

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Волгодонский институт сервиса (филиал)
Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса
Международный центр теоретической физики

А.В. Коротков, В.С. Чураков

**ТЕОРЕТИКО-ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ
ТРЕХМЕРНОГО И СЕМИМЕРНОГО
ПРОСТРАНСТВ
(СОБСТВЕННО ЕВКЛИДОВА
И ПСЕВДОЕВКЛИДОВА)**

Новочеркасск
2009

УДК 114:[510.2:514.7]
ББК 87в+22.1
К 68

Рецензент: Логинов В.Т., д-р техн. наук, профессор,
академик Российской Инженерной Академии

Коротков А.В., Чураков В.С.

К 68 Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (Собственно евклидова и псевдоевклидова). – Изд.2-е, испр. и доп. – Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2009. – 194 с.

ISBN 978-5-88998-821-2

В монографии рассматриваются теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова) и даётся философско-теоретическое обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) как математической базы многомерной физической теории.

Показывается, что предлагаемая авторами новая парадигма – парадигма семимерного пространства и восьмимерного пространства-времени необходима, прежде всего, в изучении гравитации и ядерных взаимодействий.

Парадигма семимерного пространства позволит максимально отработать направления, в которых развивались ведущие трёхмерные технологии XX-го века: ядерные, химические и биологические – и эффективно вести работы по трём основным технологиям века XXI-го: нанотехнологии, генной инженерии (биоинформатике) и робототехнике, а также в информатике – для разработки новых алгоритмов и программного обеспечения, описании кристаллических структур, классификации химических веществ, в когнитивной науке и в работах по искусственному интеллекту, в криптологии (криптографии и криптоанализе), системной комплексной физике, исследовании явлений неэлектромагнитной природы, а также в анализе и моделировании экстраординарных ситуаций и аномальных явлений.

Для специалистов – физиков, математиков, философов, а также аспирантов и студентов.

УДК 114:[510.2:514.7]
ББК 87в+22.1

ISBN 978-5-88998-821-2

© Коротков А.В., Чураков В.С., 2009

Все сущее есть число.

Пифагор

*Не мы мыслим и чувствуем объективную реальность –
она мыслит и чувствует себя нами.*

Мих. Лившиц

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многомерным пространствам и неевклидовым геометриям посвящено довольно много работ учёных-математиков: П.С. Александрова, А.В. Архангельского, А.И. Борисенко, Б.Н. Делоне, Н.В. Ефимов, В.Ф. Кагана, Г.Ф. Лаптева, А.И. Мальцева, Э.Р. Розендорна, Б.А. Розенфельда, И.Е. Тарапова, Г.Е. Шилова, П.А. Широкова, И.М. Яглома – отечественных и зарубежных авторов: Р. Бальдуса, Ф. Клейна, и др. Работы учёных-математиков дополняют работы физиков-теоретиков: Ю.Б. Румера, Ю.С. Владимирова. Работы данных авторов давно уже стали классикой. В последнее время наметился небольшой подъём по проблеме многомерных пространств: это связано, прежде всего, с активизацией работ в области финслеровой геометрии, в связи с чем следует упомянуть следующих авторов: Г.С. Асанова, Р.Г. Зарипова, Д.И. Павлова, Х.Б. Аламейду.

Следует отметить, что философское значение неевклидовой геометрии было осознано с момента её появления в XIX веке. Философских работ, посвящённых данной проблематике, значительно меньше, нежели работ собственно математических, кроме того, их пишут, как правило, сами учёные, работающие в данной области. Философские работы содействуют также выбору исследователем правильной методологии и преодолению фрагментарного (узко специализированного) мышления, расширяют эпистемологический горизонт исследователя.

Неевклидовы геометрии и многомерные пространства изначально в неклассической физике привлекаются для описания и моделирования процессов и явлений в микромире и мегамире – с той или иной долей успеха. В нашем случае выбор семимерия – семимерного пространства (собственно евклидового и псевдоевклидового) – обусловлен тем обстоятельством, что математики Новосибирской школы показали, что трёхмерная алгебра является подалгеброй только семимерной алгебры. Только семимерной алгебры – нужно было рассматривать семимерный вариант со скалярным и векторным произведением двух векторов, т.е. семимерную векторную алгебру – в философском отношении «истинной середины» (следуя Мих. Лифшицу) – в от-

ношении множества многомерных концепций пространства. (Кроме того, кватернионы организуют координацию векторизованных явлений в трёхмерном пространстве, в котором существует лишь семь различных систем координат). Это исходная эпистемологическая парадигма, которой мы будем следовать. Кроме того, в данном случае – применения в физике – необходимо различие (опять же следуя Мих. Лифшицу) природы электромагнитного, гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, а также учитывать негативные примеры исследовательских работ в данной области.

В монографии рассматриваются теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидового и псевдоевклидового) и даётся философско-теоретическое обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) – «алгебры высоких технологий» по выражению академика Ю.И. Журавлёва – *как математической базы многомерной физической теории.*

Показывается, что предлагаемая авторами новая *парадигма семимерного пространства* необходима, прежде всего, в изучении гравитации, слабого и сильного ядерных взаимодействий (а также пространства и времени (пространства-времени)). Парадигма семимерного пространства позволит максимально отработать направления, в которых развивались ведущие трёхмерные технологии XX века: ядерные, химические и биологические – и эффективно вести работы по трём основным технологиям века XXI-го: нанотехнологии, генной инженерии (биоинформатике) и робототехнике. А также предлагаемая парадигма может быть полезна в криптологии (криптографии и криптоанализе) и в информатике – для разработки новых алгоритмов и программного обеспечения, описании кристаллических структур, классификации химических веществ, в когнитивной науке и в работах по искусственному интеллекту, системной комплексной физике, а также в анализе и моделировании экстраординарных ситуаций и аномальных явлений.

Монография состоит из введения, пяти глав, заключения и пяти приложений.

Во «**Введении**» анализируется ситуация, сложившаяся вокруг проблемы размерности пространства, формулируется проблема настоящей работы, определяются объект и предмет исследования, ставятся задачи и цели исследования.

Первая глава «**Размерность пространства-времени в современном физико-математическом естествознании**» показывает читателю значимость размерности пространства-времени и отвечает на типичный вопрос вроде следующего (который ставит математик Л.С. Шихобалов): «С точки зрения чистой математики такой подход, в принципе, не вызывает возражения. Но с позиции физики сразу встает вопрос: "Какое отношение эти математические модели имеют к реальному миру?". Например, в физике используется $6N$ -мерное фазовое пространство (где N – число материальных точек, образующих рассматриваемую физическую систему). А в кван-

товой механике применяются волновые функции, которые являются элементами бесконечномерного гильбертова пространства. Но никто не утверждает при этом, что окружающий нас мир имеет размерность $6N$ или бесконечномерен. По-моему, рассуждения о многомерности нашего мира зачастую проистекают либо из субъективного (хотя, возможно, не всегда осознаваемого) желания превзойти А.Эйнштейна, либо из непонимания того, что термин "пространство" означает в математике совсем не то же самое, что в естествознании (если бы соответствующие понятия в математике и в естествознании назывались разными терминами, то и проблемы бы не возникало)">>. Ответ на поставленный вопрос таков: говоря о величине размерности пространства, а также времени, стоило бы отметить следующие нюансы: во-первых, о каком пространстве идёт речь – математическом или физическом? Скорее всего, речь идёт о физическом пространстве, поскольку вещь в конечном итоге сводится к понятию пространства-времени. Физическое пространство принято считать трёхмерным, хотя в математическом аспекте зачастую рассматриваются двумерные пространства и одномерные пространства как частные случаи трёхмерного физического пространства, а также в математическом аспекте рассматриваются пространства многомерные – с размерностью больше трёх – вплоть до бесконечно мерных пространств, что и рассматривается в данной главе. (Вообще-то в данном случае имеет место фундаментальный философский вопрос **о (подлинной) Форме Мира и о его (Мира) содержании** (в данном случае – о взаимодействиях неэлектромагнитной природы). Заявленная авторами монографии парадигма семимерного пространства (собственно евклидоваго и псевдоевклидоваго) и восьмимерного пространства-времени *позволяет подойти к изучению сущностной составляющей псевдоевклидовой геометрии* (прежде всего **мира Минковского**)).

Отмечается также, что в математическом аспекте возникают понятия евклидовости пространства – точнее надо было бы сказать о собственно евклидовых пространствах, либо псевдоевклидовых пространствах, гильбертовых пространствах и других типах пространств, которые подробно изучаются в математике. В физическом аспекте имеет смысл говорить только о трёхмерных евклидовых пространствах, либо их расширениях до многомерных евклидовых пространств. Причём широко задействованы понятия собственно евклидоваго трёхмерного пространства, а также псевдоевклидоваго пространства в плане псевдоевклидоваго пространства-времени Минковского. Это пространство-время – четырёхмерное, трёхмерное пространство и плюс одна временная координата. Здесь конечно, несколько несвойственный математическим аспектам процесс расширения пространства до четырёхмерного – с трёхмерного до четырёхмерного. Кроме того, размерность пространства (пространства-времени) в физических парадигмах и исследовательских программах является их специфической особенностью, позволяющей их классифицировать.

Вторая глава «**Критический анализ современной парадигмы пространства-времени (в теории относительности – СТО и ОТО, квантовой механике и синергетике)**» посвящена критическому анализу современных парадигм (в плане размерности пространства-времени) – релятивистской теории, квантовой механике и синергетике. В данной главе показывается, что специальная теория относительности, построенная на базе четырёхмерного пространства-времени Минковского, мало что изменила в плане трёхмерных пространственных представлений. Она просто связала трёхмерные пространственные представления с временными представлениями. Оказалось, что пространство-время это суть, общий объект и нельзя рассматривать пространство, как таковое, а время, как таковое, независимые друг от друга. Имеет смысл рассматривать только пространственно-временные соотношения, преобразования, результаты и т.д. В этом плане, конечно очень велика роль специальной теории относительности, но пространственные соотношения остаются в любом случае теми же самыми, евклидовыми трёхмерными. Не более того и не менее. Возникает вопрос: а почему, собственно, мы ограничили себя этими рамками? Почему рассматриваем только трёхмерный вариант? И почему только собственно евклидовый вариант?

В 60-х годах XX-го столетия физики впервые столкнулись с этим вопросом. Оказалось, что эксперименты в области физики элементарных частиц дают некоторые новые физические законы: закон сохранения барионного числа, лептонного числа, странности, чётности и т.д. Все новые и новые законы. В тоже время трёхмерная физика не в состоянии была описать эти законы. Трёхмерная физика даёт только три закона сохранения – закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Ничего более вынуть из трёхмерных представлений не удаётся. Поэтому, впервые, пожалуй, с середины XX-го столетия заговорили о многомерном, не просто пространстве математическом, а многомерном физическом пространстве. И сразу возникли вопросы: какой же размерности физическое пространство имеет смысл? И какой математикой такое пространство следует описывать?

В третьей главе «**Многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени). Доминирующие и альтернативные**» рассматриваются современные многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени) как доминирующие, так и альтернативные. Показывается, что доминирующая концепция – трёхмерная пространственная схема Гамильтона - Грасмана даёт только три закона сохранения: закон сохранения энергии, импульса и момента импульса. Анализируется необходимость многомерного векторного исчисления. Низкая математическая и философско-методологическая культура современных физиков-теоретиков – в силу чего они обходятся без многомерного векторного исчисления и тем более многомерного векторного исчисления псевдоевклидового характера – вынуждает их задействовать фантастические измышления

(альтернативные теоретические конструкции, характерные для постмодернистской парадигмы) типа теории струн, мультиверса, миров Эверетта и прочих фантазмов, превращающих теоретическую физику в физику магическую. Но выход из тупика всегда есть. В частности, он возможен, если оторваться от электромагнитной парадигмы и признать очевидную вещь: взаимодействия неэлектромагнитной природы должны описываться другими векторными алгебрами – в частности той, которой посвящена настоящая монография.

В четвертой главе **«Концепции семимерного пространства и восьмимерного пространства-времени»** рассматриваются концепции семимерного пространства и восьмимерного пространства-времени. Дается ответ на вопрос: какой размерности должно быть пространство? Показывается, что именно 7D. (Главы 2, 3 и 4 частично повторяют друг друга – но это связано, во-первых, с важностью тематики, а во-вторых – соответствует различным лекциям по рассматриваемому вопросу, читаемым Коротковым А.В. в разное время для различных аудиторий с различным уровнем математической подготовки).

В Пятой главе **«Концепции трёхмерного и семимерного псевдоевклидовых пространств индекса 2 и 4, а также четырёхмерного и восьмимерного пространства-времени индекса 3 и 5»** анализируются концепции трёхмерного и семимерного псевдоевклидовых пространств индекса 2 и 4, а также четырёхмерного и восьмимерного пространств - времени индекса 3 и 5. Показывается, что это принципиально новые концепции не только в плане изучения трёхмерных векторных алгебр, но и семимерных векторных алгебр. Это концепции, меняющие представления о свойствах пространства как такового и представления о связи пространства и времени.

В **«Заключении»** подводятся итоги работы.

В четырех приложениях изложены математические результаты, полученные А.В. Коротковым. Приложение I **«Коротков А.В. Элементы псевдоевклидового трех- и семимерного векторных исчислений»**. Приложение II **«Коротков А.В. Векторы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса три»**. Приложение III **«Коротков А.В. Отдельные результаты по теории чисел»**. Приложение IV **«Коротков А.В. Список научных работ, посвященных трех- и семимерному пространствам»**. Завершают монографию предметный и именной указатели, составленные В.С. Чураковым.

* * *

Анатолий Васильевич Коротков проблемой семимерного пространства (собственно евклидового и псевдоевклидового) занимается с 1988 г. За это время им были сделаны сообщения и доклады: на семинаре «Основания физики» в г. Сочи в 1989 году, в Новосибирске в институте математики СО АН СССР, в Дубне – в Объединённом институте ядерных иссле-

дований (ОИЯИ), в Белорусском государственном университете, в Ростове-на-Дону – в институте физики РГУ и в институте математики и механики РГУ, в Новочеркасске – в ОКТБ «Орбита» и ОКТБ «Старт», на 2-ой Международной научно-практической конференции «Новые технологии управления движением технических объектов» в 1999 г., в Геленжике на Международной научно-технической конференции «Интеллектуальные САПР» в 2002, в 2005 г. в Санкт-Петербурге – в физико-техническом институте, в лаборатории математических исследований института прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра Российской академии наук и Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса (ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС, г. Шахты) в 2004-2005 г., на кафедре физики в Дортмундском университете и в Триесте – в Международном центре теоретической физики им. А. Салама в 2005 г.

В 2001 году Анатолий Васильевич Коротков защитил докторскую диссертацию «Элементы семимерного векторного исчисления в задачах математического моделирования физических и технических объектов». Специальности: 05.13.01– системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям), 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы. Диссертационный совет рекомендовал Высшей Аттестационной Комиссии Российской Федерации включить в учебные программы основные сведения о семимерном векторном исчислении для студентов механико-математических и физико-математических специальностей вузов.

Вадим Сергеевич Чураков философскими проблемами математики занимается с 2004 г. За это время им были опубликованы статьи: «Философия семимерия» (сокращённый вариант) // IV Российский философский конгресс «Философия и будущее цивилизации» (24-28 мая 2005 г., г. Москва) Т.3; и полный текст в журнале «Интеграл культуры: журнал Волгодонских философов и гуманитариев». 2005. №1; „Синергетический аспект интеграции гуманитарного и естественно-математического знания на примере описания перехода – познания пространства Лобачевского на основе понятий о евклидовом пространстве)“ // Интеграл культур: региональный вестник российских гуманитариев и философов.– 2006. №1(9).

* * *

В ходе работы над монографией её отдельные главы по мере их завершения публиковались в следующих изданиях: введение – под названием „Введение в философию семимерия (анализ пространственной размерности, постановка проблемы, целей и задач исследования)“ – в журнале «Интеграл культуры: журнал Волгодонских философов и гуманитариев». 2005. №5; глава 4 под названием „Многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени)“ – в сборнике «Проблема времени в культуре, философии и науке», Шахты, 2006; глава 5 „Концепции трех-

мерного и семимерного псевдоевклидовых пространств индекса 2 и 4, а также четырёхмерного и восьмимерного пространства- времени индекса 3 и 5“ в сборнике «Культура времени. Время в культуре. Культура времени», Шахты, 2007; главы 1 и 2 – в журнале «Интегралы культуры: Российский журнал философских и социально-экономических наук» № 5 (17) и № 6(18) 2007; глава 3 – в сборнике научных трудов «Проблемы экономики, науки и образования в сервисе '09» соответственно. При подготовке книги некоторые из этих глав были доработаны.

На основе семимерной парадигмы А.В.Короткова В.Е. Мешков и В.С.Чураков ведут исследовательские работы в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии – в новом научном направлении.

ВВЕДЕНИЕ

Пространственные понятия и представления происходят из космогонического мифа [64, с. 232-266], связаны с культурными архетипами и организацией сакрального порядка [17, с. 346-457; 32, с. 41-245; 33, с. 87-150; 34, с. 32-38], с системами ориентации [84], с категоризацией мира [44; 61], с особенностями национального мировосприятия [30; 31; 35; 88; 104].

Проблема пространства и его размерности от античности [93, с. 231] и до классической теории И. Ньютона пребывала в сфере философской мысли.

Понятия и представления пространства довольно быстро оформились в геометрию Евклида [90, с. 209-210], согласно которой понятие пространства возникает как из характеристики отдельно взятого тела, всегда обладающего протяженностью, так и из факта внеположенности множества сосуществующих объектов, имеющих различное пространственное положение.

Категории «пространство» не в каждом философском словаре посвящена статья. Но есть и исключения. Так, в 4-м томе «Философской энциклопедии» на стр. 392 сразу две статьи: «Пространство (в математике)» [111, с. 392] и «Пространство и время» [111, с. 392-397]. В статье «Пространство (в математике)», отмечено, что «термин «П», в 20 в. уже прочно воспринимается как родовой, и целые разделы математики посвящаются главным образом изучению «природы» многообразных «пространств» (проективная и аффинная геометрии, функциональный анализ и особенно топология). С утверждением представлений теории множеств одним из центральных понятий «абстрактного» (точечного) П. и различные его модификации: топологические, метрические, линейные П. – это просто совокупность некоторых «элементов» (чисто условно именуемых «точками»), полностью характеризующихся «аксиомами» [111, с. 392]. Статья «Пространство и время» посвящена главным образом развитию пространственно-временных представлений в естествознании [111, с. 392-397]. Категория «пространство» в «Философском энциклопедическом словаре» определяется как-то, «что является общим всем *переживаниям*, возникающим благодаря органам чувств» [110, с. 369].

В «Кратком философском словаре» в статье «Пространство и время» сказано, что «пространство и время философские категории, в которых зафиксирована изменчивость всего окружающего и его структурная организованность.

В общем смысле П. предполагает сосуществование вещей, явлений, образов, теорий: «одно подле другого» [60, с. 302]. В новейших «Словаре философских терминов» под ред. проф. В.Г. Кузнецова [100], в «Современном философском словаре» под общей редакцией проф. В.Е. Кемерова и в «Проективном философском словаре» [88] статья «Пространство» отсутствует. Нет категории «Пространство» и в «Современном философском словаре» под общей редакцией д.ф.н., проф. В.Е. Кемерова.

Почему пространство трёхмерно?¹

Рассмотрим этот вопрос в философском, психологическом, математическом и физическом аспектах.

В философии обоснование трёхмерности пространства восходит к Платону² и Аристотелю, который в своей книге «О небе» заявил, что совершенство и полноту мира обеспечивает только наличие трех измерений [4; 70]. Одно измерение по рассуждению Аристотеля, образует линию. Добавляя к линии другое измерение, получаем поверхность. Объемное тело образуется дополнением поверхности ещё одним измерением. «Однако выйти за пределы объемного тела к чему-то иному уже невозможно, так как всякое изменение происходит в силу какого-либо недостатка, а таковой здесь отсутствует» [70, с.70]. (Но Аристотель не обосновывает, почему трёхмерное пространство лишено недостатков).

«Легко видеть, что приведенный ход мысли Аристотеля, – отмечает Мостепаненко А.М., – страдает одной существенной слабостью: остается неясным, почему именно трёхмерное объемное тело обладает полнотой и совершенством» [70, с.70].

Существенной особенностью нашего мира является его 3-х мерность. В физике широко распространен закон «обратных квадратов», описывающий характер изменения различных сил с расстоянием; ему следуют гравитационные, электрические и магнитные силы. Еще в 1747г. И. Кант осознал глубокую связь между этим законом и 3-х мерностью пространства [42]³. Уравнения, описывающие гравитационные или электрические поля точечного источника, можно легко обобщить на случай пространства с любым другим числом измерений и найти их решения для этого случая. Из этих решений видно, что в пространстве с n измерениями мы приходим к закону обратной степени $n-1$. В частности, в трехмерном пространстве $n-1 = 2$ и справедлив закон «обратных квадратов», в 4-х мерном пространстве $n-1 = 3$ (закон «обратных кубов») и т.д. Нетрудно показать, что если бы гравитационное поле Солнца действовало на планеты по закону «обратных кубов», то планеты, двигаясь по спиральным траекториям, довольно быстро упали на Солнце и оно поглотило бы их.

Аналогичная картина наблюдается и в мире атомов. Оказывается, что, даже если принять во внимание квантовые эффекты, у электронов не будет устойчивых орбит в пространстве с числом измерений больше 3-х. А без устойчивых атомных орбит не было бы химических процессов, а следовательно, и жизни.

¹ Из учёных нового времени приоритет в постановке вопроса «Почему пространство трёхмерно?» – принадлежит Э.Маху[68, с. 400]. Э. Мах связывал Евклидову геометрию с опытом и психофизиологией.

² Платон в «Законах» утверждал, что «вещи начинают восприниматься чувствами только тогда, когда они становятся трехмерными».

³ Гегель в вопросе трехмерности пространства Канту не противоречил. См. [107].

От размерности пространства зависит еще одно явление – распространение волн. Нетрудно показать, что в пространствах с четным числом измерений не могут распространяться «чистые волны».

За волной обязательно возникают возмущения, которые вызывают реверберацию. Именно поэтому четко сформулированные сигналы нельзя передавать по двумерной поверхности (например, по резиновому покрытию). Анализируя этот вопрос, математик Г. Дж. Уитроу в 1955 г. пришёл к выводу, что высшие формы жизни были бы невозможны в пространствах чётной размерности, поскольку живым организмам для согласованных действий необходимы эффективная передача и обработка информации.

Эти исследования отнюдь не доказывают невозможность другого числа измерений пространства; они лишь говорят о том, что в мире с числом измерений, отличным от трёх, физика была бы совершенно другой и, возможно, такой мир был бы значительно менее упорядочен по сравнению с тем, который мы реально воспринимаем. Мы, будучи продуктами космологической эволюции, можем воспринимать только трёхмерный мир. Мы видим только кажимость.

Вселенная более многогранна, по сравнению со способностями нашего восприятия (а мы воспринимаем мир через пространство и число). При существовании разных вселенных, при одинаковом может быть содержании, формы могут быть различными.

Философы и учёные позитивистской и неопозитивистской [12; 39; 89; 92] методологической традиции ничего существенного к рассматриваемому выше философскому пониманию и обоснованию трёхмерности пространства не добавили.

В отечественной философской литературе проблема трёхмерности пространства есть также в работах следующих авторов: [2; 3; 9; 30; 31; 65; 69; 70; 71; 72; 73; 75; 98; 99; 103; 112; 113] – и в других работах.

Теперь от философии обратимся к формальной логике. В формальной логике размерность пространства (трёхмерность либо n -мерность) не анализируется. Но зато изучаются многомерные (и многозначные) логики. Логик К.И. Бахтияров отмечает, что «логическая многомерность является причиной поразительной эффективности математики» [11, с. 221].

В психологическом подходе трёхмерность связывается, прежде всего, с психофизиологической организацией и повседневным опытом (А. Пуанкаре, Э. Мах) – воспринимается как данность, или по выражению ростовского философа М.К. Петрова – «человекоразмерность» [82] (к примеру: фигуристы выполняют 3,5 оборота, но не 6,5 – как в кинофильме „Матрица“ осуществлён выход за человекоразмерность посредством перехода в многомерность компьютерной виртуальной реальности) – и критически не анализируется. А.М. Мостепаненко и В.М. Мостепаненко считают психологический подход к проблеме трёхмерности пространства методологически не оправданным, поскольку в нём не учитываются «фундаментальные свойства пространства» [72, с. 43; а также см. 40].

Трёхмерность (и многомерность) пространства в последние годы XX века и в начале XXI –го века представлена в работах одного из соавторов данного исследования А.В.Короткова [47–59]. В отношении трёхмерия пространства в его работах проводится мысль о том, что в математическом плане трёхмерность пространства стала разрабатываться с начала XIX века, когда обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике над различными объектами нечисловой природы, подчиняются законам обычной арифметики: сочетательности, переместительности и распределительности, и что эти объекты можно рассматривать как величины, к которым применимы алгебраические методы изучения. В связи с этим системы объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные с арифметическими действиями над числами стали рассматривать с позиций алгебры.

Изучением одной из таких систем объектов занимается трехмерная векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учениями об электричестве и магнетизме, где приходится иметь дело с векторными величинами, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями в пространстве. К таким величинам относятся скорость, ускорение, сила, напряженности электрического и магнитного полей и т.д. Трёхмерная векторная алгебра имеет предметом изучения именно такие системы направленных величин и выполняемых над ними операций в трёхмерном пространстве.

Основы трёхмерного векторного исчисления были построены в середине XIX-го века ирландским математиком и астрономом У. Гамильтоном (1805–1865) и немецким математиком Г. Грасманом (1809–1877), которые различными путями пришли к открытию векторных операций. Их идеи не сразу получили распространение и признание. Прежде всего, недостаточно ясна была их практическая ценность, а сами работы представляли большие трудности для изучения.

Непосредственным толчком для распространения и интенсивного развития трёхмерного векторного исчисления было построение Максвеллом (1831-1879) теории электромагнитного поля (1873), в которой идеи трёхмерного векторного исчисления играли решающую роль. Этот факт привлек многих ученых, и в их трудах трёхмерное векторное исчисление приобрело к началу XX столетия современную форму.

В настоящее время на основе трёхмерного векторного исчисления строятся все современные курсы теоретической механики, газо-, гидро-, термо-, электродинамики, квантовой механики и т.д. Широкое применение трёхмерного векторного исчисления объясняется рядом его свойств. Во-первых, трёхмерные векторные представления адекватно передают суть многих понятий и закономерностей геометрии и физики. Во-вторых, в трёхмерном векторном исчислении формулы и выводы отличаются сжатостью, ясностью и наглядностью. В-третьих, трёхмерные векторные форму-

лы, выражающие физические закономерности не зависят от выбора той или иной системы координат, т.е. имеют инвариантный характер и отражают сущность явления в чистом виде.

Физик-теоретик Ю.С.Владимиров пишет, что теория бинарной геометрофизики «позволила подойти к решению ряда фундаментальных проблем современной физики и к обоснованию известных свойств классического пространства-времени. В частности, на основе бинарной геометрофизики стало возможным ответить на сакраментальный вопрос, поставленный еще Э.Махом: «Почему пространство трёхмерно?». Комплексные бинарные структуры строятся по образу и подобию унарных структур, из которых получаются известные виды геометрий, поэтому бинарные структуры можно рассматривать как новый тип геометрий – бинарных. В них вместо обычной геометрической размерности выступает ранг структуры (системы отношений), задаваемый двумя целыми числами. Оказалось, что наименьший невырожденный ранг бинарных структур – это (3,3), приводящий к 4-мерной геометрии с сигнатурой $(+ - - -)$, что объясняет не только пространственную размерность три, но и одномерность физического времени» [68, с. 17].

В физическом плане, в теории суперструн «высказывалось предположение, что три наших протяженных измерения могут *сами* быть крупной и несвернутой 3-браной. Если это предположение справедливо, то всю свою жизнь мы просто скользим по внутренности трёхмерной мембраны» [36, с.260 – 261].

Поскольку, как это следует из анализа, проведенного выше многомерие (3 и более размерностей) отличается от одномерия тем, что многомерие – это все то, что отличается от одномерия, то мы его проанализируем точно так же, как и проанализированное выше трёхмерие.

В философском плане, как отмечается в статье И.Т.Касавина «Пространство» // **Философия**: энциклопедический словарь / Под ред. А.А.Ивина – «в гуманитарном знании пространственно-временные параметры обычно указывают не столько на специфическую предметную область, сколько на способы исследования в отдельных науках. Так возникают понятия «антропогенные ландшафты», «биополя», «социодинамика культуры», «виртуальное П.», «нелинейное время». Они, как правило, обозначают собой методологические сдвиги на границе двух и более научных дисциплин, а применительно к социально-гуманитарному знанию еще и понятийное заимствование из естественных и точных наук» [109, с.697].

Представления о многомерии пространства (и времени) – возникшее в XIX веке первоначально как математические идеи – в XX в. оформились в концепт «многомерие» и распространились во все сферы жизни, стали описываться, осмысляться, переживаться, изучаться и применяться, в изобразительном искусстве [45], художественной литературе [80], психо-

логии [1; 37; 38], социологии, информатике, эволюционной эпистемологии¹ и психосемантике [102].

С точки зрения собственно психологии, «человек, живя в объективном мире, а значит и будучи локализованным в определенной точке пространственно-временного континуума, отражая этот мир и происходящие в нем изменения, выступает в качестве смысловой модели этого мира», — пишет психолог А.Ю. Агафонов [1, с. 158].

В психологии описания и изучения переживания многомерия пространства (и времени) в особых, экстраординарных ситуациях (альтернативных реальностях — по терминологии И.А. Бесковой [13]) — в изменённых состояниях сознания — прежде всего — в трансперсональной психологии [37; 38] и в виртуальной психологии [8; 76] — началось и получило развитие во второй половине XX в.

В трансперсональной психологии выход в иные измерения происходит за счет применения галлюциногенов (ЛСД), либо за счет т.н. «холодного дыхания»², а в виртуальной психологии — за счёт применения особых психологических методов, которые активно задействуют воображение [8; 76].

Результат схожий: путём того или иного воздействия мозг может изменить и изменяет восприятие размерности пространства (и времени).

Во всех этих методологических подходах: трансперсональной психологии, виртуальной психологии и в анализе творческой деятельности в рамках эволюционной эпистемологии — как и в случае трёхмерия — подтверждается справедливость концепции идеального Э.В. Ильенкова [41, с. 219-227].

В психосемантике исходят из того, что память представляет собой многомерное семантическое пространство, которое в содержательном аспекте заполнено семантическими элементами, «изменчиво связанными между собой» [102, с. 68], [1, с. 141). Многомерность памяти представляется исследователям в том, «что один и тот же элемент может одновременно существовать в различных семантических сетях» [1, с. 141].

Философии многомерия — в отличие от вышеприведенной философии, трёхмерия посвящено значительно меньше работ, поскольку о многомерии — в виду особой сложности предмета философствуют сами физики-теоретики, достигшие уровня философского обобщения.

¹ Французский социолог П. Бурдьё в «Социологии политики» (М., 1993) пишет, что в реальности социальное пространство есть многомерный, открытый ансамбль относительно автономных полей, т.е. подчинённых в большей или меньшей степени прочно и непосредственно в своём функционировании и в своём изменении полю экономического производства: внутри каждого подпространства те, кто занимает доминирующую позицию, и те, кто занимает подчинённую позицию, беспрестанно вовлечены в различного рода борьбу; следует также упомянуть оккультное 4-х мерие П. Успенского [108] и многомерную реальность «Розы мира» Д.Андреева.

² Психолог В.В. Козлов для достижения аналогичных результатов использует иную методику [46].

Приоритет в философском подходе к проблеме многомерия принадлежит австрийскому физику Э. Маху. В своей известной работе «Познание и заблуждение, изданной в 1905 году, он пишет: «Наша геометрия относится к объектам чувственного опыта. Но если мы оперируем с абстрактными вещами, как то атомами и молекулами, которые по самой природе своей не могут быть даны нашим чувствам, мы не имеем никакого права обязательно мыслить эти вещи в отношениях, в относительных положениях, соответствующих Евклидову трёхмерному пространству нашего чувственного опыта» [68, с. 397-398].

Ранее в данном направлении работали отечественные физики-теоретики В.А. Фок [114; 115] и Ю.Б. Румер [94–96]. Из отечественных авторов в данном направлении ныне очень активно работает философствующий физик-теоретик Ю.С. Владимиров [18–26] с соавторами.

Особенности представления пространства и времени (пространства-времени) в микромире представлены в работах как отечественных, так и зарубежных учёных и философов [2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 14; 15; 16; 18; 26; 27; 29; 66; 73; 74; 77; 81; 85; 86; 97; 98; 103; 106].

В связи с запросами физики в начале двадцатого столетия на базе трёхмерной векторной алгебры трудами многих учёных было создано тензорное исчисление, а на базе синтеза идей алгебры, анализа и геометрии возникли новые отрасли математики – функциональный анализ, теория представлений непрерывных групп, исчисление геометрических объектов и т.д. Эти новые отрасли математики, обобщающие и широко использующие идеи и методы трёхмерного векторного исчисления, тесно столкнулись с проблемами новейшей физики.

Вместе с тем, новейшую физику уже не устраивают пространства и алгебры малого числа измерений, в связи, с чем ведётся интенсивное исследование многомерных алгебраических систем. К таким системам необходимо, прежде всего, отнести системы гиперкомплексных чисел с делением, получаемым путём применения процедуры удвоения к действительным, комплексным или кватернионным числам, что даёт четыре замечательные алгебры действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октонионов.

Теоремы Гурвица и Фробениуса обеспечили решение классической задачи теории алгебр – отыскание всех алгебр с делением. Оказалось, что размерность любой из таких алгебр равна одному из чисел 1, 2, 4 или 8. Это обстоятельство привлекло внимание широкого круга физиков, в первую очередь, к алгебре кватернионов и октонионов. При этом пришлось отказаться от привычных аксиом коммутативности и ассоциативности.

Некоммутативные системы появились в математике в середине прошлого столетия – это кватернионы Гамильтона (1843) и матрицы А. Кэли (1858). Потом это свойство стало обычным для операторов функционального анализа (30-е годы XX столетия). В физике некоммутативность стала

синонимом квантовой механики. Коммутативность или некоммутативность связаны здесь с возможностью одновременного измерения величин, представляемых операторами.

Первым примером неассоциативной системы была алгебра октонионов, открытая У. Кэли и Дж. Грейвсом в 1843-45 гг. После этого открытия, исследования линейных алгебр стало повсеместным. Одни видели в кватернионах и октонионах основу мироздания, другие продолжали поиски новых подобных систем, что сопровождалось попытками построения общей теории неассоциативных систем. Оказалось, что неассоциативные алгебры в общем без дополнительных ограничений не допускают сколь-нибудь хорошую структурную теорию.

Весьма важный подкласс алгебр в классе линейных алгебр образуют неассоциативные алгебры Ли. Первый пример алгебры Ли встречается уже у Коши (1847), но серьезное изучение их было начато в конце XIX – начале XX века (С. Ли, Ф. Энгель, В. Киллинг, Э. Картан и др.). Хотя алгебры Ли и неассоциативны их можно получить из ассоциативных через образование коммутатора $[AB]=AB-BA$. Теория алгебр Ли и их представлений в основном завершена в первой половине XX-го столетия. Им суждено было стать наиболее важными алгебрами для математики и физики.

Физические приложения неассоциативных алгебр связаны также с работами П. Йордана, Ю. Вигнера и Дж. фон Неймана. Оказалось, что квантовой механике можно придать коммутативную, но неассоциативную формулировку. Йордановы алгебры получаются из ассоциативных переопределением операции $\{AB\}=\frac{1}{2}(AB+BA)$, а начало их исследования связано с именами А. Альберта, Н. Джекобсона, К. Мак-Криммона, позже с новосибирской математической школой.

Альтернативные алгебры как таковые появляются в математике в 1930-х годах введением понятия альтернативности $(AA) B=A(AB)$ и $A(BB)=(AB)B$. Я. Кримсе, Э. Аргин и М. Цорн подробно изучали альтернативные алгебры. Наиболее известным представителем альтернативных алгебр служит алгебра октонионов. В альтернативной алгебре каждые два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Таким образом алгебры Ли, Йордана и альтернативные алгебры получаются из ассоциативных алгебр переопределением операций на антикоммутатор и коммутатор. Эти алгебры близки к ассоциативным и хорошо изучены. Значительный интерес в этом отношении приобретает работа новосибирских математиков под тем же названием.

В связи с альтернативными алгебрами необходимо особо отметить связанные с ними алгебры А. Мальцева (1955). Класс алгебр Мальцева¹ содержит все алгебры Ли, и если искать обобщения алгебрам Ли, то алгебры Мальцева наилучшим образом удовлетворяют этой задаче. Значительный вклад в теорию алгебр Мальцева внесли А. Сейгл (1961) и новосибирские ма-

¹ См. [62; 67].

тематики (Е. Кузьмин, В. Филиппов и др.). Попытка построить теорию представлений, пригодную для их физических приложений, сделана в работах Э. Паала. Тем самым алгебры Мальцева сразу же заявили о себе в физике.

Отметим, что ассоциативные алгебры через переопределение операции в коммутатор дают все алгебры Ли. Сами ассоциативные алгебры являются подклассом альтернативных алгебр. Альтернативные алгебры образованием коммутаторной алгебры дают алгебры Мальцева.

В настоящее время на основную роль в математической физике претендуют методы теории групп. Основу группового метода заложили Г. Вейль, Ю. Вигнер, Дж. фон Нейман, Б. ван дер Варден и Э. Нетер.

Понятие изоспина для атомных ядер (В. Гейзенберг) и открытие странных частиц привели в теории групп к схеме М. Гелл-Манна и К. Нишиджимы (1953), унитарной (SU_3) симметрии и модели кварков.

Начиная с 1975 г. в кандидаты групп теорий Великого Объединения выдвигаются простые группы высших рангов ($n \geq 5$). Наиболее популярными здесь оказались группы $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 . Группы высшего ранга нашли приложения также в теориях супергравитации и в теориях Калуцы-Клейна. В 1984 г. М. Грин и Дж. Шварц рассмотрели группы $O(32)$ и $E_8 \times E_8$ суперструн.

В настоящее время математики и физики заняты поисками обобщений и расширений понятия группы (тем самым и понятия симметрии), из которых можно отметить супергруппы, бесконечные группы и неассоциативные системы.

Таким образом, математическая и физическая науки вполне закономерно пришли к проблеме приложения неассоциативных алгебр в физике. Можно различать три направления в развитии неассоциативных алгебр в физике.

1. Квазигрупповой подход. Его основой являются методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии, значительную роль в геометрии теперь играют неассоциативные алгебраические системы – квазигруппы. Неассоциативность здесь является алгебраическим эквивалентом понятия кривизны. В этом направлении достигнуты заметные результаты по физическим приложениям – построено обобщение группового метода для непрерывных квазигрупп преобразований (И.А. Баталин, А.И. Нестеров).

2. Ли-допустимый подход, берущий начало с работ Р. Сантилли. (Алгебра A называется Ли-допустимой, если ее коммутаторная алгебра A -лиева). По идее Сантилли физические теории должны обобщаться так, чтобы их лиева структура сохранилась в коммутаторной алгебре. Более общая теория характеризуется Ли-допустимой алгеброй. При определенных условиях происходит переход к лиеву формализму путём переопределения операции на коммутатор. Ли-допустимыми являются ассоциативные алгебры, коммутативные алгебры Йордана и алгебры Ли.

3. Октонионный подход. Физическим приложениям октонионов пришлось ждать почти столетие. В 1950-60 гг. появились работы по клас-

сификации барионов и мезонов на основе октонионов. В теории суперструн появилась группа E_8 – самая последняя исключительная группа Ли. Найдена исключительная группа йордана M_3^8 , состоящая из матриц 3×3 с октонионными элементами. Дано обобщение Кэли-Диксона при переходе от октонионов к седенионам.

В интенсивном изучении неассоциативных алгебр и их приложений вместе с тем присутствуют элементы перебора размерностей пространства и оторванность от исходного пункта физических теорий – использование трёхмерной векторной алгебры в физике как подалгебры многомерной алгебры.

Достаточно сказать, что на этом пути было необходимо рассмотреть бесконечно большое число возможных размерностей физических пространств, причём нахождение требуемой размерности n пространства даёт к тому же массу вариантов задания n^3 структурных констант векторной алгебры. Наконец, многие учёные упустили из вида исторический факт построения физических теорий на основе предварительно созданной трёхмерной векторной алгебры и продолжают искать закономерности многомерной алгебры из физических предпосылок.

На наш взгляд выход из сложившейся ситуации может быть найден в соответствии с историческим опытом. Необходимо предварительно построить многомерные векторные алгебры, включающие трёхмерную векторную алгебру как подалгебру и оценить их с точки зрения возможности использования в физических теориях.

На этом пути мы неизбежно придём к рассмотрению простых алгебр Мальцева и к замечательному, но малоизвестному выводу о том, что антикоммутативные алгебры без делителей нуля, в которых любые два элемента порождают подалгебру Ли есть либо трёхмерная векторная алгебра Ли, либо семимерная алгебра Мальцева с таблицей умножения базисных элементов вида:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	e	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$
	e	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$
	e	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5
2	e	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5
	e	$-e_3$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
	e	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$
3	e	$-e_3$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
	e	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5
	e	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$
4	e	$-e_3$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
	e	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5
	e	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$
5	e	$-e_3$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
	e	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5
	e	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$

$$\begin{array}{cccccccc}
6 & & & & & & & \\
& \mathbf{e} & | & -\mathbf{e}_6 & & \mathbf{e}_5 & & \mathbf{e}_4 & | & -\mathbf{e}_3 & & -\mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_1 & & \mathbf{0} \\
7 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Далее оказывается, что семимерная векторная алгебра без делителей нуля тесно связана с алгеброй октонионов.

Таким образом, в нашем распоряжении оказывается замечательная во многих отношениях и практически не изученная векторная алгебра размерности семь, обещающая дать физические приложения в теории полей. (Если обратиться к онтогносеологии Мих. Лифшица, то можно сказать, что семимерная парадигма – это зазор, "щель, путь к классике").

Таким образом, формулируем **проблему** данной работы: теоретико-философские и методологические вопросы измерения пространственных и временных промежутков в евклидовой и псевдоевклидовой системах отсчёта (причём также трёхмерных и многомерных).

Объектом данного исследования являются философско-методологические и философско-математические аспекты собственно-евклидова и псевдоевклидова пространств и пространственно-временных структур.

Предметом исследования выступает изучение свойств физических пространственно-временных структур (физики пространства - времени).

Задачи исследования составляют методологические и философские аспекты, методологические подходы к способам обмера пространства и установлению размерности пространства: математические аспекты обмера пространства и установления размерности пространства- времени.

(Акцентируется внимание на философских подходах в тех направлениях, которые допускают числовые системы, используемые для обмера пространства, в многомерном физическом мире).

Цель исследования:

– рассмотреть физические пространства и исключить все пространства, бессмысленные в плане числа размерности (как математически бессмысленные);

– рассмотреть построение математических моделей многомерных физических пространств пространственно-временного типа в философском и математическом аспектах (в философском аспекте: рассмотреть пространство и время не как таковые, а как процесс движения, как изменение пространства во времени (движение распадается на вращение и на сдвиги – но важно только пространственно-временное изменение, как в теоретико-философском, так и в физико-математическом аспектах)), а в математическом аспекте – увязку времени с пространством;

– увязать 7-мерную пространственную систему с 1-мерной временной в одну единую пространственно-временную 8-и мерную систему;

– исследовать свойства симметрии 7-ми мерного пространства и 8-ми мерного пространства - времени;

– исследовать модели пространства, альтернативные собственно-евклидову (включая 7-мерное псевдоевклидово пространство индекса 4).

Теоретические и методологические основы исследования.

Философско-теоретическую базу исследования составляют работы философов и методологов в области философии науки. Отправной точкой для решения поставленных (в монографии) задач являются результаты, полученные отечественными и зарубежными философами, методологами, математиками и физиками в области фундаментальных проблем современной физики и математики.

В математическом плане в основу исследования вошли: теория чисел, теория гиперкомплексных чисел и следующие из неё векторные алгебры со скалярным и векторным произведением векторов для описания теории полей с целью использования в теоретической физике.

Литература

1. Агафонов А.Ю. Человек как смысловая модель мира. Прологомены к психологической теории смысла. – Самара: Издательский Дом «БАХРАХ - М.», 2000.
2. Акчурина И.А. Философские проблемы познания // Современные проблемы познания диалектического материализма. – М., 1970 т.1.
3. Александров А.Д. Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // Ленин и современное естествознание. – М., 1969.
4. Алексеев И.С. Пространство и квантовая механика // Философские вопросы квантовой физики. – М., 1970.
5. Алексеев И.С. Развитие представлений о структуре атома. – Новосибирск, 1968.
6. Андреев Э.П. Пространство микромира. – М., 1969.
7. Аристотель. Физика// Аристотель. Собр. Соч.Т.
8. Аседуллина С.Х. Психология виртуального конфликта. – СПб.: Изд-во «Нестор», 2003.
9. Ахундов М.Д. Концепция пространства и времени: истоки, эволюция, перспектива. – М., Наука, 1982.
10. Барашенков В.С. Физические пределы пространственно-временного описания // Вопросы философии, 1973, №11 – С. 87-94.
11. Бахтияров К.И. Логика двух- и трехмерная (парадоксы и силлогизмы) // Мысль и искусство аргументации. – М.: Прогресс – традиция, 2003.– (с. 212-242).
12. Башляр Г. Избранное. Том 1. Научный рационализм. – М.; СПб.: Университетская книга, 200 Башляр Г. Избранное. Том 1. Научный рационализм. – М.; СПб.: Университетская книга, 2000.
13. Бескова И.А. Эволюция и сознание: Новый взгляд. – М.: Индрик, 2002.
14. Блохинцев Д.И. Пространство и время в микромире.– М.: Наука, 1970.

15. Бунге М. Пространство и время в современной науке // Вопросы философии. 1970. №7.
16. Вайнберг С. Мечты об окончательной теории. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
17. Василькова В.В. Порядок и хаос в развитии социальных систем: (синергетика и теория социальной самоорганизации) – СПб.: Изд-во «Лань», 1999.
18. Владимиров Ю.С. Метафизика. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002.
19. Владимиров Ю.С. Пространство - время: Явные и скрытые размерности. — М.: Наука, 1989.
20. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства – времени и объединение взаимодействий. – М.: Изд-во Московского университета, 1987.
21. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства – времени и объединения взаимодействий. – М.: Изд-во Московского университета, 1987.
22. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства – времени и взаимодействий. Ч.1. (Теория систем отношений). – М.: Изд-во Московского университета, 1996.
23. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства – времени и взаимодействий. Ч.2. (Теория физических взаимодействий). – М.: Изд-во Московского университета, 1998.
24. Владимиров Ю.С. Фундаментальная физика, философия и религия – Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.
25. Владимиров Ю.С., Мицкевич Н.В., Хорски Я. Пространство, время, гравитация. – М.: Наука, 1984.
26. Владимиров Ю.С., Попов А.Д. Многомерные модели физических взаимодействий типа Калуцы – Клейна // Итоги науки и техники. Классическая теория поля и теория гравитации. Т.1 – М.: ВИНТИ, 1992. – с.5- 48.
27. Воронов Б.Л., Семихатов А.М. Математика и современная картина мира // Гордон А.Г. Ночные диалоги. – М.: Предмет, 2004 – с. 172-188.
28. Восприятие пространства и времени. – Л.: Наука, 1969.
29. Гаврюсов В.Г. Измерение и свойства пространства – времени. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
30. Гачев Г.Д. Гуманитарный комментарий к физике и химии. Диалог между науками о природе и о человеке. – М.: Логос, 2003.
31. Гачев Г.Д. Европейские образы пространства и времени // Культура, человек и картина мира. – М., 1987.
32. Генон Р. Символика Креста. – М.: Прогресс – Традиция, 2004.
33. Генон Р. Символы священной науки. – М.: Беловодье, 2002.
34. Генон Р. Царство количества и знамения времени. Очерки об индуизме. Эзотеризм Данте. – М.: Изд-во «Беловодье», 2003.

35. Горин Д.Г. Пространство и время в динамике российской цивилизации. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
36. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
37. Гроф С. За пределами мозга./ пер. с англ. 2-е изд. – М.: Изд-во Трансперсонального института, 1993.
38. Гроф С. Космическая игра / пер. с англ. – М.: Изд-во Трансперсонального института, 1997.
39. Грюнбаум А. Философские проблемы пространства и времени. – М.: Изд-во «Прогресс», 1969.
40. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ГИТЛ, 1948.
41. Ильенков Э.В. Идеальное // Философская энциклопедия. Т.2. – М.: «Советская энциклопедия», 1962. С. 219-227.
42. Кант И. Сочинения в 6-ти тт. т.1. – М. 1963. С. 71.
43. Капра Ф. Дао физики. – СПб.: «Орис»; «Яна-принт», 1994.
44. Категоризация мира: Пространство и время // Материалы научной конференции филологического факультета МГУ. – М.: «Диалог-МГУ», 1997.
45. Кентавр: Эрнст Неизвестный об искусстве, литературе и философии./ Сост. авт. предисл. А. Леонг. – М.: Издательская группа «Прогресс-Литера», 1992.
46. Козлов В.В. Психотехнологии измененных состояний сознания. Методы и техники. – М.: Изд-во института психотерапии, 2002.
47. Коротков А.В. Векторная алгебра и поля семимерного псевдоевклидова пространства. Деп. рук. ВИНТИ, № 5527-B90.
48. Коротков А.В. Свойства двумерных псевдоевклидовых числовых систем. Деп. рук. ВИНТИ, № 3429-B90.
49. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
50. Коротков А.В., Коротков В.А. Восьмимерное псевдоевклидово пространство-время. Деп. рук. ВИНТИ, № 1577-B91.
51. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в гравитационногироскопном поле четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3775-B91.
52. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в поле восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1578-B91.
53. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное гравитационногироскопное поле и волны в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3773-B91.
54. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное поле и волны в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1579-B91.

55. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 46 с.
56. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория гравитационногироскопного поля. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 42 с.
57. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения гравитационногироскопного поля четырехмерного псевдоевклидового пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3774-B91.
58. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения поля восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1576-B91.
59. Коротков А.В., Коротков В.А. Элементы семимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 66 с.
60. Краткий философский словарь / Кириленко Г.Г., Шевцов Е.В. – М.: Филол.о-во СЛОВО: Изд-во Эксмо, 2003.
61. Кубрякова Е.С. Язык и знание: на пути получения знаний о языке: части речи с когнитивной точки зрения. Роль языка в познании мира / Российская академия наук. Ин-т языкознания.- М.: Языки славянской культуры, 2004.
62. Кузьмин Е.Н. Алгебры Мальцева: Дис....докт. физ.-мат. наук: 01.01.06. – Новосибирск, 1969.
63. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. – М.: Изд-во Архимед, 1991.
64. Кэмпбелл Дж. Тысячеликий герой / Пер. с англ. – М.: «Рефл – бук», «АСТ», К.: «Ваклер», 1997.
65. Лосский Н.О. Чувственная, интеллектуальная и мистическая интуиция. – М.: ТЕРРА – Книжный клуб; Республика, 1999. – (Библиотека философской мысли).
66. Лукьянец В.С. Физико-математические пространства и реальность. – Киев, 1971.
67. Мальцев А.И. Аналитические лупы. Мат. сб. – 1955. Т. 36(78), № 3.– С. 569-576.
68. Мах Э. Познание и заблуждение. Очерки по психологии исследования. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
69. Мостепаненко А.М. Проблема универсальности основных свойств пространства и времени. – Л.: Наука, 1969.
70. Мостепаненко А.М. Пространство и время в макро- маге – и микромире. – М.: Изд-во Полит.лит-ры, 1974.
71. Мостепаненко А.М., Мостепаненко В.М. Почему наше пространство имеет три измерения? // Природа. – 1970. № 9.
72. Мостепаненко А.М., Мостепаненко М.В. Четырехмерность пространства и времени. – М. – Л., 1966.

73. Налимов В.В. Спонтанность сознания: Вероятная теория смыслов и смысловая архитектура личности. – М.: Изд-во «Прометей» МГПИ им. Ленина, 1989.
74. Налимов В. Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. – М.: Прогресс – Традиция, 2000.
75. Никишина Н.И. Проблема пространства в философии Павла Флоренского // Вестник Московского университета. Сер.7. Философия. 1998 №6. С. 45-51.
76. Носов Н.А. Виртуальная психология. – М.: АГРАФ, 2000.
77. Осипов В.Ф. Структура пространства – времени, векторная алгебра и анализ. Т.Т. 1-2. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995.
78. Павлов С.А. Классификация трех- и четырехзначных логик в рамках логики ложности FL4 // Логические исследования. Вып.3 – М.: Наука, 1995. С. 98-112.
79. Панин Д.М. Теория густот: Опыт христианской философии конца XX века. – М.: Мысль, 1993.
80. Панова Л.Г. «Мир», «Пространство», «время» в поэзии Осипа Мандельштама. – М.: Языки славянской культуры, 2003.
81. Паркер Б. Мечта Эйнштейна. – СПб.: Амфора, 2000.
82. Петров М.К. История европейской культурной традиции и ее проблемы. – М.: «Российская политическая энциклопедия» (РОССПЭН), 2004.
83. Платон. Законы/ Пер. с древнегреч.; Общ.ред. А.Ф. Лосева, В.Ф.Асмуса, А.А.Тахо-Годи: Авт.ст. в примеч. А.Ф. Лосева, примеч. А.А.Тахо-Годи.– М.: Изд-во «Мысль», 1999.
84. Подосинов А.В. EX ORIENTE LUX! Ориентация по странам света в архаических культурах Евразии.– М.: Языки русской культуры, 1999.
85. Поликарпов В.С. Наука и мистицизм в XX веке. – М.: Наука, 1990.
86. Полищук Р.Ф., Шелест В.П. Мир как вакуум // Гордон А.Г. Ночные диалоги. – М.: Предмет, 2004.
87. Проективный философский словарь: Новые термины и понятия / Под ред. Г.Л.Тульчинского и М.Н. Эпштейна. – СПб.: Алетейя, 2003.
88. Пространство и время в восприятии человека: историко- психологический аспект. Ч. I и II.– СПб., 2003.
89. Рассел Б. Человеческое познание. Его сфера и границы.– М.: Терра - Книжный клуб; Изд-во «Республика», 2000.
90. Реале Дж., Антисери. Д. Западная философия от истоков до наших дней. Т.1. Античность. – СПб.: ТОО ТК «Петрополис», 1994.
91. Реале Дж., Антисери. Д. Западная философия от истоков до наших дней. Т.4. От романтизма до наших дней. – СПб.: ТОО ТК «Петрополис», 1997.
92. Рейхенбах Г. Философия пространства и времени. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
93. Родзинский Д.Л. Сознание античного мудреца. – М.: Аграф, 2003.

94. Румер Ю.Б. , Овчинников Н.Ф. Пространство – время, энергия – импульс в структуре физической теории // Вопросы философии, 1968, №4.
95. Румер Ю.Б. Исследования по 5 - оптике. – М.: ГИТТЛ, 1956.
96. Румер Ю.Б. Принципы сохранения и свойства пространства и времени // Сб. Пространство, время, движение. – М.: Наука, 1971, с. 107-125.
97. Сазанов А.А. Четырехмерный мир Минковского. – М.: Наука, 1988.
98. Свидерский В.И. Пространство и время. – М., 1958.
99. Свидерский В.И. Философское значение пространственно-временных представлений в физике. – Л., 1956.
100. Словарь философских терминов / Научная редакция профессора В.Г. Кузнецова. – М.: ИНФРА – М, 2004.
101. Смирнов В.А. Многомерные логики // Логические исследования. Вып. 2.– М.: Наука, 1993, С. 259-278.
102. Смирнов И.В., Безноснюк Е.В., Журавлев А.Н. Психотехнологии: Компьютерный психосемантический анализ и психокоррекция на неосознаваемом уровне. – М.: Прогресс, 1996.
103. Станюкович К.П., Колесников С.М., Московкин В.М. Проблемы теории пространства, времени и материи. – М., 1968.
104. Степанов Ю.С. Константы: Словарь русской культуры: изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Академический проект, 2001.
105. Степин В.С., Кузнецова Л.Ф. Научная картина мира в культуре техногенной цивилизации. – М., 1994.
106. Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства – времени. – М.: «Мир», 1971.
107. Труфанов С.Н. Грамматика разума. – Самара: Гегель – фонд, 2003. – С. 188-189.
108. Успенский П.Д. Tertium Organum. Ключ к загадкам мира. – СПб., 1992.
109. Философия: энциклопедический словарь / Под ред. А.А. Ивина. – М.: ГАРДАРИКИ, 2004.
110. Философский энциклопедический словарь. – М.: ИНФРА – М, 1997.
111. Философская энциклопедия. Т.4. – М.: «Советская энциклопедия», 1967.
112. Флоренский П.А. Анализ пространственности и времени в художественно-изобразительных произведениях. – М.: Изд-во группа «Прогресс», 1993.
113. Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. – М.: «Лазурь», 1991.
114. Фок В.А. Понятие однородности, ковариантности и относительности в теории пространства и времени // Вопросы философии. 1955. №1.
115. Фок В.А. Современная теория пространства и времени // Природа. 1953. №12.

Глава 1

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СОВРЕМЕННОМ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

Говоря о величине размерности пространства, а также времени, стоило бы отметить следующие нюансы: во-первых, о каком пространстве идёт речь – математическом или физическом? Скорее всего, речь идёт о физическом пространстве, поскольку вещь в конечном итоге сводится к понятию пространства- времени. Физическое пространство принято считать трёхмерным, хотя в математическом аспекте зачастую рассматриваются двумерные пространства и одномерные пространства как частные случаи трёхмерного физического пространства, а также в математическом аспекте рассматриваются пространства многомерные – с размерностью больше трёх – вплоть до бесконечно мерных пространств.

В математическом аспекте возникают понятия евклидовости пространства – точнее надо было бы сказать о собственно евклидовых пространствах, либо псевдоевклидовых пространствах, гильбертовых пространствах и других типах пространств, которые подробно изучаются в математике. В физическом аспекте имеет смысл говорить только о трёхмерных евклидовых пространствах, либо их расширениях до многомерных евклидовых пространств. Причем широко задействованы понятия собственно евклидова трёхмерного пространства, а также псевдоевклидова пространства в плане псевдоевклидова пространства- времени Минковского. Это пространство-время – четырёхмерное, трёхмерное пространство и плюс одна временная координата. Здесь конечно, несколько несвойственный математическим аспектам процесс расширения пространства до четырёхмерного – с трёхмерного до четырёхмерного.

Тем не менее, четырёхмерное псевдоевклидово пространство- время Минковского широко используется и признано всеми физическими школами, начиная со времен Минковского и Эйнштейна. Необходимо отметить, что, говоря о размерности пространства или вообще о пространствах, нужно отметить, что пространственные соображения возникают из понятия чисел, как таковых¹. В частности, трёхмерное векторное пространство – или вернее трёхмерная векторная алгебра, которая является математической основой теоретической физики – построена как три равнозначные пространственные числовые направления – и использует понятие действительных чисел в своей основе, то есть, *речь идёт о расширении действительных чисел*.

Поэтому, если говорить о построении многомерных пространств вообще, то стоило бы уточнить: а как формировалось понятие трёхмерности нашего физического пространства? Это был процесс длительный и неоднозначный. Сначала, естественно было одномерное пространство: измерение

¹ Ю.И. Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов в работе [4, с. 44-50] полагают евклидову геометрию примером физической структуры на одном множестве.

шагов от одной пещеры до другой, затем появилась необходимость измерения площади пещеры, затем стали измерять объёмы сосудов – так формировались понятия одномерной, двухмерной и трёхмерных величин (*видимо, они сформировались в эпоху неолитической революции*). Для этого пришлось создать теорию – не теорию вернее, а практику целых чисел, использования целых чисел, потом рациональных чисел, затем действительных чисел – и действительные числа, поле действительных чисел, стало основой для построения очень многих разделов физики и математики – в частности, трёхмерной векторной алгебры.

Трёхмерная векторная алгебра, как таковая, в теоретическом аспекте сформировалась значительно позже, это далеко уже не пещерное время, это 1843 год, когда Гамильтон построил трёхмерную векторную алгебру, а параллельно этим же самым занимался Грасман. Трёхмерная векторная алгебра была получена Гамильтоном следующим образом: к тому времени уже утвердилось понятие комплексного числа, которое было определено как удвоение системы действительных чисел. Процедура удвоения была известна и изучена. Гамильтон применил эту процедуру удвоения действительных чисел, но по отношению к комплексным числам и получил систему кватернионов, четырёхмерных гиперкомплексных чисел. Эти числа получили название кватернионов Гамильтона. Так вот, Гамильтон сначала получил систему кватернионов, а затем из неё путем определенных преобразований, точнее сказать, путем произведения чисто векторных кватернионов, получил четырёхмерное число, распадающееся на скалярную часть, скалярное произведение, как сказал Гамильтон, и векторную часть, трёхмерную векторную часть, векторное произведение, то есть в результате было получено скалярное и векторное произведение трёхмерных числовых величин.

Другими словами была получена трёхмерная векторная алгебра, в которой наряду с линейным векторным пространством, с определяющими семью операциями, использованы также операции скалярного и векторного произведения двух векторов, двух трёхмерных векторов. *Так утвердилось трёхмерная концепция нашего физического пространства.* Дело в том, что трёхмерная векторная алгебра была тут же принята на вооружение физиками-теоретиками. Максвелл строит теорию поля, появляются такие соотношения как теорема Остроградского-Гаусса, теоремы Стокса, механика сплошных сред, газодинамика, гидродинамика – *то есть трёхмерная векторная алгебра становится математической базой теоретической физики, трёхмерной теоретической физики. Очень быстро, в течение буквально двух, трёх десятилетий были заложены основы теории теоретической физики, в отличие от предыдущих этапов развития физики, которая была чисто экспериментальной наукой. Теперь физика становится на рельсы теоретической физики – так сформировалась классическая физика.*

Что же касается собственно определения размерности пространства, то в философской и естественнонаучной литературе утвердилось определение, „являющееся развитием рекуррентного определения Пуанкаре, предложенное Урысоном и Менгером в следующей формулировке:

- 1) Пустое множество имеет размерность – 1.
- 2) Размерность пространства x есть наименьшее целое число n , такое, что каждая точка $p \in x$ обладает произвольно малыми окрестностями, границы которых имеют размерность меньшую, чем n .

В топологии доказывается теорема о том, что n -мерное в интуитивном смысле евклидово пространство действительно имеет размерность n . Из этого следует, что евклидова поверхность имеет размерность 2, линия – 1, а пространство – 3“, — пишет А.М. Мостепаненко [5, с.12-13].

Дальнейшие аспекты были определены однозначно тем, что появились физические эксперименты, которые подтверждали теорию трёхмерных векторных чисел в плане их применения к физике. Это, прежде всего, теория электромагнитных волн – в частности, со времен Герца и изобретения радио Поповым – *стало совершенно однозначно понятно, что трёхмерный физический мир устраивает физиков*. Он устраивал физиков настолько хорошо, решение трёхмерных задач во всех разделах физики были настолько привлекательны и давали верные результаты, что физики забыли о том, что, возможно наш трёхмерный мир является, просто-напросто, частным случаем более широкого мира. А зачем? Трёхмерные результаты вполне устраивали физиков. (Более того, как однажды сказал один доктор наук, крупный специалист в области электротехники: «Задачи электродинамики разрешимы в плане трёхмерных представлений, а зачем нам что-то другое?»).

Так вот. Даже специальная теория относительности, построенная на базе четырёхмерного пространства-времени Минковского, мало что изменила в плане трёхмерных пространственных представлений. Она просто связала трёхмерные пространственные представления с временными представлениями. Оказалось, что пространство- время это суть, общий объект и нельзя рассматривать пространство, как таковое, а время, как таковое, независимые друг от друга. Имеет смысл рассматривать только пространственно- временные соотношения, преобразования, результаты и т.д. В этом плане, конечно очень велика роль специальной теории относительности, но пространственные соотношения остаются в любом случае теми же самыми, евклидовыми трёхмерными. Не более, не менее. Стоит вопрос: а почему, собственно, мы ограничили себя этими рамками? Почему рассматриваем только трёхмерный вариант? И почему только собственно евклидов вариант?

В 60-х годах XX-го столетия физики впервые столкнулись с этим вопросом. Оказалось, что эксперименты в области физики элементарных частиц дают некоторые новые физические законы – закон сохранения барионного числа, лептонного числа и т.д. Законы сыпались как манна с небес, один за другим. Всё новые и новые законы. В тоже время трёхмерная физика не в состоянии была описать эти законы. Трёхмерная физика даёт только три закона сохранения – закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса. Ничего более вынуть из трёхмерных представлений не удастся. Поэтому, впервые, пожалуй, с середины XX-го столетия – в неклассической физике – заговорили о многомерном, не просто пространстве математическом, а многомерном физи-

ческом пространстве. И сразу возникли вопросы: какой же размерности физическое пространство имеет смысл? И какой математикой такое пространство следует описывать?

Утвердительного ответа на оба вопроса до сих пор никто не дал. Тем не менее, становится понятным, что трёхмерная физика должна быть частным случаем многомерной физики. На языке математики это означает, что трёхмерная векторная алгебра должна быть подалгеброй многомерной алгебры. Поэтому стоит сразу рассмотреть теорию гиперкомплексных чисел и пути ее расширения. Ещё в XIX-ом столетии вслед за Гамильтоном, Кэли дает восьмимерный октонионный вариант гиперкомплексного числа, но он был не востребован по уже указанным причинам и если не забыт, то по крайней мере плохо использован, плохо изучен. Это с одной стороны. Хотя результаты были весьма интересные. Например, система октонионных чисел замыкает круг гиперкомплексных числовых систем с делением. Имеет смысл говорить только о четырех системах чисел с делением – это: одномерные действительные числа, двумерные комплексные, четырёхмерные кватернионы и восьмимерные октонионы. Всё. Круг замкнулся. Теоремы Гурвица и Фрабениуса замкнули этот круг числом восемь. Это с одной стороны. С другой стороны: использование той же процедуры, которой Гамильтон получил трёхмерные векторные числа из восьмимерных октонионов, можно получить семимерные векторные числа со скалярным и векторным произведением семимерных уже векторов. Трёхмерные векторные числа будут получаться просто, как частный случай, из семимерных. Это важнейший момент.

И, наконец, математики Новосибирской школы показали, что трёхмерная алгебра является подалгеброй только семимерной алгебры. Только семимерной алгебры. Снова круг замкнулся. Нужно было рассматривать семимерный вариант со скалярным и векторным произведением двух векторов, т.е. семимерную векторную алгебру. Она построена. Построена эта алгебра, а на ее основе получены основные предпосылки для построения теории поля, квантовой механики и всех разделов физики, базирующихся на семимерном векторном аппарате. Сделано уже очень немало, хотя мало кто занимается изучением этого варианта, этого вопроса.

Итак, мы можем утвердительно говорить, что размерность физического пространства оказывается равной семи. Трёхмерное пространство является частным случаем семимерного пространства. Число фундаментальных законов на основе семимерной векторной алгебры – законов сохранения, возрастает, по крайней мере, они связаны с векторным произведением не только двух векторов, но и трех, четырёх, пяти, шести векторов, а также со скалярными функциями антисимметрическими функциями, смешанное произведение не только трёх векторов, но также четырёх, семи векторов.

Эти функции дают сохраняющиеся инвариантные величины при преобразовании семимерных векторных пространств. До сих пор – до этого момента – речь шла только о евклидовом, надо сказать, собственно евклидовом характере пространств, однако, имеет смысл затронуть другие векторные алгебры. Векторные алгебры, насколько было показано ещё Га-

мильтоном, не имеют деления, то есть процедура деления, как таковая, не используется даже в трехмерной векторной алгебре. Наличие единицы также не требуется для векторных величин, наличие единицы имеет смысл только при преобразованиях векторных величин, а наличие единицы, как таковой, вовсе необязательно в векторной алгебре. Поэтому, следовало бы говорить о возможностях построения векторных алгебр в следующих из процедур, не связанных с процедурой деления. Уже в двухмерном варианте используются, так называемые, двойные числа и дуальные числа. Это числа, вообще говоря, без деления, и по этой причине математики не задерживали развитие этих чисел. Но поскольку мы теперь говорим, что деление нам вовсе не требуется, этот вариант становится привлекательным – и наряду с собственно евклидовыми расширениями можно строить псевдоевклидово и дуальноевклидово расширения как двухмерные, так четырехмерные и восьмимерные. Из них идут алгебры одномерные, трехмерные и семимерные алгебры, векторные алгебры. И эти алгебры отличаются от собственно евклидовых алгебр Гамильтона-Грасмана либо семимерной векторной собственно евклидовой алгебры.

Эти алгебры уже рассмотрены, получены инварианты при преобразованиях этих векторных величин, получены матрицы преобразований, показано, что они в ряде случаев, по крайней мере, псевдоевклидовом варианте, определяются групповыми свойствами. Это группы преобразований и надо отметить, что это вовсе не изученные и не рассмотренные группы преобразований, хотя результаты уже получены. Но требуется их интенсивное использование и применение. Это все говорит о том, что имеет смысл рассматривать не только трехмерные, но и семимерные физические пространства, причем не только собственно евклидовы, но и псевдоевклидовы, описываемые соответствующей векторной алгеброй. Время, как таковое, играет ту же роль, что и в специальной теории относительности Эйнштейна-Минковского. Это дополнительная компонента, одномерная, скалярная, по которой можно осуществлять операции дифференцирования, а также применять операции интегрирования величин и т.д. Это скалярная величина, и она может быть точно таким же образом, как в специальной теории относительности Эйнштейна, добавлена к трехмерному псевдоевклидовому либо семимерному собственно евклидовому или псевдоевклидовому пространству, давая восьмимерное пространство-время, но, естественно, теперь уже с псевдоевклидовым характером преобразования величин. Что стоило бы отметить ещё? Пожалуй, это основа для развития современной физики, многомерной физической теории. Это – основные направления. Можно использовать результаты – те, что были получены при анализе трехмерных векторных алгебр во всех разделах физики, математической физики, теоретической физики и получать соответствующие варианты в семимерных евклидовых либо псевдоевклидовых алгебрах.

Стоило бы отметить еще один немаловажный момент. Все алгебры, векторные алгебры в частности, базируются на понятии чисел, в частности понятии целого числа, а вслед за этим – понятии рациональных, иррацио-

нальных и действительных чисел вообще. Поэтому, очень важно проанализировать: а правильно ли определены нами числа – в частности целые числа, как таковые – и не имеется ли тут какого-нибудь иного направления развития числовых исследований? Исследований чисел? На этот вопрос можно было бы ответить так: числа, в частности целые числа, нами еще изучены крайне слабо, хотя время показало, что со времён Пифагора прошло 2500 лет, а мы практически мало сдвинулись с понятия целого числа. Вот пример. Целое число, натуральный ряд целых чисел определяется следующим образом. Каждое последующее число равняется предыдущему числу плюс единица. Первому числу ряда натуральных чисел. Это определение не подлежало критике, настолько удобно оно было в своей основе. Однако, оно не единственно. Можно показать, что определение натурального ряда чисел можно связать с тремя последовательными числами. Каждое число ряда равно удвоенному предыдущему числу без предпредыдущего. Т.е., $z_{n+1}=2z_n-z_{n-1}$ ¹.

И это совершенно иное определение числа. Например, три равняется удвоенной двойке минус единица, четыре равняется удвоенной тройке минус два и т.д., любое число натурального числового ряда определяется этими выражениями. Но если это так, то стоило бы проанализировать: а что может дать такое новое определение целого числа? Оказывается, очень немало. Оказывается, что это рекуррентное соотношение для трёх последовательных чисел целого ряда чисел является частным случаем ортогональных многочленов Лагерра индекса один и порядка $n-1$, то есть, это цепочка многочленов, дающая в конечном итоге при независимой переменной равной 0 целый ряд чисел, натуральных чисел. *То есть целые числа оказываются жестко связаны с многочленами Лагерра, и эта связь фундаментальна, потому что хотя целое число при этом и является свободным членом многочлена, но это только частный случай многочлена, а многочлен, как таковой, это совершенно иной объект, нежели целое число.* Что на этом примере можно сказать?

Физика пока что находится в начале своего пути развития. Она как витязь у того камня – налево пойдёшь, направо пойдёшь, прямо пойдёшь... Путей очень много, но, тем не менее, это пути однозначно определённые, однозначно заданные, заданные математическими аспектами теории числа. Мы до сих пор, как и 2500 лет назад, можем повторить слова Пифагора: «Всё сущее есть число». И к числу нужно относиться с большим уважением, с большой настойчивостью изучать свойства этих чисел. Физика в начале своего пути развития, все ещё впереди, и все будущие результаты в физических аспектах связаны с изучением теории чисел.

Как было отмечено выше, трёхмерная векторная алгебра стала фундаментом теоретической физики, превратившейся в XX веке в новую «философию природы» [1], в которой размерность физического пространства (пространства-времени) занимает по значимости одну из ведущих позиций.

¹ см. Приложение III.

Размерность пространства (пространства-времени) в физических парадигмах и исследовательских программах является их специфической особенностью, позволяющей их классифицировать. Ниже мы приводим классификацию физических парадигм и исследовательских программ, разработанную физиком-теоретиком Ю.С. Владимировым.

Ю.С. Владимиров делит физическую категорию материи на две физические категории: на частицы и на поля переносчиков взаимодействий [3, с. 83]. Автор считает, «что это отражает суть физического мироздания и позволяет классифицировать парадигмы современной фундаментальной физики» [3, с. 83].

Согласно Ю.С. Владимирову, из понимания сути материи и пространства происходят 10 физических пространственных парадигм [3]:

Первая физическая парадигма включает в себя теории со следующими тремя самостоятельными категориями:

- а) пространство-время,
- б) частицы (фермионные поля),
- в) поля переносчиков взаимодействий (бозонные поля).

Ко второй физической парадигме относятся теории и программы, в которых физическая картина мира представляется из двух первичных начал: категории пространства и времени и категории полей. Во главу угла ставится задача получить частицы в виде неких полевых образований. В идеологически чистых вариантах подобных теорий пространство-время полагается плоским, а поля являются бозонными.

К третьей физической парадигме относятся теории прямого межчастичного взаимодействия (теория Фоккера-Фейнмана), В такой теории среди первичных понятий отсутствуют поля переносчиков взаимодействий (бозонов). Тела взаимодействуют непосредственно друг с другом «на расстоянии».

К четвертой парадигме относятся теории (программы), в которых классическое пространство-время исключается из числа первичных физических категорий и во главу угла ставится задача получения пространства-времени как вторичного понятия, вытекающего из так или иначе заданных категорий частиц и переносчиков взаимодействий.

Пятая парадигма: Общая теория относительности. Во главу угла ставится не генерация одной из физических категорий (частиц), а слияние двух физических категорий: (плоского) пространства-времени и гравитационного поля в одну новую обобщенную физическую категорию искривлённого пространства-времени.

Особое место среди теорий пятой парадигмы занимают многомерные геометрические модели физических взаимодействий, обычно в литературе называемые теориями Калуцы-Клейна. Они основаны на идеях ОТО, т.е. строятся в рамках искривлённого (риманого) пространства-времени, однако полагается, что его размерность больше четырёх.

Шестая парадигма: теория физических структур (ТФС), развивается со второй половины 60-х годов Ю.И.Кулаковым и его учениками в Новосибирском университете [2]. ТФС строится исходя из понятий расстояний, из соображений поставить условия на отношения, вследствие чего теория принимает вид известных геометрий. Автор ТФС предположил, что условия на отношения-законы для них имеют характер алгебраических отношений, связывающих друг с другом числа – отношения между элементами.

Седьмой парадигмой являются теории Грасмана-Картана. Это объединенная парадигма, т.е. в ней используется обобщенная категория, объединяющая спинорные частицы и бозонные переносчики взаимодействий. Вторичной физической категорией выступает пространство-время, точнее специфическое обобщение классического пространства - времени до т.н. суперпространства. Его можно понимать как своеобразное многообразное пространство- время, однако» если в теориях Калуцы-Клейна оно вводилось для геометрического описания бозонных полей, то в суперсимметричных теориях оно предназначено для описания спинорных полей.

Восьмая парадигма: геометродинамика Уилера. Она представляет собой, – как пишет Ю.С. Владимиров, – «физическую философию (религию) с одним первичным началом. Она соответствует монотеистическим духовным религиям, при этом не так важно, как называть это первоначало: Богом, дао, акашей, или как-либо иначе. Роль первичного начала в этой физической религии играет обобщённое (искривлённое, закрученное, многосвязное и т.д.) пространство (-время)[3]».

В новой, девятой физической парадигме, названной ее автором Ю.С. Владимировым бинарной геометрофизикой, «производится отказ от априорно заданного пространственно-временного континуума и вместо него используется чисто алгебраический метод описания природы» [3]. Бинарная геометрофизика достаточно полна, т.к. из ее основных понятий естественным образом удастся вывести все три ключевые физические категории: пространство - время, частицы (фермионы) и поля переносчиков взаимодействий, причём все они оказываются не независимыми, а представляют собой различные аспекты единой обобщенной категории БСКО – бинарные системы комплексных отношений [4].

Десятая парадигма: теория супергравитации.

В ней, в отличие от теорий, седьмой парадигмы, предлагается ограничиться одной обобщенной категорией "искривлённого" суперпространства. В духе многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна развивается теория супергравитации в пространстве-времени $n > 4$ измерений [2].

В 1978 г. было установлено, что структура суперсимметричных алгебр вместе с ограничениями на спины получающихся полей устанавливает верхний предел для размерности n пространства – времени, в котором формулируется теория супергравитации. Оказалось, что размерность не может превышать одиннадцати.

Сами же многомерные пространства отражают наличие у исследуемого объекта каких - либо совсем непространственных свойств, которые только выражаются как "пространственноподобные" с помощью различных математических операций. Так, если к трем пространственным координатам объекта добавляются еще три координаты, выражающие, например, три компоненты импульса этого же объекта, то для обозначения совокупности всех этих данных говорят о шестимерном фазовом пространстве, хотя собственно пространственных координат здесь, как обычно, три. Понятие шестимерного фазового пространства, т. о., есть математическая абстракция, не претендующая на замену понятия трёхмерного пространства, оно не фикция, но и не пространство в прямом смысле этого слова.

В квантовой физике использование метода многомерности пространства является одним из приёмов, позволяющим описывать недоступные чувственному восприятию ("ненаблюдаемые") физические явления микромира.

Многомерные пространства нашли своеобразное применение (как математический метод) в программном обеспечении ЭВМ, в частности – в экспертных системах [6]. Современное программное обеспечение позволяет манипулировать любыми числами и любыми объектами, размещая их в пространстве описания. Это не плоскость и не трехмерное пространство, а совершенно новое пространство, определяемое используемыми переменными, причем каждая соответствует одной оси. И значения этих переменных, соответствующие конкретному объекту, определяют его положение в пространстве описания, где объекты могут определяться в терминах любого числа переменных. Если у нас одна размерность соответствует одной переменной, то множество объектов определённых десятью переменными, существует в десятимерном пространстве описания.

Литература

1. Ансельм А.А. Теоретическая физика XX века – новая философия природы // «Звезда». 2000. №1. (с.194-213).
2. Введение в супергравитацию: пер. с англ./ Под ред. С. Феррары, Дж. Тейлора.– М.: Мир, 1985.
3. Владимиров Ю.С. Фундаментальная физика, философия и религия.– Кострома: Изд-во МИИЦАОСТ, 1996.
4. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.– М.: Изд-во "АРХИМЕД", 1992.
5. Мостепаненко А.М. Размерность пространства и силы природы // Пространство, время, движение.– М.: Наука, 1971. (с.19-20).
6. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему: Пер. с англ.– М.: Энергоатомиздат, 1991.

Глава 2

КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОВРЕМЕННОЙ ПАРАДИГМЫ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ (В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ – СТО И ОТО, КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И СИНЕРГЕТИКЕ)

По вопросам критики пространственно- временных представлений теории относительности специальной и общей, а также квантовой механики следует сказать следующее.

Современная теория пространства-времени — теория относительности — специальная и общая, квантовая механика строятся на базе трёхмерных представлений о пространстве. Поэтому, этот момент является основополагающим во всех пространственно-временных теориях. И по этой причине следует более глубоко остановиться на критике четырёхмерного пространства-времени, представления о четырёхмерном пространстве-времени. Кто сказал, что наше пространство трёхмерно?! Все говорят, все говорят, начиная со школьной скамьи. По какой причине? Потому, что эта парадигма, собственно говоря, признана почти 150 лет назад, по крайней мере, основательно, окончательно и бесповоротно. Якобы так.

Однако, если более глубоко посмотреть на формирование трёхмерных пространственных представлений, то оказывается, что не так всё гладко с этим вопросом. Пространственные представления формировались параллельно и вследствие, можно сказать, представлений формирования представлений о понятии числа. Ещё Пифагор 2500 лет назад пытался строить двухмерные пространственные структуры на основании анализа соотношений сторон прямоугольных треугольников. Евклид, пятью столетиями позже, развил эти понятия планиметрии на все геометрические понятия и построил пространственные представления о трёхмерном евклидовом пространстве.

Говоря более точно, в началах Евклида изложены основы трёхмерной геометрической схемы. Таким образом, основы трёхмерных представлений лежат где-то в двух тысячелетиях от наших современных дней, или за 2000 лет пространственная геометрическая структура мало изменилась, она немного дополнилась, переросла в пространственно-временную структуру, но трёхмерная пространственная евклидова схема сохранена в основе.

Алгебра трёхмерная Гамильтона-Грасмана была создана в 1843 году – она только видоизменила запись трёхмерных пространственных представлений Евклида, дала аналитическую форму записи этих представлений. Классическая механика переписана в XIX веке в аналитической форме. Согласно наиболее фундаментальным представлениям классической физики, все явления окружающей природы происходят в трёхмерном собственноевклидовом пространстве 3D и протекают во времени t (см. табл. 2.1).

Специальная теория относительности, опять таки, лишь видоизменила запись пространственно- временных уже соотношений, но тоже ничего не внесла, собственно говоря, в трёхмерные евклидовы представления. Она только обобщила трёхмерную евклидову геометрическую схему пространственной структуры с временной схемой, соединив всё в одном конгломерате (см. табл. 2.1). Общая теория относительности базировалась на соотношениях четырёхмерного пространства-времени, но расширила их на криволинейные случаи (см. табл. 2.1). То есть, речь опять-таки идёт о трёхмерном пространстве, но уже криволинейной структуры, и естественно в связи с временной координатой. То же самое и в квантовой механике на первых порах точно также (см. табл. 2.1).

Общая теория относительности, как уже было сказано выше, лишь видоизменила запись. Основная специфика ОТО заключается в том, что в ней меняется природа гравитации: она перестаёт быть физической силой – и становится геометрической, причём геометрия из статической переходит в новое качество, становится динамической. И формально вся разница между временем и пространством в специальной теории относительности сводится к разнице в знаке перед временной и пространственной координатами в интервале $dS^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, характеризующем инвариантное расстояние между двумя точками пространства-времени. Если вместо реального времени t ввести «мнимое» (евклидово) время $\tau = ict$, то это расстояние приобретает вид $dS^2 = c^2 d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ и различие между пространственными и временной координатами пропадает – все они в данном случае эквивалентны, и «мнимое» время τ ничем не отличается от обычного пространственного направления.

Или, иначе говоря, согласно фундаментальным представлениям релятивистской физики, все явления окружающей нас природы происходят в бесконечном 4-мерном пространстве – времени R_4 , метрика которого определяется распределением гравитирующих масс.

Таким образом, ОТО не изменила трёхмерные пространственные представления, она только привела запись линейных пространственных форм к криволинейным пространственным формам. Речь идёт в любом случае о трёхмерном пространстве – евклидовом трёхмерном пространстве, но в криволинейных координатах – и, безусловно, в связи с псевдоевклидовым конгломератом в пространственно-временных схемах, время само собой в общей теории относительности создает четвёртую координату и также вписывается в криволинейную структуру.

Квантовая механика: XX век – прошло сто лет трёхмерных представлений алгебраических схем Гамильтона. Однако, сотня лет не изменила опять-таки ничего в квантовой механике в отношении представлений о трёхмерном евклидовом пространстве. *Следует особо подчеркнуть, что философия пространства и времени, представленная в специальной и общей теории относительности, исходит из предположения, что пространство является системой конкретных отношений между физиче-*

скими объектами, а время есть некоторая функция изменений, происходящих в этих объектах. Иначе говоря, она является реляционной теорией пространства-времени (сущностью реляционной теории пространства-времени является порядок смены состояний), а в сочетании с квантовомеханическими воззрениями возвращает нас к идее Платона о том, что подлинной природой времени является Потенциальность [12].

Квантовая механика, с которой начался неклассический период развития физики – 1900-1927 гг. – внесла свой вклад в исследование феномена пространства-времени. Квантовая механика базируется на знаменитом уравнении Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t)$$

где i – мнимая единица,

$\hbar$ – постоянная Планка,

$\vec{r}$ – радиус – вектор; пространственная координата,

t – время,

$\hat{H}$ – оператор Гамильтона (энергия в операторном виде).

Вводимое здесь новое фундаментальное понятие Ψ «пси-функция» – характеризует состояние и микроскопические свойства квантовой системы.

Квантовая механика, как и теория относительности, феноменологична – то есть имеет описательный характер, а не объяснительный. Математика абсолютизирована, а физическая суть описываемых явлений выискивается в математических моделях, а не наоборот – не математические функциональные зависимости выбираются от физического содержания явлений, что было присуще классической физике. В результате время выступает как некая особая, в чем-то отличная от других координата, что иллюстрируется на примере уравнения Шрёдингера: по пространственным координатам берутся вторые производные, а по времени – первая.

Квантовая механика вплоть до середины XX-го столетия не внесла ничего нового в трёхмерные пространственные представления, потому что в основе квантовой механики, опять-таки, оставалась трёхмерная евклидова схема Гамильтона. В теоретическом отношении имеются в виду – либо четырёхмерная пространственно-временная структура Минковского, либо, в лучшем случае, опять-таки, представления общей теории относительности Эйнштейна. Хотя в квантовой механике эта теория большого распространения не приобрела. Единственное, что можно отметить о XX веке – XX век был переломным в представлениях о пространственно-временных соотношениях, вернее о пространственных, лучше сказать, соотношениях.

Проблема пространства в квантовой механике неразрывно связана с проблемой времени, поскольку представления о пространстве связаны с основаниями математики [10]. Современная математика, как известно, исходит из представления пространства в виде непрерывного множества точек, в котором определены предельные точки подмножеств. Применение такого представления и соответствующего ему математического формализма в

квантовой физике, в значительной мере оперирующей дискретными величинами, часто ведет к бесконечностям. Попытки устранить их путем совершенствования самого формализма желанных результатов не дали [11].

Предполагается, что затруднения с бесконечностями в принципе способна преодолеть концепция дискретности пространства – времени, представления о которой сопутствуют развитию физики и математики [3].

Гипотеза атомистичности материи и пространства, гипотеза Римана о дискретном многообразии как внутренней причине возникновения метрических отношений, труды Гильберта, Клиффорда и Стонея положили начало отходу от представления непрерывности пространства как единственно пригодной математики [1], а также математического аппарата физики. П. Дж. Коэн [8] доказал независимость континуум – гипотезы от остальных аксиом квантовой теории множеств – возможность различных теорий множеств, необязательно непрерывных.

Однако, обсуждение гипотез Кошиа, Снайдера и Шапиро [8, с. 220-228] показало недостаточную обоснованность идеи квантового пространства и пространства – времени, приводящей к существенным трудностям и противоречию с теорией относительности [6]. В результате в квантовой физике возникла противоречивая ситуация: с одной стороны разногласие между квантовым характером явлений природы и непрерывностной основой их математического описания приводит к противоречащим опыту бесконечным значениям масс и энергии частиц; с другой стороны – применение квантовости к вопросам структуры пространства никак не согласуется с принципами относительности и соответствия. Развитие квантовой физики могло бы пойти по другому пути, и многих противоречий удалось бы избежать, если бы более точная модель пространства – времени была бы известна в начале XX в. – в момент начала исследований микромира [14, с. 1]. Могли бы быть иными и основные философские вопросы фундаментальной физики начала XXI в., коими являются: квантование и геометризация.

На рубеже XX – XXI вв. выяснилось, что микроструктура пространства и времени в микромире очень сложная, постоянно усложняется и нарастает по мере уменьшения масштабов и роста энергий. Уровень сложности микроструктуры микромира приближается к уровню сложности биологических структур.

Также выяснилось, что наш мир не только искривлён, но ещё и слоён: микроструктура микромира имеет несколько типов сложной структуры: электромагнитное поле соответствует одному типу слоистой структуры – откуда следует, что электричество – это деформация слоистой структуры пространства – времени; слабому взаимодействию соответствует другой тип структуры, сильному – третий тип...

Все эти слои переплетаются и взаимодействуют между собой, а пространство – время микромира не обладает фиксированными свойствами, но зависит от процессов. Топологический эффект качественно изменяет процессы в пространстве – времени слоистой структуры. Один из основ-

ных результатов развития квантовой механики заключается в том, что удалось всё же понять что-то о природе случайного и понять что-то совсем труднопонимаемое о пространстве и времени.

Возвращаясь к анализу размерности пространства, следует отметить, что дело в том, что трёхмерная пространственная геометрия в результате даёт аналитическую геометрию и физику с тремя законами сохранения – энергии, импульса и момента импульса, и в принципе не может дать большее число законов сохранения по той причине, что обобщённые координаты ограничены первой производной. В результате, все соотношения приобретают вид такой, что в них фигурирует радиус-вектор, скорость и ускорение, и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Большее число законов сохранения трёхмерная пространственная структура дать не может. Она даёт только ТРИ закона сохранения в результате принятых исходных предпосылок – ограничения числа производных обобщённых координат, иными словами.

Однако, в 50-е годы XX века, интенсивное развитие экспериментальной ядерной физики привело к открытию целого ряда законов сохранения. К ним можно отнести законы сохранения барионного, лептонного числа, чётности и т.д. ... Можно продлить этот список. Какое число законов сохранения фундаментально, какие законы являются фундаментальными, пока непонятно, но определённо стало ясно, что трёхмерная структура пространственная не устраивает современную физику элементарных частиц, физику ядра, физику атома. *В результате заговорили о многомерных, о зазеркальных пространственных структурах, о параллельных мирах, о чем хотите – речь идёт об увеличении числа координат в пространственной схеме.*

Так вот, исходя из этих соображений, физика элементарных частиц получила: во-первых, мощный импульс для развития пространственно-временных представлений, с одной стороны, и с другой стороны, физика оказалась бессильна – теоретическая физика, в плане описания экспериментальных закономерностей. По крайней мере – до сих пор прошло уже полстолетия, сдвига в теоретическом отношении серьёзного нет. Никакие теории струн, либо другие физические теоретические схемы не дали нужного результата и остались гипотетическими.

В связи с этим стоит задуматься о математической базе современной теоретической физики, и экспериментальной проверке результатов той или иной схемы. В связи с этим нужно попытаться проанализировать те воззрения, те взгляды на пространственные структуры, которые были незыблемыми ранее.

Итак, Гамильтон уже принял трёхмерную пространственную схему с одной стороны – и евклидову геометрию с другой стороны. Поэтому подвижки могли быть в результате критического подхода к этим взглядам. То есть, с одной стороны, нужно развивать многомерные пространственные схемы с числом координат более трёх – с другой стороны, необходимо

развивать неевклидовы пространственные схемы, в первую очередь псевдоевклидову пространственную схему.

Посмотрим первый вариант. Итак, трёхмерная алгебра Гамильтона-Грасмана евклидова в своём основании, имеет три независимые координаты. Откуда получил Гамильтон трёхмерные представления в математическом аспекте? Не в геометрическом аспекте, как получил представления Евклид, а в аналитическом аспекте? Он рассмотрел теорию числа с несколько иных позиций. К этому моменту, когда работал Гамильтон, уже сформировалось понятие действительных чисел и понятие комплексных чисел. Двухмерные комплексные числа развивают понятие действительного числа и получаются путем применения процедуры удвоения к действительным числам. Гамильтон применил ту же процедуру удвоения, несколько, правда видоизмененную, к комплексным числам – двумерным и в результате получил четырехмерный кватернион.

В результате дальнейших действий при умножении двух чисто векторных кватернионов, он выделил отдельно, так называемое скалярное произведение двух векторов и векторное произведение двух векторов. Это стало основой для развития аналитической схемы трёхмерной евклидовой алгебры, векторной алгебры. Векторная трёхмерная алгебра обладает скалярным произведением, а также векторным произведением двух векторов – и поэтому является не просто линейным векторным пространством размерности n , произвольной размерности, законами сложения векторов и умножения векторов на скаляр, но является также, не просто евклидовым линейным векторным пространством, то есть линейным векторным пространством со скалярным произведением, а является именно линейной векторной алгеброй с дополнительной операцией векторного произведения двух векторов.

Именно это выделяет трёхмерную векторную алгебру из всех остальных пространственных представлений о нашем физическом мире. Именно эта структура получила подтверждение теории поля Максвелла, эксперимента со скоростью света и привела в конечном итоге к частной теории относительности Эйнштейна. Именно эта схема. Если продолжать развитие этой схемы на многомерный вариант, то необходимо проделать те же процедуры, что проделал Гамильтон с комплексными числами, но теперь уже по отношению к кватернионам.

Итак, применение процедуры удвоения по отношению к кватернионам дало еще в 1845 году понятие октонионов Кэли. В математическом аспекте это восьмимерные числа, но с очень неблагоприятными свойствами для математиков, якобы. С одной стороны, если кватернионы теряют коммутативность умножения, то октонионы теряют не только коммутативность умножения, но и теряют ассоциативность и переводят алгебру в разряд альтернативных алгебр, очень неудобных для математического анализа. Но, причём тут удобства математического анализа, и, причём тут математический анализ вообще?! Речь идёт о той структуре, которая может быть получена в

результате пространственной структуры, ведь в конечном итоге нужно получить алгебру векторную, с векторным произведением двух векторов, но многомерную, а не трёхмерную.

Такая процедура до сих пор неосуществлена, хотя прошло сто пятьдесят лет со времён Кэли. Все дело в том, что с трёхмерной физикой было всё так хорошо, так всё гладко и просто, что вплоть до середины XX века физики отвергали все математические изыскания, в частности, те же октонионы Кэли до сих пор, следует подчеркнуть, уже в XXI веке, не получили должного распространения, изучения и применения в физических теориях. Ещё раз следует подчеркнуть, **должного**.

А должное – это необходимо получить векторную алгебру из этих октонионов, то есть та же процедура Гамильтона, которую он применил в отношении к кватернионам, в результате, в конце концов, применения к октонионам даёт скалярное произведение двух семимерных векторов и векторное произведение двух семимерных векторов. Следует ещё раз подчеркнуть: именно семимерных. И именно векторное произведение. Скалярное произведение при этом остаётся евклидовым. То есть речь идёт о том, что применение октонионов в конечном итоге даёт векторную семимерную алгебру евклидового типа с векторным произведением двух векторов, строго узаконенную, именно семимерную, именно евклидову. Такая алгебра построена в основе теоретической физики – то есть теории поля на основе алгебры семимерной, а также теории восьмимерного пространства-времени на базе этой алгебры уже есть. Однако физики не торопятся признать эту алгебру. Более того, не торопятся критиковать соотношения этой алгебры. Не торопятся критиковать, то есть критически проанализировать порядок получения этой алгебры, а также результаты, которые следуют, могли бы дать серьезные физические результаты. Не торопятся физики.

Итак, семимерная евклидова схема. Это первый вариант. Она евклидова, линейная схема, это линейная алгебра. Она может быть разложена точно также на криволинейный семимерный пространственный мир, либо восьмимерный криволинейный пространственно-временной мир. Но физики не торопятся не только признавать, но и критически отнестись к тем результатам, которые уже получены.

Это физики-теоретики. В отличие от физиков-экспериментаторов, которые дали толчок для развития этих схем – поскольку из анализа проблемы измерений следуют причины, заставляющие привлекать различные математические конструкции для описания реального мира. Но физики-теоретики измышляют до сих пор в теориях струн [4;15], миров Эверетта, мультиверса (Д.Дойч [5] и Л.Вайдман [2] рассуждают о мультиверсе длинно, путанно и непонятно – поэтому воспользуемся статьей М. Эпштейна¹) – и прочих фантазмов в постмодернистском духе (которые философы

¹ (Мультиверсум (multiverse, сочетание лат. «multum», «много», и лат. «universum», вселенная) – буквально **многомирие**; мироздание в целом как совокупность ми-

услужливо объявляют соответствующими постнеклассической парадигме) – т.е. в метафизических категориях, кои не могут быть проверены экспериментально¹ – а здесь уже и до магической физики рукой подать. (В.Г. Попов ко всему прочему отмечает элементарное незнание учёными мужами законов логики, откуда естественным образом „в естествознании процветает метафизика, а философы рассуждают о физике и математике, надеясь на воссоединение метафизики и науки“ [13, с.29].

Эта схема физике даёт, вообще-то говоря, совершенно новые соотношения, хотя трёхмерные соотношения теории полей сохраняются все, до

ров с разными физическими законами и числом измерений. Одной из составляющих **мультиверсума** является та вселенная (универсум), в которой мы обитаем.

Понятие **многомирия**, или **мультиверсума** вытекает из ряда новейших физических концепций (квантовая механика, теория суперструн, гиперпространство, параллельные Вселенные, - Many Worlds theories). По предположению физика Хью Эверетта (Hugh Everett III, 1957), в каждый квантовый момент своей эволюции Вселенная делится надвое, как дорога, проходящая через развилку: на месте одной Вселенной образуются две. Каждый квантовый переход – в любой звезде, галактике, в любом уголке Вселенной – расщепляет наш мир на мириады копий, которые различаются только расположением одной частицы. Эти мироветвление не имеют конца, и совершается в точках или «почках» возникающих возможностей. Все, что может случиться, где – то случается. Данный мир, в котором мы сейчас прибываем, является общим прошлым множества **со-миров**, которые ничего не знают друг о друге и не имеют способов общения между собой.

Стивен Хокинг трактует Вселенную как квантовую частицу, которая с разной вероятностью пребывает в бесконечном множестве состояний, образуя мириады возможных миров, из которых наш является лишь наиболее возможным. Волновая функция нашей Вселенной – это бесконечное множество параллельных Вселенных. Мироздание – **мультиверсум**: не то, что есть, а совокупность всего, что может быть. Хотя Вселенных бесконечное множество и тело данного индивида пребывает лишь в одной из них, то, что мы называем мыслью и особенно душой, возможно, объединяет всех его двойников в этих бесчисленных **со-мирах**. Волновая функция миров проходит через сознание и волю индивида. Оттого каждый миг «я» немного другое, отличается само от себя, постоянно колеблется, образуя потенциальную множественность **мультивидума**.

Современные философские теории (модальный реализм, логика и семантика возможных миров) также предполагают множественность миров, в частности, как условие осмысленного суждения о нашем мире как «одном из...». Понятие **мультиверсума** объединяет миры, концептуализируемые во всем мыслимых **модальностях**: существующие и возможные, случайные и необходимые.

В связи с развитием компьютерной технологии концепция **многомирия** обретает практическую направленность в попытках построения множества «виртуальных миров», сенсорно неотличимых от «реального мира». Понятие «мир» и соотношение разных миров актуализируется в компьютерных играх как прообразах «виртуального миростроения» и изучается **потенциологией**, а также **мироведением**, или **универсикой**.

По результатам опроса 72 ведущих физиков и космологов, подавляющее их большинство (58%, данные 1980-х гг.) – «**многомирцы**», т.е. полностью разделяют основные положения теории Хью Эверетта; в их числе Р.Фейнман, С.Хокинг и М.Гелл-Манн. Только 18% высказались категорически против.» [17, с.236-237].

¹ Неуместное злоупотребление математикой Р.А. Аронов предложил называть «неопифагорейским синдромом».

единого. Однако соотношения становятся семимерными и решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка надо рассматривать не трёхмерные, а семимерные. Это дает не четыре квантовых числа, а восемь квантовых чисел, это ставит на уши всю физику – а вслед за этим химию, аналитическую химию, биологию, если хотите, это совершенно иной мир, это совершенно иные свойства симметрии пространства [7].

Хотя трёхмерные свойства физического мира сохранены. Итак, это первый вариант. Второй вариант. Критика трёхмерной евклидовой алгебры не в плане размерности, а в плане евклидовости. Или мы будем пользоваться до сих пор представлениями Евклида, которые сформировались 2 тысячи лет назад. Или надо проанализировать заново эту схему. Теория чисел, расширение действительных чисел, кроме комплексных чисел, дают ещё два типа расширения. Можно построить гиперкомплексные числа двухмерные без деления, алгебру векторную без деления, но использовать уже не комплексные, а двойные, так называемые, лучше сказать, псевдокомплексные и дуальные, вернее, дуально-комплексные. Это известные схемы двумерия, показано, что других схем просто быть не может [7].

Дуальная схема вырождена. Она не даёт возможность построить преобразования с определителем, отличным от нуля. И поэтому, видимо, мало интересна. Хотя это нужно проанализировать более глубоко и подробно. А вот схема двойных чисел очень интересна. Двойные числа дают вообще-то двухмерную алгебру псевдоевклидового типа, уже не евклидового типа. Ее развитие на четырёхмерный случай путём удвоения системы двойных чисел дает четырехмерную систему псевдокватернионов [7].

Это вовсе не кватернионы, из них выделяется скалярное и векторное произведения при умножении двух векторных псевдокватернионов. И скалярное произведение, и векторное произведение имеют совершенно иной вид, нежели трёхмерные евклидовы схемы Гамильтона. Это новая алгебра – трёхмерная псевдоевклидова векторная алгебра. Такая алгебра уже создана. Соотношения есть, их можно проанализировать. Алгебра развита на случай псевдоевклидовой теории полей, на случай псевдоевклидового способа симметрии пространства, а это совершенно иная пространственная структура и совершенно иные свойства симметрии, а, следовательно, совершенно иные представления о полях, о кристаллах, о кристаллических структурах и т.д. Развитие трёхмерной псевдоевклидовой схемы на многомерный случай также даёт семимерную псевдоевклидову векторную алгебру [7].

Эта алгебра уже построена со скалярным псевдоевклидовым произведением векторов и своеобразным векторным произведением, псевдоевклидовым произведением двух векторов, векторным произведением двух векторов [7]. В конечном итоге, из них созданы основы теории трёхмерного и семимерного псевдоевклидового поля, основы трёхмерной и семимерной псевдоевклидовой симметрии пространства, а, следовательно, и спо-

собов построения кристаллических структур, решёток, объединений атомов, молекул и т.д.

Есть два многообещающих направления в физике: это применение семимерной евклидовой алгебры с одной стороны, и второе – применение трёхмерной и семимерной псевдоевклидовой алгебры, с другой стороны, в физических теориях о пространственно-временном континууме, а, следовательно – о физике нашего мира.

В конечном итоге эти схемы были получены в результате того, что физики заявили о неадекватности трёхмерных теоретических структур, пространственных структур, и физических экспериментах. Потребовали многомерия. Это с одной стороны. Стоит вопрос – а не может ли быть пространство иной размерности, кроме трёх – и семимерной? Ответить на этот вопрос следует радикально. Пространственно-временные соотношения могут быть размерности значительно большей. Всё время, уточняя свойства симметрии трёхмерного мира, семимерный мир дополняет свойства – трёхмерного мира новыми свойствами симметрии. Дополняет. Ими можно пренебречь, и тогда мы будем пользоваться свойствами симметрии трёхмерного мира. Если ими не пренебрегать – это совершенно иной физический мир.

Семимерная алгебра получена в результате получения, рассмотрения алгебры октонионов. Математики в свое время доказали, что октонионы являются последним гиперкомплексным числом с делением, поэтому стоило бы наверное ограничиться и изучать свойства только трёхмерного и семимерного пространства. Однако не стоит делать столь категорических ограничений. Дело в том, что как трёхмерная, так и семимерная векторная алгебра не требует деления при анализе чисел, то есть, там нет процедуры деления, она просто не нужна. Она бесполезна, более того, она бессмысленна. Это уже проявляется в свойствах трёхмерного евклидового пространства, т.е. в алгебре Гамильтона. Так вот, если мы отклоним требования деления, наличия деления в алгебре, а так оно и есть в векторных алгебрах – то схема может быть развита на 15-ти мерный мир, 31-и мерный мир и т.д., 63-х мерный мир, то есть 2^n , число пространственных измерений.

Все эти схемы включают трёхмерный, семимерный мир как частный случай. Но дополняют свойства симметрии трёхмерного и семимерного мира. То же самое можно сказать о псевдоевклидовых алгебрах. Там тоже нет необходимости ограничивать свойства алгебры наличием деления, хотя бы по той причине, что двойные числа уже являются числами без деления. Итак, отсутствие операции деления в алгебрах даёт возможность рассматривать многомерные структуры весьма большой размерности, очень возможно, что вплоть до бесконечномерных пространств. То есть свойства симметрии все более и более ужесточаются, уточняются, дополняются и видоизменяются. Но свойства симметрии пространств меньшей размерности все до единого сохраняются [7].

Таблица 2.1

Основные концепции, теории и модели пространства-времени

№	Основные современные концепции, теории и модели	Основные уравнения пространства и времени (пространства-времени)	Размерность	Геометрия	Алгебра	Время	Примечания
1	Классическая механика И. Ньютона	Уравнение Ньютона:	3D	Евклидова	Векторная	Абсолютная длительность	Абсолютность времени и пространства
2	Специальная теория относительности А. Эйнштейна (СТО)	Релятивистское уравнение Ньютона-Эйнштейна:	4D	Минковского	Тензорная	4-координатное пространство Минковского	Постоянство скорости света и относительность времени и пространства
3	Общая теория относительности А. Эйнштейна (ОТО)	Уравнение гравитации Эйнштейна	4D-искривленное	Римана	-	4-координатное пространство Римана	Гравитация описывается как искривление пространства
4	Нерелятивистская квантовая механика	Уравнение Шредингера	3D	Евклидова	-	Абсолютная длительность	Для волновых функций, квантование энергии
5	Релятивистская квантовая механика (Квантовая теория поля)	Уравнение Дирака	4D	Минковского	Тензорная	4-координатное пространство Минковского	Для волновых функций, квантование полей
6	Синергетика	Уравнение Пригожина	3D	Евклидова	Векторная	Абсолютная длительность	Используется также фрактальная геометрия

Пятнадцатимерная схема включает семимерную схему как частный случай, а та в свою очередь, включает трёхмерную схему как частный случай, то есть эта та структура пространственных представлений, которая может быть и должна быть изучена. Мы живём в очень сложном, плохо изученном мире, и его изучение нам может ещё очень многое может дать. Необходимо анализировать различные теоретические позиции, свойства возможных пространственных структур. Можно сказать, что все эти многомерные алгебры – как евклидовы, так и псевдоевклидовы, дают свою теорию поля, свою квантовую механику, свою специальную теорию относительности, свою общую теорию относительности – то есть, свою физическую картину мира. Эта теоретическая схема требует не только изучения физиками, но и философами и даже психологами. Как, например, многомерные представления о физическом мире воспринимаются учёными-теоретиками? Но это – когнитивная сторона вопроса.

В синергетике в плане размерности пространства ничего революционного нет (используется евклидова геометрия размерности 3D), но есть специфика: широкое (и успешное) применение фрактальной геометрии [16] (см. табл.2.1). Термин «фрактал» был введён в 1975 г. Б. Мандельбротом в его монографии «Фрактальная геометрия природы» для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур [9]. Согласно определению Б. Мандельброта, «фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому». Фрактальная размерность в синергетике является характеристикой хаотического поведения систем, описывающихся странными аттракторами.

Литература

1. Андреев Э.П. Пространство микромира. – М., 1969.
2. Вайдман Л. «Раздвоение сознания» у нейтрона, или Почему мы должны верить в многомировую интерпретацию квантовой механики // Виртуалистика: экзистенциальные и эпистемологические аспекты.— М.: Прогресс-Традиция, 2004.— (с.160-185).
3. Вяльцев А.Н. Дискретное пространство-время.— М., 1974.
4. Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории: Пер. с англ. / Общ. Ред. В.О. Малышенко.— М.: Едиториал УРСС, 2004.
5. Дойч Д. Структура реальности: пер. с англ. Н.А. Зубченко.— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
6. Жарков В.И. Непрерывно-дискретное пространство и время микрообъектов.— Новосибирск, 1971.
7. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля.— Новочеркасск: Набла, 1996.
8. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М., 1969.

9. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы/ Пер. с англ. А.В Логунова.— М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
10. Мостепаненко А.М. Пространство и время в макро-, мега- и микромире.— М., 1974.
11. Петров В.В. Интервально-дискретная концепция динамики макроскопических точечных систем // Физическая мысль России. 2000. №2.
12. Плотин. Сочинения. Плотин в русских переводах.— СПб.: Изд-во «Алетейя», 1995.
13. Попов В.Г. Логика классической механики.— СПб.: Издательство «АНАТОЛИЯ», 2005.
14. Рылов Ю.А. Птолемеевость традиционной программы исследований микромира и альтернативная исследовательская программа// Физическая мысль России. 2001. №1.
15. Тарароев Я.В. Теория струн как современная физическая концепция "основания мира". Гносеологический и онтологический срез // Вопросы философии. 2007. №3. (с.142-151).
16. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1991.
17. Эпштейн М. Мультиверсум // Проективный философский словарь: Новые термины и понятия / Под ред. Г.Л. Тульчинского и М.Н. Эпштейна.— СПб.: Алетейя, 2003.— (Серия «Тела мысли»).

Глава 3

МНОГОМЕРНЫЕ КОНЦЕПЦИИ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ (ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ). ДОМИНИРУЮЩИЕ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ

Прежде, чем говорить о многомерных концепциях пространства-времени, стоило бы сказать, какие доминирующие представления о пространстве-времени имеют место в настоящий момент. Фактически всеми учёными мира признано, что наше пространство трёхмерное – и, кроме того, пространство – векторная величина, а время – скалярная величина – одномерное.

Трёхмерная пространственная концепция стыкуется с временной концепцией в плане четырёхмерного пространства-времени, причём признано, что четырёхмерное пространство-время имеет место, а именно пространство Минковского – которое построено на базе трёхмерного евклидова векторного пространства с прибавлением мнимой величины времени. То есть время существенно отличается от пространственных координат: это скалярная величина.

Итак, пространство трёхмерное евклидово. Это – основная концепция, которая принята для пространственно-временных соотношений. Можно сказать, что на базе этой концепции построена специальная теория относительности, она включается как частный случай в общую теорию относительности. Общая теория относительности остается при этом четырёхмерной, пространственно-временной схемой, но только в пространстве с кривизной, со своим способом определения скалярного произведения двух векторов. Тензор кривизны при этом имеет размерность три на три диагоналей, а состоит из девяти коэффициентов взаимосвязанных – это без учёта временной координаты, либо 16-ти коэффициентов с учётом временной координаты.

Это – доминирующая концепция, причём настолько доминирующая, что она подавляет все другие представления о пространстве и времени. Хотя стоило бы отметить, что эти пространственно-временные представления дают сбой. Дело в том, что трёхмерная пространственная схема Гамильтона-Грасмана на базе алгебры Гамильтона-Грасмана евклидова и трёхмерна. Эта схема даёт в механике, в частности, только три закона сохранения: закон сохранения энергии, импульса и момента импульса. *Три закона сохранения и более никакие законы сохранения не могут быть построены в механике. Это связано с тем, что трёхмерная концепция в механике предполагает наличие обобщённых координат и изменений координат по времени.*

Причем, наличие этих двух величин обобщённых координат и их производных по времени, даёт, во-первых, трёхмерную схему, а во-вторых, даёт то, что в физике пренебрегается понятиями третьей производной от радиуса вектора по времени, четвёртой, пятой и т.д. *То есть имеют место*

только скорость и ускорение. Вот что даёт трёхмерная физика. Трёхмерная физика связана, как было сказано выше, во-первых, с пренебрежениями высокими производными по времени от векторных величин, а во-вторых – базируется в результате на трёхмерном векторном исчислении Гамильтона-Грасмана.

Следует задать такой вопрос: а почему, собственно, мы должны пренебрегать высокими производными? И почему мы должны ограничивать число законов сохранения только тремя? Появился прецедент в физике элементарных частиц, где в последние десятилетия XX века был вскрыт целый ряд законов сохранения: барионного числа, лептонного числа, чётности и т.д. Целый ряд законов сохранения, которые в рамки трёхмерного векторного исчисления никак не вписываются.

Для того, чтобы получить эти законы сохранения, нужно иметь другой математический инструмент для построения такой теоретической физики. В связи с этим возникло представление о том, что наше пространство является векторной многомерной величиной – не трёхмерной, а многомерной — то есть с числом размерности более трёх, а время остаётся скалярной величиной. Такие представления имеют место, хотя, как правило, при этом используют не трёхмерные или многомерные векторные алгебры, а N-мерные линейные векторные пространства, в которых не определена операция векторного произведения двух векторов, а также такие операции как смешанное произведение трёх векторов, двойное векторное произведение трёх векторов – и, тем более, не идёт речь о векторных операциях над большим числом векторов: 4, 5, 6, 7 и т.д.

Здесь следует остановиться и вспомнить, откуда появились трёхмерные представления в физике. На первых стадиях развития физики – на самых первых стадиях, самые первые шаги были сделаны в физике, использующей действительные числа – не трёхмерные векторные числа, а действительные числа – и лишь Галилей, Ньютон и их последователи вплоть до Гамильтона и Грасмана, постепенно вводили понятия векторов и операций над трёхмерными числами. Наилучшим образом это оказалось сделано у Гамильтона и Грасмана, которые ввели понятие векторного произведения двух векторов, и построению на его базе понятие площадей, объёмов, а также целый ряд других величин, двойного векторного произведения, например, соотношения Якоби, алгебры Ли и т.д., которые позволили разработать и применить трёхмерный векторный аппарат. Он у Гамильтона был получен путём применения процедуры удвоения сначала по отношению к действительным числам с получением комплексных чисел, а затем по отношению к комплексным числам с получением кватернионов Гамильтона.

Кватернионы Гамильтона – два кватерниона Гамильтона, будучи умноженными друг на друга, если они имеют чисто векторный характер – то есть со скалярной величиной, равной нулю, дают в произведении четырёхмерный кватернион, рассыпающийся, распадающийся на два кватерниона – один чисто скалярный, это так называемое скалярное произведение

двух векторов, а второй – чисто векторный, векторное произведение двух векторов. Это и позволило ввести понятие векторного произведения двух векторов в алгебру, что и сделал Гамильтон, а вслед за ним – Грасман.

Итак, появилась концепция: *трёхмерное векторное собственное-евклидово пространство, дополненное операцией векторного произведения двух векторов*. Причем это пространство собственное-евклидово – скалярное произведение у Гамильтона оказалось собственное-евклидовым. Надо отметить, что в связи с тем, что трёхмерные концепции уже не устраивают физиков в значительной степени по указанной причине, то нужно попытаться идти дальше. Дальнейший путь связан с двумя направлениями. *Первый из них – это увеличение размерности пространства*. В математическом плане этим занимался еще Кэли в 1845 году. Он получил октонионы Кэли – восьмимерные октонионы, которые могли бы быть аналогом для получения семимерных векторных алгебр со скалярным евклидовым произведением и векторным произведением двух семимерных векторов. Это был наиболее разумный и реальный шаг в дальнейшем направлении развития трёхмерных векторных алгебр, с применением к физике. Но в XIX веке это было отвергнуто, если не сказать, что раскритиковано, и уж, по крайней мере, не применено, потому что не было, по сути дела, в XIX веке задач, которые могли бы быть связаны с семимерным векторным исчислением.

В XXI веке ситуация совершенно иная. 60-ые годы двадцатого столетия поставили во главу угла именно такую задачу: построение многомерных пространственно- временных конструкций. Надо отметить, что это не единственная схема для построения многомерного пространства- времени. Дело в том, что поскольку мы работаем с векторной алгеброй, а не линейным векторным пространством, векторной алгеброй, которая использует понятие векторного произведения двух векторов наряду со скалярным произведением двух векторов, то здесь становится принципиальным тот факт что, восьмимерные октонионы Кэли получаются путем применения процедуры удвоения кватернионов Гамильтона, четырёхмерных кватернионов Гамильтона. В результате получается конструкция для произведения двух восьмимерных октонионов, дающая векторное произведение двух векторов, семимерных по своей сути и скалярное произведение двух семимерных векторов. Это скалярное произведение евклидово, и алгебра оказывается евклидовой. Поскольку мы работаем с трёхмерным векторным исчислением в плане трёхмерной векторной алгебры, то мы практически отказываемся от процедуры деления двух векторов, либо нахождения обратного вектора, и тем более единичного вектора.

Обратный вектор в трёхмерии отсутствует, также как отсутствует процедура деления двух векторов друг на друга. И поскольку мы отказываемся от процедуры деления, либо нахождения обратного вектора, то во все не обязательно вектор должен иметь евклидов характер – то есть скалярное произведение двух векторов, дающее сумму попарных произведений координат. Этот вектор может быть не евклидовым, хотя бы псевдо-

евклидовым. Псевдоевклидовы вектора могли бы быть получены точно также как и евклидовы вектора, если мы применим несколько иную процедуру удвоения векторов. Такая процедура изложена в литературе под названием процедуры получения двойных чисел.

Двойные числа двумерны и у них отсутствует как процедура деления, так и процедура получения обратных чисел уже даже в двумерном варианте. Точно также в четырёхмерном и восьмимерном вариантах процедуры удвоения – вернее получения двойных чисел, но только по отношению к четырёхмерным и восьмимерным вариантам дают также псевдоевклидовы конструкции алгебр с векторным и скалярным произведением векторов, но скалярное произведение уже псевдоевклидово. Оно носит псевдоевклидов характер и там задействована алгебраическая сумма векторов произведения координат, а не чистая сумма. Там задействованы как знаки плюс, так и минус компонентов слагаемых.

Если говорить о том, что мы отказываемся от процедуры деления и получения обратных чисел, то вовсе не обязательно останавливаться на октонионах Кэли, как последних чисел в ряду чисел с делением. Можно рассматривать векторные алгебры пятнадцатимерные, тридцатиодномерные и т.д., алгебры более высоких размерностей – размерностей $2^n - 1$, дающие ряд 1, 3, 7, 15, 31, 63 и т. д. Таковы математические возможности векторных алгебр, которые могут быть построены при расширении действительных чисел до многомерных чисел с использованием процедур векторного и скалярного произведения двух векторов. Следовало бы отметить, что общепризнано, доминирующая концепция доминирует настолько, что подавляет все остальные концепции: концепции трёхмерного векторного исчисления, векторной алгебры либо четырёхмерного пространства-времени, хотя уже сейчас стоит насущная необходимость разработки многомерных, в первую очередь евклидовых алгебр, а во вторую очередь – многомерных псевдоевклидовых алгебр большой размерности.

Как же в настоящий момент обходятся физики без многомерного векторного исчисления и тем более без многомерного векторного исчисления псевдоевклидового характера? Они задействуют различные предположения. Например, теория струн (представляющая собой внеэмпирическую геометрию) предполагает, что имеются какие-то материальные точки в пространстве, которые имеют вид струн [3] (если, как предполагал Пифагор, зажимать струну в каких-то строго определенных соотношениях от края по отношению ко всей длине, то струны эти будут издавать частоты, кратные по отношению к начальной частоте).

То есть, приняты в какой-то степени пифагорейские воззрения, которым уже 2500 лет (а это является ни чем иным, как неопифагорейским синдромом). Тем не менее, до сих пор эти вещи анализируются, используются и эксплуатируются. В данном случае речь идет о том, что струны могут быть в многомерном пространстве, в том числе, но открыто признавать многомерность пространства физики не соглашаются, а пытаются под вся-

кими предложениями протащить понятие многомерности. Например, рассматривается 11-мерная структура, в которой значительная часть измерений связывается с внутренним пространством, хотя трудно сказать, чем внутреннее отличается от наружного, внешнего и как его представлять и использовать?

В любом случае такая схема не имеет строгой математической формулировки – математической, следует подчеркнуть – *не имеет математического фундамента и вряд ли следует ожидать от неё больших достижений*. Теория струн, в частности, развивается на протяжении уже нескольких десятилетий, а результат пока не очень обнадеживающий (всё по той же самой причине: теория струн не имеет алгебраической основы, у струн нет физического смысла и нет экспериментального подтверждения). В настоящий момент она ещё не признана всеми физиками (но пиар и бюджет у теории струн замечательные), исключительно всеми физиками, но, тем не менее, она доминирует в мировоззрении по той причине, что значительная часть физиков её поддерживает¹. (Теория струн в действительности ни к чему не привела: „она не справилась со многими физическими проблемами, но зато вдохновила учёных на целый ряд интересных математических открытий“, – очень дипломатично говорит американский физик Л.Кросс о фиаско раскрученной теории [5, с.33]. Даже пламенный популяризатор теории струн Б.Грини осторожно признаёт слабые места теории, сводящие на нет многолетние усилия множества исследователей во всём мире [4]. Я.В. Таророев указывает три основных недостатка теории

¹ В интервью журналу «Эксперт» академик Л.Фаддеев по поводу увлечения теорией суперструн сказал: „Я считаю, что эти струны и суперсимметрия были придуманы априорно. За последние двадцать лет у разработчиков этой теории было несколько подъёмов и спусков. Сейчас они переживают трудное время. Даже есть книги, интервью телевизионные, где их ругают за отсутствие экспериментальных предсказаний. Я и к этой критике отношусь скептически, потому что считаю, что это очень интересная возможность, хотя есть другие пути для развития. В Америке, где большевизм крепче, чем у нас, в какой-то момент люди, которые занимались суперструнами, такую взяли силу, что молодым учёным ничем другим не давали заниматься. Сторонники этой теории обещают объединить космологию и квантовую теорию. Но в космологии чем сейчас занимаются? Тёмная материя и тёмная энергия. Мы как бы все в супе какой-то энергии, которая с нами не взаимодействует. Это всё на каком-то наивном уровне и никаких суперструн, конечно, не используют. Они хотели бы, но... У меня есть ученица – Ирина Арефьева, которая объясняет тёмную материю при помощи струн. Не знаю, мне кажется, что это всё спекулятивно. Я считаю, что будущая единая теория объяснит Вселенную другим способом. Но пока настоящей теории, связанной с теорией тяготения Эйнштейна, не построено“ [Механик А. Уравнение злого духа // Эксперт.2007. №29. (с.40-46), с.43].

Вообще-то авторы теории суперструн претендуют на то, что суперструны – это *первоначало*. Понятие *архэ* (первоначала) – понятие философское (вернее, натурфилософское, которое можно только помыслить). Первоначала есть в философиях Китая, Индии и Греции. По мысли американских теоретиков, мыслящих технологически (или инструментально), *экспериментальное* (!) подтверждение их существования позволило бы на это *архэ* навесить ярлык «Made in USA». Какой чудовищный наив: пытаться теоретически полно разработать и экспериментально подтвердить то, что только можно помыслить!

струн: „Первое – "закладывание" в теорию струн "руками" размерной константы α' (она имеет размерность квадрата длины) и имеющая ясный смысл масштаба, на котором становятся существенными струнные эффекты.⟨...⟩, что означает, что значение этой константы не является следствием формальных теоретических соображений. Второе – невозможность определить её точное значение эмпирическим путём, т.к. она описывает "разделы" реальности, находящиеся "за границей наших эмпирических возможностей". Собственно, из этого следует её третье свойство – "плавучесть", неоднозначность её значения. [3, с.145-146]). Но надо отметить, что значительная часть физиков поддерживает её не по причине того, что она обладает большими достижениями в предсказании каких-то явлений, а по той причине, что просто не очень-то много других мировоззрений, опирающихся на строгие математические инструменты.

То есть не от хорошей жизни значительная часть физиков склоняется в пользу признания теории струн. По той причине, что просто нет альтернативных теорий, достаточно строгих, имеющих прочную математическую основу. Это и дает то положение, *что теория струн не от хорошей жизни признана доминирующей на настоящий момент*. Хотя надо сказать, что теория трёхмерного пространства-времени, вернее – трёхмерного пространства и четырёхмерного пространства-времени дала значительно больше достижений и результатов, чем та же теория струн – которая, может быть и красива, но не имеет математической базы в своей основе.

Вот что хотелось бы отметить по многомерным концепциям пространства-времени. Альтернативных концепций не так уж много. С точки зрения математической основы, альтернативы практически нет.

Существующие альтернативные теории не хотелось бы критиковать, поскольку ценны не они сами по себе, а идеи, заложенные в их фундамент. Но в некоторых работах рассматриваются многомерные пространственно-временные структуры физических объектов. Есть, например публикация японских кристаллографов: шестимерный кристалл. Это может выступать как альтернатива трёхмерию. Но теоретической базы такой кристалл не имеет и, поэтому, это не более чем абстракция, не дающая какой-нибудь полезной схемы. Рассматриваются также многомерные пространство-временные схемы. Однажды как-то попалась публикация по пространству 252-х измерений. Ну и что дальше? Какую математическую основу это пространство имеет? *Никакой математической основы такое пространство не имеет и в результате ничего полезного дать не может*. (Но есть много абстракций: альтернатив, доминирующих альтернативных схем).

Но суть не в этом. Суть в том, что физика стала на базу теоретической физики только с появлением трёхмерного векторного исчисления, как такового. То есть, с появлением математического инструмента, которое позволило Максвеллу сформулировать трёхмерную теорию поля. Вот с каких пор физика становится теоретической. (Заметим в скобках: в XX веке теоретическая физика по замечанию физика – теоретика А.А. Ансельма

стала „новой философией природы“ [1]. Произошёл отрыв знания теоретического от знания экспериментального. По сути, теоретическая физика – это современная натурфилософия с перспективой трансформации в магическую физику). *До этого момента физика была чисто экспериментальной наукой (или как говорили сами физики – экспериментальной философией)* – то есть были законы Ньютона, Ампера, Фарадея, Ома и т.д. (их множество, этих законов), которые не вписывались в единую теоретическую схему. И только с появлением трёхмерного векторного исчисления Гамильтона-Грасмана Максвеллу, а также его предшественникам Стоксу и Остроградскому (а также многие другие учёные занимались этой проблемой) – но только Максвеллу удалось сформулировать теорию поля, изложить ее на базе трёхмерного векторного исчисления.

И с той поры все разделы физики удалось переложить на трёхмерный векторный инструмент – с одной стороны, и получить предсказания явлений, которые были обнаружены в последствии тем же Герцем созданием колебаний электромагнитных волн, созданием радиосвязи А.С. Поповым и т.д., то есть – *следует подчеркнуть: лишь сильный математический инструмент, лежащий в основе физики, может дать соответствующие предсказания, выводы и схемы.* Лишь сильный математический инструмент. Причем этот математический инструмент должен включать трёхмерное векторное исчисление Гамильтона-Грасмана, как частный случай. Эта преемственность знаний должна быть сохранена. А четырёхмерное пространство- время Минковского, как частный случай, многомерного пространства- времени. Это обязательный фактор.

И этот фактор приводит к тому, что трёхмерное пространство время – вернее трёхмерное пространство Гамильтона-Грасмана входит в семимерное евклидово пространство, 15-ти мерное, 31-о мерное – как частный случай и ни в какие другие схемы не входит. Второе, что здесь следовало бы отметить, так это то, что вообще- то сейчас известно четыре поля: гравитационное, слабое, сильное и электромагнитное. Электромагнитное поле имеет сильную теорию полей. Но, тем не менее, остальные теории разработаны в меньшей степени и очень возможно, что для их построения требуется другая векторная алгебра, потому что трёхмерная векторная алгебра Гамильтона-Грасмана даёт теорию поля Максвелла для электромагнитных волн.

Остальные поля, другие по своей физической сути, и поэтому в принципе должны иметь другой математический инструмент в своей основе. По этой причине не стоит отвергать то положение, что псевдоевклидовы алгебры трёхмерные, а также семимерные 15-и и т.д. мерные могут составить вторую схему развития теории полей с совершенно иными свойствами, совершенно иными результатами решения уравнений, совершенно другими физическими явлениями в своей основе, нежели теории электромагнитного поля.

Поэтому псевдоевклидовы векторные алгебры могут найти серьезнейшее применение наряду с евклидовыми векторными алгебрами, трёхмерными и семимерными в частном случае. Благожелательный настрой при этом даёт то, что алгебры псевдоевклидовы близки по построению евклидовым алгебрам, хотя координатная форма записи совершенно иная, но векторная форма записи сохраняет свой вид. И это очень много. И это означает инвариантность векторных уравнений при переходе от систем отсчета координат от одной к другой.

В частности, уже сейчас построены группы преобразований псевдоевклидовых величин – группы вращений для трёхмерных и семимерных величин, таких как аналог O_3 группы преобразований для трёхмерия, но только в псевдоевклидовом варианте [2].

Результаты совершенно иные, хотя эта алгебра обеспечивает групповые свойства, а также аналог O_7 но только семипараметровой семимерной группы вращений в псевдоевклидовом и собственно евклидовом вариантах. Эти группы вращений уже проанализированы, но, тем, не менее, без понятия групп вращений не построишь понятия свойств симметрии материальных образований, и по этой причине наличие математической базы для получения свойств симметрии – это очень существенный и серьезный момент, подлежащий строгой определенности, это с одной стороны, а с другой стороны – необходимости изучения и досконального использования. Вот собственно то, что необходимо сказать по многомерным концепциям пространства- времени.

Литература

1. Ансельм А.А. Теоретическая физика XX века – новая философия природы // «Звезда». 2000. №1. (с.194-213).
2. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
3. Тарароев Я.В. Теория струн как современная физическая концепция "основания мира". Гносеологический и онтологический срез // Вопросы философии. 2007. №3.– (с142-151).
4. Массерер Д. Будущее теории струн (Беседа с Брайаном Грини) // В мире науки. 2004. №2.– (с.43-47).
5. Что беспокоит физиков? (Беседа К. Дрейфус с Л. Кроссом)// В мире науки. 2004. №11.– (32-35).

Глава 4

КОНЦЕПЦИИ СЕМИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ВОСЬМИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Говоря о семимерном пространстве, следует уточнить, почему мы говорим именно о семимерном, а не о n -мерном пространстве, многомерном пространстве. Дело в том, что трёхмерное векторное исчисление Гамильтона – Грасмана даёт только три закона сохранения, а в физике элементарных частиц – новые законы сохранения барионного числа, лептонного числа, четности, целый ряд законов сохранения. Стало понятно (по крайней мере, в области физики элементарных частиц), что физика должна быть существенно уточнена, расширена до многомерного варианта [1; 3]. Возникает вопрос: какой же размерностью следует обходиться – 4, 5, 6, 8, 129 или 1000001? Вопрос не праздный. Кроме того, даже если будет выяснена размерность физического пространства, что из эксперимента практически невозможно получить, то встанет вопрос о том – какой же математикой пользоваться при описании явлений в этом пространстве данной размерности, не равной трём?

Поэтому следует исходить, прежде всего, из теории чисел. Ещё Пифагор отмечал, что всё сущее есть число, т.е. физика, теоретическая физика – это теория числа по сути своей, теория трёхмерных векторных чисел. Теория поля полностью и целиком построена на трёхмерном векторном исчислении. Квантовая механика в том числе. Все разделы теоретической физики пользуются аппаратом трёхмерной векторной алгебры трёхмерного векторного исчисления. Попытки расширить пространство приводят к анализу, следовательно, самого понятия числа, как такового.

Одномерное векторное число – это пространство на линейке, пространство чисел на линейке. Трёхмерное векторное число, трёхмерное векторное пространство теперь нам всем хорошо понятно со времён Гамильтона, но не ранее того. Многомерное векторное пространство, определяемое линейной векторной алгеброй, как того требует трёхмерное векторное исчисление, может быть получено путём расширения трёхмерных векторных пространств, трёхмерной векторной алгебры. Таким образом, мы должны в линейном векторном пространстве ввести векторное и скалярное произведения двух векторов. Это, собственно, основная задача теории многомерных чисел – ввести, определить скалярное, первое и второе векторное произведение двух векторов. Подходов к такому определению немного. В общем виде определение этих понятий ничего не даёт, кроме путаницы.

Следует исходить из тех принципов, которыми пользовался ещё Гамильтон при построении трёхмерного векторного исчисления. Он сначала построил путём расширения комплексных чисел алгебру кватернионов, а затем из неё получил скалярное векторное произведение двух векторов в трёхмерном векторном пространстве, т.е. в пространстве векторных кватернионов. Если идти по этому пути, то следует расширять, удваивать си-

стему кватернионов до системы октонионов, что сделал Кэли в 1844 году, но дальнейшие преобразования использовать такие же, какие использовал Гамильтон при получении трёхмерного векторного числа и четырёхмерного кватернионного числа. Если идти по этому пути, то единственно возможной алгеброй, которая получается из алгебры кватернионов, является семимерная векторная алгебра со скалярным, евклидового характера и векторным произведением двух векторов [2].

То есть сразу даётся ответ на вопрос: какой размерности должно быть пространство? А это именно семь, не четыре, не пять, не шесть. И, во-вторых, задано скалярное и векторное произведения двух векторов строго. Это позволяет развернуть алгебру, т.е. получить свойства алгебры, вытекающей из этих двух фундаментальных понятий, что и было в своё время осуществлено на практике. Таким образом, мы получаем семимерную собственноевклидову векторную алгебру с семью ортами ортогональной системы координат, возможно ортогональной, в которой строится семимерный вектор. Сразу возникает целый ряд новых, совершенно новых для алгебры понятий, таких как: векторное произведение не только двух векторов, но и трёх, четырёх, пяти, шести векторов. Это инвариантные величины, дающие в свою очередь определённые законы сохранения. Среди скалярных величин также появляются величины инвариантные, как функции не только двух векторов скалярного произведения двух векторов, но и как функции большего числа векторов. Это смешанные произведения трёх векторов, четырёх векторов, семи векторов. По крайней мере, эти функции найдены, уточнены их свойства, и эти функции дают инвариантные понятия типа законов сохранения – законов сохранения этих величин. То есть появляется возможность получения совершенно новых законов сохранения величин, физических величин – при использовании вместо трёхмерной алгебры семимерной векторной алгебры. Трёхмерные законы сохранения энергии, импульса и момента импульса следуют из этой алгебры просто как частный случай. Они имеют место, сохраняются, никуда не исчезают, они фундаментальны, так же как и новые законы сохранения, появляющиеся при рассмотрении семимерных пространств [2].

Говоря о многомерности вообще, следовало бы уточнить: а нельзя ли построить алгебры большей размерности – векторной алгебры большей размерности? Ответ таков – можно! Но свойства этих алгебр совершенно иные, хотя они включают трёхмерные семимерные алгебры как частный случай, как подалгебры. Свойства их видоизменяются. Например, известный закон для двойного векторного произведения будет сформулирован совершенно иначе. Это уже будет не алгебра Мальцева, это будет пятнадцатимерие – совершенно иная алгебра, а для тридцатиодномерия – вообще вопрос не изучался. Что говорить о 15-ти или 31-мерном пространствах, когда концепция семимерного пространства ещё не завоевала прочной фундаментальной позиции в умах учёных. Прежде всего, нужно базироваться на анализе семимерного варианта как очередного варианта за трёхмерным векторным исчислением. Надо отметить, что в векторной алгебре по своей сути не используют понятие деления, т.е. даже трёхмерная

алгебра – это алгебра без деления – нельзя вектору сопоставить обратный вектор, либо найти ему противоположный, т.е. найти обратный вектор. И в векторной алгебре отсутствует понятие единицы, как таковой, скалярной единицы, которую можно было бы делить на обратное число, получая вектор. Поэтому это снимает ограничения в плане того, что мы имеем только четыре алгебры с делением – одномерная, двухмерная, четырёхмерная, восьмимерная. Расширение дальнейшее было бы просто невозможным. Но поскольку векторные алгебры – алгебры без деления, можно пытаться идти по этому пути дальше, строя многомерные алгебры.

Вторым аспектом является то, что уж, поскольку мы работаем с алгебрами без деления, то можно использовать алгебры, которые могут быть получены путём расширения действительных чисел без использования процедуры деления. В двухмерном варианте – это двойные и дуальные числа, в четырёхмерном варианте – псевдокватернионы и дуальные кватернионы, в восьмимерном варианте – псевдооктонионы и дуальные октонионы. Из них той же процедурой Гамильтона можно получить трёхмерные псевдоевклидовы индекса 2 и семимерные псевдоевклидовы индекса 4 векторные алгебры. Опять вопрос стоит о трёхмерном и семимерном варианте. Надо отметить, что возможно также дуальное расширение, но дуальное расширение, в свою очередь, характеризуется тем, что оно не имеет изоморфной группы преобразований. Псевдоевклидовы алгебры трёхмерные и семимерные, как, оказывается, имеют группы, могут быть описаны групповыми свойствами преобразований этих векторных величин. В то же время дуальные величины преобразуются друг в друга с помощью квадратных вырожденных матриц, т.е. имеющих определитель, равный нулю. И это резко ограничивает возможности таких алгебр для применения. Тем не менее, они могут быть построены. Но группы преобразований вырождены. Эта концепция приводит, следовательно, к расширению понятия действительного числа одномерной векторной величины, трёхмерные векторные величины, дуальноевклидовы, псевдоевклидовы и собственно евклидовы и семимерные векторные величины – собственно евклидовы, дуальноевклидовы, псевдоевклидовы.

Математика таких пространств уже определена [2], и проблем с использованием преобразований и выражений в этих пространственных соотношениях не вызывают никаких затруднений. Единственно, несколько более сложный вариант – семимерие, нежели трёхмерие. Но компьютерная техника позволяет без проблем осуществлять эти преобразования. Таким образом, мы фиксируем понятия одномерного, трёхмерного и семимерного пространства, собственно евклидового, как основного из этих пространств, псевдоевклидового, как существующая возможность невырожденных преобразований пространственных с соответствующей группой псевдоевклидовых преобразований и дуальноевклидовых. Вот в результате получается набор из девяти векторных алгебр, которые можно рассматривать для физических приложений. Итак, следует повторить: основа на данный момент,

основным пространственным преобразованием пространственной векторной алгебры, является семимерная собственноевклидова алгебра [2]. Это основа. Если эту основу изучить, освоить, применить, это будет уже очень немало. И позволит быстро и без проблем освоить основные векторные преобразования векторной алгебры.

Семимерное пространство характеризуется тем, что все пространственные направления совершенно одинаковые, т.е. пространство изотропно по своим свойствам. В то же время мы имеем не только понятия векторов, но и понятия изменения векторов, положения хотя бы векторов в пространстве. Следовательно, нужно оценивать характер изменения этих положений векторов в пространстве – и это уже с необходимостью приводит к применению понятия времени как скалярной величины, по которой можно осуществлять дифференцирования векторных величин. Поэтому более верной концепцией, наверное, будет рассматривать не просто семимерное пространство, а восьмимерное пространство – время. Семь совершенно идентичных пространственных координат плюс временная координата как скалярная компонента. То есть рассматривать восьмимерный радиус-вектор $(ct, \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ – семикомпонентная величина, а t – время однокомпонентная скалярная величина. Точно так же это сделано в четырёхмерном пространстве-времени Минковского и поэтому не вызывает никаких нареканий и отрицательных соображений и эмоций. Восьмимерное пространство-время связывает так же, как специальная теория относительности, время с пространственными соотношениями. Имеет место относительность понятий пространственных величин и временных величин. Имеют место те же преобразования Лоренца, если использовать не YZ , равный нулю, а все шесть остальных компонентов, кроме первой, равными нулю. То есть частная теория относительности четырёхмерного пространства-времени Минковского является просто частным случаем преобразования восьмимерного пространства-времени. Вот, собственно, наверное, и всё, что следовало бы отметить. Единственное, стоило дополнить или повторить, что в семимерном пространстве имеют место совершенно новые законы сохранения величин, а в восьмимерном пространстве-времени точно так же появляются эти величины, как сохраняющиеся фундаментальные величины и инварианты при переходе от одной системы восьмимерного пространства-времени к другой – другой системе отсчёта.

Что ещё стоило бы отметить? При использовании собственно евклидового семимерного пространства получается восьмимерное пространство-время индекса 1, по сути дела, либо некоторые авторы, наоборот, берут три отрицательные компоненты радиус-вектора, поэтому можно говорить об индексе 3, потому что квадрат скорости, либо квадрат радиуса-вектора определяется суммой квадратов компонентов в собственно евклидовом пространстве. В семимерном пространстве практически эта тенденция сохранена целиком и полностью, если использовать собственно евклидову векторную алгебру. Однако семимерное пространство может быть постро-

ено также с применением семимерной псевдоевклидовой векторной алгебры индекса 4, и это говорит о том, что квадрат интервала радиуса-вектора, квадрат радиуса-вектора лучше сказать, квадрат модуля радиуса-вектора может быть не только положительным, но также и нулём и даже отрицательной величиной, квадрат модуля радиус-вектора семимерного псевдоевклидового пространства. Точно так речь может вестись о квадрате любого вектора, в частности вектора скорости. Поэтому понятие скорости псевдоевклидовой семимерной векторной алгебры совершенно иное, нежели в семимерном собственно евклидовом пространстве. И это приводит к серьёзнейшим изменениям в физическом плане, если строить физическую теорию на базе таких алгебр. В математическом плане нареканий нет, и алгебра может быть фундаментом для построения многомерной физики и, без проблем, многомерная физика строится. Сложнее восприятие этих величин. То есть скорость – величина, в данном случае скорость света, как фундаментальная величина может иметь место только как понятие скорости распространения электромагнитных волн. При применении семимерной псевдоевклидовой алгебры, квадрат скорости может быть не только положительной величиной, но и отрицательной и нулевой.

Это требует в свою очередь дополнительных рассмотрений таких физических пространств, осознания их наличия в действительном мире и попыткой объяснить теорию полей не только электромагнитных, но других, в частности гравитационных, слабых, сильных. Имеющиеся в настоящий момент векторные многомерные алгебры позволяют сделать более глубокий анализ, нежели наличие только трёхмерной векторной алгебры и, причём только собственно евклидовой векторной алгебры Гамильтона – Грасмана.

Литература

1. Готт В.С. Пространство и время микромира. – М.: Изд-во «Знание», 1964.
2. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
3. Румер Ю.Б. Принципы сохранения и свойства пространства и времени // Пространство, время, движение. – М.: Изд-во «Наука», 1971. (с. 107-125).

Глава 5

КОНЦЕПЦИИ ТРЕХМЕРНОГО И СЕМИМЕРНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ИНДЕКСА 2 И 4, А ТАКЖЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО И ВОСЬМИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ ИНДЕКСА 3 И 5

Как и в случаях евклидовых пространств – трёхмерного индекса 0 и семимерного индекса 0, то есть собственно евклидовых трёхмерного и семимерного пространств, псевдоевклидово пространство может быть получено путём математического описания этого пространства с использованием процедуры расширения, процедуры удвоения Гамильтона. Но путём применения этой процедуры не к алгебре комплексных чисел, а, следовательно, алгебры кватернионов, а алгебры двойных чисел и, следовательно, четырёхмерной алгебры псевдокватернионов. Расширяя путём применения процедуры удвоения действительные числа, в этом случае получают сначала двумерные двойные числа, так называемые двойные числа (лучше бы их назвать псевдокомплексными числами), а применение процедуры удвоения к псевдокомплексным двумерным числам даст четырёхмерные кватернионы, из которых легко получается алгебра – векторная трёхмерная алгебра, но уже псевдоевклидова индекса 2, то есть с двумя отрицательными компонентами в скалярном произведении двух векторов.

Применение той же процедуры удвоения к алгебре псевдокватернионов соответственно даст восьмимерные псевдооктонионные числа, восьмимерные с четырьмя отрицательными компонентами квадрата интервала, то есть по сути дела мы получаем семимерную псевдоевклидову алгебру индекса 4 с четырьмя отрицательными компонентами квадрата интервала в семимерном скалярном произведении двух векторов.

Эта тенденция позволила найти математическое описание таких чисел – псевдокватернионов, псевдооктонионов, а также псевдоевклидовых трёхмерных индекса 2 и псевдоевклидовых семимерных индекса 4 векторных алгебр. Эти алгебры уже построены, найдены основные закономерности в этих алгебрах, в частности, для трёхмерной псевдоевклидовой алгебры индекса 2 найдены: векторное и скалярное произведение двух трёхмерных псевдоевклидовых векторов, простейшее произведение, смешанное произведение трёх векторов, а также двойное векторное произведение трёх векторов. Это позволяет получить основные свойства трёхмерной и семимерной псевдоевклидовых векторных алгебр. В частности, скалярное произведение двух векторов обладает теми же свойствами, что и скалярное произведение двух векторов, при собственно евклидовой векторной трёхмерной и семимерной алгебрах, но только две компоненты скалярного произведения в трёхмерном случае – и четыре в семимерном случае имеют отрицательный знак. [1].

Векторное произведение существенно отличается от векторного произведения двух векторов в трёхмерном, а, следовательно, и в семимер-

ном случае, хотя основные свойства одни и те же. То есть векторное произведение антикоммутативно, определяется определителями, либо суммой определителей третьего порядка. Скалярная величина может выноситься из-под знака векторного произведения, векторное произведение дистрибутивно, скалярный векторный квадрат двух векторов обращается в нуль. То есть свойства совершенно аналогичны свойствам в трёхмерной собственно евклидовой векторной алгебре, однако координатная форма существенно изменена.

Здесь существенно присутствие двух отрицательных компонент в скалярном произведении, а также двух компонент обратного знака в векторном произведении двух векторов. Смешанное произведение, определяющее объём трёхмерного параллелепипеда в пространстве, полностью совпадает со смешанным произведением собственно евклидовой трёхмерной и семимерной векторных алгебр, причем с теми самыми свойствами. Смешанное произведение, например, изменяет знак при перестановке любой пары векторов, дистрибутивно выносится скалярный множитель из-под смешанного произведения, — и, вообще, смешанное произведение определяется определителями третьего порядка, и, следовательно, свойства полностью зависят от свойств этих определителей. В частности, смешанное произведение трёх векторов позволяет ввести условия ортогональности системы координат. Найдены также основные свойства для двойного векторного произведения, эти свойства во многом совпадают с уже названными векторными алгебрами собственно евклидовыми, но, тем не менее, в координатной форме это совсем иные величины, совершенно иные величины, то есть что следовало бы отметить. Следовало бы отметить, что псевдоевклидовы трёхмерные алгебры, а также псевдоевклидовы семимерные алгебры в общих своих выражениях, уравнениях, записи воспроизводят форму записи собственно евклидовых алгебр, разница появляется лишь в том случае, если мы переходим от векторной формы записи к координатной форме записи. В координатной форме записи совершенно иные свойства эти алгебры проявляют. Они дают результаты расчётов совершенно иные. Свойства, следовательно, совершенно иные [1].

Например, вектор той же скорости, например, имеет три компоненты, но квадрат вектора будет содержать две отрицательные компоненты квадрата вектора в трёхмерном случае и 4 отрицательные компоненты квадрата вектора в семимерном случае. Это существенно меняет взгляд на понятие квадрата вектора как такового. Он уже не знакоопределён, как в собственно евклидовом случае, то есть в собственно евклидовом случае квадрат вектора скорости обращается в нуль лишь в том случае, если мы все три компоненты вектора обращаем в нуль — в псевдоевклидовом варианте это совершенно иначе. Мы можем иметь положительный квадрат вектора скорости — например, отрицательный квадрат вектора скорости, как ни странно, а также и нулевой квадрат вектора скорости, хотя компоненты вектора могут быть вовсе не нулевые.

Вот это, странное на первый взгляд, обстоятельство существенно меняет взгляд на физические явления, в том случае, если мы используем для их описания псевдоевклидову трёхмерную, либо семимерную векторную алгебру. Свойства этих алгебр совершенно иные, нежели свойства собственно евклидовых алгебр. Точно также, как специальная теория относительности, носящая псевдоевклидов характер, будет совершенно отличаться от теории, в которой применена собственно евклидова метрика, четырёхмерная. Псевдоевклидова метрика существенно отличается от собственно евклидовой метрики. Очень важно отметить, что в этом случае псевдоевклидовость, как таковая, возникает уже в пространственных представлениях, чисто пространственных, без учёта временной компоненты. Это позволяет смотреть на свойства времени несколько иначе, не говоря о том, что совершенно иначе нужно рассматривать свойства пространства (псевдоевклидового пространства, следует повторить), вовсе не носит евклидов характер, собственноевклидов характер. (Необходимо отметить, что „евклидова геометрия выступает как эталон; с её помощью можно рассматривать геометрию Римана, интегрально описывающую реальное пространство, которое сформировано материальными средами, и воображаемую геометрию Лобачевского, не имеющую своего собственного прототипа пространства «отрицательной» кривизны“ [2, с.221]).

Дело в том, что эти алгебры уже найдены [1], а вслед за этим сделана попытка исследовать свойства симметрии пространства, псевдоевклидового пространства трёхмерного и семимерного. Для того, чтобы рассмотреть свойства симметрии, нужно на основе свойств чисто алгебраических систем получить преобразования вращения, научиться обеспечивать математически способ вращения пространств. Эта задача выполнена. То есть сейчас уже можно смело говорить о том, что имеется математическое описание вращений трёхмерного псевдоевклидового и семимерного псевдоевклидового пространств индекса 2 и 4 соответственно – причём, как выясняется, эти преобразования вращения, как и преобразования вращения трёхмерных и семимерных собственно евклидовых пространств, обладают групповыми свойствами, то есть это группы преобразований – соответственно группа, которая отвечает O_3 группы симметрии, но это вовсе не ортогональная группа, это, вообще-то следует называть **псевдоортогональная группа симметрии трёхмерного пространства**, которая обеспечивает вращения трёхмерного псевдоевклидового пространства индекса 2.

Эта группа вращений сохраняет метрику трёхмерного евклидового пространства индекса 2 и позволяет получить, во-первых, матрицы преобразований псевдоевклидового характера преобразований трёхмерных пространств, псевдоевклидовых пространств индекса 2 – это с одной стороны, найти сопряжённую этому преобразованию, то есть по сути дела, обратную для этого преобразования матрицу. Произведение матрицы преобразований вращения и обратной соответственно даёт единицу – но обратная матрица, как и основная матрица трёхмерных псевдоевклидовых вращений

индекса 2, не являются ортогональными. Для этого нужно принять совершенно новый класс псевдоортогональных матриц с совершенно новыми групповыми свойствами. Тем не менее, такие матрицы найдены, они трёхмерны и они позволяют оперировать с векторами, производить преобразования векторов, вращения векторов, то есть определить свойства симметрии псевдоевклидового пространства, трёхмерного псевдоевклидового пространства индекса 2 для трёхмерного случая.

Аналогичные матрицы преобразований вращения для преобразования векторов семимерного псевдоевклидового пространства индекса 4 также найдены, также уже получены – получены сами матрицы, найдены обратные матрицы этим матрицам преобразований, то есть в результате получается возможность использования этих матриц для описания преобразований вращений, а, следовательно, свойств симметрии семимерного псевдоевклидового пространства индекса 4. Эти матрицы также обладают групповыми свойствами, они семимерные, однако также как и в собственноевклидовом случае, они семипараметрические, не 21-а параметрические, а именно семипараметрические.

То есть, описываются семью независимыми компонентами, связанными с углами вращения вокруг каждой из семи псевдоортогональных осей координат. Таким образом, в настоящий момент они получены на основе рассмотрения собственно евклидовых алгебр и способов их получения, а также способов описания преобразований вращения собственно евклидового трёхмерного пространства. Аналогичные матрицы преобразования получены не только для семимерной собственно евклидовой векторной алгебры, семимерной собственно евклидовой векторной алгебры с соответствующей семипараметровой ортогональной группой семимерных вращений, но также аналогичные величины, соответствующие закономерностям и свойствам в трёхмерном псевдоевклидовом индекса 2 и семимерном псевдоевклидовом индекса 4 пространствах.

Это совершенно новые концепции не только в плане рассмотрения трёхмерных векторных алгебр, но и семимерных векторных алгебр. *Это, прежде всего концепция отличающихся от них псевдоевклидовостью, то есть наличием отрицательных компонент в квадрате скалярного произведения двух векторов.* Это – чисто пространственные соображения, хотя следует отметить, что, если в собственноевклидовом случае все семь или три соответственно компоненты для семимерных и трёхмерных вариантов алгебр совершенно равнозначны – пространственные компоненты, то есть пространство однородно и изотропно, любая компонента совершенно одинаковым образом входит во все математические выражения, уравнения, формулы, – то в псевдоевклидовом пространстве, как в трёхмерном, так и в семимерном, пространственные компоненты уже не однородны, то есть пространство обладает двумя типами координат – пространственными, чисто пространственными в понятии трёхмерном и координатами своего ро-

да временного типа, которые дают знак минус в квадрате скалярного произведения. И это речь идёт не о времени, как таковом, а о пространстве.

Пространство характеризуется теперь компонентами неоднородными. *Это очень существенный фактор, который полностью меняет представления о свойствах пространства как такового, и представления о связи пространства и времени.* Если мы хотим получить теорию поля на базе соответствующих псевдоевклидовых пространств – трёхмерном и семимерном, то это вполне возможно точно таким же образом, как в трёхмерном и семимерном собственно евклидовом случае пространства. Мы прибавляли одну псевдоевклидову координату, характеризующую время. Прибавление одной псевдоевклидовой координаты, характеризующей время, к трёхмерному либо семимерному собственно евклидовому пространству индекса 2 или 4, дают соответственно теории восьмимерного пространства- времени псевдоевклидового, уже хотя бы по той причине, что время носит псевдоевклидов характер, а также по той причине, что некоторые пространственные компоненты носят псевдоевклидов характер, в том числе. При этом получается теория четырёхмерного и восьмимерного псевдоевклидовых пространств – времени уже соответственно индекса 3 и индекса 5.

В отличие от собственно евклидового пространства, которое даёт теорию четырёхмерного, либо восьмимерного пространства- времени индекса 1, здесь совсем другие индексы пространства, а, следовательно, совсем другие свойства этих пространств и преобразований этих пространств. В частности, в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 2 квадрат скорости имеет две отрицательные компоненты, а в четырёхмерном пространстве- времени индекса 3 мы уже будем иметь три отрицательные компоненты квадрата скорости. Если там трёхмерное пространство имело три положительные компоненты, то здесь трёхмерное пространство имеет одну положительную компоненту квадрата вектора, любого вектора. В том же случае квадрат вектора четырёхмерного пространства- времени индекса 1 имеет три отрицательные компоненты квадрата интервала, то здесь, наоборот, мы имеем одну отрицательную компоненту – не три положительные компоненты квадрата интервала в собственно евклидовом случае, а три отрицательные компоненты квадрата интервала – то есть получается такая связь: якобы в псевдоевклидовом пространстве- времени индекса 3 трёхмерном, четырёхмерном пространстве- времени индекса 3, как бы поменялись своими функциями, своими свойствами понятия длины и понятия времени – то есть теперь формально можно время рассматривать как трёхмерное, а пространство как одномерное в псевдоевклидовом пространстве- времени четырёхмерном индекса 3.

То есть, в данном случае наличествуют более глубокие взаимосвязи между понятиями пространства и понятиями времени, нежели, если только рассматривать специальную теорию относительности Эйнштейна-Минковского. Здесь возникают вопросы философского и матема-

тического характера, связанные с рассмотрением многомерного времени – времени размерности 3, например. В семимерном случае, дающем восьмимерное пространство- время псевдоевклидово индекса 5 точно также. Но здесь мы имеем пять отрицательных компонент, связываемых со временем и три с пространством. То есть, получается пока еще непонятная, необдуманная, неосознанная взаимосвязь величин пространств и времени, более глубокая, нежели та, которая следует даже из специальной теории относительности Эйнштейна-Минковского.

Литература

- 1 Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
2. Попов В. Г. Природа и разум.— СПб.: Изд-во С.— Петербургского университета, 2005.

ПРИЛОЖЕНИЕ I¹

Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех- и семимерного векторных исчислений

1. Гиперкомплексные числа

Двумерные гиперкомплексные числа

I. Определение двумерных чисел.

Двумерными числами $\mathbf{a}$ назовем упорядоченные пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ вещественных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с вещественными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары вещественных чисел $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

или

$$(a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\mathbf{b}=(b_0, b_1)$ называется пара

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению вещественных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с вещественным числом a_0 , т.е. $(a_0, 0)=a_0$.

В данном определении двумерных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы и произведения, нет речи о каком-либо извлечении квадратного корня из отрицательных или положительных чисел, а также нуля. Все определения формулируются в терминах вещественных чисел и действий над ними.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$\mathbf{ma}=(m, 0)(a_0, a_1)=(ma_0+\alpha a_1 0, ma_1+a_0 0)=(ma_0, ma_1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{ma}=(ma_0, ma_1).$$

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(a_0, -a_1)$, отличающиеся знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)(a_0, -a_1)=(a_0a_0-\alpha a_1a_1, a_0a_1-a_0a_1)=(a_0^2-\alpha a_1^2, 0),$$

¹ Печатается по изданию: Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех- и семимерного векторных исчислений. – Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004. – 79 с.

т.е.
$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a_0^2 - \alpha a_1^2,$$

так что их произведение равно вещественному числу, которое равно нулю, если: $a_0^2 = a_1^2 = 0$ при $\alpha = -1$, $a_0^2 = a_1^2$ при $\alpha = 1$, $a_0^2 = 0$ при $\alpha = 0$.

Двумерные числа обладают следующими свойствами:

1.
$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{(a_0, -a_1)} = (a_0, a_1) = \mathbf{a},$$

т.е.
$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}.$$

2.
$$\overline{\mathbf{ab}} = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, -(a_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$\overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{a}} = (b_0, -b_1)(a_0, -a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1b_1, -(b_0a_1 + a_0b_1)),$$

т.е.
$$\overline{\mathbf{ab}} = \overline{\mathbf{b}}\overline{\mathbf{a}}.$$

3.
$$\mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = (a_0, a_1) + (a_0, -a_1) = (a_0 + a_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является вещественным числом.

4.
$$\overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \overline{(a_0 + b_0, -(a_1 + b_1))} = (a_0, -a_1) + (b_0, -b_1) = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения вещественных чисел $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения вещественных чисел $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с вещественным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1a_1)c_0 + \alpha c_1(a_0b_1 + b_0a_1), (a_0b_0 + \alpha b_1a_1)c_1 + c_0(a_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 + \alpha c_1b_1, b_0c_1 + c_0b_1) =$$

$$= (a_0(b_0c_0 + \alpha c_1b_1) + \alpha (b_0c_1 + c_0b_1)a_1, a_0(b_0c_1 + c_0b_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1b_1)a_1).$$

В силу коммутативности умножения вещественных чисел $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

6. Коммутативность умножения:

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, a_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1b_1, b_0a_1 + a_0b_1).$$

В силу коммутативности умножения вещественных чисел $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(a_1 + b_1), (a_0 + b_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)),$$

$$\mathbf{ac} + \mathbf{bc} = (a_0c_0 + \alpha c_1a_1, a_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1b_1, b_0c_1 + c_0b_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(a_1 + b_1), (a_0 + b_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)),$$

т.е.
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_0 \cdot 1 + \alpha a_1, a_0 \cdot 0 + 1 \cdot a_1) = (a_0, a_1) = a.$$

Итак, удвоенные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа.

Если $a\bar{a} \neq 0$, то $a^{-1} = \bar{a}(a\bar{a})^{-1}$.

Действительно, $aa^{-1} = a(\bar{a}(a\bar{a})^{-1}) = (a\bar{a})(a\bar{a})^{-1} = 1$, т.е. $aa^{-1} = 1$.

Только комплексные числа составляют поле. Двойные и дуальные числа имеют обратные величины лишь при $a\bar{a} \neq 0$, т.е. составляют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = (a_0b_0 + \alpha b_1a_1, \\ a_0b_1 + b_0a_1).$$

Четырехмерные гиперкомплексные числа

I. Определение четырехмерных чисел.

Четырехмерными числами a назовем упорядоченные пары $a = (a_0, a_1)$ двумерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с двумерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары двумерных чисел $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$a = b \\ \text{или} \quad (a_0, a_1) = (b_0, b_1) = \begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$, т.е.

$$a + b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

3. Произведением пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара

$$ab = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

$$\text{т.е.} \quad ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению двумерных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с двумерным числом.

Пары $a = (a_0, a_1)$ и $\bar{a} = (\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$a\bar{a} = (a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (a_0\bar{a}_0 - \alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1 + \bar{a}_1a_0) = (|a_0|^2 - \alpha|a_1|^2, 0),$$

$$\text{т.е.} \quad a\bar{a} = |a_0|^2 - \alpha|a_1|^2,$$

так что их произведение равно вещественному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2 = |a_1|^2 = 0$ при $\alpha = -1$, $|a_0|^2 = |a_1|^2$ при $\alpha = 1$, $|a_0|^2 = 0$ при $\alpha = 0$.

Четырехмерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \quad \overline{\overline{a}} = \overline{(\overline{a_0}, -a_1)} = (\overline{\overline{a_0}}, a_1) = (a_0, a_1) = a,$$

т.е. $\overline{\overline{a}} = a.$

$$2. \quad \overline{ab} = \overline{(a_0b_0 + ab_1\overline{a_1}, -(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1))} =$$

$$= (\overline{b_0}\overline{a_0} + \alpha a_1\overline{b_1}, -(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1)),$$

$$\overline{b}\overline{a} = (\overline{b_0}, -b_1)(\overline{a_0}, -a_1) = (\overline{b_0}\overline{a_0} + \alpha a_1\overline{b_1}, -(b_0a_1 + \overline{a_0}b_1)),$$

т.е. $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}.$

$$3. \quad a + \overline{a} = (a_0, a_1) + (\overline{a_0}, -a_1) = (a_0 + \overline{a_0}, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является вещественным числом.

$$4. \quad \overline{a + b} = \overline{(a_0 + b_0, -(a_1 + b_1))} = (\overline{a_0}, -a_1) + (\overline{b_0}, -b_1) = \overline{a} + \overline{b}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a + b) + c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1),$$

$$a + (b + c) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения двумерных чисел
 $(a + b) + c = a + (b + c).$

2. Коммутативность сложения:

$$a + b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1),$$

$$b + a = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0 + a_0, b_1 + a_1).$$

В силу коммутативности сложения двумерных чисел $a + b = b + a.$

3. Наличие нуля:

$$a + 0 = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0 + 0, a_1 + 0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $a + 0 = a$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с вещественным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$a + (-a) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0 - a_0, a_1 - a_1) = (0, 0),$$

т.е. $a + (-a) = 0$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1 + b_0a_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1})c_0 + \alpha c_1(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1), (a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1})c_1 + c_0(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1)) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1})c_0 + \alpha c_1(\overline{b_1}a_0 + \overline{a_1}b_0), (\overline{b_0}\overline{a_0} + \alpha a_1\overline{b_1})c_1 + c_0(\overline{a_0}b_1 + b_0a_1)),$$

$$a(bc) = (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1}, \overline{b_0}c_1 + c_0b_1) =$$

$$= (a_0(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1}) + \alpha(\overline{b_0}c_1 + c_0b_1)\overline{a_1}, \overline{a_0}(b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1}) + (b_0c_0 + \alpha c_1\overline{b_1})a_1).$$

В силу коммутативности умножения двумерных чисел $(ab)c = a(bc).$

6. Некоммутативность умножения:

$$ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\overline{a_1}, \overline{a_0}b_1 + b_0a_1),$$

$$ba = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1\overline{b_1}, \overline{b_0}a_1 + a_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $ab \neq ba.$

7. Дистрибутивность:

$$(a + b)c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\overline{a_1} + \overline{b_1}), (\overline{a_0} + \overline{b_0})c_1 + c_0(a_1 + b_1)) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\overline{a_1} + \overline{b_1}), (\overline{a_0} + \overline{b_0})c_1 + c_0(a_1 + b_1)),$$

$$\begin{aligned} ac+bc &= (a_0c_0+\alpha c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1+c_0a_1)+(b_0c_0+\alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1+c_0b_1)= \\ &= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\bar{a}_1+\bar{b}_1), (\bar{a}_0+\bar{b}_0)c_1+c_0(a_1+b_1)), \\ \text{т.е.} \quad (a+b)c &= ac+bc. \end{aligned}$$

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_0, a_1)(1, 0)=(a_01+\alpha 0\bar{a}_1, \bar{a}_00+1a_1)=(a_0, a_1)=a.$$

Итак, четырехмерные числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа.

Если $a\bar{a} \neq 0$, то $a^{-1}=\bar{a}(a\bar{a})^{-1}$.

Действительно, $aa^{-1}=a(\bar{a}(a\bar{a})^{-1})=(a\bar{a})(a\bar{a})^{-1}=1$, т.е. $aa^{-1}=1$.

Только собственнокватернионные числа составляют тело. Псевдокватернионные и дуальнокватернионные числа имеют обратные величины лишь при $a\bar{a} \neq 0$, т.е. составляют некоммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l} ab=(a_0b_0+\alpha b_1a_1+\alpha b_2a_2-\alpha^2a_3b_3, \\ \hline a_0b_1+b_0a_1-\alpha b_2a_3+\alpha a_2b_3, \\ a_0b_2-\alpha b_3a_1+b_0a_2+\alpha a_3b_1, \\ \hline a_0b_3-b_2a_1+b_0a_3+a_2b_1). \end{array}$$

Восьмимерные гиперкомплексные числа

I. Определение восьмимерных чисел.

Восьмимерными числами a назовем упорядоченные пары $a=(a_0, a_1)$ четырехмерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с четырехмерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары четырехмерных чисел $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$\begin{array}{l} \text{или} \quad a=b \\ (a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0=b_0, \\ a_1=b_1. \end{cases} \end{array}$$

2. Суммой пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара $a+b=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$a+b=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара

$$ab=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е.

$$ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению четырехмерных чисел.

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с четырехмерным числом.

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0\bar{a}_0-\alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1+\bar{a}_1a_0)=(|a_0|^2-\alpha|a_1|^2, 0),$$

т.е.

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=|a_0|^2-\alpha|a_1|^2,$$

так что их произведение равно вещественному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2=|a_1|^2=0$ при $\alpha=-1$, $|a_0|^2=|a_1|^2$ при $\alpha=1$, $|a_0|^2=0$ при $\alpha=0$.

Восьмимерные числа обладают следующими свойствами:

$$1. \quad \bar{\bar{\mathbf{a}}}=(\bar{\bar{a}}_0, -\bar{a}_1)=(\bar{a}_0, a_1)=(a_0, a_1)=\mathbf{a},$$

т.е.

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}.$$

$$2. \quad \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}=(\overline{a_0b_0+ab_1\bar{a}_1}, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1))=$$

$$=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}=(\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1+\bar{a}_0b_1)),$$

т.е.

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}=\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}.$$

$$3. \quad \mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)+(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0+\bar{a}_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является вещественным числом.

$$4. \quad \overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(\overline{a_0+b_0}, -(a_1+b_1))=(\bar{a}_0, -a_1)+(\bar{b}_0, -b_1)=\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))+(c_0, c_1)=((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(a_0, a_1)+((b_0, b_1)+(c_0, c_1))=(a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения четырехмерных чисел

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_0, b_1)+(a_0, a_1)=(b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения четырехмерных чисел $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=(a_0, a_1)+(0, 0)=(a_0+0, a_1+0)=(a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с вещественным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(a_0, a_1)+(-a_0, -a_1)=(a_0-a_0, a_1-a_1)=(0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Альтернативность умножения:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{b}=((a_0, a_1)(b_0, b_1))(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1)(b_0, b_1)=$$

$$=((a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)b_0+\alpha b_1(\bar{a}_0b_1+b_0a_1), (\bar{a}_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)b_1+b_0(\bar{a}_0b_1+b_0a_1))=$$

$$=((a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)b_0+\alpha b_1(\bar{b}_1a_0+\bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1)b_1+b_0(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{b})=(a_0, a_1)((b_0, b_1)(b_0, b_1))=(a_0, a_1)(b_0b_0+\alpha b_1\bar{b}_1, \bar{b}_0b_1+b_0b_1)=$$

$$=(a_0(b_0b_0+\alpha b_1\bar{b}_1)+\alpha(\bar{b}_0b_1+b_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0b_1+b_0b_1)+(b_0b_0+\alpha b_1\bar{b}_1)a_1).$$

В силу равенств $\mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}$ и $\mathbf{b}+\bar{\mathbf{b}}$ вещественным числам $(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{b}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{b})$.

6. Некоммутативность умножения:

$$\mathbf{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

$$\mathbf{ba}=(b_0, b_1)(a_0, a_1)=(b_0a_0+\alpha a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1+a_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

7. Дистрибутивность:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(a_1 + b_1), (a_0 + b_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)),$$

$$\mathbf{ac} + \mathbf{bc} = (a_0c_0 + \alpha c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1 + b_1)),$$

т.е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

8. Наличие единицы:

$$\mathbf{a1} = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_01 + \alpha 0\bar{a}_1, \bar{a}_00 + 1a_1) = (a_0, a_1) = \mathbf{a}.$$

Итак, восьмимерные числа составляют некоммутативное, альтернативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа.

Если $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \neq 0$, то $\mathbf{a}^{-1} = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^{-1}$.

Действительно, $\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}(\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^{-1}) = (\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})(\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}})^{-1} = 1$, т.е. $\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = 1$.

Только собственнокватернионные числа составляют альтернативное тело. Псевдокватернионные и дуальнокватернионные числа имеют обратные величины лишь при $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} \neq 0$, т.е. составляют некоммутативное альтернативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l} \mathbf{ab} = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1 + \alpha b_2a_2 - \alpha^2 a_3b_3 + \alpha b_4a_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 b_7a_7, \\ a_0b_1 + b_0a_1 - \alpha b_2\bar{a}_3 + \alpha a_2b_3 - \alpha b_4a_5 + \alpha a_4b_5 + \alpha^2 a_6b_7 - \alpha^2 b_6a_7, \\ a_0b_2 - \alpha b_3a_1 + b_0a_2 + \alpha a_3b_1 - \alpha b_4a_6 + \alpha^2 a_7b_5 + \alpha a_4b_6 - \alpha^2 b_7a_5, \\ a_0b_3 - b_2a_1 + b_0a_3 + a_2b_1 - \alpha b_4a_7 + \alpha a_6b_5 + \alpha a_4b_7 - \alpha b_6a_5, \\ a_0b_4 - \alpha b_5a_1 - \alpha b_6a_2 + \alpha^2 a_3b_7 + b_0a_4 + \alpha a_5b_1 + \alpha a_6b_2 - \alpha^2 b_3a_7, \\ a_0b_5 - b_4a_1 + \alpha b_6a_3 - \alpha a_2b_7 + b_0a_5 + a_4b_1 - \alpha a_6b_3 + \alpha b_2a_7, \\ a_0b_6 + \alpha b_7a_1 - b_4a_2 - \alpha a_3b_5 + b_0a_6 - \alpha a_7b_1 + a_4b_2 + \alpha b_3a_5, \\ a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 + b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5). \end{array}$$

Особенностью гиперкомплексных чисел является, в частности, то, что произведение двух гиперкомплексных чисел с вещественными значениями $a_0 = b_0 = 0$ дает возможность получать скалярное и векторное произведения двух многомерных векторов:

$$\mathbf{ab} = -(\mathbf{ab}) + [\mathbf{ab}],$$

где

$$(\mathbf{ab}) = -(\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 - \alpha^2 b_3a_3 + \alpha a_4b_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 a_7b_7)$$

и

$$[\mathbf{ab}] = (\alpha(a_2b_3 - a_3b_2) + \alpha(a_4b_5 - a_5b_4) - \alpha^2(a_7b_6 - a_6b_7),$$

$$(\alpha(a_4b_6 - a_6b_4) - \alpha^2(a_5b_7 - a_7b_5) + \alpha(a_3b_1 - a_1b_3),$$

$$(\alpha(a_6b_5 - a_5b_6) - (a_1b_2 - a_2b_1) + \alpha(a_4b_7 - a_7b_4),$$

$$(\alpha(a_5b_1 - a_1b_5) - \alpha^2(a_7b_3 - a_3b_7) + \alpha(a_6b_2 - a_2b_6),$$

$$(\alpha(a_7b_2 - a_2b_7) + \alpha(a_3b_6 - a_6b_3) - (a_1b_4 - a_4b_1),$$

$$(\alpha(a_1b_7 - a_7b_1) - (a_2b_4 - a_4b_2) + \alpha(a_5b_3 - a_3b_5), \\ (- (a_3b_4 - a_4b_3) - (a_6b_1 - a_1b_6) - (a_2b_5 - a_5b_2))$$

для семимерных векторных алгебр;

$$(\mathbf{ab}) = -(\alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2 - \alpha^2 b_3 a_3)$$

и

$$[\mathbf{ab}] = (\alpha(a_2 b_3 - a_3 b_2), \\ \alpha(a_3 b_1 - a_1 b_3), \\ -(a_1 b_2 - a_2 b_1))$$

для трехмерных векторных алгебр;

$$(\mathbf{ab}) = -\alpha a_1 b_1$$

и

$$[\mathbf{ab}] = 0$$

для одномерных векторных алгебр.

Особо отметим, что операцию умножения четырехмерных и, следовательно, восьмимерных чисел можно определить иначе, например, так [1]:

произведением пар $\mathbf{a} = (a_0, a_1)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1)$ можно назвать пару

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1, a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0),$$

т.е.

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1, a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0).$$

Рассматриваемые четырехмерные числа обладают теми же свойствами, что и предыдущие, кроме свойства 2, которое в формальной записи имеет тот же самый вид:

$$2. \quad \overline{\mathbf{ab}} = (\overline{a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1}, -(\overline{a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0})) = \\ = (\bar{b}_0 \bar{a}_0 + \alpha \bar{a}_1 b_1, -(a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0)), \\ \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}} = (\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (\bar{b}_0 \bar{a}_0 + \alpha \bar{a}_1 b_1, -(b_1 a_0 + a_1 \bar{b}_0)),$$

т.е.

$$\overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{a}}.$$

Можно показать, что при этом выполняются следующие свойства действий четырехмерных чисел

$$1. \text{ Ассоциативность сложения: } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

$$2. \text{ Коммутативность сложения: } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

$$3. \text{ Наличие нуля: } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

$$4. \text{ Наличие противоположного числа: } \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

$$5. \text{ Ассоциативность умножения:}$$

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c} = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1, a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0)(c_0, c_1) = \\ = ((a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1)c_0 + \alpha \bar{c}_1(a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0), (a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0)\bar{c}_0 + c_1(a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1)), \\ \mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1)) = (a_0, a_1)(b_0 c_0 + \alpha \bar{c}_1 b_1, b_1 \bar{c}_0 + c_1 b_0) = \\ = (a_0(b_0 c_0 + \alpha \bar{c}_1 b_1) + \alpha(\bar{b}_1 \bar{c}_0 + c_1 \bar{b}_0)a_1, a_1(\bar{b}_0 c_0 + \alpha \bar{c}_1 b_1) + (b_1 \bar{c}_0 + c_1 b_0)a_0) = \\ = (a_0(b_0 c_0 + \alpha \bar{c}_1 b_1) + \alpha(\bar{c}_0 \bar{b}_1 + \bar{b}_0 \bar{c}_1)a_1, a_1(\bar{c}_0 \bar{b}_0 + \alpha \bar{b}_1 c_1) + (b_1 \bar{c}_0 + c_1 b_0)a_0).$$

В силу коммутативности умножения двумерных чисел $\mathbf{ab}\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$.

$$6. \text{ Некоммутативность умножения:}$$

$$\mathbf{ab} = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1, a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0),$$

$$\mathbf{ba} = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0 a_0 + \alpha \bar{a}_1 b_1, b_1 \bar{a}_0 + a_1 b_0).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$.

$$7. \text{ Дистрибутивность:}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0+b_0, a_1+b_1)(c_0, c_1) = \\
&= ((a_0+b_0)c_0 + \alpha \bar{c}_1(a_1+b_1), (a_1+b_1)\bar{c}_0 + c_1(a_0+b_0)), \\
ac+bc &= (a_0c_0 + \alpha \bar{c}_1a_1, a_1\bar{c}_0 + c_1a_0) + (b_0c_0 + \alpha \bar{c}_1b_1, b_1\bar{c}_0 + c_1b_0) = \\
&= ((a_0+b_0)c_0 + \alpha \bar{c}_1(a_1+b_1), (a_1+b_1)\bar{c}_0 + c_1(a_0+b_0)), \\
\text{т.е.} \quad (a+b)c &= ac+bc.
\end{aligned}$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_01 + \alpha \bar{0}a_1, a_1\bar{1} + 0a_0) = (a_0, a_1) = a.$$

Итак, четырехмерные числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа.

Если $a\bar{a} \neq 0$, то $a^{-1} = \bar{a}(a\bar{a})^{-1}$.

Действительно, $aa^{-1} = a(\bar{a}(a\bar{a})^{-1}) = (a\bar{a})(a\bar{a})^{-1} = 1$, т.е. $aa^{-1} = 1$.

Только собственнокватернионные числа составляют тело. Псевдокватернионные и дуальнокватернионные числа имеют обратные величины лишь при $a\bar{a} \neq 0$, т.е. составляют некоммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{array}{l}
ab = (a_0b_0 + ab_1a_1 + ab_2a_2 - \alpha^2 a_3b_3, \\
\hline
a_0b_1 + b_0a_1 - ab_2a_3 - \alpha a_2b_3, \\
a_2b_0 - ab_1a_3 + b_2a_0 + \alpha a_1b_3, \\
\hline
-a_2b_1 + b_0a_3 + b_2a_1 + a_0b_3).
\end{array}$$

Рассматриваемые восьмимерные числа обладают теми же свойствами, что и предыдущие, кроме свойства 2, которое в формальной записи имеет тот же самый вид:

$$\begin{aligned}
2. \quad \overline{ab} &= \overline{(a_0b_0 + ab_1a_1, -(a_1\bar{b}_0 + b_1a_0))} = \\
&= (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha \bar{a}_1b_1, -(a_1\bar{b}_0 + b_1a_0)), \\
\bar{b}\bar{a} &= (\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha \bar{a}_1b_1, -(b_1a_0 + a_1\bar{b}_0)), \\
\text{т.е.} \quad \overline{ab} &= \bar{b}\bar{a}.
\end{aligned}$$

Можно показать, что при этом выполняются следующие свойства действий восьмимерных чисел

1. Ассоциативность сложения: $(a+b)+c=a+(b+c).$
2. Коммутативность сложения: $a+b=b+a.$
3. Наличие нуля: $a+0=a.$
4. Наличие противоположного числа: $a+(-a)=0.$
5. Альтернативность умножения:

$$\begin{aligned}
(ab)b &= ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha \bar{b}_1a_1, a_1\bar{b}_0 + b_1a_0)(b_0, b_1) = \\
&= ((a_0b_0 + \alpha \bar{b}_1a_1)b_0 + \alpha \bar{b}_1(a_1\bar{b}_0 + b_1a_0), (a_1\bar{b}_0 + b_1a_0)\bar{b}_0 + b_1(a_0b_0 + \alpha \bar{b}_1a_1)), \\
a(bb) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(b_0, b_1)) = (a_0, a_1)(b_0b_0 + \alpha \bar{b}_1b_1, b_1\bar{b}_0 + b_1b_0) = \\
&= (a_0(b_0b_0 + \alpha \bar{b}_1b_1) + \alpha(b_1\bar{b}_0 + b_1b_0)a_1, a_1(b_0b_0 + \alpha \bar{b}_1b_1) + (b_1\bar{b}_0 + b_1b_0)a_0) = \\
&= (a_0(b_0b_0 + \alpha \bar{b}_1b_1) + \alpha(b_0\bar{b}_1 + \bar{b}_0b_1)a_1, a_1(\bar{b}_0\bar{b}_0 + \alpha \bar{b}_1b_1) + (b_1\bar{b}_0 + b_1b_0)a_0).
\end{aligned}$$

В силу равенств $\bar{b}\bar{b}$ и $b+\bar{b}$ вещественным числам $(ab)b=a(bb).$

6. Некоммутативность умножения:

$$ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha \bar{b}_1 a_1, a_1 \bar{b}_0 + b_1 a_0),$$

$$ba = (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha \bar{a}_1 b_1, b_1 \bar{a}_0 + a_1 b_0).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $ab \neq ba$.

7. Дистрибутивность:

$$(a + b)c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)(c_0, c_1) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha \bar{c}_1(a_1 + b_1), (a_1 + b_1)\bar{c}_0 + c_1(a_0 + b_0)),$$

$$ac + bc = (a_0c_0 + \alpha \bar{c}_1 a_1, a_1 \bar{c}_0 + c_1 a_0) + (b_0c_0 + \alpha \bar{c}_1 b_1, b_1 \bar{c}_0 + c_1 b_0) =$$

$$= ((a_0 + b_0)c_0 + \alpha \bar{c}_1(a_1 + b_1), (a_1 + b_1)\bar{c}_0 + c_1(a_0 + b_0)),$$

т.е.

$$(a + b)c = ac + bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_0 \cdot 1 + \alpha \bar{0} a_1, a_1 \bar{1} + 0 a_0) = (a_0, a_1) = a.$$

Итак, восьмимерные числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

9. Наличие обратного числа.

Если $a\bar{a} \neq 0$, то $a^{-1} = \bar{a}(a\bar{a})^{-1}$. Действительно, $aa^{-1} = a(\bar{a}(a\bar{a})^{-1}) = (a\bar{a})(a\bar{a})^{-1} = 1$, т.е. $aa^{-1} = 1$. Только собственноктенионные числа составляют альтернативное тело. Псевдооктенионные и дуальнооктенионные числа имеют обратные величины лишь при $a\bar{a} \neq 0$, т.е. составляют некоммутативное альтернативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = \begin{pmatrix} a_0b_0 + \alpha b_1a_1 & \alpha b_2a_2 - \alpha^2 a_3b_3 & \alpha b_4a_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 b_7a_7, \\ a_0b_1 + b_0a_1 & \alpha b_2a_3 - \alpha a_2b_3 & \alpha b_4a_5 - \alpha a_4b_5 - \alpha^2 a_6b_7 + \alpha^2 b_6a_7, \\ a_2b_0 - \alpha b_1a_3 & b_2a_0 + \alpha a_1b_3 & -\alpha b_6a_4 + \alpha^2 a_5b_7 + \alpha a_6b_4 - \alpha^2 b_5a_7, \\ -a_2b_1 + b_0a_3 & b_2a_1 + a_0b_3 & \alpha b_6a_5 - \alpha a_4b_7 - \alpha a_6b_5 + \alpha b_4a_7, \\ a_4b_0 - \alpha b_1a_5 - \alpha b_2a_6 + \alpha^2 a_7b_3 & b_4a_0 + \alpha a_1b_5 + \alpha a_2b_6 - \alpha^2 b_7a_3, \\ -a_4b_1 + b_0a_5 - \alpha b_2a_7 + \alpha a_6b_3 & b_4a_1 + a_0b_5 + \alpha a_2b_7 - \alpha b_6a_3, \\ a_6b_0 + \alpha b_1a_7 - b_2a_4 - \alpha a_5b_3 & b_6a_0 - \alpha a_1b_7 + a_2b_4 + \alpha b_5a_3, \\ a_6b_1 + b_0a_7 - b_2a_5 - a_4b_3 & -b_6a_1 + a_0b_7 + a_2b_5 + b_4a_3. \end{pmatrix}$$

Скалярное и векторное произведения двух многомерных векторов:

$$ab = -(ab) + [ab],$$

где

$$(ab) = -(\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 - \alpha^2 b_3a_3 + \alpha a_4b_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 a_7b_7)$$

и

$$[ab] = (-\alpha(a_2b_3 - a_3b_2) - \alpha(a_4b_5 - a_5b_4) + \alpha^2(a_7b_6 - a_6b_7), \\ (-\alpha(a_4b_6 - a_6b_4) + \alpha^2(a_5b_7 - a_7b_5) - \alpha(a_3b_1 - a_1b_3), \\ (-\alpha(a_6b_5 - a_5b_6) + (a_1b_2 - a_2b_1) - \alpha(a_4b_7 - a_7b_4), \\ (-\alpha(a_5b_1 - a_1b_5) + \alpha^2(a_7b_3 - a_3b_7) - \alpha(a_6b_2 - a_2b_6), \\ (-\alpha(a_7b_2 - a_2b_7) - \alpha(a_3b_6 - a_6b_3) + (a_1b_4 - a_4b_1), \\ (-\alpha(a_1b_7 - a_7b_1) + (a_2b_4 - a_4b_2) - \alpha(a_5b_3 - a_3b_5), \\ ((a_3b_4 - a_4b_3) + (a_6b_1 - a_1b_6) + (a_2b_5 - a_5b_2))$$

для семимерных векторных алгебр;

$$(ab) = -(\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 - \alpha^2 b_3a_3)$$

и

$$[ab] = (-\alpha(a_2b_3 - a_3b_2), \\ -\alpha(a_3b_1 - a_1b_3),$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1))$$

для трехмерных векторных алгебр;

$$(ab) = -\alpha a_1 b_1$$

и

$$[ab] = 0$$

для одномерных векторных алгебр.

Таким образом, рассмотренные процедуры умножения гиперкомплексных чисел, отличаются лишь знаком векторных произведений двух векторов. Они соответствуют левым и правым системам координат. Будем для определенности первую из них называть левой, а вторую – правой. Кватернионам Гамильтона и октенионам Кэли соответствуют правые системы координат.

2. Псевдоевклидовы трехмерные векторные алгебры

В начале XIX в. обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике, над различными объектами нечисловой природы, подчиняются законам обычной арифметики: сочетательности, переместительности и распределительности, и что эти объекты можно рассматривать как величины, к которым применимы алгебраические методы изучения. В связи с этим, системы объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные с арифметическими действиями над числами, стали рассматривать с позиции алгебры. Изучением одной из таких систем объектов занимается трехмерная векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач евклидовой геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учениями об электричестве и магнетизме, где приходится иметь дело с векторными величинами, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями в пространстве. В связи с этим, евклидовы геометрии нашли свои аналоги в векторном исчислении.

Вместе с тем, наряду с евклидовой геометрией, в XIX в. были созданы неевклидовы геометрические системы Лобачевского и Римана. Соответствующие этим геометриям векторные алгебры до сих пор не изучены, хотя эти геометрии широко используются в физических приложениях. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение векторных алгебр, не соответствующих геометрии Евклида, и, прежде всего, изучение процедур удвоения по отношению к двойным и дуальным числам [1].

На этом пути мы неизбежно придем к таблице умножения базисных элементов трехмерных векторных алгебр в виде:

	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	αe_2
e_2	$-e_3$	0	$-\beta e_1$
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	0

где α и β принимают значения ± 1 или 0 . Здесь $\alpha=\beta=-1$ соответствуют трехмерным векторным алгебрам Гамильтона-Грассмана, $\alpha=\beta=1$ – алгебрам, отвечающим четырехмерным расширениям двойных чисел, а $\alpha, \beta=0$ – алгебрам, отвечающим четырехмерным расширениям дуальных чисел. Дальнейшим развитием рассматриваемых алгебраических схем могут быть восьмимерные расширения [3].

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций трехмерной векторной алгебры. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами трехмерного линейного векторного пространства:

1. Ассоциативность сложения векторов
 $(A+B)+C=A+(B+C);$
2. Коммутативность сложения векторов
 $A+B=B+A;$
3. Наличие нулевого вектора
 $A+0=A;$
4. Наличие противоположного вектора
 $A+(-A)=0.$

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и, сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножения вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1. $IA=AI;$
2. $(ab)A=a(bA);$
3. $(a+b)A=aA+bA;$
4. $a(A+B)=aA+aB.$

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением (AB) двух векторов A и B назовем скаляр $(AB)=(A^i e_i B^k e_k)=A^i B^k (e_i e_k)=g_{ik} A^i B^k,$

определяемый матрицей скалярных произведений векторов базиса вида:

$$g_{ik} = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{vmatrix},$$

так что

$$(AB)=g_{ik} A^i B^k=g_{ik} A^i B^i,$$

т.е. $(AB)=-\alpha A^1 B^1 -\beta A^2 B^2 +\alpha\beta A^3 B^3.$

Скалярный квадрат вектора A определяется соответственно равенством $(AA)=-\alpha(A^1)^2 -\beta(A^2)^2 +\alpha\beta(A^3)^2=A^2,$

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора.

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $(a\mathbf{AB}) = a(\mathbf{AB})$;
2. $(\mathbf{AB}) = (\mathbf{BA})$;
3. $(\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = (\mathbf{AB}) + (\mathbf{AC})$;
4. Два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны, если выполняется условие $(\mathbf{AB}) = 0$.

Векторное произведение $[\mathbf{AB}]$ двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$[\mathbf{AB}] = [(A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3)(B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3)] = \\ = -\beta(A^2B^3 - A^3B^2)\mathbf{e}_1 - \alpha(A^3B^1 - A^1B^3)\mathbf{e}_2 + (A^1B^2 - A^2B^1)\mathbf{e}_3.$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде определителя:

$$[\mathbf{AB}] = \begin{vmatrix} -\beta\mathbf{e}_1 & -\alpha\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix},$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $[a\mathbf{AB}] = a[\mathbf{AB}]$;
2. $[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}]$;
3. $[\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})] = [\mathbf{AB}] + [\mathbf{AC}]$;
4. $[a\mathbf{AA}] = 0$.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ – простейшее произведение трех векторов;
2. $(\mathbf{A}[\mathbf{BC}])$ – смешанное произведение трех векторов;
3. $[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]$ – двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ трех векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) \neq (\mathbf{AB})\mathbf{C},$$

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение $(\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = (\mathbf{ABC})$ трех векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

$$(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = -\alpha A^1[\mathbf{BC}]^1 - \beta A^2[\mathbf{BC}]^2 + \alpha\beta A^3[\mathbf{BC}]^3 = \\ = \alpha\beta A^1(B^2C^3 - B^3C^2) + \alpha\beta A^2(B^3C^1 - B^1C^3) + \alpha\beta A^3(B^1C^2 - B^2C^1).$$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$$

$$(ABC) = \alpha\beta \begin{vmatrix} B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $(\alpha ABC) = \alpha(ABC)$;
2. Смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. $(AB(C+D)) = (ABC) + (ABD)$;
4. Если два вектора A и B в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([AB]/A) = 0$. Если три вектора A , B и $C = A + B$ компланарны, то выполняется равенство $(ABC) = (AB(A+B)) = 0$.

Двойное векторное произведение $[A[BC]]$ трех векторов A , B и C получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

$$[A[BC]] = [AD] = E = E^1 e_1 + E^2 e_2 + E^3 e_3.$$

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

$$\begin{aligned} E^1 &= -\beta(A^2 D^3 - A^3 D^2) = -\beta A^2 (B^1 C^2 - B^2 C^1) - \alpha \beta A^3 (B^3 C^1 - B^1 C^3) = \\ &= B^1 (-\alpha C^1 A^1 - \beta C^2 A^2 + \alpha \beta C^3 A^3) - C^1 (-\alpha A^1 B^1 - \beta A^2 B^2 + \alpha \beta A^3 B^3), \end{aligned}$$

т.е. $E^1 = B^1(CA) - C^1(AB)$.

Аналогично, для других координат:

$$E^2 = B^2(CA) - C^2(AB),$$

$$E^3 = B^3(CA) - C^3(AB).$$

Таким образом, окончательно запишем

$$[A[BC]] = B(CA) - C(AB).$$

Подобным образом можно получить соотношение

$$[[AB]C] = [C[BA]] = B(CA) - A(BC).$$

Используя циклические подстановки векторов, получим

$$[A[BC]] + [B[CA]] + [C[AB]] = 0$$

и $[[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = 0$,

так что, в рассматриваемых алгебрах выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

$$\begin{array}{lll} ((AB)CD) & (AB)(CD) & (ABC)D. \\ [(AB)CD] & (AB)[CD] & \\ ([AB]C)D & ([AB][CD]) & \\ [[[AB]C]D] & [[AB][CD]] & \end{array}$$

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

$$((AB)CD) = (AB)(CD)$$

$$[(AB)CD] = (AB)[CD].$$

Во-вторых, считая векторное произведение $[AB]$ за один вектор, мы можем рассматривать $([[AB]C]D)$ как смешанное произведение трех векторов $[AB]$, C и D . Применив к нему закон сочетательности, получим

$$([AB]C)D = ([AB][CD]).$$

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

$$1. ((AB)CD) = (AB)(CD);$$

$$2. [(AB)CD] = (AB)[CD];$$

$$3. ([[AB]C]D) = ([AB][CD]);$$

$$4. ([AB]C)D = (ABC)D;$$

$$5. [[AB][CD]];$$

$$6. [[[AB]C]D].$$

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые следует считать основными.

Скалярное произведение двух векторов $[AB]$ и $[CD]$, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов $([[AB]C]D)$. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя $[AB]$ и C и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

$$([AB][CD]) = ([AB]C)D.$$

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

$$([AB][CD]) = ((B(AC) - A(BC))D)$$

или, раскрыв скобки

$$([AB][CD]) = \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа выражается через произведение первого типа.

При этом, циклическая подстановка векторов дает:

$$([AB][CD]) + ([BC][AD]) + ([CA][BD]) = 0.$$

Как частный случай, при $C=A$ и $D=B$, мы имеем основное тождество для двух векторов

$$[AB]^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (BA) \\ (AB) & (BB) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений $[[AB][CD]]$ можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов $[AB]$, C и D мы получим

$$[[AB][CD]] = C(D[AB]) - D([AB]C).$$

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов, A , B и $[CD]$, мы получим:

$$[[AB][CD]] = B([CD]A) - A(B[CD]).$$

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, выражается через произведение четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения $[[AB][CD]]$, мы получим

$$C(D[AB]) - D([AB]C) = B([CD]A) - A(B[CD])$$

или

$$A(BCD) - B(CDA) + C(DAB) - D(ABC) = 0.$$

При этом появляется возможность разложения вектора по трем векторам

$$D = (ABC)^{-1}(A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)).$$

Тройное векторное произведение четырех векторов $[[[AB]C]D]$ можно также преобразовать двумя способами.

Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор, получим

$$[[[AB]C]D] = (CA)[BD] - (CB)[AD].$$

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$$[[[AB]C]D] = C(D[AB]) - (CD)[AB].$$

Сравнив оба выражения, получаем

$$(CA)[BD] - (CB)[AD] = C(D[AB]) - (CD)[AB].$$

Отсюда найдем

$$C(ABD) = (CA)[BD] + (CB)[DA] + (CD)[AB].$$

Эта формула очевидно выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов выражаются линейно через произведения только двух типов:

$$(AB)(CD) \text{ и } (AB)[CD].$$

Нетрудно показать, что при этом выполняется тождество Сейгла

$$[[[AB]C]D] + [[BC]D]A + [[[CD]A]B] + [[[DA]B]C] = [[AC][BD]],$$

причем

$$\begin{aligned} [[AC][BD]] &= \begin{vmatrix} A & [BC] \\ (AD) & (BCD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & [CD] \\ (BA) & (CDA) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & [DA] \\ (CB) & (DAB) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & [AB] \\ (DC) & (ABC) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} [AB] & (CB) \\ [AD] & (CD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (AB) & [CB] \\ (AD) & [CD] \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$$(ABC)^2 = ([AB]C)^2.$$

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[AB]$ и C .

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$$(ABC)^2 = [AB]^2 C^2 - [[AB]C]^2.$$

Квадрат векторного произведения $[AB]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$$[AB]^2 = A^2 B^2 - (AB)^2.$$

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[AB]C]^2$ воспользуемся формулой разложения

$$[[AB]C]^2 = (B(CA) - A(BC))^2 = B^2(CA)^2 - 2(AB)(BC)(CA) + A^2(BC)^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$$(ABC)^2 = A^2 B^2 C^2 - (AB)^2 C^2 - A^2 (BC)^2 - B^2 (CA)^2 + 2(AB)(BC)(CA).$$

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$$(ABC)^2 = A^2(B^2 C^2 - (BC)^2) - (AB)((BA)C^2 - (BC)(CA)) + (AC)((BA)(CB) - (CA)B^2).$$

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(ABC)^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (AB) & (AC) \\ (BA) & (BB) & (BC) \\ (CA) & (CB) & (CC) \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Всякое произведение пяти векторов мы можем получить одним из двух способов:

- умножением произведения четырех векторов на пятый вектор;
- умножением произведения трех векторов на произведение двух векторов.

Можно показать, что всякое произведение пяти векторов линейно выражается через произведения следующих трех типов:

1. $(AB)(CD)E$;
2. $(ABC)(DE)$;
3. $(ABC)[DE]$.

Соответственно, всякое произведение шести векторов получается одним из трех способов:

- умножением произведения пяти векторов на шестой вектор;
- умножением произведения четырех векторов на произведение двух векторов;

- умножением произведения трех векторов на произведение трех векторов.

Можно показать также, что всякое произведение шести векторов является линейной комбинацией из произведений следующих типов:

1. $(AB)(CD)(EF)$;
2. $(AB)(CD)[EF]$;
3. $(ABC)(DEF)$.

Покажем, например, что произведения пяти векторов $(ABC)[DE]$ и шести векторов $(ABC)(DEF)$ линейно выражаются через соответствующие произведения $(AB)(CD)E$ и $(AB)(CD)(EF)$. Имеем:

$$(ABC)[DE] = A([BC][DE]) - B([AC][DE]) + C([AB][DE]).$$

Отсюда, на основании формулы для скалярного произведения двух векторных произведений следует:

$$(ABC)[DE] = \begin{vmatrix} A & B & C \\ (AD) & (BD) & (CD) \\ (AE) & (BE) & (CE) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, это произведение действительно выражается через произведение первого типа $(AB)(CD)E$.

Если векторы A, B, C не компланарны, то из этой формулы получается формула разложения векторного произведения $[DE]$ по трем некомпланарным векторам

$$[DE] = (ABC)^{-1} \begin{vmatrix} A & B & C \\ (AD) & (BD) & (CD) \\ (AE) & (BE) & (CE) \end{vmatrix}.$$

Полученная формула является обобщением формулы, выражающей векторное произведение двух векторов через координатные орты e_1, e_2, e_3 .

Умножив скалярно на вектор F обе части полученной формулы, будем иметь:

$$(ABC)(DEF) = \begin{vmatrix} (AF) & (BF) & (CF) \\ (AD) & (BD) & (CD) \\ (AE) & (BE) & (CE) \end{vmatrix}.$$

Эта формула является обобщением полученной выше формулы для квадрата смешанного произведения $(ABC)^2$, если положить $F=A, D=B, E=C$.

Найдем также коэффициенты разложения любой векторной функции D по трем некомпланарным векторам A, B, C , т.е.

$$D = D^1 A + D^2 B + D^3 C.$$

Умножим скалярно обе части этой формулы на $[BC]$.

Учитывая, что смешанное произведение трех векторов, содержащее два одинаковых множителя равно нулю, мы получим

$$(BCD) = D^1(ABC).$$

Отсюда находим

$$D^1 = (ABC)^{-1} (BCD).$$

Аналогично получим

$$D^2 = (BCA)^{-1} (CAD).$$

$$D^3 = (CAB)^{-1} (ABD).$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$D = (ABC)^{-1} ((BCD)A + (CAD)B + (ABD)C).$$

Таким образом, основные соотношения полученных алгебр воспроизводят соотношения векторной алгебры Гамильтона-Грассмана [4]. В то же время, в координатной форме все соотношения этих алгебр расписываются совершенно иным способом.

Алгебры, соответствующие $\alpha, \beta = \pm 1$, вообще говоря, не изоморфны в силу отличия знаков смешанного произведения трех векторов и характеризуют левые и правые евклидовые или псевдоевклидовые индекса два трехмерные векторные алгебры.

3. Начала псевдоевклидовых семимерных векторных алгебр

В [3] изучены основные свойства евклидовой семимерной векторной алгебры, а ниже указано, что кроме евклидовых алгебр возможно построение неевклидовых векторных алгебр в трехмерном и семимерном вариантах.

Рассмотрим свойства неевклидовых семимерных векторных алгебр.

Таблица умножения базисных элементов семимерных неевклидовых векторных алгебр может быть представлена в виде:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	αe_2	e_5	αe_4	$-e_7$	$-\alpha e_6$
e_2	$-e_3$	0	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\alpha e_2$	βe_1	0	e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$-\alpha \beta e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\alpha e_4$	$-e_7$	$-\alpha e_6$	γe_1	0	γe_3	$\alpha \gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_5	γe_2	$-\gamma e_3$	0	$-\beta \gamma e_1$
e_7	αe_6	$-\beta e_5$	$\alpha \beta e_4$	γe_3	$-\alpha \gamma e_2$	$\beta \gamma e_1$	0

где α, β, γ принимают значения ± 1 или 0. Здесь $\alpha=\beta=\gamma=-1$ соответствуют собственноевклидовой семимерной векторной алгебре (Гамильтона-Грассмана), комбинации индекса два с $\alpha, \beta, \gamma=\pm 1$ – псевдоевклидовым алгебрам индекса четыре, отвечающим восьмимерным расширениям двойных чисел, а комбинации с одним или несколькими нулевыми значениями α, β, γ – дуальноевклидовым алгебрам, отвечающим восьмимерным расширениям дуальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций неевклидовых семимерных векторных алгебр. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами семимерного линейного векторного пространства:

1. Ассоциативность сложения векторов
 $(A+B)+C=A+(B+C);$
2. Коммутативность сложения векторов
 $A+B=B+A;$
3. Наличие нулевого вектора
 $A+0=A;$
4. Наличие противоположного вектора
 $A+(-A)=0.$

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и, сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

5. $IA=AI;$
6. $(ab)A=a(bA);$
7. $(a+b)A=aA+bA;$
8. $a(A+B)=aA+aB.$

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением (AB) двух векторов A и B назовем скаляр $(AB)=(A^i e_i B^k e_k)=A^i B^k (e_i e_k)=g_{ik} A^i B^k,$

определяемый матрицей скалярных произведений векторов базиса вида:

$$g_{ik}=(e_i e_k)=\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma \end{vmatrix},$$

так что

$$(AB)=g_{ik} A^i B^k=g_{ik} A^i B^i,$$

т.е. $(AB)=-\alpha A^1 B^1 -\beta A^2 B^2 +\alpha\beta A^3 B^3 -\gamma A^4 B^4 +\alpha\gamma A^5 B^5 +\beta\gamma A^6 B^6 -\alpha\beta\gamma A^7 B^7.$

Скалярный квадрат вектора A определяется соответственно равенством

$$(AA)=-\alpha (A^1)^2 -\beta (A^2)^2 +\alpha\beta (A^3)^2 -\gamma (A^4)^2 +\alpha\gamma (A^5)^2 +\beta\gamma (A^6)^2 -\alpha\beta\gamma (A^7)^2=A^2,$$

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора.

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $(aAB) = a(AB)$;
2. $(AB) = (BA)$;
3. $(A(B+C)) = (AB) + (AC)$;
4. Два вектора A и B ортогональны, если выполняется условие $(AB) = 0$.

Векторное произведение $[AB]$ двух векторов A и B определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 [AB] &= [(A^1 e_1 + A^2 e_2 + \dots + A^7 e_7)(B^1 e_1 + B^2 e_2 + \dots + B^7 e_7)] = \\
 &= (-\beta(A^2 B^3 - A^3 B^2) - \gamma(A^4 B^5 - A^5 B^4) + \beta\gamma(A^7 B^6 - A^6 B^7))e_1 + \\
 &+ (-\gamma(A^4 B^6 - A^6 B^4) + \alpha\gamma(A^5 B^7 - A^7 B^5) - \alpha(A^3 B^1 - A^1 B^3))e_2 + \\
 &+ (-\gamma(A^6 B^5 - A^5 B^6) + (A^1 B^2 - A^2 B^1) - \gamma(A^4 B^7 - A^7 B^4))e_3 + \\
 &+ (-\alpha(A^5 B^1 - A^1 B^5) + \alpha\beta(A^7 B^3 - A^3 B^7) - \beta(A^6 B^2 - A^2 B^6))e_4 + \\
 &+ (-\beta(A^7 B^2 - A^2 B^7) - \beta(A^3 B^6 - A^6 B^3) + (A^1 B^4 - A^4 B^1))e_5 + \\
 &+ (-\alpha(A^1 B^7 - A^7 B^1) + (A^2 B^4 - A^4 B^2) - \alpha(A^5 B^3 - A^3 B^5))e_6 + \\
 &+ ((A^3 B^4 - A^4 B^3) + (A^6 B^1 - A^1 B^6) + (A^2 B^5 - A^5 B^2))e_7.
 \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned}
 [AB] &= \begin{vmatrix} -\beta e_1 & -\alpha e_2 & e_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_2 & -\beta e_4 & e_6 \\ A^2 & A^4 & A^6 \\ B^2 & B^4 & B^6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_3 & -\alpha e_6 & -\beta e_5 \\ A^3 & A^6 & A^5 \\ B^3 & B^6 & B^5 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} -\alpha e_4 & e_5 & -\gamma e_1 \\ A^4 & A^5 & A^1 \\ B^4 & B^5 & B^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta e_5 & e_7 & \alpha \gamma e_2 \\ A^5 & A^7 & A^2 \\ B^5 & B^7 & B^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_6 & \beta \gamma e_1 & e_7 \\ A^6 & A^1 & A^7 \\ B^6 & B^1 & B^7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & -\gamma e_3 & \alpha \beta e_4 \\ A^7 & A^3 & A^4 \\ B^7 & B^3 & B^4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $[aAB] = a[AB]$;
2. $[AB] = -[BA]$;
3. $[A(B+C)] = [AB] + [AC]$;
4. $[aAA] = 0$.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. $A(BC)$ – простейшее произведение трех векторов;
2. $(A[BC])$ – смешанное произведение трех векторов;
3. $[A[BC]]$ – двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение $A(BC)$ трех векторов A , B и C получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

$$A(BC) \neq (AB)C,$$

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение $(A/BC) = (ABC)$ трех векторов A , B и C получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

$$\begin{aligned}(A/BC) &= -\alpha A^1[BC]^1 - \beta A^2[BC]^2 + \alpha\beta A^3[BC]^3 - \\ &\quad - \gamma A^4[BC]^4 + \alpha\gamma A^5[BC]^5 + \beta\gamma A^6[BC]^6 - \alpha\beta\gamma A^7[BC]^7 = \\ &= -\alpha A^1(-\beta(B^2C^3 - B^3C^2) - \gamma(B^4C^5 - B^5C^4) + \beta\gamma(B^7C^6 - B^6C^7)) + \\ &\quad - \beta A^2(-\gamma(B^4C^6 - B^6C^4) + \alpha\gamma(B^5C^7 - B^7C^5) - \alpha(B^3C^1 - B^1C^3)) + \\ &\quad + \alpha\beta A^3(-\gamma(B^6C^5 - B^5C^6) + (B^1C^2 - B^2C^1) - \gamma(B^4C^7 - B^7C^4)) + \\ &\quad - \gamma A^4(-\alpha(B^5C^1 - B^1C^5) + \alpha\beta(B^7C^3 - B^3C^7) - \beta(B^6C^2 - B^2C^6)) + \\ &\quad + \alpha\gamma A^5(-\beta(B^7C^2 - B^2C^7) - \beta(B^3C^6 - B^6C^3) + (B^1C^4 - B^4C^1)) + \\ &\quad + \beta\gamma A^6(-\alpha(B^1C^7 - B^7C^1) + (B^2C^4 - B^4C^2) - \alpha(B^5C^3 - B^3C^5)) + \\ &\quad - \alpha\beta\gamma A^7((B^3C^4 - B^4C^3) + (B^6C^1 - B^1C^6) + (B^2C^5 - B^5C^2)).\end{aligned}$$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned}(ABC) &= \alpha\beta \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^4 & A^6 \\ B^2 & B^4 & B^6 \\ C^2 & C^4 & C^6 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^6 & A^5 \\ B^3 & B^6 & B^5 \\ C^3 & C^6 & C^5 \end{vmatrix} + \\ &+ \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^5 & A^1 \\ B^4 & B^5 & B^1 \\ C^4 & C^5 & C^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^7 & A^2 \\ B^5 & B^7 & B^2 \\ C^5 & C^7 & C^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^1 & A^7 \\ B^6 & B^1 & B^7 \\ C^6 & C^1 & C^7 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^3 & A^4 \\ B^7 & B^3 & B^4 \\ C^7 & C^3 & C^4 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $(aABC) = a(ABC)$;
2. Смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. $(AB(C+D)) = (ABC) + (ABD)$;
4. Если два вектора A и B в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Так что, векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([AB]/A) = 0$. Если три вектора A , B и $C = A + B$ компланарны, то выполняется равенство $(ABC) = (AB(A+B)) = 0$.

Двойное векторное произведение $[A/BC]$ трех векторов A , B и C получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

$$[A/BC] = [AD] = E = E^1 e_1 + E^2 e_2 + \dots + E^7 e_7.$$

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
E^1 = & -\beta(A^2D^3-A^3D^2)-\gamma(A^4D^5-A^5D^4)+\beta\gamma(A^7D^6-A^6D^7) = \\
= & -\beta A^2(-\gamma(B^6C^5-B^5C^6)+ (B^1C^2-B^2C^1)-\gamma(B^4C^7-B^7C^4)) + \\
& +\beta A^3(-\gamma(B^4C^6-B^6C^4)+\alpha\gamma(B^5C^7-B^7C^5)-\alpha(B^3C^1-B^1C^3)) - \\
& -\gamma A^4(-\beta(B^7C^2-B^2C^7)-\beta(B^3C^6-B^6C^3)+ (B^1C^4-B^4C^1)) + \\
& +\gamma A^5(-\alpha(B^5C^1-B^1C^5)+\alpha\beta(B^7C^3-B^3C^7)-\beta(B^6C^2-B^2C^6)) + \\
& +\beta\gamma A^7(-\alpha(B^1C^7-B^7C^1)+ (B^2C^4-B^4C^2)-\alpha(B^5C^3-B^3C^5)) - \\
& -\beta\gamma A^6((B^3C^4-B^4C^3)+ (B^6C^1-B^1C^6)+ (B^2C^5-B^5C^2)),
\end{aligned}$$

т.е. $E^1 = B^1(CA)-C^1(AB)+[ABC]^1$,

где

$$[ABC]^1 = \beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^4 & A^7 \\ B^2 & B^4 & B^7 \\ C^2 & C^4 & C^7 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^7 & A^5 \\ B^3 & B^7 & B^5 \\ C^3 & C^7 & C^5 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^3 & A^6 \\ B^4 & B^3 & B^6 \\ C^4 & C^3 & C^6 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^5 & A^2 \\ B^6 & B^5 & B^2 \\ C^6 & C^5 & C^2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для других координат

$$E^2 = B^2(CA)-C^2(AB)+[ABC]^2,$$

где

$$[ABC]^2 = \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^5 & A^3 \\ B^4 & B^5 & B^3 \\ C^4 & C^5 & C^3 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^3 & A^7 \\ B^6 & B^3 & B^7 \\ C^6 & C^3 & C^7 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^6 & A^1 \\ B^5 & B^6 & B^1 \\ C^5 & C^6 & C^1 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^7 & A^4 \\ B^1 & B^7 & B^4 \\ C^1 & C^7 & C^4 \end{vmatrix},$$

$$E^3 = B^3(CA)-C^3(AB)+[ABC]^3,$$

где

$$[ABC]^3 = -\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^1 & A^4 \\ B^6 & B^1 & B^4 \\ C^6 & C^1 & C^4 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^4 & A^2 \\ B^5 & B^4 & B^2 \\ C^5 & C^4 & C^2 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^5 & A^7 \\ B^1 & B^5 & B^7 \\ C^1 & C^5 & C^7 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^2 & A^6 \\ B^7 & B^2 & B^6 \\ C^7 & C^2 & C^6 \end{vmatrix},$$

$$E^4 = B^4(CA)-C^4(AB)+[ABC]^4,$$

где

$$[ABC]^4 = -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^7 & A^6 \\ B^5 & B^7 & B^6 \\ C^5 & C^7 & C^6 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^1 & A^6 & A^3 \\ B^1 & B^6 & B^3 \\ C^1 & C^6 & C^3 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^7 & A^1 & A^2 \\ B^7 & B^1 & B^2 \\ C^7 & C^1 & C^2 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^2 & A^3 & A^5 \\ B^2 & B^3 & B^5 \\ C^2 & C^3 & C^5 \end{vmatrix},$$

$$E^5 = B^5(CA)-C^5(AB)+[ABC]^5,$$

где

$$[ABC]^5 = \alpha\beta \begin{vmatrix} A^7 & A^3 & A^1 \\ B^7 & B^3 & B^1 \\ C^7 & C^3 & C^1 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} A^2 & A^1 & A^6 \\ B^2 & B^1 & B^6 \\ C^2 & C^1 & C^6 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} A^3 & A^2 & A^4 \\ B^3 & B^2 & B^4 \\ C^3 & C^2 & C^4 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^6 & A^7 \\ B^4 & B^6 & B^7 \\ C^4 & C^6 & C^7 \end{vmatrix},$$

$$E^6 = B^6(CA)-C^6(AB)+[ABC]^6,$$

где

$$[ABC]^6 = -\alpha \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^5 \\ B^1 & B^2 & B^5 \\ C^1 & C^2 & C^5 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^5 & A^4 \\ B^7 & B^5 & B^4 \\ C^7 & C^5 & C^4 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^2 & A^7 & A^3 \\ B^2 & B^7 & B^3 \\ C^2 & C^7 & C^3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A^3 & A^4 & A^1 \\ B^3 & B^4 & B^1 \\ C^3 & C^4 & C^1 \end{vmatrix},$$

$$E^7 = B^7(CA)-C^7(AB)+[ABC]^7,$$

где

$$[ABC]^7 = -\beta \begin{vmatrix} A^3 & A^6 & A^2 \\ B^3 & B^6 & B^2 \\ C^3 & C^6 & C^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^4 & A^2 & A^1 \\ B^4 & B^2 & B^1 \\ C^4 & C^2 & C^1 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^4 & A^5 \\ B^6 & B^4 & B^5 \\ C^6 & C^4 & C^5 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A^5 & A^1 & A^3 \\ B^5 & B^1 & B^3 \\ C^5 & C^1 & C^3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, окончательно запишем

$$[A[BC]] = B(CA) - C(AB) + [ABC],$$

где вектор $[ABC]$ можно представить в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned} [ABC] = & \begin{vmatrix} \beta\gamma e_1 & \alpha\gamma e_2 & \alpha\beta e_4 & e_7 \\ A^1 & A^2 & A^4 & A^7 \\ B^1 & B^2 & B^4 & B^7 \\ C^1 & C^2 & C^4 & C^7 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \alpha\gamma e_2 & \alpha\beta e_4 & -\beta e_5 & -\gamma e_3 \\ A^2 & A^4 & A^5 & A^3 \\ B^2 & B^4 & B^5 & B^3 \\ C^2 & C^4 & C^5 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_3 & -\alpha e_6 & \beta\gamma e_1 & \alpha\beta e_4 \\ A^3 & A^6 & A^1 & A^4 \\ B^3 & B^6 & B^1 & B^4 \\ C^3 & C^6 & C^1 & C^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\beta e_4 & \beta\gamma e_5 & -\gamma e_7 & \alpha\gamma e_6 \\ A^4 & A^5 & A^7 & A^6 \\ B^4 & B^5 & B^7 & B^6 \\ C^4 & C^5 & C^7 & C^6 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \alpha\beta e_5 & -\alpha e_7 & \alpha\gamma e_3 & -\alpha\beta\gamma e_1 \\ A^5 & A^7 & A^3 & A^1 \\ B^5 & B^7 & B^3 & B^1 \\ C^5 & C^7 & C^3 & C^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_6 & \beta\gamma e_1 & \alpha\gamma e_2 & -\beta e_5 \\ A^6 & A^1 & A^2 & A^5 \\ B^6 & B^1 & B^2 & B^5 \\ C^6 & C^1 & C^2 & C^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta e_7 & \beta\gamma e_3 & \alpha\beta e_6 & -\alpha\beta\gamma e_2 \\ A^7 & A^3 & A^6 & A^2 \\ B^7 & B^3 & B^6 & B^2 \\ C^7 & C^3 & C^6 & C^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно получить соотношение

$$[[AB]C] = [C[BA]] = B(CA) - A(BC) - [ABC].$$

Антисимметричная по перестановке любой пары векторов векторная функция трех векторов $[ABC]$ является векторным произведением трех векторов.

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.
 $[aABC] = a[ABC];$
2. Векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. Векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.
 $[AB(C+D)] = [ABC] + [ABD];$
4. Если два вектора в векторном произведении трех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов A , B или C раскладывается по двум векторам, то выполняется условие $[ABC] = 0$.

Используя циклические подстановки векторов, получим

$$[A[BC]] + [B[CA]] + [C[AB]] = 3[ABC]$$

и
$$[[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = -3[ABC],$$

так что, в рассматриваемых алгебрах не выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и не относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

$$\begin{array}{lll} ((AB)CD) & (AB)(CD) & (ABC)D. \\ [(AB)CD] & (AB)[CD] & \\ ([[AB]C]D) & ([AB][CD]) & \\ [[[AB]C]D] & [[AB][CD]] & \end{array}$$

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

$$\begin{aligned} ((AB)CD) &= (AB)(CD) \\ [(AB)CD] &= (AB)[CD]. \end{aligned}$$

Во-вторых, считая векторное произведение $[AB]$ за один вектор, мы можем рассматривать $([[AB]C]D)$ как смешанное произведение трех векторов $[AB]$, C и D . Применяя к нему закон сочетательности, получим

$$([[AB]C]D) = ([AB][CD]).$$

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. $((AB)CD) = (AB)(CD)$;
2. $[(AB)CD] = (AB)[CD]$;
3. $([[AB]C]D) = ([AB][CD])$;
4. $([AB]C)D = (ABC)D$;
5. $[[AB][CD]]$;
6. $[[[AB]C]D]$.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения не являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые считались основными в трехмерном случае.

Скалярное произведение двух векторов $[AB]$ и $[CD]$, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов $([[AB]C]D)$. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя $[AB]$ и C и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

$$([AB][CD]) = ([AB]C)D.$$

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

$$([AB][CD]) = ((B(AC) - A(BC) - [ABC])D)$$

или, раскрыв скобки

$$([AB][CD]) = \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix} - ([ABC]D).$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа не выражается только через произведения первого типа, что имеет место в трехмерной алгебре.

Назовем второе слагаемое в правой части тождества смешанным произведением четырех векторов и обозначим его через

$$(ABCD) = ([ABC]D).$$

Используя координатную запись векторного произведения трех векторов $[ABC]$, получим координатную запись смешанного произведения четырех векторов в виде:

$$\begin{aligned} -(ABCD) = & -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^4 & A^7 \\ B^1 & B^2 & B^4 & B^7 \\ C^1 & C^2 & C^4 & C^7 \\ D^1 & D^2 & D^4 & D^7 \end{vmatrix} - \\ & -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^4 & A^5 & A^3 \\ B^2 & B^4 & B^5 & B^3 \\ C^2 & C^4 & C^5 & C^3 \\ D^2 & D^4 & D^5 & D^3 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^6 & A^1 & A^4 \\ B^3 & B^6 & B^1 & B^4 \\ C^3 & C^6 & C^1 & C^4 \\ D^3 & D^6 & D^1 & D^4 \end{vmatrix} + \alpha\beta\gamma^2 \begin{vmatrix} A^4 & A^5 & A^7 & A^6 \\ B^4 & B^5 & B^7 & B^6 \\ C^4 & C^5 & C^7 & C^6 \\ D^4 & D^5 & D^7 & D^6 \end{vmatrix} + \\ & + \alpha^2\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^7 & A^3 & A^1 \\ B^5 & B^7 & B^3 & B^1 \\ C^5 & C^7 & C^3 & C^1 \\ D^5 & D^7 & D^3 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^1 & A^2 & A^5 \\ B^6 & B^1 & B^2 & B^5 \\ C^6 & C^1 & C^2 & C^5 \\ D^6 & D^1 & D^2 & D^5 \end{vmatrix} + \alpha\beta^2\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^3 & A^6 & A^2 \\ B^7 & B^3 & B^6 & B^2 \\ C^7 & C^3 & C^6 & C^2 \\ D^7 & D^3 & D^6 & D^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Из свойств определителей следует:

1. Смешанное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.
 $(aABCD) = a(ABCD)$;
2. Смешанное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов.
3. Смешанное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.
 $(ABC(D+E)) = (ABCD) + (ABCE)$;
4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение трех векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([ABC]A) = 0$. Если четыре вектора A, B, C и D компланарны, либо разложены по трем векторам, то выполняется условие $(ABCD) = 0$.

При этом из уравнения

$$([AB][CD]) + (ABCD) = \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix}$$

следует соотношение

$$([AB][CD]) + ([BC][AD]) + ([CA][BD]) = -3(ABCD),$$

и как частный случай, при $C=A$ и $D=B$ – основное тождество для двух векторов

$$[AB]^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (BA) \\ (AB) & (BB) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений $[[AB][CD]]$ можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов $[AB]$, C и D мы получим

$$[[AB][CD]] = C(D[AB]) - D([AB]C) + [[AB]CD].$$

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов A , B и $[CD]$, мы получим:

$$[[AB][CD]] = B([CD]A) - A(B[CD]) - [AB[CD]].$$

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, не выражается только через произведения четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения $[[AB][CD]]$, мы получим

$$C(D[AB]) - D([AB]C) + [[AB]CD] = B([CD]A) - A(B[CD]) - [AB[CD]]$$

или

$$A(BCD) - B(CDA) + C(DAB) - D(ABC) = -[[AB]CD] - [AB[CD]].$$

При этом отпадает возможность разложения вектора по трем векторам.

Выражение в правой части тождества является векторным произведением четырех векторов $[ABCD]$, т.е.

$$\begin{aligned} [ABCD] &= -[[AB]CD] - [AB[CD]] = A(BCD) - B(CDA) + C(DAB) - D(ABC) = \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ (ACD) & (BCD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ (CAB) & (DAB) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Используя координатную запись смешанных произведений трех векторов, можно получить векторное произведение четырех векторов в виде

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \\ &= (-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^5 & A^7 & A^2 \\ B^1 & B^5 & B^7 & B^2 \\ C^1 & C^5 & C^7 & C^2 \\ D^1 & D^5 & D^7 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^7 & A^3 & A^4 \\ B^1 & B^7 & B^3 & B^4 \\ C^1 & C^7 & C^3 & C^4 \\ D^1 & D^7 & D^3 & D^4 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^3 & A^6 & A^5 \\ B^1 & B^3 & B^6 & B^5 \\ C^1 & C^3 & C^6 & C^5 \\ D^1 & D^3 & D^6 & D^5 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^4 & A^6 \\ B^1 & B^2 & B^4 & B^6 \\ C^1 & C^2 & C^4 & C^6 \\ D^1 & D^2 & D^4 & D^6 \end{vmatrix})\mathbf{e}_1 + \\ &+ (-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^7 & A^3 & A^4 \\ B^2 & B^7 & B^3 & B^4 \\ C^2 & C^7 & C^3 & C^4 \\ D^2 & D^7 & D^3 & D^4 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^3 & A^6 & A^5 \\ B^2 & B^3 & B^6 & B^5 \\ C^2 & C^3 & C^6 & C^5 \\ D^2 & D^3 & D^6 & D^5 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^6 & A^1 & A^7 \\ B^2 & B^6 & B^1 & B^7 \\ C^2 & C^6 & C^1 & C^7 \\ D^2 & D^6 & D^1 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^4 & A^5 & A^1 \\ B^2 & B^4 & B^5 & B^1 \\ C^2 & C^4 & C^5 & C^1 \\ D^2 & D^4 & D^5 & D^1 \end{vmatrix})\mathbf{e}_2 + \\ &+ (\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^2 & A^4 & A^6 \\ B^3 & B^2 & B^4 & B^6 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^4 & A^5 & A^1 \\ B^3 & B^4 & B^5 & B^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^5 & A^7 & A^2 \\ B^3 & B^5 & B^7 & B^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^6 & A^1 & A^7 \\ B^3 & B^6 & B^1 & B^7 \end{vmatrix})\mathbf{e}_3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} C^3 & C^2 & C^4 & C^6 \\ D^3 & D^2 & D^4 & D^6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C^3 & C^4 & C^5 & C^1 \\ D^3 & D^4 & D^5 & D^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C^3 & C^5 & C^7 & C^2 \\ D^3 & D^5 & D^7 & D^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C^3 & C^6 & C^1 & C^7 \\ D^3 & D^6 & D^1 & D^7 \end{vmatrix} \\
& + (-\alpha\beta\gamma) \begin{vmatrix} A^4 & A^3 & A^6 & A^5 \\ B^4 & B^3 & B^6 & B^5 \\ C^4 & C^3 & C^6 & C^5 \\ D^4 & D^3 & D^6 & D^5 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^6 & A^1 & A^7 \\ B^4 & B^6 & B^1 & B^7 \\ C^4 & C^6 & C^1 & C^7 \\ D^4 & D^6 & D^1 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^4 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^4 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^4 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^4 & D^1 & D^2 & D^3 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^5 & A^7 & A^2 \\ B^4 & B^5 & B^7 & B^2 \\ C^4 & C^5 & C^7 & C^2 \\ D^4 & D^5 & D^7 & D^2 \end{vmatrix})\mathbf{e}_4 + \\
& + (-\alpha\beta\gamma) \begin{vmatrix} A^5 & A^6 & A^1 & A^7 \\ B^5 & B^6 & B^1 & B^7 \\ C^5 & C^6 & C^1 & C^7 \\ D^5 & D^6 & D^1 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^5 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^5 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^5 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^5 & D^1 & D^2 & D^3 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^2 & A^4 & A^6 \\ B^5 & B^2 & B^4 & B^6 \\ C^5 & C^2 & C^4 & C^6 \\ D^5 & D^2 & D^4 & D^6 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^7 & A^3 & A^4 \\ B^5 & B^7 & B^3 & B^4 \\ C^5 & C^7 & C^3 & C^4 \\ D^5 & D^7 & D^3 & D^4 \end{vmatrix})\mathbf{e}_5 + \\
& + (\alpha\gamma) \begin{vmatrix} A^6 & A^4 & A^5 & A^1 \\ B^6 & B^4 & B^5 & B^1 \\ C^6 & C^4 & C^5 & C^1 \\ D^6 & D^4 & D^5 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^5 & A^7 & A^2 \\ B^6 & B^5 & B^7 & B^2 \\ C^6 & C^5 & C^7 & C^2 \\ D^6 & D^5 & D^7 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^7 & A^3 & A^4 \\ B^6 & B^7 & B^3 & B^4 \\ C^6 & C^7 & C^3 & C^4 \\ D^6 & D^7 & D^3 & D^4 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^6 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^6 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^6 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^6 & D^1 & D^2 & D^3 \end{vmatrix})\mathbf{e}_6 + \\
& + (\alpha\beta) \begin{vmatrix} A^7 & A^1 & A^2 & A^3 \\ B^7 & B^1 & B^2 & B^3 \\ C^7 & C^1 & C^2 & C^3 \\ D^7 & D^1 & D^2 & D^3 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^2 & A^4 & A^6 \\ B^7 & B^2 & B^4 & B^6 \\ C^7 & C^2 & C^4 & C^6 \\ D^7 & D^2 & D^4 & D^6 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^4 & A^5 & A^1 \\ B^7 & B^4 & B^5 & B^1 \\ C^7 & C^4 & C^5 & C^1 \\ D^7 & D^4 & D^5 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^3 & A^6 & A^5 \\ B^7 & B^3 & B^6 & B^5 \\ C^7 & C^3 & C^6 & C^5 \\ D^7 & D^3 & D^6 & D^5 \end{vmatrix})\mathbf{e}_7.
\end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.
 $[aABCD] = a[ABCD]$;
2. Векторное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. Векторное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.
 $[ABC(D+E)] = [ABCD] + [ABCE]$;
4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов A , B , C и D раскладывается по двум или трем векторам, то выполняется условие
 $[ABCD] = 0$.

Тройное векторное произведение четырех векторов $[[[AB]C]D]$ можно также преобразовать двумя способами. Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор D , получим

$$[[[AB]C]D] = (CA)[BD] - (CB)[AD] - [[ABC]D].$$

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$$[[[AB]C]D] = C(D[AB]) - (CD)[AB] - [[AB]CD].$$

Сравнив оба выражения, получаем

$$(CA)[BD] - (CB)[AD] - [[ABC]D] = C(D[AB]) - (CD)[AB] - [[AB]CD].$$

Отсюда найдем

$$C(ABD) = (CA)[BD] + (CB)[DA] + (CD)[AB] + [[AB]CD] - [[ABC]D].$$

Эта формула очевидно не выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа. При этом отпадает возможность разложения векторов по трем векторным произведениям пар векторов.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов не выражаются линейно через произведения только двух типов $(AB)(CD)$ и $(AB)[CD]$.

Последнее тождество при циклической подстановке векторов позволяет получить полезное соотношение

$$\begin{aligned} [ABCD] &= (BCD)A - (CDA)B + (DAB)C - (ABC)D = \\ &= -2[ABCD] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] - [[ABC]D], \end{aligned}$$

а также

$$-[[ABC]D] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] = 3[ABCD].$$

Анализ соотношений был бы неполным, если бы не удалось установить выражение тройного векторного произведения (или величины $[[ABC]D]$) через более простые произведения. Выразив, например, ее первую координату как векторное произведение двух векторов

$$\begin{aligned} [[ABC]D]^1 &= -\beta([ABC]^2 D^3 - [ABC]^3 D^2) - \gamma([ABC]^4 D^5 - [ABC]^5 D^4) + \\ &+ \beta\gamma([ABC]^7 D^6 - [ABC]^6 D^7), \end{aligned}$$

в координатной форме записи можно получить

$$\begin{aligned} [[ABC]D]^1 &= \\ &= (-A^1(BCD) - B^1(CAD) - C^1(ABD) + [AB]^1(CD) + [BC]^1(AD) + [CA]^1(BD))e_1 \end{aligned}$$

и аналогично остальные шесть координат этого произведения.

В результате имеем

$$[[ABC]D] = \begin{vmatrix} [AB] & C \\ (ABD) & (CD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [BC] & A \\ (BCD) & (AD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [CA] & B \\ (CAD) & (BD) \end{vmatrix}$$

и кроме того

$$[[AB]CD] = - \begin{vmatrix} A & B \\ (ACD) & (BCD) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ [AD] & [BD] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [AC] & [BC] \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix}$$

при этом

$$[[AB]CD] + [[BC]AD] + [[CA]BD] = [[ABC]D].$$

Таким образом, рассматриваемые произведения сводятся к линейной комбинации произведений второго и четвертого типа. Поэтому следует считать основными четыре типа произведений четырех векторов:

1. $(AB)(CD)$;
2. $(AB)[CD]$;
3. $(ABC)D$;
4. $(ABCD)$.

Нетрудно показать, что при этом выполняются тождества Мальцева

$$[[ABC]A] = [AB[AC]]$$

и Сейгла

$$[[[AB]C]D] + [[[BC]D]A] + [[[CD]A]B] + [[[DA]B]C] = [[AC][BD]],$$

так что рассматриваемые алгебры относятся к алгебрам Мальцева, причем

$$[[ABC]A] = [AB](CA) + [BC](AA) + [CA](BA) - (ABC)A$$

и

$$[[AC][BD]] = \begin{vmatrix} A [BC] \\ (AD) (BCD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B [CD] \\ (BA) (CDA) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C [DA] \\ (CB)(DAB) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D [AB] \\ (DC)(ABC) \end{vmatrix}.$$

В результате можно предложить модифицированную запись соотношения Мальцева на случай четырех произвольных векторов

$$- [[ABC]D] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] = \\ = -3([AB[CD]] + [[AB]CD]) = 3[ABCD].$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$$(ABC)^2 = ([AB]C)^2.$$

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[AB]$ и C .

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$$(ABC)^2 = [AB]^2 C^2 - [[AB]C]^2.$$

Квадрат векторного произведения $[AB]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$$[AB]^2 = A^2 B^2 - (AB)^2.$$

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[AB]C]^2$ воспользуемся формулой разложения

$$[[AB]C]^2 = (B(CA) - A(BC) - [ABC])^2 = B^2(CA)^2 - 2(AB)(BC)(CA) + A^2(BC)^2 - \\ - 2([ABC](B(CA) - A(BC))) + [ABC]^2 = A^2(BC)^2 + B^2(CA)^2 - 2(AB)(BC)(CA) + [ABC]^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$$(ABC)^2 = A^2 B^2 C^2 - (AB)^2 C^2 - A^2 (BC)^2 - B^2 (CA)^2 + 2(AB)(BC)(CA) - [ABC]^2.$$

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$$(ABC)^2 + [ABC]^2 = \\ = A^2 (B^2 C^2 - (BC)^2) - (AB)((BA)C^2 - (BC)(CA)) + (AC)((BA)(CB) - (CA)B^2).$$

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(ABC)^2 + [ABC]^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (AB) & (AC) \\ (BA) & (BB) & (BC) \\ (CA) & (CB) & (CC) \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Более сложные соотношения псевдоевклидовой семимерной векторной алгебры приведены в следующей работе.

4. Псевдоевклидовы семимерные векторные алгебры (продолжение)

$$[ABCDE]^1 =$$

$$= -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 & B^5 \\ C^1 & C^2 & C^3 & C^4 & C^5 \\ D^1 & D^2 & D^3 & D^4 & D^5 \\ E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 \end{vmatrix} + \alpha\beta\gamma^2 \begin{vmatrix} A^1 & A^4 & A^5 & A^7 & A^6 \\ B^1 & B^4 & B^5 & B^7 & B^6 \\ C^1 & C^4 & C^5 & C^7 & C^6 \\ D^1 & D^4 & D^5 & D^7 & D^6 \\ E^1 & E^4 & E^5 & E^7 & E^6 \end{vmatrix} + \alpha\beta^2\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^7 & A^6 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^7 & B^6 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^7 & C^6 & C^2 & C^3 \\ D^1 & D^7 & D^6 & D^2 & D^3 \\ E^1 & E^7 & E^6 & E^2 & E^3 \end{vmatrix}.$$

$$[ABCDE] = \begin{vmatrix} \alpha\beta^2\gamma\mathbf{e}_1 & 0 & \alpha^2\beta\gamma\mathbf{e}_2 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_3 & 0 \\ A^5 & A^1 & A^6 & A^2 & A^7 & A^3 \\ B^5 & B^1 & B^6 & B^2 & B^7 & B^3 \\ C^5 & C^1 & C^6 & C^2 & C^7 & C^3 \\ D^5 & D^1 & D^6 & D^2 & D^7 & D^3 \\ E^5 & E^1 & E^6 & E^2 & E^7 & E^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_2 & 0 & \alpha\beta^2\gamma\mathbf{e}_4 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_6 & 0 \\ A^7 & A^2 & A^1 & A^4 & A^3 & A^6 \\ B^7 & B^2 & B^1 & B^4 & B^3 & B^6 \\ C^7 & C^2 & C^1 & C^4 & C^3 & C^6 \\ D^7 & D^2 & D^1 & D^4 & D^3 & D^6 \\ E^7 & E^2 & E^1 & E^4 & E^3 & E^6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha\beta\gamma^2\mathbf{e}_3 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_6 & 0 & \alpha\beta^2\gamma\mathbf{e}_5 & 0 \\ A^2 & A^3 & A^7 & A^6 & A^4 & A^5 \\ B^2 & B^3 & B^7 & B^6 & B^4 & B^5 \\ C^2 & C^3 & C^7 & C^6 & C^4 & C^5 \\ D^2 & D^3 & D^7 & D^6 & D^4 & D^5 \\ E^2 & E^3 & E^7 & E^6 & E^4 & E^5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_4 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_5 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_1 & 0 \\ A^3 & A^4 & A^2 & A^5 & A^6 & A^1 \\ B^3 & B^4 & B^2 & B^5 & B^6 & B^1 \\ C^3 & C^4 & C^2 & C^5 & C^6 & C^1 \\ D^3 & D^4 & D^2 & D^5 & D^6 & D^1 \\ E^3 & E^4 & E^2 & E^5 & E^6 & E^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_5 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_7 & 0 & \alpha\beta\gamma^2\mathbf{e}_2 & 0 \\ A^6 & A^5 & A^4 & A^7 & A^1 & A^2 \\ B^6 & B^5 & B^4 & B^7 & B^1 & B^2 \\ C^6 & C^5 & C^4 & C^7 & C^1 & C^2 \\ D^6 & D^5 & D^4 & D^7 & D^1 & D^2 \\ E^6 & E^5 & E^4 & E^7 & E^1 & E^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha^2\beta\gamma\mathbf{e}_6 & 0 & \alpha\beta\gamma^2\mathbf{e}_1 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_7 & 0 \\ A^4 & A^6 & A^3 & A^1 & A^5 & A^7 \\ B^4 & B^6 & B^3 & B^1 & B^5 & B^7 \\ C^4 & C^6 & C^3 & C^1 & C^5 & C^7 \\ D^4 & D^6 & D^3 & D^1 & D^5 & D^7 \\ E^4 & E^6 & E^3 & E^1 & E^5 & E^7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_7 & 0 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_3 & 0 & \alpha^2\beta\gamma\mathbf{e}_4 & 0 \\ A^1 & A^7 & A^5 & A^3 & A^2 & A^4 \\ B^1 & B^7 & B^5 & B^3 & B^2 & B^4 \\ C^1 & C^7 & C^5 & C^3 & C^2 & C^4 \\ D^1 & D^7 & D^5 & D^3 & D^2 & D^4 \\ E^1 & E^7 & E^5 & E^3 & E^2 & E^4 \end{vmatrix}.$$

$$[ABCDEF] = \begin{vmatrix} -\alpha\beta^2\gamma^2\mathbf{e}_1 & -\alpha^2\beta\gamma^2\mathbf{e}_2 & \alpha\beta\gamma^2\mathbf{e}_3 & -\alpha^2\beta^2\gamma\mathbf{e}_4 & \alpha\beta^2\gamma\mathbf{e}_5 & \alpha^2\beta\gamma\mathbf{e}_6 & -\alpha\beta\gamma\mathbf{e}_7 \\ A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 & A^7 \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 & B^5 & B^6 & B^7 \\ C^1 & C^2 & C^3 & C^4 & C^5 & C^6 & C^7 \\ D^1 & D^2 & D^3 & D^4 & D^5 & D^6 & D^7 \\ E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7 \\ F^1 & F^2 & F^3 & F^4 & F^5 & F^6 & F^7 \end{vmatrix}.$$

$$(ABCDEFGG) = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & A^6 & A^7 \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 & B^5 & B^6 & B^7 \\ C^1 & C^2 & C^3 & C^4 & C^5 & C^6 & C^7 \\ D^1 & D^2 & D^3 & D^4 & D^5 & D^6 & D^7 \\ E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7 \\ F^1 & F^2 & F^3 & F^4 & F^5 & F^6 & F^7 \\ G^1 & G^2 & G^3 & G^4 & G^5 & G^6 & G^7 \end{vmatrix}.$$

5. Начала псевдоевклидовых семимерных векторных алгебр (тип 2)

В [3, 5] изучены основные свойства собственноевклидовых семимерных векторных алгебр, а ниже указано, что кроме собственноевклидовых алгебр возможно построение неевклидовых векторных алгебр в трехмерном и семимерном вариантах. В результате выявлена семимерная несобственноевклидовая векторная алгебра, отличающаяся координатной формой записи от изученной ранее алгебры. Рассмотрим ее свойства.

Таблица умножения базисных элементов таких семимерных векторных алгебр может быть представлена в виде:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$-e_5$	e_7	βe_6	$-\beta e_2$	e_4	βe_3
e_2	e_5	0	αe_6	$-e_7$	αe_1	e_3	$-\alpha e_4$
e_3	$-e_7$	$-\alpha e_6$	0	γe_5	$-\alpha e_4$	γe_2	$\alpha \gamma e_1$
e_4	$-\beta e_6$	e_7	$-\gamma e_5$	0	βe_3	γe_1	$-\beta \gamma e_2$
e_5	βe_2	$-\alpha e_1$	αe_4	$-\beta e_3$	0	e_7	$-\alpha \beta e_6$
e_6	$-e_4$	$-e_3$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_1$	$-e_7$	0	$-\gamma e_5$
e_7	$-\beta e_3$	αe_4	$-\alpha \gamma e_1$	$\beta \gamma e_2$	$\alpha \beta e_6$	γe_5	0

где α, β, γ принимают значения ± 1 или 0. Здесь $\alpha = \beta = \gamma = -1$ соответствуют собственноевклидовой семимерной векторной алгебре (Гамильтона-Грассмана), комбинации с одним или несколькими единичными значениями α, β, γ – псевдоевклидовым алгебрам индекса четыре, отвечающим восьмимерным расширениям двойных чисел, а комбинации с одним или несколькими нулевыми значениями α, β, γ – дуальноевклидовым алгебрам, отвечающим восьмимерным расширениям дуальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций неевклидовых семимерных векторных алгебр. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами семимерного линейного векторного пространства:

1. Ассоциативность сложения векторов
 $(A+B)+C=A+(B+C)$;
2. Коммутативность сложения векторов
 $A+B=B+A$;
3. Наличие нулевого вектора
 $A+0=A$;
4. Наличие противоположного вектора
 $A+(-A)=0$.

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и, сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

5. $IA=AI$;
6. $(ab)A=a(bA)$;
7. $(a+b)A=aA+bA$;
8. $a(A+B)=aA+aB$.

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением (AB) двух векторов A и B назовем скаляр $(AB)=(A^i e_i B^k e_k)=A^i B^k (e_i e_k)=g_{ik} A^i B^k$,

определяемый матрицей скалярных произведений векторов базиса вида:

$$g_{ik}=(e_i e_k)=\begin{vmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma \end{vmatrix},$$

так что

$$(AB)=g_{ik} A^i B^k=g_{ii} A^i B^i,$$

т.е. $(AB)=-\beta A^1 B^1 -\alpha A^2 B^2 +\alpha\gamma A^3 B^3 +\beta\gamma A^4 B^4 +\alpha\beta A^5 B^5 -\gamma A^6 B^6 -\alpha\beta\gamma A^7 B^7$.

Скалярный квадрат вектора A определяется соответственно равенством

$$(AA)=-\beta(A^1)^2 -\alpha(A^2)^2 +\alpha\gamma(A^3)^2 +\beta\gamma(A^4)^2 +\alpha\beta(A^5)^2 -\gamma(A^6)^2 -\alpha\beta\gamma(A^7)^2=A^2,$$

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора.

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $(aAB)=a(AB)$;
2. $(AB)=(BA)$;
3. $(A(B+C))=(AB)+(AC)$;
4. Два вектора A и B ортогональны, если выполняется условие $(AB)=0$.

Векторное произведение $[AB]$ двух векторов A и B определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 [AB] &= [(A^1 e_1 + A^2 e_2 + \dots + A^7 e_7)(B^1 e_1 + B^2 e_2 + \dots + B^7 e_7)] = \\
 &= (-\gamma(A^6 B^4 - A^4 B^6) + \alpha\gamma(A^3 B^7 - A^7 B^3) - \alpha(A^5 B^2 - A^2 B^5))e_1 + \\
 &+ (-\beta(A^1 B^5 - A^5 B^1) - \gamma(A^6 B^3 - A^3 B^6) + \beta\gamma(A^7 B^4 - A^4 B^7))e_2 + \\
 &+ (-\beta(A^7 B^1 - A^1 B^7) - \beta(A^5 B^4 - A^4 B^5) + (A^2 B^6 - A^6 B^2))e_3 + \\
 &+ (-\alpha(A^2 B^7 - A^7 B^2) + (A^1 B^6 - A^6 B^1) - \alpha(A^3 B^5 - A^5 B^3))e_4 + \\
 &+ (-\gamma(A^4 B^3 - A^3 B^4) + (A^2 B^1 - A^1 B^2) - \gamma(A^6 B^7 - A^7 B^6))e_5 + \\
 &+ (-\alpha(A^3 B^2 - A^2 B^3) + \alpha\beta(A^7 B^5 - A^5 B^7) - \beta(A^4 B^1 - A^1 B^4))e_6 + \\
 &+ ((A^5 B^6 - A^6 B^5) + (A^4 B^2 - A^2 B^4) + (A^1 B^3 - A^3 B^1))e_7.
 \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned}
 [AB] &= \begin{vmatrix} -\beta e_2 & -\alpha e_1 & e_5 \\ A^2 & A^1 & A^5 \\ B^2 & B^1 & B^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_1 & -\beta e_6 & e_4 \\ A^1 & A^6 & A^4 \\ B^1 & B^6 & B^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_5 & -\alpha e_4 & -\beta e_3 \\ A^5 & A^4 & A^3 \\ B^5 & B^4 & B^3 \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} -\alpha e_6 & e_3 & -\gamma e_2 \\ A^6 & A^3 & A^2 \\ B^6 & B^3 & B^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta e_3 & e_7 & \alpha \gamma e_1 \\ A^3 & A^7 & A^1 \\ B^3 & B^7 & B^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_4 & \beta \gamma e_2 & e_7 \\ A^4 & A^2 & A^7 \\ B^4 & B^2 & B^7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & -\gamma e_5 & \alpha \beta e_6 \\ A^7 & A^5 & A^6 \\ B^7 & B^5 & B^6 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $[aAB] = a[AB]$;
2. $[AB] = -[BA]$;
3. $[A(B+C)] = [AB] + [AC]$;
4. $[aAA] = 0$.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. $A(BC)$ – простейшее произведение трех векторов;
2. $(A[BC])$ – смешанное произведение трех векторов;
3. $[A[BC]]$ – двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение $A(BC)$ трех векторов A , B и C получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

$$A(BC) \neq (AB)C,$$

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение $(A[BC]) = (ABC)$ трех векторов A , B и C получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

$$\begin{aligned}
(A[BC]) &= -\beta A^1[BC]^1 - \alpha A^2[BC]^2 + \alpha\gamma A^3[BC]^3 + \\
&+ \beta\gamma A^4[BC]^4 + \alpha\beta A^5[BC]^5 - \gamma A^6[BC]^6 - \alpha\beta\gamma A^7[BC]^7 = \\
&= -\beta A^1(-\gamma(B^6C^4 - B^4C^6) + \alpha\gamma(B^3C^7 - B^7C^3) - \alpha(B^5C^2 - B^2C^5)) - \\
&- \alpha A^2(-\beta(B^1C^5 - B^5C^1) - \gamma(B^6C^3 - B^3C^6) + \beta\gamma(B^7C^4 - B^4C^7)) + \\
&+ \alpha\gamma A^3(-\beta(B^7C^1 - B^1C^7) - \beta(B^5C^4 - B^4C^5) + (B^2C^6 - B^6C^2)) + \\
&+ \beta\gamma A^4(-\alpha(B^2C^7 - B^7C^2) + (B^1C^6 - B^6C^1) - \alpha(B^3C^5 - B^5C^3)) + \\
&+ \alpha\beta A^5(-\gamma(B^4C^3 - B^3C^4) + (B^2C^1 - B^1C^2) - \gamma(B^6C^7 - B^7C^6)) - \\
&- \gamma A^6(-\alpha(B^3C^2 - B^2C^3) + \alpha\beta(B^7C^5 - B^5C^7) - \beta(B^4C^1 - B^1C^4)) - \\
&- \alpha\beta\gamma A^7((B^5C^6 - B^6C^5) + (B^4C^2 - B^2C^4) + (B^1C^3 - B^3C^1)).
\end{aligned}$$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned}
(ABC) &= \alpha\beta \begin{vmatrix} A^2 & A^1 & A^5 \\ B^2 & B^1 & B^5 \\ C^2 & C^1 & C^5 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^6 & A^4 \\ B^1 & B^6 & B^4 \\ C^1 & C^6 & C^4 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^4 & A^3 \\ B^5 & B^4 & B^3 \\ C^5 & C^4 & C^3 \end{vmatrix} + \\
&+ \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^3 & A^2 \\ B^6 & B^3 & B^2 \\ C^6 & C^3 & C^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^7 & A^1 \\ B^3 & B^7 & B^1 \\ C^3 & C^7 & C^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^2 & A^7 \\ B^4 & B^2 & B^7 \\ C^4 & C^2 & C^7 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^5 & A^6 \\ B^7 & B^5 & B^6 \\ C^7 & C^5 & C^6 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $(aABC) = a(ABC)$;
2. Смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. $(AB(C+D)) = (ABC) + (ABD)$;
4. Если два вектора A и B в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Так что, векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([AB]/A) = 0$. Если три вектора A , B и $C = A + B$ компланарны, то выполняется равенство $(ABC) = (AB(A+B)) = 0$.

Двойное векторное произведение $[A[BC]]$ трех векторов A , B и C получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор $[A[BC]] = [AD] = E = E^1 e_1 + E^2 e_2 + \dots + E^7 e_7$.

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
 E^1 = & -\gamma(A^6D^4 - A^4D^6) + \alpha\gamma(A^3D^7 - A^7D^3) - \alpha(A^5D^2 - A^2D^5) = \\
 = & -\gamma A^6(-\alpha(B^2C^7 - B^7C^2) + (B^1C^6 - B^6C^1) - \alpha(B^3C^5 - B^5C^3)) + \\
 & + \gamma A^4(-\alpha(B^3C^2 - B^2C^3) + \alpha\beta(B^7C^5 - B^5C^7) - \beta(B^4C^1 - B^1C^4)) + \\
 & + \alpha\gamma A^3((B^5C^6 - B^6C^5) + (B^4C^2 - B^2C^4) + (B^1C^3 - B^3C^1)) - \\
 & - \alpha\gamma A^7(-\beta(B^7C^1 - B^1C^7) - \beta(B^5C^4 - B^4C^5) + (B^2C^6 - B^6C^2)) - \\
 & - \alpha A^5(-\beta(B^1C^5 - B^5C^1) - \gamma(B^6C^3 - B^3C^6) + \beta\gamma(B^7C^4 - B^4C^4)) + \\
 & + \alpha A^2(-\gamma(B^4C^3 - B^3C^4) + (B^2C^1 - B^1C^2) - \gamma(B^6C^7 - B^7C^6)), \\
 \text{т.е. } E^1 = & B^1(CA) - C^1(AB) + [ABC]^1,
 \end{aligned}$$

где

$$[ABC]^1 = \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^3 & A^5 \\ B^6 & B^3 & B^5 \\ C^6 & C^3 & C^5 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^5 & A^7 \\ B^4 & B^5 & B^7 \\ C^4 & C^5 & C^7 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^4 & A^2 \\ B^3 & B^4 & B^2 \\ C^3 & C^4 & C^2 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^7 & A^6 \\ B^2 & B^7 & B^6 \\ C^2 & C^7 & C^6 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для других координат

$$E^2 = B^2(CA) - C^2(AB) + [ABC]^2,$$

где

$$[ABC]^2 = \beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^6 & A^7 \\ B^1 & B^6 & B^7 \\ C^1 & C^6 & C^7 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^7 & A^3 \\ B^5 & B^7 & B^3 \\ C^5 & C^7 & C^3 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^5 & A^4 \\ B^6 & B^5 & B^4 \\ C^6 & C^5 & C^4 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^3 & A^1 \\ B^4 & B^3 & B^1 \\ C^4 & C^3 & C^1 \end{vmatrix},$$

$$E^3 = B^3(CA) - C^3(AB) + [ABC]^3,$$

где

$$[ABC]^3 = \alpha\beta \begin{vmatrix} A^7 & A^5 & A^2 \\ B^7 & B^5 & B^2 \\ C^7 & C^5 & C^2 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^4 \\ B^1 & B^2 & B^4 \\ C^1 & C^2 & C^4 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} A^5 & A^1 & A^6 \\ B^5 & B^1 & B^6 \\ C^5 & C^1 & C^6 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^4 & A^7 \\ B^6 & B^4 & B^7 \\ C^6 & C^4 & C^7 \end{vmatrix},$$

$$E^4 = B^4(CA) - C^4(AB) + [ABC]^4,$$

где

$$[ABC]^4 = -\alpha \begin{vmatrix} A^2 & A^1 & A^3 \\ B^2 & B^1 & B^3 \\ C^2 & C^1 & C^3 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^3 & A^6 \\ B^7 & B^3 & B^6 \\ C^7 & C^3 & C^6 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^1 & A^7 & A^5 \\ B^1 & B^7 & B^5 \\ C^1 & C^7 & C^5 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A^5 & A^6 & A^2 \\ B^5 & B^6 & B^2 \\ C^5 & C^6 & C^2 \end{vmatrix},$$

$$E^5 = B^5(CA) - C^5(AB) + [ABC]^5,$$

где

$$[ABC]^5 = -\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^2 & A^6 \\ B^4 & B^2 & B^6 \\ C^4 & C^2 & C^6 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^6 & A^1 \\ B^3 & B^6 & B^1 \\ C^3 & C^6 & C^1 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^3 & A^7 \\ B^2 & B^3 & B^7 \\ C^2 & C^3 & C^7 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^1 & A^4 \\ B^7 & B^1 & B^4 \\ C^7 & C^1 & C^4 \end{vmatrix},$$

$$E^6 = B^6(CA) - C^6(AB) + [ABC]^6,$$

где

$$[ABC]^6 = -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^7 & A^4 \\ B^3 & B^7 & B^4 \\ C^3 & C^7 & C^4 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^2 & A^4 & A^5 \\ B^2 & B^4 & B^5 \\ C^2 & C^4 & C^5 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^7 & A^2 & A^1 \\ B^7 & B^2 & B^1 \\ C^7 & C^2 & C^1 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^1 & A^5 & A^3 \\ B^1 & B^5 & B^3 \\ C^1 & C^5 & C^3 \end{vmatrix},$$

$$E^7 = B^7(CA) - C^7(AB) + [ABC]^7,$$

где

$$[ABC]^7 = -\beta \begin{vmatrix} A^5 & A^4 & A^1 \\ B^5 & B^4 & B^1 \\ C^5 & C^4 & C^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^6 & A^1 & A^2 \\ B^6 & B^1 & B^2 \\ C^6 & C^1 & C^2 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^6 & A^3 \\ B^4 & B^6 & B^3 \\ C^4 & C^6 & C^3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A^3 & A^2 & A^5 \\ B^3 & B^2 & B^5 \\ C^3 & C^2 & C^5 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, окончательно запишем

$$[A[BC]] = B(CA) - C(AB) + [ABC],$$

где вектор $[ABC]$ можно представить в виде суммы определителей:

$$\begin{aligned} [ABC] = & \begin{vmatrix} \beta\gamma e_2 & \alpha\gamma e_1 & \alpha\beta e_6 & e_7 \\ A^2 & A^1 & A^6 & A^7 \\ B^2 & B^1 & B^6 & B^7 \\ C^2 & C^1 & C^6 & C^7 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \alpha\gamma e_1 & \alpha\beta e_6 & -\beta e_3 & -\gamma e_5 \\ A^1 & A^6 & A^3 & A^5 \\ B^1 & B^6 & B^3 & B^5 \\ C^1 & C^6 & C^3 & C^5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\gamma e_5 & -\alpha e_4 & \beta\gamma e_2 & \alpha\beta e_6 \\ A^5 & A^4 & A^2 & A^6 \\ B^5 & B^4 & B^2 & B^6 \\ C^5 & C^4 & C^2 & C^6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\beta\gamma e_6 & \beta\gamma e_3 & -\gamma e_7 & \alpha\gamma e_4 \\ A^6 & A^3 & A^7 & A^4 \\ B^6 & B^3 & B^7 & B^4 \\ C^6 & C^3 & C^7 & C^4 \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} \alpha\beta e_3 & -\alpha e_7 & \alpha\gamma e_5 & -\alpha\beta\gamma e_2 \\ A^3 & A^7 & A^5 & A^2 \\ B^3 & B^7 & B^5 & B^2 \\ C^3 & C^7 & C^5 & C^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_4 & \beta\gamma e_2 & \alpha\gamma e_1 & -\beta e_3 \\ A^4 & A^2 & A^1 & A^3 \\ B^4 & B^2 & B^1 & B^3 \\ C^4 & C^2 & C^1 & C^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\beta e_7 & \beta\gamma e_5 & \alpha\beta e_4 & -\alpha\beta\gamma e_1 \\ A^7 & A^5 & A^4 & A^1 \\ B^7 & B^5 & B^4 & B^1 \\ C^7 & C^5 & C^4 & C^1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно получить соотношение

$$[[AB]C] = [C[BA]] = B(CA) - A(BC) - [ABC].$$

Антисимметричная по перестановке любой пары векторов векторная функция трех векторов $[ABC]$ является векторным произведением трех векторов.

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

$$[aABC] = a[ABC];$$

2. Векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

3. Векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.

$$[AB(C+D)] = [ABC] + [ABD];$$

4. Если два вектора в векторном произведении трех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов A , B или C раскладывается по двум векторам, то выполняется условие $[ABC] = 0$.

Используя циклические подстановки векторов, получим

$$[A[BC]] + [B[CA]] + [C[AB]] = 3[ABC]$$

$$\text{и } [[AB]C] + [[BC]A] + [[CA]B] = -3[ABC],$$

так что, в рассматриваемых алгебрах не выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и не относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

$$\begin{array}{lll} ((AB)CD) & (AB)(CD) & (ABC)D. \\ [(AB)CD] & (AB)[CD] & \\ ([[AB]C]D) & ([AB][CD]) & \\ [[[AB]C]D] & [[AB][CD]] & \end{array}$$

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

$$\begin{aligned} ((AB)CD) &= (AB)(CD) \\ [(AB)CD] &= (AB)[CD]. \end{aligned}$$

Во-вторых, считая векторное произведение $[AB]$ за один вектор, мы можем рассматривать $([[AB]C]D)$ как смешанное произведение трех векторов $[AB]$, C и D . Применив к нему закон сочетательности, получим

$$([[AB]C]D) = ([AB][CD]).$$

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. $((AB)CD) = (AB)(CD)$;
2. $[(AB)CD] = (AB)[CD]$;
3. $([[AB]C]D) = ([AB][CD])$;
4. $[[AB]C]D = (ABC)D$;
5. $[[AB][CD]]$;
6. $[[[AB]C]D]$.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения не являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые считались основными в трехмерном случае.

Скалярное произведение двух векторов $[AB]$ и $[CD]$, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов $([[AB]C]D)$. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя $[AB]$ и C и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

$$([AB][CD]) = ([[AB]C]D).$$

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

$$([AB][CD]) = ((B(AC) - A(BC) - [ABC])D)$$

или, раскрыв скобки

$$([AB][CD]) = \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix} - ([ABC]D).$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа не выражается только через произведение первого типа, что имеет место в трехмерной алгебре.

Назовем второе слагаемое в правой части тождества смешанным произведением четырех векторов и обозначим его через

$$(ABCD) = ([ABC]D).$$

Используя координатную запись векторного произведения трех векторов $[ABC]$, получим координатную запись смешанного произведения четырех векторов в виде:

$$\begin{aligned} -(ABCD) = & -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^1 & A^6 & A^7 \\ B^2 & B^1 & B^6 & B^7 \\ C^2 & C^1 & C^6 & C^7 \\ D^2 & D^1 & D^6 & D^7 \end{vmatrix} - \\ & -\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^6 & A^3 & A^5 \\ B^1 & B^6 & B^3 & B^5 \\ C^1 & C^6 & C^3 & C^5 \\ D^1 & D^6 & D^3 & D^5 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^4 & A^2 & A^6 \\ B^5 & B^4 & B^2 & B^6 \\ C^5 & C^4 & C^2 & C^6 \\ D^5 & D^4 & D^2 & D^6 \end{vmatrix} + \alpha\beta\gamma^2 \begin{vmatrix} A^6 & A^3 & A^7 & A^4 \\ B^6 & B^3 & B^7 & B^4 \\ C^6 & C^3 & C^7 & C^4 \\ D^6 & D^3 & D^7 & D^4 \end{vmatrix} + \\ & + \alpha^2\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^7 & A^5 & A^2 \\ B^3 & B^7 & B^5 & B^2 \\ C^3 & C^7 & C^5 & C^2 \\ D^3 & D^7 & D^5 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^2 & A^1 & A^3 \\ B^4 & B^2 & B^1 & B^3 \\ C^4 & C^2 & C^1 & C^3 \\ D^4 & D^2 & D^1 & D^3 \end{vmatrix} + \alpha\beta^2\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^5 & A^4 & A^1 \\ B^7 & B^5 & B^4 & B^1 \\ C^7 & C^5 & C^4 & C^1 \\ D^7 & D^5 & D^4 & D^1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Из свойств определителей следует:

1. Смешанное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

$$(aABCD) = a(ABCD);$$

2. Смешанное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов.

3. Смешанное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.

$$(ABC(D+E)) = (ABCD) + (ABCE);$$

4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение трех векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([ABC]A) = 0$. Если четыре вектора A , B , C и D компланарны, либо разложены по трем векторам, то выполняется условие $(ABCD) = 0$.

При этом из уравнения

$$([AB][CD])+(ABCD)= \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix}$$

следует соотношение

$$([AB][CD]) + ([BC][AD]) + ([CA][BD]) = -3(ABCD),$$

и как частный случай, при $C=A$ и $D=B$ – основное тождество для двух векторов

$$[AB]^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (BA) \\ (AB) & (BB) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений $[[AB][CD]]$ можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов $[AB]$, C и D мы получим

$$[[AB][CD]] = C(D[AB]) - D([AB]C) + [[AB]CD].$$

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов A , B и $[CD]$, мы получим:

$$[[AB][CD]] = B([CD]A) - A(B[CD]) - [AB[CD]].$$

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, не выражается только через произведения четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения $[[AB][CD]]$, мы получим

$$C(D[AB]) - D([AB]C) + [[AB]CD] = B([CD]A) - A(B[CD]) - [AB[CD]]$$

или

$$A(BCD) - B(CDA) + C(DAB) - D(ABC) = -[[AB]CD] - [AB[CD]].$$

При этом отпадает возможность разложения вектора по трем векторам.

Выражение в правой части тождества является векторным произведением четырех векторов $[ABCD]$, т.е.

$$\begin{aligned} [ABCD] &= -[[AB]CD] - [AB[CD]] = A(BCD) - B(CDA) + C(DAB) - D(ABC) = \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ (ACD) & (BCD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ (CAB) & (DAB) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Используя координатную запись смешанных произведений трех векторов, можно получить векторное произведение четырех векторов в виде

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \\ &= (-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^7 & A^5 & A^6 \\ B^1 & B^7 & B^5 & B^6 \\ C^1 & C^7 & C^5 & C^6 \\ D^1 & D^7 & D^5 & D^6 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^5 & A^4 & A^3 \\ B^1 & B^5 & B^4 & B^3 \\ C^1 & C^5 & C^4 & C^3 \\ D^1 & D^5 & D^4 & D^3 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^4 & A^2 & A^7 \\ B^1 & B^4 & B^2 & B^7 \\ C^1 & C^4 & C^2 & C^7 \\ D^1 & D^4 & D^2 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^1 & A^6 & A^3 & A^2 \\ B^1 & B^6 & B^3 & B^2 \\ C^1 & C^6 & C^3 & C^2 \\ D^1 & D^6 & D^3 & D^2 \end{vmatrix}) \mathbf{e}_1 + \\ &+ (-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^3 & A^7 & A^1 \\ B^2 & B^3 & B^7 & B^1 \\ C^2 & C^3 & C^7 & C^1 \\ D^2 & D^3 & D^7 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^7 & A^5 & A^6 \\ B^2 & B^7 & B^5 & B^6 \\ C^2 & C^7 & C^5 & C^6 \\ D^2 & D^7 & D^5 & D^6 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^5 & A^4 & A^3 \\ B^2 & B^5 & B^4 & B^3 \\ C^2 & C^5 & C^4 & C^3 \\ D^2 & D^5 & D^4 & D^3 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^2 & A^1 & A^6 & A^4 \\ B^2 & B^1 & B^6 & B^4 \\ C^2 & C^1 & C^6 & C^4 \\ D^2 & D^1 & D^6 & D^4 \end{vmatrix}) \mathbf{e}_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^4 & A^2 & A^7 \\ B^3 & B^4 & B^2 & B^7 \\ C^3 & C^4 & C^2 & C^7 \\ D^3 & D^4 & D^2 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^3 & A^2 & A^1 & A^5 \\ B^3 & B^2 & B^1 & B^5 \\ C^3 & C^2 & C^1 & C^5 \\ D^3 & D^2 & D^1 & D^5 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^1 & A^6 & A^4 \\ B^3 & B^1 & B^6 & B^4 \\ C^3 & C^1 & C^6 & C^4 \\ D^3 & D^1 & D^6 & D^4 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^3 & A^7 & A^5 & A^6 \\ B^3 & B^7 & B^5 & B^6 \\ C^3 & C^7 & C^5 & C^6 \\ D^3 & D^7 & D^5 & D^6 \end{vmatrix})\mathbf{e}_3 + \\
& +(\alpha\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^6 & A^3 & A^2 \\ B^4 & B^6 & B^3 & B^2 \\ C^4 & C^6 & C^3 & C^2 \\ D^4 & D^6 & D^3 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^3 & A^7 & A^1 \\ B^4 & B^3 & B^7 & B^1 \\ C^4 & C^3 & C^7 & C^1 \\ D^4 & D^3 & D^7 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^4 & A^7 & A^5 & A^6 \\ B^4 & B^7 & B^5 & B^6 \\ C^4 & C^7 & C^5 & C^6 \\ D^4 & D^7 & D^5 & D^6 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^4 & A^2 & A^1 & A^5 \\ B^4 & B^2 & B^1 & B^5 \\ C^4 & C^2 & C^1 & C^5 \\ D^4 & D^2 & D^1 & D^5 \end{vmatrix})\mathbf{e}_4 + \\
& +(\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^1 & A^6 & A^4 \\ B^5 & B^1 & B^6 & B^4 \\ C^5 & C^1 & C^6 & C^4 \\ D^5 & D^1 & D^6 & D^4 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^6 & A^3 & A^2 \\ B^5 & B^6 & B^3 & B^2 \\ C^5 & C^6 & C^3 & C^2 \\ D^5 & D^6 & D^3 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^3 & A^7 & A^1 \\ B^5 & B^3 & B^7 & B^1 \\ C^5 & C^3 & C^7 & C^1 \\ D^5 & D^3 & D^7 & D^1 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^5 & A^4 & A^2 & A^7 \\ B^5 & B^4 & B^2 & B^7 \\ C^5 & C^4 & C^2 & C^7 \\ D^5 & D^4 & D^2 & D^7 \end{vmatrix})\mathbf{e}_5 + \\
& +(-\alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^5 & A^4 & A^3 \\ B^6 & B^5 & B^4 & B^3 \\ C^6 & C^5 & C^4 & C^3 \\ D^6 & D^5 & D^4 & D^3 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^4 & A^2 & A^7 \\ B^6 & B^4 & B^2 & B^7 \\ C^6 & C^4 & C^2 & C^7 \\ D^6 & D^4 & D^2 & D^7 \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} A^6 & A^2 & A^1 & A^5 \\ B^6 & B^2 & B^1 & B^5 \\ C^6 & C^2 & C^1 & C^5 \\ D^6 & D^2 & D^1 & D^5 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^6 & A^3 & A^7 & A^1 \\ B^6 & B^3 & B^7 & B^1 \\ C^6 & C^3 & C^7 & C^1 \\ D^6 & D^3 & D^7 & D^1 \end{vmatrix})\mathbf{e}_6 + \\
& +(\alpha\beta \begin{vmatrix} A^7 & A^2 & A^1 & A^5 \\ B^7 & B^2 & B^1 & B^5 \\ C^7 & C^2 & C^1 & C^5 \\ D^7 & D^2 & D^1 & D^5 \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^1 & A^6 & A^4 \\ B^7 & B^1 & B^6 & B^4 \\ C^7 & C^1 & C^6 & C^4 \\ D^7 & D^1 & D^6 & D^4 \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^6 & A^3 & A^2 \\ B^7 & B^6 & B^3 & B^2 \\ C^7 & C^6 & C^3 & C^2 \\ D^7 & D^6 & D^3 & D^2 \end{vmatrix} - \alpha\beta\gamma \begin{vmatrix} A^7 & A^5 & A^4 & A^3 \\ B^7 & B^5 & B^4 & B^3 \\ C^7 & C^5 & C^4 & C^3 \\ D^7 & D^5 & D^4 & D^3 \end{vmatrix})\mathbf{e}_7.
\end{aligned}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.
 $[aABCD] = a[ABCD]$;
2. Векторное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. Векторное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.
 $[ABC(D+E)] = [ABCD] + [ABCE]$;
4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов A , B , C и D раскладывается по двум или трем векторам, то выполняется условие
 $[ABCD] = 0$.

Тройное векторное произведение четырех векторов $[[[AB]C]D]$ можно также преобразовать двумя способами. Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор D , получим

$$[[[AB]C]D] = (CA)[BD] - (CB)[AD] - [[ABC]D].$$

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$$[[[AB]C]D] = C(D[AB]) - (CD)[AB] - [[AB]CD].$$

Сравнив оба выражения, получаем

$$(CA)[BD] - (CB)[AD] - [[ABC]D] = C(D[AB]) - (CD)[AB] - [[AB]CD].$$

Отсюда найдем

$$C(ABD) = (CA)[BD] + (CB)[DA] + (CD)[AB] + [[AB]CD] - [[ABC]D].$$

Эта формула очевидно не выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа. При этом отпадает возможность разложения векторов по трем векторным произведениям пар векторов.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов не выражаются линейно через произведения только двух типов $(AB)(CD)$ и $(AB)[CD]$.

Последнее тождество при циклической подстановке векторов позволяет получить полезное соотношение

$$\begin{aligned} [ABCD] &= (BCD)A - (CDA)B + (DAB)C - (ABC)D = \\ &= -2[ABCD] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] - [[ABC]D], \end{aligned}$$

а также

$$-[[ABC]D] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] = 3[ABCD].$$

Анализ соотношений был бы неполным, если бы не удалось установить выражение тройного векторного произведения (или величины $[[ABC]D]$) через более простые произведения. Выразив, например, ее первую координату как векторное произведение двух векторов

$$\begin{aligned} [[ABC]D]^1 &= -\beta([ABC]^2 D^3 - [ABC]^3 D^2) - \gamma([ABC]^4 D^5 - [ABC]^5 D^4) + \\ &+ \beta\gamma([ABC]^7 D^6 - [ABC]^6 D^7), \end{aligned}$$

в координатной форме записи можно получить

$$\begin{aligned} [[ABC]D]^1 &= \\ &= (-A^1(BCD) - B^1(CAD) - C^1(ABD) + [AB]^1(CD) + [BC]^1(AD) + [CA]^1(BD))e_1 \end{aligned}$$

и аналогично остальные шесть координат этого произведения.

В результате имеем

$$[[ABC]D] = \begin{vmatrix} [AB] C \\ (ABD) (CD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [BC] A \\ (BCD) (AD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [CA] B \\ (CAD) (BD) \end{vmatrix}$$

и кроме того

$$[[AB]CD] = - \begin{vmatrix} A B \\ (ACD) (BCD) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (AC) (BC) \\ [AD] [BD] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [AC] [BC] \\ (AD) (BD) \end{vmatrix}$$

при этом

$$[[AB]CD] + [[BC]AD] + [[CA]BD] = [[ABC]D].$$

Таким образом, рассматриваемые произведения сводятся к линейной комбинации произведений второго и четвертого типа. Поэтому следует считать основными четыре типа произведений четырех векторов:

1. $(AB)(CD)$;
2. $(AB)[CD]$;
3. $(ABC)D$;
4. $(ABCD)$.

Нетрудно показать, что при этом выполняются тождества Мальцева

$$[[ABC]A] = [AB[AC]]$$

и Сейгла

$$[[[AB]C]D] + [[[BC]D]A] + [[[CD]A]B] + [[[DA]B]C] = [[AC][BD]],$$

так что рассматриваемые алгебры относятся к алгебрам Мальцева, причем

$$[[ABC]A] = [AB](CA) + [BC](AA) + [CA](BA) - (ABC)A$$

и

$$[[AC][BD]] = \begin{vmatrix} A & [BC] \\ (AD) & (BCD) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & [CD] \\ (BA) & (CDA) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & [DA] \\ (CB) & (DAB) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & [AB] \\ (DC) & (ABC) \end{vmatrix}.$$

В результате можно предложить модифицированную запись соотношения Мальцева на случай четырех произвольных векторов

$$- [[ABC]D] + [[BCD]A] - [[CDA]B] + [[DAB]C] = -3([AB[CD]] + [[AB]CD]) = 3[ABCD].$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$$(ABC)^2 = ([AB]C)^2.$$

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[AB]$ и C .

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$$(ABC)^2 = [AB]^2 C^2 - [[AB]C]^2.$$

Квадрат векторного произведения $[AB]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$$[AB]^2 = A^2 B^2 - (AB)^2.$$

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[AB]C]^2$ воспользуемся формулой разложения

$$[[AB]C]^2 = (B(CA) - A(BC) - [ABC])^2 = B^2(CA)^2 - 2(AB)(BC)(CA) + A^2(BC)^2 - 2([ABC](B(CA) - A(BC))) + [ABC]^2 = A^2(BC)^2 + B^2(CA)^2 - 2(AB)(BC)(CA) + [ABC]^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$$(ABC)^2 = A^2 B^2 C^2 - (AB)^2 C^2 - A^2 (BC)^2 - B^2 (CA)^2 + 2(AB)(BC)(CA) - [ABC]^2.$$

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$$(ABC)^2 + [ABC]^2 = A^2(B^2 C^2 - (BC)^2) - (AB)((BA)C^2 - (BC)(CA)) + (AC)((BA)(CB) - (CA)B^2).$$

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(ABC)^2 + [ABC]^2 = \begin{vmatrix} (AA) & (AB) & (AC) \\ (BA) & (BB) & (BC) \\ (CA) & (CB) & (CC) \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

6. Группа преобразований вращения трехмерного псевдоевклидова пространства индекса два

Аффинное преобразование

$$\begin{aligned}x^1' &= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 + a_1, \\x^2' &= a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 + a_2, \\x^3' &= a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 + a_3\end{aligned}\tag{1}$$

назовем преобразованием вращения, если его матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\tag{2}$$

действительна и удовлетворяет условию

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,\tag{3}$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^TG,$$

индекс T – операцию транспонирования, а G – метрический тензор

$$G = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{vmatrix},$$

причем $\alpha, \beta = \pm 1$, так что $G = G^T$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = GA^TG = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha\beta a_{21} & -\beta a_{31} \\ \alpha\beta a_{12} & a_{22} & -\alpha a_{32} \\ -\beta a_{13} & -\alpha a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)^TG = G(B^TA^T)G = (GB^TG)(GA^TG) = \bar{B}\bar{A},$$

и

$$\overline{\bar{A}} = \overline{GA^TG} = G(GA^TG)^TG = GGAGG = A.$$

Докажем, что совокупность преобразований вращения обладает групповыми свойствами.

1. Произведение двух преобразований вращения есть преобразование вращения.

Действительно, пусть даны преобразования вращения с матрицами A_1 и A_2 ; произведение их есть аффинное преобразование с матрицей $A = A_2A_1$. На основании правил перемножения матриц мы можем написать тождество

$$A\bar{A} = (A_2A_1)(\overline{A_2A_1}) = (A_2A_1)(\bar{A}_1\bar{A}_2) = A_2(A_1\bar{A}_1)\bar{A}_2.$$

Отсюда вследствие равенства $A\bar{A} = I$ имеем:

$$A\bar{A} = A_2I\bar{A}_2 = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2. Преобразование, обратное преобразованию вращения является преобразованием вращения.

Действительно, пусть A – матрица некоторого преобразования вращения и $B = A^{-1}$ – матрица преобразования, обратного ему. Из условия $A\bar{A} = I$ следует, что $\bar{A} = A^{-1}$. Таким образом $B = \bar{A}$. Отсюда

$$B\bar{B} = \bar{A}(\bar{\bar{A}}) = \bar{A}A = A^{-1}A = I.$$

Тем самым требуемое доказано. Таким образом, совокупность преобразований вращения есть группа.

Из равенства (3) следует, что определитель матрицы A равен $\pm I$. Отсюда заключаем, что группа вращений является подгруппой унимодулярной группы.

Условие вращения, записанное в матричной форме (3), равносильно соотношениям:

$$A\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{12}a_{12} - \beta a_{13}a_{13} & \alpha\beta a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - \alpha a_{13}a_{23} & -\beta a_{11}a_{31} - \alpha a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11} + \alpha\beta a_{22}a_{12} - \beta a_{23}a_{13} & \alpha\beta a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} - \alpha a_{23}a_{23} & -\beta a_{21}a_{31} - \alpha a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11} + \alpha\beta a_{32}a_{12} - \beta a_{33}a_{13} & \alpha\beta a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} - \alpha a_{33}a_{23} & -\beta a_{31}a_{31} - \alpha a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

равным I . Поскольку группа преобразований вращения выделяется из аффинной при помощи наложения шести связей на двенадцать параметров, она является шестичленной. Условиям преобразований вращения можно придать форму отличную от формы (4)

$$\bar{A}A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{21}a_{21} - \beta a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + \alpha\beta a_{21}a_{22} - \beta a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + \alpha\beta a_{21}a_{23} - \beta a_{31}a_{33} \\ \alpha\beta a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} - \alpha a_{32}a_{31} & \alpha\beta a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} - \alpha a_{32}a_{32} & \alpha\beta a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - \alpha a_{32}a_{33} \\ -\beta a_{13}a_{11} - \alpha a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & -\beta a_{13}a_{12} - \alpha a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & -\beta a_{13}a_{13} - \alpha a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

также равную I . Эта система равенств равносильна равенствам (4).

Группа преобразований вращения имеет инвариант двух точек. Таковым является, например, функция двух точек $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$, $M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$

$$\rho^2(M_1, M_2) = -\alpha(x_2^1 - x_1^1)^2 - \beta(x_2^2 - x_1^2)^2 + \alpha\beta(x_2^3 - x_1^3)^2.$$

Инвариантность этой функции может быть установлена при помощи простых выкладок. Именно, пусть $M_1'(x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3)$ и $M_2'(x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3)$ – две точки, полученные преобразованием вращения из точек $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ и $M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \rho^2(M_1', M_2') &= -\alpha(x_2'^1 - x_1'^1)^2 - \beta(x_2'^2 - x_1'^2)^2 + \alpha\beta(x_2'^3 - x_1'^3)^2 = \\ &= -\alpha(a_{11}(x_2^1 - x_1^1) + a_{12}(x_2^2 - x_1^2) + a_{13}(x_2^3 - x_1^3))^2 - \\ &= -\beta(a_{21}(x_2^1 - x_1^1) + a_{22}(x_2^2 - x_1^2) + a_{23}(x_2^3 - x_1^3))^2 + \\ &+ \alpha\beta(a_{31}(x_2^1 - x_1^1) + a_{32}(x_2^2 - x_1^2) + a_{33}(x_2^3 - x_1^3))^2 = \\ &= -\alpha(a_{11}a_{11}(x_2^1 - x_1^1)^2 + a_{12}a_{12}(x_2^2 - x_1^2)^2 + a_{13}a_{13}(x_2^3 - x_1^3)^2 + \\ &+ 2(a_{11}a_{12}(x_2^1 - x_1^1)(x_2^2 - x_1^2) + a_{12}a_{13}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^3 - x_1^3) + a_{13}a_{11}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^1 - x_1^1))) - \\ &- \beta(a_{21}a_{21}(x_2^1 - x_1^1)^2 + a_{22}a_{22}(x_2^2 - x_1^2)^2 + a_{23}a_{23}(x_2^3 - x_1^3)^2 + \\ &+ 2(a_{21}a_{22}(x_2^1 - x_1^1)(x_2^2 - x_1^2) + a_{22}a_{23}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^3 - x_1^3) + a_{23}a_{21}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^1 - x_1^1))) + \\ &+ \alpha\beta(a_{31}a_{31}(x_2^1 - x_1^1)^2 + a_{32}a_{32}(x_2^2 - x_1^2)^2 + a_{33}a_{33}(x_2^3 - x_1^3)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(a_{31}a_{32}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{32}a_{33}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{33}a_{31}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)))= \\
& = (-\alpha a_{11}a_{11}-\beta a_{21}a_{21}+\alpha\beta a_{31}a_{31})(x_2^1-x_1^1)^2+ \\
& +(-\alpha a_{12}a_{12}-\beta a_{22}a_{22}+\alpha\beta a_{32}a_{32})(x_2^2-x_1^2)^2+ \\
& +(-\alpha a_{13}a_{13}-\beta a_{23}a_{23}+\alpha\beta a_{33}a_{33})(x_2^3-x_1^3)^2+ \\
& +2((-\alpha a_{11}a_{12}-\beta a_{21}a_{22}+\alpha\beta a_{31}a_{32})(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +(-\alpha a_{12}a_{13}-\beta a_{22}a_{23}+\alpha\beta a_{32}a_{33})(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +(-\alpha a_{13}a_{11}-\beta a_{23}a_{21}+\alpha\beta a_{33}a_{31})(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)).
\end{aligned}$$

Отсюда вследствие соотношений (5) получаем:

$$\rho^2(M_1', M_2') = -\alpha(x_2^1-x_1^1)^2 - \beta(x_2^2-x_1^2)^2 + \alpha\beta(x_2^3-x_1^3)^2 = \rho^2(M_1, M_2).$$

В геометрии группы преобразований вращения величина $\rho^2(M_1, M_2)$ является квадратом интервала между точками M_1 и M_2 . Он представляет собой основной инвариант этой геометрии, так как все остальные инварианты могут быть выражены через квадрат интервала.

Геометрии собственнортогональной группы [6] (трехмерной собственноевклидовой геометрии) соответствуют значения $\alpha, \beta = -1$. Геометрии псевдоортогональной группы (трехмерной псевдоевклидовой геометрии индекса два) одной или двум величинам α, β соответствуют значения равные 1.

Представление группы преобразований вращения трехмерного псевдоевклидового пространства индекса два

Преобразование

$$X' = AX$$

назовем представлением преобразования вращения, если его матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

комплексна и удовлетворяет условию

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^*G,$$

индекс $*$ – операцию эрмитового сопряжения, а G -метрический тензор

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{vmatrix},$$

причем $\alpha = \pm 1$, так что $G = G^*, G^2 = I$ и

$$\bar{A} = GA^*G = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & -\alpha\bar{a}_{21} \\ -\alpha\bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)^*G = G(B^*A^*)G = (GB^*G)(GA^*G) = \bar{B}\bar{A},$$

и

$$\bar{\bar{A}} = \overline{GA^*G} = G(GA^*G)^*G = GGAGG = A.$$

Докажем, что совокупность преобразований вращения обладает групповыми свойствами.

1. Произведение двух преобразований вращения есть преобразование вращения.

Действительно, пусть даны преобразования вращения с матрицами A_1 и A_2 ; произведение их есть преобразование с матрицей $A = A_2 A_1$. На основании правил перемножения матриц мы можем написать тождество

$$A \bar{A} = (A_2 A_1) (\bar{A}_2 \bar{A}_1) = (A_2 A_1) (\bar{A}_1 \bar{A}_2) = A_2 (A_1 \bar{A}_1) \bar{A}_2.$$

Отсюда вследствие равенства $A \bar{A} = I$ имеем:

$$A \bar{A} = A_2 I \bar{A}_2 = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2. Преобразование, обратное преобразованию вращения является преобразованием вращения.

Действительно, пусть A -матрица некоторого преобразования вращения и $B = A^{-1}$ - матрица преобразования, обратного ему. Из условия $A \bar{A} = I$ следует, что $\bar{A} = A^{-1}$. Таким образом $B = \bar{A}$. Отсюда

$$B \bar{B} = \bar{A} (\bar{\bar{A}}) = \bar{A} A = A^{-1} A = I.$$

Тем самым требуемое доказано. Таким образом, совокупность преобразований вращения есть группа.

Условие преобразований вращения, записанное в матричной форме, равносильно соотношениям:

$$A \bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} \bar{a}_{11} - \alpha \bar{a}_{12} a_{12} & a_{12} \bar{a}_{22} - \alpha \bar{a}_{21} a_{11} \\ a_{21} \bar{a}_{11} - \alpha \bar{a}_{12} a_{22} & a_{22} \bar{a}_{22} - \alpha \bar{a}_{21} a_{21} \end{vmatrix} = I,$$

равным I .

Этим условиям можно придать форму отличную от этой формы

$$\bar{A} A = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} a_{11} - \alpha a_{21} \bar{a}_{21} & -\alpha \bar{a}_{21} a_{22} + a_{12} \bar{a}_{11} \\ -\alpha \bar{a}_{12} a_{11} + a_{21} \bar{a}_{22} & \bar{a}_{22} a_{22} - \alpha a_{12} \bar{a}_{12} \end{vmatrix} = I,$$

также равной I . Эти системы равенств равносильны.

Любые два из четырех комплексных коэффициентов a_{ik} определяют все остальные. Более того, они дополнительно связаны соотношением унимодулярности (определитель матрицы A равен ± 1), так что два комплексных коэффициента a_{ik} полностью определяются лишь тремя вещественными параметрами.

Геометрии собственнoунитарной группы [7] (трехмерной собственнo-евклидовой геометрии) соответствует представление со значением $\alpha = -1$. Геометрии псевдоунитарной группы (трехмерной псевдоевклидовой геометрии индекса два) соответствует представление со значением $\alpha = 1$.

7. Группа преобразований вращения семимерного псевдоевклидова пространства индекса четыре

Аффинное преобразование

$$\begin{aligned} x^1' &= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \dots + a_{17}x^7 + a_1, \\ x^2' &= a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{27}x^7 + a_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x^7' = a_{71}x^1 + a_{72}x^2 + \dots + a_{77}x^7 + a_7$$

назовем преобразованием вращения, если его матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{27} \\ & & \dots & \\ a_{71} & a_{72} & \dots & a_{77} \end{vmatrix} \quad (2)$$

действительна и удовлетворяет условию

$$A \bar{A} = \bar{A} A = I, \quad (3)$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^T G,$$

индекс T – операцию транспонирования, а G -метрический тензор

$$G = \left(\begin{array}{ccc|cccc} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma \end{array} \right),$$

причем $\alpha, \beta, \gamma = \pm 1$, так что $G = G^T$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \alpha\beta a_{21} & -\beta a_{31} & \alpha\gamma a_{41} & -\gamma a_{51} & -\alpha\beta\gamma a_{61} & \beta\gamma a_{71} \\ \alpha\beta a_{12} & a_{22} & -\alpha a_{32} & \beta\gamma a_{42} & -\alpha\beta\gamma a_{52} & -\gamma a_{62} & \alpha\gamma a_{72} \\ -\beta a_{13} & -\alpha a_{23} & a_{33} & -\alpha\beta\gamma a_{43} & \beta\gamma a_{53} & \alpha\gamma a_{63} & -\gamma a_{73} \\ \hline \alpha\gamma a_{14} & \beta\gamma a_{24} & -\alpha\beta\gamma a_{34} & a_{44} & -\alpha a_{54} & -\beta a_{64} & \alpha\beta a_{74} \\ -\gamma a_{15} & -\alpha\beta\gamma a_{25} & \beta\gamma a_{35} & -\alpha a_{45} & a_{55} & \alpha\beta a_{65} & -\beta a_{75} \\ -\alpha\beta\gamma a_{16} & -\gamma a_{26} & \alpha\gamma a_{36} & -\beta a_{46} & \alpha\beta a_{56} & a_{66} & -\alpha a_{76} \\ \beta\gamma a_{17} & \alpha\gamma a_{27} & -\gamma a_{37} & \alpha\beta a_{47} & -\beta a_{57} & -\alpha a_{67} & a_{77} \end{array} \right).$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)^T G = G(B^T A^T) G = (GB^T G)(GA^T G) = \bar{B} \bar{A},$$

и

$$\bar{\bar{A}} = \overline{GA^T G} = G(GA^T G)^T G = GGAGG = A.$$

Докажем, что совокупность преобразований вращения обладает групповыми свойствами.

1. Произведение двух преобразований вращения есть преобразование вращения.

Действительно, пусть даны преобразования вращения с матрицами A_1 и A_2 ; произведение их есть аффинное преобразование с матрицей $A=A_2A_1$. На основании правил перемножения матриц мы можем написать тождество

$$A\bar{A}=(A_2A_1)(\overline{A_2A_1})=(A_2A_1)(\bar{A_1}\bar{A_2})=A_2(A_1\bar{A_1})\bar{A_2}.$$

Отсюда вследствие равенства $A\bar{A}=I$ имеем:

$$A\bar{A}=A_2I\bar{A_2}=I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2. Преобразование, обратное преобразованию вращения является преобразованием вращения.

Действительно, пусть A – матрица некоторого преобразования вращения и $B=A^{-1}$ – матрица преобразования, обратного ему. Из условия $A\bar{A}=I$ следует, что $\bar{A}=A^{-1}$. Таким образом $B=\bar{A}$. Отсюда

$$B\bar{B}=\bar{A}(\bar{\bar{A}})=\bar{A}A=A^{-1}A=I.$$

Тем самым требуемое доказано. Таким образом, совокупность преобразований вращения есть группа.

Из равенства (3) следует, что определитель матрицы A равен $\pm I$. Отсюда заключаем, что группа вращений является подгруппой унимодулярной группы.

Условие вращения, записанное в матричной форме (3), равносильно соотношениям по столбцам матрицы $A\bar{A}$:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} a_{11}a_{11}+\alpha\beta a_{12}a_{12}-\beta a_{13}a_{13}+\alpha\gamma a_{14}a_{14}-\gamma a_{15}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{16}a_{16}+\beta\gamma a_{17}a_{17} \\ a_{21}a_{11}+\alpha\beta a_{22}a_{12}-\beta a_{23}a_{13}+\alpha\gamma a_{24}a_{14}-\gamma a_{25}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{26}a_{16}+\beta\gamma a_{27}a_{17} \\ a_{31}a_{11}+\alpha\beta a_{32}a_{12}-\beta a_{33}a_{13}+\alpha\gamma a_{34}a_{14}-\gamma a_{35}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{36}a_{16}+\beta\gamma a_{37}a_{17} \\ \hline a_{41}a_{11}+\alpha\beta a_{42}a_{12}-\beta a_{43}a_{13}+\alpha\gamma a_{44}a_{14}-\gamma a_{45}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{46}a_{16}+\beta\gamma a_{47}a_{17} \\ a_{51}a_{11}+\alpha\beta a_{52}a_{12}-\beta a_{53}a_{13}+\alpha\gamma a_{54}a_{14}-\gamma a_{55}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{56}a_{16}+\beta\gamma a_{57}a_{17} \\ a_{61}a_{11}+\alpha\beta a_{62}a_{12}-\beta a_{63}a_{13}+\alpha\gamma a_{64}a_{14}-\gamma a_{65}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{66}a_{16}+\beta\gamma a_{67}a_{17} \\ a_{71}a_{11}+\alpha\beta a_{72}a_{12}-\beta a_{73}a_{13}+\alpha\gamma a_{74}a_{14}-\gamma a_{75}a_{15}-\alpha\beta\gamma a_{76}a_{16}+\beta\gamma a_{77}a_{17} \end{array} \right. \\ \\ \alpha\beta a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}-\alpha a_{13}a_{23}+\beta\gamma a_{14}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{15}a_{25}-\gamma a_{16}a_{26}+\alpha\gamma a_{17}a_{27} \\ \alpha\beta a_{21}a_{21}+a_{22}a_{22}-\alpha a_{23}a_{23}+\beta\gamma a_{24}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{25}a_{25}-\gamma a_{26}a_{26}+\alpha\gamma a_{27}a_{27} \\ \alpha\beta a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22}-\alpha a_{33}a_{23}+\beta\gamma a_{34}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{35}a_{25}-\gamma a_{36}a_{26}+\alpha\gamma a_{37}a_{27} \\ \hline \alpha\beta a_{41}a_{21}+a_{42}a_{22}-\alpha a_{43}a_{23}+\beta\gamma a_{44}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{45}a_{25}-\gamma a_{46}a_{26}+\alpha\gamma a_{47}a_{27} \\ \alpha\beta a_{51}a_{21}+a_{52}a_{22}-\alpha a_{53}a_{23}+\beta\gamma a_{54}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{55}a_{25}-\gamma a_{56}a_{26}+\alpha\gamma a_{57}a_{27} \\ \alpha\beta a_{61}a_{21}+a_{62}a_{22}-\alpha a_{63}a_{23}+\beta\gamma a_{64}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{65}a_{25}-\gamma a_{66}a_{26}+\alpha\gamma a_{67}a_{27} \\ \alpha\beta a_{71}a_{21}+a_{72}a_{22}-\alpha a_{73}a_{23}+\beta\gamma a_{74}a_{24}-\alpha\beta\gamma a_{75}a_{25}-\gamma a_{76}a_{26}+\alpha\gamma a_{77}a_{27} \\ \\ -\beta a_{11}a_{31}-\alpha a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{14}a_{34}+\beta\gamma a_{15}a_{35}+\alpha\gamma a_{16}a_{36}-\gamma a_{17}a_{37} \\ -\beta a_{21}a_{31}-\alpha a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{24}a_{34}+\beta\gamma a_{25}a_{35}+\alpha\gamma a_{26}a_{36}-\gamma a_{27}a_{37} \\ -\beta a_{31}a_{31}-\alpha a_{32}a_{32}+a_{33}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{34}a_{34}+\beta\gamma a_{35}a_{35}+\alpha\gamma a_{36}a_{36}-\gamma a_{37}a_{37} \\ \hline -\beta a_{41}a_{31}-\alpha a_{42}a_{32}+a_{43}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{44}a_{34}+\beta\gamma a_{45}a_{35}+\alpha\gamma a_{46}a_{36}-\gamma a_{47}a_{37} \\ -\beta a_{51}a_{31}-\alpha a_{52}a_{32}+a_{53}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{54}a_{34}+\beta\gamma a_{55}a_{35}+\alpha\gamma a_{56}a_{36}-\gamma a_{57}a_{37} \\ -\beta a_{61}a_{31}-\alpha a_{62}a_{32}+a_{63}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{64}a_{34}+\beta\gamma a_{65}a_{35}+\alpha\gamma a_{66}a_{36}-\gamma a_{67}a_{37} \\ -\beta a_{71}a_{31}-\alpha a_{72}a_{32}+a_{73}a_{33}-\alpha\beta\gamma a_{74}a_{34}+\beta\gamma a_{75}a_{35}+\alpha\gamma a_{76}a_{36}-\gamma a_{77}a_{37} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
& \alpha\gamma a_{11}a_{41} + \beta\gamma a_{12}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{13}a_{43} + a_{14}a_{44} - \alpha a_{15}a_{45} - \beta a_{16}a_{46} + \alpha\beta a_{17}a_{47} \\
& \alpha\gamma a_{21}a_{41} + \beta\gamma a_{22}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{23}a_{43} + a_{24}a_{44} - \alpha a_{25}a_{45} - \beta a_{26}a_{46} + \alpha\beta a_{27}a_{47} \\
& \alpha\gamma a_{31}a_{41} + \beta\gamma a_{32}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} - \alpha a_{35}a_{45} - \beta a_{36}a_{46} + \alpha\beta a_{37}a_{47} \\
\hline
& \alpha\gamma a_{41}a_{41} + \beta\gamma a_{42}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{43}a_{43} + a_{44}a_{44} - \alpha a_{45}a_{45} - \beta a_{46}a_{46} + \alpha\beta a_{47}a_{47} \\
& \alpha\gamma a_{51}a_{41} + \beta\gamma a_{52}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{53}a_{43} + a_{54}a_{44} - \alpha a_{55}a_{45} - \beta a_{56}a_{46} + \alpha\beta a_{57}a_{47} \\
& \alpha\gamma a_{61}a_{41} + \beta\gamma a_{62}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{63}a_{43} + a_{64}a_{44} - \alpha a_{65}a_{45} - \beta a_{66}a_{46} + \alpha\beta a_{67}a_{47} \\
& \alpha\gamma a_{71}a_{41} + \beta\gamma a_{72}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{73}a_{43} + a_{74}a_{44} - \alpha a_{75}a_{45} - \beta a_{76}a_{46} + \alpha\beta a_{77}a_{47} \\
\hline
& -\gamma a_{11}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{12}a_{52} + \beta\gamma a_{13}a_{53} - \alpha a_{14}a_{54} + a_{15}a_{55} + \alpha\beta a_{16}a_{56} - \beta a_{17}a_{57} \\
& -\gamma a_{21}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{22}a_{52} + \beta\gamma a_{23}a_{53} - \alpha a_{24}a_{54} + a_{25}a_{55} + \alpha\beta a_{26}a_{56} - \beta a_{27}a_{57} \\
& -\gamma a_{31}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{32}a_{52} + \beta\gamma a_{33}a_{53} - \alpha a_{34}a_{54} + a_{35}a_{55} + \alpha\beta a_{36}a_{56} - \beta a_{37}a_{57} \\
\hline
& -\gamma a_{41}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{42}a_{52} + \beta\gamma a_{43}a_{53} - \alpha a_{44}a_{54} + a_{45}a_{55} + \alpha\beta a_{46}a_{56} - \beta a_{47}a_{57} \\
& -\gamma a_{51}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{52}a_{52} + \beta\gamma a_{53}a_{53} - \alpha a_{54}a_{54} + a_{55}a_{55} + \alpha\beta a_{56}a_{56} - \beta a_{57}a_{57} \\
& -\gamma a_{61}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{62}a_{52} + \beta\gamma a_{63}a_{53} - \alpha a_{64}a_{54} + a_{65}a_{55} + \alpha\beta a_{66}a_{56} - \beta a_{67}a_{57} \\
& -\gamma a_{71}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{72}a_{52} + \beta\gamma a_{73}a_{53} - \alpha a_{74}a_{54} + a_{75}a_{55} + \alpha\beta a_{76}a_{56} - \beta a_{77}a_{57} \\
\hline
& -\alpha\beta\gamma a_{11}a_{61} - \gamma a_{12}a_{62} + \alpha\gamma a_{13}a_{63} - \beta a_{14}a_{64} + \alpha\beta a_{15}a_{65} + a_{16}a_{66} - \alpha a_{17}a_{67} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{21}a_{61} - \gamma a_{22}a_{62} + \alpha\gamma a_{23}a_{63} - \beta a_{24}a_{64} + \alpha\beta a_{25}a_{65} + a_{26}a_{66} - \alpha a_{27}a_{67} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{31}a_{61} - \gamma a_{32}a_{62} + \alpha\gamma a_{33}a_{63} - \beta a_{34}a_{64} + \alpha\beta a_{35}a_{65} + a_{36}a_{66} - \alpha a_{37}a_{67} \\
\hline
& -\alpha\beta\gamma a_{41}a_{61} - \gamma a_{42}a_{62} + \alpha\gamma a_{43}a_{63} - \beta a_{44}a_{64} + \alpha\beta a_{45}a_{65} + a_{46}a_{66} - \alpha a_{47}a_{67} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{51}a_{61} - \gamma a_{52}a_{62} + \alpha\gamma a_{53}a_{63} - \beta a_{54}a_{64} + \alpha\beta a_{55}a_{65} + a_{56}a_{66} - \alpha a_{57}a_{67} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{61}a_{61} - \gamma a_{62}a_{62} + \alpha\gamma a_{63}a_{63} - \beta a_{64}a_{64} + \alpha\beta a_{65}a_{65} + a_{66}a_{66} - \alpha a_{67}a_{67} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{71}a_{61} - \gamma a_{72}a_{62} + \alpha\gamma a_{73}a_{63} - \beta a_{74}a_{64} + \alpha\beta a_{75}a_{65} + a_{76}a_{66} - \alpha a_{77}a_{67} \\
\hline
& \beta\gamma a_{11}a_{71} + \alpha\gamma a_{12}a_{72} - \gamma a_{13}a_{73} + \alpha\beta a_{14}a_{74} - \beta a_{15}a_{75} - \alpha a_{16}a_{76} + a_{17}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{21}a_{71} + \alpha\gamma a_{22}a_{72} - \gamma a_{23}a_{73} + \alpha\beta a_{24}a_{74} - \beta a_{25}a_{75} - \alpha a_{26}a_{76} + a_{27}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{31}a_{71} + \alpha\gamma a_{32}a_{72} - \gamma a_{33}a_{73} + \alpha\beta a_{34}a_{74} - \beta a_{35}a_{75} - \alpha a_{36}a_{76} + a_{37}a_{77} \\
\hline
& \beta\gamma a_{41}a_{71} + \alpha\gamma a_{42}a_{72} - \gamma a_{43}a_{73} + \alpha\beta a_{44}a_{74} - \beta a_{45}a_{75} - \alpha a_{46}a_{76} + a_{47}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{51}a_{71} + \alpha\gamma a_{52}a_{72} - \gamma a_{53}a_{73} + \alpha\beta a_{54}a_{74} - \beta a_{55}a_{75} - \alpha a_{56}a_{76} + a_{57}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{61}a_{71} + \alpha\gamma a_{62}a_{72} - \gamma a_{63}a_{73} + \alpha\beta a_{64}a_{74} - \beta a_{65}a_{75} - \alpha a_{66}a_{76} + a_{67}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{71}a_{71} + \alpha\gamma a_{72}a_{72} - \gamma a_{73}a_{73} + \alpha\beta a_{74}a_{74} - \beta a_{75}a_{75} - \alpha a_{76}a_{76} + a_{77}a_{77}
\end{aligned}$$

равным I .

Условиям преобразований вращения можно придать запись отличную от этой формы по столбцам матрицы $\bar{A}A$:

$$\begin{aligned}
& a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{21}a_{21} - \beta a_{31}a_{31} + \alpha\gamma a_{41}a_{41} - \gamma a_{51}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{61}a_{61} + \beta\gamma a_{71}a_{71} \\
& \alpha\beta a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} - \alpha a_{32}a_{31} + \beta\gamma a_{42}a_{41} - \alpha\beta\gamma a_{52}a_{51} - \gamma a_{62}a_{61} + \alpha\gamma a_{72}a_{71} \\
& -\beta a_{13}a_{11} - \alpha a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} - \alpha\beta\gamma a_{43}a_{41} + \beta\gamma a_{53}a_{51} + \alpha\gamma a_{63}a_{61} - \gamma a_{73}a_{71} \\
\hline
& \alpha\gamma a_{14}a_{11} + \beta\gamma a_{24}a_{21} - \alpha\beta\gamma a_{34}a_{31} + a_{44}a_{41} - \alpha\gamma a_{54}a_{51} - \beta a_{64}a_{61} + \alpha\beta a_{74}a_{71} \\
& -\gamma a_{15}a_{11} - \alpha\beta\gamma a_{25}a_{21} + \beta\gamma a_{35}a_{31} - \alpha a_{45}a_{41} + a_{55}a_{51} + \alpha\beta a_{65}a_{61} - \beta a_{75}a_{71} \\
& -\alpha\beta\gamma a_{16}a_{11} - \gamma a_{26}a_{21} + \alpha\gamma a_{36}a_{31} - \beta a_{46}a_{41} + \alpha\beta a_{56}a_{51} + a_{66}a_{61} - \alpha a_{76}a_{71} \\
& \beta\gamma a_{17}a_{11} + \alpha\gamma a_{27}a_{21} - \gamma a_{37}a_{31} + \alpha\beta a_{47}a_{41} - \beta a_{57}a_{51} - \alpha a_{67}a_{61} + a_{77}a_{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{11}a_{17} + \alpha\beta a_{21}a_{27} - \beta a_{31}a_{37} + \alpha\gamma a_{41}a_{47} - \gamma a_{51}a_{57} - \alpha\beta\gamma a_{61}a_{67} + \beta\gamma a_{71}a_{77} \\
& \alpha\beta a_{12}a_{17} + a_{22}a_{27} - \alpha a_{32}a_{37} + \beta\gamma a_{42}a_{47} - \alpha\beta\gamma a_{52}a_{57} - \gamma a_{62}a_{67} + \alpha\gamma a_{72}a_{77} \\
& - \beta a_{13}a_{17} - \alpha a_{23}a_{27} + a_{33}a_{37} - \alpha\beta\gamma a_{43}a_{47} + \beta\gamma a_{53}a_{57} + \alpha\gamma a_{63}a_{67} - \gamma a_{73}a_{77} \\
& \alpha\gamma a_{14}a_{17} + \beta\gamma a_{24}a_{27} - \alpha\beta\gamma a_{34}a_{37} + a_{44}a_{47} - \alpha\gamma a_{54}a_{57} - \beta a_{64}a_{67} + \alpha\beta a_{74}a_{77} \\
& - \gamma a_{15}a_{17} - \alpha\beta\gamma a_{25}a_{27} + \beta\gamma a_{35}a_{37} - \alpha a_{45}a_{47} + a_{55}a_{57} + \alpha\beta a_{65}a_{67} - \beta a_{75}a_{77} \\
& - \alpha\beta\gamma a_{16}a_{17} - \gamma a_{26}a_{27} + \alpha\gamma a_{36}a_{37} - \beta a_{46}a_{47} + \alpha\beta a_{56}a_{57} + a_{66}a_{67} - \alpha a_{76}a_{77} \\
& \beta\gamma a_{17}a_{17} + \alpha\gamma a_{27}a_{27} - \gamma a_{37}a_{37} + \alpha\beta a_{47}a_{47} - \beta a_{57}a_{57} - \alpha a_{67}a_{67} + a_{77}a_{77}
\end{aligned}$$

также равную I.

Эта система равенств равносильна предыдущим равенствам.

Группа преобразований вращения имеет инвариант двух точек. Таковым является, например, функция двух точек $M_1(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^7)$, $M_2(x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^7)$

$$\begin{aligned}
\rho^2(M_1, M_2) = & -\alpha(x_2^1 - x_1^1)^2 - \beta(x_2^2 - x_1^2)^2 + \alpha\beta(x_2^3 - x_1^3)^2 - \gamma(x_2^4 - x_1^4)^2 + \\
& + \alpha\gamma(x_2^5 - x_1^5)^2 + \beta\gamma(x_2^6 - x_1^6)^2 - \alpha\beta\gamma(x_2^7 - x_1^7)^2.
\end{aligned}$$

Инвариантность этой функции может быть установлена при помощи простых выкладок. Именно, пусть $M_1'(x_1'^1, x_1'^2, \dots, x_1'^7)$ и $M_2'(x_2'^1, x_2'^2, \dots, x_2'^7)$ — две точки, полученные преобразованием вращения из точек $M_1(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^7)$ и $M_2(x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^7)$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
\rho^2(M_1', M_2') = & -\alpha(x_2'^1 - x_1'^1)^2 - \beta(x_2'^2 - x_1'^2)^2 + \alpha\beta(x_2'^3 - x_1'^3)^2 - \gamma(x_2'^4 - x_1'^4)^2 + \\
& + \alpha\gamma(x_2'^5 - x_1'^5)^2 + \beta\gamma(x_2'^6 - x_1'^6)^2 - \alpha\beta\gamma(x_2'^7 - x_1'^7)^2 = -\alpha(a_{11}(x_2^1 - x_1^1) + \\
& + a_{12}(x_2^2 - x_1^2) + a_{13}(x_2^3 - x_1^3) + a_{14}(x_2^4 - x_1^4) + a_{15}(x_2^5 - x_1^5) + a_{16}(x_2^6 - x_1^6) + a_{17}(x_2^7 - x_1^7))^2 - \\
& - \beta(a_{21}(x_2^1 - x_1^1) + a_{22}(x_2^2 - x_1^2) + a_{23}(x_2^3 - x_1^3) + a_{24}(x_2^4 - x_1^4) + a_{25}(x_2^5 - x_1^5) + \\
& + a_{26}(x_2^6 - x_1^6) + a_{27}(x_2^7 - x_1^7))^2 + \alpha\beta(a_{31}(x_2^1 - x_1^1) + a_{32}(x_2^2 - x_1^2) + a_{33}(x_2^3 - x_1^3) + \\
& + a_{34}(x_2^4 - x_1^4) + a_{35}(x_2^5 - x_1^5) + a_{36}(x_2^6 - x_1^6) + a_{37}(x_2^7 - x_1^7))^2 - \gamma(a_{41}(x_2^1 - x_1^1) + \\
& + a_{42}(x_2^2 - x_1^2) + a_{43}(x_2^3 - x_1^3) + a_{44}(x_2^4 - x_1^4) + a_{45}(x_2^5 - x_1^5) + a_{46}(x_2^6 - x_1^6) + a_{47}(x_2^7 - x_1^7))^2 + \\
& + \alpha\gamma(a_{51}(x_2^1 - x_1^1) + a_{52}(x_2^2 - x_1^2) + a_{53}(x_2^3 - x_1^3) + a_{54}(x_2^4 - x_1^4) + a_{55}(x_2^5 - x_1^5) + \\
& + a_{56}(x_2^6 - x_1^6) + a_{57}(x_2^7 - x_1^7))^2 + \beta\gamma(a_{61}(x_2^1 - x_1^1) + a_{62}(x_2^2 - x_1^2) + a_{63}(x_2^3 - x_1^3) + \\
& + a_{64}(x_2^4 - x_1^4) + a_{65}(x_2^5 - x_1^5) + a_{66}(x_2^6 - x_1^6) + a_{67}(x_2^7 - x_1^7))^2 - \alpha\beta\gamma(a_{71}(x_2^1 - x_1^1) + \\
& + a_{72}(x_2^2 - x_1^2) + a_{73}(x_2^3 - x_1^3) + a_{74}(x_2^4 - x_1^4) + a_{75}(x_2^5 - x_1^5) + a_{76}(x_2^6 - x_1^6) + a_{77}(x_2^7 - x_1^7))^2 = \\
& = -\alpha(a_{11}a_{11}(x_2^1 - x_1^1)^2 + a_{12}a_{12}(x_2^2 - x_1^2)^2 + a_{13}a_{13}(x_2^3 - x_1^3)^2 + a_{14}a_{14}(x_2^4 - x_1^4)^2 + \\
& + a_{15}a_{15}(x_2^5 - x_1^5)^2 + a_{16}a_{16}(x_2^6 - x_1^6)^2 + a_{17}a_{17}(x_2^7 - x_1^7)^2 + \\
& + 2(a_{11}a_{12}(x_2^1 - x_1^1)(x_2^2 - x_1^2) + a_{12}a_{13}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^3 - x_1^3) + a_{13}a_{11}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^1 - x_1^1) + \\
& + a_{22}a_{24}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^4 - x_1^4) + a_{24}a_{26}(x_2^4 - x_1^4)(x_2^6 - x_1^6) + a_{26}a_{22}(x_2^6 - x_1^6)(x_2^2 - x_1^2) + \\
& + a_{33}a_{36}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^6 - x_1^6) + a_{36}a_{35}(x_2^6 - x_1^6)(x_2^5 - x_1^5) + a_{35}a_{33}(x_2^5 - x_1^5)(x_2^3 - x_1^3) + \\
& + a_{44}a_{45}(x_2^4 - x_1^4)(x_2^5 - x_1^5) + a_{45}a_{41}(x_2^5 - x_1^5)(x_2^1 - x_1^1) + a_{41}a_{44}(x_2^1 - x_1^1)(x_2^4 - x_1^4) + \\
& + a_{55}a_{57}(x_2^5 - x_1^5)(x_2^7 - x_1^7) + a_{57}a_{52}(x_2^7 - x_1^7)(x_2^2 - x_1^2) + a_{52}a_{55}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^5 - x_1^5) + \\
& + a_{66}a_{61}(x_2^6 - x_1^6)(x_2^1 - x_1^1) + a_{61}a_{67}(x_2^7 - x_1^7)(x_2^7 - x_1^7) + a_{67}a_{66}(x_2^7 - x_1^7)(x_2^6 - x_1^6) + \\
& + a_{77}a_{73}(x_2^7 - x_1^7)(x_2^3 - x_1^3) + a_{73}a_{74}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^4 - x_1^4) + a_{74}a_{77}(x_2^4 - x_1^4)(x_2^7 - x_1^7))) - \\
& - \beta(a_{21}a_{21}(x_2^1 - x_1^1)^2 + a_{22}a_{22}(x_2^2 - x_1^2)^2 + a_{23}a_{23}(x_2^3 - x_1^3)^2 + a_{24}a_{24}(x_2^4 - x_1^4)^2 + \\
& + a_{25}a_{25}(x_2^5 - x_1^5)^2 + a_{26}a_{26}(x_2^6 - x_1^6)^2 + a_{27}a_{27}(x_2^7 - x_1^7)^2 + \\
& + 2(a_{21}a_{22}(x_2^1 - x_1^1)(x_2^2 - x_1^2) + a_{22}a_{23}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^3 - x_1^3) + a_{23}a_{21}(x_2^3 - x_1^3)(x_2^1 - x_1^1) + \\
& + a_{42}a_{44}(x_2^2 - x_1^2)(x_2^4 - x_1^4) + a_{44}a_{46}(x_2^4 - x_1^4)(x_2^6 - x_1^6) + a_{46}a_{42}(x_2^6 - x_1^6)(x_2^2 - x_1^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_{63}a_{66}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{66}a_{65}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{65}a_{63}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{54}a_{55}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{55}a_{51}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{51}a_{54}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{75}a_{77}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{77}a_{72}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{72}a_{75}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{16}a_{11}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{11}a_{17}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{17}a_{16}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{37}a_{33}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{33}a_{34}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{34}a_{37}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7))) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha\beta(a_{31}a_{31}(x_2^1-x_1^1)^2+a_{32}a_{32}(x_2^2-x_1^2)^2+a_{33}a_{33}(x_2^3-x_1^3)^2+a_{34}a_{34}(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +a_{35}a_{35}(x_2^5-x_1^5)^2+a_{36}a_{36}(x_2^6-x_1^6)^2+a_{37}a_{37}(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& +2(a_{31}a_{32}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{32}a_{33}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{33}a_{31}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& +a_{62}a_{64}(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+a_{64}a_{66}(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+a_{66}a_{62}(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +a_{53}a_{56}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{56}a_{55}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{55}a_{53}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{14}a_{15}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{15}a_{11}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{11}a_{14}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{25}a_{27}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{27}a_{22}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{22}a_{25}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{76}a_{71}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{71}a_{77}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{77}a_{76}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{47}a_{43}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{43}a_{74}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{44}a_{47}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7))) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma(a_{41}a_{41}(x_2^1-x_1^1)^2+a_{42}a_{42}(x_2^2-x_1^2)^2+a_{43}a_{43}(x_2^3-x_1^3)^2+a_{44}a_{44}(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +a_{45}a_{45}(x_2^5-x_1^5)^2+a_{46}a_{46}(x_2^6-x_1^6)^2+a_{47}a_{47}(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& +2(a_{41}a_{42}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{42}a_{43}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{43}a_{41}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& +a_{52}a_{54}(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+a_{54}a_{56}(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+a_{56}a_{52}(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +a_{13}a_{16}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{16}a_{15}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{15}a_{13}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{74}a_{75}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{75}a_{71}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{71}a_{74}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{35}a_{37}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{37}a_{32}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{32}a_{35}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{26}a_{21}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{21}a_{27}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{27}a_{26}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{67}a_{63}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{63}a_{64}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{64}a_{67}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7))) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha\beta(a_{51}a_{51}(x_2^1-x_1^1)^2+a_{52}a_{52}(x_2^2-x_1^2)^2+a_{53}a_{53}(x_2^3-x_1^3)^2+a_{54}a_{54}(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +a_{55}a_{55}(x_2^5-x_1^5)^2+a_{56}a_{56}(x_2^6-x_1^6)^2+a_{57}a_{57}(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& +2(a_{51}a_{52}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{52}a_{53}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{53}a_{51}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& +a_{72}a_{74}(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+a_{74}a_{76}(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+a_{76}a_{72}(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +a_{23}a_{26}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{26}a_{25}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{25}a_{23}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{34}a_{35}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{35}a_{31}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{31}a_{34}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{65}a_{67}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{67}a_{62}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{62}a_{65}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{46}a_{41}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{41}a_{47}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{47}a_{46}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{17}a_{13}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{13}a_{14}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{14}a_{17}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7))) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta\gamma(a_{61}a_{61}(x_2^1-x_1^1)^2+a_{62}a_{62}(x_2^2-x_1^2)^2+a_{63}a_{63}(x_2^3-x_1^3)^2+a_{64}a_{64}(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +a_{65}a_{65}(x_2^5-x_1^5)^2+a_{66}a_{66}(x_2^6-x_1^6)^2+a_{67}a_{67}(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& +2(a_{61}a_{62}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{62}a_{63}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{63}a_{61}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& +a_{12}a_{14}(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+a_{14}a_{16}(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+a_{16}a_{12}(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +a_{73}a_{76}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{76}a_{75}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{75}a_{73}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{24}a_{25}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{25}a_{21}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{21}a_{24}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{45}a_{47}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{47}a_{42}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{42}a_{45}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{36}a_{31}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{31}a_{37}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{37}a_{36}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{57}a_{53}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{53}a_{54}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{54}a_{57}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7))) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha\beta\gamma(a_{71}a_{71}(x_2^1-x_1^1)^2+a_{72}a_{72}(x_2^2-x_1^2)^2+a_{73}a_{73}(x_2^3-x_1^3)^2+a_{74}a_{74}(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +a_{75}a_{75}(x_2^5-x_1^5)^2+a_{76}a_{76}(x_2^6-x_1^6)^2+a_{77}a_{77}(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& +2(a_{71}a_{72}(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+a_{72}a_{73}(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+a_{73}a_{71}(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& +a_{32}a_{34}(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+a_{34}a_{36}(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+a_{36}a_{32}(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& +a_{43}a_{46}(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+a_{46}a_{45}(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+a_{45}a_{43}(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& +a_{64}a_{65}(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+a_{65}a_{61}(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+a_{61}a_{64}(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& +a_{15}a_{17}(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+a_{17}a_{12}(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+a_{12}a_{15}(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& +a_{56}a_{51}(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+a_{51}a_{57}(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+a_{57}a_{56}(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& +a_{27}a_{23}(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+a_{23}a_{24}(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+a_{24}a_{27}(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7)))=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = (-\alpha a_{11}a_{11}-\beta a_{21}a_{21}+\alpha\beta a_{31}a_{31}-\gamma a_{41}a_{41}+\alpha\gamma a_{51}a_{51}+\beta\gamma a_{61}a_{61}-\alpha\beta\gamma a_{71}a_{71})(x_2^1-x_1^1)^2+ \\
& + (-\alpha a_{12}a_{12}-\beta a_{22}a_{22}+\alpha\beta a_{32}a_{32}-\gamma a_{42}a_{42}+\alpha\gamma a_{52}a_{52}+\beta\gamma a_{62}a_{62}-\alpha\beta\gamma a_{72}a_{72})(x_2^2-x_1^2)^2+ \\
& + (-\alpha a_{13}a_{13}-\beta a_{23}a_{23}+\alpha\beta a_{33}a_{33}-\gamma a_{43}a_{43}+\alpha\gamma a_{53}a_{53}+\beta\gamma a_{63}a_{63}-\alpha\beta\gamma a_{73}a_{73})(x_2^3-x_1^3)^2+ \\
& + (-\alpha a_{14}a_{14}-\beta a_{24}a_{24}+\alpha\beta a_{34}a_{34}-\gamma a_{44}a_{44}+\alpha\gamma a_{54}a_{54}+\beta\gamma a_{64}a_{64}-\alpha\beta\gamma a_{74}a_{74})(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& + (-\alpha a_{15}a_{15}-\beta a_{25}a_{25}+\alpha\beta a_{35}a_{35}-\gamma a_{45}a_{45}+\alpha\gamma a_{55}a_{55}+\beta\gamma a_{65}a_{65}-\alpha\beta\gamma a_{75}a_{75})(x_2^5-x_1^5)^2+ \\
& + (-\alpha a_{16}a_{16}-\beta a_{26}a_{26}+\alpha\beta a_{36}a_{36}-\gamma a_{46}a_{46}+\alpha\gamma a_{56}a_{56}+\beta\gamma a_{66}a_{66}-\alpha\beta\gamma a_{76}a_{76})(x_2^6-x_1^6)^2+ \\
& + (-\alpha a_{17}a_{17}-\beta a_{27}a_{27}+\alpha\beta a_{37}a_{37}-\gamma a_{47}a_{47}+\alpha\gamma a_{57}a_{57}+\beta\gamma a_{67}a_{67}-\alpha\beta\gamma a_{77}a_{77})(x_2^7-x_1^7)^2+ \\
& + 2((-\alpha a_{11}a_{12}-\beta a_{21}a_{22}+\alpha\beta a_{31}a_{32}-\gamma a_{41}a_{42}+\alpha\gamma a_{51}a_{52}+\beta\gamma a_{61}a_{62}-\alpha\beta\gamma a_{71}a_{72})(x_2^1-x_1^1)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& + (-\alpha a_{12}a_{14}-\beta a_{22}a_{24}+\alpha\beta a_{32}a_{34}-\gamma a_{42}a_{44}+\alpha\gamma a_{52}a_{54}+\beta\gamma a_{62}a_{64}-\alpha\beta\gamma a_{72}a_{74})(x_2^2-x_1^2)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& + (-\alpha a_{13}a_{16}-\beta a_{23}a_{26}+\alpha\beta a_{33}a_{36}-\gamma a_{43}a_{46}+\alpha\gamma a_{53}a_{56}+\beta\gamma a_{63}a_{66}-\alpha\beta\gamma a_{73}a_{76})(x_2^3-x_1^3)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& + (-\alpha a_{14}a_{15}-\beta a_{24}a_{25}+\alpha\beta a_{34}a_{35}-\gamma a_{44}a_{45}+\alpha\gamma a_{54}a_{55}+\beta\gamma a_{64}a_{65}-\alpha\beta\gamma a_{74}a_{75})(x_2^4-x_1^4)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& + (-\alpha a_{15}a_{17}-\beta a_{25}a_{27}+\alpha\beta a_{35}a_{37}-\gamma a_{45}a_{47}+\alpha\gamma a_{55}a_{57}+\beta\gamma a_{65}a_{67}-\alpha\beta\gamma a_{75}a_{77})(x_2^5-x_1^5)(x_2^7-x_1^7)+ \\
& + (-\alpha a_{16}a_{11}-\beta a_{26}a_{21}+\alpha\beta a_{36}a_{31}-\gamma a_{46}a_{41}+\alpha\gamma a_{56}a_{51}+\beta\gamma a_{66}a_{61}-\alpha\beta\gamma a_{76}a_{71})(x_2^6-x_1^6)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& + (-\alpha a_{17}a_{13}-\beta a_{27}a_{23}+\alpha\beta a_{37}a_{33}-\gamma a_{47}a_{43}+\alpha\gamma a_{57}a_{53}+\beta\gamma a_{67}a_{63}-\alpha\beta\gamma a_{77}a_{73})(x_2^7-x_1^7)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& + 2((-\alpha a_{12}a_{13}-\beta a_{22}a_{23}+\alpha\beta a_{32}a_{33}-\gamma a_{42}a_{43}+\alpha\gamma a_{52}a_{53}+\beta\gamma a_{62}a_{63}-\alpha\beta\gamma a_{72}a_{73})(x_2^2-x_1^2)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& + (-\alpha a_{14}a_{16}-\beta a_{24}a_{26}+\alpha\beta a_{34}a_{36}-\gamma a_{44}a_{46}+\alpha\gamma a_{54}a_{56}+\beta\gamma a_{64}a_{66}-\alpha\beta\gamma a_{74}a_{76})(x_2^4-x_1^4)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& + (-\alpha a_{16}a_{15}-\beta a_{26}a_{25}+\alpha\beta a_{36}a_{35}-\gamma a_{46}a_{45}+\alpha\gamma a_{56}a_{55}+\beta\gamma a_{66}a_{65}-\alpha\beta\gamma a_{76}a_{75})(x_2^6-x_1^6)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& + (-\alpha a_{15}a_{11}-\beta a_{25}a_{21}+\alpha\beta a_{35}a_{31}-\gamma a_{45}a_{41}+\alpha\gamma a_{55}a_{51}+\beta\gamma a_{65}a_{61}-\alpha\beta\gamma a_{75}a_{71})(x_2^5-x_1^5)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& + (-\alpha a_{17}a_{12}-\beta a_{27}a_{22}+\alpha\beta a_{37}a_{32}-\gamma a_{47}a_{42}+\alpha\gamma a_{57}a_{52}+\beta\gamma a_{67}a_{62}-\alpha\beta\gamma a_{77}a_{72})(x_2^7-x_1^7)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& + (-\alpha a_{11}a_{17}-\beta a_{21}a_{27}+\alpha\beta a_{31}a_{37}-\gamma a_{41}a_{47}+\alpha\gamma a_{51}a_{57}+\beta\gamma a_{61}a_{67}-\alpha\beta\gamma a_{71}a_{77})(x_2^1-x_1^1)(x_2^7-x_1^7)+ \\
& + (-\alpha a_{13}a_{14}-\beta a_{23}a_{24}+\alpha\beta a_{33}a_{34}-\gamma a_{43}a_{44}+\alpha\gamma a_{53}a_{54}+\beta\gamma a_{63}a_{64}-\alpha\beta\gamma a_{73}a_{74})(x_2^3-x_1^3)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& + 2((-\alpha a_{13}a_{11}-\beta a_{23}a_{21}+\alpha\beta a_{33}a_{31}-\gamma a_{43}a_{41}+\alpha\gamma a_{53}a_{51}+\beta\gamma a_{63}a_{61}-\alpha\beta\gamma a_{73}a_{71})(x_2^3-x_1^3)(x_2^1-x_1^1)+ \\
& + (-\alpha a_{16}a_{12}-\beta a_{26}a_{22}+\alpha\beta a_{36}a_{32}-\gamma a_{46}a_{42}+\alpha\gamma a_{56}a_{52}+\beta\gamma a_{66}a_{62}-\alpha\beta\gamma a_{76}a_{72})(x_2^6-x_1^6)(x_2^2-x_1^2)+ \\
& + (-\alpha a_{15}a_{13}-\beta a_{25}a_{23}+\alpha\beta a_{35}a_{33}-\gamma a_{45}a_{43}+\alpha\gamma a_{55}a_{53}+\beta\gamma a_{65}a_{63}-\alpha\beta\gamma a_{75}a_{73})(x_2^5-x_1^5)(x_2^3-x_1^3)+ \\
& + (-\alpha a_{11}a_{14}-\beta a_{21}a_{24}+\alpha\beta a_{31}a_{34}-\gamma a_{41}a_{44}+\alpha\gamma a_{51}a_{54}+\beta\gamma a_{61}a_{64}-\alpha\beta\gamma a_{71}a_{74})(x_2^1-x_1^1)(x_2^4-x_1^4)+ \\
& + (-\alpha a_{12}a_{15}-\beta a_{22}a_{25}+\alpha\beta a_{32}a_{35}-\gamma a_{42}a_{45}+\alpha\gamma a_{52}a_{55}+\beta\gamma a_{62}a_{65}-\alpha\beta\gamma a_{72}a_{75})(x_2^2-x_1^2)(x_2^5-x_1^5)+ \\
& + (-\alpha a_{17}a_{16}-\beta a_{27}a_{26}+\alpha\beta a_{37}a_{36}-\gamma a_{47}a_{46}+\alpha\gamma a_{57}a_{56}+\beta\gamma a_{67}a_{66}-\alpha\beta\gamma a_{77}a_{76})(x_2^7-x_1^7)(x_2^6-x_1^6)+ \\
& + (-\alpha a_{14}a_{17}-\beta a_{24}a_{27}+\alpha\beta a_{34}a_{37}-\gamma a_{44}a_{47}+\alpha\gamma a_{54}a_{57}+\beta\gamma a_{64}a_{67}-\alpha\beta\gamma a_{74}a_{77})(x_2^4-x_1^4)(x_2^7-x_1^7)).
\end{aligned}$$

Отсюда вследствие полученных выше соотношений имеем:

$$\begin{aligned}
\rho^2(M_1', M_2') &= -\alpha(x_2^1-x_1^1)^2-\beta(x_2^2-x_1^2)^2+\alpha\beta(x_2^3-x_1^3)^2-\gamma(x_2^4-x_1^4)^2+ \\
& +\alpha\gamma(x_2^5-x_1^5)^2+\beta\gamma(x_2^6-x_1^6)^2-\alpha\beta\gamma(x_2^7-x_1^7)^2=\rho^2(M_1, M_2).
\end{aligned}$$

В геометрии группы преобразований вращения величина $\rho^2(M_1, M_2)$ является квадратом интервала между точками M_1 и M_2 . Он представляет

собой основной инвариант этой геометрии, так как все остальные инварианты могут быть выражены через квадрат интервала.

Геометрии собственноортогональной группы [6] (семимерной собственно-евклидовой геометрии) соответствуют значения $\alpha, \beta, \gamma = -1$. Геометрии псевдоортогональной группы (семимерной псевдоевклидовой геометрии индекса четыре) одной, двум или трем величинам α, β, γ соответствуют значения равные 1.

Представление группы преобразований вращения семимерного псевдоевклидового пространства индекса четыре

Преобразование $X' = AX$ назовем представлением преобразования вращения, если его матрица

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \hline a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{array} \right\|$$

комплексна и удовлетворяет условию

$$A \bar{A} = \bar{A} A = I,$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^*G,$$

индекс $*$ – операцию эрмитового сопряжения, а G -метрический тензор

$$G = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \end{array} \right\|,$$

причем $\beta = \pm 1$, так что $G = G^*$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = GA^*G = \left\| \begin{array}{cc|ccccc} \bar{a}_{11} & -\beta \bar{a}_{21} & -\beta \bar{a}_{31} & \bar{a}_{41} & \bar{a}_{51} & -\beta \bar{a}_{61} \\ -\beta \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} & -\beta \bar{a}_{42} & -\beta \bar{a}_{52} & \bar{a}_{62} \\ \hline -\beta \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} & -\beta \bar{a}_{43} & -\beta \bar{a}_{53} & \bar{a}_{63} \\ \bar{a}_{14} & -\beta \bar{a}_{24} & -\beta \bar{a}_{34} & \bar{a}_{44} & \bar{a}_{54} & -\beta \bar{a}_{64} \\ \bar{a}_{15} & -\beta \bar{a}_{25} & -\beta \bar{a}_{35} & \bar{a}_{45} & \bar{a}_{55} & -\beta \bar{a}_{65} \\ -\beta \bar{a}_{16} & \bar{a}_{26} & \bar{a}_{36} & -\beta \bar{a}_{46} & -\beta \bar{a}_{56} & \bar{a}_{66} \end{array} \right\|,$$

причем $\beta = 1$ соответствует псевдоевклидовому пространству.

Очевидно, что

$$\bar{A} \bar{B} = G(AB)^*G = G(B^*A^*)G = (GB^*G)(GA^*G) = \bar{B} \bar{A},$$

и

$$\bar{\bar{A}} = \overline{GA*G} = G(GA*G)*G = GGAGG = A.$$

Докажем, что совокупность преобразований вращения обладает групповыми свойствами.

1. Произведение двух преобразований вращения есть преобразование вращения.

Действительно, пусть даны преобразования вращения с матрицами A_1 и A_2 ; произведение их есть преобразование с матрицей $A = A_2 A_1$. На основании правил

перемножения матриц мы можем написать тождество

$$A \bar{A} = (A_2 A_1) (\bar{A}_2 \bar{A}_1) = (A_2 A_1) (\bar{A}_1 \bar{A}_2) = A_2 (A_1 \bar{A}_1) \bar{A}_2.$$

Отсюда вследствие равенства $A \bar{A} = I$ имеем:

$$A \bar{A} = A_2 I \bar{A}_2 = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2. Преобразование, обратное преобразованию вращения является преобразованием вращения.

Действительно, пусть A -матрица некоторого преобразования вращения и $B = A^{-1}$ - матрица преобразования, обратного ему. Из условия $A \bar{A} = I$ следует, что $\bar{A} = A^{-1}$. Таким образом $B = \bar{A}$. Отсюда

$$B \bar{B} = \bar{A} (\bar{\bar{A}}) = \bar{A} A = A^{-1} A = I.$$

Тем самым требуемое доказано. Таким образом, совокупность преобразований вращения есть группа.

Условие преобразований вращения, записанное в матричной форме, равносильно соотношениям по столбцам матрицы $A \bar{A}$:

$$\begin{array}{|l} a_{11} \bar{a}_{11} - \beta a_{12} \bar{a}_{12} - \beta a_{13} \bar{a}_{13} + a_{14} \bar{a}_{14} + a_{15} \bar{a}_{15} - \beta a_{16} \bar{a}_{16} \\ a_{21} \bar{a}_{11} - \beta a_{22} \bar{a}_{12} - \beta a_{23} \bar{a}_{13} + a_{24} \bar{a}_{14} + a_{25} \bar{a}_{15} - \beta a_{26} \bar{a}_{16} \\ \hline a_{31} \bar{a}_{11} - \beta a_{32} \bar{a}_{12} - \beta a_{33} \bar{a}_{13} + a_{34} \bar{a}_{14} + a_{35} \bar{a}_{15} - \beta a_{36} \bar{a}_{16} \\ a_{41} \bar{a}_{11} - \beta a_{42} \bar{a}_{12} - \beta a_{43} \bar{a}_{13} + a_{44} \bar{a}_{14} + a_{45} \bar{a}_{15} - \beta a_{46} \bar{a}_{16} \\ a_{51} \bar{a}_{11} - \beta a_{52} \bar{a}_{12} - \beta a_{53} \bar{a}_{13} + a_{54} \bar{a}_{14} + a_{55} \bar{a}_{15} - \beta a_{56} \bar{a}_{16} \\ a_{61} \bar{a}_{11} - \beta a_{62} \bar{a}_{12} - \beta a_{63} \bar{a}_{13} + a_{64} \bar{a}_{14} + a_{65} \bar{a}_{15} - \beta a_{66} \bar{a}_{16} \\ \hline -\beta a_{11} \bar{a}_{21} + a_{12} \bar{a}_{22} + a_{13} \bar{a}_{23} - \beta a_{14} \bar{a}_{24} - \beta a_{15} \bar{a}_{25} + a_{16} \bar{a}_{26} \\ -\beta a_{21} \bar{a}_{21} + a_{22} \bar{a}_{22} + a_{23} \bar{a}_{23} - \beta a_{24} \bar{a}_{24} - \beta a_{25} \bar{a}_{25} + a_{26} \bar{a}_{26} \\ \hline -\beta a_{31} \bar{a}_{21} + a_{32} \bar{a}_{22} + a_{33} \bar{a}_{23} - \beta a_{34} \bar{a}_{24} - \beta a_{35} \bar{a}_{25} + a_{36} \bar{a}_{26} \\ -\beta a_{41} \bar{a}_{21} + a_{42} \bar{a}_{22} + a_{43} \bar{a}_{23} - \beta a_{44} \bar{a}_{24} - \beta a_{45} \bar{a}_{25} + a_{46} \bar{a}_{26} \\ -\beta a_{51} \bar{a}_{21} + a_{52} \bar{a}_{22} + a_{53} \bar{a}_{23} - \beta a_{54} \bar{a}_{24} - \beta a_{55} \bar{a}_{25} + a_{56} \bar{a}_{26} \\ -\beta a_{61} \bar{a}_{21} + a_{62} \bar{a}_{22} + a_{63} \bar{a}_{23} - \beta a_{64} \bar{a}_{24} - \beta a_{65} \bar{a}_{25} + a_{66} \bar{a}_{26} \\ \hline -\beta a_{11} \bar{a}_{31} + a_{12} \bar{a}_{32} + a_{13} \bar{a}_{33} - \beta a_{14} \bar{a}_{34} - \beta a_{15} \bar{a}_{35} + a_{16} \bar{a}_{36} \\ -\beta a_{21} \bar{a}_{31} + a_{22} \bar{a}_{32} + a_{23} \bar{a}_{33} - \beta a_{24} \bar{a}_{34} - \beta a_{25} \bar{a}_{35} + a_{26} \bar{a}_{36} \\ \hline -\beta a_{31} \bar{a}_{31} + a_{32} \bar{a}_{32} + a_{33} \bar{a}_{33} - \beta a_{34} \bar{a}_{34} - \beta a_{35} \bar{a}_{35} + a_{36} \bar{a}_{36} \\ -\beta a_{41} \bar{a}_{31} + a_{42} \bar{a}_{32} + a_{43} \bar{a}_{33} - \beta a_{44} \bar{a}_{34} - \beta a_{45} \bar{a}_{35} + a_{46} \bar{a}_{36} \\ -\beta a_{51} \bar{a}_{31} + a_{52} \bar{a}_{32} + a_{53} \bar{a}_{33} - \beta a_{54} \bar{a}_{34} - \beta a_{55} \bar{a}_{35} + a_{56} \bar{a}_{36} \\ -\beta a_{61} \bar{a}_{31} + a_{62} \bar{a}_{32} + a_{63} \bar{a}_{33} - \beta a_{64} \bar{a}_{34} - \beta a_{65} \bar{a}_{35} + a_{66} \bar{a}_{36} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a_{11}\bar{a}_{41}-\beta a_{12}\bar{a}_{42}-\beta a_{13}\bar{a}_{43}+a_{14}\bar{a}_{44}+a_{15}\bar{a}_{45}-\beta a_{16}\bar{a}_{46} \\
a_{21}\bar{a}_{41}-\beta a_{22}\bar{a}_{42}-\beta a_{23}\bar{a}_{43}+a_{24}\bar{a}_{44}+a_{25}\bar{a}_{45}-\beta a_{26}\bar{a}_{46} \\
\hline
a_{31}\bar{a}_{41}-\beta a_{32}\bar{a}_{42}-\beta a_{33}\bar{a}_{43}+a_{34}\bar{a}_{44}+a_{35}\bar{a}_{45}-\beta a_{36}\bar{a}_{46} \\
a_{41}\bar{a}_{41}-\beta a_{42}\bar{a}_{42}-\beta a_{43}\bar{a}_{43}+a_{44}\bar{a}_{44}+a_{45}\bar{a}_{45}-\beta a_{46}\bar{a}_{46} \\
a_{51}\bar{a}_{41}-\beta a_{52}\bar{a}_{42}-\beta a_{53}\bar{a}_{43}+a_{54}\bar{a}_{44}+a_{55}\bar{a}_{45}-\beta a_{56}\bar{a}_{46} \\
a_{61}\bar{a}_{41}-\beta a_{62}\bar{a}_{42}-\beta a_{63}\bar{a}_{43}+a_{64}\bar{a}_{44}+a_{65}\bar{a}_{45}-\beta a_{66}\bar{a}_{46} \\
\hline
a_{11}\bar{a}_{51}-\beta a_{12}\bar{a}_{52}-\beta a_{13}\bar{a}_{53}+a_{14}\bar{a}_{54}+a_{15}\bar{a}_{55}-\beta a_{16}\bar{a}_{56} \\
a_{21}\bar{a}_{51}-\beta a_{22}\bar{a}_{52}-\beta a_{23}\bar{a}_{53}+a_{24}\bar{a}_{54}+a_{25}\bar{a}_{55}-\beta a_{26}\bar{a}_{56} \\
\hline
a_{31}\bar{a}_{51}-\beta a_{32}\bar{a}_{52}-\beta a_{33}\bar{a}_{53}+a_{34}\bar{a}_{54}+a_{35}\bar{a}_{55}-\beta a_{36}\bar{a}_{56} \\
a_{41}\bar{a}_{51}-\beta a_{42}\bar{a}_{52}-\beta a_{43}\bar{a}_{53}+a_{44}\bar{a}_{54}+a_{45}\bar{a}_{55}-\beta a_{46}\bar{a}_{56} \\
a_{51}\bar{a}_{51}-\beta a_{52}\bar{a}_{52}-\beta a_{53}\bar{a}_{53}+a_{54}\bar{a}_{54}+a_{55}\bar{a}_{55}-\beta a_{56}\bar{a}_{56} \\
a_{61}\bar{a}_{51}-\beta a_{62}\bar{a}_{52}-\beta a_{63}\bar{a}_{53}+a_{64}\bar{a}_{54}+a_{65}\bar{a}_{55}-\beta a_{66}\bar{a}_{56} \\
\hline
-\beta a_{11}\bar{a}_{61}+a_{12}\bar{a}_{62}+a_{13}\bar{a}_{63}-\beta a_{14}\bar{a}_{64}-\beta a_{15}\bar{a}_{65}+a_{16}\bar{a}_{66} \\
-\beta a_{21}\bar{a}_{61}+a_{22}\bar{a}_{62}+a_{23}\bar{a}_{63}-\beta a_{24}\bar{a}_{64}-\beta a_{25}\bar{a}_{65}+a_{26}\bar{a}_{66} \\
\hline
-\beta a_{31}\bar{a}_{61}+a_{32}\bar{a}_{62}+a_{33}\bar{a}_{63}-\beta a_{34}\bar{a}_{64}-\beta a_{35}\bar{a}_{65}+a_{36}\bar{a}_{66} \\
-\beta a_{41}\bar{a}_{61}+a_{42}\bar{a}_{62}+a_{43}\bar{a}_{63}-\beta a_{44}\bar{a}_{64}-\beta a_{45}\bar{a}_{65}+a_{46}\bar{a}_{66} \\
-\beta a_{51}\bar{a}_{61}+a_{52}\bar{a}_{62}+a_{53}\bar{a}_{63}-\beta a_{54}\bar{a}_{64}-\beta a_{55}\bar{a}_{65}+a_{56}\bar{a}_{66} \\
-\beta a_{61}\bar{a}_{61}+a_{62}\bar{a}_{62}+a_{63}\bar{a}_{63}-\beta a_{64}\bar{a}_{64}-\beta a_{65}\bar{a}_{65}+a_{66}\bar{a}_{66}
\end{array}$$

равным I .

Условиям преобразований вращения можно придать форму отличную от этой формы по столбцам матрицы $\bar{A}A$:

$$\begin{array}{l}
\bar{a}_{11}a_{11}-\beta\bar{a}_{21}a_{21}-\beta\bar{a}_{31}a_{31}+\bar{a}_{41}a_{41}+\bar{a}_{51}a_{51}-\beta\bar{a}_{61}a_{61} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{11}+\bar{a}_{22}a_{21}+\bar{a}_{32}a_{31}-\beta\bar{a}_{42}a_{41}-\beta\bar{a}_{52}a_{51}+\bar{a}_{62}a_{61} \\
\hline
-\beta\bar{a}_{13}a_{11}+\bar{a}_{23}a_{21}+\bar{a}_{33}a_{31}-\beta\bar{a}_{43}a_{41}-\beta\bar{a}_{53}a_{51}+\bar{a}_{63}a_{61} \\
\bar{a}_{14}a_{11}-\beta\bar{a}_{24}a_{21}-\beta\bar{a}_{34}a_{31}+\bar{a}_{44}a_{41}+\bar{a}_{54}a_{51}-\beta\bar{a}_{64}a_{61} \\
\bar{a}_{15}a_{11}-\beta\bar{a}_{25}a_{21}-\beta\bar{a}_{35}a_{31}+\bar{a}_{45}a_{41}+\bar{a}_{55}a_{51}-\beta\bar{a}_{65}a_{61} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{11}+\bar{a}_{26}a_{21}+\bar{a}_{36}a_{31}-\beta\bar{a}_{46}a_{41}-\beta\bar{a}_{56}a_{51}+\bar{a}_{66}a_{61} \\
\hline
\bar{a}_{11}a_{12}-\beta\bar{a}_{21}a_{22}-\beta\bar{a}_{31}a_{32}+\bar{a}_{41}a_{42}+\bar{a}_{51}a_{52}-\beta\bar{a}_{61}a_{62} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{12}+\bar{a}_{22}a_{22}+\bar{a}_{32}a_{32}-\beta\bar{a}_{42}a_{42}-\beta\bar{a}_{52}a_{52}+\bar{a}_{62}a_{62} \\
\hline
-\beta\bar{a}_{13}a_{12}+\bar{a}_{23}a_{22}+\bar{a}_{33}a_{32}-\beta\bar{a}_{43}a_{42}-\beta\bar{a}_{53}a_{52}+\bar{a}_{63}a_{62} \\
\bar{a}_{14}a_{12}-\beta\bar{a}_{24}a_{22}-\beta\bar{a}_{34}a_{32}+\bar{a}_{44}a_{42}+\bar{a}_{54}a_{52}-\beta\bar{a}_{64}a_{62} \\
\bar{a}_{15}a_{12}-\beta\bar{a}_{25}a_{22}-\beta\bar{a}_{35}a_{32}+\bar{a}_{45}a_{42}+\bar{a}_{55}a_{52}-\beta\bar{a}_{65}a_{62} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{12}+\bar{a}_{26}a_{22}+\bar{a}_{36}a_{32}-\beta\bar{a}_{46}a_{42}-\beta\bar{a}_{56}a_{52}+\bar{a}_{66}a_{62}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\left| \begin{array}{l}
\bar{a}_{11}a_{13}-\beta\bar{a}_{21}a_{23}-\beta\bar{a}_{31}a_{33}+\bar{a}_{41}a_{43}+\bar{a}_{51}a_{53}-\beta\bar{a}_{61}a_{63} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{13}+\bar{a}_{22}a_{23}+\bar{a}_{32}a_{33}-\beta\bar{a}_{42}a_{43}-\beta\bar{a}_{52}a_{53}+\bar{a}_{62}a_{63} \\
-\beta\bar{a}_{13}a_{13}+\bar{a}_{23}a_{23}+\bar{a}_{33}a_{33}-\beta\bar{a}_{43}a_{43}-\beta\bar{a}_{53}a_{53}+\bar{a}_{63}a_{63} \\
\bar{a}_{14}a_{13}-\beta\bar{a}_{24}a_{23}-\beta\bar{a}_{34}a_{33}+\bar{a}_{44}a_{43}+\bar{a}_{54}a_{53}-\beta\bar{a}_{64}a_{63} \\
\bar{a}_{15}a_{13}-\beta\bar{a}_{25}a_{23}-\beta\bar{a}_{35}a_{33}+\bar{a}_{45}a_{43}+\bar{a}_{55}a_{53}-\beta\bar{a}_{65}a_{63} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{13}+\bar{a}_{26}a_{23}+\bar{a}_{36}a_{33}-\beta\bar{a}_{46}a_{43}-\beta\bar{a}_{56}a_{53}+\bar{a}_{66}a_{63}
\end{array} \right. \\
\\
\left| \begin{array}{l}
\bar{a}_{11}a_{14}-\beta\bar{a}_{21}a_{24}-\beta\bar{a}_{31}a_{34}+\bar{a}_{41}a_{44}+\bar{a}_{51}a_{54}-\beta\bar{a}_{61}a_{64} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{14}+\bar{a}_{22}a_{24}+\bar{a}_{32}a_{34}-\beta\bar{a}_{42}a_{44}-\beta\bar{a}_{52}a_{54}+\bar{a}_{62}a_{64} \\
-\beta\bar{a}_{13}a_{14}+\bar{a}_{23}a_{24}+\bar{a}_{33}a_{34}-\beta\bar{a}_{43}a_{44}-\beta\bar{a}_{53}a_{54}+\bar{a}_{63}a_{64} \\
\bar{a}_{14}a_{14}-\beta\bar{a}_{24}a_{24}-\beta\bar{a}_{34}a_{34}+\bar{a}_{44}a_{44}+\bar{a}_{54}a_{54}-\beta\bar{a}_{64}a_{64} \\
\bar{a}_{15}a_{14}-\beta\bar{a}_{25}a_{24}-\beta\bar{a}_{35}a_{34}+\bar{a}_{45}a_{44}+\bar{a}_{55}a_{54}-\beta\bar{a}_{65}a_{64} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{14}+\bar{a}_{26}a_{24}+\bar{a}_{36}a_{34}-\beta\bar{a}_{46}a_{44}-\beta\bar{a}_{56}a_{54}+\bar{a}_{66}a_{64}
\end{array} \right. \\
\\
\left| \begin{array}{l}
\bar{a}_{11}a_{15}-\beta\bar{a}_{21}a_{25}-\beta\bar{a}_{31}a_{35}+\bar{a}_{41}a_{45}+\bar{a}_{51}a_{55}-\beta\bar{a}_{61}a_{65} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{15}+\bar{a}_{22}a_{25}+\bar{a}_{32}a_{35}-\beta\bar{a}_{42}a_{45}-\beta\bar{a}_{52}a_{55}+\bar{a}_{62}a_{65} \\
-\beta\bar{a}_{13}a_{15}+\bar{a}_{23}a_{25}+\bar{a}_{33}a_{35}-\beta\bar{a}_{43}a_{45}-\beta\bar{a}_{53}a_{55}+\bar{a}_{63}a_{65} \\
\bar{a}_{14}a_{15}-\beta\bar{a}_{24}a_{25}-\beta\bar{a}_{34}a_{35}+\bar{a}_{44}a_{45}+\bar{a}_{54}a_{55}-\beta\bar{a}_{64}a_{65} \\
\bar{a}_{15}a_{15}-\beta\bar{a}_{25}a_{25}-\beta\bar{a}_{35}a_{35}+\bar{a}_{45}a_{45}+\bar{a}_{55}a_{55}-\beta\bar{a}_{65}a_{65} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{15}+\bar{a}_{26}a_{25}+\bar{a}_{36}a_{35}-\beta\bar{a}_{46}a_{45}-\beta\bar{a}_{56}a_{55}+\bar{a}_{66}a_{65}
\end{array} \right. \\
\\
\left| \begin{array}{l}
\bar{a}_{11}a_{16}-\beta\bar{a}_{21}a_{26}-\beta\bar{a}_{31}a_{36}+\bar{a}_{41}a_{46}+\bar{a}_{51}a_{56}-\beta\bar{a}_{61}a_{66} \\
-\beta\bar{a}_{12}a_{16}+\bar{a}_{22}a_{26}+\bar{a}_{32}a_{36}-\beta\bar{a}_{42}a_{46}-\beta\bar{a}_{52}a_{56}+\bar{a}_{62}a_{66} \\
-\beta\bar{a}_{13}a_{16}+\bar{a}_{23}a_{26}+\bar{a}_{33}a_{36}-\beta\bar{a}_{43}a_{46}-\beta\bar{a}_{53}a_{56}+\bar{a}_{63}a_{66} \\
\bar{a}_{14}a_{16}-\beta\bar{a}_{24}a_{26}-\beta\bar{a}_{34}a_{36}+\bar{a}_{44}a_{46}+\bar{a}_{54}a_{56}-\beta\bar{a}_{64}a_{66} \\
\bar{a}_{15}a_{16}-\beta\bar{a}_{25}a_{26}-\beta\bar{a}_{35}a_{36}+\bar{a}_{45}a_{46}+\bar{a}_{55}a_{56}-\beta\bar{a}_{65}a_{66} \\
-\beta\bar{a}_{16}a_{16}+\bar{a}_{26}a_{26}+\bar{a}_{36}a_{36}-\beta\bar{a}_{46}a_{46}-\beta\bar{a}_{56}a_{56}+\bar{a}_{66}a_{66}
\end{array} \right.
\end{array}$$

также равной I . Эти системы равенств равносильны.

Восемнадцать комплексных коэффициентов a_{ik} , связанных соотношением унитарности $\det A=1$, определяют все остальные, т.е. имеют место тридцать пять независимых вещественных параметров. Вместе с тем, можно выделить матрицы преобразования вращения семимерного псевдоевклидова пространства индекса четыре лишь с семью независимыми вещественными параметрами по числу осей семимерной системы координат. К ним относится, например, матрица

$$A = \left\| \begin{array}{cc|cc|cc}
\bar{a}_1 & \beta a_2 & \beta a_3 & \bar{a}_4 & \bar{a}_5 & \beta a_6 \\
\bar{a}_2 & a_1 & a_5 & \bar{a}_6 & \bar{a}_3 & a_4 \\
\hline
\bar{a}_3 & a_4 & a_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_6 & a_5 \\
\bar{a}_5 & \beta a_6 & \beta a_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_4 & \beta a_3 \\
\bar{a}_4 & \beta a_3 & \beta a_6 & \bar{a}_5 & \bar{a}_1 & \beta a_2 \\
\bar{a}_6 & a_5 & a_4 & \bar{a}_3 & \bar{a}_2 & a_1
\end{array} \right\|,$$

и ей обратная матрица

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_1 & -\beta a_2 & -\beta a_3 & a_5 & a_4 & -\beta a_6 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_4 & -\bar{a}_6 & -\bar{a}_3 & \bar{a}_5 \\ -\bar{a}_3 & \bar{a}_5 & \bar{a}_1 & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_6 & \bar{a}_4 \\ a_4 & -\beta a_6 & -\beta a_2 & a_1 & a_5 & -\beta a_3 \\ a_5 & -\beta a_3 & -\beta a_6 & a_4 & a_1 & -\beta a_2 \\ -\bar{a}_6 & \bar{a}_4 & \bar{a}_5 & -\bar{a}_3 & -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{vmatrix}.$$

Здесь шесть комплексных коэффициентов a_i связаны двумя дополнительными условиями

$$-\beta(\bar{a}_3 a_6 + \bar{a}_6 a_2 + \bar{a}_2 a_3) + (\bar{a}_4 a_1 + \bar{a}_1 a_5 + \bar{a}_5 a_4) = 0$$

и

$$-\beta(\bar{a}_3 a_3 + \bar{a}_6 a_6 + \bar{a}_2 a_2) + (\bar{a}_4 a_4 + \bar{a}_1 a_1 + \bar{a}_5 a_5) = 1,$$

так что имеют место лишь семь независимых вещественных параметров.

Геометрии собственнорунитарной группы [7] (семимерной собственноевклидовой геометрии) соответствует представление со значением $\beta = -1$. Геометрии псевдорунитарной группы (семимерной псевдоевклидовой геометрии индекса четыре) соответствует представление со значением $\beta = 1$.

8. Вращения в трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса два

Линейное преобразование $x' = Ax$ с вещественной матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

назовем преобразованием вращения, если его матрица удовлетворяет условию

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^T G,$$

индекс T – операцию транспонирования, G – метрический тензор,

$$G = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{vmatrix},$$

причем $\alpha, \beta = \pm 1$, так что $G = G^T$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = GA^T G = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha\beta a_{21} & -\beta a_{31} \\ \alpha\beta a_{12} & a_{22} & -\alpha a_{32} \\ -\beta a_{13} & -\alpha a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)^T G = G(B^T A^T) G = (GB^T G)(GA^T G) = \bar{B} \bar{A},$$

и

$$\bar{\bar{A}} = \overline{GA^T G} = G(GA^T G)^T G = GGAGG = A.$$

Преобразование вращения в трехмерном псевдоевклидовом векторном пространстве сохраняет квадраты модулей векторов. Такое преобразование является собственным вращением, если оно сохраняет также векторное произведение двух векторов и $\det ||A||=1$. Преобразование с $\det ||A||=-1$ является несобственным вращением или вращением с отражением.

Пусть e_1, e_2, e_3 – любой ортонормированный базис, и пусть

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \quad \text{и} \quad x' = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3.$$

Каждое преобразование вращения задается формулами

$$\begin{aligned} x^1 &= a_{11} x^1 + a_{12} x^2 + a_{13} x^3, \\ x^2 &= a_{21} x^1 + a_{22} x^2 + a_{23} x^3, \\ x^3 &= a_{31} x^1 + a_{32} x^2 + a_{33} x^3 \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$X' = AX,$$

где для собственных вращений $\det(A)=1$.

Так как рассматриваемая система координат является ортонормированной, действительная матрица A , описывающая каждое вращение, определяется системой равенств

$$A \bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{12}a_{12} - \beta a_{13}a_{13} & \alpha\beta a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - \alpha a_{13}a_{23} & -\beta a_{11}a_{31} - \alpha a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11} + \alpha\beta a_{22}a_{12} - \beta a_{23}a_{13} & \alpha\beta a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} - \alpha a_{23}a_{23} & -\beta a_{21}a_{31} - \alpha a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11} + \alpha\beta a_{32}a_{12} - \beta a_{33}a_{13} & \alpha\beta a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} - \alpha a_{33}a_{23} & -\beta a_{31}a_{31} - \alpha a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} \end{vmatrix} = I$$

или, что равносильно,

$$\bar{A}A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{21}a_{21} - \beta a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + \alpha\beta a_{21}a_{22} - \beta a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + \alpha\beta a_{21}a_{23} - \beta a_{31}a_{33} \\ \alpha\beta a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} - \alpha a_{32}a_{31} & \alpha\beta a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} - \alpha a_{32}a_{32} & \alpha\beta a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} - \alpha a_{32}a_{33} \\ -\beta a_{13}a_{11} - \alpha a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & -\beta a_{13}a_{12} - \alpha a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & -\beta a_{13}a_{13} - \alpha a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} \end{vmatrix} = I.$$

Любые три из коэффициентов a_{ik} определяют все остальные. Геометрически коэффициент a_{ik} определяет угол между базисным вектором e_i и повернутым базисным вектором

$$\begin{aligned} e_k' &= A e_k = \sum_{j=1}^3 a_{jk} e_j, \\ a_{ik} &= (e_i e_k'). \end{aligned}$$

Преобразование вращения поворачивает радиус – вектор x каждой точки трехмерного псевдоевклидового пространства на угол поворота δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инвариантны. Угол поворота δ , а также направляющие углы положительной оси вращения определяются формулами

$$Ch\delta = \frac{1}{2} (Tr(A) - 1) = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) = 2\lambda_0^2 - 1$$

$$\alpha a_{23} + a_{32} = 2c_1 Sh\delta = 4\lambda_1 \lambda_0,$$

$$-a_{31} - \beta a_{13} = 2c_2 Sh\delta = 4\lambda_2 \lambda_0,$$

$$\beta a_{12} - \alpha a_{21} = 2c_3 Sh\delta = 4\lambda_3 \lambda_0.$$

Либо знак угла δ , либо направление оси вращения могут выбираться произвольно.

Матрица преобразования A , соответствующая данному вращению, описываемая числами $\delta, c_1, c_2, \dots, c_7$, есть

$$A = Ch\delta I + (Ch\delta - 1) \begin{vmatrix} -\alpha c_1 c_1 & -\beta c_1 c_2 & \alpha \beta c_1 c_3 \\ -\alpha c_2 c_1 & -\beta c_2 c_2 & \alpha \beta c_2 c_3 \\ -\alpha c_3 c_1 & -\beta c_3 c_2 & \alpha \beta c_3 c_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ Sh\delta \begin{vmatrix} 0 & \beta c_3 & -\beta c_2 \\ -\alpha c_3 & 0 & \alpha c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Четыре симметричных параметра (Эйлера)

$$\lambda_0 = Ch \frac{\delta}{2}, \lambda_1 = c_1 Sh \frac{\delta}{2}, \lambda_2 = c_2 Sh \frac{\delta}{2}, \lambda_3 = c_3 Sh \frac{\delta}{2},$$

$$\lambda_0^2 - \alpha \lambda_1^2 - \beta \lambda_2^2 + \alpha \beta \lambda_3^2 = 1$$

$$-\alpha c_1^2 - \beta c_2^2 + \alpha \beta c_3^2 = -1$$

однозначно определяют вращение, так как из выражения для матрицы A следует:

$$A = -I + 2^* \begin{vmatrix} -\alpha(\lambda_1 \lambda_1 - \alpha \lambda_0 \lambda_0) & -\beta(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_1 \lambda_3 - \alpha \lambda_2 \lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_2 \lambda_1 + \lambda_3 \lambda_0) & -\beta(\lambda_2 \lambda_2 - \beta \lambda_0 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_2 \lambda_3 + \beta \lambda_1 \lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_3 \lambda_1 + \alpha \lambda_2 \lambda_0) & -\beta(\lambda_3 \lambda_2 - \beta \lambda_1 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_3 \lambda_3 + \alpha \beta \lambda_0 \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

При этом

$$\bar{A} = -I + 2^* \begin{vmatrix} -\alpha(\lambda_1 \lambda_1 - \alpha \lambda_0 \lambda_0) & -\beta(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_1 \lambda_3 + \alpha \lambda_2 \lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_2 \lambda_1 - \lambda_3 \lambda_0) & -\beta(\lambda_2 \lambda_2 - \beta \lambda_0 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_2 \lambda_3 - \beta \lambda_1 \lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_3 \lambda_1 - \alpha \lambda_2 \lambda_0) & -\beta(\lambda_3 \lambda_2 + \beta \lambda_1 \lambda_0) & \alpha \beta(\lambda_3 \lambda_3 + \alpha \beta \lambda_0 \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Будем считать для определенности $\alpha = \beta = 1$. В принятом предположении

$$Ch\delta = \frac{1}{2} (Tr(A) - 1) = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) = 2\lambda_0^2 - 1$$

$$\beta a_{23} + a_{32} = 2c_1 Sh\delta = 4\lambda_1 \lambda_0,$$

$$-a_{31} - \beta a_{13} = 2c_2 Sh\delta = 4\lambda_2 \lambda_0,$$

$$\beta a_{12} - \beta a_{21} = 2c_3 Sh\delta = 4\lambda_3 \lambda_0.$$

$$A = Ch\delta I + (Ch\delta - 1) \begin{vmatrix} -\beta c_1 c_1 & -\beta c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ -\beta c_2 c_1 & -\beta c_2 c_2 & c_2 c_3 \\ -\beta c_3 c_1 & -\beta c_3 c_2 & c_3 c_3 \end{vmatrix} + Sh\delta \begin{vmatrix} 0 & \beta c_3 & -\beta c_2 \\ -\beta c_3 & 0 & \beta c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Четыре симметричных параметра (Эйлера)

$$\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \beta \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,$$

$$-\beta c_1^2 - \beta c_2^2 + c_3^2 = -1,$$

однозначно определяют вращение, так как из выражения для матрицы A следует:

$$A = -I + 2 \begin{vmatrix} -\beta(\lambda_1\lambda_1 - \beta\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0) & \lambda_1\lambda_3 - \beta\lambda_2\lambda_0 \\ -\beta(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_2\lambda_3 + \beta\lambda_1\lambda_0 \\ -\beta(\lambda_3\lambda_1 + \beta\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 - \beta\lambda_1\lambda_0) & \lambda_3\lambda_3 + \lambda_0\lambda_0 \end{vmatrix},$$

при этом

$$\bar{A} = -I + 2^* \begin{vmatrix} -\beta(\lambda_1\lambda_1 - \beta\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_0) & \lambda_1\lambda_3 + \beta\lambda_2\lambda_0 \\ -\beta(\lambda_2\lambda_1 - \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_2\lambda_3 - \beta\lambda_1\lambda_0 \\ -\beta(\lambda_3\lambda_1 - \beta\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 + \beta\lambda_1\lambda_0) & \lambda_3\lambda_3 + \lambda_0\lambda_0 \end{vmatrix},$$

а параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ представляют одно и то же вращение.

Следующие матрицы преобразования описывают правые вращения вокруг положительных координатных осей:

$$\begin{aligned} A_1(\varphi) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Ch\varphi & \beta Sh\varphi \\ 0 & Sh\varphi & Ch\varphi \end{vmatrix} \\ A_2(\varphi) &= \begin{vmatrix} Ch\varphi & 0 & -\beta Sh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sh\varphi & 0 & Ch\varphi \end{vmatrix} \\ A_3(\varphi) &= \begin{vmatrix} cos\varphi & \beta sin\varphi & 0 \\ -\beta sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_i^{-1}(\varphi) = \bar{A}_i(\varphi) = A_i(-\varphi), i = 1, 2, 3.$$

Каждая матрица A , описывающая собственное вращение в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения трех матриц

$$A = A_{i_1}(\varphi_1)A_{i_2}(\varphi_2)A_{i_3}(\varphi_3),$$

в частности, так:

$$\begin{aligned} A &= A_3(\varphi_1)A_2(\varphi_2)A_3(\varphi_3) = \\ &= \begin{vmatrix} cos\varphi_1 & \beta sin\varphi_1 & 0 \\ -\beta sin\varphi_1 & cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} Ch\varphi_2 & 0 & -\beta Sh\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Sh\varphi_2 & 0 & Ch\varphi_2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} cos\varphi_3 & \beta sin\varphi_3 & 0 \\ -\beta sin\varphi_3 & cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} cos\varphi_1 Ch\varphi_2 cos\varphi_3 - sin\varphi_1 sin\varphi_3 & \beta cos\varphi_1 Ch\varphi_2 sin\varphi_3 + \beta sin\varphi_1 cos\varphi_3 & -\beta cos\varphi_1 Sh\varphi_2 \\ -\beta sin\varphi_1 Ch\varphi_2 cos\varphi_3 - \beta cos\varphi_1 sin\varphi_3 & -sin\varphi_1 Ch\varphi_2 sin\varphi_3 + cos\varphi_1 cos\varphi_3 & sin\varphi_1 Sh\varphi_2 \\ -Sh\varphi_2 cos\varphi_3 & -\beta Sh\varphi_2 sin\varphi_3 & Ch\varphi_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Три угла (Эйлера) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, однозначно определяют вращение; в свою очередь они однозначно определяются данным вращением за исключением случая, когда $\varphi_2 = 0$ (карданов подвес).

Обратное вращение $A^{-1} = \bar{A}$ (переводящее вектор x' в исходный вектор x) представляется матрицей

$$\bar{A} = A_3(-\varphi_3)A_2(-\varphi_2)A_1(-\varphi_1) = \begin{vmatrix} \cos\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \cos\varphi_3 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 & -\beta \sin\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \cos\varphi_3 - \beta \cos\varphi_1 \sin\varphi_3 & \beta \operatorname{Sh}\varphi_2 \cos\varphi_3 \\ \beta \cos\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \sin\varphi_3 + \beta \sin\varphi_1 \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 & \operatorname{Sh}\varphi_2 \sin\varphi_3 \\ \cos\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 & -\beta \sin\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 & \operatorname{Ch}\varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Существуют шесть способов, которыми матрицу вращения можно выразить путем вращения вокруг двух различных осей координат. Кроме того, существует шесть способов представления матриц вращения в виде произведения вращений вокруг трех различных осей координат, в частности, так:

$$A = A_1(\varphi_1) A_2(\varphi_2) A_3(\varphi_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Ch}\varphi_1 & \beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \\ 0 & \operatorname{Sh}\varphi_1 & \operatorname{Ch}\varphi_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \operatorname{Ch}\varphi_2 & 0 & -\beta \operatorname{Sh}\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Sh}\varphi_2 & 0 & \operatorname{Ch}\varphi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\varphi_3 & \beta \sin\varphi_3 & 0 \\ -\beta \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{Ch}\varphi_2 \cos\varphi_3 & -\beta \operatorname{Ch}\varphi_2 \sin\varphi_3 & -\beta \operatorname{Sh}\varphi_2 \\ -\beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \cos\varphi_3 - \beta \operatorname{Ch}\varphi_1 \sin\varphi_3 & -\operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \sin\varphi_3 + \operatorname{Ch}\varphi_1 \cos\varphi_3 & \beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \\ -\operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \cos\varphi_3 - \beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \sin\varphi_3 & -\beta \operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \sin\varphi_3 + \operatorname{Sh}\varphi_1 \cos\varphi_3 & \operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \end{vmatrix}$$

при $\bar{A} = A_3(-\varphi_3) A_2(-\varphi_2) A_1(-\varphi_1) =$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{Ch}\varphi_2 \cos\varphi_3 & -\beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \cos\varphi_3 - \beta \operatorname{Ch}\varphi_1 \sin\varphi_3 & \beta \operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \cos\varphi_3 + \operatorname{Sh}\varphi_1 \sin\varphi_3 \\ -\beta \operatorname{Ch}\varphi_2 \sin\varphi_3 & -\operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \sin\varphi_3 + \operatorname{Ch}\varphi_1 \cos\varphi_3 & \operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Sh}\varphi_2 \sin\varphi_3 - \beta \operatorname{Sh}\varphi_1 \cos\varphi_3 \\ \operatorname{Sh}\varphi_2 & -\operatorname{Sh}\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 & \operatorname{Ch}\varphi_1 \operatorname{Ch}\varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Представление группы преобразований вращения трехмерного псевдоевклидова пространства индекса два

Преобразование $X' = AX$ назовем представлением преобразования вращения, если его матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

комплексна и удовлетворяет условию

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^*G,$$

индекс $*$ – операцию эрмитового сопряжения, а G – метрический тензор

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{vmatrix},$$

причем $\beta = \pm I$, так что $G = G^*$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = GA^*G = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & -\beta \bar{a}_{21} \\ -\beta \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)*G = G(B*A*)G = (GB*G)(GA*G) = \overline{B} \overline{A},$$

и

$$\overline{\overline{A}} = \overline{GA*G} = G(GA*G)*G = GGAGG = A.$$

Докажем, что совокупность преобразований вращения обладает групповыми свойствами.

1. Произведение двух преобразований вращения есть преобразование вращения.

Действительно, пусть даны преобразования вращения с матрицами A_1 и A_2 ; произведение их есть преобразование с матрицей $A = A_2 A_1$. На основании правил перемножения матриц мы можем написать тождество

$$A \overline{A} = (A_2 A_1)(\overline{A_2 A_1}) = (A_2 A_1)(\overline{A_1} \overline{A_2}) = A_2 (A_1 \overline{A_1}) \overline{A_2}.$$

Отсюда вследствие равенства $A \overline{A} = I$ имеем:

$$A \overline{A} = A_2 I \overline{A_2} = I.$$

Тем самым требуемое доказано.

2. Преобразование, обратное преобразованию вращения является преобразованием вращения.

Действительно, пусть A —матрица некоторого преобразования вращения

и $B = A^{-1}$ — матрица преобразования, обратного ему. Из условия $A \overline{A} = I$ следует, что $\overline{A} = A^{-1}$. Таким образом $B = \overline{A}$. Отсюда

$$B \overline{B} = \overline{A} (\overline{\overline{A}}) = \overline{A} A = A^{-1} A = I.$$

Тем самым требуемое доказано. Таким образом, совокупность преобразований вращения есть группа.

Условие преобразований вращения, записанное в матричной форме, равносильно соотношениям:

$$A \overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} \overline{a}_{11} - \beta \overline{a}_{12} a_{12} & a_{12} \overline{a}_{22} - \beta \overline{a}_{21} a_{11} \\ a_{21} \overline{a}_{11} - \beta \overline{a}_{12} a_{22} & a_{22} \overline{a}_{22} - \beta \overline{a}_{21} a_{21} \end{vmatrix} = I,$$

равным I .

Этим условиям можно придать форму отличную от этой формы

$$\overline{A} A = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11} a_{11} - \beta a_{21} \overline{a}_{21} & -\beta \overline{a}_{21} a_{22} + a_{12} \overline{a}_{11} \\ -\beta \overline{a}_{12} a_{11} + a_{21} \overline{a}_{22} & \overline{a}_{22} a_{22} - \beta a_{12} \overline{a}_{12} \end{vmatrix} = I,$$

также равной I . Эти системы равенств равносильны.

Любые два из четырех комплексных коэффициентов a_{ik} определяют все остальные. Более того, они дополнительно связаны соотношением унимодулярности (определитель матрицы A равен ± 1), так что два комплексных коэффициента a_{ik} полностью определяются лишь тремя вещественными параметрами.

Если задан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 , то каждый действительный вектор $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ может быть представлен (вообще говоря, комплексной) матрицей размера 2×2

$$X = \begin{vmatrix} -\beta x^3 & -\beta(x^1 - ix^2) \\ x^1 + ix^2 & \beta x^3 \end{vmatrix} = x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3,$$

где спинные матрицы (Паули)

$$E_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad E_2 = \begin{vmatrix} 0 & \beta i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad E_3 = \begin{vmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix}$$

соответствуют базисным векторам e_1, e_2, e_3 . Это соответствие является изоморфизмом, сохраняющим результат сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа.

Для каждого вращения вектор вращения $x' = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ представляется матрицей

$$X' = x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3 = A X \bar{A},$$

где A – (вообще говоря, комплексная) 2×2 матрица с определителем равным 1:

$$A = \begin{vmatrix} \bar{a} & \beta b \\ \bar{b} & a \end{vmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{vmatrix} a & -\beta b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix},$$

где

$$a = \lambda_0 - i\beta\lambda_3, \quad b = \lambda_2 + i\lambda_1, \\ |a|^2 - \beta|b|^2 = \lambda_0^2 - \beta(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_3^2 = 1.$$

$$A \bar{A} = \begin{vmatrix} |a|^2 - \beta|b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 - \beta|b|^2 \end{vmatrix} = I.$$

Комплексные числа a, b определяют соответствующее вращение однозначно, но a, b и $-a, -b$ (а потому матрицы A и $-A$) описывают одно и то же вращение. Числа a, b и $\bar{a}, \bar{b}$ называются параметрами (Кэли–Клейна) данного вращения.

Следующие матрицы преобразования описывают правые вращения вокруг положительных координатных осей:

$$A_1(\varphi) = \begin{vmatrix} Ch(\varphi/2) & i\beta Sh(\varphi/2) \\ -iSh(\varphi/2) & Ch(\varphi/2) \end{vmatrix}$$

$$A_2(\varphi) = \begin{vmatrix} Ch(\varphi/2) & \beta Sh(\varphi/2) \\ Sh(\varphi/2) & Ch(\varphi/2) \end{vmatrix}$$

$$A_3(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi/2) + i\beta \sin(\varphi/2) & 0 \\ 0 & \cos(\varphi/2) - i\beta \sin(\varphi/2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\beta\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta\varphi/2} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица A , описывающая представление вращений в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения трех матриц

$$A = A_1(\varphi_1)A_2(\varphi_2)A_3(\varphi_3),$$

в частности, так:

$$\begin{aligned} A &= A_3(\varphi_1)A_2(\varphi_2)A_3(\varphi_3) = \\ &= \begin{vmatrix} e^{i\beta(\varphi_1)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta(\varphi_1)/2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Ch(\varphi_2/2) & \beta Sh(\varphi_2/2) \\ Sh(\varphi_2/2) & Ch(\varphi_2/2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\beta(\varphi_3)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta(\varphi_3)/2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} Ch(\varphi_2/2)e^{i\beta(\varphi_3+\varphi_1)/2} & \beta Sh(\varphi_2/2)e^{-i\beta(\varphi_3-\varphi_1)/2} \\ Sh(\varphi_2/2)e^{i\beta(\varphi_3-\varphi_1)/2} & Ch(\varphi_2/2)e^{-i\beta(\varphi_3+\varphi_1)/2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$A = \begin{vmatrix} \bar{a} & \beta b \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_0 + i\beta\lambda_3 & \beta(\lambda_2 + i\lambda_1) \\ \lambda_2 - i\lambda_1 & \lambda_0 - i\beta\lambda_3 \end{vmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= Ch(\varphi_2/2)\cos((\varphi_3+\varphi_1)/2), & \lambda_2 &= Sh(\varphi_2/2)\cos((\varphi_3-\varphi_1)/2), \\ \lambda_3 &= Ch(\varphi_2/2)\sin((\varphi_3+\varphi_1)/2), & \lambda_1 &= -\beta Sh(\varphi_2/2)\sin((\varphi_3-\varphi_1)/2), \\ a &= Ch(\varphi_2/2)\exp(-i\beta(\varphi_3+\varphi_1)/2), & b &= Sh(\varphi_2/2)\exp(-i\beta(\varphi_3-\varphi_1)/2). \end{aligned}$$

Четыре параметра (Эйлера) $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_0^2 - \beta\lambda_1^2 - \beta\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$$

однозначно определяют вращение, причем условие

$$|a|^2 - \beta|b|^2 = 1.$$

Линейные комбинации матриц I, iE_1, iE_2 и iE_3 с действительными коэффициентами образуют представление четырехмерной алгебры псевдокватернионов, скаляры которой соответствуют действительным кратным матрицы I , а образующие соответствуют матрицам iE_1, iE_2, iE_3 , причем

$$\begin{aligned} -\beta(E_1)^2 &= -\beta(E_2)^2 = (E_3)^2 = I, \\ E_2E_3 &= -E_3E_2 = -i\beta E_1, \quad E_3E_1 = -E_1E_3 = -i\beta E_2, \quad E_1E_2 = -E_2E_1 = iE_3. \end{aligned}$$

Каждая комплексная матрица размера 2×2 может быть представлена в виде такой линейной комбинации, в частности,

$$\begin{aligned} A &= \lambda_0 I - i(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3), \\ \bar{A} &= \lambda_0 I + i(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3). \end{aligned}$$

Снова матрицы A и $-A$ определяют одно и тоже вращение однозначно.

Представление

$$X' = x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3 = AX\bar{A}$$

в координатной форме дает:

$$\begin{aligned} x^1' &= (\lambda_0\lambda_0 - \beta\lambda_1\lambda_1 + \beta\lambda_2\lambda_2 - \lambda_3\lambda_3)x^1 - 2\beta(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0)x^2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \beta\lambda_2\lambda_0)x^3, \\ x^2' &= -2\beta(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_0)x^1 + (\lambda_0\lambda_0 + \beta\lambda_1\lambda_1 - \beta\lambda_2\lambda_2 - \lambda_3\lambda_3)x^2 + 2(\lambda_2\lambda_3 + \beta\lambda_1\lambda_0)x^3, \\ x^3' &= -2\beta(\lambda_3\lambda_1 + \beta\lambda_2\lambda_0)x^1 - 2\beta(\lambda_3\lambda_2 - \beta\lambda_1\lambda_0)x^2 + (\lambda_0\lambda_0 + \beta\lambda_1\lambda_1 + \beta\lambda_2\lambda_2 + \lambda_3\lambda_3)x^3. \end{aligned}$$

Таким образом, задача описания преобразований вращения вполне разрешима. Преобразования вращений в трехмерном псевдоевклидовом

пространстве индекса два существенно отличаются от преобразований вращения в трехмерном собственноевклидовом пространстве [6]. Свойства группы псевдоортогональных преобразований также существенно отличаются от свойств группы собственнортогональных преобразований. Геометрии собственнортогональной группы [7] (трехмерной собственноевклидовой геометрии) соответствует представление со значением $\beta = -1$. Геометрии псевдоунитарной группы (трехмерной псевдоевклидовой геометрии) соответствует представление со значением $\beta = 1$.

5. Вращения в семимерном псевдоевклидовом пространстве индекса четыре

Линейное преобразование $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ с вещественной матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{27} \\ & & \dots & \\ a_{71} & a_{72} & \dots & a_{77} \end{vmatrix}$$

назовем преобразованием вращения, если его матрица удовлетворяет условию

$$A\bar{A} = \bar{A}A = I,$$

где черточка обозначает операцию

$$\bar{A} = GA^T G,$$

индекс T – обозначает операцию транспонирования, G – метрический тензор,

$$G = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma \end{vmatrix},$$

так что $G = G^T$, $G^2 = I$ и

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha\beta a_{21} & -\beta a_{31} & \alpha\gamma a_{41} & -\gamma a_{51} & -\alpha\beta\gamma a_{61} & \beta\gamma a_{71} \\ \alpha\beta a_{12} & a_{22} & -\alpha a_{32} & \beta\gamma a_{42} & -\alpha\beta\gamma a_{52} & -\gamma a_{62} & \alpha\gamma a_{72} \\ -\beta a_{13} & -\alpha a_{23} & a_{33} & -\alpha\beta\gamma a_{43} & \beta\gamma a_{53} & \alpha\gamma a_{63} & -\gamma a_{73} \\ \hline \alpha\gamma a_{14} & \beta\gamma a_{24} & -\alpha\beta\gamma a_{34} & a_{44} & -\alpha a_{54} & -\beta a_{64} & \alpha\beta a_{74} \\ -\gamma a_{15} & -\alpha\beta\gamma a_{25} & \beta\gamma a_{35} & -\alpha a_{45} & a_{55} & \alpha\beta a_{65} & -\beta a_{75} \\ -\alpha\beta\gamma a_{16} & -\gamma a_{26} & \alpha\gamma a_{36} & -\beta a_{46} & \alpha\beta a_{56} & a_{66} & -\alpha a_{76} \\ \beta\gamma a_{17} & \alpha\gamma a_{27} & -\gamma a_{37} & \alpha\beta a_{47} & -\beta a_{57} & -\alpha a_{67} & a_{77} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\overline{AB} = G(AB)^T G = G(B^T A^T) G = (GB^T G)(GA^T G) = \overline{B} \overline{A},$$

и

$$\overline{\overline{A}} = \overline{GA^T G} = G(GA^T G)^T G = GGAGG = A.$$

Преобразование вращения в семимерном псевдоевклидовом векторном пространстве сохраняет квадраты модулей векторов. Такое преобразование является собственным вращением, если оно сохраняет также векторное произведение двух векторов и $\det ||A|| = 1$. Преобразование с $\det ||A|| = -1$ является несобственным вращением или вращением с отражением.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_7$ – любой ортонормированный базис, и пусть

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^7 e_7 \quad \text{и} \quad x' = x^{1'} e_1 + x^{2'} e_2 + \dots + x^{7'} e_7.$$

Каждое преобразование вращения задается формулами

$$x^{1'} = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \dots + a_{17}x^7,$$

$$x^{2'} = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \dots + a_{27}x^7,$$

$$\vdots$$

$$x^{7'} = a_{71}x^1 + a_{72}x^2 + \dots + a_{77}x^7$$

или в матричной форме

$$X' = AX,$$

где для собственных вращений

$$\det(A) = 1.$$

Так как рассматриваемая система координат является ортонормированной, действительная матрица A , описывающая каждое вращение, определяется системой равенств по столбцам матрицы $A \overline{A}$:

$$\begin{array}{l} a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{12}a_{12} - \beta a_{13}a_{13} + \alpha\gamma a_{14}a_{14} - \gamma a_{15}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{16}a_{16} + \beta\gamma a_{17}a_{17} \\ a_{21}a_{11} + \alpha\beta a_{22}a_{12} - \beta a_{23}a_{13} + \alpha\gamma a_{24}a_{14} - \gamma a_{25}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{26}a_{16} + \beta\gamma a_{27}a_{17} \\ a_{31}a_{11} + \alpha\beta a_{32}a_{12} - \beta a_{33}a_{13} + \alpha\gamma a_{34}a_{14} - \gamma a_{35}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{36}a_{16} + \beta\gamma a_{37}a_{17} \\ \hline a_{41}a_{11} + \alpha\beta a_{42}a_{12} - \beta a_{43}a_{13} + \alpha\gamma a_{44}a_{14} - \gamma a_{45}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{46}a_{16} + \beta\gamma a_{47}a_{17} \\ a_{51}a_{11} + \alpha\beta a_{52}a_{12} - \beta a_{53}a_{13} + \alpha\gamma a_{54}a_{14} - \gamma a_{55}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{56}a_{16} + \beta\gamma a_{57}a_{17} \\ a_{61}a_{11} + \alpha\beta a_{62}a_{12} - \beta a_{63}a_{13} + \alpha\gamma a_{64}a_{14} - \gamma a_{65}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{66}a_{16} + \beta\gamma a_{67}a_{17} \\ a_{71}a_{11} + \alpha\beta a_{72}a_{12} - \beta a_{73}a_{13} + \alpha\gamma a_{74}a_{14} - \gamma a_{75}a_{15} - \alpha\beta\gamma a_{76}a_{16} + \beta\gamma a_{77}a_{17} \\ \hline \alpha\beta a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - \alpha a_{13}a_{23} + \beta\gamma a_{14}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{15}a_{25} - \gamma a_{16}a_{26} + \alpha\gamma a_{17}a_{27} \\ \alpha\beta a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} - \alpha a_{23}a_{23} + \beta\gamma a_{24}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{25}a_{25} - \gamma a_{26}a_{26} + \alpha\gamma a_{27}a_{27} \\ \alpha\beta a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} - \alpha a_{33}a_{23} + \beta\gamma a_{34}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{35}a_{25} - \gamma a_{36}a_{26} + \alpha\gamma a_{37}a_{27} \\ \hline \alpha\beta a_{41}a_{21} + a_{42}a_{22} - \alpha a_{43}a_{23} + \beta\gamma a_{44}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{45}a_{25} - \gamma a_{46}a_{26} + \alpha\gamma a_{47}a_{27} \\ \alpha\beta a_{51}a_{21} + a_{52}a_{22} - \alpha a_{53}a_{23} + \beta\gamma a_{54}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{55}a_{25} - \gamma a_{56}a_{26} + \alpha\gamma a_{57}a_{27} \\ \alpha\beta a_{61}a_{21} + a_{62}a_{22} - \alpha a_{63}a_{23} + \beta\gamma a_{64}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{65}a_{25} - \gamma a_{66}a_{26} + \alpha\gamma a_{67}a_{27} \\ \alpha\beta a_{71}a_{21} + a_{72}a_{22} - \alpha a_{73}a_{23} + \beta\gamma a_{74}a_{24} - \alpha\beta\gamma a_{75}a_{25} - \gamma a_{76}a_{26} + \alpha\gamma a_{77}a_{27} \\ \hline -\beta a_{11}a_{31} - \alpha a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{14}a_{34} + \beta\gamma a_{15}a_{35} + \alpha\gamma a_{16}a_{36} - \gamma a_{17}a_{37} \\ -\beta a_{21}a_{31} - \alpha a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{24}a_{34} + \beta\gamma a_{25}a_{35} + \alpha\gamma a_{26}a_{36} - \gamma a_{27}a_{37} \\ -\beta a_{31}a_{31} - \alpha a_{32}a_{32} + a_{33}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{34}a_{34} + \beta\gamma a_{35}a_{35} + \alpha\gamma a_{36}a_{36} - \gamma a_{37}a_{37} \\ \hline -\beta a_{41}a_{31} - \alpha a_{42}a_{32} + a_{43}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{44}a_{34} + \beta\gamma a_{45}a_{35} + \alpha\gamma a_{46}a_{36} - \gamma a_{47}a_{37} \\ -\beta a_{51}a_{31} - \alpha a_{52}a_{32} + a_{53}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{54}a_{34} + \beta\gamma a_{55}a_{35} + \alpha\gamma a_{56}a_{36} - \gamma a_{57}a_{37} \\ -\beta a_{61}a_{31} - \alpha a_{62}a_{32} + a_{63}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{64}a_{34} + \beta\gamma a_{65}a_{35} + \alpha\gamma a_{66}a_{36} - \gamma a_{67}a_{37} \\ -\beta a_{71}a_{31} - \alpha a_{72}a_{32} + a_{73}a_{33} - \alpha\beta\gamma a_{74}a_{34} + \beta\gamma a_{75}a_{35} + \alpha\gamma a_{76}a_{36} - \gamma a_{77}a_{37} \\ \hline \alpha\gamma a_{11}a_{41} + \beta\gamma a_{12}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{13}a_{43} + a_{14}a_{44} - \alpha a_{15}a_{45} - \beta a_{16}a_{46} + \alpha\beta a_{17}a_{47} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\alpha\gamma a_{21}a_{41} + \beta\gamma a_{22}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{23}a_{43} + a_{24}a_{44} - \alpha a_{25}a_{45} - \beta a_{26}a_{46} + \alpha\beta a_{27}a_{47} \\
\alpha\gamma a_{31}a_{41} + \beta\gamma a_{32}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{33}a_{43} + a_{34}a_{44} - \alpha a_{35}a_{45} - \beta a_{36}a_{46} + \alpha\beta a_{37}a_{47} \\
\hline
\alpha\gamma a_{41}a_{41} + \beta\gamma a_{42}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{43}a_{43} + a_{44}a_{44} - \alpha a_{45}a_{45} - \beta a_{46}a_{46} + \alpha\beta a_{47}a_{47} \\
\alpha\gamma a_{51}a_{41} + \beta\gamma a_{52}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{53}a_{43} + a_{54}a_{44} - \alpha a_{55}a_{45} - \beta a_{56}a_{46} + \alpha\beta a_{57}a_{47} \\
\alpha\gamma a_{61}a_{41} + \beta\gamma a_{62}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{63}a_{43} + a_{64}a_{44} - \alpha a_{65}a_{45} - \beta a_{66}a_{46} + \alpha\beta a_{67}a_{47} \\
\alpha\gamma a_{71}a_{41} + \beta\gamma a_{72}a_{42} - \alpha\beta\gamma a_{73}a_{43} + a_{74}a_{44} - \alpha a_{75}a_{45} - \beta a_{76}a_{46} + \alpha\beta a_{77}a_{47} \\
\\
-\gamma a_{11}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{12}a_{52} + \beta\gamma a_{13}a_{53} - \alpha a_{14}a_{54} + a_{15}a_{55} + \alpha\beta a_{16}a_{56} - \beta a_{17}a_{57} \\
-\gamma a_{21}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{22}a_{52} + \beta\gamma a_{23}a_{53} - \alpha a_{24}a_{54} + a_{25}a_{55} + \alpha\beta a_{26}a_{56} - \beta a_{27}a_{57} \\
-\gamma a_{31}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{32}a_{52} + \beta\gamma a_{33}a_{53} - \alpha a_{34}a_{54} + a_{35}a_{55} + \alpha\beta a_{36}a_{56} - \beta a_{37}a_{57} \\
-\gamma a_{41}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{42}a_{52} + \beta\gamma a_{43}a_{53} - \alpha a_{44}a_{54} + a_{45}a_{55} + \alpha\beta a_{46}a_{56} - \beta a_{47}a_{57} \\
-\gamma a_{51}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{52}a_{52} + \beta\gamma a_{53}a_{53} - \alpha a_{54}a_{54} + a_{55}a_{55} + \alpha\beta a_{56}a_{56} - \beta a_{57}a_{57} \\
-\gamma a_{61}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{62}a_{52} + \beta\gamma a_{63}a_{53} - \alpha a_{64}a_{54} + a_{65}a_{55} + \alpha\beta a_{66}a_{56} - \beta a_{67}a_{57} \\
-\gamma a_{71}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{72}a_{52} + \beta\gamma a_{73}a_{53} - \alpha a_{74}a_{54} + a_{75}a_{55} + \alpha\beta a_{76}a_{56} - \beta a_{77}a_{57} \\
\\
-\alpha\beta\gamma a_{11}a_{61} - \gamma a_{12}a_{62} + \alpha\gamma a_{13}a_{63} - \beta a_{14}a_{64} + \alpha\beta a_{15}a_{65} + a_{16}a_{66} - \alpha a_{17}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{21}a_{61} - \gamma a_{22}a_{62} + \alpha\gamma a_{23}a_{63} - \beta a_{24}a_{64} + \alpha\beta a_{25}a_{65} + a_{26}a_{66} - \alpha a_{27}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{31}a_{61} - \gamma a_{32}a_{62} + \alpha\gamma a_{33}a_{63} - \beta a_{34}a_{64} + \alpha\beta a_{35}a_{65} + a_{36}a_{66} - \alpha a_{37}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{41}a_{61} - \gamma a_{42}a_{62} + \alpha\gamma a_{43}a_{63} - \beta a_{44}a_{64} + \alpha\beta a_{45}a_{65} + a_{46}a_{66} - \alpha a_{47}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{51}a_{61} - \gamma a_{52}a_{62} + \alpha\gamma a_{53}a_{63} - \beta a_{54}a_{64} + \alpha\beta a_{55}a_{65} + a_{56}a_{66} - \alpha a_{57}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{61}a_{61} - \gamma a_{62}a_{62} + \alpha\gamma a_{63}a_{63} - \beta a_{64}a_{64} + \alpha\beta a_{65}a_{65} + a_{66}a_{66} - \alpha a_{67}a_{67} \\
-\alpha\beta\gamma a_{71}a_{61} - \gamma a_{72}a_{62} + \alpha\gamma a_{73}a_{63} - \beta a_{74}a_{64} + \alpha\beta a_{75}a_{65} + a_{76}a_{66} - \alpha a_{77}a_{67} \\
\\
\beta\gamma a_{11}a_{71} + \alpha\gamma a_{12}a_{72} - \gamma a_{13}a_{73} + \alpha\beta a_{14}a_{74} - \beta a_{15}a_{75} - \alpha a_{16}a_{76} + a_{17}a_{77} \\
\beta\gamma a_{21}a_{71} + \alpha\gamma a_{22}a_{72} - \gamma a_{23}a_{73} + \alpha\beta a_{24}a_{74} - \beta a_{25}a_{75} - \alpha a_{26}a_{76} + a_{27}a_{77} \\
\beta\gamma a_{31}a_{71} + \alpha\gamma a_{32}a_{72} - \gamma a_{33}a_{73} + \alpha\beta a_{34}a_{74} - \beta a_{35}a_{75} - \alpha a_{36}a_{76} + a_{37}a_{77} \\
\hline
\beta\gamma a_{41}a_{71} + \alpha\gamma a_{42}a_{72} - \gamma a_{43}a_{73} + \alpha\beta a_{44}a_{74} - \beta a_{45}a_{75} - \alpha a_{46}a_{76} + a_{47}a_{77} \\
\beta\gamma a_{51}a_{71} + \alpha\gamma a_{52}a_{72} - \gamma a_{53}a_{73} + \alpha\beta a_{54}a_{74} - \beta a_{55}a_{75} - \alpha a_{56}a_{76} + a_{57}a_{77} \\
\beta\gamma a_{61}a_{71} + \alpha\gamma a_{62}a_{72} - \gamma a_{63}a_{73} + \alpha\beta a_{64}a_{74} - \beta a_{65}a_{75} - \alpha a_{66}a_{76} + a_{67}a_{77} \\
\beta\gamma a_{71}a_{71} + \alpha\gamma a_{72}a_{72} - \gamma a_{73}a_{73} + \alpha\beta a_{74}a_{74} - \beta a_{75}a_{75} - \alpha a_{76}a_{76} + a_{77}a_{77}
\end{array}$$

равным I .

Условиям преобразований вращения можно придать запись отличную от этой формы по столбцам матрицы $\bar{A}A$:

$$\begin{array}{l}
a_{11}a_{11} + \alpha\beta a_{21}a_{21} - \beta a_{31}a_{31} + \alpha\gamma a_{41}a_{41} - \gamma a_{51}a_{51} - \alpha\beta\gamma a_{61}a_{61} + \beta\gamma a_{71}a_{71} \\
\alpha\beta a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} - \alpha a_{32}a_{31} + \beta\gamma a_{42}a_{41} - \alpha\beta\gamma a_{52}a_{51} - \gamma a_{62}a_{61} + \alpha\gamma a_{72}a_{71} \\
- \beta a_{13}a_{11} - \alpha a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} - \alpha\beta\gamma a_{43}a_{41} + \beta\gamma a_{53}a_{51} + \alpha\gamma a_{63}a_{61} - \gamma a_{73}a_{71} \\
\hline
\alpha\gamma a_{14}a_{11} + \beta\gamma a_{24}a_{21} - \alpha\beta\gamma a_{34}a_{31} + a_{44}a_{41} - \alpha\gamma a_{54}a_{51} - \beta a_{64}a_{61} + \alpha\beta a_{74}a_{71} \\
- \gamma a_{15}a_{11} - \alpha\beta\gamma a_{25}a_{21} + \beta\gamma a_{35}a_{31} - \alpha a_{45}a_{41} + a_{55}a_{51} + \alpha\beta a_{65}a_{61} - \beta a_{75}a_{71} \\
- \alpha\beta\gamma a_{16}a_{11} - \gamma a_{26}a_{21} + \alpha\gamma a_{36}a_{31} - \beta a_{46}a_{41} + \alpha\beta a_{56}a_{51} + a_{66}a_{61} - \alpha a_{76}a_{71} \\
\beta\gamma a_{17}a_{11} + \alpha\gamma a_{27}a_{21} - \gamma a_{37}a_{31} + \alpha\beta a_{47}a_{41} - \beta a_{57}a_{51} - \alpha a_{67}a_{61} + a_{77}a_{71}
\end{array}$$

также равную I . Эта система равенств равносильна предыдущим равенствам.

Любые семь из коэффициентов a_{ik} определяют все остальные. Геометрически коэффициент a_{ik} определяет угол между базисным вектором e_i и повернутым базисным вектором

$$e_k' = A e_k = \sum_{j=1}^7 a_{jk} e_j,$$

$$a_{ik} = (e_i e_k').$$

Преобразование вращения поворачивает радиус – вектор x каждой точки семимерного псевдоевклидова пространства на угол поворота δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инвариантны. Угол поворота δ , а также направляющие углы положительной оси вращения определяются формулами

$$Ch\delta = \frac{1}{6} (Tr(A) - 1) = \frac{1}{6} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{77} - 1) = 2\lambda_0^2 - 1,$$

$$\begin{aligned} \alpha a_{23} + a_{32} + \alpha a_{45} + a_{54} - a_{76} - \alpha a_{67} &= 6c_1 Sh\delta = 12\lambda_1 \lambda_0, \\ \beta a_{46} + a_{64} + \beta a_{57} + a_{75} - a_{31} - \beta a_{13} &= 6c_2 Sh\delta = 12\lambda_2 \lambda_0, \\ \alpha a_{65} - \beta a_{56} + \beta a_{12} - \alpha a_{21} - \alpha \beta a_{47} + a_{74} &= 6c_3 Sh\delta = 12\lambda_3 \lambda_0, \\ -a_{51} - \gamma a_{15} - a_{73} - \gamma a_{37} - a_{62} - \gamma a_{26} &= 6c_4 Sh\delta = 12\lambda_4 \lambda_0, \\ -a_{72} + \alpha \gamma a_{27} + \gamma a_{36} - \alpha a_{63} + \gamma a_{14} - \alpha a_{41} &= 6c_5 Sh\delta = 12\lambda_5 \lambda_0, \\ -\beta \gamma a_{17} + a_{71} + \gamma a_{24} - \beta a_{42} + \beta a_{53} - \gamma a_{35} &= 6c_6 Sh\delta = 12\lambda_6 \lambda_0, \\ \gamma a_{34} + \alpha \beta a_{43} + \alpha a_{61} + \beta \gamma a_{16} - \alpha \gamma a_{25} - \beta a_{52} &= 6c_7 Sh\delta = 12\lambda_7 \lambda_0. \end{aligned}$$

Либо знак угла δ , либо направление оси вращения могут выбираться произвольно.

Матрица преобразования A , соответствующая данному вращению, описываемая числами $\delta, c_1, c_2, \dots, c_7$, есть

$$A = Ch\delta I + (Ch\delta - 1) \begin{vmatrix} -\alpha c_1 c_1 & -\beta c_1 c_2 & \alpha \beta c_1 c_3 & -\gamma c_1 c_4 & \alpha \gamma c_1 c_5 & \beta \gamma c_1 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_1 c_7 \\ -\alpha c_2 c_1 & -\beta c_2 c_2 & \alpha \beta c_2 c_3 & -\gamma c_2 c_4 & \alpha \gamma c_2 c_5 & \beta \gamma c_2 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_2 c_7 \\ -\alpha c_3 c_1 & -\beta c_3 c_2 & \alpha \beta c_3 c_3 & -\gamma c_3 c_4 & \alpha \gamma c_3 c_5 & \beta \gamma c_3 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_3 c_7 \\ -\alpha c_4 c_1 & -\beta c_4 c_2 & \alpha \beta c_4 c_3 & -\gamma c_4 c_4 & \alpha \gamma c_4 c_5 & \beta \gamma c_4 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_4 c_7 \\ -\alpha c_5 c_3 & -\beta c_5 c_2 & \alpha \beta c_5 c_3 & -\gamma c_5 c_4 & \alpha \gamma c_5 c_5 & \beta \gamma c_5 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_5 c_7 \\ -\alpha c_6 c_1 & -\beta c_6 c_2 & \alpha \beta c_6 c_3 & -\gamma c_6 c_4 & \alpha \gamma c_6 c_5 & \beta \gamma c_6 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_6 c_7 \\ -\alpha c_7 c_1 & -\beta c_7 c_2 & \alpha \beta c_7 c_3 & -\gamma c_7 c_4 & \alpha \gamma c_7 c_5 & \beta \gamma c_7 c_6 & -\alpha \beta \gamma c_7 c_7 \end{vmatrix} +$$

$$+ Sh\delta \begin{vmatrix} 0 & \beta c_3 & -\beta c_2 & \gamma c_5 & -\gamma c_4 & \beta \gamma c_7 & -\beta \gamma c_6 \\ -\alpha c_3 & 0 & \alpha c_1 & \gamma c_6 & -\alpha \gamma c_7 & -\gamma c_4 & \alpha \gamma c_5 \\ -c_2 & c_1 & 0 & \gamma c_7 & -\gamma c_6 & \gamma c_5 & -\gamma c_4 \\ -\alpha c_5 & -\beta c_6 & \alpha \beta c_7 & 0 & \alpha c_1 & \beta c_2 & -\alpha \beta c_3 \\ -c_4 & -\beta c_7 & \beta c_6 & c_1 & 0 & -\beta c_3 & \beta c_2 \\ \alpha c_7 & -c_4 & -\alpha c_5 & c_2 & \alpha c_3 & 0 & -\alpha c_1 \\ c_6 & -c_5 & -c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Восемь симметричных параметров (Эйлера)

$$\lambda_0 = Ch \frac{\delta}{2}, \lambda_1 = c_1 Sh \frac{\delta}{2}, \lambda_2 = c_2 Sh \frac{\delta}{2}, \dots, \lambda_7 = c_7 Sh \frac{\delta}{2},$$

$$\lambda_0^2 - \alpha \lambda_1^2 - \beta \lambda_2^2 + \alpha \beta \lambda_3^2 - \gamma \lambda_4^2 + \alpha \gamma \lambda_5^2 + \beta \gamma \lambda_6^2 - \alpha \beta \gamma \lambda_7^2 = 1,$$

$$-\alpha c_1^2 - \beta c_2^2 + \alpha \beta c_3^2 - \gamma c_4^2 + \alpha \gamma c_5^2 + \beta \gamma c_6^2 - \alpha \beta \gamma c_7^2 = -1,$$

однозначно определяют вращение, так как из выражения для матрицы A следует:

$$A = -I + 2^*$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha(\lambda_1\lambda_1 - \alpha\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_1\lambda_3 - \alpha\lambda_2\lambda_0) & -\gamma(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_5\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_1\lambda_5 - \alpha\lambda_4\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_1\lambda_6 + \lambda_7\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_1\lambda_7 + \alpha\lambda_6\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_2\lambda_3 + \beta\lambda_1\lambda_0) & -\gamma(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_6\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_2\lambda_5 - \lambda_7\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_2\lambda_6 - \beta\lambda_4\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_2\lambda_7 - \beta\lambda_5\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_3\lambda_1 + \alpha\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 - \beta\lambda_1\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_3\lambda_3 + \alpha\beta\lambda_0\lambda_0) & -\gamma(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_7\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_3\lambda_5 - \alpha\lambda_6\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_3\lambda_6 + \beta\lambda_5\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_3\lambda_7 + \alpha\beta\lambda_4\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_4\lambda_1 + \lambda_5\lambda_0) & -\beta(\lambda_4\lambda_2 + \lambda_6\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_4\lambda_3 + \lambda_7\lambda_0) & -\gamma(\lambda_4\lambda_4 - \gamma\lambda_0\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_4\lambda_5 + \gamma\lambda_1\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_4\lambda_6 + \gamma\lambda_2\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_4\lambda_7 + \gamma\lambda_3\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_5\lambda_1 + \alpha\lambda_4\lambda_0) & -\beta(\lambda_5\lambda_2 + \lambda_7\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_5\lambda_3 + \alpha\lambda_6\lambda_0) & -\gamma(\lambda_5\lambda_4 - \gamma\lambda_1\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_5\lambda_5 + \alpha\gamma\lambda_0\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_5\lambda_6 - \gamma\lambda_3\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_5\lambda_7 - \alpha\gamma\lambda_2\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_6\lambda_1 - \lambda_7\lambda_0) & -\beta(\lambda_6\lambda_2 + \beta\lambda_4\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_6\lambda_3 - \beta\lambda_5\lambda_0) & -\gamma(\lambda_6\lambda_4 - \gamma\lambda_2\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_6\lambda_5 + \gamma\lambda_3\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_6\lambda_6 + \beta\gamma\lambda_0\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_6\lambda_7 + \beta\gamma\lambda_1\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_7\lambda_1 - \alpha\lambda_6\lambda_0) & -\beta(\lambda_7\lambda_2 + \beta\lambda_5\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_7\lambda_3 - \alpha\beta\lambda_4\lambda_0) & -\gamma(\lambda_7\lambda_4 - \gamma\lambda_3\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_7\lambda_5 + \alpha\gamma\lambda_2\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_7\lambda_6 - \beta\gamma\lambda_1\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_7\lambda_7 - \alpha\beta\gamma\lambda_0\lambda_0) \end{vmatrix}$$

При этом

$$\bar{A} = -I + 2^*$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha(\lambda_1\lambda_1 - \alpha\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_1\lambda_3 + \alpha\lambda_2\lambda_0) & -\gamma(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_5\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_1\lambda_5 + \alpha\lambda_4\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_1\lambda_6 - \lambda_7\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_1\lambda_7 - \alpha\lambda_6\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_2\lambda_1 - \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_2\lambda_3 - \beta\lambda_1\lambda_0) & -\gamma(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_6\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_2\lambda_5 + \lambda_7\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_2\lambda_6 + \beta\lambda_4\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_2\lambda_7 + \beta\lambda_5\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_3\lambda_1 - \alpha\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 + \beta\lambda_1\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_3\lambda_3 + \alpha\beta\lambda_0\lambda_0) & -\gamma(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_7\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_3\lambda_5 + \alpha\lambda_6\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_3\lambda_6 - \beta\lambda_5\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_3\lambda_7 - \alpha\beta\lambda_4\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_4\lambda_1 - \lambda_5\lambda_0) & -\beta(\lambda_4\lambda_2 - \lambda_6\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_4\lambda_3 - \lambda_7\lambda_0) & -\gamma(\lambda_4\lambda_4 - \gamma\lambda_0\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_4\lambda_5 - \gamma\lambda_1\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_4\lambda_6 - \gamma\lambda_2\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_4\lambda_7 - \gamma\lambda_3\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_5\lambda_1 - \alpha\lambda_4\lambda_0) & -\beta(\lambda_5\lambda_2 - \lambda_7\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_5\lambda_3 - \alpha\lambda_6\lambda_0) & -\gamma(\lambda_5\lambda_4 + \gamma\lambda_1\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_5\lambda_5 + \alpha\gamma\lambda_0\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_5\lambda_6 + \gamma\lambda_3\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_5\lambda_7 + \alpha\gamma\lambda_2\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_6\lambda_1 + \lambda_7\lambda_0) & -\beta(\lambda_6\lambda_2 - \beta\lambda_4\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_6\lambda_3 + \beta\lambda_5\lambda_0) & -\gamma(\lambda_6\lambda_4 + \gamma\lambda_2\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_6\lambda_5 - \gamma\lambda_3\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_6\lambda_6 + \beta\gamma\lambda_0\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_6\lambda_7 - \beta\gamma\lambda_1\lambda_0) \\ -\alpha(\lambda_7\lambda_1 + \alpha\lambda_6\lambda_0) & -\beta(\lambda_7\lambda_2 - \beta\lambda_5\lambda_0) & \alpha\beta(\lambda_7\lambda_3 + \alpha\beta\lambda_4\lambda_0) & -\gamma(\lambda_7\lambda_4 + \gamma\lambda_3\lambda_0) & \alpha\gamma(\lambda_7\lambda_5 - \alpha\gamma\lambda_2\lambda_0) & \beta\gamma(\lambda_7\lambda_6 + \beta\gamma\lambda_1\lambda_0) & -\alpha\beta\gamma(\lambda_7\lambda_7 - \alpha\beta\gamma\lambda_0\lambda_0) \end{vmatrix}$$

Будем считать для определенности $\alpha=\beta=\gamma=1$. В принятом предположении

$$Ch\delta = \frac{1}{6} (\text{Tr}(A) - 1) = \frac{1}{6} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{77} - 1) = 2\lambda_0^2 - 1,$$

$$\beta a_{23} + a_{32} + \beta a_{45} + a_{54} - a_{76} - \beta a_{67} = 6c_1 Sh\delta = 12\lambda_1\lambda_0,$$

$$\beta a_{46} + a_{64} + \beta a_{57} + a_{75} - a_{31} - \beta a_{13} = 6c_2 Sh\delta = 12\lambda_2\lambda_0,$$

$$\beta a_{65} - \beta a_{56} + \beta a_{12} - \beta a_{21} - a_{47} + a_{74} = 6c_3 Sh\delta = 12\lambda_3\lambda_0,$$

$$-a_{51} - \beta a_{15} - a_{73} - \beta a_{37} - a_{62} - \beta a_{26} = 6c_4 Sh\delta = 12\lambda_4\lambda_0,$$

$$-a_{72} + a_{27} + \beta a_{36} - \beta a_{63} + \beta a_{14} - \beta a_{41} = 6c_5 Sh\delta = 12\lambda_5\lambda_0,$$

$$-a_{17} + a_{71} + \beta a_{24} - \beta a_{42} + \beta a_{53} - \beta a_{35} = 6c_6 Sh\delta = 12\lambda_6\lambda_0,$$

$$\beta a_{34} + a_{43} + \beta a_{61} + a_{16} - a_{25} - \beta a_{52} = 6c_7 Sh\delta = 12\lambda_7\lambda_0.$$

$$A = Ch\delta I + (Ch\delta - 1) \begin{vmatrix} -\beta c_1 c_1 & -\beta c_1 c_2 & c_1 c_3 & -\beta c_1 c_4 & c_1 c_5 & c_1 c_6 & -\beta c_1 c_7 \\ -\beta c_2 c_1 & -\beta c_2 c_2 & c_2 c_3 & -\beta c_2 c_4 & c_2 c_5 & c_2 c_6 & -\beta c_2 c_7 \\ -\beta c_3 c_1 & -\beta c_3 c_2 & c_3 c_3 & -\beta c_3 c_4 & c_3 c_5 & c_3 c_6 & -\beta c_3 c_7 \\ -\beta c_4 c_1 & -\beta c_4 c_2 & c_4 c_3 & -\beta c_4 c_4 & c_4 c_5 & c_4 c_6 & -\beta c_4 c_7 \\ -\beta c_5 c_1 & -\beta c_5 c_2 & c_5 c_3 & -\beta c_5 c_4 & c_5 c_5 & c_5 c_6 & -\beta c_5 c_7 \\ -\beta c_6 c_1 & -\beta c_6 c_2 & c_6 c_3 & -\beta c_6 c_4 & c_6 c_5 & c_6 c_6 & -\beta c_6 c_7 \\ -\beta c_7 c_1 & -\beta c_7 c_2 & c_7 c_3 & -\beta c_7 c_4 & c_7 c_5 & c_7 c_6 & -\beta c_7 c_7 \end{vmatrix} +$$

$$+Sh\delta \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \beta c_3 & -\beta c_2 & \beta c_5 & -\beta c_4 & c_7 & -c_6 \\ -\beta c_3 & 0 & \beta c_1 & \beta c_6 & -c_7 & -\beta c_4 & c_5 \\ -c_2 & c_1 & 0 & \beta c_7 & -\beta c_6 & \beta c_5 & -\beta c_4 \\ \hline -\beta c_5 & -\beta c_6 & c_7 & 0 & \beta c_1 & \beta c_2 & -c_3 \\ -c_4 & -\beta c_7 & \beta c_6 & c_1 & 0 & -\beta c_3 & \beta c_2 \\ \beta c_7 & -c_4 & -\beta c_5 & c_2 & \beta c_3 & 0 & -\beta c_1 \\ c_6 & -c_5 & -c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 \end{array} \right|.$$

Восемь симметричных параметров (Эйлера)

$$\lambda_0^2 - \beta \lambda_1^2 - \beta \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \beta \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2 - \beta \lambda_7^2 = 1,$$

$$-\beta c_1^2 - \beta c_2^2 + c_3^2 - \beta c_4^2 + c_5^2 + c_6^2 - \beta c_7^2 = -1,$$

однозначно определяют вращение, причем из выражения для матрицы A следует:

$$A = -I + 2^*$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -\beta(\lambda_1\lambda_1 - \beta\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0) & \lambda_1\lambda_3 - \beta\lambda_2\lambda_0 & -\beta(\lambda_1\lambda_4 - \lambda_5\lambda_0) & \lambda_1\lambda_5 - \beta\lambda_4\lambda_0 & \lambda_1\lambda_6 + \lambda_7\lambda_0 & -\beta(\lambda_1\lambda_7 + \lambda_6\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_2\lambda_3 + \beta\lambda_1\lambda_0 & -\beta(\lambda_2\lambda_4 - \lambda_6\lambda_0) & \lambda_2\lambda_5 - \lambda_7\lambda_0 & \lambda_2\lambda_6 - \beta\lambda_4\lambda_0 & -\beta(\lambda_2\lambda_7 - \beta\lambda_5\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_3\lambda_1 + \beta\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 - \beta\lambda_1\lambda_0) & \lambda_3\lambda_3 + \lambda_0\lambda_0 & -\beta(\lambda_3\lambda_4 - \lambda_7\lambda_0) & \lambda_3\lambda_5 - \beta\lambda_6\lambda_0 & \lambda_3\lambda_6 + \beta\lambda_5\lambda_0 & -\beta(\lambda_3\lambda_7 + \lambda_4\lambda_0) \\ \hline -\beta(\lambda_4\lambda_1 + \lambda_5\lambda_0) & -\beta(\lambda_4\lambda_2 + \lambda_6\lambda_0) & \lambda_4\lambda_3 + \lambda_7\lambda_0 & -\beta(\lambda_4\lambda_4 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_4\lambda_5 + \beta\lambda_1\lambda_0 & \lambda_4\lambda_6 + \beta\lambda_2\lambda_0 & -\beta(\lambda_4\lambda_7 + \beta\lambda_3\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_5\lambda_1 + \beta\lambda_4\lambda_0) & -\beta(\lambda_5\lambda_2 + \lambda_7\lambda_0) & \lambda_5\lambda_3 + \beta\lambda_6\lambda_0 & -\beta(\lambda_5\lambda_4 - \lambda_1\lambda_0) & \lambda_5\lambda_5 + \lambda_0\lambda_0 & \lambda_5\lambda_6 - \beta\lambda_3\lambda_0 & -\beta(\lambda_5\lambda_7 - \lambda_2\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_6\lambda_1 - \lambda_7\lambda_0) & -\beta(\lambda_6\lambda_2 + \beta\lambda_4\lambda_0) & \lambda_6\lambda_3 - \beta\lambda_5\lambda_0 & -\beta(\lambda_6\lambda_4 - \lambda_2\lambda_0) & \lambda_6\lambda_5 + \beta\lambda_3\lambda_0 & \lambda_6\lambda_6 + \lambda_0\lambda_0 & -\beta(\lambda_6\lambda_7 + \lambda_1\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_7\lambda_1 - \beta\lambda_6\lambda_0) & -\beta(\lambda_7\lambda_2 + \beta\lambda_5\lambda_0) & \lambda_7\lambda_3 - \lambda_4\lambda_0 & -\beta(\lambda_7\lambda_4 - \beta\lambda_3\lambda_0) & \lambda_7\lambda_5 + \lambda_2\lambda_0 & \lambda_7\lambda_6 - \lambda_1\lambda_0 & -\beta(\lambda_7\lambda_7 - \beta\lambda_0\lambda_0) \end{array} \right|$$

При этом

$$\bar{A} = -I + 2^*$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -\beta(\lambda_1\lambda_1 - \beta\lambda_0\lambda_0) & -\beta(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_0) & \lambda_1\lambda_3 + \beta\lambda_2\lambda_0 & -\beta(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_5\lambda_0) & \lambda_1\lambda_5 + \beta\lambda_4\lambda_0 & \lambda_1\lambda_6 - \lambda_7\lambda_0 & -\beta(\lambda_1\lambda_7 - \beta\lambda_6\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_2\lambda_1 - \lambda_3\lambda_0) & -\beta(\lambda_2\lambda_2 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_2\lambda_3 - \beta\lambda_1\lambda_0 & -\beta(\lambda_2\lambda_4 + \lambda_6\lambda_0) & \lambda_2\lambda_5 + \lambda_7\lambda_0 & \lambda_2\lambda_6 + \beta\lambda_4\lambda_0 & -\beta(\lambda_2\lambda_7 + \beta\lambda_5\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_3\lambda_1 - \beta\lambda_2\lambda_0) & -\beta(\lambda_3\lambda_2 + \beta\lambda_1\lambda_0) & \lambda_3\lambda_3 + \lambda_0\lambda_0 & -\beta(\lambda_3\lambda_4 + \lambda_7\lambda_0) & \lambda_3\lambda_5 + \beta\lambda_6\lambda_0 & \lambda_3\lambda_6 - \beta\lambda_5\lambda_0 & -\beta(\lambda_3\lambda_7 - \lambda_4\lambda_0) \\ \hline -\beta(\lambda_4\lambda_1 - \lambda_5\lambda_0) & -\beta(\lambda_4\lambda_2 - \lambda_6\lambda_0) & \lambda_4\lambda_3 - \lambda_7\lambda_0 & -\beta(\lambda_4\lambda_4 - \beta\lambda_0\lambda_0) & \lambda_4\lambda_5 - \beta\lambda_1\lambda_0 & \lambda_4\lambda_6 - \beta\lambda_2\lambda_0 & -\beta(\lambda_4\lambda_7 - \beta\lambda_3\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_5\lambda_1 - \beta\lambda_4\lambda_0) & -\beta(\lambda_5\lambda_2 - \lambda_7\lambda_0) & \lambda_5\lambda_3 - \beta\lambda_6\lambda_0 & -\beta(\lambda_5\lambda_4 + \beta\lambda_1\lambda_0) & \lambda_5\lambda_5 + \lambda_0\lambda_0 & \lambda_5\lambda_6 + \beta\lambda_3\lambda_0 & -\beta(\lambda_5\lambda_7 + \lambda_2\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_6\lambda_1 + \lambda_7\lambda_0) & -\beta(\lambda_6\lambda_2 - \beta\lambda_4\lambda_0) & \lambda_6\lambda_3 + \beta\lambda_5\lambda_0 & -\beta(\lambda_6\lambda_4 + \beta\lambda_2\lambda_0) & \lambda_6\lambda_5 - \beta\lambda_3\lambda_0 & \lambda_6\lambda_6 + \lambda_0\lambda_0 & -\beta(\lambda_6\lambda_7 - \lambda_1\lambda_0) \\ -\beta(\lambda_7\lambda_1 + \beta\lambda_6\lambda_0) & -\beta(\lambda_7\lambda_2 - \beta\lambda_5\lambda_0) & \lambda_7\lambda_3 + \lambda_4\lambda_0 & -\beta(\lambda_7\lambda_4 + \beta\lambda_3\lambda_0) & \lambda_7\lambda_5 - \lambda_2\lambda_0 & \lambda_7\lambda_6 + \lambda_1\lambda_0 & -\beta(\lambda_7\lambda_7 - \beta\lambda_0\lambda_0) \end{array} \right|$$

Параметры $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7$ и $-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_7$ представляют одно и тоже вращение.

Следующие матрицы преобразования описывают правые вращения вокруг положительных координатных осей:

$$A_1(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Ch\varphi & \beta Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sh\varphi & Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & \beta Sh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Sh\varphi & Ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & -\beta Sh\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Sh\varphi & Ch\varphi \end{array} \right|,$$

$$A_2(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} Ch\varphi & 0 & -\beta Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Sh\varphi & 0 & Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 & \beta Sh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 & \beta Sh\varphi \\ 0 & 0 & 0 & Sh\varphi & 0 & Ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Sh\varphi & 0 & Ch\varphi \end{array} \right| ,$$

$$A_3(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} \cos\varphi & \beta\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\beta\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi \end{array} \right| ,$$

$$A_4(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & -\beta Sh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & -\beta Sh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & -\beta Sh\varphi \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi \end{array} \right| ,$$

$$A_5(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} \cos\varphi & 0 & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \beta\sin\varphi & 0 \\ \hline -\beta\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \end{array} \right| ,$$

$$A_6(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\beta\sin\varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\beta\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi \end{array} \right| ,$$

$$A_7(\varphi) = \left| \begin{array}{ccc|cccc} Ch\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & Sh\varphi & 0 \\ 0 & Ch\varphi & 0 & 0 & -Sh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ch\varphi & \beta Sh\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Sh\varphi & Ch\varphi & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| .$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\beta Sh\varphi & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 & 0 \\ \beta Sh\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & Ch\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Заметим, что $A_i^{-1}(\varphi) = \overline{A_i}(\varphi) = A_i(-\varphi)$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

Каждая матрица A , описывающая собственное вращение в семимерном псевдоевклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения семи матриц

$$A = A_{i_1}(\varphi_1)A_{i_2}(\varphi_2)\dots A_{i_7}(\varphi_7),$$

в частности, так:

$$A = A_3(\varphi_1)A_2(\varphi_2)A_3(\varphi_3)A_5(\varphi_4)A_3(\varphi_5)A_7(\varphi_6)A_3(\varphi_7).$$

Семь углов (Эйлера) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$, однозначно определяют вращение; в свою очередь они однозначно определяются данным вращением, за исключением случая, когда $\varphi_2, \varphi_5, \varphi_7$ равны нулю (карданов подвес).

Результат расчета матрицы вращения в семимерном псевдоевклидовом пространстве индекса 4 приведен в таблице 1.

Обратное вращение A^{-1} (переводящее вектор $\mathbf{x}'$ в исходный вектор $\mathbf{x}$) представляется матрицей $A^{-1} = \overline{A} = A_3(-\varphi_7)A_7(-\varphi_6)A_3(-\varphi_5)A_5(-\varphi_4)A_3(-\varphi_3)A_2(-\varphi_2)A_3(-\varphi_1)$.

Существуют множество способов, которыми матрицу вращения можно выразить путем вращения вокруг четырех различных осей координат. Кроме того, существует множество способов представления матриц вращения в виде произведения вращений вокруг семи различных осей координат, в частности так:

$$A = A_1(\varphi_1)A_2(\varphi_2)A_3(\varphi_3)A_4(\varphi_4)A_5(\varphi_5)A_6(\varphi_6)A_7(\varphi_7).$$

Таблица 1

$$\begin{aligned}
a_{11} &= C_{13457}Ch_{26} - C_{134}S_{57}Ch_{26} - C_{457}S_{13}Ch_6 + C_4S_{1357}Ch_6 - C_{147}S_{35}Ch_{26} - C_{145}S_{37}Ch_{26} - \\
&- C_{347}S_{15}Ch_6 - C_{345}S_{17}Ch_6 - \beta C_{157}S_4Sh_{26} - \beta C_1S_{457}Sh_{26} \\
a_{21} &= -\beta C_{3457}S_1Ch_{26} + \beta C_{34}S_{157}Ch_{26} - \beta C_{1457}S_3Ch_6 + \beta C_{14}S_{357}Ch_6 + \beta C_{47}S_{135}Ch_{26} + \\
&+ \beta C_{45}S_{137}Ch_{26} - \beta C_{1347}S_5Ch_6 - \beta C_{1345}S_7Ch_6 + C_{57}S_{14}Sh_{26} + S_{1457}Sh_{26} \\
a_{31} &= -C_{3457}Ch_6Sh_2 + C_{34}S_{57}Ch_6Sh_2 + C_{47}S_{35}Ch_6Sh_2 + C_{45}S_{37}Ch_6Sh_2 + C_{57}S_4Ch_2Sh_6 + \\
&+ S_{457}Ch_2Sh_6 \\
a_{41} &= -\beta C_{1357}S_4Ch_{26} + \beta C_{13}S_{457}Ch_{26} + \beta C_{57}S_{134}Ch_{26} - \beta S_{13457}Ch_{26} - \beta C_{17}S_{345}Ch_{26} - \\
&- \beta C_{15}S_{347}Ch_{26} - \beta C_{37}S_{145}Ch_{26} - \beta C_{35}S_{147}Ch_{26} + C_{37}S_{15}Sh_{26} - C_{35}S_{17}Sh_{26} - \\
&- C_{17}S_{35}Sh_{26} + C_{15}S_{37}Sh_{26} + C_{457}S_{13}Sh_{26} + C_4S_{1357}Sh_{26} + C_{13457}Sh_{26} + C_{134}S_{57}Sh_{26} \\
a_{51} &= C_{357}S_{14}Ch_6Sh_2 - C_3S_{1457}Ch_6Sh_2 - C_{157}S_{34}Ch_6Sh_2 + C_1S_{3457}Ch_6Sh_2 + \\
&+ C_7S_{1345}Ch_6Sh_2 + C_5S_{1347}Ch_6Sh_2 + C_{137}S_{45}Ch_6Sh_2 + C_{135}S_{47}Ch_6Sh_2 - \\
&- C_{137}S_5Ch_2Sh_6 + C_{135}S_7Ch_2Sh_6 + C_7S_{135}Ch_2Sh_6 - C_5S_{137}Ch_2Sh_6 - C_{1457}S_3Ch_2Sh_6 - \\
&- C_{14}S_{357}Ch_2Sh_6 - C_{3457}S_1Ch_2Sh_6 - C_{34}S_{157}Ch_2Sh_6 \\
a_{61} &= -\beta C_{1357}S_4Ch_6Sh_2 + \beta C_{13}S_{457}Ch_6Sh_2 - \beta C_{57}S_{134}Ch_6Sh_2 + \beta S_{13457}Ch_6Sh_2 - \\
&- \beta C_{17}S_{345}Ch_6Sh_2 - \beta C_{15}S_{347}Ch_6Sh_2 + \beta C_{37}S_{145}Ch_6Sh_2 + \beta C_{35}S_{147}Ch_6Sh_2 - \\
&- \beta C_{37}S_{15}Ch_2Sh_6 + \beta C_{35}S_{17}Ch_2Sh_6 - \beta C_{17}S_{35}Ch_2Sh_6 + \beta C_{15}S_{37}Ch_2Sh_6 - \\
&- \beta C_{457}S_{13}Ch_2Sh_6 - \beta C_4S_{1357}Ch_2Sh_6 + \beta C_{13457}Ch_2Sh_6 + \beta C_{134}S_{57}Ch_2Sh_6 \\
a_{71} &= -\beta C_{357}S_{14}Ch_{26} + \beta C_3S_{1457}Ch_{26} - \beta C_{157}S_{34}Ch_{26} + \beta C_1S_{3457}Ch_{26} + \beta C_{137}S_{45}Ch_{26} + \\
&+ \beta C_{135}S_{47}Ch_{26} - \beta C_7S_{1345}Ch_{26} - \beta C_5S_{1347}Ch_{26} - C_{137}S_5Sh_{26} + C_{135}S_7Sh_{26} - C_7S_{135}Sh_{26} + \\
&+ C_5S_{137}Sh_{26} - C_{1457}S_3Sh_{26} - C_{14}S_{357}Sh_{26} + C_{3457}S_1Sh_{26} + C_{34}S_{157}Sh_{26} \\
a_{12} &= \beta C_{1345}S_7Ch_{26} + \beta C_{1347}S_5Ch_{26} - \beta C_{45}S_{137}Ch_6 - \beta C_{47}S_{135}Ch_6 + \beta C_{1457}S_3Ch_{26} - \\
&- \beta C_{14}S_{357}Ch_{26} + \beta C_{3457}S_1Ch_6 - \beta C_{34}S_{157}Ch_6 + C_{17}S_{45}Sh_{26} - C_{15}S_{47}Sh_{26} \\
a_{22} &= -C_{345}S_{17}Ch_{26} - C_{347}S_{15}Ch_{26} - C_{145}S_{37}Ch_6 - C_{147}S_{35}Ch_6 - C_{457}S_{13}Ch_{26} + \\
&+ C_4S_{1357}Ch_{26} + C_{13457}Ch_6 - C_{134}S_{57}Ch_6 - \beta C_7S_{145}Sh_{26} + \beta C_5S_{147}Sh_{26} \\
a_{32} &= \beta C_{345}S_7Ch_6Sh_2 - \beta C_{347}S_5Ch_6Sh_2 - \beta C_{457}S_3Ch_6Sh_2 + \beta C_4S_{357}Ch_6Sh_2 - \\
&- \beta C_7S_{45}Ch_2Sh_6 + \beta C_5S_{47}Ch_2Sh_6 \\
a_{42} &= -C_{135}S_{47}Ch_{26} - C_{137}S_{45}Ch_{26} + C_5S_{1347}Ch_{26} + C_7S_{1345}Ch_{26} + C_{157}S_{34}Ch_{26} - \\
&- C_1S_{3457}Ch_{26} + C_{357}S_{14}Ch_{26} - C_3S_{1457}Ch_{26} + \beta C_3S_{157}Sh_{26} + \beta C_{357}S_1Sh_{26} - \beta C_1S_{357}Sh_{26} - \\
&- \beta C_{157}S_3Sh_{26} - \beta C_{47}S_{135}Sh_{26} + \beta C_{45}S_{137}Sh_{26} - \beta C_{1347}S_5Sh_{26} + \beta C_{1345}S_7Sh_{26} \\
a_{52} &= \beta C_{35}S_{147}Ch_6Sh_2 + \beta C_{37}S_{145}Ch_6Sh_2 - \beta C_{15}S_{347}Ch_6Sh_2 - \beta C_{17}S_{345}Ch_6Sh_2 - \\
&- \beta C_{57}S_{134}Ch_6Sh_2 + \beta S_{13457}Ch_6Sh_2 - \beta C_{1357}S_4Ch_6Sh_2 + \beta C_{13}S_{457}Ch_6Sh_2 - \\
&- \beta C_{13}S_{57}Ch_2Sh_6 - \beta C_{1357}Ch_2Sh_6 + \beta S_{1357}Ch_2Sh_6 + \beta C_{57}S_{13}Ch_2Sh_6 + \beta C_{147}S_{35}Ch_2Sh_6 - \\
&- \beta C_{145}S_{37}Ch_2Sh_6 + \beta C_{347}S_{15}Ch_2Sh_6 - \beta C_{345}S_{17}Ch_2Sh_6 \\
a_{62} &= -C_{135}S_{47}Ch_6Sh_2 - C_{137}S_{45}Ch_6Sh_2 - C_5S_{1347}Ch_6Sh_2 - C_7S_{1345}Ch_6Sh_2 + \\
&+ C_{157}S_{34}Ch_6Sh_2 - C_1S_{3457}Ch_6Sh_2 - C_{357}S_{14}Ch_6Sh_2 + C_3S_{1457}Ch_6Sh_2 - C_3S_{157}Ch_2Sh_6 - \\
&- C_{357}S_1Ch_2Sh_6 - C_1S_{357}Ch_2Sh_6 - C_{157}S_3Ch_2Sh_6 + C_{47}S_{135}Ch_2Sh_6 - C_{45}S_{137}Ch_2Sh_6 - \\
&- C_{1347}S_5Ch_2Sh_6 + C_{1345}S_7Ch_2Sh_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{72} = & -C_{35}S_{147}Ch_{26} - C_{37}S_{145}Ch_{26} - C_{15}S_{347}Ch_{26} - C_{17}S_{345}Ch_{26} + C_{57}S_{134}Ch_{26} - \\
& -S_{13457}Ch_{26} - C_{1357}S_4Ch_{26} + C_{13}S_{457}Ch_{26} - \beta C_{13}S_{57}Sh_{26} - \beta C_{1357}Sh_{26} - \beta S_{1357}Sh_{26} - \\
& -\beta C_{57}S_{13}Sh_{26} + \beta C_{147}S_{35}Sh_{26} - \beta C_{145}S_{37}Sh_{26} - \beta C_{347}S_{15}Sh_{26} + \beta C_{345}S_{17}Sh_{26} \\
a_{13} = & \beta C_{135}S_4Ch_2Sh_6 - \beta C_5S_{134}Sh_6 + \beta C_1S_{345}Ch_2Sh_6 + \beta C_3S_{145}Sh_6 - \beta C_{14}Ch_6Sh_2 \\
a_{23} = & -C_{35}S_{14}Ch_2Sh_6 - C_{15}S_{34}Sh_6 - S_{1345}Ch_2Sh_6 + C_{13}S_{45}Sh_6 + C_4S_1Ch_6Sh_2 \\
a_{33} = & C_4Ch_{26} - \beta C_{35}S_4Sh_{26} - \beta S_{345}Sh_{26} \\
a_{43} = & -S_{134}Ch_6Sh_2 - C_{13}S_4Ch_6Sh_2 + C_{1345}Ch_2Sh_6 - C_{45}S_{13}Ch_2Sh_6 - C_{14}S_{35}Ch_2Sh_6 - \\
& -C_{34}S_{15}Ch_2Sh_6 \\
a_{53} = & C_1S_{34}Ch_{26} + C_3S_{14}Ch_{26} - \beta C_{345}S_1Sh_{26} + \beta C_{145}S_3Sh_{26} + \beta C_4S_{135}Sh_{26} + \beta C_{134}S_5Sh_{26} \\
a_{63} = & \beta S_{134}Ch_{26} - \beta C_{13}S_4Ch_{26} + C_{1345}Sh_{26} + C_{45}S_{13}Sh_{26} - C_{14}S_{35}Sh_{26} + C_{34}S_{15}Sh_{26} \\
a_{73} = & C_1S_{34}Ch_6Sh_2 - C_3S_{14}Ch_6Sh_2 + C_{345}S_1Ch_2Sh_6 + C_{145}S_3Ch_2Sh_6 + C_{134}S_5Ch_2Sh_6 - \\
& -C_4S_{135}Ch_2Sh_6 \\
a_{14} = & \beta C_{1357}S_4Ch_{26} - \beta C_{13}S_{457}Ch_2 - \beta C_{57}S_{134}Ch_6 + \beta S_{13457} + \beta C_{17}S_{345}Ch_{26} + \\
& + \beta C_{15}S_{347}Ch_2 + \beta C_{37}S_{145}Ch_6 + \beta C_{35}S_{147} - C_{147}Sh_{26} \\
a_{24} = & -C_{357}S_{14}Ch_{26} + C_3S_{1457}Ch_2 - C_{157}S_{34}Ch_6 + C_1S_{3457} - C_7S_{1345}Ch_{26} - C_5S_{1347}Ch_2 + \\
& + C_{137}S_{45}Ch_6 + C_{135}S_{47} + \beta C_{47}S_1Sh_{26} \\
a_{34} = & \beta C_{47}Ch_2Sh_6 - \beta C_{357}S_4Ch_6Sh_2 + \beta C_3S_{457}Sh_2 - \beta C_7S_{345}Ch_6Sh_2 - \beta C_5S_{347}Sh_2 \\
a_{44} = & -\beta C_7S_{134}Sh_{26} - \beta C_{137}S_4Sh_{26} - C_{457}S_{13}Ch_{26} + C_4S_{1357}Ch_2 + C_{13457}Ch_{26} - C_{134}S_{57}Ch_2 - \\
& -C_{147}S_{35}Ch_{26} - C_{145}S_{37}Ch_2 - C_{347}S_{15}Ch_{26} - C_{345}S_{17}Ch_2 \\
a_{54} = & \beta C_{17}S_{34}Ch_2Sh_6 + \beta C_{37}S_{14}Ch_2Sh_6 - \beta C_{3457}S_1Ch_6Sh_2 + \beta C_{34}S_{157}Sh_2 + \\
& + \beta C_{1457}S_3Ch_6Sh_2 - \beta C_{14}S_{357}Sh_2 + \beta C_{47}S_{135}Ch_6Sh_2 + \beta C_{45}S_{137}Sh_2 + \beta C_{1347}S_5Ch_6Sh_2 \\
& + \beta C_{1345}S_7Sh_2 \\
a_{64} = & C_7S_{134}Ch_2Sh_6 - C_{137}S_4Ch_2Sh_6 + C_{13457}Ch_6Sh_2 - C_{134}S_{57}Sh_2 + C_{457}S_{13}Ch_6Sh_2 - \\
& -C_4S_{1357}Sh_2 - C_{147}S_{35}Ch_6Sh_2 - C_{145}S_{37}Sh_2 + C_{347}S_{15}Ch_6Sh_2 + C_{345}S_{17}Sh_2 \\
a_{74} = & \beta C_{17}S_{34}Sh_{26} - \beta C_{37}S_{14}Sh_{26} + C_{3457}S_1Ch_{26} - C_{34}S_{157}Ch_2 + C_{1457}S_3Ch_{26} - \\
& -C_{14}S_{357}Ch_2 + C_{1347}S_5Ch_{26} + C_{1345}S_7Ch_2 - C_{47}S_{135}Ch_{26} - C_{45}S_{137}Ch_2 \\
a_{15} = & -\beta C_{1347}S_5Ch_2Sh_6 + \beta C_{1345}S_7Ch_2Sh_6 + \beta C_{47}S_{135}Sh_6 - \beta C_{45}S_{137}Sh_6 - \\
& -\beta C_{1457}S_3Ch_2Sh_6 - \beta C_{14}S_{357}Ch_2Sh_6 - \beta C_{3457}S_1Sh_6 - \beta C_{34}S_{157}Sh_6 - \beta C_{15}S_{47}Ch_6Sh_2 - \\
& -\beta C_{17}S_{45}Ch_6Sh_2 \\
a_{25} = & C_{347}S_{15}Ch_2Sh_6 - C_{345}S_{17}Ch_2Sh_6 + C_{147}S_{35}Sh_6 - C_{145}S_{37}Sh_6 + C_{457}S_{13}Ch_2Sh_6 + \\
& + C_4S_{1357}Ch_2Sh_6 - C_{13457}Sh_6 - C_{134}S_{57}Sh_6 + C_5S_{147}Ch_6Sh_2 + C_7S_{145}Ch_6Sh_2 \\
a_{35} = & \beta C_{347}S_5Sh_{26} - \beta C_{345}S_7Sh_{26} + \beta C_{457}S_3Sh_{26} + \beta C_4S_{357}Sh_{26} + C_5S_{47}Ch_{26} + C_7S_{45}Ch_{26}
\end{aligned}$$

$$a_{45} = C_{137}S_{45}Ch_2Sh_6 - C_{135}S_{47}Ch_2Sh_6 - C_7S_{1345}Ch_2Sh_6 + C_5S_{1347}Ch_2Sh_6 - \\ - C_{157}S_{34}Ch_2Sh_6 - C_1S_{3457}Ch_2Sh_6 - C_{357}S_{14}Ch_2Sh_6 - C_3S_{1457}Ch_2Sh_6 - C_{357}S_1Ch_6Sh_2 + \\ + C_3S_{157}Ch_6Sh_2 + C_{157}S_3Ch_6Sh_2 - C_1S_{357}Ch_6Sh_2 + C_{45}S_{137}Ch_6Sh_2 + C_{47}S_{135}Ch_6Sh_2 + \\ + C_{1345}S_7Ch_6Sh_2 + C_{1347}S_5Ch_6Sh_2$$

$$a_{55} = -\beta C_{37}S_{145}Sh_{26} + \beta C_{35}S_{147}Sh_{26} + \beta C_{17}S_{345}Sh_{26} - \beta C_{15}S_{347}Sh_{26} + \beta C_{57}S_{134}Sh_{26} + \\ + \beta S_{13457}Sh_{26} + \beta C_{1357}S_4Sh_{26} + \beta C_{13}S_{457}Sh_{26} + C_{1357}Ch_{26} - C_{13}S_{57}Ch_{26} - \\ + C_{57}S_{13}Ch_{26} + S_{1357}Ch_{26} - C_{145}S_{37}Ch_{26} - C_{147}S_{35}Ch_{26} - C_{345}S_{17}Ch_{26} - C_{347}S_{15}Ch_{26}$$

$$a_{65} = C_{137}S_{45}Sh_{26} - C_{135}S_{47}Sh_{26} + C_7S_{1345}Sh_{26} - C_5S_{1347}Sh_{26} - C_{157}S_{34}Sh_{26} - C_1S_{3457}Sh_{26} + \\ + C_{357}S_{14}Sh_{26} + C_3S_{1457}Sh_{26} + \beta C_{357}S_1Ch_{26} - \beta C_3S_{157}Ch_{26} + \beta C_{157}S_3Ch_{26} - \beta C_1S_{357}Ch_{26} - \\ - \beta C_{45}S_{137}Ch_{26} - \beta C_{47}S_{135}Ch_{26} + \beta C_{1345}S_7Ch_{26} + \beta C_{1347}S_5Ch_{26}$$

$$a_{75} = C_{37}S_{145}Ch_2Sh_6 - C_{35}S_{147}Ch_2Sh_6 + C_{17}S_{345}Ch_2Sh_6 - C_{15}S_{347}Ch_2Sh_6 - \\ - C_{57}S_{134}Ch_2Sh_6 - S_{13457}Ch_2Sh_6 + C_{1357}S_4Ch_2Sh_6 + C_{13}S_{457}Ch_2Sh_6 + C_{1357}Ch_6Sh_2 - \\ - C_{13}S_{57}Ch_6Sh_2 + C_{57}S_{13}Ch_6Sh_2 - S_{1357}Ch_6Sh_2 - C_{145}S_{37}Ch_6Sh_2 - C_{147}S_{35}Ch_6Sh_2 + \\ + C_{345}S_{17}Ch_6Sh_2 + C_{347}S_{15}Ch_6Sh_2$$

$$a_{16} = C_{134}S_{57}Ch_2Sh_6 + C_{13457}Ch_2Sh_6 - C_4S_{1357}Sh_6 - C_{457}S_{13}Sh_6 - C_{147}S_{35}Ch_2Sh_6 + \\ + C_{145}S_{37}Ch_2Sh_6 - C_{347}S_{15}Sh_6 + C_{345}S_{17}Sh_6 - C_{157}S_4Ch_6Sh_2 + C_1S_{457}Ch_6Sh_2$$

$$a_{26} = -\beta C_{34}S_{157}Ch_2Sh_6 - \beta C_{3457}S_1Ch_2Sh_6 - \beta C_{14}S_{357}Sh_6 - \beta C_{1457}S_3Sh_6 + \\ + \beta C_{47}S_{135}Ch_2Sh_6 - \beta C_{45}S_{137}Ch_2Sh_6 - \beta C_{1347}S_5Sh_6 + \beta C_{1345}S_7Sh_6 + \beta C_{57}S_{14}Ch_6Sh_2 - \\ - \beta S_{1457}Ch_6Sh_2$$

$$a_{36} = -C_{34}S_{57}Sh_{26} - C_{3457}Sh_{26} + C_{47}S_{35}Sh_{26} - C_{45}S_{37}Sh_{26} + \beta C_{57}S_4Ch_{26} - \beta S_{457}Ch_{26}$$

$$a_{46} = -\beta C_{13}S_{457}Ch_2Sh_6 - \beta C_{1357}S_4Ch_2Sh_6 + \beta S_{13457}Ch_2Sh_6 + \beta C_{57}S_{134}Ch_2Sh_6 - \\ - \beta C_{17}S_{345}Ch_2Sh_6 + \beta C_{15}S_{347}Ch_2Sh_6 - \beta C_{37}S_{145}Ch_2Sh_6 + \beta C_{35}S_{147}Ch_2Sh_6 + \\ + \beta C_{37}S_{15}Ch_6Sh_2 + \beta C_{35}S_{17}Ch_6Sh_2 - \beta C_{17}S_{35}Ch_6Sh_2 - \beta C_{15}S_{37}Ch_6Sh_2 + \\ + \beta C_{457}S_{13}Ch_6Sh_2 - \beta C_4S_{1357}Ch_6Sh_2 + \beta C_{13457}Ch_6Sh_2 - \beta C_{134}S_{57}Ch_6Sh_2$$

$$a_{56} = C_3S_{1457}Sh_{26} + C_{357}S_{14}Sh_{26} - C_1S_{3457}Sh_{26} - C_{157}S_{34}Sh_{26} + C_7S_{1345}Sh_{26} - C_5S_{1347}Sh_{26} + \\ + C_{137}S_{45}Sh_{26} - C_{135}S_{47}Sh_{26} - \beta C_{137}S_5Ch_{26} - \beta C_{135}S_7Ch_{26} + \beta C_7S_{135}Ch_{26} + \\ + \beta C_5S_{137}Ch_{26} - \beta C_{1457}S_3Ch_{26} + \beta C_{14}S_{357}Ch_{26} - \beta C_{3457}S_1Ch_{26} + \beta C_{34}S_{157}Ch_{26}$$

$$a_{66} = -\beta C_{13}S_{457}Sh_{26} - \beta C_{1357}S_4Sh_{26} - \beta S_{13457}Sh_{26} - \beta C_{57}S_{134}Sh_{26} - \beta C_{17}S_{345}Sh_{26} + \\ + \beta C_{15}S_{347}Sh_{26} + \beta C_{37}S_{145}Sh_{26} - \beta C_{35}S_{147}Sh_{26} - C_{37}S_{15}Ch_{26} - C_{35}S_{17}Ch_{26} - \\ - C_{15}S_{37}Ch_{26} - C_{457}S_{13}Ch_{26} + C_4S_{1357}Ch_{26} + C_{13457}Ch_{26} - C_{134}S_{57}Ch_{26}$$

$$a_{76} = -\beta C_3S_{1457}Ch_2Sh_6 - \beta C_{357}S_{14}Ch_2Sh_6 - \beta C_1S_{3457}Ch_2Sh_6 - \beta C_{157}S_{34}Ch_2Sh_6 - \\ - \beta C_7S_{1345}Ch_2Sh_6 + \beta C_5S_{1347}Ch_2Sh_6 + \beta C_{137}S_{45}Ch_2Sh_6 - \beta C_{135}S_{47}Ch_2Sh_6 - \\ - \beta C_{137}S_5Ch_6Sh_2 - \beta C_{135}S_7Ch_6Sh_2 - \beta C_7S_{135}Ch_6Sh_2 - \beta C_5S_{137}Ch_6Sh_2 - \\ - \beta C_{1457}S_3Ch_6Sh_2 + \beta C_{14}S_{357}Ch_6Sh_2 + \beta C_{3457}S_1Ch_6Sh_2 - \beta C_{34}S_{157}Ch_6Sh_2$$

$$a_{17} = -\beta C_{135}S_{47}Ch_{26} - \beta C_{137}S_{45}Ch_{26} + \beta C_5S_{1347}Ch_6 + \beta C_7S_{1345} - \beta C_1S_{3457}Ch_{26} + \\ + \beta C_{157}S_{34}Ch_2 - \beta C_3S_{1457}Ch_6 + \beta C_{357}S_{14} + C_{14}S_7Sh_{26}$$

$$a_{27} = C_{35}S_{147}Ch_{26} + C_{37}S_{145}Ch_2 + C_{15}S_{347}Ch_6 + C_{17}S_{345} + S_{13457}Ch_{26} - C_{57}S_{134}Ch_2 - \\ - C_{13}S_{457}Ch_6 + C_{1357}S_4 - \beta C_4S_{17}Sh_{26}$$

$$a_{37} = -\beta C_4 S_7 \text{Ch}_2 \text{Sh}_6 + \beta C_{35} S_{47} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 + \beta C_{37} S_{45} \text{Sh}_2 + \beta S_{3457} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 - \beta C_{57} S_{34} \text{Sh}_2$$

$$a_{47} = \beta S_{1347} \text{Sh}_{26} + \beta C_{13} S_{47} \text{Sh}_{26} - C_{1345} S_7 \text{Ch}_{26} - C_{1347} S_5 \text{Ch}_2 + C_{45} S_{137} \text{Ch}_{26} + \\ + C_{47} S_{135} \text{Ch}_2 + C_{14} S_{357} \text{Ch}_{26} - C_{1457} S_3 \text{Ch}_2 + C_{34} S_{157} \text{Ch}_{26} - C_{3457} S_1 \text{Ch}_2$$

$$a_{57} = -\beta C_1 S_{347} \text{Ch}_2 \text{Sh}_6 - \beta C_3 S_{147} \text{Ch}_2 \text{Sh}_6 + \beta C_{345} S_{17} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 + \beta C_{347} S_{15} \text{Sh}_2 - \\ - \beta C_{145} S_{37} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 - \beta C_{147} S_{35} \text{Sh}_2 - \beta C_4 S_{1357} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 + \beta C_{457} S_{13} \text{Sh}_2 - \\ - \beta C_{134} S_{57} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 + \beta C_{13457} \text{Sh}_2$$

$$a_{67} = -S_{1347} \text{Ch}_2 \text{Sh}_6 + C_{13} S_{47} \text{Ch}_2 \text{Sh}_6 - C_{1345} S_7 \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 - C_{1347} S_5 \text{Sh}_2 - C_{45} S_{137} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 - \\ - C_{47} S_{135} \text{Sh}_2 + C_{14} S_{357} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 - C_{1457} S_3 \text{Sh}_2 - C_{34} S_{157} \text{Ch}_6 \text{Sh}_2 + C_{3457} S_1 \text{Sh}_2$$

$$a_{77} = -\beta C_1 S_{347} \text{Sh}_{26} + \beta C_3 S_{147} \text{Sh}_{26} - C_{345} S_{17} \text{Ch}_{26} - C_{347} S_{15} \text{Ch}_2 - C_{145} S_{37} \text{Ch}_{26} - \\ - C_{147} S_{35} \text{Ch}_2 - C_{134} S_{57} \text{Ch}_{26} + C_{13457} \text{Ch}_2 + C_4 S_{1357} \text{Ch}_{26} - C_{457} S_{13} \text{Ch}_2$$

Здесь символ C_i соответствует функции $\text{Cos}\varphi_i$, S_i - $\text{Sin}\varphi_i$, Ch_i - $\text{Ch}\varphi_i$, Sh_i - $\text{Sh}\varphi_i$, а последовательность индексов - произведению функций.

Таким образом, задача описания преобразований вращения вполне разрешима. Преобразования вращений в семимерном псевдоевклидовом пространстве индекса четыре существенно отличаются от преобразований вращения в трехмерном [7] и семимерном собственноевклидовых пространствах. Свойства группы псевдоортогональных преобразований также существенно отличаются от свойств группы собственноортогональных преобразований.

ПРИЛОЖЕНИЕ II¹

Коротков А.В. ВЕКТОРЫ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИНДЕКСА 3

Совокупность координат события (ct, x, y, z) в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 3 можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i , где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 3 дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще *четырёхмерным вектором* (4-вектором) A^i в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 3 назовем совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3 , которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i . При преобразовании Лоренца

$$\begin{aligned} A^0 &= (A^0 + (V/c)A^3)/(1 - (V/c)^2)^{-1/2}, \\ A^1 &= A^1, \\ A^2 &= A^2, \\ A^3 &= (A^3 + (V/c)A^0)/(1 - (V/c)^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 + (A^3)^2 = (A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Для удобства записи подобных выражений введем два «сорта» компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

$$A_0 = A^0, A_1 = A^1, A_2 = A^2, A_3 = -A^3. \quad (2)$$

Величины A^i называют *контравариантными*, а A_i - *ковариантными* компонентами 4-вектора. Квадрат 4-вектора представится тогда в виде

$$\Sigma = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Такие суммы принято записывать просто как $A^i A_i$, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ

¹ Печатается по изданию: Коротков А.В. Векторы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса три: Сб. научн.тр./ под ред. В.С.Чуракова. (Библиотека времени.Вып 2).– Шахты: Издво ЮРГУЭС, 2005. – 262с. (с.231-238)

обозначения суммирования по, как говорят, *немым* индексам, очень удобен и значительно упрощает запись формул.

В этой работе мы будем обозначать четырехмерные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, латинскими буквами $i, k, l, \dots$.

Аналогично квадрату 4-вектора составляется скалярное произведение двух разных 4-векторов:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

При этом, очевидно, его можно записать как в виде $A^i B_i$, так и в виде $A_i B^i$, - результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхний и нижний индексы.

Произведение $A^i B_i$ является 4-скаляром - оно инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат. Это обстоятельство легко проверить непосредственно, но оно и заранее очевидно (по аналогии с квадратом $A^i A_i$) из того, что все 4-векторы преобразуются по одинаковому закону. При этом надо помнить, что закон преобразования 4-вектора, выраженный через ковариантные компоненты, отличается (в знаках) от того же закона, выраженного в контравариантных компонентах. Так, вместо (1) будем, очевидно, иметь:

$$\begin{aligned} A_0 &= (A'_0 - (V/c)A'_3)/(1 - (V/c)^2)^{-1/2}, \\ A_1 &= A'_1, \\ A_2 &= A'_2, \\ A_3 &= (A'_3 - (V/c)A'_0)/(1 - (V/c)^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Компоненту 4-вектора A^0 назовем временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 - пространственными (по аналогии с 4-радиус-вектором). Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю; в этих трех случаях говорят соответственно о *временноподобных*, *пространственно-подобных* и *изотропных* 4-векторах (по аналогии с терминологией для интервалов).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т. е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трехмерный вектор $\mathbf{A}$. Временная же компонента 4-вектора представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, мы будем записывать их как

$$A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}).$$

При этом ковариантные компоненты того же 4-вектора:

$$A_i = (A^0, A^1, A^2, -A^3) \neq (A^0, -\mathbf{A}), \text{ а квадрат 4-вектора:}$$

$$A^i A_i = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 + (A^3)^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2.$$

Так, для 4-радиус-вектора:

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, x^1, x^2, -x^3), \quad x^i x_i = (ct)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) = (x^0)^2 - \mathbf{r}^2.$$

У трехмерных векторов (в координатах x, y, z), очевидно, есть необходимость различать контра- и ковариантные компоненты. Мы будем писать их компоненты $A^i = (x^1, x^2, x^3)$, $A_i = (x^1, x^2, -x^3)$ с индексами сверху и внизу, обозначая эти индексы латинскими буквами. В частности, по дважды повторяющимся латинским индексам будет подразумеваться суммирование по трем значениям индексов 1,2,3 (например, $\mathbf{AB} = A^i B_i$).

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга назовем совокупность 16 величин A^{ik} , которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент двух 4-векторов. Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов.

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах: как контравариантные A^{ik} , ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k (в последнем случае надо, вообще говоря, различать A^i_k и A_i^k т. е. следить за тем, какой именно - первый или второй - индекс стоит сверху, а какой внизу). Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак третьей компоненты. Так:

$$A_{00} = A^{00}, A_{01} = A^{01}, A_{11} = A^{11}, \dots, \\ A^0_0 = A^{00}, A^0_1 = A^{01}, A^1_1 = A^{01}, A^1_1 = A^{11}, \dots, \text{но, например, } A^0_3 = -A^{03}.$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент $A^{11}, A^{12}, \dots$ составляют трехмерный тензор. Три компоненты A^{01}, A^{02}, A^{03} и три компоненты A^{10}, A^{20}, A^{30} составляют трехмерные векторы, а компонента A^{00} является трехмерным скаляром.

Тензор A^{ik} называется симметричным, если $A^{ik} = A^{ki}$, и антисимметричным, если $A^{ik} = -A^{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты (т. е. компоненты $A^{00}, A^{11}, \dots$) равны нулю, так как, например, должно быть $A^{00} = -A^{00}$. У симметричного тензора A^{ik} смешанные компоненты A^i_k и A_k^i , очевидно, совпадают; мы будем писать в таких случаях просто A^i_k , располагая индексы один над другим.

Во всяком тензорном равенстве выражения с обеих его сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) свободные, т. е. не немые, индексы. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра- и ковариантных компонент различных тензоров «незаконно»; такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при этом, конечно, $A^i_i = A_i^i$). Такую сумму называют *следом* тензора, а об операции его образования говорят как о *свертывании* или *упрощении* тензора.

Операцией свертывания является и рассмотренное выше образование скалярного произведения двух 4-векторов: это есть образование скаляра $A^i B_i$ из тензора $A^i B_k$. Вообще всякое свертывание по паре индексов понижает ранг тензора на 2. Например, A^i_{kli} есть тензор 2-го ранга, $A^i_k B^k$ - 4-вектор, A^{ik}_{ik} - скаляр и т. д.

Единичным 4-тензором назовем тензор δ^i_k для которого имеет место равенство

$$\delta^k_i A^i = A^k \quad (3)$$

при любом 4-векторе A^i . Очевидно, что компоненты этого тензора равны 1, если $i=k$ или 0, если $i \neq k$. Его след: $\delta_i^i = 4$.

Поднимая у тензора δ_i^k один или опуская другой индекс, мы получим контра- или ковариантный тензор, который обозначают как g^{ik} или g_{ik} и называют *метрическим тензором*. Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты, которые можно представить в виде таблицы:

$$g^{ik}=g_{ik}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k - столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3). Очевидно, что

$$g_{ik}A^k = A_i, g^{ik}A_k = A^i. \quad (6)$$

Скалярное произведение двух 4-векторов можно поэтому записать в виде

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \quad (7)$$

Тензоры δ_i^i , g_{ik} , g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех системах координат. Таким же свойством обладает и совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга e^{iklm} . Так называется тензор, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1 . Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все четыре индекса различны. Положим

$$e^{0123} = +1 \quad (8)$$

(при этом $e^{0123} = -1$). Тогда все отличные от нуля компоненты e^{iklm} равны +1 или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 0, 1, 2, 3. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \quad (9)$$

По отношению к поворотам системы координат, величины e^{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако при изменении знака у одной или трех координат компоненты e^{iklm} , будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e^{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. *Псевдотензоры* любого ранга, в частности *псевдоскаляры*, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений - изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Произведения $e^{iklm}e^{prst}$ образуют 4-тензор 8-го ранга, причем уже тензор истинный; упрощением по одной или нескольким парам индексов из него получаются тензоры 6-го, 4-го и 2-го рангов. Все эти тензоры имеют

одинаковый вид во всех координатных системах. Поэтому их компоненты должны выражаться в виде комбинаций произведений компонент единичного тензора δ^i_k - единственного истинного тензора, компоненты которого во всех системах одинаковы. Эти комбинации легко составить, исходя из свойств симметрии по отношению к перестановкам индексов, которыми они должны обладать. Приведем для справок соответствующие формулы:

$$e^{iklm}e_{prst} = - \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prsm} = - \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2 \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r \\ \delta^k_p & \delta^k_r \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta^i_p.$$

Общие коэффициенты в этих формулах проверяются по результату полного свертывания, которое должно дать (9).

Как следствие первой из этих формул имеем:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}, \quad e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A,$$

где A - определитель, составленный из величин A_{ik} .

Если A^{ik} - антисимметричный тензор, то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik} = 1/2 e^{iklm}A_{lm}$ называются *дуальными* друг другу. Аналогично $A^{*ikl} = 1/2 e^{iklm}A_m$ есть антисимметричный псевдотензор третьего ранга, дуальный вектору A^i . Произведение $A^{ik}A^{*}_{ik}$ дуальных тензоров есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным уточним некоторые аналогичные свойства трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин e^{ikl} , меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Отличны от нуля лишь компоненты e^{ikl} с тремя различными индексами. При этом полагаем $e^{123} = 1$ (при этом $e_{123} = -1$) остальные же равны 1 или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность i, k, l к последовательности 1, 2, 3.

Неизменность компонент 4-тензора e^{iklm} по отношению к вращениям 4-системы координат и неизменность компонент 3-тензора e^{ikl} по отношению к вращениям пространственных осей координат являются частными случаями общего правила: всякий совершенно антисимметричный тензор ранга, равного числу измерений пространства, в котором он определен, инвариантен при вращениях системы координат в этом пространстве.

Произведения $e^{ikl}e^{prs}$ составляют истинный трехмерный тензор 6-го ранга и потому выражаются в виде комбинаций произведений компонент

единичного трехмерного тензора δ^i_k . Приведем для справок соответствующие формулы:

$$e^{ikl}e_{prs} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix}.$$

Упрощая этот тензор по одной, двум и трем парам индексов, получим:

$$\begin{aligned} e^{ikl}e_{prl} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r \\ \delta^k_p & \delta^k_r \end{vmatrix}, \\ e^{ikl}e_{pkl} &= 2\delta^i_p, \\ e^{ikl}e_{ikl} &= 6. \end{aligned}$$

Общие коэффициенты в этих формулах проверяются по результату полного свертывания, которое должно дать 6.

Как следствие первой из этих формул имеем:

$$e^{prs}A_{ip}A_{kr}A_{ls} = Ae_{ikl}, \quad e^{ikl}e^{prs}A_{ip}A_{kr}A_{ls} = 6A,$$

где A - определитель, составленный из величин A_{ik} .

При отражении системы координат, т. е. при изменении знака всех координат, компоненты обычного трехмерного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют *полярными*. Компоненты же вектора, который может быть представлен как векторное произведение двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются *аксиальными*. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным, а псевдоскаляром: при отражении координат оно меняет знак. Аксиальный вектор является псевдовектором, дуальным антисимметричному тензору. Так, если $C = [AB]$, то

$$C^i = 1/2 e^{ikl} C_{kl}, \quad \text{где } C_{kl} = A_k B_l - A_l B_k.$$

При этом в трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 2

$$[AB] = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{vmatrix}.$$

Вернемся к 4-тензорам. Пространственные ($i, k, \dots = 1, 2, 3$) компоненты антисимметричного 4-тензора A^{ik} составляют по отношению к чисто пространственным преобразованиям трехмерный антисимметричный тензор; согласно сказанному выше его компоненты выражаются через компоненты трехмерного аксиального вектора. Компоненты же A^{01} , A^{02} , A^{03} составляют, по отношению к тем же преобразованиям, трехмерный полярный вектор. Таким образом, компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы:

$$A^{ik} = \begin{vmatrix} 0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ -p^1 & 0 & -a^3 & a^2 \\ -p^2 & a^3 & 0 & -a^1 \\ -p^3 & -a^2 & a^1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

причем по отношению к пространственным преобразованиям $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ - полярный и аксиальный векторы. Перечисляя компоненты антисимметричного 4-тензора, мы будем записывать их в виде

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

тогда ковариантные компоненты того же тензора

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & p^1 & p^2 & -p^3 \\ -p^1 & 0 & -a^3 & -a^2 \\ -p^2 & a^3 & 0 & a^1 \\ p^3 & a^2 & -a^1 & 0 \end{vmatrix} \neq (-\mathbf{p}, \mathbf{a}). \quad (11)$$

Остановимся, наконец, на некоторых дифференциальных операциях четырехмерного тензорного анализа. 4-градиент скаляра φ есть 4-вектор $\partial\varphi/\partial x^i = (\partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial x^1, \partial\varphi/\partial x^2, \partial\varphi/\partial x^3)$.

При этом необходимо иметь в виду, что написанные производные должны рассматриваться как ковариантные компоненты 4-вектора. Действительно, дифференциал скаляра $d\varphi = (\partial\varphi/\partial x^i)dx^i$ тоже есть скаляр; из его вида (скалярное произведение двух 4-векторов) и очевидно сделанное утверждение.

Вообще операторы дифференцирования по координатам x^i , $\partial/\partial x^i$ должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Поэтому, например, является скаляром дивергенция 4-вектора – выражение $\partial A^i/\partial x^i$ в котором дифференцируются контравариантные компоненты A^i .

Если же производить дифференцирования по ковариантным координатам x_i , то производные

$$\partial\varphi/\partial x_i = g^{ik}\partial\varphi/\partial x^k = (\partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial x^1, \partial\varphi/\partial x^2, -\partial\varphi/\partial x^3).$$

Очевидно, что операции над векторами в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 3 отличаются лишь в координатной записи от операций над векторами в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Это, в частности, дает иную координатную запись квадрата 4-вектора.

Литература

1. Коротков, А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех- и семимерного векторных исчислений / А.В. Коротков. – Новочеркасск: Набла, 2004. – 79 с.
2. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Коротков А.В

К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S=t^2=m^3-p^2m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса [1]

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в криптографии.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон [2]. Для выяснения этого вопроса необходимо было найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [3] известно, что

$$x=2mn, y=m^2-n^2, z=m^2+n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x, y, z – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

причем

$$z+y=2m^2, z-y=2n^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x, y, z в целых числах. Вместе с тем, теперь величины m и n могут принимать не только целые, но и рациональные числа. Это, соответственно, дает возможность находить решение полиномиальных уравнений в рациональных

числах. Для примера в таблице 1 приведены тройки чисел соответствующих прямоугольным треугольникам с рациональной длиной двух их сторон. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Для примера в таблице 1, выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел, соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения m и n , а, следовательно, x , y , z по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между длинами катетов x и y . В таблице 2 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Первая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в таблице 1 в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$$(x+y)_{k+1} = 6(x+y)_k - (x+y)_{k-1}.$$

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполнимы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}$$

$$y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}.$$

Можно привести целый ряд рекуррентных взаимосвязей между сторонами прямоугольных треугольников для каждого столбца рассматриваемых таблиц.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x , y , z соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности между длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений m и n . Этот способ классификации приведен в таблице 3, в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из таблицы 2 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин m и n в таблице 3. В ней каждой последовательной па-

ре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из таблицы 2. Так значениям $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу таблицы 3 соответствуют значения $x=2mn=4$, $y=m^2-n^2=3$, $z=m^2+n^2=5$ в верхнем левом углу таблицы 2. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов таблицы 3 величина m следует за величиной n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1}=2m_k+m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенной разностью между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2-m_k^2)^2+(2m_{k+1}m_k)^2=(m_{k+1}^2+m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды определяют генераторы взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Отметим так же, что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше рекуррентных соотношений в общем случае в таблице 4 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из таблицы 1. В таблице 4 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из таблицы 4.

Аналогично, таблица 6 для чисел m и n соответствует пифагоровым тройкам из таблицы 4. Отметим, что разность, а также сумма длин катетов, принимает дискретные строго определенные, зачастую простые значения. Величина разности между катетами x и y , очевидно, повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами. Это осуществлено в таблицах 6 и 7 для значений разности между катетами 1, 7, 23, 47, 79 в таблице 6 и значений разности между катетами 1, 7, 17, 31, 49 в таблице 7. Для упрощения записи таблиц вместо пифагоровых троек чисел приведены

лишь значения гипотенуз z . В этих таблицах значения рядов пифагоровых троек продолжены в обратных направлениях, причем использованы одни и те же рекуррентные соотношения. Числа, соответствующие гипотенузам из пифагоровых троек в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной в обе стороны.

Выясним теперь, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Площадь прямоугольного треугольника

$$S=xy/2=mn(m^2-n^2)=nm^3-n^3m,$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов. Для примера в таблицах 8.1 и 8.2 приведены результаты значения площадей прямоугольных треугольников для верхней части треугольников из таблиц 2 и 4. Расчет площадей прямоугольных треугольников в каждом ряду соответствующей разностью между длинами катетов может осуществляться не только по приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением:

$$S_{n+1}=35(S_n-S_{n-1})+S_{n-2},$$

соответствующим каждому из рядов пифагоровых троек.

Таким образом, пожалуй, получен ответ на поставленный вопрос о числе решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах. Полиномиальные уравнения более высоких степеней будут иметь решения в целых числах, если они получены путем комбинаций из произведений чисел x, y, z .

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых троек. Во-первых, пифагоровы тройки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях, если они соответствуют определенной разности длин катетов. Во-вторых, каждой гипотенузе соответствует два ряда пифагоровых троек. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки чисел, а плоскости числовых последовательностей классифицируемых по определенному признаку. Фраг-

менты таких плоскостей чисел представлены в таблицах 9.1 – 9.12. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскости, которая может быть продлена до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел. Само число, на которое корректируется рекуррентное соотношение, получается из аналогичного числа, указанного в таблице 9.1 путем умножения на величину разностей длин катетов.

В свою очередь полученные плоскости числовых последовательностей могут быть классифицированы определенным образом. Так из приведенных таблиц 9.1 – 9.12 с указанными разностями катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97 плоскости с разностями 1, 7, 41 представляют определенную совокупность плоскостей с одним и тем же рекуррентным соотношением, относящимся уже к сумме длин катетов:

$$41 = 6 \cdot 7 - 1.$$

Следующей плоскостью в этой числовой последовательности будет плоскость с разностью 239:

$$239 = 6 \cdot 41 - 7$$

и так далее до бесконечности в обоих направлениях.

Таким образом, можно говорить о бесконечном числе кубов числовых последовательностей бесконечной протяженности во всех шести направлениях, т.е. о своего рода трехмерных “кристаллах” числовых последовательностей.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	4 3 5	8 0 8														
3	6 8 10	12 5 13	18 0 18													
4	8 15 17	16 12 20	24 7 25	32 0 32												
5	10 24 26	20 21 29	30 16 34	40 9 41	50 0 50											
6	12 35 37	24 32 40	36 27 45	48 20 52	60 11 61	72 0 72										
7	14 48 50	28 45 53	42 40 58	56 33 65	70 24 74	84 13 85	98 0 98									
8	16 63 65	32 60 68	48 55 73	64 48 80	80 39 89	96 28 100	112 15 113	128 0 128								
9	18 80 82	36 77 85	54 72 90	72 65 97	90 56 106	108 45 117	126 32 130	144 17 145	162 0 162							
10	20 99 101	40 96 104	60 91 109	80 84 116	100 75 125	120 64 136	140 51 149	160 36 164	180 19 181	200 0 200						
11	22 120 122	44 117 125	66 112 130	88 105 137	110 96 146	132 85 157	154 72 170	176 57 185	198 40 202	220 21 221	242 0 242					
12	24 143 145	48 140 148	72 135 153	96 128 160	120 119 169	144 108 180	168 95 193	192 80 208	216 63 225	240 44 244	264 23 265	288 0 288				
13	26 168 170	52 165 173	78 160 178	104 153 185	130 144 194	156 133 205	182 120 218	208 105 233	234 88 250	260 69 269	286 48 290	312 25 313	338 0 338			
14	28 195 197	56 192 200	84 187 205	112 180 212	140 171 221	168 160 232	196 147 245	224 132 260	252 115 277	280 96 296	308 75 317	336 52 340	364 27 365	392 0 392		
15	30 224 226	60 221 229	90 216 234	120 209 241	150 200 250	180 189 261	210 176 274	240 161 289	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	420 29 421	450 0 450	
16	32 255 257	64 252 260	96 247 265	128 240 272	160 231 281	192 220 292	224 207 305	256 192 320	288 175 337	320 156 356	352 135 377	384 112 400	416 87 425	448 60 452	480 31 481	512 0 512

Таблица 2

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
5	17	37	65	101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
29	97	205	353	541
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
169	565	1193	2053	3145
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
985	3293	6953	11965	18329
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
5741	19193	40525	69737	106829
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
33461	111865	236197	406457	622645
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
195025	651997	1376657	2369005	3629041
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
4684660	15661496	33068412	56905408	87172484
4684659	15661503	33068435	56905455	87172563
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
27304196	91281912	192736908	331669184	508078740
27304197	91281905	192736885	331669137	508078661
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
159140520	532029948	1123352944	1933109508	2961299640
159140519	532029955	1123352967	1933109555	2961299719
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
927538920	3100897804	6547380848	11266988052	17259719416
927538921	3100897797	6547380825	11266988005	17259719337
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
5406093004	18073356848	38160932052	65668818616	100597016540
5406093003	18073356855	38160932075	65668818663	100597016619
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
31509019100	105339243312	222418211556	382745923832	586322380140
31509019101	105339243305	222418211533	382745923785	586322380061
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
183648021600	613962102996	1296348337192	2230806724188	3417337263984
183648021599	613962103003	1296348337215	2230806724235	3417337264063
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1070379110496	3578433374692	7555671811688	13002094421484	19917701204080
1070379110497	3578433374685	7555671811665	13002094421437	19917701204001
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
6238626641380	20856638145128	44037682532844	75781759804528	116088869960180
6238626641379	20856638145135	44037682532867	75781759804575	116088869960259
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
36361380737780	121561395496104	256670423385468	441688464405872	676615518557316
36361380737781	121561395496097	256670423385445	441688464405825	676615518557237
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 3

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

Таблица 4

4	12	24	40	60
3	5	7	9	11
5	13	25	41	61
20	48	88	140	204
21	55	105	171	253
29	73	137	221	325
120	304	572	924	1360
119	297	555	893	1311
169	425	797	1285	1889
696	1748	3276	5280	7760
697	1755	3293	5311	7809
985	2477	4645	7489	11009
4060	10212	19152	30880	45396
4059	10205	19135	30849	45347
5741	14437	27073	43649	64165
23660	59496	111568	179876	264420
23661	59503	111585	179907	264469
33461	84145	157793	254405	373981
137904	346792	650324	1048500	1541320
137903	346785	650307	1048469	1541271
195025	490433	919685	1482781	2179721
803760	2021228	3790308	6111000	8983304
803761	2021235	3790325	6111031	8983353
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
4684660	11780604	22091592	35617624	52358700
4684659	11780597	22091575	35617593	52358651
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
27304196	68662368	128759176	207594620	305168700
27304197	68662375	128759193	207594651	305168749
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
159140520	400193632	750463532	1209950220	1778653696
159140519	400193625	750463515	1209950189	1778653647
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
927538920	2332499396	4374021948	7052106576	10366753280
927538921	2332499403	4374021965	7052106607	10366753329
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
5406093004	13594802772	25493668224	41102689360	60421866180
5406093003	13594802765	25493668207	41102689329	60421866131
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
31509019100	79236317208	148587987328	239564029460	352164443604
31509019101	79236317215	148587987345	239564029491	352164443653
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640
183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 5

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
5	8	11	14	17
12	19	26	33	40
29	46	63	80	97
70	111	152	193	234
169	268	367	466	565
408	647	886	1125	1364
985	1562	2139	2716	3293
2378	3771	5164	6557	7950
5741	9104	12467	15830	19193
13860	21979	30098	38217	46336
33461	53062	72663	92264	111865
80782	128103	175424	222745	270066
195025	309268	423511	537754	651997
470832	746639	1022446	1298253	1574060
1136689	1802546	2468403	3134260	3800117
2744210	4351731	5959252	7566773	9174294
6625109	10506008	14386907	18267806	22148705
15994428	25363747	34733066	44102385	53471704
38613965	61233502	83853039	106472576	129092113
93222358	147830751	202439144	257047537	311655930
225058681	356895004	488731327	620567650	752403973
543339720	861620759	1179901798	1498182837	1816463876
1311738121	2080136522	2848534923	3616933324	4385331725
3166815962	5021893803	6876971644	8732049485	10587127326
7645370045	12123924128	16602478211	21081032294	25559586377
18457556052	29269742059	40081928066	50894114073	61706300080
44560482149	70663408246	96766334343	122869260440	148972186537
107578520350	170596558551	233614596752	296632634953	359650673154
259717522849	411856525348	563995527847	716134530346	868273532845
627013566048	994309609247	1361605652446	1728901695645	2096197738844
1513744654945	2400475743842	3287206832739	4173937921636	5060669010533
3654502875938	5795261096931	7936019317924	10076777538917	12217535759910
8822750406821	13990997937704	19159245468587	24327492999470	29495740530353
21300003689580	33777256972339	46254510255098	58731763537857	71209016820616

Таблица 6

1513744654945	22186734778477	113441728156577	275278724789245	507697724676481
259717522849	3806641878437	19463523473585	47230362308293	87107158382561
44560482149	653116492145	3339412684933	8103449060513	14945225618885
7645370045	112057074433	572952636013	1390332054785	2564195330749
1311738121	19225954453	98303131145	238543268197	439946365609
225058681	3298652285	16866150857	40927554397	75482862905
38613965	565959257	2893773997	7022058185	12950811821
6625109	97103257	496493125	1204794713	2222008021
1136689	16660285	85184753	206710093	381236305
195025	2858453	14615393	35465845	65409809
33461	490433	2507605	6084977	11222549
5741	84145	430237	1044017	1925485
985	14437	73817	179125	330361
169	2477	12665	30733	56681
29	425	2173	5273	9725
5	73	373	905	1669
1	13	65	157	289
1	5	17	37	65
5	17	37	65	101
29	97	205	353	541
169	565	1193	2053	3145
985	3293	6953	11965	18329
5741	19193	40525	69737	106829
33461	111865	236197	406457	622645
195025	651997	1376657	2369005	3629041
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 7

1513744654945	29495740530353	92768738033045	191332737163021	325187737920281
259717522849	5060669010533	15916599117997	32827507845241	55793395192265
44560482149	868273532845	2730856674937	5632309908425	9572633233309
7645370045	148972186537	468540931625	966351605309	1642404207589
1311738121	25559586377	80388914813	165799723429	281792012225
225058681	4385331725	13792557253	28446735265	48347865761
38613965	752403973	2366428705	4880688161	8295182341
6625109	129092113	406014977	837393701	1423228285
1136689	22148705	69661157	143674045	244187369
195025	3800117	11951965	24650569	41895929
33461	651997	2050633	4229369	7188205
5741	111865	351833	725645	1233301
985	19193	60365	124501	211601
169	3293	10357	21361	36305
29	565	1777	3665	6229
5	97	305	629	1069
1	17	53	109	185
1	5	13	25	41
5	13	25	41	61
29	73	137	221	325
169	425	797	1285	1889
985	2477	4645	7489	11009
5741	14437	27073	43649	64165
33461	84145	157793	254405	373981
195025	490433	919685	1482781	2179721
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 8

6	60	210	504	990
210	2340	10374	30600	71610
7140	79794	355680	1053150	2471196
242556	2710950	12085920	35789754	83986500
8239770	92092800	410568774	1215811740	2853107250
279909630	3128444544	13947255570	41301822660	96921697446
9508687656	106275021990	473796123780	1403046171954	3292484643360
323015470680	3610222303410	16095120956124	47662268037030	111847556214240

Таблица 9.1

$ x-y =1$				
48	8	0	-8	-48
481	85	29	89	505
73	13	5	17	97
5	1	1	5	29
5	1	1	5	29
73	13	5	17	97
481	85	29	89	505

Таблица 9.3

$ x-y =17$				
816	136	0	-136	-816
4981	881	305	949	5389
697	125	53	193	1105
17	5	13	73	425
221	41	25	109	629
2125	377	137	445	2533
13345	2357	797	2425	13753

Таблица 9.5

$ x-y =31$				
1488	248	0	-248	-1488
10321	1825	629	1949	11065
1481	265	109	389	2225
53	13	25	137	797
325	61	41	185	1069
3385	601	221	725	4129
21473	3793	1285	3917	22217

Таблица 9.7

$ x-y =47$				
2256	376	0	-376	-2256
14821	2621	905	2809	15949
2105	377	157	565	3233
65	17	37	205	1193
541	101	65	289	1669
5437	965	353	1153	6565
34337	6065	2053	6253	35465

Таблица 9.2

$ x-y =7$				
336	56	0	-56	-336
1565	277	97	305	1733
205	37	17	65	373
1	1	5	29	169
137	25	13	53	305
877	205	73	233	1325
5181	1261	425	1289	7309

Таблица 9.4

$ x-y =23$				
1104	184	0	-184	-1104
6065	1073	373	1165	6617
829	149	65	241	1381
13	5	17	97	565
353	65	37	157	905
3209	569	205	661	3761
20005	3533	1193	3625	20557

Таблица 9.6

$ x-y =41$				
1968	328	0	-328	-1968
8093	1433	505	1597	9077
1021	185	89	349	2005
1	5	29	169	985
953	173	85	337	1937
7685	1361	481	1525	8669
47125	8321	2801	8485	48109

Таблица 9.8

$ x-y =49$				
2352	392	0	-392	-2352
17585	3109	1069	3305	18761
2557	457	185	653	3733
109	25	41	221	1285
449	85	61	281	1625
4937	877	325	1073	6113
31525	5569	1889	5765	32701

Таблица 9.9

$ x-y =71$				
3408	568	0	-568	-3408
26773	4733	1625	5017	28477
3925	701	281	985	5629
185	41	61	325	1889
593	113	85	397	2297
6781	1205	449	1489	8485
43501	7685	2609	7969	45205

Таблица 9.11

$ x-y =79$				
3792	632	0	-632	-3792
27425	4849	1669	5165	29321
3965	709	289	1025	5861
157	37	65	353	2053
769	145	101	461	2665
8249	1465	541	1781	10145
52517	9277	3145	9593	54413

Таблица 9.10

$ x-y =73$				
3504	584	0	-584	-3504
17909	3169	1105	3461	19661
2405	433	193	725	4157
25	13	53	305	1777
1249	229	125	521	3001
10973	1945	697	2237	12725
68093	12025	4053	12317	69845

Таблица 9.12

$ x-y =89$				
4272	712	0	-712	-4272
22409	3965	1381	4321	24545
3029	545	241	901	5165
37	17	65	373	2173
1465	269	149	625	3601
13025	2309	829	2665	15161
80957	14297	4825	14653	83093

Литература

1. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра.№ 47-48 [619-620].20 декабря 2005.– (с.72-74).
2. Коротков А.В. К вопросу нахождения решений уравнений в целых числах.
3. Начала Евклида, книги I-VI.– М.-Л. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.

Коротков А.В.
Ряды «натуральных» и «целых» многочленов

Целые положительные числа

Натуральный числовой ряд целых положительных чисел, как числовая последовательность имеет следующий вид:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$$

Разница между любыми двумя рядом стоящими членами последовательности равна единице, а любой член, начиная со второго, определяется как:

$$z_{n+1} = z_n + 1.$$

Данная числовая последовательность является арифметической прогрессией. Для нахождения члена z_{n+1} нужен только один стоящий перед ним член z_n и разность прогрессии, которая в данном случае равна единице. Это определение чисел натурального ряда является общепринятым и не подвергалось критике. Вместе с тем, как выясняется, оно не является единственным. Так, очевидно,

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1}.$$

Это определение чисел натурального ряда дает совершенно иное представление о свойствах чисел этого ряда. Во-первых, данное определение представляет собой рекуррентное соотношение для трех последовательных чисел. Во-вторых, рекуррентная зависимость для чисел натурального ряда позволяет рассматривать их как свободные члены «натурального» ряда многочленов.

В таком случае, стоит задача определения натурального ряда многочленов. Отметим, что на эту роль претендуют, прежде всего, ортогональные многочлены, поскольку для них свойственна рекуррентная формула [1]

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) - C_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$A_{n+1} = k_{n+1}/k_n, \quad B_n = A_n(r_{n+1} - r_n), \quad C_n = A_n h_n / (A_{n-1} h_{n-1}) = k_{n+1} k_{n-1} h_n / (k_n^2 h_{n-1}).$$

Здесь принято соглашение, что k_n – коэффициент при x^n , k_n' – коэффициент при x^{n-1} в многочлене $p_n(x)$, $r_n = k_n' / k_n$, $h_n = (p_n, p_n)$ – скалярное произведение. При этом обычно принимается $p_0(x) = 1$, а $p_{-1}(x) = 0$.

При $x=0$, $B_n=2$, $C_n=1$ эта рекуррентная формула может превратиться в формулу

$$p_{n+1}(0) = 2p_n(0) - p_{n-1}(0),$$

соответствующую рекуррентной формуле

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1}.$$

Таким образом, натуральный числовой ряд может быть образован из «натурального» многочленного ряда в предположении, что $x=0$.

Среди ортогональных многочленов особенно часто встречаются и хорошо изучены классические ортогональные многочлены, соответствующие интервалам и весам в таблице 1.

Таблица 1

a	b	$\omega(x)$	Название
-1	1	1	Многочлены Лежандра
-1	1	$(1-x^2)^{\lambda-1/2}$	Многочлены Гегенбауэра
-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	Многочлены Якоби
$-\infty$	∞	$\exp(-x^2)$	Многочлены Эрмита
0	∞	$x^\alpha e^{-x}$	Обобщенные многочлены Лагерра

Здесь (a, b) – отрезок, $\omega(x)$ – неотрицательная весовая функция, α, β, λ – показатели степени.

Все эти многочлены обладают целым рядом общих свойств, наиболее важными из которых являются следующие три:

1. функции $p_n'(x)$ образуют ортогональную систему многочленов;
2. $p_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ не зависят от n , а λ_n не зависит от x ;

3. имеет место обобщенная формула Родрига

$$p_n(x) = (1/K_n \omega(x)) (d^n(\omega(x) X^n) / dx^n),$$

где K_n – постоянная и X – многочлен, коэффициенты которого не зависят от n .

Любое из этих трех свойств характеризует классические ортогональные многочлены, так что любая система ортогональных многочленов, обладающая одним из этих трех свойств, может быть приведена к классической системе. Так при $n=1$ и степени многочлена X равной k имеем:

$$K_1 p_1(x) = X' + X \omega'(x) / \omega(x).$$

Если при этом $k=0$, рассматриваемые многочлены являются многочленами Эрмита, если $k=1$, получают многочлены Лагерра, если $k=2$ – многочлены Якоби [1].

Отметим теперь, что из классических ортогональных многочленов лишь обобщенные многочлены Лагерра могут образовывать натуральный числовой ряд при $x=0$, поскольку только они позволяют получить коэффициент $B_n=2$ при $C_n=1$.

Обобщенные многочлены Лагерра

Многочлены $L_n^\alpha(x)$ являются стандартизированными ортогональными многочленами, связанными с

$$a=0, b=\infty, \omega(x)=e^{-x}x^\alpha, X=x, \alpha>-1.$$

1. Стандартизация. Мы будем употреблять стандартизацию $k_n=(-1)^n/n!$.

2. Постоянные. $n!h_n=\Gamma(n+\alpha+1)$, $n!k_n=(-1)^n$, $r_n=-n(n+\alpha)$, $K_n=n!$, $A_n=-1/(n+1)$, $B_n=(2n+\alpha+1)/(n+1)$, $C_n=(n+\alpha)/(n+1)$.

Очевидно, что при $\alpha=1$ $B_n=2$, $C_n=1$ – константы не зависящие от n , причем они соответствуют обобщенным многочленам Лагерра $L_n^1(x)$ степени $n-1$ и порядка 1 ($n=1, 2, 3, \dots$; $\alpha=1$). В этом случае ряд ортогональных многочленов представляется в виде

$$L_{n+1}^1(x)=(-x/(n+1)+2)L_n^1(x)-L_{n-1}^1(x),$$

т.е.

$$L_{-1}^1(x)=0$$

$$L_0^1(x)=1$$

$$L_1^1(x)=((-x/1)+2)1-0=-x+2$$

$$L_2^1(x)=((-x/2)+2)((-x/1)+2)-1=(x^2/2)-3x+3$$

$$L_3^1(x)=((-x/3)+2)((x^2/2)-3x+3)-((-x/1)+2)=(-x^3/6)+2x^2-6x+4$$

$$L_4^1(x)=((-x/4)+2)((-x^3/6)+2x^2-6x+4)-((x^2/2)-3x+3)=$$

$$=(x^4/24)-(5x^3/6)+5x^2-10x+5$$

Свободные члены этого ряда многочленов образуют ряд натуральных чисел. Вместе с тем, свободные члены соответствуют $L_n^1(0)=z_{n+1}$, а в случае $x \neq 0$ $L_{n+1}^1(x)$ образует ряд «натуральных» многочленов, включающих $L_n^1(0)=z_{n+1}$ как частный случай.

Отметим также, что ряд натуральных многочленов $L_{n+1}^1(x)$ обладает существенно иными свойствами, нежели ряд натуральных чисел, например, появляется возможность дифференцирования функций, а не констант и целый ряд, связанных с этой операцией соотношений [1].

При $\alpha=1$ постоянные: $n!h_n=\Gamma(n+2)=(n+1)!$, т.е. $h_n=n+1$, $n!k_n=(-1)^n$, $r_n=-n(n+1)$, $K_n=n!$, $A_n=-1/(n+1)$, $B_n=2$, $C_n=1$.

3. Соотношения.

$$n!L_n^1(x)=e^x x^{-1} d^n(e^{-x} x^{n+1})/(dx)^n$$

$$L_0^1(x)=1, L_1^1(x)=-x+2$$

$$L_{n+1}^1(x)=((-x/(n+1))+2)L_n^1(x)-L_{n-1}^1(x)$$

$$xL_n^{1''}(x)+(2-x)L_n^{1'}(x)+nL_n^1(x)=0$$

$$(xz')'+(n+1-(x/4)-1/(4x))z=0, \quad z=e^{-x/2}x^{1/2}L_n^1(x)$$

$$xL_n^{1'}(x)=nL_n^1(x)-(n+1)L_{n-1}^1(x)=(n+1)L_{n+1}^1(x)-(n+2-x)L_n^1(x)$$

$$L_n^1(0)=\binom{n+1}{n}=n+1.$$

4. Гипергеометрические функции.

$$L_n^1(x) = (n+1)\Phi(-n, 2, x) = ((-1)^n/n!)\psi(-n-1, 0, x)$$

$$L_n^1(x) - L_{n+1}^1(x) = L_n^1(x).$$

Можно привести огромное множество подобного рода соотношений между функциями Лагерра их производными и интегралами [1]. Продемонстрируем применимость выше приведенных соотношений на примере последнего выражения

$$L_0^1(x) = 0$$

$$L_1^1(x) = -1$$

$$L_2^1(x) = x - 3$$

$$L_3^1(x) = (-x^2/2) + 4x - 6$$

$$L_4^1(x) = (x^3/6) - (5x^2/2) + 10x - 10$$

$$L_0^1(x) - L_1^1(x) = 1$$

$$L_1^1(x) - L_2^1(x) = -x + 2$$

$$L_2^1(x) - L_3^1(x) = (x^2/2) - 3x + 3$$

$$L_3^1(x) - L_4^1(x) = (-x^3/6) + 2x^2 - 6x + 4,$$

а также соотношения

$$xL_n^1(x) = nL_n^1(x) - (n+1)L_{n-1}^1(x)$$

$$x(-1) = 1(-x+2) - 2(1)$$

$$x(x-3) = 2((x^2/2) - 3x + 3) - 3(-x+2)$$

$$x((-x^2/2) + 4x - 6) = 3((-x^3/6) + 2x^2 - 6x + 4) - 4((x^2/2) - 3x + 3)$$

$$x((x^3/6) - (5x^2/2) + 10x - 10) = 4((x^4/24) - (5x^3/6) + 5x^2 - 10x + 5) - 5((-x^3/6) + 2x^2 - 6x + 4).$$

Найдем теперь ряд «целых» многочленов, соответствующих при $x=0$ целым числам, исходя их того же рекуррентного соотношения

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1}$$

для целых чисел, включающих множество целых положительных чисел, число 0 и целых отрицательных чисел. Очевидно, что многочлены Лагерра не содержат многочленов, относящихся к отрицательным величинам. Однако рекуррентное соотношение

$$z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1}$$

применимо также к отрицательным целым числам в последовательности ..., -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, ..., так что можно надеяться на применимость рекуррентного соотношения

$$L_{n+1}^1(x) = (-x/|n+1| + 2)L_n^1(x) - L_{n-1}^1(x),$$

при отрицательных n , что в свою очередь дало бы отрицательные значения «целых» многочленов. В результате имеем последовательность многочленов

$$L_{-5}^1(x) = -(x^3/6) - 2x^2 - 6x - 4$$

$$L_{-4}^1(x) = -(x^2/2) - 3x - 3$$

$$L_{-3}^1(x) = -x - 2$$

$$L_{-2}^1(x) = -1$$

$$L_{-1}^1(x) = 0$$

$$L_0^1(x) = 1$$

$$L_1^1(x) = ((-x/1) + 2)(1) - 0 = -x + 2$$

$$L_2^1(x) = ((-x/2) + 2)((-x/1) + 2) - 1 = (x^2/2) - 3x + 3$$

$$L_3^1(x) = ((-x/3) + 2)((x^2/2) - 3x + 3) - ((-x/1) + 2) = -(x^3/6) + 2x^2 - 6x + 4$$

$$L_4^1(x) = ((-x/4) + 2)((-x^3/6) + 2x^2 - 6x + 4) - ((x^2/2) - 3x + 3) = (x^4/24) - (5x^3/6) + 5x^2 - 10x + 5,$$

удовлетворяющих данному рекуррентному соотношению также в области отрицательных $L_{n+1}^1(x)$.

Таким образом, удастся построить ряд «целых» многочленов с применением тех же многочленов Лагерра $L_n^1(x)$ степени $n-1$ и порядка 1 ($n=1, 2, 3, \dots; \alpha=1$).

Множество целых положительных чисел является частным случаем обобщенных многочленов Лагерра $L_n^1(x)$ при $x=0$. Множество многочленов Лагерра существенно отличается от множества целых чисел. Найдем, например, среднее «алгебраическое» двух многочленов $L_{n+1}^1(x)$ и $L_{n-1}^1(x)$. Имеем

$$L_n^1(x) = (L_{n+1}^1(x) + L_{n-1}^1(x)) / (-x/(n+1) + 2).$$

Это соотношение позволяет находить значения многочленов «натурального» ряда находящихся между двумя соседними.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том II. – М.: Наука, 1974. – 295с.

А.В. Коротков
Особенности решений полиномиальных уравнений
второй степени в целых числах

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса [1]

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в криптографии.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон [2]. Для выяснения этого вопроса необходимо было найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [3] известно, что

$$x_1 = 2mn, y_1 = m^2 - n^2, z_1 = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_1, y_1, z_1 – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_1, y_1, z_1 в целых числах. Для примера в таблице 1 [2] приведены тройки чисел соответствующих прямоугольным треугольникам с целыми длинами их сторон. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Для примера в этой таблице, выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел, соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения m и n , а, следовательно, x_1, y_1, z_1 по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между длинами катетов x_1 и y_1 . В таблице 1 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности между длинами катетов x_1 и y_1 равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Пер-

вая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в таблице 1 [2] в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Вместе с тем второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$$(x_1 + y_1)_{k+1} = 6(x_1 + y_1)_k - (x_1 + y_1)_{k-1}.$$

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. В то же время для катетов выполняемы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}$$

$$y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}.$$

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_1 , y_1 , z_1 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности между длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений m и n . Этот способ классификации приведен в таблице 3 [2], в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из таблицы 1 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин m и n в таблице 3 [2]. В ней каждой последовательной паре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из таблицы 1 [2]. Так значение $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу таблицы 3 соответствуют значения $x_1 = 2mn = 4$, $y_1 = m^2 - n^2 = 3$, $z_1 = m^2 + n^2 = 5$ в верхнем левом углу таблицы 2 [2]. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов таблицы 3 [2] величина m следует за величиной n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенной разностью между длинами катетов, причем,

$$(2m_{k+1}m_k)^2 + (m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды определяют генераторы взаимно простых чисел.

Отметим также, что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше ре-

куррентных соотношений в общем случае в таблице 2 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из таблицы 1 [2]. В таблице 2 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов x_1 и y_1 равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из таблицы 2.

Аналогично, таблица 6 [2] для чисел m и n соответствует пифагоровым тройкам из таблицы 2. Отметим, что разность, а также сумма длин катетов, принимает дискретные строго определенные, зачастую простые значения. Величина разности между катетами x_1 и y_1 , очевидно, повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами. Это осуществлено в таблицах 6 и 7 [2] для значений разности между катетами 1, 7, 23, 47, 79 в таблице 6 [2] и значений разности между катетами 1, 7, 17, 31, 49 в таблице 7 [2]. Для упрощения записи таблиц вместо пифагоровых троек чисел приведены лишь значения гипотенуз z . В этих таблицах значения рядов пифагоровых троек продолжены в обратных направлениях, причем использованы одни и те же рекуррентные соотношения. Числа, соответствующие гипотенузам из пифагоровых троек в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной в обе стороны.

Выясним теперь какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Площадь прямоугольного треугольника

$$S_1 = x_1 y_1 / 2 = mn(m^2 - n^2) = nm^3 - n^3 m,$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов. Для примера в таблице 8 [2] приведены результаты значения площадей прямоугольных треугольников для верхней части треугольников из таблицы 2. Расчет площадей прямоугольных треугольников в каждом ряду соответствующей разностью между длинами катетов может осуществляться не только по приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением:

$$S_{n+1} = 35(S_n - S_{n-1}) + S_{n-2},$$

соответствующим каждому из рядов пифагоровых троек.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых троек. Во-первых, пифагоровы тройки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях, если они соответствуют опреде-

ленной разности длин катетов. Во-вторых, каждой гипотенузе соответствует два ряда пифагоровых троек. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе.

Отметим следующую особенность решения полиномиальных уравнений второй степени с двумя переменными. Рассмотренные варианты решений уравнений относятся к целым значениям гипотенузы в то же время указанное выше рекуррентное соотношение для последовательных значений сумм катетов позволяет найти аналогичные варианты решения уравнений второй степени с двумя переменными, относящиеся уже к сумме катетов. В результате удастся получить классификацию прямоугольных треугольников не только по значению модуля разности между катетами, но и по значению разности между гипотенузой z_2 и одним из катетом x_2 равной единице, причем каждому прямоугольному треугольнику с определенным модулем разности между катетами соответствует прямоугольный треугольник с разностью между гипотенузой z_2 и катетом x_2 равном единице. При этом

$$\begin{aligned}x_2 &= ((x_1 + y_1)^2 - 1)/2, \\ y_2 &= x_1 + y_1, \\ z_2 &= ((x_1 + y_1)^2 + 1)/2,\end{aligned}$$

где индекс один относится к первому прямоугольному треугольнику, а индекс два к соответствующему ему второму прямоугольному треугольнику так что

$$\begin{aligned}(((x_1 + y_1)^2 - 1)/2)^2 + (x_1 + y_1)^2 &= (((x_1 + y_1)^2 + 1)/2)^2 \\ \text{и} \quad x_2^2 + y_2^2 &= z_2^2.\end{aligned}$$

В таблицах 3 и 4 указаны значения пифагоровых троек прямоугольных треугольников с разностью равной единице между гипотенузой z_2 и катетом x_2 в последовательностях прямоугольных треугольников, отвечающих последовательностям прямоугольных треугольников с определенным значением модуля разности между катетами x_1 и y_1 (таблицы 1, 2).

Таким образом, удастся осуществить классификацию пар прямоугольных треугольников, так что каждому прямоугольному треугольнику с определенным модулем разности между катетами соответствует прямоугольный треугольник с разностью между гипотенузой z_2 и катетом x_2 равной единице. Так в таблицах 5 и 6 указаны последовательности значений катетов y_2 соответствующие значениям гипотенуз z_1 (таблицы 1 и 2). Эти последовательности образуют уже плоскости числовых последовательностей.

Из приведенных таблиц с модулем разностей катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 49, 71, 73, 79, 89, 97 плоскости с разностями 1, 7, 41 представляют определенную совокупность плоскостей с одним и тем же рекуррентным соотношением, относящимся уже к сумме длин катетов:

$$41=6*7-1.$$

Следующей плоскостью в этой числовой последовательности будет плоскость с разностью 239:

$$239=6*41-7$$

и так далее до бесконечности в обоих направлениях.

Анализ таблиц 3 и 4 позволяет также выявить рекуррентные соотношения для значений x_2 и z_2 , а именно,

$$x_{n+1}=35(x_n-x_{n-1})+x_{n-2},$$

и

$$z_{n+1}=35(z_n-z_{n-1})+z_{n-2}.$$

Для примера в таблице 7 приведены результаты значения x_2 и z_2 прямоугольных треугольников для треугольников из таблицы 3, рассчитанные по этим рекуррентным соотношениям.

Выясним теперь какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Площадь прямоугольного треугольника

$$S_2=x_2 y_2/2= x_2=((x_1+y_1)^2-1)*(x_1+y_1)/4=((x_1+y_1)^3-(x_1+y_1))/4$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно.

Таким образом, отмечен ряд особенностей решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах. Отметим особо, что каждой пифагоровой тройке соответствует вторая пифагорова тройка с иными способами расчета троек.

Таблица 1 [2] позволяет выявить также определенную зависимость между пропорциональными пифагоровыми тройками. В таблице 8 приведены значения m и n для пропорционально пифагоровых троек a . Так пифагоровой тройке 1^2a обязательно находятся тройки 2^2a , 3^2a , 4^2a , 5^2a , ..., а также $2*1^2a$, $2*2^2a$, $2*3^2a$, $2*4^2a$, $2*5^2a$,....

Отметим, что классификация прямоугольных треугольников по величине модуля разности двух катетов x и y , так что $(x_{n+1}-y_{n+1})^2=const$ позволяет также классифицировать не только прямоугольные треугольники, но также и такие простейшие геометрические фигуры как квадраты, кубы, круги и шары. Покажем это следующим образом. Имеем:

$$z_{n+1}=6z_n-z_{n-1}, \quad x_{n+1}, x_{k+1}=5(x_k+x_{k-1})-x_{k-2}, \quad y_{k+1}=5(y_k+y_{k-1})-y_{k-2}.$$

Из таблицы

z	z ²	s	x	y
1	1	0	0	1
5	25	6	4	3
29	841	210	20	21
169	28561	7140	120	119
985	970225	242556	696	697
13	169	30	12	5
73	5329	1320	48	55
425	180625	45144	304	297
2477	6135529	1533870	1748	1755
14437	208426969	52106730	10212	10205

следует

$$z_{n+1}^2 = 35(z_n^2 - z_{n-1}^2) + z_{n-2}^2.$$

и площадь треугольников в ряду

$$s_{n+1} = 35(s_n - s_{n-1}) + s_{n-2}.$$

Очевидно также, что

$$z_{n+1}^2 = 4s_{n+1} + (x_{n+1} - y_{n+1})^2,$$

причем

$$(x_{n+1} - y_{n+1})^2 = \text{const.}$$

Легко показать, что при этом выполняется соотношение

$$z_{n+1}^2 = 35(z_n^2 - z_{n-1}^2) + z_{n-2}^2.$$

Таким образом, классификация прямоугольных треугольников по величине модуля разности двух катетов позволяет установить не только ряды прямоугольных треугольников, соответствующих уравнению

$$(x_{n+1} - y_{n+1})^2 = \text{const.},$$

но также получить ряды периметров квадратов и длин окружностей. Вместе с этим легко получить не только ряды площадей прямоугольных треугольников, но и площадей квадратов и площадей кругов, а вместе с ними также площадей поверхностей кубов и шаров. Таким образом, удастся классифицировать такие простейшие и широко используемые на практике геометрические фигуры, как квадраты, кубы, круги и шары, получая для них бесконечно последовательности площадей этих фигур.

Литература

4. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера.
5. Коротков А. В., Чураков В. С.. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств.-Новочеркасск: Набл, 2007г.
6. Начала Евклида, книги I-VI, М.-Л. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950г.

Таблица 1.

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
5	17	37	65	101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
29	97	205	353	541
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
169	565	1193	2053	3145
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
985	3293	6953	11965	18329
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
5741	19193	40525	69737	106829
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
33461	111865	236197	406457	622645
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
195025	651997	1376657	2369005	3629041
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
4684660	15661496	33068412	56905408	87172484
4684659	15661503	33068435	56905455	87172563
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
27304196	91281912	192736908	331669184	508078740
27304197	91281905	192736885	331669137	508078661
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
159140520	532029948	1123352944	1933109508	2961299640
159140519	532029955	1123352967	1933109555	2961299719
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
927538920	3100897804	6547380848	11266988052	17259719416
927538921	3100897797	6547380825	11266988005	17259719337
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
5406093004	18073356848	38160932052	65668818616	100597016540
5406093003	18073356855	38160932075	65668818663	100597016619
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
31509019100	105339243312	222418211556	382745923832	586322380140
31509019101	105339243305	222418211533	382745923785	586322380061
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
183648021600	613962102996	1296348337192	2230806724188	3417337263984
183648021599	613962103003	1296348337215	2230806724235	3417337264063
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1070379110496	3578433374692	7555671811688	13002094421484	19917701204080
1070379110497	3578433374685	7555671811665	13002094421437	19917701204001
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
6238626641380	20856638145128	44037682532844	75781759804528	116088869960180
6238626641379	20856638145135	44037682532867	75781759804575	116088869960259
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
36361380737780	121561395496104	256670423385468	441688464405872	676615518557316
36361380737781	121561395496097	256670423385445	441688464405825	676615518557237
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 2.

4	12	24	40	60
3	5	7	9	11
5	13	25	41	61
20	48	88	140	204
21	55	105	171	253
29	73	137	221	325
120	304	572	924	1360
119	297	555	893	1311
169	425	797	1285	1889
696	1748	3276	5280	7760
697	1755	3293	5311	7809
985	2477	4645	7489	11009
4060	10212	19152	30880	45396
4059	10205	19135	30849	45347
5741	14437	27073	43649	64165
23660	59496	111568	179876	264420
23661	59503	111585	179907	264469
33461	84145	157793	254405	373981
137904	346792	650324	1048500	1541320
137903	346785	650307	1048469	1541271
195025	490433	919685	1482781	2179721
803760	2021228	3790308	6111000	8983304
803761	2021235	3790325	6111031	8983353
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
4684660	11780604	22091592	35617624	52358700
4684659	11780597	22091575	35617593	52358651
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
27304196	68662368	128759176	207594620	305168700
27304197	68662375	128759193	207594651	305168749
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
159140520	400193632	750463532	1209950220	1778653696
159140519	400193625	750463515	1209950189	1778653647
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
927538920	2332499396	4374021948	7052106576	10366753280
927538921	2332499403	4374021965	7052106607	10366753329
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
5406093004	13594802772	25493668224	41102689360	60421866180
5406093003	13594802765	25493668207	41102689329	60421866131
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
31509019100	79236317208	148587987328	239564029460	352164443604
31509019101	79236317215	148587987345	239564029491	352164443653
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640
183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 3.

24	264	1104	3120	7080
7	23	47	79	119
25	265	1105	3121	7081
840	9384	41760	123504	289560
41	137	289	497	761
841	9385	41761	123505	289561
28560	319200	1422984	4213704	9887904
239	799	1687	2903	4447
28561	319201	1422985	4213705	9887905
970224	10843824	48343944	143160120	335949120
1393	4657	9833	16921	25921
970225	10843825	48343945	143160121	335949121
32959080	368371224	1642275360	4863248064	11412432120
8119	27143	57311	98623	151079
32959081	368371225	1642275361	4863248065	11412432121
1119638520	12513778200	55789022544	165207291744	387686792904
47321	158201	334033	574817	880553
1119638521	12513778201	55789022545	165207291745	387686792905
38034750624	425100087984	1895184495384	5612184688920	13169938576560
275807	922063	1946887	3350279	5132239
38034750625	425100087985	1895184495385	5612184688921	13169938576561
1292061882720	14440889213664	64380483824760	190649072149224	447390224860080
1607521	5374177	11347289	19526857	29912881
1292061882721	14440889213665	64380483824761	190649072149225	447390224860081

Таблица 4.

24	144	480	1200	2520
7	17	31	49	71
25	145	481	1201	2521
840	5304	18624	48360	104424
41	103	193	311	457
841	5305	18625	48361	104425
28560	180600	635064	1650744	3567120
239	601	1127	1817	2671
28561	180601	635065	1650745	3567121
970224	6135504	21575880	56084640	121196880
1393	3503	6569	10591	15569
970225	6135505	21575881	56084641	121196881
32959080	208426944	732947184	1905234720	4117146024
8119	20417	38287	61729	90743
32959081	208426945	732947185	1905234721	4117146025
1119638520	7080381000	24898630704	64721903544	139861787160
47321	118999	223153	359783	528889
1119638521	7080381001	24898630705	64721903545	139861787161
38034750624	240524527464	845820499080	2198639493480	4751183636640
275807	693577	1300631	2096969	3082591
38034750625	240524527465	845820499081	2198639493481	4751183636641
1292061882720	8170753553184	28732998340344	74689020882480	161400381877824
1607521	4042463	7580633	12222031	17966657
1292061882721	8170753553185	28732998340345	74689020882481	161400381877825

Таблица 5.

-54608393	-800387257	-4092414433	-9930689921	-18315213721
-9369319	-137324743	-702147311	-1703837023	-3142393879
-1607521	-23561201	-120469433	-292332217	-539149553
-275807	-4042463	-20669287	-50156279	-92503439
-47321	-693577	-3546289	-8605457	-15871081
-8119	-118999	-608447	-1476463	-2723047
-1393	-20417	-104393	-253321	-467201
-239	-3503	-17911	-43463	-80159
-41	-601	-3073	-7457	-13753
-7	-103	-527	-1279	-2359
-1	-17	-89	-217	-401
1	1	-7	-23	-47
7	23	47	79	119
41	137	289	497	761
239	799	1687	2903	4447
1393	4657	9833	16921	25921
8119	27143	57311	98623	151079
47321	158201	334033	574817	880553
275807	922063	1946887	3350279	5132239
1607521	5374177	11347289	19526857	29912881
9369319	31322999	66136847	113810863	174345047
54608393	182563817	385473793	663338321	1016157401
318281039	1064059903	2246705911	3866219063	5922599359
1855077841	6201795601	13094761673	22533976057	34519438753

Таблица 6.

-54608393	-1064059903	-3346635569	-6902335391	-11731159369
-9369319	-182563817	-574191887	-1184253529	-2012748743
-1607521	-31322999	-98515753	-203185783	-345333089
-275807	-5374177	-16902631	-34861169	-59249791
-47321	-922063	-2900033	-5981231	-10165657
-8119	-158201	-497567	-1026217	-1744151
-1393	-27143	-85369	-176071	-299249
-239	-4657	-14647	-30209	-51343
-41	-799	-2513	-5183	-8809
-7	-137	-431	-889	-1511
-1	-23	-73	-151	-257
1	-1	-7	-17	-31
7	17	31	49	71
41	103	193	311	457
239	601	1127	1817	2671
1393	3503	6569	10591	15569
8119	20417	38287	61729	90743
47321	118999	223153	359783	528889
275807	693577	1300631	2096969	3082591
1607521	4042463	7580633	12222031	17966657
9369319	23561201	44183167	71235217	104717351
54608393	137324743	257518369	415189271	610337449
318281039	800387257	1500927047	2419900409	3557307343
1855077841	4664998799	8748043913	14104213183	20733506609

Таблица 7.

24	264	1104	3120	7080
25	265	1105	3121	7081
840	9384	41760	123504	289560
841	9385	41761	123505	289561
28560	319200	1422984	4213704	9887904
28561	319201	1422985	4213705	9887905
970224	10843824	48343944	143160120	335949120
970225	10843825	48343945	143160121	335949121
32959080	368371224	1642275360	4863248064	11412432120
32959081	368371225	1642275361	4863248065	11412432121
1119638520	12513778200	55789022544	165207291744	387686792904
1119638521	12513778201	55789022545	165207291745	387686792905
38034750624	425100087984	1895184495384	5612184688920	13169938576560
38034750625	425100087985	1895184495385	5612184688921	13169938576561
1292061882720	14440889213664	64380483824760	190649072149224	447390224860080
1292061882721	14440889213665	64380483824761	190649072149225	447390224860081

Таблица 8.

1a	4a	9a	16a	25a	...	2a	8a	18a	32a	50a	...
2 1	4 2	6 3	8 4	10 5	...	3 1	6 2	9 3	12 4	15 5	...
5 2	10 4	15 6	20 8	25 10	...	7 3	14 6	21 9	28 12	35 15	...
12 5	24 10	36 15	48 20	60 25	...	17 7	34 14	51 21	68 28	85 35	...
29 12	58 24	87 36	116 48	145 50	...	41 17	82 34	123 51	164 68	205 85	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3 2	6 4	9 6	12 8	15 10	...	5 1	10 2	15 3	20 4	25 5	...
8 3	16 6	24 9	32 12	40 15	...	11 5	22 10	33 15	44 20	55 25	...
19 8	38 16	57 24	76 32	95 40	...	27 11	54 22	81 33	118 44	135 55	...
46 19	92 38	138 57	184 76	230 95	...	65 27	130 54	195 81	280 118	325 135	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4 1	8 2	12 3	16 4	20 5	...	5 3	10 6	15 9	20 12	25 15	...
9 4	18 8	27 12	36 16	45 20	...	13 5	26 10	39 15	52 20	65 25	...
22 9	44 18	66 27	88 36	110 45	...	31 13	62 26	93 39	124 52	155 65	...
53 22	106 44	159 66	212 88	265 110	...	75 31	150 62	225 93	300 124	375 155	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4 3	8 6	12 9	16 12	20 15	...	7 1	14 2	21 3	28 4	35 5	...
11 4	22 8	33 12	44 16	55 20	...	15 7	30 14	45 21	60 28	75 35	...
26 11	52 22	78 33	104 44	130 55	...	37 15	74 30	111 45	148 60	185 75	...
63 26	126 52	189 78	252 104	315 130	...	89 37	178 74	267 111	356 148	445 185	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5 4	10 8	15 12	20 16	25 20	...	9 1	18 2	27 3	36 4	45 5	...
14 5	28 10	42 15	56 20	70 25	...	19 9	38 18	57 27	76 36	95 45	...
33 14	66 28	99 42	132 56	165 70	...	47 19	94 38	141 57	188 76	235 95	...
80 33	160 66	240 99	320 132	400 165	...	113 47	226 94	339 141	452 188	565 235	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
6 1	12 2	18 3	24 4	30 5	...	7 5	14 10	21 15	28 20	35 25	...
13 6	26 12	39 18	52 24	65 30	...	19 7	38 14	57 21	76 28	95 35	...
32 13	64 26	96 39	128 52	160 65	...	45 19	90 38	135 57	180 76	225 95	...
77 32	154 64	231 96	308 128	385 160	...	109 45	218 90	327 135	436 180	545 225	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
6 5	12 10	18 15	24 20	30 25	...	11 1	22 2	33 3	44 4	55 5	...
17 6	34 12	51 18	68 24	85 30	...	23 11	46 22	69 33	92 44	115 55	...
40 17	80 34	120 51	160 68	200 85	...	57 23	114 46	171 69	228 92	285 115	...
97 40	194 80	291 120	388 160	485 200	...	137 57	274 114	411 171	548 228	685 285	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

А.В. Коротков

Особенности полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: m -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S_2 = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в *криптологии (криптографии и криптоанализе)*.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Для выяснения этого вопроса необходимо найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [1] известно, что

$$x_2 = m^2 - n^2, y_2 = 2(mn)^1, z_2 = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x_2, y_2, z_2 – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2(mn)^1)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x_2^2 + y_2^2 = z_2^2,$$

где

$$y_2 = 2(mn)^1,$$

что соответствует теореме Пифагора. Это тождество строго фиксирует возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x_2, y_2, z_2 в целых числах (таблица 1). Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности, причем удается классифицировать тройки пифагоровых чисел по значению модуля разности катетов прямоугольных треугольников [2].

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{2k+1} = 6z_{2k} - z_{2k-1},$$

где z_{2k+1} и z_{2k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_{2k} прямоугольных треугольников в столбце пифагоровых троек с одинаковым значением модуля разности катетов прямоугольных треугольников.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x_2, y_2, z_2 соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине модуля разности между длинами катетов, то этому способу классификации соответствует определенный способ классификации значений m и n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенным модулем разности между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2(m_{k+1}m_k))^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что эти ряды являются генераторами взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Площадь прямоугольного треугольника

$$S_2 = x_2 y_2 / 2 = (m^2 - n^2)(mn)^1 = nm^3 - n^3 m = (m_{k+1}^2 - m_k^2)(m_{k+1}m_k)^1 = S_{2k},$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов.

Таким образом, получен ответ на поставленный вопрос о решении полиномиальных уравнений второй степени с двумя переменными.

Вместе с тем, определенный интерес представляет выяснение числа решений полиномиального уравнения с большим числом переменных (большим двух) в целых числах, в частности, равное трем. Такое уравнение в общем случае может быть записано в виде

$$x_2^2 + (y_2^2 + y_3^2) = z_3^2.$$

Это уравнение отвечает метрике трехмерного собственно-евклидоваго пространства.

Решение полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными можно получить исходя из совпадающих значений второй и третьей строк таблицы 1. Так, например, число 25 встречается в третьей строке со значением $m=4$ и $n=3$ и во второй строке со значением $k=12$ и $t=13$. Таким образом, выполняется равенство $4^2 + 3^2 = 25 = 13^2 - 12^2$, что равносильно равенству $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$, то есть $x_2^2 + y_2^2 + y_3^2 = z_3^2$. Число решений такого уравнения, очевидно, бесконечно. Их удобно представлять в виде таблицы 2. Фрагмент этой таблицы представлен ниже

m, n, k, t $=3,4,12,13$	$m^2+n^2=25$
	$k^2+m^2=153$
$t^2=169$	$n^2+k^2=160$

Очевидно, что сумма строк правого столбца равняется $2t^2$. Действительно,

$$\begin{aligned}(m^2-n^2)^2+(2(mn))^2 &= (m^2+n^2)^2, \\ (n^2-k^2)^2+(2(nk))^2 &= (n^2+k^2)^2, \\ (k^2-m^2)^2+(2(km))^2 &= (k^2+m^2)^2,\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}2t^2 &= ((m^2-n^2)^2+(2(mn))^2)^{1/2} + ((n^2-k^2)^2+(2(nk))^2)^{1/2} + ((k^2-m^2)^2+(2(km))^2)^{1/2} = \\ &= 2(m^2+n^2+k^2) \\ \text{и} \quad t^2 &= m^2+n^2+k^2.\end{aligned}$$

Отметим, что среди чисел третьих строк таблицы 1 встречаются квадраты чисел в соответствии с теоремой Ферма.

Укажем на некоторые особенности решений уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах. Во-первых, из таблицы 1 следует, что все нечетные числа представимы в виде разности квадратов двух целых чисел

$$c = a \cdot b = ((b+a)/2)^2 - ((b-a)/2)^2.$$

Числа класса 1 сравнений по mod4 представимы также в виде суммы квадратов двух целых чисел. Числа класса 1 сравнений по mod4 представимы кроме того в виде произведения двух целых чисел класса 1 сравнений по mod4. В случае равенства одного из них единице, второе является простым числом.

Из таблицы 2 следует, что решения уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах вида

$$m^2+n^2+k^2=t^2$$

образуют для t класс нечетных чисел, включающий все нечетные числа кроме 1 и 5 (вырожденный случай). Это показано вплоть до $t=59$, что позволяет выдвинуть гипотезу аналогичную гипотезе Гольдбаха для четных чисел, то есть предположить, что квадрат каждого нечетного числа представим в виде суммы квадратов трех взаимно простых чисел с t . Из этой же таблицы следует, что каждое решение содержит два четных и два нечетных числа причем четные числа являются числами одного и того же класса вычетов по mod4.

Более того удастся связать числа m, n, k и t друг с другом с помощью формулы

$$(m^2+n^2)+(((m^2+n^2)/(t-k))-(t-k))/2 = (((m^2+n^2)/(t-k))+(t-k))/2.$$

Эта формула для распространенного частного случая $t-k=1$ дает соотношение

$$(m^2+n^2)+(((m^2+n^2)-1)/2)^2=(((m^2+n^2)+1)/2)^2$$

используемое в [2].

Отметим также уникальную особенность решений полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными, заключающуюся в том, что как и в случае двух переменных, четверки чисел решений уравнения образуют периодическую зависимость между собой определяемую рекуррентным соотношением

$$z_{2k+1}=6z_{2k}-z_{2k-1},$$

где в качестве z_{2k+1} , z_{2k} , z_{2k-1} выступают три последовательных значения величин n , k и t при одном и том же значении величины m . Некоторые из последовательностей решений представлены в таблице 3.

Таким образом, решения полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными образуют бесконечные последовательности четверок целых чисел, так что число решений оказывается также бесконечным.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых четверок. Во-первых, пифагоровы четверки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях. Во-вторых, каждой диагонали параллелепипеда соответствует два ряда пифагоровых четверок. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки чисел, а плоскости числовых последовательностей классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в таблице 5. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскости, которая может быть продлена до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$z_{k+1}=6z_k-z_{k-1}$$

(при постоянном значении первой координаты), а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел.

Литература

1. Начала Евклида, книги I-VI, М.-Л. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950.
2. Коротков А. В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств. – Новочеркасск: УПЦ "Набла", 2007.-194с.

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2·1 ¹ 0 2												
2	2·2 ¹ 3 5	2·4 ¹ 0 8											
3	2·3 ¹ 8 10	2·6 ¹ 5 13	2·9 ¹ 0 18										
4	2·4 ¹ 15 17	2·8 ¹ 12 20	2·12 ¹ 7 25	2·16 ¹ 0 32									
5	2·5 ¹ 24 26	2·10 ¹ 21 29	2·15 ¹ 16 34	2·20 ¹ 9 41	2·25 ¹ 0 50								
6	2·6 ¹ 35 37	2·12 ¹ 32 40	2·18 ¹ 27 45	2·24 ¹ 20 52	2·30 ¹ 11 61	2·36 ¹ 0 72							
7	2·7 ¹ 48 50	2·14 ¹ 45 53	2·21 ¹ 40 58	2·28 ¹ 33 65	2·35 ¹ 24 74	2·42 ¹ 13 85	2·49 ¹ 0 98						
8	2·8 ¹ 63 65	2·16 ¹ 60 68	2·24 ¹ 55 73	2·32 ¹ 48 80	2·40 ¹ 39 89	2·48 ¹ 28 100	2·56 ¹ 15 113	2·64 ¹ 0 128					
9	2·9 ¹ 80 82	2·18 ¹ 77 85	2·27 ¹ 72 90	2·36 ¹ 65 97	2·45 ¹ 56 106	2·54 ¹ 45 117	2·63 ¹ 32 130	2·72 ¹ 17 145	2·81 ¹ 0 162				
10	2·10 ¹ 99 101	2·20 ¹ 96 104	2·30 ¹ 91 109	2·40 ¹ 84 116	2·50 ¹ 75 125	2·60 ¹ 64 136	2·70 ¹ 51 149	2·80 ¹ 36 164	2·90 ¹ 19 181	2·100 ¹ 0 200			
11	2·11 ¹ 120 122	2·22 ¹ 117 125	2·33 ¹ 112 130	2·44 ¹ 105 137	2·55 ¹ 96 146	2·66 ¹ 85 157	2·77 ¹ 72 170	2·88 ¹ 57 185	2·99 ¹ 40 202	2·110 ¹ 21 221	2·121 ¹ 0 242		
12	2·12 ¹ 143 145	2·24 ¹ 140 148	2·36 ¹ 135 153	2·48 ¹ 128 160	2·60 ¹ 119 169	2·72 ¹ 108 180	2·84 ¹ 95 193	2·96 ¹ 80 208	2·108 ¹ 63 225	2·120 ¹ 44 244	2·132 ¹ 23 265	2·144 ¹ 0 288	
13	2·13 ¹ 168 170	2·26 ¹ 165 173	2·39 ¹ 160 178	2·52 ¹ 153 185	2·65 ¹ 144 194	2·78 ¹ 133 205	2·91 ¹ 120 218	2·104 ¹ 105 233	2·117 ¹ 88 250	2·130 ¹ 69 269	2·143 ¹ 48 290	2·156 ¹ 25 313	2·169 ¹ 0 338
14	2·14 ¹ 195 197	2·28 ¹ 192 200	2·42 ¹ 187 205	2·56 ¹ 180 212	2·70 ¹ 171 221	2·84 ¹ 160 232	2·98 ¹ 147 245	2·112 ¹ 132 260	2·126 ¹ 115 277	2·140 ¹ 96 296	2·154 ¹ 75 317	2·168 ¹ 52 340	2·182 ¹ 27 365
15	2·15 ¹ 224 226	2·30 ¹ 221 229	2·45 ¹ 216 234	2·60 ¹ 209 241	2·75 ¹ 200 250	2·90 ¹ 189 261	2·105 ¹ 176 274	2·120 ¹ 161 289	2·135 ¹ 144 306	2·150 ¹ 125 325	2·165 ¹ 104 346	2·180 ¹ 81 369	2·195 ¹ 56 394
16	2·16 ¹ 255 257	2·32 ¹ 252 260	2·48 ¹ 247 265	2·64 ¹ 240 272	2·80 ¹ 231 281	2·96 ¹ 220 292	2·112 ¹ 207 305	2·128 ¹ 192 320	2·144 ¹ 175 337	2·160 ¹ 156 356	2·176 ¹ 135 377	2·192 ¹ 112 400	2·208 ¹ 87 425

Таблица 2.

1,2,2,3	5	4,5,20,21	41	6,14,27,31	232	5,8,44,45	89
	5		416		765		1961
9	8	441	425	961	925	2025	2000
2,3,6,7	13	4,13,16,21	185	6,21,22,31	477	16,20,37,45	656
	40		272		520		1625
49	45	441	425	961	925	2025	1769
1,4,8,9	17	8,11,16,21	185	14,18,21,31	520	11,18,42,47	445
	65		320		637		1885
81	80	441	377	961	765	2209	2088
2,6,9,11	40	3,14,18,23	205	7,16,28,33	305	4,9,48,49	97
	85		333		833		2320
121	117	529	520	1089	1040	2401	2385
6,6,7,11	72	6,13,18,23	205	8,20,25,33	464	1,10,50,51	101
	85		360		689		2501
121	85	529	493	1089	1025	2601	2600
3,4,12,13	25	9,12,20,25	225	15,18,26,35	549	14,17,46,51	485
	153		481		901		2312
169	160	625	544	1225	1000	2601	2405
2,5,14,15	29	12,15,16,25	369	3,8,36,37	73	12,19,48,53	505
	200		400		1305		2448
225	221	625	481	1369	1360	2809	2665
2,10,11,15	104	2,7,26,27	53	10,14,35,39	296	3,10,54,55	109
	125		680		1325		2925
225	221	729	725	1521	1421	2916	3016
1,12,12,17	145	7,14,22,27	245	13,14,34,39	365	10,18,51,55	424
	145		533		1325		2701
289	288	729	680	1521	1352	3025	2925
8,9,12,17	145	10,10,23,27	200	4,24,33,41	592	7,8,56,57	113
	208		629		1105		3185
289	225	729	629	1681	1665	3249	3200
1,6,18,19	37	11,12,24,29	265	9,24,32,41	657	16,17,52,57	545
	325		697		1105		2929
361	360	841	720	1681	1600	3249	2993
6,10,15,19	136	5,6,30,31	61	2,18,39,43	328	9,22,54,59	565
	261		925		1525		2997
361	325	961	936	1849	1845	3481	3400

Таблица 3.

1,2,2,3	5	2,3,6,7	13	1,4,8,9	17
	5		40		65
9	8	49	45	81	80
1,12,12,17	145	2,7,26,27	53	1,6,18,19	37
	145		680		325
289	388	729	725	361	360
1,70,70,99	4901	2,39,150,155	1525	1,32,100,105	1025
	4901		22504		10001
9801	9800	24025	24021	11025	11024
1,408,408,577	166465	2,227,874,903	51533	1,186,582,611	34597
	166465		763880		338725
322929	322928	815409	815405	373321	373320
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
2,6,9,11	40	3,4,12,13	25	2,5,14,15	29
	85		153		200
121	117	169	160	225	221
2,26,29,39	680	3,14,18,23	205	2,21,42,47	445
	845		333		1768
1521	1517	529	520	2209	2205
2,150,165,223	22504	3,80,96,125	6409	2,121,238,267	14645
	27229		9225		56648
49729	49725	15625	15616	71289	71285
2,874,961,1299	763880	3,466.558,727	217165	2,705,1386,1555	497029
	923525		311373		1921000
1687401	1687397	528529	528520	2418025	2418021
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Таблица 4.

...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
2,1830,4785,5123	3348904	3,1900,10596,10765	3610009	2,1661,8078,8247	2758925
	22896229		112275225		65254088
26245129	26245125	115885225	115885216	68013009	68013005
2,314,821,879	98600	3,326,1818,1847	106285	2,285,1386,1415	81229
	674045		3305133		1921000
772641	772637	3411409	3411400	2002225	2002221
2,54,141,151	2920	3,56,312,317	3145	2,49,238,243	2405
	19885		97353		56648
22801	22797	100489	100480	59049	59045
2,10,25,27	104	3,10,54,55	109	2,9,42,43	1768
	629		2925		1773
729	725	3025	3016	1849	1845
2,6,9,11	40	3,4,12,13	25	2,5,14,15	29
	85		153		200
121	117	169	160	225	221
2,26,29,39	680	3,14,18,23	205	2,21,42,47	445
	845		333		1768
1521	1517	529	520	2209	2205
2,150,165,223	22504	3,80,96,125	6409	2,121,238,267	14645
	27229		9225		56648
49729	49725	15625	15616	71289	71285
2,874,961,1299	763880	3,466.558,727	217165	2,705,1386,1555	497029
	923525		311373		1921000
1687401	1687397	528529	528520	2418025	2418021
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Таблица 5.

	-12	-2	0	2	12
			...		
29	2,-238,49,243	2,-42,9,43	2,-14,5,15	2,-42,21,47	2,-238,121,267
5	2,-34,-19,39	2,-6,-3,7	2,-2,1,3	2,-6,9,11	2,-34,53,63
1	2,34,-19,39	2,6,-3,7	2,2,1,3	2,6,9,11	2,34,53,63
1	2,238,49,243	2,42,9,43	2,14,5,15	2,42,21,47	2,238,121,267
5	2,1394,457,1467	2,246,81,259	2,82,29,87	2,246,93,263	2,1394,529,1491
			...		
	-228	-38	0	38	228
			...		
97	2,4378,4019,5943	2,774,711,1051	2,266,247,363	2,822,771,1127	2,4666,4379,6399
17	2,638,551,843	2,114,99,151	2,46,43,63	2,162,159,227	2,926,911,1299
5	2,26,7,27	2,6,3,7	2,10,11,15	2,54,63,83	2,314,367,483
13	2,94,211,231	2,18,39,43	2,14,23,27	2,66,99,119	2,382,571,687
73	2,1114,1979,2271	2,198,351,403	2,74,127,147	2,246,411,479	2,1402,2339,2727
			...		
	-636	-106	0	106	636
			...		
305	2,8714,10565,13695	2,1542,1869,2423	2,538,649,843	2,1686,2025,2635	2,9578,11501,14967
53	2,1166,1453,1863	2,210,261,335	2,94,113,147	2,354,417,547	2,2030,2389,3135
13	2,10,25,27	2,6,9,11	2,26,29,39	2,150,165,223	2,874,961,1299
25	2,622,569,843	2,114,105,155	2,62,61,87	2,258,261,367	2,1486,1505,2115
137	2,5450,5261,7575	2,966,933,1343	2,346,337,483	2,1110,1089,1555	2,6314,6197,8847
			...		
	-48	-8	0	8	48
			...		
29	1,338,746,819	1,60,132,145	1,22,46,51	1,72,144,161	1,410,818,915
5	1,32,100,105	1,6,18,19	1,4,8,9	1,18,30,35	1,104,172,201
1	1,-2,-2,3	1,0,0,1	1,2,2,3	1,12,12,17	1,70,70,99
1	1,100,32,105	1,18,6,19	1,8,4,9	1,30,18,35	1,172,104,201
5	1,746,338,819	1,132,60,145	1,46,22,51	1,144,72,161	1,818,410,915
			...		
	-336	-56	0	56	336
			...		
97	3,8010,5246,9575	3,1416,928,1693	3, 486,322,583	3,1500,1004,1805	3,8514,5702,10247
17	3,1176,724,1381	3,210,130,247	3,84,56,101	3,294,206,359	3,1680,1180,2053
5	3,54,10,55	3,12,4,13	3,18,14,23	3,96,80,125	3,558,466,727
13	3,156,248,293	3,30,46,55	3,24,28,37	3,114,122,167	3,660,704,965
73	3,1890,2390,3047	3,336,424,541	3,126,154,199	3,420,500,653	3,2394,2846,3719
			...		

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

А.В. Коротков

К вопросу классификации натурального ряда чисел

Среди бесконечного множества чисел особое значение приобретают так называемые "совершенные" числа [1]. По мнению Пифагора, совершенство числа зависит от его делителя. Если сумма делителей числа больше самого числа, то такое число называется "избыточным". Если сумма делителей меньше числа, то такое число называется "дефектным". Числа, сумма делителей которых равна самому числу, называются "совершенными". Например, число 6 имеет делителями 1, 2 и 3 и, следовательно, совершенно, так как $1+2+3=6$. Следующее совершенное число равно 28, так как $1+2+4+7+14=28$. Совершенный характер чисел 6 и 28 был признан многими культурами, обратившими внимание на то, что Луна совершает оборот вокруг Земли каждые 28 дней, и утверждавшими, что Бог сотворил мир за 6 дней.

По мере того, как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются все реже. Третье совершенное число 496, четвертое – 8 128, пятое – 33 550 336, шестое – 8 589 869 056. Декарт говорил, что совершенные числа подобны совершенным людям и встречаются весьма редко. Пифагор заметил, что совершенные числа не только равны сумме своих делителей, но и всегда равны сумме нескольких последовательных натуральных чисел. Так,

$$\begin{aligned}1 &= 1, \\ 6 &= 1+2+3, \\ 28 &= 1+2+3+4+5+6+7, \\ 496 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+\dots+30+31, \\ 8128 &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+\dots+126+127.\end{aligned}$$

Одно из открытий Пифагора состояло в том, что совершенство чисел связано с "двоичностью" и они могут быть представлены с множителем в виде 2^n . Все степени числа 2 слегка дефективные.

Евклид уточнил замеченную Пифагором связь между двоичностью и совершенством и показал, что совершенные числа всегда кратны двум числам, одно из которых равно степени числа 2, а другое на единицу меньше следующей степени числа 2:

$$\begin{aligned}1 &= 2^0 \cdot (2^1 - 1) = 1 \cdot 1, \\ 6 &= 2^1 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3, \\ 28 &= 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7, \\ &\dots \\ 496 &= 2^4 \cdot (2^5 - 1) = 16 \cdot 31, \\ &\dots \\ 8128 &= 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127.\end{aligned}$$

Современные компьютеры позволили обнаружить чудовищно большие экземпляры совершенных чисел, например, $2^{216090} \cdot (2^{216091} - 1)$. Это число подчиняется правилу Евклида. Тем не менее, как древние, так и современные ученые не сумели постичь ряд фундаментальных особенностей совершенных чисел.

Отметим, прежде всего, что совершенное число равно сумме последовательных членов натурального ряда чисел

$$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) = m(m+1)/2$$

как сумма членов арифметической прогрессии с дефектом, равным нулю.

Во-вторых, второй сомножитель совершенного числа является простым числом.

В-третьих, показатель степени первого сомножителя совершенного числа так же является простым числом. Более того, сумма первого и второго сомножителя является простым числом.

Таким образом, с последовательностью совершенных чисел связаны три последовательности простых чисел. Покажем это на примере.

Таблица 1.

n	$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) = m(m+1)/2$	$(m+1)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n - 1$	$(3m+1)/2$
1	1	1	1	2
2	6	2	3	5
3	28	4	7	11
...	...	8	...	...
5	496	16	31	47
...	...	32	...	...
7	8128	64	127	191
...	...	128	...	...
...	...	256	...	...
...	...	512	...	...
...	...	1024	...	...
...	...	2048	...	...
13	33550336	4096	8191	12287
...	...	8192	...	...
...	...	16384	...	...
...	...	32768	...	...
17	8589869056	65536	131071	196607
...	...	131072	...	...
19	137438691328	262144	524287	786431

Первый, четвертый и пятый столбцы таблицы 1 соответствуют последовательностям простых чисел, а второй столбец – последовательности совершенных чисел. Эти последовательности легко размножаются до невообразимо больших значений величин. Значения величин интенсивно нарастают. Покажем это на примере совершенных чисел с величиной n от нуля до 31.

Таблица 2.

n	$S_n=2^{n-1} \cdot (2^n-1)=m(m+1)/2$	$(m+1)/2=2^{n-1}$	$m=2^n-1$	$(3m+1)/2$
1	1	1	1	2
2	6	2	3	5
3	28	4	7	11
5	496	16	31	47
7	8128	64	127	191
13	33550336	4096	8191	12287
17	8589869056	65536	131071	196607
19	137438691328	262144	524287	786431
31	2305843008139952128	1073741824	2147483647	3221225471

Отметим, что число n – есть число из бесконечного множества нечетных чисел. Множество чисел 2^n-1 – так же бесконечно. Некоторые числа, составляющие 2^k-1 – простые. Они определяют совершенные числа. Но часть бесконечности сама бесконечна. Следовательно, существует бесконечно много совершенных чисел.

Таким образом, совершенные числа являются последовательностью чисел натурального ряда с дефектом $d=0$. Они являются одновременно генераторами трех последовательностей простых чисел.

Рассмотрим последовательности чисел натурального ряда с дефектом $d \neq 0$. Ближайшей к совершенным числам является последовательность с $d=2$.

Ей соответствует $S_n=2^{n-1} \cdot (2^n+1)=m(m-1)/2$

Таблица 3.

n	$S_n=2^{n-1} \cdot (2^n+1)=m(m-1)/2$	$(m-1)/2=2^{n-1}$	$m=2^n+1$
1	3	1	3
2	10	2	5
...	...	4	...
4	136	8	17
...	...	16	...
...	...	32	...
...	...	64	...
8	32896	128	257
...	...	256	...
...	...	512	...
...	...	1024	...
...	...	2048	...
...	...	4096	...
...	...	8192	...
...	...	16384	...
16	2147516416	32768	65537
...	...	65536	...
...	...	131072	...
...	...	262144	...

Таблица 3 показывает, что величина n определяется степенью числа 2, причем показатель степени k является натуральным числом 0, 1, 2, ..., k , чему соответствует таблица

Таблица 4.

n	$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 1) = m(m-1)/2$	$(m-1)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 1$
1	3	1	3
2	10	2	5
4	136	8	17
8	32896	128	257
16	2147516416	32768	65537
32	9223372039002259456	2147483648	4294967297
64		9223372036854775808	18446744073709551617

Четвертая графа таблицы 4 определяется последовательностью простых чисел $m = 2^n + 1$ при $n = 2^k$, так что последовательность натуральных чисел с $d=2$ так же является генератором последовательности простых чисел.

Таким образом, величина дефекта числа классифицирует различные последовательности чисел натурального ряда и простых чисел. Приведем некоторые из них.

При $d=-4$

Таблица 5.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 5) = m(m+5)/2$	$(m+5)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n - 5$
...	1	...
...	2	...
12	4	3
88	8	11
...	16	...
1888	32	59
...	64	...

При $d=-2$

Таблица 6.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 3) = m(m+3)/2$	$(m+3)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n - 3$
...	1	...
...	2	...
20	4	5
104	8	13
464	16	29
1952	32	61
...	64	...

При $d=0$

Таблица 7.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1) = m(m+1)/2$	$(m+1)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n - 1$
1	1	1
6	2	3
28	4	7
...	8	...
496	16	31
...	32	...
8128	64	127

При $d=2$

Таблица 8.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 1) = m(m-1)/2$	$(m-1)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 1$
3	1	3
10	2	5
...	4	...
136	8	17
...	16	...
...	32	...
...	64	...

При $d=4$

Таблица 9.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 3) = m(m-3)/2$	$(m-3)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 3$
5	1	5
14	2	7
44	4	11
152	8	19
...	16	...
2144	32	67
8384	64	131

При $d=6$

Таблица 10.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 5) = m(m-5)/2$	$(m-5)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 5$
7	1	7
...	2	...
52	4	13
...	8	...
592	16	37
...	32	...
...	64	...

При d=8

Таблица 11.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 7) = m(m-7)/2$	$(m-7)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 7$
...	1	...
22	2	11
...	4	...
184	8	23
...	16	...
2272	32	71
...	64	...

При d=10

Таблица 12.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 9) = m(m-9)/2$	$(m-9)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 9$
11	1	11
26	2	13
68	4	17
...	8	...
656	16	41
2336	32	73
8768	64	137

При d=12

Таблица 13.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 11) = m(m-11)/2$	$(m-11)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 11$
13	1	13
...	2	...
76	4	19
...	8	...
688	16	43
...	32	...
8896	64	139

При d=14

Таблица 14.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 13) = m(m-13)/2$	$(m-13)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 13$
...	1	...
34	2	17
...	4	...
232	8	29
...	16	...
...	32	...
...	64	...

При $d=16$

Таблица 15.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 15) = m(m-15)/2$	$(m-15)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 15$
17	1	17
38	2	19
92	4	23
248	8	31
752	16	47
2528	32	79
...	64	...

При $d=18$

Таблица 16.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 17) = m(m-17)/2$	$(m-17)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 17$
19	1	19
...	2	...
...	4	...
...	8	...
...	16	...
...	32	...
...	64	...

При $d=20$

Таблица 17.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 19) = m(m-19)/2$	$(m-19)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 19$
...	1	...
46	2	23
...	4	...
...	8	...
...	16	...
2656	32	83
...	64	...

При $d=40$

Таблица 18.

$S_n = 2^{n-1} \cdot (2^n + 39) = m(m-39)/2$	$(m-39)/2 = 2^{n-1}$	$m = 2^n + 39$
41	1	41
86	2	43
188	4	47
...	8	...
1136	16	71
3296	32	103
10688	64	167

При $d=100$

Таблица 19.

$S_n=2^{n-1} \cdot (2^n+99)=m(m-99)/2$	$(m-99)/2=2^{n-1}$	$m=2^n+99$
101	1	101
206	2	103
428	4	107
...	8	...
2096	16	131
5216	32	163
14528	64	227

При $d=22270$

Таблица 20.

$S_n=2^{n-1} \cdot (2^n+22269)=$ $=m(m-22269)/2$	$(m-22269)/2=2^{n-1}$	$m=2^n+22269$
22271	1	22271
44546	2	22273
89108	4	22277
...	8	...
...	16	...
...	32	...
...	64	...

При $d=1000000000060$

Таблица 21.

$S_n=2^{n-1} \cdot (2^n+1000000000059)=$ $=m(m-1000000000059)/2$	$(m-1000000000059)/2=$ $=2^{n-1}$	$m=2^n+1000000000059$
1000000000061	1	1000000000061
2000000000126	2	1000000000063
...	4	...
...	8	...
...	16	...
...	32	...
...	64	...

Таким образом, можно классифицировать различные последовательности натурального ряда чисел и простых чисел по величине дефекта. Необходимо отметить, что это относительно несложная, однако трудоемкая процедура, особенно в случае больших значений величины n . В таблице 22 показан способ упрощения этой процедуры. Он связан с поочередным сдвигом столбца из последовательности простых чисел в системе нечетных чисел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.Сингх, С. Великая теорема Ферма/С.Сингх. – М.: Московский центр непрерывного математического образования, 2000. – 288 с.

Таблица 22.

-4	...	...	3	11	...	59	...	251	...	1019	...	4091	...
-2	...	1	5	13	29	61	...	...	509	1021	...	4093	...
0	1	3	7	...	31	...	127	...	...	...	...	...	8191
2	3	5	...	17	...	...	...	257	...	...	...	...	...
4	5	7	11	19	...	67	131	...	...	...	...	4099	...
6	7	...	13	...	37	...	...	...	...	...	2053	...	...
8	...	11	...	23	...	71	...	263	...	1031	...	...	...
10	11	13	17	...	41	73	137	...	521	1033	...	...	...
12	13	...	19	...	43	...	139	...	523	...	...	...	...
14	...	17	...	29	...	...	...	269	...	...	...	...	...
16	17	19	23	31	47	79	...	271	...	1039	2063	4111	...
18	19	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	8209
20	...	23	...	...	...	83	...	...	...	...	...	...	...
22	23	...	29	37	53	...	149	277	...	...	2069	...	...
24	...	...	31	...	...	...	151	...	...	...	...	...	...
26	...	29	...	41	...	89	...	281	...	1049	...	...	...
28	29	31	...	43	59	...	...	283	...	1051	...	...	8219
30	31	...	37	...	61	...	157	...	541	...	...	...	8221
32	...	...	...	47	...	...	...	...	...	...	...	4127	...
34	...	37	41	...	...	97	...	...	...	...	2081	4129	...
36	37	...	43	...	67	...	163	...	547	...	2083	...	...
38	...	41	...	53	...	101	...	293	...	1061	...	4133	...
40	41	43	47	...	71	103	167	...	...	1063	2087	...	8231
42	43	...	...	...	73	...	...	...	...	...	2089	...	8233
44	...	47	...	59	...	107	...	...	...	...	...	4139	...
46	47	...	53	61	...	109	173	...	557	1069	...	...	8237
48	...	...	...	...	79	...	...	...	...	...	...	...	...
50	...	53	...	...	...	113	...	...	...	...	...	...	...
52	53	...	59	67	83	...	179	307	563	...	2099	...	8243
54	...	...	61	...	...	...	181	...	...	...	...	...	...
56	...	59	...	71	...	...	...	311	...	...	...	...	...
58	59	61	...	73	89	...	...	313	569	...	...	4153	...
60	61	...	67	...	...	...	...	...	571	...	...	...	...
62	...	...	...	...	...	...	...	317	...	...	...	4157	...
64	...	67	71	79	...	127	191	...	...	1087	2111	4159	...
66	67	...	73	...	97	...	193	...	577	...	2113	...	...
68	...	71	...	83	...	131	...	...	...	1091	...	...	...
70	71	73	...	...	101	...	197	...	...	1093	...	...	...
72	73	...	79	...	103	...	199	...	...	...	...	...	8263
74	...	...	...	89	...	137	...	...	...	1097	...	...	...
76	...	79	83	...	107	139	...	331	587	...	...	...	...
78	79	...	...	...	109	...	...	...	...	...	...	...	8269

А.В. Коротков

Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов

Общим направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в рациональных числах. Это, прежде всего так называемая задача о конгруэнтных числах: т.е. выяснение того, какие рациональные числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с рациональными длинами сторон.

Ответ таков: n -конгруэнтное число тогда и только тогда, когда число рациональных решений уравнения

$$S = t^2 = m^3 - p^2 m$$

бесконечно. Это уравнение относится к классу эллиптических кривых, заданных одним из уравнений Вейерштрасса [1]

$$t^2 = m^3 + am + b.$$

Такие уравнения сейчас находят применение в криптографии.

Вместе с тем не менее важным направлением задач алгебраической геометрии является выяснение числа решений полиномиального уравнения в целых числах, т.е. выяснение того, какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Для выяснения этого вопроса необходимо было найти способ определения целочисленных сторон прямоугольных треугольников.

Из [2] известно, что

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2,$$

где m, n – взаимно простые числа, а x, y, z – соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

В этом случае на множестве натуральных чисел справедливо тождество:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

т.е.

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

причем

$$z + y = 2m^2, z - y = 2n^2$$

и

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 = 2z^2,$$

что соответствует теореме Пифагора. Эти тождества строго фиксируют возможные значения величин m и n , а вслед за ними также значения x, y, z в целых числах. Вместе с тем, теперь величины m и n могут принимать не только целые, но и рациональные числа. Это, соответственно, дает возможность находить решение полиномиальных уравнений в рациональных числах. Несложно показать, что величины m и n определяются взаимно простыми числами разной четности. Для примера в таблице 1, выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел, соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения m и n , а, следовательно, x, y, z по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между дли-

нами катетов x и y . В таблице 2 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Первая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в таблице 1 в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$$z_{k+1} = 6z_k - z_{k-1},$$

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$$(x+y)_{k+1} = 6(x+y)_k - (x+y)_{k-1}.$$

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполняемы следующие рекуррентные соотношения:

$$x_{k+1} = 5(x_k + x_{k-1}) - x_{k-2}$$

$$y_{k+1} = 5(y_k + y_{k-1}) - y_{k-2}.$$

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x , y , z соответствуют определенные целочисленные значения m и n . Поскольку удастся классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности между длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений m и n . Этот способ классификации приведен в таблице 3, в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из таблицы 2 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин m и n в таблице 3. В ней каждой последовательной паре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из таблицы 2. Так значениям $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу таблицы 3 соответствуют значения $x=2mn=4$, $y=m^2-n^2=3$, $z=m^2+n^2=5$ в верхнем левом углу таблицы 2. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов таблицы 3 величина m следует за величиной n .

Поскольку ряды пифагоровых троек связаны строгими рекуррентными соотношениями, то аналогичными соотношениями должны быть связаны также ряды определяющих их величин m и n . Записывая m как m_{k+1} , а n как m_k , имеем рекуррентное соотношение

$$m_{k+1} = 2m_k + m_{k-1},$$

не менее удивительное, чем предыдущее и определяющее ряды пифагоровых троек с определенной разностью между длинами катетов, причем,

$$(m_{k+1}^2 - m_k^2)^2 + (2m_{k+1}m_k)^2 = (m_{k+1}^2 + m_k^2)^2.$$

Необходимо отметить, что размеры прямоугольных треугольников в каждом из рядов интенсивно нарастают, причем они определяются взаимно простыми числами, среди которых часто встречаются простые, так что

эти ряды определяют генераторы взаимно простых и простых чисел. Это представляет практический интерес для задач криптографии.

Отметим так же, что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше рекуррентных соотношений в общем случае в таблице 4 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из таблицы 1. В таблице 4 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из таблицы 4.

Аналогично, таблица 6 для чисел m и n соответствует пифагоровым тройкам из таблицы 4. Отметим, что разность, а также сумма длин катетов, принимает дискретные строго определенные, зачастую простые значения из одного и того же ряда чисел 1, 7, 17, 23, 31, 47, 49, 79, Величина разности между катетами x и y , очевидно, повторяется для разных рядов значений пифагоровых троек, например, число 7 для разности между катетами повторяется для двух рядов, причем, обязательно встречается одна из троек, в которой сумма катетов равна тому же числу. Эта закономерность позволяет попарно объединить ряды пифагоровых троек с одним и тем же значением разности между катетами. Это осуществлено в таблицах 6 и 7 для значений разности между катетами 1, 7, 23, 47, 79 в таблице 6 и значений разности между катетами 1, 7, 17, 31, 49 в таблице 7. Для упрощения записи таблиц вместо пифагоровых троек чисел приведены лишь значения гипотенуз z . Здесь жирным шрифтом выделены строчки имеющие лишь вспомогательное значение. С их помощью значения рядов пифагоровых троек продолжены в обратных направлениях, причем использованы одни и те же рекуррентные соотношения. Числа, соответствующие гипотенузам из пифагоровых троек в каждом ряду в результате располагаются на линейке бесконечной в обе стороны.

Выясним теперь какие целые числа могут быть площадями прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Площадь прямоугольного треугольника

$$S=xy/2=mn(m^2-n^2)=nm^3-n^3m,$$

так что это уравнение относится к классу эллиптических уравнений и является одним из уравнений Вейерштрасса. Очевидно, число целых решений этого уравнения бесконечно. Значения площадей прямоугольных треугольников однозначно определены величинами m и n и определяются рядами значений заданных разностью между длинами катетов. Для примера в таблице 8 приведены результаты значения площадей прямоугольных треугольников для верхней части треугольников из таблицы 2. Расчет площадей прямоугольных треугольников в каждом ряду соответствующей разностью между длинами катетов может осуществ-

ляться не только по приведенной выше формуле, но также в связи с рекуррентным соотношением:

$$S_{n+1}=35(S_n-S_{n-1})+S_{n-2},$$

соответствующим каждому из рядов пифагоровых троек.

Таким образом, пожалуй, получен ответ на поставленный вопрос о числе решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах.

Отметим также интересную особенность классификации пифагоровых троек. Во-первых, пифагоровы тройки создают ряды бесконечной протяженности в обоих направлениях, если они соответствуют определенной разности длин катетов. Во-вторых, каждой гипотенузе соответствует два ряда пифагоровых троек. Так, например, число 13 встречается в последовательностях ..., 425, 73, 13, 5, 17, 97, ... и ..., 305, 53, 13, 25, 137, 797, ..., так что имеет место пересечение двух рассмотренных последовательностей в значении 13. Это относится ко всем остальным числам. В результате можно говорить не о рядах бесконечной протяженности в обоих направлениях, а о плоскостях формируемых перпендикулярно расположенными числовыми последовательностями с пересечением в данном числе. Таким образом, формируются уже не линейки чисел, а плоскости числовых последовательностей классифицируемых по определенному признаку. Фрагменты таких плоскостей чисел представлены в таблицах 9.1 – 9.12. Необходимо помнить, что эти фрагменты представляют часть плоскости, которая может быть продлена до бесконечности во всех четырех направлениях. В горизонтальных направлениях действует рекуррентное соотношение

$$z_{k+1}=6z_k-z_{k-1},$$

а в вертикальных направлениях это соотношение корректируется на величину числа указанного в верхней строчке над данным рядом чисел. Само число, на которое корректируется рекуррентное соотношение, получается из аналогичного числа, указанного в таблице 9.1 путем умножения на величину разностей длин катетов.

Полученные плоскости числовых последовательностей могут быть построены определенным образом. Так из приведенных таблиц 9.1 – 9.12 с указанными разностями катетов 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47. 49, 71, 73, 79, 89, 97 плоскости с разностями ..., 1, 7, 41, ... представляют определенную совокупность числовых рядов с одним и тем же рекуррентным соотношением, относящимся уже к сумме длин катетов:

$$41=6*7-1.$$

Следующим числом в этой числовой последовательности будет число 239:

$$239=6*41-7$$

и так далее до бесконечности в обоих направлениях, так что ..., - 41, - 7, - 1, 1, 7, 41, 239,... Это позволяет упростить процесс нахождения величин x и y . Подобные совокупности числовых рядов дают плоскости с разностями ..., - 601, - 103, - 17, 1, 23, 137, 799,... и ..., - 1127, - 193, - 31, 7, 73, 431,

2513,... (вообще бесконечное число последовательностей). Эти числа дают величину разности чисел x и y во всех столбцах (кроме центральных, где они характеризуют величину сумм чисел x и y) (таблицы 10,1-10,3).

Отметим также некоторые особенности рядов пифагоровых троек. Во-первых числа z образуют простые числа класса 1 вычетов по mod. 4 и их произведения. Числа y образуют нечетные числа. Числа x образуют числа класса 0 вычетов по mod. 4. Числа S кратны шести.

Отношения z к x или y (а также $x+y$ к z) в каждом из рядов пифагоровых троек стремятся к корню из двух. Отношения z_{k+1} к z_k в каждом из рядов пифагоровых троек стремятся к удвоенному корню из двух плюс три, примерно равное 5,828.... Отношения S_{k+1} к S_k в каждом из рядов пифагоровых троек стремятся к квадрату удвоенного корня из двух плюс три, примерно равному 33,97.... Это позволяет утверждать о фундаментальном значении числа удвоенного корня из двух плюс три и кроме того позволяет вычислить корень из двух с произвольной точностью.

Не менее важный вопрос заключается в соответствии теоремы Пифагора геометрии Евклида. Последняя является фундаментом для построения практически всех разделов теоретической физики, так что представляется необходимым найти соответствие пифагоровых чисел закономерностям физики и других естественных наук. Такое соответствие найдено по отношению к теории атома водорода по Бору. Действительно, из [3] следует, что волновое число спектральной линии, излучаемой атомом водорода при переходе из m -го состояния в n -ое состояние, определяется соотношением

$$\nu = R((1/n^2) - (1/m^2)),$$

$$\nu = R(m^2 - n^2)/(mn)^2,$$

т.е.

где R - постоянная Ридберга.

Таким образом, очевидно,

$$\nu = Ry/(x/2)^2$$

и, следовательно, волновое число спектральной линии, излучаемой атомом водорода, определяется длиной катетов прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами, т.е. имеет геометрическую природу евклидова характера.

В соответствии с этим можно осуществлять классификацию спектральных линий атома водорода, исходя из значений пифагоровых троек чисел. Так первый столбец в таблице 1 соответствует серии Лаймана, второй столбец – серии Бальмера, третий – серии Пашена, Эти серии определяют группу линий, получающихся при переходе с различных верхних уровней m на один и тот же низкий уровень n .

Вместе с тем подобная классификация спектральных линий является не единственно возможной. Так, например, можно определять группу линий, получающихся при переходе с одного и того же верхнего уровня m на различные более низкие уровни n . Так, второй строке таблицы 1 будет соответствовать лишь одна спектральная линия

$$\nu = 3R/(4/2)^2 = 0,75R,$$

третьей строке – две линии ($8/9R$ и $5/36R$) и т.д.

Более того, арифметический способ классификации позволяет выявить тонкости спектров, которые затруднительно получить из экспериментальных данных. Так, например, спектральные линии можно объединять в группы, исходя из постоянного значения модуля разности катетов целочисленных прямоугольных треугольников (таблицы 2, 4, 6, 7, 9.1-9.12, 10.1-10.3). В этом случае каждой серии спектральных линий отвечает, например, рекуррентное соотношение

$$(x+y)_{k+1} = 6(x+y)_k - (x+y)_{k-1},$$

которое отвечает бесконечно длинной последовательности групп спектральных линий.

Таким образом, очевидно, что теории атома водорода по Бору соответствует геометрическая интерпретация евклидового характера, определяемая соотношениями Пифагора и пифагоровыми тройками чисел, что позволяет анализировать группы спектральных линий геометрическими средствами.

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	4 3 5	8 0 8														
3	6 8 10	12 5 13	18 0 18													
4	8 15 17	16 12 20	24 7 25	32 0 32												
5	10 24 26	20 21 29	30 16 34	40 9 41	50 0 50											
6	12 35 37	24 32 40	36 27 45	48 20 52	60 11 61	72 0 72										
7	14 48 50	28 45 53	42 40 58	56 33 65	70 24 74	84 13 85	98 0 98									
8	16 63 65	32 60 68	48 55 73	64 48 80	80 39 89	96 28 100	112 15 113	128 0 128								
9	18 80 82	36 77 85	54 72 90	72 65 97	90 56 106	108 45 117	126 32 130	144 17 145	162 0 162							
10	20 99 101	40 96 104	60 91 109	80 84 116	100 75 125	120 64 136	140 51 149	160 36 164	180 19 181	200 0 200						
11	22 120 122	44 117 125	66 112 130	88 105 137	110 96 146	132 85 157	154 72 170	176 57 185	198 40 202	220 21 221	242 0 242					
12	24 143 145	48 140 148	72 135 153	96 128 160	120 119 169	144 108 180	168 95 193	192 80 208	216 63 225	240 44 244	264 23 265	288 0 288				
13	26 168 170	52 165 173	78 160 178	104 153 185	130 144 194	156 133 205	182 120 218	208 105 233	234 88 250	260 69 269	286 48 290	312 25 313	338 0 338			
14	28 195 197	56 192 200	84 187 205	112 180 212	140 171 221	168 160 232	196 147 245	224 132 260	252 115 277	280 96 296	308 75 317	336 52 340	364 27 365	392 0 392		
15	30 224 226	60 221 229	90 216 234	120 209 241	150 200 250	180 189 261	210 176 274	240 161 289	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	420 29 421	450 0 450	
16	32 255 257	64 252 260	96 247 265	128 240 272	160 231 281	192 220 292	224 207 305	256 192 320	288 175 337	320 156 356	352 135 377	384 112 400	416 87 425	448 60 452	480 31 481	512 0 512

Таблица 2.

4	8	12	16	20
3	15	35	63	99
5	17	37	65	101
20	72	156	272	420
21	65	133	225	341
29	97	205	353	541
120	396	832	1428	2184
119	403	855	1475	2263
169	565	1193	2053	3145
696	2332	4928	8484	13000
697	2325	4905	8437	12921
985	3293	6953	11965	18329
4060	13568	28644	49288	75500
4059	13575	28667	49335	75579
5741	19193	40525	69737	106829
23660	79104	167028	287432	440316
23661	79097	167005	287385	440237
33461	111865	236197	406457	622645
137904	461028	973432	1675116	2566080
137903	461035	973455	1675163	2566159
195025	651997	1376657	2369005	3629041
803760	2687092	5673656	9763452	14956480
803761	2687085	5673633	9763405	14956401
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
4684660	15661496	33068412	56905408	87172484
4684659	15661503	33068435	56905455	87172563
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
27304196	91281912	192736908	331669184	508078740
27304197	91281905	192736885	331669137	508078661
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
159140520	532029948	1123352944	1933109508	2961299640
159140519	532029955	1123352967	1933109555	2961299719
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
927538920	3100897804	6547380848	11266988052	17259719416
927538921	3100897797	6547380825	11266988005	17259719337
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
5406093004	18073356848	38160932052	65668818616	100597016540
5406093003	18073356855	38160932075	65668818663	100597016619
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
31509019100	105339243312	222418211556	382745923832	586322380140
31509019101	105339243305	222418211533	382745923785	586322380061
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
183648021600	613962102996	1296348337192	2230806724188	3417337263984
183648021599	613962103003	1296348337215	2230806724235	3417337264063
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1070379110496	3578433374692	7555671811688	13002094421484	19917701204080
1070379110497	3578433374685	7555671811665	13002094421437	19917701204001
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
6238626641380	20856638145128	44037682532844	75781759804528	116088869960180
6238626641379	20856638145135	44037682532867	75781759804575	116088869960259
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
36361380737780	121561395496104	256670423385468	441688464405872	676615518557316
36361380737781	121561395496097	256670423385445	441688464405825	676615518557237
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 3

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

Таблица 4

4	12	24	40	60
3	5	7	9	11
5	13	25	41	61
20	48	88	140	204
21	55	105	171	253
29	73	137	221	325
120	304	572	924	1360
119	297	555	893	1311
169	425	797	1285	1889
696	1748	3276	5280	7760
697	1755	3293	5311	7809
985	2477	4645	7489	11009
4060	10212	19152	30880	45396
4059	10205	19135	30849	45347
5741	14437	27073	43649	64165
23660	59496	111568	179876	264420
23661	59503	111585	179907	264469
33461	84145	157793	254405	373981
137904	346792	650324	1048500	1541320
137903	346785	650307	1048469	1541271
195025	490433	919685	1482781	2179721
803760	2021228	3790308	6111000	8983304
803761	2021235	3790325	6111031	8983353
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
4684660	11780604	22091592	35617624	52358700
4684659	11780597	22091575	35617593	52358651
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
27304196	68662368	128759176	207594620	305168700
27304197	68662375	128759193	207594651	305168749
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
159140520	400193632	750463532	1209950220	1778653696
159140519	400193625	750463515	1209950189	1778653647
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
927538920	2332499396	4374021948	7052106576	10366753280
927538921	2332499403	4374021965	7052106607	10366753329
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
5406093004	13594802772	25493668224	41102689360	60421866180
5406093003	13594802765	25493668207	41102689329	60421866131
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
31509019100	79236317208	148587987328	239564029460	352164443604
31509019101	79236317215	148587987345	239564029491	352164443653
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640
183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 5

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
5	8	11	14	17
12	19	26	33	40
29	46	63	80	97
70	111	152	193	234
169	268	367	466	565
408	647	886	1125	1364
985	1562	2139	2716	3293
2378	3771	5164	6557	7950
5741	9104	12467	15830	19193
13860	21979	30098	38217	46336
33461	53062	72663	92264	111865
80782	128103	175424	222745	270066
195025	309268	423511	537754	651997
470832	746639	1022446	1298253	1574060
1136689	1802546	2468403	3134260	3800117
2744210	4351731	5959252	7566773	9174294
6625109	10506008	14386907	18267806	22148705
15994428	25363747	34733066	44102385	53471704
38613965	61233502	83853039	106472576	129092113
93222358	147830751	202439144	257047537	311655930
225058681	356895004	488731327	620567650	752403973
543339720	861620759	1179901798	1498182837	1816463876
1311738121	2080136522	2848534923	3616933324	4385331725
3166815962	5021893803	6876971644	8732049485	10587127326
7645370045	12123924128	16602478211	21081032294	25559586377
18457556052	29269742059	40081928066	50894114073	61706300080
44560482149	70663408246	96766334343	122869260440	148972186537
107578520350	170596558551	233614596752	296632634953	359650673154
259717522849	411856525348	563995527847	716134530346	868273532845
627013566048	994309609247	1361605652446	1728901695645	2096197738844
1513744654945	2400475743842	3287206832739	4173937921636	5060669010533
3654502875938	5795261096931	7936019317924	10076777538917	12217535759910
8822750406821	13990997937704	19159245468587	24327492999470	29495740530353
21300003689580	33777256972339	46254510255098	58731763537857	71209016820616

Таблица 6

1513744654945	22186734778477	113441728156577	275278724789245	507697724676481
259717522849	3806641878437	19463523473585	47230362308293	87107158382561
44560482149	653116492145	3339412684933	8103449060513	14945225618885
7645370045	112057074433	572952636013	1390332054785	2564195330749
1311738121	19225954453	98303131145	238543268197	439946365609
225058681	3298652285	16866150857	40927554397	75482862905
38613965	565959257	2893773997	7022058185	12950811821
6625109	97103257	496493125	1204794713	2222008021
1136689	16660285	85184753	206710093	381236305
195025	2858453	14615393	35465845	65409809
33461	490433	2507605	6084977	11222549
5741	84145	430237	1044017	1925485
985	14437	73817	179125	330361
169	2477	12665	30733	56681
29	425	2173	5273	9725
5	73	373	905	1669
1	13	65	157	289
1	5	17	37	65
5	17	37	65	101
29	97	205	353	541
169	565	1193	2053	3145
985	3293	6953	11965	18329
5741	19193	40525	69737	106829
33461	111865	236197	406457	622645
195025	651997	1376657	2369005	3629041
1136689	3800117	8023745	13807573	21151601
6625109	22148705	46765813	80476433	123280565
38613965	129092113	272571133	469051025	718531789
225058681	752403973	1588660985	2733829717	4187910169
1311738121	4385331725	9259394777	15933927277	24408929225
7645370045	25559586377	53967707677	92869733945	142265665181
44560482149	148972186537	314546851285	541284476393	829185061861
259717522849	868273532845	1833313400033	3154837124413	4832844705985
1513744654945	5060669010533	10685333548913	18387738270085	28167883174049
8822750406821	29495740530353	62278687893445	107171592496097	164174454338309
51422757785981	171913774171585	362986793811757	624641816706497	956878842855805

Таблица 7

1513744654945	29495740530353	92768738033045	191332737163021	325187737920281
259717522849	5060669010533	15916599117997	32827507845241	55793395192265
44560482149	868273532845	2730856674937	5632309908425	9572633233309
7645370045	148972186537	468540931625	966351605309	1642404207589
1311738121	25559586377	80388914813	165799723429	281792012225
225058681	4385331725	13792557253	28446735265	48347865761
38613965	752403973	2366428705	4880688161	8295182341
6625109	129092113	406014977	837393701	1423228285
1136689	22148705	69661157	143674045	244187369
195025	3800117	11951965	24650569	41895929
33461	651997	2050633	4229369	7188205
5741	111865	351833	725645	1233301
985	19193	60365	124501	211601
169	3293	10357	21361	36305
29	565	1777	3665	6229
5	97	305	629	1069
1	17	53	109	185
1	5	13	25	41
5	13	25	41	61
29	73	137	221	325
169	425	797	1285	1889
985	2477	4645	7489	11009
5741	14437	27073	43649	64165
33461	84145	157793	254405	373981
195025	490433	919685	1482781	2179721
1136689	2858453	5360317	8642281	12704345
6625109	16660285	31242217	50370905	74046349
38613965	97103257	182092985	293583149	431573749
225058681	565959257	1061315693	1711127989	2515396145
1311738121	3298652285	6185801173	9973184785	14660803121
7645370045	19225954453	36053491345	58127980721	85449422581
44560482149	112057074433	210135146897	338794699541	498035732365
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Таблица 8

6	60	210	504	990
210	2340	10374	30600	71610
7140	79794	355680	1053150	2471196
242556	2710950	12085920	35789754	83986500
8239770	92092800	410568774	1215811740	2853107250
279909630	3128444544	13947255570	41301822660	96921697446
9508687656	106275021990	473796123780	1403046171954	3292484643360
323015470680	3610222303410	16095120956124	47662268037030	111847556214240

Таблица 9.1

$ x-y =1$				
48	8	0	-8	-48
481	85	29	89	505
73	13	5	17	97
5	1	1	5	29
5	1	1	5	29
73	13	5	17	97
481	85	29	89	505

Таблица 9.3

$ x-y =17$				
816	136	0	-136	-816
4981	881	305	949	5389
697	125	53	193	1105
17	5	13	73	425
221	41	25	109	629
2125	377	137	445	2533
13345	2357	797	2425	13753

Таблица 9.5

$ x-y =31$				
1488	248	0	-248	-1488
10321	1825	629	1949	11065
1481	265	109	389	2225
53	13	25	137	797
325	61	41	185	1069
3385	601	221	725	4129
21473	3793	1285	3917	22217

Таблица 9.7

$ x-y =47$				
2256	376	0	-376	-2256
14821	2621	905	2809	15949
2105	377	157	565	3233
65	17	37	205	1193
541	101	65	289	1669
5437	965	353	1153	6565
34337	6065	2053	6253	35465

Таблица 9.9

$ x-y =71$				
3408	568	0	-568	-3408
26773	4733	1625	5017	28477
3925	701	281	985	5629
185	41	61	325	1889
593	113	85	397	2297
6781	1205	449	1489	8485
43501	7685	2609	7969	45205

Таблица 9.11

$ x-y =79$				
3792	632	0	-632	-3792
27425	4849	1669	5165	29321
3965	709	289	1025	5861
157	37	65	353	2053
769	145	101	461	2665
8249	1465	541	1781	10145
52517	9277	3145	9593	54413

Таблица 9.2

$ x-y =7$				
336	56	0	-56	-336
1565	277	97	305	1733
205	37	17	65	373
1	1	5	29	169
137	25	13	53	305
877	205	73	233	1325
5181	1261	425	1289	7309

Таблица 9.4

$ x-y =23$				
1104	184	0	-184	-1104
6065	1073	373	1165	6617
829	149	65	241	1381
13	5	17	97	565
353	65	37	157	905
3209	569	205	661	3761
20005	3533	1193	3625	20557

Таблица 9.6

$ x-y =41$				
1968	328	0	-328	-1968
8093	1433	505	1597	9077
1021	185	89	349	2005
1	5	29	169	985
953	173	85	337	1937
7685	1361	481	1525	8669
47125	8321	2801	8485	48109

Таблица 9.8

$ x-y =49$				
2352	392	0	-392	-2352
17585	3109	1069	3305	18761
2557	457	185	653	3733
109	25	41	221	1285
449	85	61	281	1625
4937	877	325	1073	6113
31525	5569	1889	5765	32701

Таблица 9.10

$ x-y =73$				
3504	584	0	-584	-3504
17909	3169	1105	3461	19661
2405	433	193	725	4157
25	13	53	305	1777
1249	229	125	521	3001
10973	1945	697	2237	12725
68093	12025	4053	12317	69845

Таблица 9.12

$ x-y =89$				
4272	712	0	-712	-4272
22409	3965	1381	4321	24545
3029	545	241	901	5165
37	17	65	373	2173
1465	269	149	625	3601
13025	2309	829	2665	15161
80957	14297	4825	14653	83093

Таблица 10.1

Z							
∇	-70	- 12	- 2	0	2	12	70
	16661	2861	505	169	509	2885	16801
	2801	481	85	29	89	505	2941
	425	73	13	5	17	97	565
	29	5	1	1	5	29	169
	29	5	1	1	5	29	169
	425	73	13	5	17	97	565
	2801	481	85	29	89	505	2941
Y							
239	11661	2139	217	119	459	1917	11999
41	2001	319	77	21	39	377	2059
7	297	55	5	3	15	65	403
1	21	3	1	1	3	21	119
-1	21	3	1	1	3	21	119
-7	297	55	5	3	15	65	403
- 41	2001	319	77	21	39	377	2059
X							
	11900	1900	456	120	220	2156	11760
	1960	360	36	20	80	336	2100
	304	48	12	4	8	72	396
	20	4	0	0	4	20	120
	20	4	0	0	4	20	120
	304	48	12	4	8	72	396
	1960	360	36	20	80	336	2100
±(X+Y)							
	-23561	-4039	-673	1	679	4073	23759
	-3961	-679	-113	1	119	713	4159
	-601	-103	-17	1	23	137	799
	-41	-7	-1	1	7	41	239
	-41	-7	-1	1	7	41	239
	-601	-103	-17	1	23	137	799
	-3961	-679	-113	1	119	713	4159
±(X-Y)							
	239	239	239	239	239	239	239
	41	41	41	41	41	41	41
	7	7	7	7	7	7	7
	1	1	1	1	1	1	1
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41
S							
				7140			
	1960980	57420	1386	210	1560	63336	2161950
	45144	1320	30	6	60	2340	79794
	210	6	0	0	6	210	7140
	210	6	0	0		210	7140
	45144	1320	30	6	60	2340	79794
	1960980	57420	1386	210	1560	63336	2161950

Таблица 10.2

Z							
∇	- 490	- 84	- 14	0	14	84	490
	55445	9521	1681	565	1709	9689	56425
	9113	1565	277	97	305	1733	10093
	1193	205	37	17	65	373	2173
	5	1	1	5	29	169	985
	797	137	25	13	53	305	1777
	6737	1157	205	73	233	1325	7717
	41585	7141	1261	425	1289	7309	42565
Y							
799				403			
137	6375	1173	115	65	273	1155	7205
23	855	133	35	15	33	275	1525
1	3	1	1	3	21	119	697
-17	555	105	7	5	45	207	1265
-103	4815	765	187	55	105	987	5405
-601				297			
X							
				396			
	6512	1036	252	72	136	1294	7068
	832	156	12	8	56	252	1548
	4	0	0	4	20	120	696
	572	88	24	12	28	224	1248
	4712	868	84	48	208	884	5508
				304			
±(X+Y)							
	-78407	-13441	-2239	7	2281	13679	79793
	-12887	-2209	-367	7	409	2447	14273
	-1687	-289	-47	7	89	527	3073
	-41	-7	-1	7	41	239	1393
	-1127	-193	-31	7	73	431	2513
	-9527	-1633	-271	7	313	1871	10913
	-58807	-10081	-1679	7	1721	10319	60193
±(X-Y)							
	799	799	799	799	799	799	799
	137	137	137	137	137	137	137
	23	23	23	23	23	23	23
	1	1	1	1	1	1	1
	-17	-17	-17	-17	-17	-17	-17
	-103	-103	-103	-103	-103	-103	-103
	-601	-601	-601	-601	-601	-601	-601
S							
				79794			
	20757000	607614	14490	2340	18564	747285	25462470
	355680	10374	210	60	924	34650	1180350
	6	0	0	6	210	7140	242556
	158730	4620	84	30	630	23184	789360
	11344140	332010	7854	1320	10920	436254	14885370
				45144			

Таблица 10.3

Z							
▽	- 1190	- 204	- 34	0	34	204	1190
	174733	30005	5297	1777	5365	30413	177113
	29005	4981	881	305	949	5389	31385
	4057	697	125	53	193	1105	6437
	97	17	5	13	73	425	2477
	1285	221	41	25	109	629	3665
	12373	2125	377	137	445	2533	14753
	77713	13345	2357	797	2425	13753	80093
Y							
2513				1265			
431	20293	3731	369	207	851	3589	22407
73	2905	455	117	45	95	817	4515
7	65	15	3	5	55	297	1755
-31	897	171	9	7	91	429	2607
-193	8845	1403	345	105	203	1885	10335
-1127				555			
X							
				1248			
	20724	3300	800	224	420	4020	21976
	2832	528	44	28	168	744	4578
	72	8	4	12	48	304	1748
	924	140	40	24	60	460	2576
	8652	1596	152	88	396	1692	10528
				572			
±(X+Y)							
	-247097	-42359	-7057	17	7159	42937	250463
	-41017	-7031	-1169	17	1271	7609	44383
	-5737	-983	-161	17	263	1561	9103
	-137	-23	-1	17	103	601	3503
	-1817	-311	-49	17	151	889	5183
	-17497	-2999	-497	17	599	3577	20863
	-109897	-18839	-3137	17	3239	19417	113263
±(X-Y)							
	2513	2513	2513	2513	2513	2513	2513
	431	431	431	431	431	431	431
	73	73	73	73	73	73	73
	7	7	7	7	7	7	7
	-31	-31	-31	-31	-31	-31	-31
	-193	-193	-193	-193	-193	-193	-193
	-1127	-1127	-1127	-1127	-1127	-1127	-1127
S							
				789360			
		6156150	158400	23184	178710	7213890	
	4113480	120120	2574	630	7980	303924	10334835
	2340	60	6	30	1320	45144	1533870
	414414	11970	180	84	2730	98670	3357816
	38263470	1119594	26220	4620	40194	1594710	54403440
				158730			

Литература

1. Николенко С. Проблемы 2000 года: Гипотеза Берча-Свиннертон-Дайера// Компьютерра. № 47-48 [619-620]. 20 декабря 2005. (с. 72-74).
2. Начала Евклида, книги I-VI. М.-Л. Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950г.
3. Карякин Н.И. и др. Краткий справочник по физике: М., Высшая школа.- 559с.

А.В. Коротков

Степенные числа в музыкальной гамме

Степенными числами будем называть числа, составляющие множества целых степеней действительных чисел $\dots, a^{-n}, \dots, a^{-1}, a^0, a^1, \dots, a^n, \dots$. Такие числа широко используются на практике в формировании степенных, а также параметрических рядов. Например, в таблице 1. приведен параметрический ряд, используемый в технике для формирования значений параметров различных устройств (диаметров резьб, объемов гидромашин, мощностей трансформаторов и прочих устройств). Этот ряд характеризуется основанием, равным 10 и числом тактов, равным 10 или 20.

Основание и число тактов, вообще говоря, произвольны. Характерно, что степенные ряды формируются путем умножения предыдущего значения на первое значение, т.е.

$$a^{n+1} = a^n \cdot a^1$$

подобно определению натурального ряда чисел. Вместе с тем, как и натуральный ряд чисел, степенной ряд можно определить следующим образом

$$a^{n+1} = a^{2n} \cdot a^{n-1}.$$

Эта формула определяет рекуррентное соотношение для трех последовательных чисел степенного ряда.

Степенные числа составляют мультипликативную группу по умножению. Действие умножения в ней ассоциативно и коммутативно, существует единичный элемент $a^0=1$ и для каждого элемента a^n существует обратный элемент a^{-n} .

Свойства степенных чисел могут быть выведены из пяти аксиом, аналогичных аксиомам Пеано [1]:

1. есть натуральное число a^0 , равное 1;
2. для каждого степенного числа a^n существует единственное следующее за ним число a^{n+1} ;
3. $a^{n+1} \neq 1$;
4. из $a^n = a^m$ следует $n=m$;
5. имеет место принцип полной индукции.

Рассмотрим степенной ряд, соответствующий музыкальной гамме (таблица 2). Здесь первый столбец характеризует числа, соответствующие нотам: до, ре, ми, фа, соль, ля, си, до, используемых в музыкальной гамме. Эти числа формируют три вида интервалов в октаве 9/8, 10/9, 16/15. Наименьший интервал 16/15 встречается между нотами ми и фа, а также си и до. В этих местах происходит замедление октавы. По отношению к музыкальной гамме в семь тонов считается, что между нотами до и ре, ре и ми, фа и соль, соль и ля, ля и си использованы пять промежуточных полутонов. Таким образом, музыкальная гамма семи тонов и пяти полутонов использует двенадцатитактную схему построения степенного ряда. В тоже время основание степенного ряда равно двум и частоты удваиваются через каждые двенадцать тактов, так что

$$a^1 = 2^{1/12}.$$

Надо отметить, что как видно из таблицы 2 двенадцатитактная гамма значительно точнее воспроизводит семитактную гамму, представленную в третьем столбике таблицы. Вместе с тем этот столбик не в полной мере отвечает степенным рядам, в связи с тем, что в качестве основных тонов использованы рациональные числа, формируемые отношением малых натуральных чисел. В связи с этим имеют место три вида интервалов, т.е. изменение скорости возрастания частоты. Это связано с использованием простых способов настройки музыкальных инструментов.

Вместе с тем простота способа настройки музыкальных инструментов теперь не является ограничивающим фактором в связи с развитием электронных устройств записи, хранения, обработки и воспроизведения частот музыкальной гаммы. В связи с этим на первое место ставится принцип улучшения качества звучания музыкальных инструментов. Этого можно попытаться добиться выравниванием интервалов музыкальной гаммы из двенадцати тактов (равномерно-темперированный строй [2]).

Необходимо отметить [3], что число сомножителей натуральных чисел также изменяется с периодом, кратным двенадцати, так что число 12 является более естественным основанием, нежели 10. Таким образом, оправдано применение двенадцатитактной музыкальной гаммы. Кроме того, одноинтервальная двенадцатитактная схема сразу определяет значения частот не только тонов, но и полутонов.

В таблице 3 представлены частоты звуков равномерно-темперированного строя со стандартной частотой 440 гц, соответствующей ноте ля первой октавы. Вместе с тем значение этой частоты принято не повсеместно. Так [2] нередко задействуется значение частоты 435 гц, а в начале 19 века она равнялась 422 гц, так что выбор стандартной частоты можно считать неокончательным. На выбор этой частоты может наложить отпечаток распределение числа сомножителей натуральных чисел, которое резко дискретно [3]. Эта ситуация относится к самым различным физическим процессам, причем имеет место резкая дискретность с экстремумами, соответствующими числам кратным 12. Так число 12 имеет 6 сомножите-

лей, число 24-8, число 36-9, число 48-10, а числа 60, 72, 84, 96 108-уже по 12 сомножителей. Число сомножителей чисел кратных 120 резко возрастает. Это говорит о целесообразности использования чисел кратных 12 с целью увеличения числа гармоник в музыкальной гамме.

Литература

Таблица 1.

Таблица 2.

Таблица 3.

	такт	частота, Гц		такт	частота, Гц
a^0	1,00000000000000...	16,3515978312881...	a^{60}	32,00000000000000...	523,2511306012190...
a^1	1,05946309435929...	17,3239144360551...	a^{61}	33,90281901949730...	554,3652619537650...
a^2	1,12246204830936...	18,3540479948385...	a^{62}	35,91878554589960...	587,3295358348340...
a^3	1,18920711500270...	19,4454364826305...	a^{63}	38,05462768008650...	622,2539674441790...
a^4	1,25992104989485...	20,6017223070549...	a^{64}	40,31747359663510...	659,2551138257540...
a^5	1,33483985417000...	21,8267644645631...	a^{65}	42,71487533344000...	698,4564628660200...
a^6	1,41421356237305...	23,1246514194774...	a^{66}	45,25483399593770...	739,9888454232780...
a^7	1,49830707687663...	24,4997147488595...	a^{67}	47,94582646005210...	783,9908719635040...
a^8	1,58740105196814...	25,9565435987467...	a^{68}	50,79683366298040...	830,6093951598920...
a^9	1,68179283050735...	27,50000000000000...	a^{69}	53,81737057623530...	880,0000000000000...
a^{10}	1,78179743628059...	29,1352350948803...	a^{70}	57,01751796097890...	932,3275230361720...
a^{11}	1,88774862536328...	30,8677063285073...	a^{71}	60,40795601162510...	987,7666025122350...
a^{12}	2,00000000000000...	32,7031956625762...	a^{72}	64,00000000000000...	1046,5022612024400...
a^{13}	2,11892618871858...	34,6478288721103...	a^{73}	67,80563803899460...	1108,7305239075300...
a^{14}	2,24492409661872...	36,7080959896771...	a^{74}	71,83757109179910...	1174,6590716696700...
a^{15}	2,37841423000541...	38,8908729652612...	a^{75}	76,10925536017300...	1244,5079348883600...
a^{16}	2,51984209978970...	41,2034446141096...	a^{76}	80,63494719327030...	1318,5102276515100...
a^{17}	2,66967970834000...	43,6535289291262...	a^{77}	85,42975066688010...	1396,9129257320400...
a^{18}	2,82842712474611...	46,2493028389549...	a^{78}	90,50966799187540...	1479,9776908465600...
a^{19}	2,99661415375326...	48,9994294977190...	a^{79}	95,89165292010430...	1567,9817439270100...
a^{20}	3,17480210393627...	51,9130871974932...	a^{80}	101,59366732596100...	1661,2187903197800...
a^{21}	3,36358566101471...	55,00000000000000...	a^{81}	107,63474115247100...	1760,0000000000000...
a^{22}	3,56359487256118...	58,2704701897608...	a^{82}	114,03503592195800...	1864,6550460723400...
a^{23}	3,77549725072657...	61,7354126570147...	a^{83}	120,81591202325000...	1975,5332050244700...
a^{24}	4,00000000000000...	65,4063913251524...	a^{84}	128,00000000000000...	2093,0045224048800...
a^{25}	4,23785237743716...	69,2956577442206...	a^{85}	135,61127607798900...	2217,4610478150600...
a^{26}	4,48984819323745...	73,4161919793542...	a^{86}	143,67514218359800...	2349,3181433393400...
a^{27}	4,75682846001081...	77,7817459305223...	a^{87}	152,21851072034600...	2489,0158697767100...
a^{28}	5,03968419957939...	82,4068892282193...	a^{88}	161,26989438654100...	2637,0204553030200...
a^{29}	5,33935941668000...	87,3070578582524...	a^{89}	170,85950133376000...	2793,8258514640800...
a^{30}	5,65685424949221...	92,4986056779097...	a^{90}	181,01933598375100...	2959,9553816931100...
a^{31}	5,99322830750652...	97,9988589954380...	a^{91}	191,78330584020900...	3135,9634878540200...
a^{32}	6,34960420787254...	103,8261743949860...	a^{92}	203,18733465192100...	3322,4375806395700...
a^{33}	6,72717132202941...	110,00000000000000...	a^{93}	215,26948230494100...	3520,0000000000000...
a^{34}	7,12718974512236...	116,5409403795220...	a^{94}	228,07007184391500...	3729,3100921446900...
a^{35}	7,55099450145313...	123,4708253140290...	a^{95}	241,63182404650000...	3951,0664100489400...
a^{36}	8,00000000000000...	130,8127826503050...	a^{96}	256,00000000000000...	4186,0090448097500...
a^{37}	8,47570475487432...	138,5913154884410...	a^{97}	271,22255215597800...	4434,9220956301200...
a^{38}	8,97969638647489...	146,8323839587080...	a^{98}	287,35028436719700...	4698,6362866786700...
a^{39}	9,51365692002163...	155,5634918610450...	a^{99}	304,43702144069200...	4978,0317395534300...
a^{40}	10,07936839915880...	164,8137784564390...	a^{100}	322,53978877308100...	5274,0409106060400...
a^{41}	10,67871883336000...	174,6141157165050...	a^{101}	341,71900266752000...	5587,6517029281600...
a^{42}	11,31370849898440...	184,9972113558190...	a^{102}	362,03867196750200...	5919,9107633862200...
a^{43}	11,98645661501300...	195,9977179908760...	a^{103}	383,56661168041700...	6271,9269757080300...
a^{44}	12,69920841574510...	207,6523487899730...	a^{104}	406,37466930384300...	6644,8751612791300...
a^{45}	13,45434264405880...	220,00000000000000...	a^{105}	430,53896460988200...	7040,0000000000000...
a^{46}	14,25437949024470...	233,0818807590430...	a^{106}	456,14014368783100...	7458,6201842893800...

	ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ		ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ
a^{47}	15,10198900290630...	246,9416506280590...	a^{107}	483,26364809300100...	7902,1328200978800...
a^{48}	16,00000000000000...	261,6255653006100...	a^{108}	512,00000000000000...	8372,0180896195100...
a^{49}	16,95140950974860...	277,1826309768820...	a^{109}	542,44510431195600...	8869,8441912602300...
a^{50}	17,95939277294980...	293,6647679174170...	a^{110}	574,70056873439300...	9397,2725733573400...
a^{51}	19,02731384004330...	311,1269837220890...	a^{111}	608,87404288138400...	9956,0634791068600...
a^{52}	20,15873679831760...	329,6275569128770...	a^{112}	645,07957754616200...	10548,0818212121000...
a^{53}	21,35743766672000...	349,2282314330100...	a^{113}	683,43800533504100...	11175,3034058563000...
a^{54}	22,62741699796880...	369,9944227116390...	a^{114}	724,07734393500300...	11839,8215267724000...
a^{55}	23,97291323002610...	391,9954359817520...	a^{115}	767,13322336083400...	12543,8539514161000...
a^{56}	25,39841683149020...	415,3046975799460...	a^{116}	812,74933860768600...	13289,7503225583000...
a^{57}	26,90868528811770...	440,00000000000000...	a^{117}	861,07792921976500...	14080,0000000000000...
a^{58}	28,50875898048940...	466,1637615180860...	a^{118}	912,28028737566200...	14917,2403685788000...
a^{59}	30,20397800581250...	493,8833012561180...	a^{119}	966,52729618600100...	15804,2656401958000...

Таблица 4.

	ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ		ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ
a^0	1,00000000000000...	16,01807825000000...	a^{60}	32,00000000000000...	512,57850399984600...
a^1	1,05946309435929...	16,97056274843420...	a^{61}	33,90281901949730...	543,05800794973200...
a^2	1,12246204830936...	17,97968492247460...	a^{62}	35,91878554589960...	575,34991751901500...
a^3	1,18920711500270...	19,04881262357000...	a^{63}	38,05462768008650...	609,56200395405800...
a^4	1,25992104989485...	20,18151396603780...	a^{64}	40,31747359663510...	645,80844691301600...
a^5	1,33483985417000...	21,38156923531360...	a^{65}	42,71487533344000...	684,21021552983100...
a^6	1,41421356237305...	22,65298350430280...	a^{66}	45,25483399593770...	724,89547213747200...
a^7	1,49830707687663...	24,00000000000000...	a^{67}	47,94582646005210...	768,00000000000000...
a^8	1,58740105196814...	25,42711426455790...	a^{68}	50,79683366298040...	813,66765646560800...
a^9	1,68179283050735...	26,93908915935570...	a^{69}	53,81737057623530...	862,05085309912500...
a^{10}	1,78179743628059...	28,54097075999180...	a^{70}	57,01751796097890...	913,31106431946500...
a^{11}	1,88774862536328...	30,23810519739900...	a^{71}	60,40795601162510...	967,61936631647700...
a^{12}	2,00000000000000...	32,03615649999800...	a^{72}	64,00000000000000...	1025,15700799963000...
a^{13}	2,11892618871858...	33,94112549686640...	a^{73}	67,80563803899460...	1086,11601589940000...
a^{14}	2,24492409661872...	35,95936984494710...	a^{74}	71,83757109179910...	1150,69983503796000...
a^{15}	2,37841423000541...	38,09762524713770...	a^{75}	76,10925536017300...	1219,12400790804000...
a^{16}	2,51984209978970...	40,36302793207320...	a^{76}	80,63494719327030...	1291,61689382595000...
a^{17}	2,66967970834000...	42,76313847062470...	a^{77}	85,42975066688010...	1368,42043105958000...
a^{18}	2,82842712474611...	45,30596700860280...	a^{78}	90,50966799187540...	1449,79094427486000...
a^{19}	2,99661415375326...	48,00000000000000...	a^{79}	95,89165292010430...	1536,00000000000000...
a^{20}	3,17480210393627...	50,85422852911270...	a^{80}	101,59366732596100...	1627,33531293112000...
a^{21}	3,36358566101471...	53,87817831870820...	a^{81}	107,63474115247100...	1724,10170619815000...
a^{22}	3,56359487256118...	57,08194151998020...	a^{82}	114,03503592195800...	1826,62212863882000...
a^{23}	3,77549725072657...	60,47621039479430...	a^{83}	120,81591202325000...	1935,23873263284000...
a^{24}	4,00000000000000...	64,07231299999220...	a^{84}	128,00000000000000...	2050,31401599914000...
a^{25}	4,23785237743716...	67,88225099372870...	a^{85}	135,61127607798900...	2172,23203179867000...
a^{26}	4,48984819323745...	71,91873968988980...	a^{86}	143,67514218359800...	2301,39967007579000...
a^{27}	4,75682846001081...	76,19525049427100...	a^{87}	152,21851072034600...	2438,24801581594000...
a^{28}	5,03968419957939...	80,72605586414150...	a^{88}	161,26989438654100...	2583,23378765176000...
a^{29}	5,33935941668000...	85,52627694124430...	a^{89}	170,85950133376000...	2736,84086211900000...
a^{30}	5,65685424949221...	90,61193401720020...	a^{90}	181,01933598375100...	2899,58188854954000...
a^{31}	5,99322830750652...	96,00000000000000...	a^{91}	191,78330584020900...	3072,00000000000000...

	ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ		ТАКТ	ЧАСТОТА, ГЦ
a^{32}	6,34960420787254...	101,70845705821900...	a^{92}	203,18733465192100...	3254,67062586204000...
a^{33}	6,72717132202941...	107,75635663741000...	a^{93}	215,26948230494100...	3448,20341239609000...
a^{34}	7,12718974512236...	114,16388303995400...	a^{94}	228,07007184391500...	3653,24425727742000...
a^{35}	7,55099450145313...	120,95242078958100...	a^{95}	241,63182404650000...	3870,47746526544000...
a^{36}	8,00000000000000...	128,14462599997700...	a^{96}	256,00000000000000...	4100,62803199803000...
a^{37}	8,47570475487432...	135,76450198744900...	a^{97}	271,22255215597800...	4344,46406359708000...
a^{38}	8,97969638647489...	143,83747937977100...	a^{98}	287,35028436719700...	4602,79934015129000...
a^{39}	9,51365692002163...	152,39050098853300...	a^{99}	304,43702144069200...	4876,49603163159000...
a^{40}	10,07936839915880...	161,45211172827300...	a^{100}	322,53978877308100...	5166,46757530320000...
a^{41}	10,67871883336000...	171,05255388247800...	a^{101}	341,71900266752000...	5473,68172423767000...
a^{42}	11,31370849898440...	181,22386803439000...	a^{102}	362,03867196750200...	5799,16377709873000...
a^{43}	11,98645661501300...	192,00000000000000...	a^{103}	383,56661168041700...	6144,00000000000000...
a^{44}	12,69920841574510...	203,41691411642600...	a^{104}	406,37466930384300...	6509,34125172370000...
a^{45}	13,45434264405880...	215,51271327480700...	a^{105}	430,53896460988200...	6896,40682479176000...
a^{46}	14,25437949024470...	228,32776607989400...	a^{106}	456,14014368783100...	7306,48851455441000...
a^{47}	15,10198900290630...	241,90484157914800...	a^{107}	483,26364809300100...	512,57850399984600...
a^{48}	16,00000000000000...	256,28925199993800...	a^{108}	512,00000000000000...	7740,95493053042000...
a^{49}	16,95140950974860...	271,52900397488200...	a^{109}	542,44510431195600...	8201,25606399557000...
a^{50}	17,95939277294980...	287,67495875952500...	a^{110}	574,70056873439300...	8688,92812719363000...
a^{51}	19,02731384004330...	304,78100197704700...	a^{111}	608,87404288138400...	9205,59868030204000...
a^{52}	20,15873679831760...	322,90422345652700...	a^{112}	645,07957754616200...	9752,99206326259000...
a^{53}	21,35743766672000...	342,10510776493600...	a^{113}	683,43800533504100...	10332,93515060580000...
a^{54}	22,62741699796880...	362,44773606875800...	a^{114}	724,07734393500300...	10947,36344847470000...
a^{55}	23,97291323002610...	384,00000000000000...	a^{115}	767,13322336083400...	11598,32755419680000...
a^{56}	25,39841683149020...	406,83382823282900...	a^{116}	812,74933860768600...	12288,00000000000000...
a^{57}	26,90868528811770...	431,02542654958800...	a^{117}	861,07792921976500...	13018,68250344660000...
a^{58}	28,50875898048940...	456,65553215976000...	a^{118}	912,28028737566200...	13792,81364958270000...
a^{59}	30,20397800581250...	483,80968315826700...	a^{119}	966,52729618600100...	14612,97702910790000...

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Коротков А.В. Многомерные Булевы алгебры

Одномерные Булевы алгебры

Одномерной Булевой алгеброй называется [1] класс S объектов $\mathbf{a}=a_1$, $\mathbf{b}=b_1$, $\mathbf{c}=c_1$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=a_1$, $\mathbf{b}=b_1$, $\mathbf{c}=c_1$, ... из S имеют место

- 1) (замкнутость) S содержит $a_1+b_1=\mathbf{a+b}$;
 $a_1 \cdot b_1=\mathbf{a \cdot b}$;
 - 2) (коммутативные законы) $a_1+b_1=b_1+a_1$, т.е. $\mathbf{a+b=b+a}$
 $a_1 \cdot b_1=b_1 \cdot a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot b=b \cdot a}$;
 - 3) (ассоциативные законы) $a_1+(b_1+c_1)=(a_1+b_1)+c_1$, т.е. $\mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c}$
 $a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1)=(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c}$;
 - 4) (дистрибутивные законы) $a_1 \cdot (b_1+c_1)=a_1 \cdot b_1+a_1 \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)}$
 $a_1+(b_1 \cdot c_1)=(a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1)$, т.е. $\mathbf{a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)}$;
 - 5) (свойства идемпотентности) $a_1+a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a+a=a}$
 $a_1 \cdot a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot a=a}$;
 - 6) (свойства совместимости)

$a_1+b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1=b_1, \text{ т.е. } \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1=a_1 \end{cases}$	$a_1 \cdot b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1+b_1=b_1, \text{ т.е. } \\ b_1, & \text{если } a_1+b_1=a_1 \end{cases}$	$\mathbf{a+b = \begin{cases} a, & \text{если } a \cdot b=b \\ b, & \text{если } a \cdot b=a \end{cases}}$	$\mathbf{a \cdot b = \begin{cases} a, & \text{если } a+b=b \\ b, & \text{если } a+b=a \end{cases}}$
---	---	---	---
 - 7) S содержит элементы $\mathbf{1=1}$ и $\mathbf{0=0}$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=a_1$ из S
 $a_1+0=a_1$, т.е. $\mathbf{a+0=a}$
 $a_1 \cdot 1=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot 1=a}$
 $a_1 \cdot 0=0$, т.е. $\mathbf{a \cdot 0=0}$
 $a_1+1=1$, т.е. $\mathbf{a+1=1}$;
 - 8) для каждого элемента $\mathbf{a}=a_1$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=\bar{a}_1$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=a_1$) такой, что
 $a_1+\bar{a}_1=1$, т.е. $\mathbf{a+\bar{a}=1}$
 $a_1 \cdot \bar{a}_1=0$, т.е. $\mathbf{a \cdot \bar{a}=0}$.
- В каждой одномерной булевой алгебре имеют место:
- 9) (законы поглощения) $a_1 \cdot (a_1+b_1)=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (a+b)=a}$,
 $a_1+a_1 \cdot b_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a+a \cdot b=a}$;
 - 10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a + b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{\mathbf{a \cdot b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$
 - 11)

$$\overline{\bar{a}_1} = a_1, \text{ т.е. } \overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$\bar{\bar{1}} = 0, \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \mathbf{0},$$

$$\bar{0}=1, \text{ т.е. } \bar{\bar{0}}=1;$$

$$12) \quad a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1 = a_1 + b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1) = a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$13) \quad a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1 = a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{c}},$$

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), \text{ т.е.}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \bar{\mathbf{c}}).$$

Двумерные Булевы алгебры

Двумерной Булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2)$, ... из S имеют место

$$1) \text{ (замкнутость) } S \text{ содержит } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

$$2) \text{ (коммутативные законы) } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

$$(b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

$$3) \text{ (ассоциативные законы) } (a_1, a_2) + ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) + (c_1, c_2) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$(a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2))$$

$$((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) = ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$$

$$4) \text{ (дистрибутивные законы) } (a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2))$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}),$$

$$(a_1, a_2) + ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a_1 + (b_1 \cdot c_1), a_2 + (b_2 \cdot c_2))$$

$$((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot ((a_1, a_2) + (c_1, c_2)) =$$

$$= ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2)),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c});$$

$$5) \text{ (свойства идемпотентности)}$$

$$(a_1, a_2) + (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

$$6) \text{ (свойства совместимости)}$$

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) =$$

$$= \begin{cases} (a_1 + a_1 \cdot b_1, a_2 + a_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2), & \text{если } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \\ (a_1 \cdot b_1 + b_1, a_2 \cdot b_2 + b_2) = (b_1, b_2), & \text{если } (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1, a_2), \end{cases}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = \\ (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1, a_2), & \text{если } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = \\ (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1, a_2), & \text{если } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (b_1, b_2) \end{cases}$$

$$((a_1+b_1) \cdot b_1, (a_2+b_2) \cdot b_2) = (b_1, b_2), \text{ если } (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1, a_2),$$

т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}; \end{cases}$

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ из S

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (0, 0) &= (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} \\ (a_1, a_2) \cdot (1, 1) &= (a_1, a_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a} \\ (a_1, a_2) \cdot (0, 0) &= (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ (a_1, a_2) + (1, 1) &= (1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1}; \end{aligned}$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$) такой, что

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2) &= (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2) = (1, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1} \\ (a_1, a_2) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2) &= (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2) = (0, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

В каждой двумерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \cdot ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) &= (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2)) = (a_1, a_2), \\ \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{a}, \\ (a_1, a_2) + ((a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)) &= (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2)) = (a_1, a_2), \\ \text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a}; \end{aligned}$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\begin{aligned} \overline{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)} &= \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2)} = \\ &= (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \\ \text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \bar{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}, \\ \overline{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)} &= \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)} = \\ &= (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2), \\ \text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \bar{\mathbf{a} + \mathbf{b}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11) \quad \overline{\overline{(a_1, a_2)}} &= \overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2)} = (a_1, a_2), \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}, \\ \overline{\overline{(1, 1)}} &= \overline{(\bar{1}, \bar{1})} = (0, 0), \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \mathbf{0}, \\ \overline{\overline{(0, 0)}} &= \overline{(\bar{0}, \bar{0})} = (1, 1), \text{ т.е. } \bar{\bar{\mathbf{0}}} = \mathbf{1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12) \quad (a_1, a_2) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \cdot (b_1, b_2) &= (a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1, a_2 + \bar{a}_2 \cdot b_2) = \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \\ (a_1, a_2) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2) + (b_1, b_2)) &= (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2)) = \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) + (b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2) &= \\ &= (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2) = \\ &= (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\ ((a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot ((a_1, a_2) + (c_1, c_2)) \cdot ((b_1, b_2) + (c_1, c_2)) &= \\ &= ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + c_2)) = \\ &= ((a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1), (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + c_2)), \text{ т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \end{aligned}$$

***n**-мерные Булевы алгебры*

n-мерной Булевой алгеброй назовем класс S объектов $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, ..., в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

для всех $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n)$, ... из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \mathbf{a} + \mathbf{b};$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b};$$

2) (коммутативные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1 \cdot a_1, b_2 \cdot a_2, \dots, b_n \cdot a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};$$

3) (ассоциативные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n))$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) + (c_1, c_2, \dots, c_n) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n))$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) = ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$$

4) (дистрибутивные законы)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2), \dots, a_n \cdot (b_n + c_n))$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) =$$

$$= (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) = (a_1 + (b_1 \cdot c_1), a_2 + (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n + (b_n \cdot c_n))$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) =$$

$$= ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2), \dots, (a_n + b_n) \cdot (a_n + c_n)),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c});$$

5) (свойства идемпотентности)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a};$$

6) (свойства совместимости)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) =$$

$$= \begin{cases} (a_1 + a_1 \cdot b_1, a_2 + a_2 \cdot b_2, \dots, a_n + a_n \cdot b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ (a_1 \cdot b_1 + b_1, a_2 \cdot b_2 + b_2, \dots, a_n \cdot b_n + b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \end{cases}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = \\ (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (a_n + b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ ((a_1 + b_1) \cdot b_1, (a_2 + b_2) \cdot b_2, \dots, (a_n + b_n) \cdot b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \\ \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \end{cases}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{a}, \text{ если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, \text{ если } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a}; \end{cases}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ и $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из S

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (1, 1, \dots, 1) = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (1, 1, \dots, 1) = (1, 1, \dots, 1), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ (дополнение элемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) такой, что

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 + \bar{a}_1, a_2 + \bar{a}_2, \dots, a_n + \bar{a}_n) = (1, 1, \dots, 1),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{1}$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = (a_1 \cdot \bar{a}_1, a_2 \cdot \bar{a}_2, \dots, a_n \cdot \bar{a}_n) = (0, 0, \dots, 0),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}.$$

В каждой n-мерной булевой алгебре имеют место:

9) (законы поглощения)

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \\ = (a_1 \cdot (a_1 + b_1), a_2 \cdot (a_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (a_n + b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a},$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + ((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) = \\ = (a_1 + (a_1 \cdot b_1), a_2 + (a_2 \cdot b_2), \dots, a_n + (a_n \cdot b_n)) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\text{т.е. } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)} = \overline{(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)} = \\ = (\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} + \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}},$$

$$\overline{(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)} = \overline{(a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)} = \\ = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_n + \bar{b}_n) = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n),$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}};$$

$$11) \quad \overline{\overline{(a_1, a_2, \dots, a_n)}} = \overline{(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ т.е. } \overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a},$$

$$\overline{(1, 1, \dots, 1)} = (\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}) = (0, 0, \dots, 0), \text{ т.е. } \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0},$$

$$\overline{(0, 0, \dots, 0)} = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) = (1, 1, \dots, 1), \text{ т.е. } \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1};$$

$$12) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) + (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1, a_2 + \bar{a}_2 \cdot b_2, \dots, a_n + \bar{a}_n \cdot b_n) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) = (a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1), a_2 \cdot (\bar{a}_2 + b_2), \dots, a_n \cdot (\bar{a}_n + b_n)) = \\
& = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \\
13) & (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) = \\
& = (a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 + a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n) = \\
& = (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n), \text{ т.е. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \\
& ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) = \\
& = ((a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1), (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + c_2), \dots, (a_n + b_n) \cdot (a_n + c_n) \cdot (b_n + c_n)) = \\
& = ((a_1 + c_1) \cdot (b_1 + c_1), (a_2 + c_2) \cdot (b_2 + c_2), \dots, (a_n + c_n) \cdot (b_n + c_n)), \\
& \text{т.е. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}).
\end{aligned}$$

Таким образом, свойства многомерных Булевых алгебр повторяют свойства одномерной Булевой алгебры.

Литература

1. Корн Г.К., Корн Т.К. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1977. – 832с.

А.В. Коротков

Не Булевы алгебры логики

Булевой алгеброй называется [1] класс S объектов $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

	0	1
0	0	1
1	1	1

операция умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

для всех $\mathbf{a}=a_1, \mathbf{b}=b_1, \mathbf{c}=c_1, \dots$ из S имеют место

- 1) (замкнутость) S содержит $a_1+b_1=\mathbf{a+b}$;
 $a_1 \cdot b_1=\mathbf{a \cdot b}$;
- 2) (коммутативные законы) $a_1+b_1=b_1+a_1$, т.е. $\mathbf{a+b=b+a}$
 $a_1 \cdot b_1=b_1 \cdot a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot b=b \cdot a}$;
- 3) (ассоциативные законы) $a_1+(b_1+c_1)=(a_1+b_1)+c_1$, т.е. $\mathbf{a+(b+c)=(a+b)+c}$
 $a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1)=(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c}$;
- 4) (дистрибутивные законы) $a_1 \cdot (b_1+c_1)=a_1 \cdot b_1+a_1 \cdot c_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c)}$
 $a_1+(b_1 \cdot c_1)=(a_1+b_1) \cdot (a_1+c_1)$, т.е. $\mathbf{a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)}$;
- 5) (свойства идемпотентности) $a_1+a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a+a=a}$
 $a_1 \cdot a_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot a=a}$;
- 6) (свойства совместимости)

$$a_1+b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = b_1, \text{ т.е.} \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = a_1 \end{cases} \quad \mathbf{a+b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b=b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a \cdot b=a} \end{cases}$$

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1+b_1=b_1, \text{ т.е.} \\ b_1, & \text{если } a_1+b_1=a_1 \end{cases} \quad \mathbf{a \cdot b} = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{если } \mathbf{a+b=b} \\ \mathbf{b}, & \text{если } \mathbf{a+b=a} \end{cases}$$
- 7) S содержит элементы $\mathbf{1}=1$ и $\mathbf{0}=0$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a}=a_1$ из S

$$a_1+0=a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+0=a}$$

$$a_1 \cdot 1=a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1=a}$$

$$a_1 \cdot 0=0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0=0}$$

$$a_1+1=1, \text{ т.е. } \mathbf{a+1=1};$$
- 8) для каждого элемента $\mathbf{a}=a_1$ класс S содержит элемент $\overline{\mathbf{a}}=\overline{a_1}$ (дополнение элемента $\mathbf{a}=a_1$) такой, что

$$\overline{a_1}+a_1=1, \text{ т.е. } \mathbf{a+\overline{a}=1}$$

$$\overline{a_1} \cdot a_1=0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot \overline{a}=0}.$$

В каждой одномерной булевой алгебре имеют место:

- 9) (законы поглощения) $a_1 \cdot (a_1+b_1)=a_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (a+b)=a}$,
 $a_1+a_1 \cdot b_1=a_1$, т.е. $\mathbf{a+a \cdot b=a}$;

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + \bar{b}_1, \text{ т.е. } \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b};$$

11)

$$\overline{\bar{a}_1} = a_1, \text{ т.е. } \overline{\bar{a}} = a,$$

$$\overline{\bar{1}} = 0, \text{ т.е. } \overline{\bar{0}} = 1,$$

$$\overline{\bar{0}} = 1, \text{ т.е. } \overline{\bar{1}} = 0;$$

12)

$$a_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1 = a_1 + b_1, \text{ т.е. } a + \bar{a} \cdot b = a + b,$$

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1) = a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b;$$

13)

$$a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1 = a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1, \text{ т.е. } a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c} = a \cdot c + b \cdot \bar{c},$$

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), \text{ т.е.}$$

$$(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + \bar{c}) = (a + c) \cdot (b + \bar{c}).$$

Выполнение этих операций подтверждается таблицей 1 истинности.

Не Булевы алгебры логики

Примером не Булевой алгебры логики может являться класс вычетов по модулю два (класс четных и нечетных чисел), как класс S объектов $a=a_1, b=b_1, c=c_1, \dots$, в котором определены две бинарные операции, обозначаемые как (логические) сложение и умножение, со следующими свойствами:

операция сложения

	0	1
0	0	1
1	1	0

операция умножения

	0	1
0	0	0
1	0	1

для всех $a=a_1, b=b_1, c=c_1, \dots$ из S имеют место

1) (замкнутость) S содержит $a_1 + b_1 = a + b$;

$$a_1 \cdot b_1 = a \cdot b;$$

2) (коммутативные законы) $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$, т.е. $a + b = b + a$

$$a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1, \text{ т.е. } a \cdot b = b \cdot a;$$

3) (ассоциативные законы) $a_1 + (b_1 + c_1) = (a_1 + b_1) + c_1$, т.е. $a + (b + c) = (a + b) + c$

$$a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1) = (a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, \text{ т.е. } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

4) (дистрибутивные законы) $a_1 \cdot (b_1 + c_1) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1$, т.е. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$$a_1 + (b_1 \cdot c_1) \neq (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1), \text{ т.е. } a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c);$$

5) (свойства идемпотентности) $a_1 + a_1 = 0$, т.е. $a + a = 0$, т.е. $a_1 + a_1 \neq a_1$ или $a + a \neq a$

$$a_1 \cdot a_1 = a_1, \text{ т.е. } a \cdot a = a;$$

6) (свойства совместимости)

$$a_1 + b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = a_1, \\ b_1, & \text{если } a_1 \cdot b_1 = b_1 \end{cases} \quad \text{т.е. } a + b = \begin{cases} a, & \text{если } a \cdot b = a \\ b, & \text{если } a \cdot b = b \end{cases}$$

Таблица 1

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
a·b	0	0	0	0	0	0	1	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0	1
c·a	0	0	0	0	0	1	0	1
a+b	0	0	1	1	1	1	1	1
b+c	0	1	1	1	0	1	1	1
c+a	0	1	0	1	1	1	1	1
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0	1
(a·b)·c	0	0	0	0	0	0	0	1
a+(b+c)	0	1	1	1	1	1	1	1
(a+b)+c	0	1	1	1	1	1	1	1
a+b·c	0	0	0	1	1	1	1	1
(a+b)·(a+c)	0	0	0	1	1	1	1	1
a·a	0	0	0	0	1	1	1	1
a+a	0	0	0	0	1	1	1	1
a·b=a	+	+	+	+	-	-	+	+
a+b=b	+	+	+	+	-	-	+	+
a·b=b	+	+	-	-	+	+	+	+
a+b=a	+	+	-	-	+	+	+	+
a·1	0	0	0	0	1	1	1	1
a+0	0	0	0	0	1	1	1	1
a·0	0	0	0	0	0	0	0	0
a+1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\overline{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\overline{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$\overline{a \cdot a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{a+a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{a \cdot (a+b)}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\overline{a+a \cdot b}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\overline{a + b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{a+b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{a \cdot b}$	0	0	1	1	0	0	0	0
$\overline{b \cdot c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\overline{a+b}$	1	1	1	1	0	0	1	1
$\overline{b+c}$	1	0	1	1	1	0	1	1
$\overline{a+a \cdot b}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\overline{a \cdot (a+b)}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\overline{a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$\overline{a \cdot c+b \cdot c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$\overline{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)}$	0	0	0	1	1	0	1	1
$\overline{(a+c) \cdot (b+c)}$	0	0	0	1	1	0	1	1

$$a_1 \cdot b_1 = \begin{cases} a_1, & \text{если } a_1 + b_1 = a_1, \\ b_1, & \text{если } a_1 + b_1 = b_1 \end{cases} \quad \text{т.е. } \mathbf{a \cdot b = \begin{cases} a, & \text{если } \mathbf{a+b=a} \\ b, & \text{если } \mathbf{a+b=b}; \end{cases}}$$

7) S содержит элементы $\mathbf{1=1}$ и $\mathbf{0=0}$ такие, что для всякого элемента $\mathbf{a=a_1}$ из S

$$a_1 + 0 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+0=a}$$

$$a_1 \cdot 1 = a_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 1=a}$$

$$a_1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot 0=0}$$

$$a_1 + 1 = \bar{a}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+1=\bar{a}}, \text{ т.е. } a_1 + 1 \neq 1 \text{ или } \mathbf{a+1 \neq 1};$$

8) для каждого элемента $\mathbf{a=a_1}$ класс S содержит элемент $\bar{\mathbf{a}}=\bar{a}_1$ (дополнение элемента $\mathbf{a=a_1}$) такой, что

$$a_1 + \bar{a}_1 = 1, \text{ т.е. } \mathbf{a+\bar{a}=1}$$

$$a_1 \cdot \bar{a}_1 = 0, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot \bar{a}=0}.$$

В каждой не булевой алгебре логики имеют место:

9) (законы поглощения) $a_1 \cdot (a_1 + b_1) = a_1 \cdot \bar{b}_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot (a+b)=a \cdot \bar{b}}$,

$$a_1 + a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot \bar{b}_1, \text{ т.е. } \mathbf{a+a \cdot b=a \cdot \bar{b}};$$

10) (двойственность, законы де Моргана)

$$\overline{a_1 + b_1} = \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 + a_1 \cdot b_1,$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a + b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{a \cdot b},$$

$$\overline{a_1 \cdot b_1} = \bar{a}_1 + a_1 \cdot \bar{b}_1,$$

$$\text{т.е. } \overline{\mathbf{a \cdot b}} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a \cdot \bar{b}};$$

11) $\bar{\bar{a}}_1 = a_1$, т.е. $\bar{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$,

$$\bar{1} = 0, \text{ т.е. } \bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0},$$

$$\bar{0} = 1, \text{ т.е. } \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1};$$

12) $a_1 \cdot \bar{b}_1 + \bar{a}_1 \cdot b_1 = a_1 + b_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = a+b}$,

$$a_1 \cdot (\bar{a}_1 + b_1) = a_1 \cdot b_1, \text{ т.е. } \mathbf{a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b};$$

13) $a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1 \neq a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot \bar{c}_1$, т.е. $\mathbf{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot \bar{c} \neq a \cdot c + b \cdot \bar{c}}$,

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1) = (a_1 + c_1) \cdot (b_1 + \bar{c}_1), \text{ т.е.}$$

$$\mathbf{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+\bar{c}) = (a+c) \cdot (b+\bar{c})}.$$

Выполнение этих операций подтверждается таблицей 2 истинности.

Таким образом, Булевы алгебры логики не являются единственным способом построения алгебр логики и логических устройств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – Москва: Наука, 1977. – 832с.

Таблица 2

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
a·b	0	0	0	0	0	0	1	1
b·c	0	0	0	1	0	0	0	1
c·a	0	0	0	0	0	1	0	1
a+b	0	0	1	1	1	1	0	0
b+c	0	1	1	0	0	1	1	0
c+a	0	1	0	1	1	0	1	0
a·(b·c)	0	0	0	0	0	0	0	1
(a·b)·c	0	0	0	0	0	0	0	1
a+(b+c)	0	1	1	0	1	0	0	1
(a+b)+c	0	1	1	0	1	0	0	1
a+b·c	0	0	0	1	1	1	1	0
(a+b)·(a+c)	0	0	0	1	1	0	0	0
a·a	0	0	0	0	1	1	1	1
a+a	0	0	0	0	0	0	0	0
a·b=a	+	+	+	+	-	-	+	+
a+b=b	+	+	-	-	+	+	+	+
a·b=b	+	+	-	-	+	+	-	-
a+b=a	+	+	+	+	-	-	-	-
a·1	0	0	0	0	1	1	1	1
a+0	0	0	0	0	1	1	1	1
a·0	0	0	0	0	0	0	0	0
a+1	1	1	1	1	0	0	0	0
$\overline{a}$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\overline{b}$	1	1	0	0	1	1	0	0
$\overline{c}$	1	0	1	0	1	0	1	0
$\overline{a \cdot a}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{a+a}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{a \cdot (a+b)}$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{a+a \cdot b}$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{a + b}$	1	1	0	0	0	0	1	1
$\overline{a \cdot b}$	1	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{a \cdot b}$	1	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{a+b}$	0	0	1	1	1	1	0	0
$\overline{a \cdot b}$	0	0	1	1	0	0	0	0
$\overline{b \cdot c}$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\overline{a+b}$	1	1	0	0	0	0	1	1
$\overline{b+c}$	1	0	0	1	1	0	0	1
$\overline{a+a \cdot b}$	0	0	1	1	1	1	1	1
$\overline{a \cdot (a+b)}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\overline{a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c}$	0	0	1	0	0	1	0	0
$\overline{a \cdot c+b \cdot c}$	0	0	1	0	0	1	1	1
$\overline{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)}$	0	0	0	1	1	0	0	0
$\overline{(a+c) \cdot (b+c)}$	0	0	0	1	1	0	0	0

А. В. Коротков

Многозначные алгебры логики

Пусть m – данное натуральное число. Все целые числа по отношению к числу m естественно разбиваются [1] на m классов, если отнести к одному классу числа, дающие один и тот же остаток при делении на m . Так, если $m=2$, целые числа разбиваются на классы четных и нечетных чисел. Если $m=4$, классы в этом смысле составляют числа вида $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ при целых k и т. д. Числа, относящиеся к одному классу, называются сравнимыми, и изучение свойств классов носит название теории сравнений. Переходим к определениям относящихся сюда понятий.

1. Определение и простейшие свойства. Пусть m – натуральное число. Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m , если их разность $a-b$ делится на m . Высказывание « a и b сравнимы по модулю m » записывается в виде $a \equiv b \pmod{m}$.

Предложение 1. $a \equiv a \pmod{m}$; далее, если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$; если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

Именно эти свойства сравнений позволяют заключить, что каждое целое число попадает в один и только один класс попарно сравнимых между собой целых чисел. Эти классы называются классами вычетов по модулю m или просто классами по модулю m .

Предложение 2. Каждое целое число сравнимо по модулю m с одним и только одним из чисел ряда $0, 1, \dots, m-1$.

Каждый класс по модулю m действительно состоит из чисел, дающих один и тот же остаток при делении на m .

Любая совокупность чисел, взятых по одному из каждого класса по модулю m , называется полной системой вычетов по модулю m . Например, числа $0, 1, \dots, m-1$ образуют полную систему вычетов.

Предложение 3. Если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$, то $a_1 \pm b_1 \equiv a_2 \pm b_2 \pmod{m}$.

Предложение 4. Если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$, то $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{m}$.

В частности, если $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ и c – любое целое число, то $a_1 c \equiv a_2 c \pmod{m}$.

Предложение 5. Если $ca_1 \equiv ca_2 \pmod{m}$ и число c взаимно просто с m , то $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$.

Таким образом, обе части сравнения можно сократить на множитель, взаимно простой с модулем. Без предположения о взаимной простоте это, вообще говоря, делать нельзя. Так, $2 \equiv 6 \pmod{4}$, но $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$.

2. Действия над классами. Пусть $m=4$. Мы можем записать «суммы», «разности» и «произведения», руководствуясь сложением, вычитанием и умножением чисел (все равно каких), взятых из соответствующих классов.

То же самое имеет место при любом m . Для того чтобы указать класс, к которому принадлежит сумма, разность или произведение двух чисел, нам достаточно знать классы, к которым эти числа принадлежат, а как они выбраны внутри классов – на результате не сказывается. Это обстоятельство делает естественными следующие определения.

Суммой двух классов по модулю m называется класс по модулю m , к которому принадлежит сумма каких-либо чисел из слагаемых классов.

Произведением двух классов по модулю m называется класс по модулю m , к которому принадлежит произведение каких-либо чисел из перемножаемых классов.

В силу предложений 3, 4 эти определения корректны – какие бы числа из двух данных классов мы ни выбрали, их сумма и их произведение будут принадлежать вполне определенным классам, не зависящим от выбора чисел внутри данных классов.

Пример. Приведем таблицы сложения и умножения для классов по модулю 2, 3 и 4.

Таблица 1

$m=2$	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица 2

$m=2$	0	1
0	0	0
1	0	1

Таблица 3

$m=3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Таблица 4

$m=3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Таблица 5

лица 6

$m=4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Таб-

$m=4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Символы 0, 1, 2, 3 в табл. 1-6 обозначают классы по модулю 2, 3 и 4, которым принадлежат числа 0, 1, 2, 3. Такими обозначениями мы будем пользоваться и впредь – символ a будет обозначать класс по модулю (который предполагается заданным), содержащий число a .

Отметим некоторые очевидные свойства действий над классами по модулю.

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

2. $a+b = b+a$ (коммутативность сложения).

3. Класс 0 играет роль нуля при сложении: $a+0=a$ при любом a .

4. Класс $-a$ играет роль класса, противоположного классу a , именно, $a + (-a) = 0$.

5. $a(b+c) = ab+ac$.

5'. $(b+c)a = ba+ca$ (дистрибутивность).

6. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность умножения).

7. $ab = ba$ (коммутативность умножения).

Свойства 3 и 4 очевидны. Свойства 2, 5, 6, 7 доказываются точно так же, как свойство 1, посредством перехода от классов к любым числам из этих классов, для которых соответствующие свойства действий имеют место.

8. Класс 1 играет роль единицы при умножении классов, именно, $a1=a$ при любом a .

3. Приведенная система вычетов и примитивные классы.

Предложение 6. Если $d = \text{н. о. д. } (a, m)$ и $a_1 = a(\text{mod } m)$, то $\text{н. о. д. } (a_1, m) = d$.

В частности, если одно из чисел класса по модулю m взаимно просто с m , то и все числа этого класса взаимно просты с m .

Классы, состоящие из чисел, взаимно простых с модулем, называются примитивными классами. Для любого модуля примитивные классы существуют; такими будут, в частности, классы 1 и $m-1$.

Предложение 7. Для того чтобы сравнение $ax=1 \pmod{m}$ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы a было взаимно просто с m .

Предложение 7 можно в терминах классов сформулировать так: для того чтобы класс a имел обратный a^{-1} , т. е. такой, что $a a^{-1} = 1$, необходимо и достаточно, чтобы класс a был примитивным.

Если модуль есть простое число p , то все классы, кроме нулевого, примитивны.

Предложение 8. Сравнение $ax = b \pmod{m}$, если a взаимно просто с m , имеет единственный класс решений.

Если модуль m есть простое число, то все классы, кроме нулевого, примитивны, так что в этом случае возможно деление на любой класс, кроме нулевого.

Классы по модулю m образуют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Оно называется кольцом вычетов по модулю m . Если m -составное число, то это кольцо не будет областью целостности. Если же m -простое число, то кольцо вычетов по нему есть не только область целостности, но даже поле. В частности кольцо вычетов по модулю 2,

состоящее из двух элементов 0 и 1 (классы четных и нечетных чисел), является полем. Полем также является кольцо вычетов по модулю 3.

Приведем таблицы истинности для колец вычетов по модулю 2, 3 и 4 (таблицы 7, 8, 9). В таблице 7 две переменные **a** и **b** с двумя состояниями образуют $4=2^2$ комбинации состояний и зависящие от них $16=2^4$ функций. В таблице 8 две переменные **a** и **b** с тремя состояниями образуют $9=3^2$ комбинаций состояний и зависящие от них $19683=3^9$ функций. В таблице 9 две переменные **a** и **b** с четырьмя состояниями образуют $16=4^2$ комбинаций состояний и зависящее от них $4\,294\,967\,296=4^{16}$ функций.

Таблица истинности для кольца вычетов по модулю 2 существенно отличается от таблицы истинности для Булевой алгебры логики. Она двухзначна. Трехзначная алгебра логики для кольца вычетов по модулю 3, а также четырехзначная алгебра логики для кольца вычетов по модулю 4 включают равное число функций и по этой причине совершенно не используются. Вместе с тем, они вполне применимы для построения трехзначных и четырехзначных логических устройств. Приведенные выше законы выполнения операций применимы для каждой из трех систем построения логических устройств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1984.— 416с.

Таблица 7

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
a·b	0	0	0	1
a·b ⁺	0	0	1	0
a	0	0	1	1
a ⁺ ·b	0	1	0	0
b	0	1	0	1
a+b	0	1	1	0
(a ⁺ ·b ⁺) ⁺	0	1	1	1
a ⁺ ·b ⁺	1	0	0	0
(a+b) ⁺	1	0	0	1
b ⁺	1	0	1	0
(a ⁺ ·b) ⁺	1	0	1	1
a ⁺	1	1	0	0
(a·b ⁺) ⁺	1	1	0	1
(a·b) ⁺	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Таблица8

a	0	0	0	1	1	1	2	2	2
b	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	2
6	0	0	0	0	0	0	0	2	0
7	0	0	0	0	0	0	0	2	1
8	0	0	0	0	0	0	0	2	2
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	1	0	2
12	0	0	0	0	0	0	1	1	0
13	0	0	0	0	0	0	1	1	1
14	0	0	0	0	0	0	1	1	2
15	0	0	0	0	0	0	1	2	0
16	0	0	0	0	0	0	1	2	1
17	0	0	0	0	0	0	1	2	2
18	0	0	0	0	0	0	2	0	0
19	0	0	0	0	0	0	2	0	1
20	0	0	0	0	0	0	2	0	2
21	0	0	0	0	0	0	2	1	0
22	0	0	0	0	0	0	2	1	1
23	0	0	0	0	0	0	2	1	2
24	0	0	0	0	0	0	2	2	0
25	0	0	0	0	0	0	2	2	1
26	0	0	0	0	0	0	2	2	2
...									
19682	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Таблица 9

a	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
b	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	2
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2
43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3
44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	1
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2
47	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	3
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	1
50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	3
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	1
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	2
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	3
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	1
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	2
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	3
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	0
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	1
62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	2
63	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3	3
...																
n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

А. В. Коротков

Многомерные целочисленные алгебры

В литературе повсеместно рассматриваются алгебры над полем действительных чисел [1]. Вместе с тем представляют определенный интерес алгебры над кольцами целых чисел и классов сравнений по модулю. Практическая значимость таких алгебр может быть в использовании указанных алгебр в физических приложениях, где дискретность величин приобретает существенное значение. В случае применения одномерных колец целых чисел или классов сравнений по модулю имеют место очевидные действия [2].

Одномерные числа

I. Определение одномерных чисел.

Одномерными числами $\mathbf{a}$ назовем элементы колец дискретных чисел $\mathbf{a}=(a_0)$, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых чисел вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Числа $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи: $\mathbf{a}=\mathbf{b}$

или $(a_0)=(b_0)$, если $a_0=b_0$.

2. Суммой чисел $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ называется число $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0+b_0)$, т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0)+(b_0)=(a_0+b_0).$$

3. Произведением чисел $\mathbf{a}=(a_0)$ и $\mathbf{b}=(b_0)$ называется число

$$\mathbf{ab}=(a_0b_0),$$

т.е.

$$\mathbf{ab}=(a_0)(b_0)=(a_0b_0),$$

4. Число (a_0) отождествляется с числом a_0 , т.е. $(a_0)=a_0$.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$\mathbf{ma}=(m)(a_0)=(ma_0),$$

т.е.

$$\mathbf{ma}=(ma_0),$$

где m -одномерное число.

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=((a_0)+(b_0))+(c_0)=((a_0+b_0)+c_0),$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(a_0)+((b_0)+(c_0))=(a_0+(b_0+c_0)),$$

т.е.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0)+(b_0)=(a_0+b_0),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_0)+(a_0)=(b_0+a_0),$$

т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=(a_0)+(0)=(a_0+0)=(a_0),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, так что число (0) отождествляется с числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$a + (-a) = (a_0) + (-a_0) = (a_0 - a_0) = (0),$$

т.е. $a + (-a) = 0$, так что число $(-a_0)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(ab)c = ((a_0)(b_0))(c_0) = (a_0 b_0)(c_0),$$

$$a(bc) = (a_0)((b_0)(c_0)) = (a_0)(b_0 c_0),$$

т.е.

$$(ab)c = a(bc).$$

6. Коммутативность умножения:

$$ab = (a_0)(b_0) = (a_0 b_0),$$

$$ba = (b_0)(a_0) = (b_0 a_0),$$

т.е.

$$ab = ba.$$

7. Дистрибутивность:

$$(a + b)c = ((a_0) + (b_0))(c_0) = (a_0 + b_0)(c_0) = ((a_0 + b_0)c_0),$$

$$ac + bc = (a_0 c_0) + (b_0 c_0) = ((a_0 + b_0)c_0),$$

т.е.

$$(a + b)c = ac + bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0)(1) = (a_0 1) = (a_0) = a.$$

Итак, одномерные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух одномерных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = (a_0 b_0).$$

Двухмерные числа

I. Определение двухмерных чисел.

Двухмерными числами a назовем упорядоченные пары $a = (a_0, a_1)$ одномерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с одномерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары одномерных чисел $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$a = b$$

или

$$(a_0, a_1) = (b_0, b_1) = \begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара $a + b = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$, т.е.

$$a + b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1).$$

3. Произведением пар $a = (a_0, a_1)$ и $b = (b_0, b_1)$ называется пара

$$ab = (a_0 b_0 + \alpha b_1 a_1, a_0 b_1 + b_0 a_1),$$

т.е.

$$ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0 b_0 + \alpha b_1 a_1, a_0 b_1 + b_0 a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению одномерных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с одномерным числом a_0 , т.е. $(a_0, 0) = a_0$.

В данном определении двумерных чисел, составными частями которого являются определения их равенства, суммы и произведения, нет речи о каком-либо извлечении квадратного корня из отрицательных или положительных чисел, а также нуля. Все определения формулируются в терминах одномерных чисел и действий над ними.

При этом из аксиом 3 и 4 следует

$$m\mathbf{a}=(m, 0)(a_0, a_1)=(ma_0+\alpha a_1 0, ma_1+a_0 0)=(ma_0, ma_1),$$

т.е.

$$m\mathbf{a}=(ma_0, ma_1),$$

где m – одномерное число.

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(a_0, -a_1)$, отличающиеся знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)(a_0, -a_1)=(a_0a_0-\alpha a_1a_1, a_0a_1-a_0a_1)=(a_0^2-\alpha a_1^2, 0),$$

т.е.

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=a_0^2-\alpha a_1^2,$$

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $a_0^2=a_1^2=0$ при $\alpha=-1$, $a_0^2=a_1^2$ при $\alpha=1$, $a_0^2=0$ при $\alpha=0$.

Двумерные числа обладают следующими свойствами:

1.
$$\bar{\bar{\mathbf{a}}}=(\overline{a_0, -a_1})=(a_0, a_1)=\mathbf{a},$$

т.е.

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}.$$

2.
$$\overline{\mathbf{ab}}=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, -(a_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}=(b_0, -b_1)(a_0, -a_1)=(b_0a_0+\alpha a_1b_1, -(b_0a_1+a_0b_1)),$$

т.е.

$$\overline{\mathbf{ab}}=\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}.$$

3.
$$\mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)+(a_0, -a_1)=(a_0+a_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

4.
$$\overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(a_0+b_0, -(a_1+b_1))=(a_0, -a_1)+(b_0, -b_1)=\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))+(c_0, c_1)=((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(a_0, a_1)+((b_0, b_1)+(c_0, c_1))=(a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения одномерных чисел $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_0, b_1)+(a_0, a_1)=(b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения одномерных чисел $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=(a_0, a_1)+(0, 0)=(a_0+0, a_1+0)=(a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(a_0, a_1)+(-a_0, -a_1)=(a_0-a_0, a_1-a_1)=(0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1)=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1)(c_0, c_1)=$$

$$=((a_0b_0+\alpha b_1a_1)c_0+\alpha c_1(a_0b_1+b_0a_1), (a_0b_0+\alpha b_1a_1)c_1+c_0(a_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc})=(a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1))=(a_0, a_1)(b_0c_0+\alpha c_1b_1, b_0c_1+c_0b_1)=$$

$$=(a_0(b_0c_0+\alpha c_1b_1)+\alpha(b_0c_1+c_0b_1)a_1, a_0(b_0c_1+c_0b_1)+(b_0c_0+\alpha c_1b_1)a_1).$$

В силу коммутативности умножения одномерных чисел $(ab)c=a(bc)$.

6. Коммутативность умножения:

$$ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, a_0b_1+b_0a_1),$$

$$ba=(b_0, b_1)(a_0, a_1)=(b_0a_0+\alpha a_1b_1, b_0a_1+a_0b_1).$$

В силу коммутативности умножения одномерных чисел $ab=ba$.

7. Дистрибутивность:

$$(a+b)c=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))(c_0, c_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1)(c_0, c_1)=$$

$$=((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(a_1+b_1), (a_0+b_0)c_1+c_0(a_1+b_1)),$$

$$ac+bc=(a_0c_0+\alpha c_1a_1, a_0c_1+c_0a_1)+(b_0c_0+\alpha c_1b_1, b_0c_1+c_0b_1)=$$

$$=((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(a_1+b_1), (a_0+b_0)c_1+c_0(a_1+b_1)),$$

т.е.

$$(a+b)c=ac+bc.$$

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_0, a_1)(1, 0)=(a_01+\alpha 0a_1, a_00+1a_1)=(a_0, a_1)=a.$$

Итак, двумерные числа составляют коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$ab=(a_0b_0+\alpha b_1a_1, \\ a_0b_1+b_0a_1).$$

Четырехмерные числа

1. Определение четырехмерных чисел.

Четырехмерными числами a назовем упорядоченные пары $a=(a_0, a_1)$ двухмерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с двухмерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары двухмерных чисел $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$a=b$$

или

$$(a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0=b_0, \\ a_1=b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара $a+b=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$a+b=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара

$$ab=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е.

$$ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению двухмерных чисел [1].

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с двухмерным числом.

Пары $\mathbf{a}=(a_0, a_1)$ и $\bar{\mathbf{a}}=(\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0\bar{a}_0-\alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1+\bar{a}_1a_0)=(|a_0|^2-\alpha|a_1|^2, 0),$$

т.е.

$$\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}}=|a_0|^2-\alpha|a_1|^2,$$

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2=|a_1|^2=0$ при $\alpha=-1$, $|a_0|^2=|a_1|^2$ при $\alpha=1$, $|a_0|^2=0$ при $\alpha=0$.

Четырехмерные числа обладают следующими свойствами:

1.
$$\overline{\bar{\mathbf{a}}}=(\overline{\bar{a}_0}, -\overline{-a_1})=(\overline{\bar{a}_0}, a_1)=(a_0, a_1)=\mathbf{a},$$

т.е.

$$\overline{\bar{\mathbf{a}}}=\mathbf{a}.$$

2.
$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}=(\overline{a_0b_0+ab_1\bar{a}_1}, -(\overline{a_0b_1+b_0a_1}))=$$

$$=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}=(\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1)=(\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1+\bar{a}_0b_1)),$$

т.е.

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}=\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}.$$

3.
$$\mathbf{a}+\bar{\mathbf{a}}=(a_0, a_1)+(\bar{a}_0, -a_1)=(a_0+\bar{a}_0, 0),$$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

4.
$$\overline{\mathbf{a}+\mathbf{b}}=(\overline{a_0+b_0}, -(\overline{a_1+b_1}))=(\bar{a}_0, -a_1)+(\bar{b}_0, -b_1)=\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}.$$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=((a_0, a_1)+(b_0, b_1))+(c_0, c_1)=((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(a_0, a_1)+((b_0, b_1)+(c_0, c_1))=(a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения двухмерных чисел

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

2. Коммутативность сложения:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=(b_0, b_1)+(a_0, a_1)=(b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения двухмерных чисел $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

3. Наличие нуля:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=(a_0, a_1)+(0, 0)=(a_0+0, a_1+0)=(a_0, a_1),$$

т.е. $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0.

4. Наличие противоположного числа:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(a_0, a_1)+(-a_0, -a_1)=(a_0-a_0, a_1-a_1)=(0, 0),$$

т.е. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-\mathbf{a}$.

5. Ассоциативность умножения:

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c}=((a_0, a_1)(b_0, b_1))(c_0, c_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1)(c_0, c_1)=$$

$$=((a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)c_0+\alpha c_1(\bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

$$(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)c_1+c_0(\bar{a}_0b_1+b_0a_1))=$$

$$=((a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1)c_0+\alpha c_1(\bar{b}_1a_0+\bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0+\alpha$$

$$a_1\bar{b}_1)c_1+c_0(\bar{a}_0b_1+b_0a_1)),$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c})=(a_0, a_1)((b_0, b_1)(c_0, c_1))=(a_0, a_1)(b_0c_0+\alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1+c_0b_1)=$$

$$=(a_0(b_0c_0+\alpha c_1\bar{b}_1)+\alpha(\bar{b}_0c_1+c_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0c_1+c_0b_1)+(b_0c_0+\alpha c_1\bar{b}_1)a_1).$$

В силу коммутативности умножения двумерных чисел $(ab)c=a(bc)$.

6. Некоммутативность умножения:

$$ab=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

$$ba=(b_0, b_1)(a_0, a_1)=(b_0a_0+\alpha a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1+a_0b_1).$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $ab \neq ba$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned}(a+b)c &= ((a_0, a_1)+(b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0+b_0, a_1+b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\bar{a}_1+\bar{b}_1), (\bar{a}_0+\bar{b}_0)c_1+c_0(a_1+b_1)) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\bar{a}_1+\bar{b}_1), (\bar{a}_0+\bar{b}_0)c_1+c_0(a_1+b_1)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ac+bc &= (a_0c_0+\alpha c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1+c_0a_1)+(b_0c_0+\alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1+c_0b_1) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0+\alpha c_1(\bar{a}_1+\bar{b}_1), (\bar{a}_0+\bar{b}_0)c_1+c_0(a_1+b_1)), \\ &\quad (a+b)c=ac+bc.\end{aligned}$$

т.е.

8. Наличие единицы:

$$a1=(a_0, a_1)(1, 0)=(a_01+\alpha 0\bar{a}_1, \bar{a}_00+1a_1)=(a_0, a_1)=a.$$

Итак, четырехмерные числа составляют некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных чисел может быть представлена в виде:

$$ab = \begin{array}{l|l} (a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1) & +\alpha b_2a_2-\alpha^2 a_3b_3, \\ \hline a_0b_1+ b_0a_1 & -\alpha b_2a_3+\alpha a_2b_3, \\ \hline a_0b_2-\alpha b_3a_1 & + b_0a_2+\alpha a_3b_1, \\ \hline a_0b_3- b_2a_1 & + b_0a_3+ a_2b_1). \end{array}$$

Восьмимерные числа

I. Определение восьмимерных чисел.

Восьмимерными числами a назовем упорядоченные пары $a=(a_0, a_1)$ четырехмерных чисел a_i , для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления некоторых пар с четырехмерными числами вводятся согласно следующим определениям (аксиомам):

1. Пары четырехмерных чисел $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ считаются равными в том и только в том случае, когда равны их соответствующие компоненты.

В символической записи:

$$a=b$$

или

$$(a_0, a_1)=(b_0, b_1)=\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1. \end{cases}$$

2. Суммой пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара $a+b=(a_0+b_0, a_1+b_1)$, т.е.

$$a+b=(a_0, a_1)+(b_0, b_1)=(a_0+b_0, a_1+b_1).$$

3. Произведением пар $a=(a_0, a_1)$ и $b=(b_0, b_1)$ называется пара

$$ab=(a_0b_0+\alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $ab = (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1 \bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1)$,
 где $\alpha = \pm 1$ или 0 , причем $\alpha = -1$ соответствует собственноккомплексному, $\alpha = 1$ – псевдокомплексному, а $\alpha = 0$ – дуальнокомплексному расширению четырехмерных чисел.

4. Пара $(a_0, 0)$ отождествляется с четырехмерным числом.

Пары $a = (a_0, a_1)$ и $\bar{a} = (\bar{a}_0, -a_1)$, отличающиеся сопряжением первой и знаком второй компоненты, называются сопряженными. Умножив сопряженные пары

$$a\bar{a} = (a_0, a_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (a_0\bar{a}_0 - \alpha a_1\bar{a}_1, -\bar{a}_0a_1 + \bar{a}_0a_1) = (|a_0|^2 - \alpha|a_1|^2, 0),$$

т.е. $a\bar{a} = |a_0|^2 - \alpha|a_1|^2,$

так что их произведение равно одномерному числу, которое равно нулю, если: $|a_0|^2 = |a_1|^2 = 0$ при $\alpha = -1$, $|a_0|^2 = |a_1|^2$ при $\alpha = 1$, $|a_0|^2 = 0$ при $\alpha = 0$.

Восьмимерные числа обладают следующими свойствами:

1. $\bar{\bar{a}} = (\bar{\bar{a}}_0, -\bar{a}_1) = (\bar{\bar{a}}_0, a_1) = (a_0, a_1) = a,$

т.е. $\bar{\bar{a}} = a.$

2. $\overline{ab} = \overline{(a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, -(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1))} =$
 $= (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, -(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)),$
 $\bar{b}\bar{a} = (\bar{b}_0, -b_1)(\bar{a}_0, -a_1) = (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, -(b_0a_1 + \bar{a}_0b_1)),$

т.е. $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$

3. $a + \bar{a} = (a_0, a_1) + (\bar{a}_0, -a_1) = (a_0 + \bar{a}_0, 0),$

т.е. сумма сопряженных чисел является одномерным числом.

4. $\overline{a+b} = \overline{(a_0+b_0, -(a_1+b_1))} = (\bar{a}_0, -a_1) + (\bar{b}_0, -b_1) = \bar{a} + \bar{b}.$

II. Свойства действий.

1. Ассоциативность сложения:

$$(a+b)+c = ((a_0, a_1) + (b_0, b_1)) + (c_0, c_1) = ((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1),$$

$$a+(b+c) = (a_0, a_1) + ((b_0, b_1) + (c_0, c_1)) = (a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1)).$$

В силу ассоциативности сложения четырехмерных чисел

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. Коммутативность сложения:

$$a+b = (a_0, a_1) + (b_0, b_1) = (a_0+b_0, a_1+b_1),$$

$$b+a = (b_0, b_1) + (a_0, a_1) = (b_0+a_0, b_1+a_1).$$

В силу коммутативности сложения четырехмерных чисел $a+b = b+a.$

3. Наличие нуля:

$$a+0 = (a_0, a_1) + (0, 0) = (a_0+0, a_1+0) = (a_0, a_1),$$

т.е. $a+0 = a$, так что пара $(0, 0)$ отождествляется с одномерным числом 0 .

4. Наличие противоположного числа:

$$a+(-a) = (a_0, a_1) + (-a_0, -a_1) = (a_0-a_0, a_1-a_1) = (0, 0),$$

т.е. $a+(-a) = 0$, так что пара $(-a_0, -a_1)$ отождествляется с числом $-a$.

5. Альтернативность умножения:

$$(ab)b = ((a_0, a_1)(b_0, b_1))(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1)(b_0, b_1) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_0 + \alpha b_1(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1), (\bar{a}_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)) =$$

$$= ((a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1)b_0 + \alpha b_1(\bar{b}_1a_0 + \bar{a}_1\bar{b}_0), (\bar{b}_0\bar{a}_0 + \alpha a_1\bar{b}_1)b_1 + b_0(\bar{a}_0b_1 + b_0a_1)),$$

$$\begin{aligned} a(bb) &= (a_0, a_1)((b_0, b_1)(b_0, b_1)) = (a_0, a_1)(b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1, \bar{b}_0b_1 + b_0b_1) = \\ &= (a_0(b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1) + \alpha(\bar{b}_0b_1 + b_0b_1)\bar{a}_1, \bar{a}_0(\bar{b}_0b_1 + b_0b_1) + (b_0b_0 + \alpha b_1\bar{b}_1)a_1). \end{aligned}$$

В силу равенств $b\bar{b}$ и $b + \bar{b}$ одномерным числам $(ab)b = a(bb)$.

6. Некоммутативность умножения:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0b_0 + \alpha b_1\bar{a}_1, \bar{a}_0b_1 + b_0a_1), \\ ba &= (b_0, b_1)(a_0, a_1) = (b_0a_0 + \alpha a_1\bar{b}_1, \bar{b}_0a_1 + a_0b_1). \end{aligned}$$

В силу несовпадения правых сторон равенств $ab \neq ba$.

7. Дистрибутивность:

$$\begin{aligned} (a+b)c &= ((a_0, a_1) + (b_0, b_1))(c_0, c_1) = (a_0+b_0, a_1+b_1)(c_0, c_1) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1+b_1)) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1+b_1)), \\ ac+bc &= (a_0c_0 + \alpha c_1\bar{a}_1, \bar{a}_0c_1 + c_0a_1) + (b_0c_0 + \alpha c_1\bar{b}_1, \bar{b}_0c_1 + c_0b_1) = \\ &= ((a_0+b_0)c_0 + \alpha c_1(\bar{a}_1 + \bar{b}_1), (\bar{a}_0 + \bar{b}_0)c_1 + c_0(a_1+b_1)), \\ \text{т.е.} \quad (a+b)c &= ac+bc. \end{aligned}$$

8. Наличие единицы:

$$a1 = (a_0, a_1)(1, 0) = (a_01 + \alpha 0\bar{a}_1, \bar{a}_00 + 1a_1) = (a_0, a_1) = a.$$

Итак, восьмимерные числа составляют некоммутативное, альтернативное кольцо с единицей.

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных гиперкомплексных чисел может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} ab &= (a_0b_0 + \alpha b_1a_1 + \alpha b_2a_2 - \alpha^2 a_3b_3 + \alpha b_4a_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 b_7a_7, \\ &\quad a_0b_1 + b_0a_1 - \alpha b_2a_3 + \alpha a_2b_3 - \alpha b_4a_5 + \alpha a_4b_5 + \alpha^2 a_6b_7 - \alpha^2 b_6a_7, \\ &\quad a_0b_2 - \alpha b_3a_1 + b_0a_2 + \alpha a_3b_1 - \alpha b_4a_6 + \alpha^2 a_7b_5 + \alpha a_4b_6 - \alpha^2 b_7a_5, \\ &\quad a_0b_3 - b_2a_1 + b_0a_3 + a_2b_1 - \alpha b_4a_7 + \alpha a_6b_5 + \alpha a_4b_7 - \alpha b_6a_5, \\ &\quad a_0b_4 - \alpha b_5a_1 - \alpha b_6a_2 + \alpha^2 a_3b_7 + b_0a_4 + \alpha a_5b_1 + \alpha a_6b_2 - \alpha^2 b_3a_7, \\ &\quad a_0b_5 - b_4a_1 + \alpha b_6a_3 - \alpha a_2b_7 + b_0a_5 + a_4b_1 - \alpha a_6b_3 + \alpha b_2a_7, \\ &\quad a_0b_6 + \alpha b_7a_1 - b_4a_2 - \alpha a_3b_5 + b_0a_6 - \alpha a_7b_1 + a_4b_2 + \alpha b_3a_5, \\ &\quad a_0b_7 + b_6a_1 - b_4a_3 - a_2b_5 + b_0a_7 - a_6b_1 + a_4b_3 + b_2a_5). \end{aligned}$$

Особенностью многомерных чисел является, в частности, то, что произведение двух чисел с одномерными значениями $a_0 = b_0 = 0$ дает возможность получать скалярное и векторное произведения двух многомерных векторов:

$$ab = -(ab) + [ab],$$

где

$$(ab) = -(\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 - \alpha^2 b_3a_3 + \alpha a_4b_4 - \alpha^2 a_5b_5 - \alpha^2 a_6b_6 + \alpha^3 a_7b_7)$$

и

$$\begin{aligned} [ab] &= (\alpha(a_2b_3 - a_3b_2) + \alpha(a_4b_5 - a_5b_4) - \alpha^2(a_7b_6 - a_6b_7), \\ &\quad (\alpha(a_4b_6 - a_6b_4) - \alpha^2(a_5b_7 - a_7b_5) + \alpha(a_3b_1 - a_1b_3), \\ &\quad (\alpha(a_6b_5 - a_5b_6) - (a_1b_2 - a_2b_1) + \alpha(a_4b_7 - a_7b_4), \\ &\quad (\alpha(a_5b_1 - a_1b_5) - \alpha^2(a_7b_3 - a_3b_7) + \alpha(a_6b_2 - a_2b_6), \\ &\quad (\alpha(a_7b_2 - a_2b_7) + \alpha(a_3b_6 - a_6b_3) - (a_1b_4 - a_4b_1), \\ &\quad (\alpha(a_1b_7 - a_7b_1) - (a_2b_4 - a_4b_2) + \alpha(a_5b_3 - a_3b_5), \\ &\quad (-(a_3b_4 - a_4b_3) - (a_6b_1 - a_1b_6) - (a_2b_5 - a_5b_2))) \end{aligned}$$

для семимерных векторных алгебр;

$$(ab) = -(\alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 - \alpha^2 b_3a_3)$$

$$\text{и} \quad [ab] = (\alpha(a_2b_3 - a_3b_2), \\ \alpha(a_3b_1 - a_1b_3), \\ -(a_1b_2 - a_2b_1))$$

для трехмерных векторных алгебр;

$$(ab) = -\alpha a_1 b_1$$

$$\text{и} \quad [ab] = 0$$

для одномерных векторных алгебр.

В рассмотренных алгебрах все операции и результаты операций сформулированы в рамках целочисленных значений величин. Скалярное и векторное произведения двух векторов, а вслед за этим все операции над ними (например, смешанное и двойное векторное произведения) также целочисленны, что может представлять интерес для ряда разделов физики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коротков, А.В. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространства /А.В.Коротков, В.С.Чураков.– Новочеркасск: Набла, 2007.–194с.
2. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре [Текст]/Д.К.Фаддеев.–М.: Наука, 1984.–416с.

Приложение VI Коротков А.В. Список научных работ, посвященных трех- и семимерному пространствам

1. Коротков А.В. Векторная алгебра и поля семимерного псевдоевклидова пространства. Деп. рук. ВИНТИ, № 5527-B90.
2. Коротков А.В. Свойства двумерных псевдоевклидовых числовых систем. Деп. рук. ВИНТИ, № 3429-B90.
3. Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996.
4. Коротков А.В., Коротков В.А. Восьмимерное псевдоевклидово пространство-время. Деп. рук. ВИНТИ, № 1577-B91.
5. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в гравитационногироскопном поле четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3775-B91.
6. Коротков А.В., Коротков В.А. Заряд в поле восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1578-B91.
7. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное гравитационногироскопное поле и волны в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3773-B91.
8. Коротков А.В., Коротков В.А. Постоянное поле и волны в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1579-B91.
9. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 46 с.
10. Коротков А.В., Коротков В.А. Теория гравитационногироскопного поля. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 42 с.
11. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения гравитационногироскопного поля четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 3774-B91.
12. Коротков А.В., Коротков В.А. Уравнения поля восьмимерного псевдоевклидова пространства-времени. Деп. рук. ВИНТИ, № 1576-B91.
13. Коротков А.В., Коротков В.А. Элементы семимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Новочеркасский политехнический институт, 1991. – 66 с.
14. Коротков А.В. Семимерное спинорное и векторное исчисления в задачах теории поля. – Новочеркасск: Набла, 1997.
15. Коротков А.В. Элементы трех и семимерного изовекторного и спинорного исчисления. – Новочеркасск: Набла, 1999.
16. Коротков А.В. Мы живем в семимерном мире//Материалы 2-ой Международной научно-технической конференции «Новые технологии управления движением технических объектов». Том 2.- Новочеркасск: НГТУ, 1999.

- 17.Коротков А.В.Гиперкомплексные числа//Проблемы экономики, науки и образования в сервисе: Сб. научн. Трудов/ Под ред. П.Д. Кравченко.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2004.– 251с. (с.236-241).
- 18.Коротков А.В.Представление группы преобразований вращения трехмерного псевдоевклидова пространства индекса два//Проблемы экономики, науки и образования в сервисе: Сб. научн. Трудов/под ред. П.Д. Кравченко.– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 285с.(с.200-201).
- 19.Коротков А.В.Вращения в трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса два// Изучение времени: концепции, модели, подходы, гипотезы и идеи: Сб. научн. тр./ под ред. В.С.Чуракова.(Библиотека времени. Вып 2).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 262с. (с.222-230).
- 20.Коротков А.В.Векторы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса три: Сб. научн.тр./под ред. В.С.Чуракова. (Библиотека времени. Вып 2).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2005.– 262с. (с.231-238).
- 21.Коротков А.В., Чураков В.С. Введение в философию семимерия (анализ пространственной размерности, постановка проблемы, целей и задач исследования) // Интеграл культуры: журнал волгодонских философов и гуманитариев.2005.№3. – (с.38-55).
- 22.Коротков А.В., Чураков В.С. Многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени) // Проблема времени в культуре, философии и науке: Сб.научн. тр./ под ред. В.С.Чуракова.(Библиотека времени. Вып 3).– Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2006.– 155с. (с.15-20).
- 23.Коротков А.В. Элементы составного семимерного векторного исчисления.– Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 39с.
- 24.Коротков А.В. Семимерные полилинейные скалярные функции и формы. – Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 67с.
- 25.Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех – и семимерного векторных исчислений. Новочеркасск: Изд-во «Набла», 2004.– 79с.
- 26.Korotkov A.V. Elements of heptadimensional vector and spinor calculus. – Novocherkassk, NOK, 2000.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цели и задачи, сформулированные во введении и последовательно рассмотренные и проанализированные в главах 1-5, а также в приложениях I-III достигнуты. Результаты сведены в таблицу трёх- и семимерного пространств.

Трёхмерное пространство	
O_3 собственноевклидова трёхмерная группа преобразований (индекса 0)	PO_3 псевдоевклидова трёхмерная группа преобразований (индекса 2)
Семимерное пространство	
Q_7 собственноевклидова семимерная группа преобразований (индекса 0)	PQ_7 псевдоевклидова семимерная группа преобразований (индекса 4)

Результат: Получены три новые группы преобразований: PO_3 , Q_7 и PQ_7 и найдены практические соотношения: Q_7 (Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. с. 204-213); PO_3 и PQ_7 (Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трёх- и семимерного векторных исчислений. с. 45-78). Но это только начальная стадия работ. Продолжение работы связано с рассмотрением четырёхмерного и восьмимерного пространства-времени и, в частности, групп преобразований.

Хотелось бы закончить всё вышесказанное словами из интервью академика Юрия Ивановича Журавлёва журналу «Эксперт»:

«Если разрешите, я вам приведу один пример, правда, придётся употребить несколько терминов. Ещё в девятнадцатом веке один француз и один немец – Бэр и Борель – задумались, как можно классифицировать по сложности законы природы, которые допускают математическое выражение (они, собственно, были математики, поэтому они ставили этот вопрос так, но в данном случае это даже не так важно – вы увидите на самом деле, что результат везде применим). Я это на языке функций расскажу, это проще.

Итак, за нулевой класс сложности были взяты непрерывные функции. Чтобы получить первый класс сложности, применим к ним операцию предельного перехода. Этот первый класс представляет собой множество функций с нигде не плотным множеством точек разрыва первого рода. С ними вроде тоже все понятно – в ряды Фурье можно разложить и так далее. Применим опять к ним операцию предельного перехода – получаются

функции типа так называемой функции Дирихле. Тоже ещё можно жить – интеграл берётся, и вполне с такими функциями современная математика справляется. Спрашивается, если мы будем продолжать операции предельного перехода дальше, то на каком классе мы, наконец, остановимся? Оба математика (на одном математическом языке немец, француз на другом) доказали, что никаким конечным числом количество этих классов сложности не исчерпывается. Но дальше, естественно, возник вопрос: ну с функцией Дирихле понятно, а вот следующие классы сложности, это что за функции? Третий и четвёртый классы ещё как-то состряпали, а с пятым вышел тупик – никто не мог указать ни одной реальной функции пятого класса. Перед самой войной сестра знаменитого Келдыша, Людмила Всеволодовна Келдыш, профессор математики, построила-таки пример функции пятого класса. Описание такой функции заняло книжку. Что отсюда следует? А отсюда следует, что на сегодняшний день человечество использует тонюсенький слой того, что на самом деле существует. Сверхтонюсенький. По существу, если брать все мыслимые законы природы, то те, что мы уже знаем, – это первые несколько шагов. Со времён Ньютона наше точное знание о мире всё ещё остается тонкой пленкой на поверхности океана».¹

¹ Медовников Д. Алгебра высоких технологий //Эксперт. 2003.№30.С.48.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Акаша.....	33	Многочлены Якоби	176
Алгебра Ли	17	Множественность мультивидума	42
Алгебра Мальцева	17	Мультиверс	41
Альтернативные алгебры.....	16	Некоммутативность.....	16
Альтернативные концепции	53	Нелинейное время	13
Антикоммутатор	16	Неолитическая революция	27
Антропогенные ландшафты	13	Неопифагорейский синдром.....	31
Барионное число	28	Общая теория относительности .	32, 36
Бинарная геометрофизика	33	Одномерность	13
Бинарные структуры	13	Одномерная Булева алгебра	180
Биополя.....	13	Октонионы	15
Бозонные поля.....	32	Онтогносеология	19
Брана	13	Параллельные миры	39
Виртуальная психология.....	14	Пифагоровы тройки.....	155, 156, 157
Газодинамика	27	Подалгебра Ли	18
Геометродинамика Уиллера	33	Полиномиальные уравнения	168
Геометрофизика	33	Потенциальность	37
Гидродинамика	27	Потенциология.....	42
Гильбертовы пространства	26	Пространство-время	35
Дао.....	33	Псевдоактонионы	58
Двумерные Булевы алгебры	181	Псевдоевклидово пространство	26
Доминирующая концепция	48	Псевдоевклидово пространство- время Минковского.....	26
Дуальные числа.....	30	Психосемантика.....	14
Евклидовость.....	43	Пятнадцатимерие.....	44, 54, 57
Зазеркальные пространственные структуры.....	39	Седенионы.....	18
Измененные состояния сознания	14	Синергетика	46
Кватернионы	14	Современная натурфилософия	54
Кватернионы Гамильтона.....	27	Супергравитация	17, 33
Коммутативная алгебра Йордана.....	17	Супергруппы	17
Коммутатор	16	Суперструны	42
Коммутаторная алгебра А-лиева.....	17	Теоретическая физика.....	31
Криптология.....	168	Теория прямого межчастичного взаимодействия.....	32
Лептонное число	28	Теория физических структур (ТФС).....	33
Мембрана.....	13	Теория Фоккера-Фейнмана	32
Механика сплошных сред.....	27	Трансперсональная психология	14
Миры Эверетта	41	Трёхмерие.....	14
Многомерие.....	14, 15	Трёхмерные векторные алгебры	15
Многомерность памяти.....	14	Тридцатиодномерие	44, 54, 57
Многомерные Булевы алгебры	180	Универсика.....	42
Многомирие	42	Уравнение Вейерштрасса	154
Многочлены Гегенбауэра	176	Фазовое пространство	34
Многочлены Лаггера.....	31, 176 177	Фермионные поля.....	32
Многочлены Лежандра	176		
Многочлены Эрмита	176		

Философия природы	54	Электричество	38
Фрактальная геометрия	46	n – мерные Булевы алгебры	183
Функциональный анализ	15		
Холотропное дыхание.....	14		
Эволюционная эпистемология.....	14		

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Агафонов А.Ю.	14	Кант И.	10
Аламейду Х.Б.	3	Карнаухов А.В.	26
Александров П.С.	3	Картан Э.	16
Альберт А.	16	Касавин И.Т.	13
Ампер А.М.	54	Келдыш Л.В.	189
Андреев Д.	14	Кемеров В.Е.	9
Ансельм А.А.	54	Киллинг В.	16
Аргин Э.	16	Клейн Р.	3
Арефьева И.	53	Клиффорд В.	38
Аристотель	10	Козлов В.В.	14
Аронов Р.А.	42	Коротков А.В.	7, 12
Архангельский А.В.	3	Коэн П.Дж.	38
Асанов Г.С.	3	Кримсе Я.	16
Бальдус Р.	3	Кросс Л.	52
Баталин И.А.	17	Кузнецов В.Г.	9
Бахтияров К. И.	11	Кузьмин Е.	17
Бескова И. А.	14	Кулаков Ю.И.	26, 33
Борисенко А.И.	3	Кэли А	
Бурдые П.	14	Лаптев.Г.Ф.	
Вайдман Л.	41		16, 29, 50
Варден Б.	17	Ли С.	16
Вейль Г.	17	Лифшиц Мих.	3, 4, 19
Вигнер Ю.	163 17	Мак-Кримон К.	16
Владимиров Ю.С.	3, 13, 15, 26, 32	Максвелл Дж.К.	12, 27
Гамильтон У.	12, 27, 29, 39	Мальцев А.И.	3
Гегель Г.В.Ф.	10	Мах Э.	10, 11, 13, 15
Гейзенберг Г.	17	Менгер	27
Гелл-Манн М.	17, 42	Механик А.	52
Герц Г.Р.	28, 54	Мостепаненко А.М.	10, 11, 28
Гильберт Д.	38	Мостепаненко В.М.	
Грасман Г.	12, 27	Нейман Дж.	1116, 17
Грейвс Дж.	16	Нестеров А.И.	17
Грин М.	17	Нётер Э.	17
Грини Б.	52	Нишиджима К.	17
Гурвиц А.	15	Ньютон И.	9
Делоне Б.Н.	3	Паал Э.	17
Джекобсон Н.	16	Павлов Д.И.	3
Дойч Д.	41	Петров М.К.	11
Евклид.	35, 43	Пифагор	31, 56
Ефимов Н.В.	3	Платон.	10
Журавлев Ю.И.	4, 188	Плотин	37
Зарипов Р.Г.	3	Попов А.С.	54
Ивин А.А.	13	Попов В.Г.	42
Ильенков Э.В.	14	Пуанкаре А.	11, 27
Каган В.Ф.	3	Розендорн Э.Р.	3

Румер Ю.Б.	3, 15	Хокинг Г.	42
Сейгл А		Цорн М.	16
Тарапов И.Е.		Чураков В.С.	8
.....	17	Шапиро Ф. Л.	38
Татароев Я.В.	53	Шварц Дж.	17
Уилер Дж. А.	33	Шилова Г.Е.	3
Уитроу Дж.	11	Широков П.А.	3
Урысон П.С.	27	Шихобалов Л.С.	4
Успенский П.	14	Эверетт Х.	42
Фаддеев Л.	52	Эйнштейн А.	4, 37, 40
Фарадей М.	54	Энгель Ф.	16
Фейнман Р.	42	Эпштейн М.	41
Филлипов В.	17	Яглом И.М.	3
Фок В.А.	15	Якоби К.Г.	
Фробениус Ф.	15		

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	9
Глава 1. Размерность пространства-времени в современном физико-математическом естествознании.....	26
Глава 2. Критический анализ современной парадигмы пространства-времени (в теории относительности — СТО и ОТО, квантовой механике и синергетике)	35
Глава 3. Многомерные концепции пространства и времени (пространства-времени).....	48
Глава 4. Концепции семимерного пространства и восьмимерного пространства-времени	56
Глава 5. Концепции трехмерного и семимерного псевдоевклидовых пространств индекса 2 и 4, а также четырехмерного и восьмимерного пространства- времени индекса 3 и 5	61
Приложение I Коротков А.В. Элементы псевдоевклидоваго трех- и семимерного векторных исчислений	67
Приложение II Коротков А.В. Векторы в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса три... ..	147
Приложение III Коротков А.В	
К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах.....	154
К нахождению решений полиномиальных уравнений второй степени с большим количеством переменных в целых числах	168
Ряды «натуральных» и «целых» многочленов	
Особенности решений полиномиальных уравнений второй степени в целых числах	
Особенности полиномиальных уравнений второй степени с тремя переменными в целых числах	175
Приложение IV Коротков А.В.	
К вопросу классификации натурального ряда чисел	
Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов	
Степенные числа в музыке	
Приложение V Коротков А.В.	
Многомерные Булевы алгебры	
Не булевы алгебры логики	
Многозначные алгебры логики.....	
Многомерные целочисленные алгебры	180
Приложение VI Коротков А.В. Список научных работ, посвященных трех- и семимерному пространствам	186
Заключение	188
Предметный указатель.....	190
Именной указатель	

Научное издание

**Коротков Анатолий Васильевич
Чураков Вадим Сергеевич**

**ТЕОРЕТИКО-ФИЛОСОФСКИЕ АСПЕКТЫ
ТРЕХМЕРНОГО И СЕМИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВ**

Издано в авторской редакции

Подписано в печать 30.11.2007.

Формат 60×90 1/16. Ризография. Усл. п. л. 12,8. Тираж 50 экз.

Подготовлено к печати Учебно-производственным центром «Набла»
Южно-Российского государственного технического университета (НПИ).

Отпечатано в Издательстве ЮРГТУ (НПИ)
346428 Новочеркасск, ул. Просвещения, 132