синтеза не дают оптимальных по числу элементов схем. Это хорошо видно на примере сумматора, для которого может быть построена схема из 15 мажоритарных элементов и восьми визирующих задержек (три из которых могут отсутствовать в конкретных схемах).

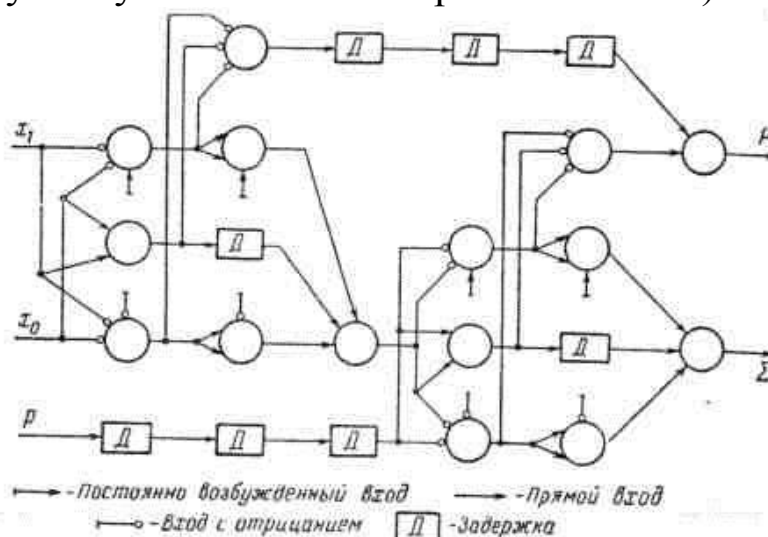


Рис. 2

Такая схема получается, если рассматривать сумматор, построенный из полусумматоров (рис. 1). В этом случае

$$P_1 = (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta -1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta -1) \Delta -1 \Delta (x_0 \Delta x_1 \Delta 0)$$

$$P_1 = (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta -1) \Delta (x_0 \Delta x_1 \Delta 0)$$

$$\Sigma_2 = \Sigma = [(\bar{p} \Delta \bar{\Sigma}_1 \Delta 1) \Delta 1] \Delta$$

$$\Delta [(\bar{p} \Delta \bar{\Sigma}_1 \Delta -1) \Delta (\bar{p} \Delta \bar{\Sigma}_1 \Delta -1) \Delta -1] \Delta (p \Delta \Sigma_1 \Delta 1) \Delta$$

$$P_2 = (\bar{p} \Delta \bar{\Sigma}_1 \Delta 1) \Delta (\bar{p} \Delta \bar{\Sigma}_1 \Delta -1) \Delta (p \Delta \Sigma_1 \Delta 1), P = P_1 \Delta P_2 \Delta 0$$

Соответствующая схема приведена на рис. 2.

3. Троичные дешифраторы

Теоремы 2 и 3 дают метод синтеза одновыходных схем. Рассмотрим теперь возможные схемы построения дешифраторов, т. е. так называемых прямоугольных схем. В классе трехзначных схем может быть построено несколько типов дешифраторов.

Дешифратор первого типа имеет n входов и 3^n выходов. Каждому из 3^n наборов значений входных переменных соответствует выход, на котором сигнал равен $+1$, когда на вход дешифратора подается соответствующая комбинация входных переменных, в то время как на всех остальных выходах сигнал равен -1 .

Дешифратор второго типа имеет n входов и 3^n выходов. В зависимости от комбинации входных сигналов на одном из выходов появляется сигнал $+1$, в то время как на всех остальных выходах значение сигнала равно 0 .

Дешифратор третьего типа имеет n входов x_j , один вход y и 3^n выходов. В зависимости от комбинации значений входных сигналов x_j на одном из выходов появляется сигнал y , в то время как на всех остальных выходах значение сигнала равно $\bar{y}$ для первой разновидности и 0 – для второй.

Имеется еще несколько типов шифраторов, интересных в практических приложениях, но здесь они рассматриваться не будут.

Рассмотрим возможный способ построения дешифратора первого типа. Пусть дешифратор имеет два входа и девять выходов. Тогда функция $f_{\sigma_0}(x_0)\Delta f_{\sigma_1}(x_1)\Delta - 1$ равна $+1$, если $x_0 = \sigma_0$ и $(x_1) = \sigma_1$ во всех остальных случаях эта функция равна -1 . Следовательно, для построения дешифратора 2X9 необходимо подать на матрицу шесть функции $f_{\sigma}(x)$, как это показано на рис. 3.

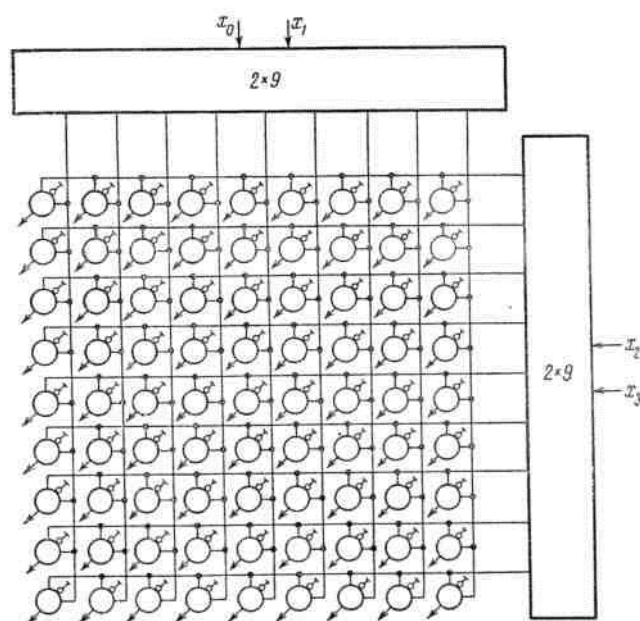
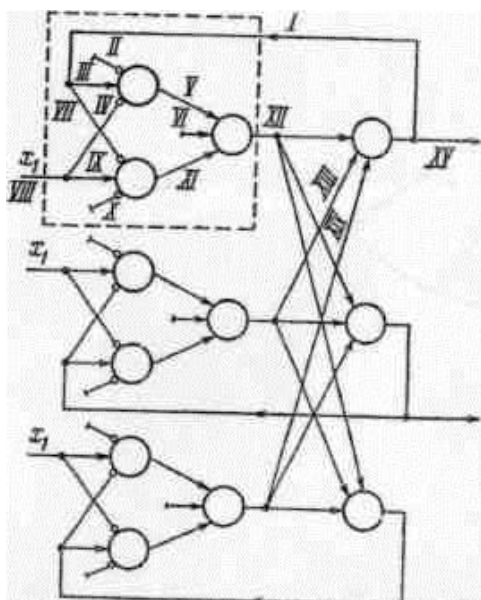


Рис. 4

На рис 4 приведена схема дешифратора на четыре входа и 81 выход. Дешифратор имеет две ступени. Выходы снимаются с элементов матрицы 9×9 , входами которой являются выходы дешифраторов 2×9 . Вообще, указанный метод позволяет строить дешифраторы только многоступенчатыми, т.е. выходами матрицы дешифратора $k \times 3^k$ являются выходы дешифраторов $k/2 \times 3^{k/2}$, если k – нечетное. При нечетном k требуется коррекция по времени.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	1 0
3^n	9	27	81	243	729	2341	7023	21069	63207
$N_{\text{маж}}$	15	45	111	303	819	2497	7245	21483	63813
$N_{\text{зад}}$	4	7	8	13	14	15	16	25	26
$N_{\text{общ}}$	19	52	119	316	833	2512	7261	21508	63839
$N_{\text{общ}}/3^n$	2,(1)	1,93	1,35	1,30	1,14	1,08	1,03	1,02	1,01
$t_{\text{обр}}$	3	4		4	5	5	5	6	6



При таком подходе к построению дешифратора число мажоритарных элементов и элементов задержки зависит от числа входов так, как указано в табл. 2.

В табл. 2 число приведено также среднее число элементов на один выход и время обработки информации дешифратором в тактах, т. е. глубина схемы дешифратора.

Для построения дешифратора второго типа каждый выход соответствующего дешифратора первого типа z_j ($-(3^n - 1)/2 \leq j \leq (3^n - 1)/2$) преобразуется мажоритарным элементом $z_j = (z_j \Delta 1 \Delta 0)$. При этом, естественно, число элементов дешифратора увеличивается на 3^n элемента.

Если вместо переменных x_j на дешифратор первого типа подавать сигнал $x_j = \bar{y} \Delta (y \Delta \bar{x}_j \Delta 1) \Delta (y \Delta x_j \Delta - 1)$ и вместо всех постоянно запитанных входов подавать сигнал y (учитывая инверсные входы), то получается дешифратор третьего типа первой разновидности. Аналогичная операция, примененная к входам дешифратора второго типа, преобразует его в дешифратор третьего типа второй разновидности. При этом число мажоритарных элементов увеличивается на $3n$ и число элементов задержки на n , не считая усилителей мощности для сигнала y , число которых зависит от коэффициента усиления элемента по мощности.

В заключение автор выражает благодарность С. В. Яблонскому и М. Л. Цетлину, убедившим автора воздержаться от публикации первого варианта статьи, Н. Г. Болдыреву за большое внимание к этой работе и ряд ценных советов, а также И.Н. Боголюбову и Б.Л. Овсиевичу, которые внимательно работу в рукописи и сделали ряд

полезных замечаний чья работа над созданием трехстабильных параметронных схем во многом стимулировала эту статью.

Приложение 1

Использование троичных мажоритарных элементов в двоичных схемах

Приведем два примера использования троичных мажоритарных элементов в двоичных схемах. На рис. 5 приведена схема двоичного триггера с использованием трехканального дублирования и элементов «проверки на большинство». Эта схема достаточно хорошо известна. Схема рис. 5 продолжает работать правильно при выводе из строя любого одного элемента или любой одной связи.

Посмотрим, что произойдет, если в схеме рис. 5 заменить двоичные мажоритарные элементы троичными. В этом случае сигнал в схеме может принимать три значения: -1 , 0 , $+1$. Тогда элемент «проверки на большинство» дает правильный отчет в трех случаях: когда все три элементарные схемы работают правильно; когда одна элементарная схема выдает неверный ответ, отличный от нуля, а две других работают правильно, и, наконец, когда две элементарные схемы выдают нулевой отчет, а третья работает правильно. Возможность возникновения третьего случая в трехстабильных схемах позволяет повысить надежность схемы рис. 5 относительно нарушений типа «обрыв», которые являются одним из наиболее распространенных типов нарушений, так как нарушения типа «короткого замыкания» часто эквиваленты «обрыву», как, например, в случае замыкания на «землю».

Рассмотрим поведение элементарной схемы на рис. 5 (она обведена пунктиром). Схема имеет И связей, следовательно, могут возникнуть 15 различных обрывов.

Обрыв связи I переводит уравнение исходной схемы

$$(x_0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta (\bar{x}_0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta 1 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix}$$

уравнение поврежденной схемы

$$(0 \Delta \bar{x}_1 \Delta - 1) \Delta (0 \Delta x_1 \Delta - 1) \Delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Т.е. при неповрежденном проводе VIII схема выдает сигнал 0.

Выпишем матрицы для всех повреждений:

$$\begin{array}{l}
\text{Связь VIII } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ обрыв подачи опорной фазы на схему} \\
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\text{Связь II } \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \end{vmatrix}, \text{ связь III } \begin{vmatrix} +1 & + & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ связь IV} \\
\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
\text{Связь V } \begin{vmatrix} +1 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ связь VI } \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ связь VII} \\
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \end{vmatrix} \\
\text{Связь IX } \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix}, \text{ связь X } \begin{vmatrix} +1 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix}, \text{ связь XI} \\
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \end{vmatrix}
\end{array}$$

Таким образом, при любом обрыве одной из связей схема на двузначный сигнал (принимающий значения -1 , $+1$) реагирует либо правильно, либо выдает сигнал 0 . Учитывая, что выход из строя любых двух из трех связей, XII, XIII, XIV не нарушает работу схемы, можно утверждать, что при «обрыве» любых двух связей схема рис. 5 будет работать правильно (выход элемента из строя эквивалентен нарушению связи от него к другим элементам). Заметим, что при выходе из строя трех связей схема будет выдавать на выход либо правильный сигнал, либо сигнал 0 , который может служить индикатором ошибки, т. е. схема на рис. 5 «исправляет два и обнаруживает три» обрыва при использовании трехстабильных элементов и «исправляет один обрыв» при использовании двухстабильного элемента. В случае использования параметронов, как указывалось выше, переход к трехстабильному режиму достигается расстройкой выходного контура параметрона, и при подобном использовании некоторая неустойчивость трехстабильного режима не страшна.

Эффективность указанного подхода может быть повышена, если специально синтезировать трехзначные схемы, выдающие 0 при заданном числе обрывов.

Второй пример связан с использованием кодов с исправлением и обнаружением ошибки. Использование трехзначных приемников в двузначных схемах позволяет на единицу увеличить расстояние между кодами по отношению к ошибок типа «обрыв». Так, при передаче когда с обнаружением одной ошибки, трехзначные приемник может исправить ошибку типа «обрыв». Этим вопросам предполагается посвятить специальную работу. Здесь эти примеры приведены с целью продемонстрировать полезность трехзначного подхода, по крайней мере, в двузначных схемах.

Цитированная литература

1. Параметрон. Сб. статей. Пер. с японск. и англ. Изд-во иностр. литер., 1962.
2. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике тр. матем. ин-та АН СССР, т. 51, 1957.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

НЕЙМАРК Ю.И.

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ*

Нижегородский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В предыдущей статье [1] я говорил о математике как об операционной системе и моделях. Сейчас я постараюсь рассказать о замечательных простых математических моделях очень сложных интеллектуальных способностей человека, моделях, которые послужили основой и трамплином для бурного триумфального шествия нового раздела науки – распознавания образов. В 1957 году в новой, только в 1948 году провозглашенной Н. Винером науке кибернетике произошло ошеломляющее, получившее благодаря журналистам широкую огласку, событие: демонстрация устройства со звучным названием персептрон [2, 3]. Персептрон распознавал (узнавал, различал, опознавал) зрительные образы и обучался этому распознаванию. Он мог узнавать новые образы, если его, как и нас, людей, этому учили путем показов. Ранее казалось, что такое умение – бесспорная прерогатива человека, что только человек с его высоким интеллектом способен к обобщению и формированию абстрактного понятия образа, только он это может и только его можно этому научить. Оказалось, что это может делать устройство, бездушная машина.

Персептрон имел не только звучное название, он был на вид прост и загадочен. Его создал Розенблатт, физиолог по профессии, исходя из современных ему представлений о конструкции мозга [4], связей между слоями его нервных клеток и о самих нервных клетках, исходя из того, что он сам назвал принципами нейродинамики [5]. Персептрон имел фасетчатый глаз, как у стрекозы, состоящий из десяти тысяч фотоэлементов. Далее шел ящик с лампочками, от-

* Текст печатается по изданию: Ю.И. Неймарк. Многомерная геометрия и распознавание образов//Соросовский образовательный журнал. 1996..№7. – (с.119-123)// Сайт «Соросовский образовательный журнал».

вещающими на показ, и кнопками для сообщения ему, что показывают при обучении, состоящем в указаниях, правильно ли он, персептрон, распознает то, что ему показывают. Что внутри ящика, не видно, ящик черный, как в игре “Что? Где? Когда?”.

Но вскоре содержимое ящика стало понятным, и сотни групп ученых во всем мире стали экспериментировать с персептронами. Уже в начале 60-х годов в нашей стране применили машинное распознавание образов к опознанию нефтеносной местности, местности, в недрах которой скрыта нефть. Затем с помощью ЭВМ начали распознавать болезни человека и делать это подчас лучше, чем сам человек. ЭВМ научилась “читать” печатный и даже рукописный текст и воспринимать текст с голоса, обнаруживать неисправности, предсказывать аварийные ситуации и многое, многое другое.

Отдельный конкретный стул мы можем в деталях описать и научить ЭВМ по этому описанию его узнавать. Но как научить ЭВМ узнавать любой стул, в том числе и тот, которого мы сами не видели, то есть каким образом описать образ “стул”? Стул предназначен для сидения, имеет ножки и спинку. Но что значит для ЭВМ: “предназначен для сидения, ножка и спинка”? Это столь же неясно, как и то, что такое сам стул.

Итак, что такое “объект”, что такое “образ” и как можно ЭВМ научить “распознаванию образов”, как можно распознавание использовать для перечисленных выше вопросов? Могущество математики состоит в том, что ответы на эти вопросы могут быть получены, если найдены соответствующие этим вопросам математические модели, то есть математические модели объекта, образа, распознавания и обучения распознаванию. Как только такие модели станут общим достоянием, ЭВМ будут распознавать не хуже, а может быть, и лучше человека. Приложения, и самые разнообразные, посыплются, как горох из мешка, причем не только ожидаемые, но и совершенно неожиданные. Ведь персептрон распознавал зрительные образы, а затем ЭВМ ставила диагнозы болезням, находила скрытые неисправности и осуществляла геологическую разведку.

Кажется, что построить эти математические модели невозможно и уж, во всяком случае, очень трудно. Будущий врач учится полжизни, чтобы верно ставить диагнозы заболеваний, только талантливый химик догадывается о свойствах вещества по его структурной химической формуле, а мы хотим, чтобы это делали ЭВМ. Конечно, трудно, даже очень трудно, потому что эти модели суще-

ственно новые, отличные от привычных нам уравнений, и мы еще не знаем, как их построить. Нужен взлет, скачок мысли, и он был бы невозможен, не обладай человек изобретением своего воображения, называемым многомерным пространством. Изобретением потому, что многомерного геометрического пространства нет в природе, его изобрел математик. Изобрести это многомерное пространство в связи с моделированием распознавания образов очень маловероятно, пожалуй, невозможно. Идеи многомерного пространства высказывались еще в XVIII веке И. Кантом и Ж. Д'Аламбером, а многомерная геометрия построена А. Кэли, Г. Грассманом и Л. Шлефли в прошлом веке. После этого первоначальные сомнения и связанная с ними мистика были преодолены, и многомерное пространство стало плодотворным математическим понятием. Многомерное пространство такое же, как наше трехмерное, но только у него не три координатных оси, а много, любое число n . Представить его в нашем трехмерном пространстве нельзя, но вообразить можно: n осей координат $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$, каждая точка x имеет n координат $x_1, x_2, \dots, x_n$; плоскость, точнее гиперплоскость, делит все пространство на две части; через любые две точки можно провести единственную прямую; конечный отрезок прямой имеет длину и т.д. Для физиков уже давно стало привычным рабочим инструментом четырехмерное пространство с тремя пространственными координатами и четвертой – временем. Говорят, наш замечательный геометр Делоне легко представлял себе четырехмерное пространство так же, как мы трехмерное, и мог в нем производить геометрические построения. В конце концов, мы же изображаем наше трехмерное пространство на двумерных картинах, рисунках и чертежах.

Но вернемся к математическим моделям. Мне очень трудно перед Вами хитрить, ведь я знаю эти модели, и они просты, как дважды два – четыре. Помогают мне хитрить только прошлые воспоминания, когда они были неизвестны и всем казались недостижимыми и загадочными. Чувство удивления и затем восхищения не прошли для меня даром: я занялся разработкой и применением идей распознавания образов в медицине. В 1972 году вышла книга “Распознавание образов и медицинская диагностика” [6], плод труда и энтузиазма математиков, врачей и инженеров. Сейчас возросшие возможности персональных ЭВМ побудили нас на основе приобретенного опыта к разработке самообучающегося, автоматизированного консультанта врача в постановке диагноза, прогноза течения

болезни, показанности оперативных вмешательств, выборе метода лечения и др. [7]. Естественно, что мне хочется, чтобы сейчас эти же чувства удивления и восхищения посетили и Вас. Итак, требуется описать на математическом языке, то есть построить, математические модели объекта, образа, распознавания и обучения.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ

Что такое изображение? Для простоты черно-белое, такое, как в газете, полученное путем нанесения или не нанесения на бумагу в определенных ее местах черных точек. Перенумеруем от 1 до n все места, где можно ставить черные точки. В s -м месте может стоять или не стоять черная точка, это опишем тем, что $x_s = 1$ или, соответственно, $x_s = 0$. В результате любое изображение описывается последовательностью чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Аналогично сетчатка нашего глаза, состоящая из колбочек и палочек, воспринимает любое изображение как некоторую последовательность чисел. Еще отчетливей это для фасетчатого глаза стрекозы. Теперь введем n -мерное пространство X с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Любое изображение представляется в нем некоторой точкой x . Если бы изображение состояло только из трех черных и белых точек, то пространство X и точку – изображение x можно было бы наглядно нарисовать. Но координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ тысячи и сотни тысяч. Ну и что? Изобразим его так же, только с n осями и такой же точкой x – изображением. Таким образом, конкретный объект-рисунок – это точка x в многомерном пространстве X всевозможных рисунков.

А что такое образ? Это обобщенное представление обо всех его конкретных изображениях или нечто объемлющее все эти изображения, то есть множество точек x в многомерном пространстве X , соответствующих всем этим изображениям. Будем мыслить это множество точек в виде некоторого облака, назвав его, например, A (рис. 1). Другому образу будет отвечать другое облако, пусть B . Например, A – всевозможные стулья, а B – ведра.

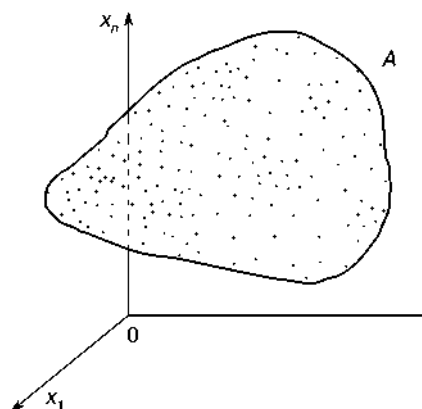


Рис. 1.

Таким образом, строятся математические модели конкретного изображения и множества изображений, составляющих образы. Теперь мы можем ответить на вопрос “что такое распознавание образов?” Это умение выяснить, к какому из облаков A или B принадлежит точка x , отвечающая показываемому изображению – объекту. Как узнать, лежит ли точка x в облаке A или B ? Ведь нарисовать на самом деле их нельзя, и пространство X воображаемое, воображаемые и облака A и B в нем, да и точка x тоже, но сделать это все же можно, например, так. Разделим облака A и B гиперплоскостью или, если не выходит, гиперповерхностью S (рис. 2). С одной ее стороны облако A , с другой – B . Как это сделать? Фантазия? Вот и нет! Гиперповерхность S – это множество точек, на которых “зануляется” некоторая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. С одной стороны поверхности S $f > 0$, с другой $f < 0$. Так что, например, $x \in A$, если $f < 0$, и $x \in B$, если $f > 0$. Это не единственный способ, но он очень хороший и дает нам определенную математическую модель различия, распознавания образов. Надо только еще научиться находить эту поверхность S и ее уравнение

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

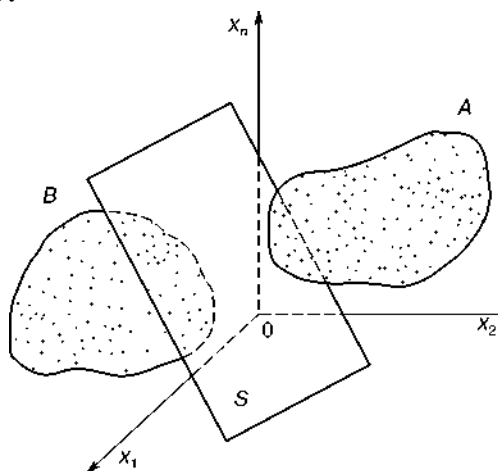


Рис. 2.

Ясно, что найти эту поверхность можно, только “показывая” точки облаков A и B . Показать сразу все облако A или B мы не мо-

жем, они воображаемые, и точек в них может быть слишком много. Но показать не очень большие количества точек множеств облаков A и B можно, просто перечислив их.

Теперь можно сформулировать, в чем состоит модель обучения распознаванию образов. Это нахождение разделяющей поверхности S по конечным ограниченным показам точек облаков A и B . (Все время речь шла о распознавании двух образов, но, умея распознать два, нетрудно распознать любое их конечное число. Достаточно, например, каждое из множеств отличать от всех остальных. Это не лучший способ, даже плохой, и можно придумать лучший, при котором разделяющих поверхностей требуется много меньше.)

Наша цель достигнута: построены математические модели объекта (изображения), образа, распознавания образов и обучения распознаванию образов. Но все же, как конкретно находить требуемую разделяющую поверхность, мы не знаем. Тут возможны разные способы, но прежде давайте немного осмыслим полученные математические модели. Математические модели – это описания на абстрактном математическом языке. Куда уж дальше? Модели не только абстрактные, но и фантастические, воображаемые. Но это не плохо, а, оказывается, очень хорошо. Хорошо потому, что под эти модели подходят не только зрительные объекты, но и звуковые, обонятельные и осязательные, и те представления об объектах, которые дают не только наши органы чувств, но и приборы, проще, всё, что может быть описано или, как говорят, закодировано числами, а числами может быть закодировано все, что можно описать словами и любыми значками, то есть всё, что мы можем знать. Такова всеобъемлющая мощь этих математических моделей. Нужен диагноз болезни – пожалуйста, только опишите больного и дайте достаточно случаев этой болезни, которые я использую как представителей ее образа. Нужно узнать, есть ли в глубине земли золото, – пожалуйста; в чем неисправность машин – пожалуйста; не раковая ли это клетка – пожалуйста; чей это почерк – пожалуйста; не жулик ли этот человек – пожалуйста; будет ли этот человек хорошим водителем автомобиля – пожалуйста; какие свойства у еще не полученного химического вещества – пожалуйста ... Такова необычайная широта приложений математических моделей распознавания образов.

Теперь, я думаю, Вы готовы узнать, как же найти разделяющую поверхность, во всяком случае, важность этого Вам ясна.

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ

Выше были описаны математические модели объекта и образа. Объект – это точка многомерного пространства его признаков, образ – это множество, облако таких точек. Распознавать образы – это указывать, к какому из облаков-образов принадлежит заданная точка. Обучение показами – это когда предъявляются какие-то точки x и указывается, к какому из множеств-образов они принадлежат, а в результате вырабатывается способность определять, к какому из множеств-образов принадлежит новая, в том числе и ранее не показываемая, точка.

Перейдем теперь к вопросу о том, как осуществить обучение показами, с помощью какого алгоритма его достигнуть. Как уже говорилось, этого можно достигнуть путем построения разделяющей поверхности. Но как ее найти? Об этом и пойдет речь. Будем искать, например, разделяющую поверхность в виде

$$f(x, a) = a_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_m \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

где x – точка многомерного пространства X с координатами-признаками $x_1, \dots, x_n$, а $a_1, \dots, a_n$ – неизвестные параметры, которые мы хотим подобрать так, чтобы она была искомой разделяющей, то есть чтобы для всех точек $x \in A$ $f(x, a) < 0$, а для всех $x \in B$ $f(x, a) > 0$. Функции $\varphi_s(x_1, \dots, x_n)$ известны и подобраны так, что мы можем надеяться найти требуемую разделяющую поверхность. Согласно сказанному, искомые значения $a_1^*, a_2^*, \dots, a_m^*$ параметров можно найти из системы неравенств

$$f(x, a^*) < 0 \text{ при } x \in A,$$

$$f(x, a^*) > 0 \text{ при } x \in B.$$

Ясная математическая задача поставлена. Однако как ее решить? Точек x очень много, все не перечислишь, параметров a_s также не мало. Персептрон Розенблатта делал это следующим образом. Возьмем произвольные начальные значения параметров a_s , $s = 1, 2, \dots, m$, и будем последовательно показывать точки множеств-облаков A и B , указывая каждый раз с помощью величины ξ , к какому из образов

A или B она принадлежит. Если $\xi = -1$, то показываемое x принадлежит A , если $\xi = +1$, то $x \in B$. При этих показах одновременно выясняется, а верно ли, в соответствии с условиями (3), распознает объект x персептрон. Если верно, его не трогают. Если неверно, меняют параметры a_s в соответствии с формулами

$$\bar{a}_s = a_s + \xi \varphi_s(x_1, \dots, x_n), s = 1, 2, \dots, m$$

Дальше за параметры персептрона a_s принимают a_s и показывают следующий объект, и опять либо не меняют, либо меняют параметры согласно формулам (4). Процесс очень простой и смысл его тоже, так как при каждой ошибке неверное значение функции $f(x, a)$ за счет изменения параметров становится “менее” неверным. Именно:

$$f(x, a) \leftarrow f(x, a) = \sum (a_s + \xi \varphi_s(x)) \varphi_s(x) = f(x, a) + \xi \sum \varphi_s^2(x).$$

Поэтому, если $f(x, a) > 0$ и $\xi = -1$ ($x \in A$), то $f(x, \bar{a}) < f(x, a)$, а если $f(x, a) < 0$ и $\xi = 1$ ($x \in B$), то $f(x, \bar{a}) > f(x, a)$. Трудно поверить, что такой простой алгоритм ведет к цели, но это так при весьма общих условиях и, самое важное, удачности выбора общего вида (2) разделяющей функции $f(x, a)$. Удачность означает принципиальную разрешимость с запасом неравенств (3). С запасом – это значит, они выполняются не только для некоторого a^* , но и всех a , достаточно близких к a^* .

Достигаемая цель состоит в том, что в описанном процессе персептрон совершает не более, чем некоторое конечное число ошибок N . Если персептрон уже их совершил, то после этого он уже никогда не ошибается, узнавая правильно даже те объекты, которые он никогда ранее не видел и которые ему не показывали.

Идея доказательства очень проста [8]. Рассмотрим изменение величины V , равной

$$V = \sum (a_s - \lambda a_s^*)^2 \geq 0, \lambda > 0,$$

при совершении персептроном ошибки

$$\Delta V = \sum (a_s - \xi \varphi_s - \lambda a_s^*)^2 - \sum (a_s - \lambda a_s^*)^2 = 2\lambda \xi \{ \sum a_s \varphi_s - \sum a_s^* \varphi_s \} + \sum \varphi_s^2,$$

Первый член этой суммы отрицателен, так как в силу ошибки персептрона знаки ξ и $\sum a_s \varphi_s = f(x, a)$ противоположны, а знаки ξ и $\sum a_s^* \varphi_s = f(x, a^*)$ одинаковы, и по величине неограниченно растет вместе с λ . Это позволяет выбрать λ так, что убывание величины V при каждой ошибке персептрона не менее, чем на $q > 0$. Из этого и следует конечность числа ошибок, так как величина V не может стать отрицательной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Есть поговорка: “За одного битого двух небитых дают”. Раз побиты, значит, в чем-то ошибся. Поэтому поговорку можно перефразировать и так: “За одного ошибавшегося двух неопытных да-

ют”. Ученик, чтобы познать новое, должен ошибиться положенное ему число раз. Поэтому ученику мы стараемся давать постепенно задачи с разумными подвохами, так, чтобы, ошибаясь и осмысливая ошибки, он быстрее поумнел. Высказанным я хочу обратить Ваше внимание на то, что законы обучения персептрона и ученика схожи, что в основе обучения обоих, возможно, лежат общие закономерности обучения, порождаемые общностью их математических моделей, тех самых, о которых я вам рассказал. Розенблатт шел от принципов работы мозга, нейродинамики, и придумал персептрон. Мы же от персептрона, от его принципа обучения и общих математических моделей вернулись к человеческому мозгу. Круг замкнулся, обогатившись новыми знаниями, удивительным фактом о конечности числа ошибок при обучении, о связи этого предельного числа ошибок с выбором обучаемой функции $f(x, a)$ и влиянии на обучение порядка показа представителей образа.

Всеобъемлющая значимость общих абстрактных моделей математики не только в их конкретных приложениях, но еще более, пожалуй, в их эвристических возможностях. В своей научной деятельности я столкнулся с рассматриваемыми общими принципами обучения, разрабатывая адаптивные (самообучающиеся) системы управления. Так вот, для убыстрения их адаптации и улучшения их работы лучше, если они в самом начале покажут все свои “фокусы” и нарушения хорошего управления, затем, после этого, они будут работать надежнее и лучше.

Только столкнув при обучении будущего оператора атомной станции с возможными аварийными ситуациями, его можно допустить к самостоятельной работе: ошибаться нужно при обучении, а не на работе. Для этого, конечно, необходимо провести предварительно большую исследовательскую работу не только технической стороны, но и динамики атомного реактора и станции (создав достаточно хорошую их математическую модель). И еще: в плане подчеркивания важнейшей эвристической роли общих абстрактных математических моделей я хотел бы обратить внимание на то, что понимание общих моделей обучения наталкивает на мысль о желательности к своему процессу обучения относиться критически, оценивая как бы со стороны его результаты и, в зависимости от этой оценки, корректировать свои дальнейшие действия. Именно эта общая идея побудила нас в разрабатываемой самообучающейся системе принятия решений в трудно формализуемых условиях вве-

сти отдельный блок критики. Этот блок анализирует ошибки и подсказывает коррективы, которые нужно внести в алгоритм распознавания: расширить описание объекта и как именно, запросить дополнительные обучающие данные и какие именно, изменить кодировку признаков, в каких случаях к ответам алгоритма можно относиться с полным доверием и в каких нельзя и др.

После высказанных общих соображений о процессе обучения и распознавания укажем, что же распознавание позволяет получить, например, для диагностики рака желудка, отделяющей его от других, сходных по симптомам, заболеваний: язвы, полипоза, гастрита, доброкачественной опухоли. Оказывается, что только по результатам иммунологического анализа крови, дающего девять чисел $x_1, x_2, \dots, x_9$ – количеств в ней разных типов клеток (лейкоцитов, лимфоцитов, В-лимфоцитов и др.), можно с достоверностью порядка 98% выяснить, рак ли это. Диагноз “рак” или “не рак”, зависит от знака функции $f(x, a)$, равной

$$f(x, a) = 0,02x_1 + 0,207x_2 + 0,31x_3 + 0,75x_4 + 0,618x_5 + 0,154x_6 + 0,212x_7 + 0,403x_8 - 0,492x_9 - 0,5,$$

который легко вычисляется по данным анализа крови.

Литература

1. *Неймарк Ю.И.* Математика как операционная система и модели // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 1. С. 82 – 85.
2. *Rosenblatt F .* The Perceptron, A Perceiving and Recognizing Automation / Project PARA, Cornell Aeronaut. Lab. Rep. № 85-460-1. Jan. 1957.
3. *Rosenblatt F .* Two Theorems of Statistical Separability in the Perceptron, Proceedings of Symposium on the Mechanization of Thought Processes, London, 1959. PP. 421 – 456.
4. Эшби У.Р. Конструкция мозга. М.: ИЛ, 1962.
5. *Розенблатт Ф.* Принцип нейродинамики. М.: Мир, 1966.
6. *Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Васин Ю.Г., Брей-до М.Д.* Распознавание образов и медицинская диагностика. М.: Наука, 1972.
7. *Неймарк Ю.И., Теклина Л.Г., Таранова Н.Н., Котельников И.В.* Обучающаяся статистическая консультативная система. Межвузовский сборник “Динамика систем”, Изд. Нижегородского ун-та, 1995. С. 3 – 28.

8. *Novikoff A.* On Convergence Proofs for Perceptrons. Proceedings of Symposium on Mathematical Theory of Automata. Polytechnik Institute of Brooklyn, 1963. V. XII.

* * *

Юрий Исаакович Неймарк, доктор технических наук, профессор Нижегородского государственного университета, академик Российской академии естественных наук. Лауреат Международной премии Винера, лауреат премии АН СССР им. А.А. Андропова. Автор более 400 научных работ и 8 монографий.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА* ФЛОРЕНСКИЙ П.А.

I

С началом текущего века научное миропонимание претерпело сдвиг, равного которому не найти, кажется, на всем протяжении человеческой мысли, даже скачок от Средневековья к Возрождению теряет в своей значительности, будучи сопоставлен с мыслительной стремниной нашего времени. Слово революция кажется слабым, чтобы охарактеризовать это событие культуры: мы не знаем, еще не знаем, как назвать его. Увлекаемые вырвавшимся вихрем, мы не имеем и способов достаточно оценить скорость происходящего процесса, как не выработали еще в себе категорий сознания, которыми можно было бы выразить общий смысл совершающегося. Сознательно взглядывавшиеся в научную мысль как целостный процесс культуры, конечно, и ранее, с последней четверти XIX века, предвидели надвигающийся переворот сознания: имени Николая Васильевича Бугаева (1838–1903 гг.) принадлежит тут едва ли не первое место, во всяком случае, одно из первых. Но ни он, ни кто-либо другой не могли предусмотреть даже приблизительно ширину и глубину духовно предчувствуемого и подготавливаемого ими взрыва. Впрочем, и мы, младшее поколение, скорее чувствуем внутреннюю связность отдельных потрясений и откровений в различных областях знания, нежели можем отчетливо объединить их в одно целое. Только некоторые из характерных признаков сдвига уже установились в нашем понимании. Среди таковых отметим здесь два характернейшие, к тому же нужные нам в этой работе. Эти два признака суть прерывность и форма.

Миропонимание прошлых веков, от Возрождения и до наших дней, вело во всех своих концепциях две линии, по духовной своей значительности весьма родственных между собою. Первая из них есть принцип непрерывности (*lex continuitatis*), а вторая – изгнание понятия формы. *Non posse trausire ab uno extremo ad alterum extre-*

* Текст печатается по изданию: Флоренский П.А. ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА // Труды по знаковым системам. V. Тарту, 1971.–552с.– (с.504-512).

tum sine medio – невозможно от одного крайнего перейти к другому без промежуточного – таков принцип непрерывности. Нет раскрывающегося в явлении общего его плана, объединяющего собою его части и отдельные элементы – таков смысл отрицания формы. Родственность и взаимная связность обоих возрожденческих стремлений понятна: если явление изменяется непрерывно, то это значит – у него нет внутренней меры, схемы его, как целого, в силу соотношения и взаимной связи его частей и элементов полагательской границы его изменениям. Иначе говоря, непрерывность изменений имеет предпосылкою отсутствие формы: такое явление, не будучи стягиваемо в единую сущность изнутри, не выделено из окружающей среды, а потому и способно неопределенно, без меры, растекаться в этой среде и принимать всевозможные промежуточные значения. Эволюционизм, как учение о непрерывности, существенно подразумевает и отрицание формы, а следовательно – индивидуальности явлений; и эта взаимосвязанность обеих склонностей мысли равно относится ко всем видам эволюционного сечения, будь то идеология, психология, биология, социология или политика.

XIX-й век, век эволюционизма по преимуществу, потому-то и формулировал окончательно этот, эволюционный, строй мысли, которым дышала вся возрожденческая культура, что сам был заключительным: эволюционизм, как известно, проникший во все области культуры, был суммирующим панегириком над свежеею могилою Возрождения. А скромные на вид, не угрожающие по смыслу, ростки нового мировоззрения уже подымались из этой могилы. Попросту говоря, в отраслях знания самых разных неожиданно обнаруживаются к началу XX-го века явления, обладающие заведомо прерывным характером; а, с другой стороны, добросовестному работнику мысли с несомненностью приходится тут удостоверить, опять-таки в разных областях знания, наличие формы.

Достойно внимания, что в одних случаях формально-математическое исследование понятий предварило опытное их применение, в других же, напротив, именно конкретный материал дал повод к разработке соответственных орудий мысли. Так, теория функций действительного переменного тонко разработала превосходный подбор понятий и терминов, еще и ныне далека не использованный, и тем, кто недостаточно вдумывается в историю мысли, с ее неравенствами и несоответствиями роста, – тем могущей казаться праздными хитросплетениями; но можно быть уверенным, что в

свое время, вовсе недалекое, и эти тонкости окажутся не тонкостями, а различиями совершенно необходимыми даже в практической жизни. Да и сейчас, не имеем ли мы в метеорологических кривых, в траекториях броуновских движений, может быть – в некоторых случаях волновых колебаний, затем и поверхностях ограничивающих коллоидальные зерна некоторых эмульсий, и поверхностях некоторых кристаллов и т. д., и т. д., – не имеем ли мы здесь непрерывных кривых линий и поверхностей без касательных, т. е. непрерывных функций без производной?

С другой стороны, явления жизни, душевные процессы, произведения творчества и прочее заставили признать формообразующее начало, а далее оказалось, что и физика не может отстранить от себя понятия о целом: даже механика, злейший враг этого понятия, оказалась опирающейся на него, коль скоро заговорила о движениях с наследственностью, об устойчивости динамических систем и т. п. Электрические и магнитные силовые поля, гистерезис, даже явления механической упругости и т. д. нуждаются в принципиально новых методах, систематически применяющих понятие о целом, – «которое прежде своих частей» – и которым, следовательно, определяется сложение его элементов. А это есть форма. И методы такого рода были вызваны самою практикой жизни, потребностями не только философскими но и техническими. Теория интегральных и интегродифференциальных уравнений, функции линий, поверхностей и многомерных гипер-образований, линейные, поверхностные и прочие тому подобные уравнения, функциональное исчисление, топология и прочие тому подобные дисциплины – это все методы будущего, существенно становящиеся именно на тех основах, которые принципиально отрицались наукой еще недавнего прошлого.

II

Где обнаруживается прерывность, там мы ищем целого: а где есть целое – там действует форма и, следовательно, есть индивидуальная ограниченность действительности от окружающей среды. Иначе говоря, там действительность имеет дискретный характер, есть некоторая монада, т. е. в себе замкнутая (конечно, относительно) неделимая единица. Значит, там возможен и счет.

И наоборот: без формы нет прерывности, нет, следовательно, образов обособления, значит, нет расчлененности, а потому невозможен и *счет*.

Эта индивидуальная расчлененность мира, его счетность занимает все более места в рождающемся ныне миропонимании. Не скажем «только счетность» и не станем здесь углубляться в более точное пояснение этого слова; но что бы мы ни думали о проблеме континуума, ближайшее содержание сказанного бесспорно. Молекулы, атомы, ионы, электроны, магнетоны, эфирные корпускулы (например, в зернистом эфире Осборна Рейнольда), эфирные шприцы лорда Клиффорда, кванты энергии, спектральные излучения, силовые линии электрического и магнитного полей, состоящих, по Дж. Дж. Томсону, из отдельных волокон, кристаллы, растительные, животные и человеческие особи, клетки, ядра, хромосомы и т. д. и т. д. — всё это имеет атомистический или монадный характер, следовательно, подлежит счету. Даже время и пространство признаются конечно-зернистыми, атомистическими (Серапион Машкин, Рессель, отчасти Больцманн и Клиффорд): современная мысль возвращается к кшанам, моментам, чертам, мгновениям и т. п. древней и средневековой философии.

Всякая определенность численных отношений, установленная опытом, побуждает искать некоторые естественные единицы, не подлежащие непрерывности изменений и делений. «Всякий раз, как рациональное число действительно связано с каким-либо явлением, это необходимо является заслуживающим внимания обстоятельством в нем, и указывает на нечто вполне определенное и могущее быть выяснено. Всякая прерывность, которая может быть открыта и сосчитана, есть расширение нашего знания. Оно не только обозначает открытие естественных единиц и прекращает нашу зависимость от искусственных, но проливает свет также и на природу самых явлений» (Оливер Дж. Лодж).

Совершенно незаметно для себя, наука возвращается к пифагорейскому представлению о выразимости всего целым числом и, следовательно, — о существенной характерности для всего — свойственного ему числа. «Всё есть число» — от этого древнего изречения недалеко современное миропонимание, и пророчески звучат стихи математика Якоби;

То, что ты в Космосе видишь, есть только божественный отблеск.

А над богами царит сущее вечно Число.

Однако и пифагореизм возрождается хотя и непредвиденно, но не без подготовки: арифметизация всей математики, в каком-то направлении шла работа весь XIX-ый век, вырыла идейные русла, конкретное значение которых начинает выясняться только в наше время.

Современная научная мысль обнаруживает потребность в хорошо выработанном механизме числовых функций и вообще числовых изучений – в том, что называют арифмологией. Можно предвидеть, [что] недостаточная развитость арифмологических дисциплин будет камнем преткновения новой натур-философии и потребует в скором времени концентрации математических сил именно в этом направлении.

III

Между тем, сравнительно малая успешность арифмологических изысканий объясняется не только отсутствием жизненного и, в частности, практического спроса на таковые, но и неясностью в сознании основного понятия о числе, даже ложностью его. *'Αριθμός* – число, это, согласно М. Бреалю, – то же слово, что *ἀσθμός* – сочленение, член, сустав, и означает, следовательно, упорядоченную связь, расчлененное единство. Вот этот-то характер единства, живо чувствовавшийся пифагорейцами, основательно позабыт поколениями, нам непосредственно предшествовавшими. Обычное определение числа, как «суммы единиц» уничтожает число в качестве индивидуальной формы, и тем самым разрушает его, как *universale*. Правда, это понимание числа опирается на Ньютона и, далее, на Евклида, сказавшего, что «число есть множество, составленное из единиц – (Евклид, Начала, книга VII). Но, по словам Ямвлиха, уже Фалес определил число как «систему единиц»; Евдокс в IV веке до Р. Х. говорил, что «число есть заключенное в границы, т. е. оформленное множество». На органически простом характере числа настаивает также Никомах. Дальнейшая мысль все время колеблется между пониманием числа, как суммы, совокупности, вообще некоторого внешнего накопления, и – как некоторого единства не количественно, а качественно отличающегося от прочих подобных единств. Иначе сказать, это есть колебание между числом, как агрегатом, и числом, как формой.

Достоин внимания, что даже такие глубокие мыслители, как Лейбниц, путались между этими двумя мысленными подходами к понятию числа. Так, в 1666 г. в предисловии к *Dissertatio de arte combinatoria*, Лейбниц весьма настаивает на целостности числа, как абстракта от объекта, мыслимого единым интеллектуальным актом: коль скоро этот акт один, единым будет и число, хотя бы содержанием единого акта были бы лета Мафусаила «*stractum autem ab uno est unitas, ipsumque totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas, dicitur numerus* – абстракт же от единого – есть единство, сам же целостный абстракт от единиц или целокупность, называется числом». Кажется, яснее быть не может! Но через три года, в письме в Томмазию, тот же философ объявляет, что «определение числа есть: один да один, да один и т. д., или единицы» – полное уничтожение всего предыдущего.

Этого рода сбивчивость так обычна, что нет надобности пояснять ее дальнейшими примерами. Но по существу, понятие о числе, упускающее из виду его индивидуальную форму, в силу которой оно есть некоторое в себя замкнутое единство, безусловно ложно и коренным образом извращает природу числа. Тут число хотят образовывать последовательным накоплением единиц, или, в порядковой теории Кронеккера и Гельмгольца, последовательными переходами по ступеням основного ряда числовых символов; тогда неизбежно возникает вопрос, сколько же именно раз должно последовательно прибавиться по единице, или – сколько именно раз нужно переходить в основном ряду со ступени на ступень. Пока на вопрос «сколько раз?» ответа не дано, мы не имеем права считать понятие о числе установленным, ибо до тех пор одно число ничем не отличается от другого, и все они безразлично – суть символы накопления единиц или же символ перехода по ступеням вдоль ряда, но ни в коем случае не числовые индивидуумы. Без индивидуальности их ряда не построить, а между тем не ряд образует числа, а числа – ряд. Когда же ответ на вопрос «сколько раз?» дан, то тогда уже нечего производить последовательное сложение или последовательное восхождение: своим ответом мы обнаружили уже, что имеем понятие данного числа, и, следовательно, строить его нет надобности.

Число есть, следовательно, некоторый прототип, идеальная схема, первичная категория мышления и бытия. Оно есть некоторый умный перво-организм, качественно отличный от других таких же организмов – чисел. И не без основания Платон почти отожде-

ствил свои идеи с пифагорейскими числами, а неоплатоники слили те и другие с богами:

То, что ты в Космосе видишь, есть только божественный отблеск, А над богами царит сущее вечно Число.

Светом правильного понимания числа обязана новая наука Георгу Кантору. Он рассматривает «целые числа и порядковые типы как универсалии, которые относятся ко множествам и получаются из них, когда делается абстракция от состава элементов. Каждое множество вполне отличных друг от друга вещей можно рассматривать, как некоторую единую вещь для себя, в которой рассматриваемые вещи представляют составные части или конститутивные элементы. Если делают абстракцию как от состава элементов, так и от порядка, в котором они даны, то мы получаем количественное число, или мощность множества; здесь мы имеем общее понятие, в котором элементы, как так называемые единицы (Einsen) срастаются известным образом в такое органическое, единое целое, что ни один из них не представляет какого-нибудь иерархического преимущества перед другими элементами. Если вышеуказанный акт абстракции совершается над некоторым данным, упорядоченным в одном или нескольких отношениях (измерениях) множеством, — лишь в отношении состава элементов, так что их взаимный порядок сохраняется и в том общем понятии, которое образует таким образом некоторое единое органическое целое, состоящее из различных единиц, сохраняющих между собой — в одном или нескольких отношениях — определенный взаимный порядок, то мы получаем благодаря этому такое universale, которое я называю вообще типом порядка, или идеальным числом, а в частном случае вполне упорядоченных множеств — «порядковым числом». Таким образом, количественные числа, как и типы порядка, представляют простые абстрактные образования; каждое из них есть истинное единство (ftovuc:). потому что в нем воедино связано множество и многообразие единиц. Если нам дано множество М, то элементы его следует представлять себе раздельными. В умственном же отображении его, которое я называю его типом порядка, единицы соединены в один организм. В известном смысле можно рассматривать каждый тип порядка как некоторый compositum из материи и формы. Закрывающиеся в нем абстрактно отличные единицы дают материю, между тем как существующий между ними порядок соответствует форме».

Евклид «рассматривает единицы в числе столь же раздельными, как и элементы в том дискретном множестве, к которому он его относит. По крайней мере в евклидовском определении не хватает прямого указания на единый характер числа, между тем как это безусловно существенно для него». «Мы должны поэтому представлять себе под n -кратным типом порядка идеальный образец (paradigma) n -кратно-упорядоченного множества, как бы n -мерное целое действительное число, т. е. некоторое логически, органически-единое соединение единиц, упорядоченных в n различных и независимых друг от друга отношениях, которые здесь нужно называть направлением».

Если бы теория кратно-протяженных типов порядка была достаточно разработана, то одним числом выражалось бы сложнейшее строение объектов природы, и познанию действительности, как царству форм, было бы выковано могущественное орудие. Но однако не этот круг вопросов служит сейчас предметом нашего внимания.

IV

Тип порядка и мощность множества логически различны; но не следует думать, будто этим логическим различием можно пренебречь хотя бы в практическом пользовании; так обстояло бы лишь при взаимоднозначном соответствии мощности и типов порядка. Но этого соответствия нет, и данная мощность принадлежит не одному, а многим типам порядка.

В отношении типов кратных это очевидно; бесспорно это также и в отношении типов простых, но трансфинитных; даже типы множеств благоустроенных, — порядковые числа —, от их мощностей, — чисел количественных —, должны быть различаемы вовсе не только в порядке отвлеченно-логическом. Дело в том, что лишь в отдельных случаях парными перестановками элементов два множества различного строения, но одинаковой мощности, могут быть сделаны подобными друг другу, т. е. приведены в конформное соответствие: так, чтобы у соответственных элементов было одинаковое ранговое отношение; следовательно, вообще говоря, они не подвоятся под одно и то же порядковое число.

Таковы множества трансфинитные. Им резко противопоставляются множества конечные, относительно которых различение порядковых и количественных чисел признается имеющим значимость

только принципиально логическую; каждому количественному числу соответствует, согласно общему убеждению, одно, и только одно, порядковое.

Это убеждение предполагает всегдашнюю возможность перевести всякое конечное множество последовательными парными транспозициями из одного порядка во всякий другой. Если у трансфинитных множеств данное строение может быть заведомо трансцендентным процессу парных перестановок, то в отношении конечных множеств такая возможность почему-то загодя исключается, хотя никогда и никем такое исключение не было обосновано. Однозначность соответствия количественных и порядковых чисел в области конечной, впрочем, не только не доказана, но и существенно недоказуема, как всякая вера в природу будущего или вообще не дошедшего до сознания опыта над действительностью. Ведь дело здесь не о связи между собою понятий, уже установленных, а о свойствах действительности, а priori не установим их; множество есть конкретное содержание различных отвлекаемых от него универсалий, точка приложения умственных операций, и потому мы не можем заранее из всякого возможного будущего опыта исключить свойства, логическая немыслимость которых отнюдь не доказана.

В нашем случае, логически нет оснований утверждать, будто всякое строение конечного множества может быть преобразовано во всякое другое парными перестановками элементов. Натур-философски же естественно думать о формах конечных множеств, как о неприводимых друг к другу, качественно различных между собою, хотя бы они и подводились под одно и то же количественное число.

Может быть, с этой точки зрения следовало бы пересмотреть вопросы молекулярной, атомной и, вероятно, электронной диссимметрии, т. е. в плоскости числа, а не пространства; биология, в частности, наука о наследственности, где существенным признается число хромосом, теория мутаций и т. д. в будущем признают необходимостью воспользоваться обсуждаемым кругом понятий.

Но как бы-то ни было, а естествоиспытателю никак не может представляться самоочевидным, будто два конечные множества одной мощности тем самым и подобны между собой. Счет есть последовательная установка соответствия между единичными элементами множества и последовательными числами натурального ряда. Следовательно, в результате счета получается число порядковое, но отнюдь не количественное. Но ни из чего не видно, что, сосчитывая два рав-

ные по количеству множества, мы непременно получим в обоих случаях одно и то же порядковое (не количественное – повторим) число; о возможности же всегда, при равных мощностях, получать один и тот же краткий тип порядка – говорить тем более не приходится.

V

Между тем, с различением типов и мощностей, и, в частности, порядковых и количественных чисел, мы вынуждены считаться, как только теоретические калькуляции алгебры или теории чисел мы соотносим со счетом в действительности: по-видимому, редко задумываются, что результат алго-рифмических калькуляций может быть переотнесен на множества, как предмет счета, лишь синтетическим суждением, и возможность такого переноса вовсе не подразумевается сама собою. В алгебре и в теории чисел в большинстве случаев мы производим действия над числами количественными и потому не имеющими типа, лишенными строения, а следовательно, – и не-изобразимыми. Это – вообще числа. Покуда они остаются «вообще», изображать их в частности – нет нужды; но за то они и неприменимы ни к какому конкретному множеству. Да мы и не знаем, как можно перейти от этих чисел «вообще» к числам «в частности», оставляя при этом числа бесструктурными.

И между тем, мы не обладаем непосредственной интуицией мощности и, следовательно, не способны обозначить и назвать мощность (количественное число), как таковую. Чтобы быть узнано, познано, названо и обозначено, число должно быть расчленено; а без расчленения оно есть не более как хаотическое множество, неопределенность. Но это расчленение, по следам естественного расчленения множества (как объект природы, множество непременно имеет свою форму, значит – и соответственное членение), утверждает порядок, множества. А потому, отвлеченная схема такого множества, по самому приему образования ее, обязательно есть тип порядка, идеальное число, в частности, – число порядковое, но никак не количественное. Считая – мы никогда не получим количественного числа, – непременно порядковое или тип порядка. Всякая система счисления расчленяет множество, на том или другом основании, причем возможны и даже отчасти применяются системы счисления с основанием переменным (таковы все системы мер, разве что за исключением метрической).

В алгебре и в теории чисел вопроса об изображении числа по системе того или другого основания просто не существует, и лишь по старой памяти где-то мимоходом делается заметка о системах счисления. Но это так потому, что в названных дисциплинах обсуждаются числа количественные, и применимость найденного к действительным множествам никогда не становится предметом внимания. Но теоретико-познавательно и психологически невозможен числовой ряд без системы счисления. Счет в его отношении к действительному множеству подразумевает числовой ряд, а в числовом ряде – и принцип его установки, – систему счисления.

Сосчитать – значит изобразить число: множество не изображенное – в числовом смысле и не познано, не сосчитано. Изображенность числа не есть, следовательно, только психологический костыль арифметики, без которого она обошлась бы, хотя и менее удобно, – не есть внешняя одежда арифметического понятия, одеваемая на число ради удобства и благопристойности, но существенно входит в самый акт числового познания: она необходима.

Мы привыкли и мысли об изобразимости одного и того же числа (т. е. количественного) по разным системам. Слишком привыкли, считаем выбор системы почти безразличным. Может быть, в каких-либо отношениях она и в самом деле не имеет решающего значения, но тем не менее не должно быть забываемо, что конкретный счет имеет дело с числами порядковыми, а два числа, хотя бы и одной мощности, но изображенные в разных системах, отличаются друг от друга своим членением – имеют разную форму и далеко не отождествимы между собой. Раз дело идет о порядковых числах, то написание их по разным системам – дает не одно и то же число.

Указывались неоднократно преимущества той или другой системы для счета тех или иных множеств; так, исторически известны системы с основаниями: 60 – у вавилонян. 20 – у ацтеков и кельтов, 6 и 12 – у различных народов, и т. д. Предлагались также факториальная нумерация, нумерация двоичная, четвертичная, восьмиричная, двенадцатиричная и т. д.

Но, по-видимому, еще никем не подчеркнута для системы счисления возможность:

- либо следовать естественному расчленению сосчитываемых множеств данного ряда;

- либо, напротив, насильственно перестраивать множества, уничтожая их собственное строение и вводя иное, им чуждое.

Соответственно избранная система счисления, – может быть, с переменным по тому или другому закону основанием, – позволяет самыми числами выразить внутренний ритм и строй обсуждаемого явления; напротив, затемненность структуры изучаемого – во многих случаях должна быть вменена в вину непродуманно применяемой системе счисления.

Так, многие вопросы теории функций легко разрешаются при пользовании двоичной системой, равно как и вопросы символической логики, например, у Буля, системы с основанием 2^1 указывались как естественно наиболее пригодные в теоретико-музыкальных исследованиях, а с основанием 60 – в работах астрономических: седмиричная система была бы пригодна во многих случаях календарного и историко-хронологического подсчета и т. д.

Если бы счет действительности производился *правильно*, т. е. без искажения структуры считаемого, а значит – по свойственной данному явлению системе счисления, то тогда числом действительно выражалась бы суть явления, – прямо по Пифагору. Отсюда понятна глубочайшая необходимость изучать числа, – конкретные, изображенные числа, – как индивидуальности, как первоорганизмы, схемы и первообразы всего устроенного, и организованного Эта задача расширяется также и на числа трансфинитные, на трансфинитные типы порядка, где самое основание системы счисления может быть трансфинитно; но острота вопроса – именно в этой изображенности числа, в его познавательной воплощенности, хотя бы оно и было сверх-конечным.

VI

Число изображенное, т. е. единственно возможное при счете число, почти не сделано темой исследования. Эти звучит странно, но это так. Правда, в элементарно-математических журналах и развлекательно-математических книгах, предлагаются и решаются задачки такого содержания. Но кажется, за ними никогда не было признаваемо значения большего, нежели – интеллектуальных игрушек. Решаются же эти задачи не методически, случайными уловками из других дисциплин.

Изображенное число не стало до сих пор предметом своей науки; первые же всходы таковой зачали уже в древней Греции. Даже такая первоначальная потребность, как преобразование числа из системы в систему, не может быть удовлетворена непосредственно, путем подставки данного числа в некую формулу. Между тем, такое преобразование, помимо своего высокого теоретического интереса, было бы весьма полезно и практически, коль скоро мысль о надлежащем, сообразном случае исследования, выборе системы счисления утвердится в науке. Кстати сказать, ввиду этой именно потребности автором настоящей работы намечена схема счетного механизма, преобразователя чисел из системы одного основания – в систему другого; не составило бы затруднения придумать подобные механизмы, преобразующие числа в системы оснований переменных.

Другой существенный вопрос, – о числовых инвариантах и прочих инвариантных образованиях. – кажется, даже не ставился. Переписывая число по новой системе, мы получаем собственно новое число: число, как таковое, не инвариантно в процессе преобразования системы счисления. Но, однако, мы непосредственно чувствуем, что и новое – оно сохраняет какую-то связь со старым; другими словами, мы не можем не думать о пребывании чего-то в числе, когда основание системы подвергается группе преобразований. Возможно и необходимо поэтому задать себе вопрос:

Что именно пребывает инвариантным у такой-то совокупности чисел при преобразованиях основания таких-то и таких-то, включая сюда и введение оснований переменных.

С другой стороны, возникают и вопросы о том, у какой совокупности чисел или в отношении каких преобразований пребывают инвариантными заданные свойства.

А далее, требуют ответа вопросы:

- о некотором закономерном изменении тех или иных свойств при тех или других преобразованиях основания и обратно;
- о тех преобразованиях, или тех совокупностях чисел, при которых заданная закономерность изменения осуществится.

Наконец, аналогичные вопросы должны быть поставлены относительно; тех или иных соотношений между собою пар или некоторых более сложных комбинаций чисел, ибо и эти соотношения мо-

гут быть инвариантными или изменяемыми закономерно при тех или иных преобразованиях и у той или иной совокупности чисел.

Этот круг вопросов, несколько напоминающих теорию алгебраических форм, еще даже не ставился, хотя не трудно предвидеть существенную необходимость этих и подобных вопросов в наступающем миропонимании, где числовая прерывность формы выступает характернейшей категорией мысли.

В только что изложенном слегка намечены темы подлежащих изысканий, которых не обойти будущей науке и без которых не обойтись ей, уже пережившей глубочайший переворот. Но, конечно, не эти большие задачи составляют предмет издаваемых набросков, хотя и они обращены к будущему. Их задача – сделать одни из первых шагов к изучению числа, как формы, – указать хотя бы какие-нибудь приемы, улавливающие внутренний ритм числа, его пифагорейскую музыку.

Электронное строение атома Бора и Резерфорда, конфигурации плавающих магнитов в опытах А. М. Майера, Р. В. Вуда, Деларива и Гюйи, в связи с явлением Бархгаузена, связь мутаций с числом хромосом – своего рода полимеризация вида – в исследованиях Моргана и т. д. и т. д., все подобные вопросы перекликаются с результатами настоящей арифмологической работы, хотя сейчас и преждевременно устанавливать имеющиеся здесь соотношения более точно.

Два основных арифмологических алгоритма, разработанные здесь, – приведение чисел и повышение их, по-видимому, достаточно просты и чреватые последствиями, чтобы дать надежду на дальнейшие их успехи. Во всяком случае, будучи общими приемами исследования, они не идут мимо индивидуальности числа; и, следовательно, в обсуждении числа, как формы, должны занять какое-то свое место. Кроме того, эти алгоритмы могут быть полезны и технике: например, в теории зубчатых механизмов вроде часов, астрономических и числительных приборов и других механизмов, передающих и преобразующих не большие количества энергии, а некоторые смысловые соотношения, знаки, сигналы.

Историки мысли не упустят, вероятно, отметить себе, что в числовой символике, широко распространенной в древних культурах и оттуда просочившейся в мышление нового времени, поскольку мышление это не подвергалось рационалистической обработке, – что в символике оба разрабатываемые алгоритма уже были применяе-

мы, хотя и без мотивировки. Историкам мысли настоящая работа может быть, следовательно, полезна, как обоснование и математическая установка действий над числами, издавна применявшихся, но так, что было не видно в чем математический смысл их и есть ли он.

Впрочем, неправильно спрашивать пользы с только что родившегося младенца: «дайте ему вырасти, – скажем словами В. Франклина и М. Фарадея, – дайте ему вырасти и тогда спрашивайте, с него пользы».

1922. X. 28–29.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бабкина Татьяна Александровна, базовое образование: экономист по специальности «Информационные системы в экономике», ВИ (ф) ЮРГТУ в 2002 году; старший преподаватель кафедры «Информационные технологии» ВИС ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС», аспирантка В.Е.Мешкова по специальности «Моделирование, численные методы и комплексы программ» по кафедре «Информатика» ВИС ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС». Область научных интересов: нечеткое моделирование и управление, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте, альтернативные подходы к изучению искусственного интеллекта.

Козоброд Андрей Вячеславович, начальник отдела «ИТ и ТСО», базовое образование: экономист по специальности «Информационные системы в экономике», ВИ (ф) ЮРГТУ в 2000 году, аспирант В.Е.Мешкова по специальности «Моделирование, численные методы и комплексы программ» по кафедре «Информационные технологии» ВИС ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС». Область научных интересов: применение гибридных нейросетевых технологий в решении задач автоматической классификации, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте,

Коротков Анатолий Васильевич, базовое образование: инженер-электрик, НПИ в 1967 году, кандидат технических наук, доктор физико-математических наук, доцент. Длительное время работал в ОКБ «Старт» и «Орбита» в г. Новочеркасске. Область научных интересов – обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) – как многомерной базы семимерной физической теории.

Мешков Владимир Евгеньевич, базовое образование: инженер-системотехник, НПИ в 1975 году, кандидат технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Волгодонского института сервиса (филиал) ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС», член Российской ассоциации искусственного интеллекта, индивидуальный член Европейской координационной комиссии по искусственному интеллекту. Область научных интересов: разработка теоретических основ применения бионических методов в решении за-

дач синтеза сложных топологий, применение гибридных нейросетевых технологий в решении задач автоматической классификации и распознавании смыслов текстов, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте.

Прудий Алексей Васильевич, ассистент кафедры «Электрификация и автоматизация производства» Шахтинского института (филиала) Южно-Российского государственного технического университета (НПИ). Окончил указанный институт в 2011 году по специальности «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов». Аспирант В.Е.Мешкова по специальности «САПР» по кафедре «Электрификация и автоматизация производства». Область научных интересов: применение бионических методов для синтеза топологий ЛВС, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте.

Чураков Вадим Сергеевич, базовое образование: горный инженер-электрик, Шахтинский филиал НПИ в 1987 году, кандидат философских наук, доцент кафедры «Естественнонаучные и гуманитарные дисциплины» Волгодонского института сервиса (филиал) ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС». Область научных интересов: изучение феномена времени, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте, философский анализ онлайн-социальных сетей.

Только для научных библиотек

Научное издание

КОРОТКОВ А.В., МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В.С., БАБКИНА Т.А., ПРУДИЙ А.В.

МНОГОЗНАЧНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ
БУЛЕВЫ И НЕБУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ А.В. КОРОТКОВА
И ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА В ИСКУССТВЕННОМ ИНТЕЛЛЕКТЕ
И КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: МОНОГРАФИЯ
(СЕРИЯ «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике,
искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1)

Книга печатается в авторской редакции

Техн. ред.: Г.А. Еримеев

Издательство «НаукаОбразованиеКультура»
346430 Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.
Подписано в печать 11.11.2011 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Уч. -издл. л. 24. Печ. л. 30,5. Тир. 500 экз.
Отпечатано ООО НПП «НОК»
346428 Новочеркасск, ул. Просвещения, 155А.