МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. В. Колесниченко, М. Я. Маров

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ

ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ СРЕД

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2009

УДК 52+51
ББК 22.63в6
К60

Колесниченко А. В.

К60 Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред / А. В. Колесниченко, М. Я. Маров. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 632 с. : ил., [16] с. цв. вкл. — (Математическое моделирование).

ISBN 978-5-94774-899-4

Монография посвящена разработке континуальных моделей турбулизованных природных сред — моделей, лежащих в основе постановок и численных расчетов задач, связанных с образованием, структурой и эволюцией различных астро- и геофизических объектов. Стохастические модельные подходы к соответствующим задачам рассмотрены как отражение процессов самоорганизации в диссипативных открытых системах. Приведены примеры возникновения упорядоченностей в различных космических объектах и природных средах в процессе их эволюции.

Для научных сотрудников, работающих в областях астрофизики, геофизики, планетологии, аэрономии и космических исследований, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

УДК 52+51
ББК 22.63в6

Первый тираж издания осуществлен при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 08-01-07033

Научное издание

Серия: «Математическое моделирование»

Колесниченко Александр Владимирович
Маров Михаил Яковлевич

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ. ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ СРЕД

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художники *С. Инфантэ, Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *М. Ю. Пановым* в пакете $\LaTeX 2_\varepsilon$

Подписано в печать 25.08.09. Формат $70 \times 100/16$.
Усл. печ. л. 52,65. Тираж 600 экз. Заказ В-1252.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

При участии ООО Агентство печати «Столица»

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в типографии ОАО ПИК «Идел-Пресс».
420066, г. Казань, ул. Декабристов, 2.

ISBN 978-5-94774-899-4

Оглавление

Бог Вседержитель на престоле с грозно поднятой рукой:

— Noli turba circuloc meos![1]

Внизу мириады звезд, миров, движущихся по сферам. И Прометей, напрягающий мышцы, чтобы разорвать круг человеческого бытия. И кто-то, сорвавшийся с круга и бешено упадающий в хаос. И грозный, предостерегающий Перст Вседержителя:

— Noil turba circuloc meos!

Из книги Леонида Андреева «S. O. S.»

В механике смысл моделирования реальных тел и явлений с помощью изобретаемых в науке объектов и процессов всем ясен, и все мы хорошо понимаем в этих случаях смысл наших действий. Не принято говорить о том, что «наукой открыты» идеальная несжимаемая жидкость, или абсолютно твердое тело, или идеальное упругое тело. Мы понимаем, что эти объекты — весьма нужные нам и полезные научные изобретения.

Из книги академика Л. И. Седова
«Размышления о науке и об ученых»

Турбулентное движение представляется как очень сложное движение в открытых системах, возникающее из менее упорядоченного движения — «физического хаоса»... Процесс перехода от ламинарного состояния к турбулентному можно считать примером процесса самоорганизации в нелинейной открытой системе.

Из книги Ю. Л. Климонтовича
«Введение в физику открытых систем»

---

[1] «Не мешайте моим кругам» — изречение Архимеда.

Академику
Леониду Ивановичу Седову
посвящается

Предисловие

В книге известного французского ученого Дэвида Рюэля «Случайность и хаос» есть примечательные слова: «Механика родилась из стремления объяснить мир». Справедливость этого высказывания, обращенного к истории науки, приобретает новый глубокий смысл на современном этапе развития естествознания, когда не только происходит симбиоз и тесное переплетение различных дисциплин, но и выявляются фундаментальные основы познания природных закономерностей, носителем которых традиционно служит механика вместе с ее отдельными направлениями и многочисленными приложениями. В частности, классические законы сохранения и формулируемые на их основе дифференциальные уравнения движения, в том числе движения небесных тел, уравнения механики сплошной среды, динамики разреженных многокомпонентных газов и физической кинетики, представляют собой основу разработки разнообразных физических, геофизических и астрофизических моделей, призванных не только объяснить окружающий мир, но и понять истоки его зарождения и эволюции.

Лавинообразный характер накопления знаний о Вселенной, стремительное расширение представлений об окружающих областях пространства вблизи Земли и далеко за ее пределами, обусловленные в первую очередь развитием космических исследований, привели к более глубокому проникновению в физическую сущность процессов и явлений, происходящих в разнообразных природных и космических средах при различных состояниях составляющей их материи. Это вызвало к жизни создание все более усложненных математических моделей подобных сред, чему способствовал громадный прогресс в создании методов математического моделирования и мощных вычислительных комплексов — их архитектуры, производительности и программного обеспечения. На этом пути открываются поистине необозримые возможности познания природы, с которыми связаны перспективы постановок и решения сложных многомерных нестационарных задач гео- и астрофизики и анализа эволюционных процессов на основе проведения широкомасштабных численных экспериментов.

Турбулентность принадлежит к числу весьма распространенных и, вместе с тем, наиболее сложных явлений природы, связанных с возникновением и развитием громадного числа вихрей всевозможных масштабов (организованных вихревых структур) при определенных режимах движения жидкости в существенно нелинейной гидродинамической системе. При потере устойчивости ламинарного течения, определяемой критическим значением числа Рейнольдса, в гидродинамической системе возникает нестационарное пульсационное течение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости и других термогидродинамических параметров в интервале длин волн от минимальных, определяемых диссипативными (вязкими) силами, до максимальных, определяемых границами течения. На условия возникновения завихренности и структурирования развитой турбулентности оказывают влияние как физические свойства среды, такие как молекулярные коэффициенты переноса, с которыми связаны процессы диссипации энергии в турбулентном потоке, так и условия на границе, где наблюдаются тонкие пограничные вихревые слои, неустойчивость которых проявляется в порождении ими вихревых трубок. Турбулизация приводит к быстрому перемешиванию частиц сплошной среды и повышению эффективности переноса массы, импульса и тепла, а в многофазных многокомпонентных средах — также способствует ускорению протекания фазовых переходов и химических реакций. По мере накопления знаний о разнообразных природных объектах, в которых турбулентность играет существенную, а во многих случаях определяющую роль, моделирование этого явления и связанных с ним гидродинамических эффектов приобретает ключевое значение. Вместе с тем, прямое численное моделирование турбулентных течений сопряжено с большими математическими трудностями, а построение общей теории структурированной турбулентности сжимаемой жидкости, из-за сложности механизмов взаимодействия разномасштабных вихревых структур, вряд ли возможно.

В основу монографии положены исследования авторов по ряду направлений космических исследований, природных явлений и по проблемам феноменологического моделирования развитой турбулентности в многокомпонентных смесях реагирующих газов и в гетерогенных газопылевых средах. К ним привело, прежде всего, изучение природных механизмов эволюции Земли и планет Солнечной системы, аккреционных газопылевых протопланетных дисков, изучение процессов турбулентного тепло- и массопереноса в верхних атмосферах планет — разреженных газовых оболочках небесных тел, лежащих в пограничных областях между плотными слоями атмосферы и околопланетным космическим пространством. Исследование турбулентных течений в газовой и газопылевой среде с усложненными физико-химическими характеристиками, при математическом моделировании которых следует учитывать сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств, наличие процессов тепло- и массопереноса, химических реакций и излучения, а также воздействие гравитационных и электромагнитных сил, составляет основной предмет настоящей монографии. Возникающие при этом дополнительные механические эффекты не позволяют, в общем случае, использовать результаты, полученные в рамках традиционного описания турбулентных течений однородной несжимаемой жидкости, используемые, например, в метеорологии. В связи с этим, при изучении природных сред подобного рода, необходима разработка новых подходов к моделированию турбулентности, адекватно описывающих гидродинамические движения сжимаемых смесей, процессы переноса и химическую кинетику в пульсирующем многофазном многокомпонентном континууме. В силу сложности гидродинамической и физико-химической картины турбулентного движения теоретические подходы к решению данной проблемы должны быть по своему характеру «полуэмпирическими».

В монографии упор делается на термодинамическом конструировании континуальных моделей турбулизованных природных сред в космическом пространстве, на основе которых можно, в частности, решать задачи образования и эволюции разнообразных астрофизических и геофизических объектов. К ним относятся в первую очередь модели турбулентных движений многокомпонентных химически активных газов с учетом диффузии, теплопередачи и вязкости и процессов излучения, модели турбулентных движений газовзвесей и различного рода гетерогенных сред с фазовыми переходами, модели структурированных турбулентных течений и турбулентных течений, взаимодействующих с электромагнитным полем.

Книга посвящена, в частности, чрезвычайно злободневной проблеме самоорганизации в природных средах и в первую очередь в развитых турбулентных течениях, что служит отражением наиболее общей концепции соотношения порядка и хаоса в природных процессах. Вынося свой труд на суд специалистов в различных областях знаний, авторы осознают, что развиваемый ими подход является в некоторых аспектах нетрадиционным для механиков, руководствующихся «классическими» мерками. В связи с этим представляет определенный интерес история нового понимания «турбулентности». Впервые публичное обсуждение вопроса об относительной степени упорядоченности ламинарного и турбулентного движений происходило, по-видимому, во время международной конференции «Synergetics 83» в городе Пущино под Москвой. В докладе Ю.Л. Климонтовича был сформулирован общий критерий — так называемая «S-теорема» (к которому мы еще вернемся), характеризующий относительную степень упорядоченности состояний открытых диссипативных систем. Этот критерий был использован докладчиком для количественного доказательства утверждения о большей упорядоченности турбулентного движения по сравнению с ламинарным. Приверженцев этой точки зрения в зале нашлось совсем немного. Среди них были И. Пригожин, Г. Хакен и В. Эбелинг. Любопытно, что во время этого доклада известный гидромеханик Г.И. Баренблатт открыто возмущался: «Все механики прекрасно знают, что турбулентное движение является более хаотическим».

И тем не менее, вопреки традиционной точки зрения механиков на турбулентность, в последнее десятилетие благодаря прогрессивному развитию методов визуального наблюдения турбулизованных течений жидкости было открыто большое число разнообразных вихревых когерентных структур (КС) и надежно установлены их топологические характеристики. В качестве примеров могут быть названы «вихри Тейлора», «турбулентные пятна», «вихревые кольца», «вихревые клубки», «шпилькообразные вихри», «берстинги», «вихревые спирали», «стрики», «структуры Брауна—Томаса», «грибовидные вихри» и т. п. Частота появления той или иной структуры зависит от типа течения (пограничный слой, слой смешения, струя и т. п.), геометрии и режима движения турбулизованной жидкости. Важно выяснить, каким образом могут возникать когерентные структуры подобного рода. Частично на этот вопрос отвечает нелинейная неравновесная термодинамика, принципы которой широко используются в монографии.

Отличительная особенность проведенных авторами исследований заключается в предложенном стохастико-термодинамическом подходе к построению полуэмпирических моделей турбулентности реагирующих многокомпонентных газов, газопылевых сред и структурированной турбулентности однородной жидкости. Основная направленность этих исследований связана с решением ряда сложных современных проблем астрофизики и геофизики, исходя из методов механики сплошных сред. Развитые подходы имеют непосредственное отношение к моделированию механизмов, формирующих свойства астрофизических и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции, исследованию проблем звездной и планетной космогонии, включая образование протопланетных газопылевых аккреционных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, ранние этапы эволюции планет, формирование и эволюцию планетных и кометных атмосфер, а также к привлекающим все большее внимание проблемам экологии, связанных с диффузией загрязнений и охраной окружающей природной среды.

Общая структура книги включает девять глав. Для удобства читателя в Приложении приведены элементы тензорного исчисления. Мы попытались сделать главы книги по возможности независимыми друг от друга, хотя их, естественно, объединяет общая концептуальная направленность.

В *первой главе*, носящей вводный характер, кратко рассматриваются свойства турбулентных течений, элементы стохастической нелинейной динамики и соотношение порядка и хаоса, в том числе синергетические аспекты проблемы формирования упорядоченных структур. Обсуждаются основные представления о турбулентности как о динамической системе. Поскольку в монографии основное внимание уделяется турбулентным течениям природных неоднородных сред с переменной плотностью, то проблема моделирования таких сред приобретает совершенно новые грани. Классические представления о турбулентных движениях в несжимаемой жидкости переплетаются с другими областями механики, которые объединяют гидромеханику смеси, гетерогенную механику, термодинамику, теорию радиационного переноса и кинетику химических реакций. В дополнение к флуктуациям скорости, существенное значение приобретают флуктуации плотности, температуры и концентраций отдельных химических компонентов смеси. В результате мы сталкиваемся с одной из сложнейших проблем механики турбулизованных сред, заключающейся в необходимости полуэмпирического моделирования взаимосвязанных гидродинамических, физико-химических и радиационных процессов и явлений в турбулентном течении.

С позиций стохастической динамики и теории самоорганизации в открытых нелинейных диссипативных системах обсуждается возможность возникновения упорядоченностей в космической среде и при эволюции космических объектов. В качестве примеров рассмотрены вопросы динамической астрономии, динамика Солнечной системы, особенности природы галактик, звезд, планет и малых тел Солнечной системы, вопросы звездно-планетной эволюции, включая формирование аккреционных протопланетных дисков, некоторые проблемы строения и эволюции Вселенной. Это обсуждение, выходящее далеко за рамки более узких проблем турбулентности, которым посвящена монография, служит, с одной стороны, задаче дать примеры упорядоченностей, исходя из современных представлений о космосе и природе населяющих его объектов, а с другой — задаче отразить общность концепции макромолекулярного структурообразования в космических и других природных средах.

Вторая глава, посвященная формулировке общих законов баланса массы, количества движения и энергии в многокомпонентной химически активной газовой смеси, также носит вспомогательный характер и используется в качестве основы для более детального рассмотрения проблем турбулентности, предложенных в последующих разделах монографии. Как известно, наиболее полное и строгое математическое описание многокомпонентной среды в случае регулярного (ламинарного) течения может быть проведено в рамках кинетической теории многокомпонентных смесей многоатомных ионизованных газов. Исходной служит система обобщенных интегро-дифференциальных уравнений Больцмана для функций распределения частиц каждого сорта смеси (с правыми частями, содержащими интегралы столкновений и интегралы реакций), дополненная уравнением переноса радиации и уравнениями Максвелла для электромагнитных полей. Такой подход развит, в частности, в монографии авторов (*Маров*, *Колесниченко*, *1987*), где для получения системы дифференциальных газокинетических уравнений реагирующей смеси применен обобщенный метод Чепмена—Энскога. Наряду с этим, с точки зрения макроскопических свойств, такую многокомпонентную газовую смесь (например, верхнюю атмосферу планеты) можно рассматривать как континуальную среду и для ее адекватного описания воспользоваться методами континуальной механики смесей, позволяющими, исходя из принципов неравновесной термодинамики, получить систему гидродинамических уравнений со всеми необходимыми замыкающими соотношениями. Подобный феноменологический подход позволяет также, при использовании расширенной необратимой термодинамики, разработать полуэмпирические модели турбулентных течений реагирующих газовых сред.

Для изучения процессов переноса массы, импульса и энергии применен формализм классической неравновесной термодинамики, с помощью которого можно, как известно, описать широкий класс неравновесных процессов переноса в газах в полном соответствии с экспериментальными данными. Предложенная здесь методика термодинамического вывода обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии позволяет получить, в частности, целый ряд алгебраических соотношений для коэффициентов переноса, связывающих, например, термодиффузионные отношения с коэффициентами термодиффузии и многокомпонентной диффузии, истинный и парциальный коэффициенты теплопроводности, многокомпонентные и бинарные коэффициенты диффузии. Все соотношения подобного рода, выведенные нами термодинамическим путем, находятся в полном согласии с результатами газокинетической теории многокомпонентных смесей одноатомных газов, полученными в рамках второго приближения метода Чепмена—Энскога. Однако, в отличие от последнего, термодинамический подход не связан с постулированием конкретной микроскопической модели взаимодействия молекул исследуемой природной среды, что свидетельствует о его универсальном характере.

В *третьей главе* дан вывод замкнутой системы осредненных гидродинамических уравнений для турбулизованной многокомпонентной химически активной газовой смеси, предназначенной для описания широкого класса турбулентных движений и физико-химических процессов в природных средах. Проанализирован физический смысл отдельных членов этих уравнений, в том числе скоростей перехода энергии между различными составляющими энергетического баланса. Наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением пульсирующих термогидродинамических параметров, здесь систематически использовано весовое (средневзвешенное) осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись и анализ осредненных уравнений движения химически активных газов с переменными теплофизическими свойствами. Оценивая в целом состояние проблемы замыкания первого порядка, следует признать, что до настоящего времени фактически не существовало общей феноменологической теории турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии для многокомпонентных реагирующих смесей. В связи с этим в этой главе нами рассмотрен термодинамический подход к решению проблемы замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси на уровне моделей турбулентности первого порядка, основанный на использовании методов расширенной необратимой термодинамики. Особое внимание уделено при этом выводу термодинамическими методами замыкающих градиентных соотношений для тензора турбулентных рейнольдсовых напряжений, а также турбулентных потоков тепла и диффузии в многокомпонентной смеси. Онзагеровский формализм позволяет и в этом случае получить наиболее общую структуру подобного рода соотношений, в том числе в виде обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной турбулентной диффузии. На рассматриваемом уровне замыкания эти соотношения наиболее полно описывают турбулентный тепломассоперенос в многокомпонентной среде. Для определения коэффициентов турбулентного обмена использованы как классические представления, восходящие к Прандтлю, Тейлору и Карману, так и более современные модели замыкания второго порядка, основанные, в частности, на дифференциальных уравнениях баланса для турбулентной энергии и интегрального масштаба турбулентности. Для удобства читателя все выкладки проведены весьма подробно и могут быть прослежены во всех деталях

В *четвертой главе* рассмотрена проблема конструирования полуэмпирических моделей турбулентности второго приближения для многокомпонентной химически активной газовой смеси с переменной плотностью и переменными теплофизическими свойствами. Дан вывод замыкающих дифференциальных уравнений переноса для различных одноточечных (одновременных) вторых корреляционных моментов пульсирующих термогидродинамических параметров, входящих в осредненные гидродинамические уравнения реагирующей смеси масштаба среднего движения. Для химически активной среды проблема замыкания в общем случае сильно усложняется из-за необходимости осреднения нелинейных «источниковых членов» производства вещества в химических реакциях, имеющих экспоненциальный характер. Поэтому нами предложена оригинальная процедура осреднения скоростей химических реакций любого порядка и намечена схема полуэмпирического моделирования этих дополнительных корреляций. При моделировании корреляций третьего порядка в уравнениях переноса используются аппроксимирующие выражения, содержащие универсальные эмпирические коэффициенты, которые нет необходимости подбирать заново для каждого нового течения. Следует подчеркнуть, что, несмотря на полуэмпирический характер этих дополнительных уравнений, основанные на них инвариантные модели полностью развитой турбулентности химически активных газов обладают достаточной гибкостью. В частности, они позволяют учесть воздействие механизмов конвекции, диффузии, возникновения, перераспределения и диссипации стохастических турбулентных характеристик поля пульсирующих термогидродинамических параметров на пространственно-временное распределение осредненных термогидродинамических параметров среды. Развитый нами подход нашел широкое применение при численном моделировании реальных режимов течения реагирующей турбулизованной жидкости, для которых существенно влияние предыстории потока на характеристики турбулентности в точке. С другой стороны, он использован для вывода более точных алгебраических соотношений для коэффициентов турбулентного переноса в течениях многокомпонентной смеси с поперечным сдвигом (в том числе применительно к специфике моделирования природных сред), что нашло отражение в данной главе книги.

Пятая глава посвящена разработке феноменологической модели развитой турбулентности в сжимаемой однородной среде с учетом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. Исходной концепцией служит представление турбулизованного движения жидкости в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух континуумов — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемого, в свою очередь, как конгломерат вихревых структур различных пространственно-временных масштабов. Развиваются представления о неравновесно-стационарном состоянии диссипативно активной подсистемы турбулентного хаоса, возникающем вследствие притока негэнтропии от внешней среды (подсистемы осредненного движения) и появлении в системе относительно устойчивых когерентных вихревых структур при изменении параметров, управляющих режимом течения. Это позволяет рассматривать некоторые процессы перестройки турбулентного поля как процессы самоорганизации в открытой системе. Методами стохастической теории необратимых процессов и расширенной необратимой термодинамики получены определяющие соотношения для турбулентных потоков и сил, которые замыкают систему осредненных гидродинамических уравнений и с достаточной для практики полнотой описывают процессы переноса и самоорганизации в неравновесно-стационарном случае.

Развитый нами оригинальный подход стохастико-термогидродинамического моделирования подсистемы турбулентного хаоса основан на введении в модель набора случайных величин — пульсирующих внутренних координат (типа скоростей диссипации турбулентной энергии, собственных завихренностей поля пульсаций скорости, относящихся к мезомасштабным вихревым образованиям и т. п.), характеризующих структуру и временную эволюцию флуктуирующего поля гидродинамических параметров течения. Это дает возможность термодинамическими методами смоделировать каскадный процесс Ричардсона—Колмогорова и вывести также кинетические уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), предназначенные для описания эволюции функции распределения вероятности мелкомасштабных характеристик турбулентности. Эти уравнения служат, в частности, основой при анализе марковских диффузионных процессов перехода в пространстве внутренних координат из одного стационарно-неравновесного состояния в другое в результате последовательной потери устойчивости (росте надкритичности) подсистемой турбулентного хаоса, далекого от полного хаоса термодинамического равновесия. Подобные переходы могут быть описаны как неравновесные «фазовые переходы второго рода» в вихревом континууме, в результате чего внутренние координаты в бифуркационных точках меняются скачкообразно.

Здесь же рассмотрен альтернативный метод к исследованию механизмов подобного перехода, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа, тесно связанных с выведенными кинетическими уравнениями ФПК. Проанализирована кардинальная проблема развиваемого подхода — возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний подсистемы турбулентного хаоса. Предложен неравновесный термодинамический потенциал для стохастических внутренних координат турбулентного хаоса, обобщающий известное соотношение Больцмана—Планка для равновесных состояний на стационарно-неравновесные состояния представляющего хаос ансамбля, и показано, что этот потенциал является функцией Ляпунова для стационарно-неравновесных состояний ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Последний, третий, параграф этой главы посвящен термодинамическому выводу обобщенных дробных уравнений ФПК, описывающих процессы эволюции внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса на основе дробной динамики. Введение дробных производных по времени в кинетическое уравнение ФПК позволяет учесть в контексте единого математического формализма эффекты перемежаемости во времени, с которой обычно связывают наличие турбулентных всплесков на фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний фоновой турбулентности.

В *шестой главе* доказана так называемая H-теорема для энтропии Кульбака, из которой следует, что при известных предположениях всякое начальное распределение вероятностей внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса по истечении достаточно большого времени асимптотически стремится к определенному стационарному состоянию. Здесь продемонстрирована принципиальная возможность самоорганизации в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса (т. е. возникновения упорядоченных диссипативных структур, обладающих более низкой симметрией, чем исходное состояние), когда в процессе временной эволюции квазиравновесной вихревой подсистемы возможно генерирование когерентных структур, связанное с эффектом неравновесных фазовых переходов, индуцированных мультипликативным шумом в системе хаоса. Показано, что если интенсивность мультипликативного шума хаоса достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности, описывающей стационарное поведение стохастической вихревой системы и по числу, и по положению существенно отличаются от стационарных состояний соответствующей детерминированной системы. Более того, мультипликативный шум может приводить к возникновению новых стационарных состояний и тем самым изменять и сами свойства (в частности, бифуркационные диаграммы) локальной устойчивости хаоса: точки перехода могут сдвигаться под влиянием интенсивного шума в турбулентной жидкости.

Исходя из общей концепции рождения когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса (вследствие индуцированных мультипликативным шумом хаоса неравновесных фазовых переходов), в этой главе рассмотрен также один из конкретных механизмов формирования и эволюции мезомасштабных вихревых структур, связанный с явлением фазово-частотной синхронизации автоколебаний той части внутренних координат, которая относится к когерентной составляющей хаоса. Кроме этого, изучены некоторые сценарии динамического влияния некогерентной составляющей (мелкозернистого флуктуационного поля) турбулентного хаоса на образование и эволюцию вихревых структур. Показана взаимосвязь подобных переходов с процессом самоорганизации кластеров, обладающих более низкой симметрией, чем исходное состояние. В частности, сделан важный вывод о том, что, в то время как в классической турбулентности рост размеров твердых частиц при столкновениях затруднен, внутри подобных диссипативных упорядоченностей может, наоборот, происходить их объединение и укрупнение. Другими словами, возникновение вихревых кластеров облегчает, например, решение кардинальной проблемы эволюции аккреционных дисков — проблемы укрупнения твердых частиц за счет соударений даже при относительно небольших скоростях, что встречает очевидные затруднения при попытках воспроизведения аналогичных процессов в лабораторных экспериментах, о чем говорится в главе 1.

В *седьмой главе* наше внимание сосредоточено на одной из фундаментальных проблем геофизики и астрофизики — формировании протопланетных аккреционных дисков у звезд поздних спектральных классов, частным случаем которых является происхождение Солнечной системы. Особое внимание уделено разработке полуэмпирического подхода к моделированию гетерогенной турбулентности в аккреционном диске, окружавшем прото-Солнце на ранней стадии его существования, с целью уменьшения допущений в используемых моделях. Сформулирована полная система уравнений двухфазной многокомпонентной механики с учетом относительного движения фаз, процессов коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Она предназначена для схематизированных постановок и численного решения конкретных модельных задач по взаимосогласованному моделированию структуры, динамики, теплового режима и химического состава околосолнечного диска на разных этапах его эволюции. Процессы в дисковой среде рассматриваются при наличии развитых турбулентных движений коагулирующей газовзвеси, способствующих в рамках данной модели формированию пылевого субдиска, возникновению в нем гидродинамической и затем гравитационной неустойчивости, с последующим образованием пылевых кластеров.

С целью адекватного феноменологического описания турбулентных течений вещества газопылевого диска, проведено теоретико-вероятностное осреднение по Фавру стохастических уравнений гетерогенной механики и получены определяющие градиентные соотношения для турбулентных потоков межфазной диффузии и тепла, а также для тензоров «относительных» и рейнольдсовых напряжений, необходимые для замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения. Исследовано влияние инерционных эффектов пылевых частиц на характеристики турбулентности в диске, в частности, на дополнительную генерацию турбулентной энергии крупными частицами в окрестности экваториальной плоскости прото-Солнца. Предложен полуэмпирический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости в двухфазной дисковой среде с учетом обратных эффектов переноса диспергированной фазы и тепла на развитие турбулентности с целью моделирования неоднородной по высоте термогидродинамической структуры субдиска и окружающего его газа.

Для установившегося режима движения при осаждении твердых частиц к центральной плоскости диска под действием ускорения силы тяжести исследован параметрический метод моментов решения интегро-дифференциального уравнения коагуляции Смолуховского для функции распределения частиц по размерам, который базируется на априорной принадлежности искомой функции распределения к определенному параметрическому классу распределений. Наряду с этим, проанализирован возможный «режим предельного насыщения» атмосферы субдиска мелкодисперсными частицами пыли, благодаря которому интенсифицируются различные механизмы коагуляции в турбулизованной среде. Результаты этой главы открывают возможности создания усовершенствованных (и более приближенных к реальности) моделей звездно-планетной космогонии, обеспечивая тем самым новый подход в решении фундаментальной проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы и планетных систем у других звезд.

В *восьмой главе* исследована проблема гидродинамической спиральности и, в частности, влияние спиральности на эволюцию дисковой турбулентности. В ней показано, что относительно длительное затухание турбулентности в диске связано с отсутствием отражательной симметрии (относительно экваториальной плоскости) анизотропного поля турбулентных скоростей. Сформулирована концепция возникновения энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности. Показано, что вследствие энерговыделения обратный каскад порождает иерархическую систему уплотнений вещества с фрактальным распределением плотности, инициирующих, в конечном счете, механизмы триггерного кластерообразования. В свою очередь, образование вихревых сгущений приводит к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами вещества, в результате чего возможно самопроизвольное возникновение и рост пылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов тепло- и массообмена между различными областями дисковой гетерогенной среды и существенная модификация спектра колебаний (волн плотности). Обсуждаются влияние спиральности на энергетический каскад во вращающемся диске и отрицательная вязкость (порождаемая каскадом спиральности в дисковой турбулентности, когда осуществляется инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным), для описания которой используется феноменологический подход. Приведены соотношения сдвиговой и вращательной вязкости в турбулентном диске.

Наконец, в заключительной *девятой главе*, также применительно в основном к проблеме звездно-планетной космогонии, рассмотрена проблема реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака с учетом электродинамических эффектов. В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики получена замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования сдвиговых и конвективных турбулентных течений электропроводных сред в присутствии магнитного поля. Эти уравнения могут использоваться для численного решения задач по взаимосогласованному моделированию мощных турбулентных течений космической плазмы в аккреционных дисках и в связанных с ними коронах, в которых магнитное поле существенно влияет на динамику происходящих астрофизических процессов. При разработке модели проводящей турбулизованной среды, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением МГД уравнений, систематически использовано также весовое осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись осредненных уравнений движения для сжимаемой электропроводной жидкости и анализ механизмов усиления макроскопических полей турбулентными течениями. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса плазмы и поля, получены различные уравнения энергии, позволяющие прослеживать возможные переходы энергии из одной формы в другую, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию.

Особое внимание уделено методу получения в рамках расширенной необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учетом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений в электропроводной среде и турбулентной электродвижущей силы (магнитного тензора Рейнольдса), что позволяет проанализировать также ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса. Предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, в частности, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, позволяющая учитывать влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в дифференциально вращающемся электропроводном аккреционном диске.

Из приведенного краткого обсуждения содержания исследований, которым посвящена монография, с очевидностью следует ее четкая направленность на решение проблем, традиционно относимых к сфере интересов астрофизики и геофизики, методами механики. Оставляя в стороне дискуссионный вопрос относительно весьма искусственного деления науки на «разделы» и «направления», заметим лишь, что достоинства и преимущества выбранного подхода оправданы, если они обеспечивают разработку моделей, наиболее полно и адекватно отражающих изучаемую природную среду. Это в полной мере относится к космическим объектам, не доступным прямым методам исследований, и проблемам их эволюции, таким, например, как газопылевые турбулизованные аккреционные диски в качестве основы формирования планетных систем. Исходя из этих соображений, предлагаемую вниманию читателя монографию можно рассматривать как теоретическую основу для численного моделирования широкого класса явлений, в которых определяющую роль играет механика неоднородных (многокомпонентных, многофазных) и структурированных турбулентных сред, широко распространенных в природе. Еще раз подчеркнем, что существенной составной частью этих исследований является развиваемый авторами на протяжении многих лет принципиально новый стохастико-термодинамический подход к моделированию развитых турбулентных течений и структурированной турбулентности гео- и астрофизических систем, рассматриваемых с позиций стохастической динамики открытых диссипативных систем. Совершенно естественно поэтому, что исследование турбулентных течений на разных уровнях описания этого явления, как характерного примера неравновесности в нелинейной динамике, явилось тем стержнем, вокруг которого построено изложение в монографии.

Книга представляет собой совместный труд обоих авторов. Мы считаем необходимым отметить, что на ее написание, как и на наши собственные работы по проблемам механики космических природных сред, глубокое влияние оказали обсуждения ряда ключевых проблем с Леонидом Ивановичем Седовым. Многие его идеи по проблемам построения моделей сплошных сред с усложненными физико-химическими и тепловыми свойствами, в частности по проблемам моделирования многофазной многокомпонентной гидромеханики и многокомпонентных турбулентных сред, мы постарались отразить в настоящей монографии.

Материалы глав 2—9 целиком основаны на оригинальных исследованиях авторов, и результаты этих исследований используются в разрабатываемых ими совместно с коллегами и учениками численных моделях. Часть результатов была ранее опубликована в статьях, приведенных в списке литературы, и в монографиях: «Введение в планетную аэрономию» (М. : Наука, 1987); «Турбулентность многокомпонентных сред» (М. : Наука-Интерпериодика, 1998); «Mechanics of Turbulence of Multicomponent Gases» (ASSL series, v. 269, Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2001) и «Astrophysical Discs» (Eds. A. M. Fridman, M. Ya. Marov, and I. G. Kovalenko, ASSL series, v. 337, Springer, 2006).

Авторы хорошо осознают, что далеко не все вопросы в той обширной проблематике, которой касается монография, им удалось осветить с одинаковой степенью полноты. Это в первую очередь связано с тем, что, несмотря на определенные успехи, достигнутые за последние годы в изучении столь сложной области, как турбулентность и, особенно, турбулентность неоднородных сред и структурированная турбулентность, многое еще остается неясным, а возникающие математические трудности часто представляются непреодолимыми. Недостаточно также изучены и физико-химические характеристики космической среды, с которыми непосредственно связано наблюдаемое своеобразие аккреционных дисков, особенно их структурообразующие механизмы и эволюция, в том числе эволюция протопланетных систем, формирование специфических природных условий на планетах и их спутниках. Ключевую роль в понимании этих природных механизмов самоорганизации призвано сыграть, в частности, развитие теории структурированной турбулентности. Это своего рода вызов времени, ответы на который, по нашему мнению, могут быть получены лишь в рамках определенных ограничений.

В связи с этим, необходимы разработки новых оригинальных подходов, позволяющие эффективно моделировать турбулентную динамику при описании сложных явлений природы, в частности космических сред, и именно эту цель мы поставили перед собой в своих исследованиях. С подобной концепцией полностью солидарен известный американский ученый из Ливерморской лаборатории A. C. Buckingham, который в своей рецензии на упомянутую выше нашу книгу «Mechanics of Turbulence of Multicomponent Gases» отметил, что на данном этапе полезнее разрабатывать «...модель, позволяющую рассчитать, как турбулентность влияет на сопутствующие физические процессы, нежели сосредотачиваться на более глубоком понимании сути турбулентности — цели, которая при всей ее академической притягательности чревата потенциальными разочарованиями» (Appl. Mech. Rev. V. 56. No. 1. 2003).

Авторы надеются, что их новая книга будет с интересом встречена широким кругом специалистов в области астрофизики, геофизики, механики и космических исследований. Астрофизики, геофизики, планетологи найдут в ней достаточно глубокое обоснование с позиций механики теоретических подходов и методов математического моделирования турбулентности, используемых при описании различных природных и космических сред, в частности широко распространенных в космосе дисковых структур, а механики — новую быстро прогрессирующую область знаний и возможность приложения фундаментальных разделов этой науки к захватывающим перспективам проникновения в самые сокровенные тайны природы. Все критические замечания по содержанию книги будут приняты с благодарностью.

Написанию монографии и улучшению ее содержания способствовали многочисленные обсуждения затрагиваемых вопросов с нашими коллегами из разных организаций. Мы хотели бы, в первую очередь, выразить благодарность А. М. Фридману, Э. М. Галимову, А. Б. Макалкину, В. И. Марону, И. С. Веселовскому. Выражаем также признательность К. К. Мануйлову за помощь при подготовке электронной версии монографии. Публикация книги стала возможной благодаря финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 08-01-07033), за что авторы выражают свою признательность.

Январь 2008 г.

А. В. Колесниченко,
М. Я. Маров

Глава 1

Турбулентный хаос и самоорганизация в космических и природных средах

В монографии обсуждаются вопросы динамики природных объектов, в структуре которых в процессе эволюции может происходить внутренняя самоорганизация и из первоначальных хаотических движений возникают упорядоченности. Они могут быть подвержены временным и пространственным вариациям, либо сохранять устойчивость в течение длительного времени. Упорядоченные структуры повсеместно окружают нас на Земле, многочисленные примеры самоорганизации наблюдаются в космосе. В окружающем мире широко распространены турбулентные течения, которые характеризуются большим разнообразием динамических процессов. На проблемах макроскопического моделирования такого рода природных течений и будет, в основном, сосредоточено наше внимание.

Турбулентность представляет собой широко распространенное и чрезвычайно сложное физическое явление, связанное с пульсационным движением жидкости, которое присутствует в разнообразных технических системах и в природных средах. Характерными примерами турбулизованных космических природных сред являются атмосферы планет Солнечной системы, в том числе внешние газовые оболочки этих небесных тел, лежащие в пограничных областях между атмосферой и космосом. Развитая турбулентность играет также важную роль в формировании структуры и свойств астрофизических объектов — галактик и звезд на разных этапах эволюции, а также протопланетных облаков и аккреционных дисков, служащих основой космогонических моделей. Многочисленные экспериментальные исследования специфических особенностей турбулентных движений жидких и газообразных сред и ключевых механизмов, определяющих их природу, выполненные в настоящее время, создают необходимые предпосылки для разработки теоретических подходов с целью создания адекватных математических моделей данного явления.

Следует отметить, что, несмотря на более чем вековую историю развития, теория гидродинамической турбулентности все еще далека от своего завершения. Продолжают появляться все новые и новые статистические и феноменологические подходы к ее изучению. Растет число различных математических моделей, разработанных для лучшего понимания проблемы возникновения и эволюции турбулентных движений однородной жидкости (классическая теория турбулентности) и жидкостей с усложненными физико-химическими и тепловыми свойствами. Исходя из представлений о коэффициентах турбулентного обмена для различных переносимых субстанций, развиваются многочисленные полуэмпирические (инженерные) модели турбулентности, предназначенные для решения практических задач на основе проведения широкомасштабных численных экспериментов. Познакомить читателя с некоторыми важными идеями, движущими этот прогресс, продемонстрировать возможности современных феноменологических подходов к моделированию гидродинамической турбулентности, в частности структурированной турбулентности, и отметить отдельные проблемы, пока не разрешенные, — вот задача, которую поставили перед собой авторы предлагаемой книги.

В этой главе, носящей вводный характер, обсуждаются базовые положения классической теории турбулентности однородной жидкости, а также структурные свойства турбулентного движения, позволяющие интерпретировать переход от ламинарного течения (менее упорядоченного) к турбулентному течению (более упорядоченному) как процесс самоорганизации в открытой диссипативной системе. Проанализированы возможные подходы к макроскопическому моделированию турбулентных движений, вопросы стохастической нелинейной динамики и соотношение турбулентности и хаоса, в том числе синергетические аспекты проблемы возникновения и эволюции упорядоченных вихревых структур в развитых турбулентных потоках. Наряду с этим, приведены примеры турбулизованных космических и природных сред, для которых, собственно, и сконструированы феноменологические модели, рассмотренные в монографии.

Одновременно, основываясь на элементах стохастической динамики, мы попытались дать общие представления о соотношениях упорядоченности и хаоса в динамических системах, характерными примерами которых служат разнообразные природные и космические среды. С целью лучшего понимания таких сред нам представлялось необходимым хотя бы вкратце познакомить читателя с космическим окружением собственной планеты и сформировавшимися на других небесных телах уникальными природными комплексами, многие из которых можно рассматривать как отражение процессов самоорганизации на длительном пути эволюции. Этой же цели, более тесно отвечающей исследуемой предметной области, служит подробное рассмотрение в гл. 7—9 оригинальных подходов к созданию моделей протопланетных аккреционных дисков, как одного из важнейших элементов эволюции звезд и газопылевых облаков, из которых формируются планетные системы. Комплексное моделирование таких сложных космических объектов, с учетом специфики процессов переноса в гетерогенных турбулентных средах, влияния магнитогидродинамических эффектов и космохимических ограничений, открывает перспективы получения ответов на самые фундаментальные вопросы космогонии и эволюции Вселенной.

§ 1.1. Турбулентное движение жидкости. Общие положения

Все течения сжимаемых жидкостей и газов делятся на два резко различных типа: спокойное и плавное течение, называемое ламинарным, и их противоположность — так называемые турбулентные течения, при которых гидродинамические и термодинамические характеристики жидкости (скорость, температура, давление, массовая плотность, концентрации химических компонентов, показатель преломления среды и т. д.) испытывают хаотические пульсации и потому крайне нерегулярно изменяются в пространстве и во времени. Многочисленные примеры записи флуктуаций (с разными периодами и амплитудами) термогидродинамических параметров, которыми изобилует специальная литература по турбулентности, иллюстрируют сложную внутреннюю структуру реальных турбулизованных течений, резко отличающихся в этом отношении от спокойных ламинарных течений. Благодаря образованию многочисленных вихрей всевозможных размеров, турбулентные течения обладают повышенной способностью к переносу количества движения, энергии и массы элементарных жидкостных объемов, что приводит как к увеличенному силовому воздействию на обтекаемые твердые тела, так и к интенсивным тепло- и массообмену между отдельными слоями течения, к ускоренному протеканию химических реакций и т. п. Турбулентный режим движения жидкости (внешне неупорядоченный) возникает при потере устойчивости ламинарного течения, когда безразмерное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = UL/\nu$ (где U и L — характерные скорость и линейный масштаб течения, ν — молекулярная кинематическая вязкость) превосходит некоторое критическое значение Re_{cr}. Безразмерное число Re, отражающее соотношение инерционных и вязких сил в потоке, является самой общей характеристикой турбулизованной жидкости. Турбулентные движения всегда диссипативны, поэтому они не могут поддерживаться сами по себе, а должны черпать энергию из окружающей среды. Возникновению турбулентного режима движения ламинарной жидкости обычно предшествует возбуждение колебаний одной или нескольких независимых частот f и их гармоник (иногда и субгармоник). Турбулентность возникает либо в результате роста малых возмущений в ламинарном потоке, либо вследствие конвективной неустойчивости движения. В первом случае энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии крупномасштабных сдвиговых течений, во втором — из потенциальной энергии неравномерно нагретой жидкости в гравитационном поле.

Турбулизация движения является характерной особенностью многих природных явлений, в которых происходят гидродинамические процессы, сопровождаемые переносом массы, импульса и энергии. Всевозможные эффекты ее проявления наблюдаются на пространственно-временных масштабах от сантиметров до мегапарсеков. Таковы, например, разнообразные гидродинамические процессы в земной атмосфере и гидросфере, в атмосферах и недрах звезд и планет, в межзвездных газопылевых облаках (планетарных туманностях и протопланетных дисках), в галактической и межгалактической средах, в космической плазме (магнитогидродинамическая, или плазменная турбулентность). Преимущественно турбулентными являются метеорологические процессы, включающие взаимодействие океана с атмосферой, испарение с водных поверхностей, вертикальный и горизонтальный перенос тепла и интенсивное перемешивание примесей (в том числе загрязнений). Турбулентность возникает также во многих технических устройствах при движении жидкости, газа или плазмы, в частности в пограничных слоях и спутных следах при обтекании твердых тел, в струйных течениях и в слоях смешения, в течениях в каналах и трубах, при вихревом возбуждении колебаний механических и акустических колебательных систем (так называемые эоловые тона), в плазменных пучках и т. д.

1.1.1. Физическая природа турбулентности и сценарии ее возникновения

Сделаем, прежде всего, несколько общих замечаний о физической природе турбулентности, возникающей при определенных условиях в нелинейной диссипативной жидкой или газообразной среде с очень большим числом степеней свободы, которая может обмениваться с окружающей средой энергией. При наличии турбулентности в жидкости возбужденным всегда оказывается огромное число степеней свободы, в результате чего изменение во времени и пространстве любой гидродинамической величины описывается функциями, содержащими громадное число компонент Фурье, т. е. имеющими очень сложный характер. Именно по этой причине каждая индивидуальная жидкая частица (т. е. малый элемент объема жидкости, содержащий очень большое число молекул) такой системы движется внешне сложным, запутанным образом, так что ее координаты и направление движения изменяются со временем по законам стохастической механики. Корреляции скорости в любой точке потока ограничены при этом малыми временными интервалами, зависящими от начальных условий, за пределами которых невозможно установить причинную связь между полем скоростей в различные моменты времени, в том числе корреляцию с предшествующим движением. Все это подкрепляет представление о стохастическом характере пульсаций скорости и других физических параметров в турбулентном потоке, которые возникают как результат потери устойчивости ламинарного движения гидродинамической системы при изменении внешних управляющих параметров (например, числа Re). С этой точки зрения турбулентное движение является более хаотическим, чем ламинарное, т. е. турбулентность отождествляется с хаосом.

В более общем смысле турбулизацию движения жидкости или газа можно представить как результат изменения топологии фазовых траекторий, приводящего к перестройке аттракторов и качественному изменению (бифуркации) состояния движения в фазовом пространстве. Отражением стохастической природы турбулентности служит полное перемешивание фазовых траекторий с различным асимптотическим поведением и структурой (топологией) окружающих их областей притяжения (аттракторов). Признаком перемешивания является быстрое затухание корреляционных функций на больших временах и непрерывность частотных спектров. Такое поведение траекторий в фазовом пространстве означает, что система обладает эргодичностью, то есть почти для всех реализаций случайного поля временные средние равны соответствующим статистическим средним

$$\langle \mathscr{A}(\boldsymbol{r}) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)\, dt, \tag{1.1.1}$$

где угловыми скобками далее везде будем обозначать среднее по ансамблю реализаций. Эргодическое свойство, по-видимому, является одной из характерных черт стационарного однородного мелкомасштабного турбулентного поля (см., например, *Кампе де Ферье, 1962*).

Полное статистическое описание турбулентного движения сводится к определению вероятностной меры на его фазовом пространстве, состоящем из всевозможных случайных реализаций, характеризующих состояние гидродинамических полей. Поэтому наиболее адекватным в теории турбулентности представляется статистическое описание, опирающееся на изучение специфических статистических закономерностей, присущих большим совокупностям однотипных гидродинамических систем. Основой для описания турбулизованной среды является статистическая гидромеханика, изучающая статистические свойства ансамблей течений жидкостей или газов, находящихся в макроскопически одинаковых внешних условиях (см., например, *Монин, Яглом, 1965*). Таким образом, проблема феноменологического моделирования развитой турбулентности природных сред, которой посвящена данная книга, состоит в выделении некоторых средних характеристик, адекватно описывающих свойства системы с огромным числом степеней свободы. Именно по этой причине такой подход связан с тем или иным способом ограничения числа степеней свободы.

Итак, турбулентность является одной из форм проявления разнообразия движений в открытых механических системах, обладающих очень большим числом степеней свободы и высокой степенью нелинейности. В системах такого рода с ростом некоторого управляющего параметра возникают хаотически распределенные и хаотически осциллирующие структуры самого различного масштаба. Поэтому долгое время турбулентность ассоциировалась с воплощением чистого хаоса. Вместе с тем, как теперь стало ясно, в развитом турбулентном потоке существуют элементы порядка, когда на фоне мелкомасштабного пульсирующего движения жидкости могут зарождаться упорядоченные пространственно-временные образования, так называемые когерентные вихревые структуры (см., например, *Таунсенд, 1959*; *Кантуэлл, 1984*; *Белоцерковский, 1997*; *Климонтович, 2002*). По этой причине, если возникновение гидродинамической турбулентности характеризует переход от порядка к хаосу, то в развитом турбулентном потоке (когда $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$) имеет место также и обратный процесс — рождение порядка из хаоса, о чем будет подробнее сказано ниже.

В книге рассмотрены в основном проблемы моделирования развитой турбулентности, возникающей при достаточно больших числах Рейнольдса Re. Однако в ходе изложения материала, особенно связанного с проблемой моделирования структурированной турбулентности, нам часто придется обращаться к тем или иным сценариям возникновения турбулентности. Сразу же отметим, что единого механизма перехода к турбулентному хаосу в различных типах гидродинамических течений в настоящее время еще не найдено. Напомним здесь очень кратко известные четыре механизма перехода ламинарного течения к турбулентному при достижении числом Рейнольдса критического значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$. Более глубокое изложение этого вопроса приведено в п.п. 30—32 третьего переработанного издания «Гидродинамики» Ландау и Лифшица (*1988*), к которому мы и отсылаем заинтересованного читателя. За исключением самой ранней гипотезы Ландау, все другие механизмы связаны с конечномерными моделями турбулентности, причем имеющиеся на сегодня опытные данные не позволяют сделать окончательного выбора между ними, поскольку в экспериментах, как правило, присутствуют черты разных механизмов.

Сценарий перехода к турбулентности по Ландау и Хопфу

Картина возникновения турбулентности, предложенная Ландау (см. *Ландау, Лифшиц, 1944*), а затем независимо Хопфом в 1948 году (см. *Marsden, McCracken, 1988*), основана на представлении об иерархии квазипериодических движений. При значениях $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ возмущения затухают со временем. При увеличении числа Re, после достижения им критического значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$, возмущения, наоборот, нарастают, стационарное ламинарное движение жидкости (образом которого в фазовом пространстве служит предельная точка) становится периодическим (рождается предельный цикл — аттрактор, имеющий определенную область притяжения в пространстве состояний) с некоторой частотой колебаний f_1. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса и достижении им второго порога неустойчивости Андронова—Хопфа этот периодический режим, в свою очередь, теряет устойчивость, появляется вторая частота f_2, несоизмеримая с f_1 (когда f_1/f_2 — иррациональное число). Потеря устойчивости периодическим движением сопровождается определенной качественной перестройкой в пространстве состояний (бифуркацией Андронова—Хопфа) поведения траекторий в окрестности ставшего неустойчивым предельного цикла. В результате дальнейшего процесса дестабилизации все большего числа колебательных мод возникает сложный и запутанный квазипериодический режим движения жидкости с набором в общем случае несоизмеримых частот $f_1, f_2, \ldots, f_r, \ldots$. Этот режим при достаточно больших r воспринимается как турбулентный. Соответствующий аттрактор турбулентного движения является инвариантным тором T^r в пространстве состояний достаточно большой размерности r. Спектр мощности Фурье здесь остается дискретным. Хотя движение системы приобретает сложный и запутанный характер, присущие реальной турбулентности непрерывный спектр и хаотизация течения возникают лишь при бесконечном числе бифуркаций Андронова—Хопфа. Однако такой сценарий, согласно современным представлениям, не вполне соответствует реальному положению вещей: уже система с тремя степенями свободы дает сплошной спектр Фурье, что является признаком ее хаотического движения. Как показали опыты (в частности, связанные с конвекцией Бенара), хаотический режим движения вязкой жидкости наступает сразу уже после появления двух основных частот.

Сценарий процесса хаотизации движения жидкости Рюэля—Такенса. Странный аттрактор

Значительно более короткий, чем у Ландау, сценарий Рюэля—Такенса (*1971*) возникновения гидродинамической турбулентности также опирается на понятие бифуркации Андронова—Хопфа, в результате которой рождается предельный цикл из неподвижной точки, а в системе появляется новая несоизмеримая с предыдущей частота колебания, отсутствующая в ней ранее. Согласно этому механизму, сначала происходят две последовательные бифуркации Андронова—Хопфа, как и в модели Ландау, однако затем, благодаря нелинейности системы, трехчастотное движение становится неустойчивым, разрушается и переходит в хаотическое движение на странном аттракторе[1], отвечающем полному заполнению спектра Фурье.

Странным аттрактором принято называть топологически отличный от тора аттрактор, притягивающий при $t \to \infty$ все множество принадлежащих ему неустойчивых траекторий в пространстве состояний диссипативной системы. Среди них могут быть не только неустойчивые циклы, но и незамкнутые траектории бесконечно блуждающие внутри ограниченной области многомерного пространства состояний, не выходя из нее. Это особое свойство странного аттрактора дополняется еще и чувствительной зависимостью хаотического движения от малого изменения начальных условий (ЧЗНУ). Это означает, что близкие траектории расходятся экспоненциально. Иными словами, система должна «забывать» о начальных условиях благодаря наличию малых возмущений. Именно такое сложное, нерегулярное поведение траекторий в фазовом пространстве и ассоциируется с хаосом, т. е. турбулентным движением жидкости.

Остановимся еще на некоторых свойствах странного аттрактора, связанных с его геометрической структурой. Характерной особенностью этого множества точек является масштабная инвариантность, состоящая в том, что при увеличении размера некоторой подобласти странного аттрактора получается геометрический объект, сходный по своей структуре с целым аттрактором. Подобного рода объекты в физике называются скейлинговыми структурами, а в математике геометрической моделью самоподобной структуры является фрактал. Для практических целей важно найти такую топологическую характеристику, описывающую степень сложности подобного множества точек, которая позволила бы охарактеризовывать степень хаотизации движения, различать движение с перемешиванием от просто эргодического движения и т. п. Такой количественной характеристикой фрактала является его размерность Хаусдорфа—Безиковича (см., например, *Шредер, 2001*). Заметим, что поскольку речь здесь идет о диссипативных системах, в которых объем в фазовом пространстве (в отличие от эргодических систем) сжимается, то объем странного аттрактора в своем пространстве состояний должен быть равен нулю. Но тогда его размерность должна быть меньше размерности n-мерного пространства. Эта ненулевая размерность (называемая размерностью Хаусдорфа—Безиковича) обычно определяется следующим образом. Если разбить объем n-мерного пространства аттрактора на малые (гипер) кубики с длиной ребра η и объемом η^n и обозначить через $N(\eta)$ минимальное число кубиков, совокупность которых полностью его покрывает, то размерность Хаусдорфа—Безиковича D определяется формулой

$$D = \lim_{\eta \to 0} \frac{\ln N(\eta)}{\ln(1/\eta)}. \qquad (1.1.2)$$

---

[1] Двухпериодическое движение соответствует траектории на торе (двумерной трубке), на котором появление хаоса запрещается известной теоремой Пуанкаре—Бендикссона.

Существование этого предела означает конечность объема аттрактора в D-мерном пространстве: при малом η имеем $N(\eta) \approx V\eta^{-D}$ (где V — постоянная), откуда видно, что $N(\eta)$ можно рассматривать как минимальное число D-мерных кубиков, покрывающих в D-мерном пространстве объем V. Размерность Хаусдорфа—Безиковича есть обобщение обычной геометрической размерности, позволяющее характеризовать фрактальные объекты. Определенная, согласно формуле (1.1.2), размерность не может, очевидно, превышать полную размерность n пространства состояний, но может быть меньше его и, в отличие от привычной размерности, может быть дробной; именно такова она для странных аттракторов турбулентного поля.

Фрактальное описание турбулентности применимо, в частности, к полю скоростей диссипации турбулентной энергии (ключевая характеристика локально изотропной турбулентности)

$$\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \langle (\partial u_i'/\partial x_j + \partial u_j'/\partial x_i)^2 \rangle,$$

сосредоточенной, как правило, в объемах диссипационного (колмогоровского) масштаба длины $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. Пусть D — фрактальная размерность поля диссипации. После оценки минимального масштаба η и определения числа $N(\eta)$ (гипер) кубиков размера η фрактальная размерность D, рассчитываемая по формуле (1.1.2), принимает вид $D = \ln N / \ln(L/\eta)$, откуда $N = (L/\eta)^D$. Так как области диссипации имеют объем $(L/\eta)^3$, то общий объем активной диссипации пропорционален $(L/\eta)^{D-3}$. Используя этот результат при установлении связи

$$K \propto (\mathrm{Re})^{3(3-D)/2}, \qquad K \equiv \langle (\partial u/\partial x)^4 \rangle / \{\langle (\partial u/\partial x)^2 \rangle\}^2$$

между экспериментально определимым коэффициентом уплощения K и числом Рейнольдса Re, Мандельброт (*1975*) получил оценку фрактальной размерности поля диссипации, которая не превышает 2,66.

В заключение отметим, что полная классификация странных аттракторов в настоящее время, по-видимому, еще отсутствует. Во всяком случае, в реальных физических системах наблюдаются два типа странных аттракторов: аттракторы Лоренца и квазиаттракторы.

Переход к турбулентному хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода

Третья модель перехода к турбулентности, предложенная Фейгенбаумом (*1978*), связана с бесконечной последовательностью бифуркаций удвоения периода. Переход начинается с бифуркаций Андронова—Хопфа из неподвижной точки в предельный цикл с частотой f_1. При дальнейшем увеличении управляющего параметра происходят последовательные бифуркации удвоения периода колебаний, приводящие к периодическому движению с частотами $f_1/2$, $f_1/4$, $f_1/8$ и т. д. Эта последовательность сходится при некотором критическом значении числа Рейнольдса, при котором возникает странный квазиаттрактор со сложным чередованием областей хаоса и порядка.

Переход к турбулентности через перемежаемость

Четвертый механизм возникновения турбулентности, лежащий в основе модели Помо и Манневиля (*1980*), связан с переходом к хаотическому движению через перемежаемость (чередование). Согласно этой модели, при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ траектория выходит на устойчивый цикл, т. е. в физическом пространстве устанавливается ламинарное периодическое движение. При увеличении числа Рейнольдса $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$, но вблизи критической точки, периодическая траектория разрушается и в результате обратной тангенциальной бифуркации непосредственно превращается в хаотическую траекторию с перемежаемостью. В геометрическом пространстве этому соответствует появление течения, в котором турбулентные состояния чередуются с ламинарными. Пока не удается определить теоретически длительность турбулентных участков. Длительность периодов ламинарного течения τ_{lam} имеет вид степенной зависимости $\tau_{\mathrm{lam}} \propto (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{-1/2}$ и определяет характер уменьшения интервала τ_{lam} по мере роста надкритичности. Заметим также, что в этом сценарии остается открытым вопрос как о характере возникновения перемежаемости, так и о ее роли в процессе эволюции турбулентности.

В заключение этого подраздела отметим еще раз, что все рассмотренные выше модели описывают лишь возникновение турбулентного хаоса и ничего не говорят о свойствах развитой турбулентности. Вместе с тем, как уже отмечалось выше, согласно современным воззрениям (см., например, *Климонтович, 2002*), при переходе к предельно развитой турбулентности в открытой гидродинамической системе между отдельными областями могут устанавливаться новые макроскопические связи (обусловленные коллективным взаимодействием образующих ее подсистем), что повышает ее внутреннюю упорядоченность по сравнению с флуктуациями, происходящими на микромасштабном уровне. При этом множество пространственно-временных масштабов, на которых развивается этот процесс, отвечает когерентному поведению огромного числа жидких частиц, с чем связано, в частности, появление на фоне мелкомасштабного турбулентного движения мезомасштабных упорядоченных когерентных (диссипативных) структур, с определенной степенью организации и формированием областей повышенной концентрации завихренности в виде вихревых трубок, вихревых слоев и т. п. Отсюда можно сделать на первый взгляд парадоксальное заключение, что развитое турбулентное движение, несмотря на его очень большую сложность, отвечает состоянию большей упорядоченности, чем более симметричное ламинарное движение. Данный феномен, «показывающий, сколь трудно при сложных движениях отличить порядок от хаоса» (*Климонтович, 1990*), составляет часть общей проблемы самоорганизации (синергетики). К этой проблеме, обнаруживаемой в самых разных природных явлениях и областях техники, проявляется в последнее время возрастающий интерес. Согласно существующим представлениям (см., например, *Николис, Пригожин, 1979*; *Хакен, 1980*), подобные самоорганизующиеся диссипативные структуры появляются в результате стабилизации пространственно-неоднородных неустойчивостей в открытой нелинейной динамической системе за счет возникновения когерентности (синхронизации колебаний [см. гл. 6]) и тем самым достижения «порядка через флуктуации».

1.1.2. Развитая турбулентность. Теория Колмогорова

В развитом турбулентном потоке присутствуют пульсации с масштабами от самых больших до очень малых. Такие течения характеризуются наполненными спектрами Фурье, причем не только временными, но и пространственными. Основную роль в турбулентном потоке играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых — порядка величины характеристической длины L, определяющей размер области G, в которой происходит турбулентное движение. Эту величину называют внешним масштабом турбулентности. Крупномасштабные движения, обладающие наибольшими амплитудами, имеют скорость U, по порядку величины сравнимую с изменениями средней скорости на протяжении расстояния L. Мелкомасштабные же пульсации, имеющие значительно меньшие амплитуды, можно рассматривать как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена лишь сравнительно малая часть всей кинетической энергии жидкости. Развитая мелкомасштабная турбулентность является локально однородной и изотропной.

Согласно теории Колмогорова (см., например, *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*), мелкомасштабная структура развитой турбулентности (в этом разделе для простоты речь идет об изотермическом течении, когда $\rho = \mathrm{const}$, $\nu = \mathrm{const}$) определяется каскадным характером передачи энергии по спектру вихрей (турбулентных пульсаций) различных пространственно-временных масштабов. Качественная схема каскада Ричардсона—Колмогорова состоит в следующем. Мелкие вихри получают энергию в результате последовательного дробления крупных вихрей при росте числа Рейнольдса Re. Самые большие энергонесущие вихри образуются в результате потери устойчивости исходного ламинарного течения, и их размеры $\lambda_1 \equiv L_1$(прандтлевский путь перемешивания) значительно меньше характерного масштаба L самой области течения G. Эти возмущения первого порядка, из-за слишком большого числа Рейнольдса крупномасштабных пульсаций $\mathrm{Re}_{\lambda_1} \sim \lambda_1 u_1'/\nu$, соответствующего их масштабу λ_1 и относительной скорости u_1', также оказываются неустойчивыми и, разрушаясь, порождают возмущения второго порядка (λ_2, u_2'), которые, в свою очередь, и по той же причине вызывают появление еще более мелких вихрей и т. д. Процесс дробления вихрей останавливается, когда силы молекулярной вязкости в жидкости начинают играть существенную роль, что происходит для вихрей с числами Рейнольдса $\mathrm{Re}_\eta \sim 1$. При этом происходит непрерывное перераспределение удельной кинетической энергии $\sim U^3/L$ несущего потока от крупномасштабных вихрей к более мелким вплоть до самых мелких с характерным размером порядка внутреннего масштаба турбулентности $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, который характеризует влияние вязких эффектов на структуру мелкомасштабной турбулентности. В пределе очень больших чисел Re устанавливается квазистационарный режим инерционного переноса кинетической энергии от больших вихрей к меньшим, при котором энергия, в конце концов из-за молекулярной вязкости ν превращается в тепло в гидродинамически устойчивых мелких вихрях масштаба $\lambda_k \leqslant \eta$ (вязкий интервал). Колмогоров предположил, что существует так называемый инерционной интервал ($\eta < \lambda_k < L_1$) масштабов вихрей, в которых не происходит заметного продуцирования и диссипации энергии, точнее, диссипация в них мала по сравнению с той энергией, которую они получают от более крупных вихрей и передают более мелким. Важно подчеркнуть, что если число Re велико, то, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду приводят к тому, что статистический режим мелкомасштабных пульсаций, лежащих в пространственно-временной области G, является локально изотропным, т. е. однородным, изотропным и квазистационарным (меняющимся в зависимости лишь от характеристик осредненного движения). Квазистационарный режим турбулентного течения, при котором реализуется поток энергии в область малых масштабов, предполагает, разумеется, определенные граничные условия на границе ∂G рассматриваемой области течения G, создающие накачку и сток. Формула

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \tag{1.1.3}$$

для диссипационного масштаба длины η является следствием первой гипотезы подобия Колмогорова (*1941*), согласно которой статистический режим мелкомасштабной локально изотропной турбулентности однозначно определяется двумя размерными параметрами — средней скоростью диссипации энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ и молекулярной вязкостью ν. Величина ε представляет собой осредненную по ансамблю возможных реализаций течения среды диссипацию турбулентной энергии (в единице массы жидкости в единицу времени) и одновременно характеризует скорость передачи кинетической энергии пульсационного движения по иерархии вихрей в каскадном процессе:

$$U^3/L \approx u_1^3/\lambda_1 \approx \ldots \approx u_\eta^3/\eta \cong \nu u_\eta^2/\eta^2 \equiv \varepsilon = \mathrm{const} \tag{1.1.4}$$

— следствие второй гипотезы подобия Колмогорова (*1941*), согласно которой в инерционном интервале ($\eta < \lambda_k < L_1$) статистический режим турбулентности определяется единственным параметром ε. Здесь $u_k^3/\lambda_k \sim u_k^2/t_k$ — удельная кинетическая энергия, получаемая в единицу времени вихрями k-го порядка от вихрей $(k-1)$-го порядка и передаваемая ими вихрям $(k+1)$-го порядка; $u_\eta \cong (\nu\varepsilon)^{1/4}$, $t_\eta \cong \eta/u_\eta = \sqrt{\nu/\varepsilon}$ — соответственно порядок скорости и времени пульсаций в вихрях колмогоровского диссипационного масштаба η. В теории Колмогорова предполагается также, что на каждом масштабе (шаге каскада) вихри заполняют всю область G непрерывно.

Приведем теперь важное соотношение, касающееся обусловленного вязкостью нижнего порога — колмогоровского диссипационного масштаба. Из (1.1.3) и (1.1.4) следует

$$L/\eta \propto (\nu^3/L^3U^3)^{-1/4} \propto \mathrm{Re}^{3/4}. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, в теории Колмогорова инерционный интервал охватывает диапазон масштабов, растущий при увеличении числа Рейнольдса как $\mathrm{Re}^{3/4}$. В случае численного моделирования развитого турбулентного течения на равномерной сетке, минимальное количество ее узлов в кубе со стороной, равной длине основного масштаба L, должно быть $N \propto \mathrm{Re}^{9/4}$, что позволяет в общем случае довольно скептически смотреть на перспективы численного моделирования. Однако из-за наличия в реальной турбулентности тонких вихревых нитей (или других когерентных образований), пронизывающих значительную часть области турбулентного течения, число степеней свободы развитой турбулентности может быть гораздо меньше, чем $\mathrm{Re}^{9/4}$.

Количественное описание мелкомасштабной локально изотропной турбулентности в области G (далее везде предполагается, что $\Lambda \sim L_1$) основано на использовании структурных функций

$$D_{ij}(\boldsymbol{r}) = \overline{(u_i'(\boldsymbol{x}) - u_i'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}))(u_j'(\boldsymbol{x}) - u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}))}$$

и их спектров

$$E_{ij}(\boldsymbol{k}) = \int D_{ij}(\boldsymbol{r}) \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r},$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{k}$ — волновое число (*Колмогоров, 1941*; *Обухов, 1941*). Из первой гипотезы подобия и предположения о том, что параметры крупномасштабной турбулентности слабо меняются на расстояниях порядка $r = |\boldsymbol{r}|$, если $r < L_1 \ll L$, вытекает, что

$$D_{ij}(r) = (\varepsilon r)^{2/3}[f(r/\eta) r_i r_j r^{-2} + g(r/\eta)\delta_{ij}],$$

где f и g — произвольные функции безразмерного аргумента (r/η). Согласно второй гипотезе подобия, структурная функция в инерционном интервале $L_1 \gg r \gg \eta \sim L\mathrm{Re}^{-3/4}$ не зависит от вязкости ν, т. е. $f = \mathrm{const}$, $g = \mathrm{const}$ при $r/\eta \gg 1$. Отсюда следует один из важнейших законов мелкомасштабных турбулентных движений (закон двух третей): в любом турбулентном течении с достаточно большим числом Рейнольдса Re средний квадрат разности скоростей в двух точках на расстоянии r друг от друга при не слишком малых, но и не слишком больших значениях r (сравнимых с масштабом длины Λ соответствующего осредненного течения), должен быть пропорционален $r^{2/3}$, $D_{11}(r) = C(\varepsilon r)^{2/3}$, где C — универсальная постоянная. Эквивалентное «закону двух третей» для структурной функции поля скорости утверждение, сформулированное в терминах спектров, принимает вид: $E(k) = C^* \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ при $1/\eta \gg k \gg 1/L$ (*Обухов, 1941*). Этот закон в настоящее время хорошо подтвержден экспериментально для самых разнообразных турбулентных течений (см. *Монин, Яглом, 1996*).

Что касается структурных функций n-порядка, то теория подобия Колмогорова приводит к соотношению $\overline{V^n} \sim (\varepsilon r)^{n/3}$, (где $V \equiv u'(\boldsymbol{r}) - u'(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^*)$, которое, вообще говоря, не подтверждается экспериментально, в особенности для $n \gg 1$. Как известно, это обстоятельство связано с тем, что гипотезы подобия для локально изотропной турбулентности в их первоначальной форме предполагали постоянство притока энергии к мелкомасштабным возмущениям, лежащим в инерционном интервале, т. е. постоянство параметра Колмогорова ε. Однако для реальных турбулентных течений диссипация энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$меняется не только при переходе от одной точки $\boldsymbol{r}$ (области G) течения к другой, но является случайной величиной от координат $\boldsymbol{r}$ и времени t, пульсируя вместе с мгновенным полем скоростей $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{r}, t)$. Распределения вероятностей диссипации энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ (зависящие в общем случае от изменения гидродинамических характеристик осредненного движения среды, в частности от числа Рейнольдса Re) оказывают влияние на безусловные распределения вероятностей для мелкомасштабных характеристик развитой турбулентности, которые по этой причине в общем случае не могут быть вполне универсальными. Известное замечание Ландау (см., например, *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*) относительно первоначальных гипотез подобия Колмогорова касалось именно этого влияния. В связи с этими затруднениями, представления Колмогорова о случайном каскаде были уточнены в работе Обухова (*1962*), который предложил отказаться от условия $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{const}$ в области G (с центром в точке $\boldsymbol{r}$ и характерным масштабом $\Lambda \ll L$) и исходить из того, что статистические характеристики мелкомасштабных движений (например, структурные функции) определяются не теоретико-вероятностным средним значением $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ случайной величины ε, а зависят от значений диссипации $\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, t)$, осредненной по некоторому объему V_r с характерным размером r, малым по сравнению с типичным масштабом неоднородности осредненного течения, $r \ll \Lambda$. Если в качестве области осреднения, лежащей в пределах G, выбрать шар радиуса r (получаемые результаты слабо зависят от формы области осреднения), то величина ε_r определяется формулой

$$\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, t) = \frac{6}{\pi r^3} \int\limits_{|\boldsymbol{r}^*| \leqslant r} \varepsilon(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}^*, t)\, d\boldsymbol{r}^*.$$

Отметим, что первоначальная (не уточненная) теория каскада не является абсолютно точной еще и потому, что в ней не учитываются в явном виде какие-либо мелкомасштабные когерентные диссипативные структуры, которыми может обладать турбулентное поле, за исключением допустимого в ее рамках макроструктурирования потока на больших масштабах $\sim L$. Между тем, как теперь стало ясно, любая адекватная теория турбулентности обязана учитывать наличие и динамику подобных диссипативных структур и неравномерность их пространственно-временного распределения в хаотическом потоке (*Crow*, *Champagne*, *1971*; *Brown*, *Roshko*, *1974*).

С другой стороны, с хаотическим характером передачи кинетической энергии по каскаду, вызываемым неустойчивостью диссипативных структур, связано явление гидродинамической внутренней перемежаемости, при которой области, занятые так называемыми турбулентными пятнами (в которых наблюдаются интенсивные пульсации градиентов скорости, $\varepsilon_r > 0$), тесно переплетаются с областями со слабо турбулизованной или полностью безвихревой жидкостью (в которых такие пульсации практически отсутствуют, $\varepsilon_r \cong 0$). Наличие перемежаемости отвечает режиму течения (при малом числе Re), когда мощности постоянно действующего механизма турбулизации среды, передающего энергию потоку на больших масштабах, еще недостаточно для формирования полностью развитой турбулентности во всей области G, занятой жидкостью. Таким образом, значения величины $\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, t)$ (или родственных ей величин, квадратичных по градиентам скорости) могут служить индикатором перемежаемости.

1.1.3. О спектре развитой турбулентности

При теоретическом изучении турбулентных пульсаций скорости движения среды (или других пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров) традиционно используется аппарат математической статистики для квазистационарных случайных процессов, корреляционный и спектральный анализ. К наиболее употребительным статистическим характеристикам поля случайных величин $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ относятся их средние значения (ниже для обозначения средних значений используется черта над осредненной величиной) и дисперсии, разнообразные корреляционные и структурные функции, спектральные плотности распределения и т. п. Вследствие того что в турбулизованной среде, как правило, одновременно существуют системы движения различного пространственно-временного масштаба, характеризующие ее термогидродинамические параметры должны быть, вообще говоря, осреднены (предполагается, что индивидуальная реализация турбулентных течений может быть описана с помощью уравнений гидродинамики для мгновенного движения). Осреднение может быть произведено либо по временному (или/и пространственному) интервалу Δt (например, по значениям пульсаций, измеренным в фиксированной точке в течение некоторого промежутка времени Δt), либо по ансамблю физически допустимых реализаций гидродинамической системы. Для получения репрезентативных статистических оценок определяющих параметров пульсирующего течения необходимо подходящим образом выбрать интервал осреднения, который должен быть тем больше, чем больше масштабы пульсаций.

Таким образом, для выбора масштаба осреднения необходимо знать порядок величины (спектр) пульсаций для всех термогидродинамических параметров турбулентной среды (таких как скорость ветра, давление, температура, и т. д.). Энергетический спектр пульсационного поля какой-либо физической величины $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ представляет из себя серию кривых, описывающих зависимость квадрата амплитуды пульсаций $\langle \mathscr{A}'^2 \rangle$ случайной величины $\mathscr{A}$ от круговой частоты ω ($\omega = 2\pi f$, f — частота колебаний в $с^{-1}$) и/или линейных размеров $\varkappa$ ($\varkappa$ — волновое число).

В частности, среди характерного для земной атмосферы широкого спектра колебаний (во времени) указанных случайных величин, имеющих периоды от долей секунды до тысяч лет (см. *Монин, 1969*), особо следует выделить микрометеорологические колебания с периодами от долей секунды до минут, которые возникают непосредственно в приземном слое воздуха и представляют собой мелкомасштабную изотропную турбулентность, служащую наиболее важным механизмом вязкой диссипации турбулентной энергии. Максимум ее энергетического спектра $\omega E(\omega)$ (где $E(\omega)$ — спектральная плотность кинетической энергии потока) приходится на период $\tau_m = 1/\omega \approx 1$ мин, что для типичной скорости движений воздуха при синоптических процессах $V = 10$ м/с соответствует масштабу горизонтальных турбулентных неоднородностей $L = V\tau_m \approx 600$ м. При $\omega > 1/\tau_m$ спектры скорости ветра удовлетворяют «закону пяти третей» Колмогорова—Обухова (*Обухов, 1941*) $E(\omega) \sim (\varepsilon_e^{2/3}/V)(\omega/V)^{-5/3}$, и в области максимальных частот турбулентных флуктуаций $\omega \sim V\varepsilon_e^{1/4}\nu^{-3/4}$ спектр турбулентности резко обрывается (*Монин, 1969; 1988*).

Каскадный процесс передачи кинетической энергии от вихревых движений больших масштабов к вихрям малых масштабов в случае изотропного турбулентного течения удобно проанализировать в пространстве волновых чисел $\varkappa$ при использовании пространственной спектральной плотности энергии $E(\varkappa)$, которая определяется следующим образом:

$$E(\varkappa) = \int\limits_{|\varkappa'|=k} \Phi_{ii}(\varkappa')\, d\varkappa', \tag{1.1.6}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование. Здесь $\Phi_{ij}(\varkappa)$ — Фурье преобразование корреляционной функции $R_{ij}(\boldsymbol{r}) = \overline{u'_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})u'_j(\boldsymbol{x})}$ случайного поля скоростей; $\varkappa$ — модуль волнового числа, $\varkappa = |\boldsymbol{\varkappa}|$. Отметим, что величина $R_{ii}(0) = \overline{u'_i u'_i}$ совпадает с кинетической энергией пульсационного движения единицы массы среды. Отсюда, при использовании определения $E(\varkappa)$, следует, что турбулентная энергия

$$b \equiv \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty E(\varkappa)\, d\varkappa. \tag{1.1.7}$$

На рис. 1.1.1 показана картина распределения энергии турбулентного движения по различным масштабам, т. е. пространственный спектр величины b. Глубокий физический смысл, характеризующий пульсационное движение поля скорости следует из «спектральной формы» уравнения Кармана—Ховарта (*Монин, Яглом, 1996*), описывающего изменение во времени спектрального распределения энергии турбулентности $E(\varkappa, t)$:

$$\partial E(\varkappa, t)/\partial t = T(\varkappa, t) - 2\nu\varkappa^2 E(\varkappa, t). \tag{1.1.8}$$

Здесь первое слагаемое $T(\varkappa, t)$ описывает перераспределение энергии по спектру турбулентности вследствие взаимодействий ее спектральных компонентов с волновыми числами $\varkappa$ со всеми другими спектральными компонентами, создаваемое нелинейными «инерционными членами» исходных уравнений гидродинамики. Важно при этом подчеркнуть, что перераспределение энергии между спектральными компонентами, происходит без изменения

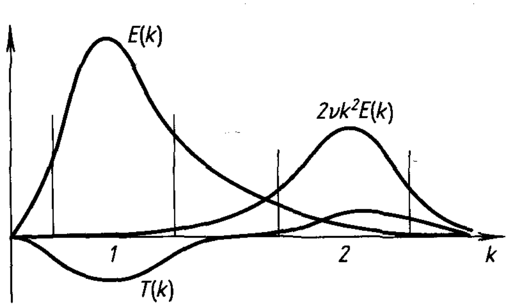


Рис. 1.1.1. Спектры энергии $E(k)$, диссипации энергии $2\nu k^2 E(k)$ и функции перераспределения энергии $T(k)$. Области 1 и 2 на горизонтальной шкале обозначают интервалы энергии и диссипации. Согласно (*Монин, Яглом, 1996*)

суммарной энергии турбулентного движения $\left(\int_0^\infty T\,d\varkappa = 0\right)$. Второе слагаемое $2\nu\varkappa^2 E(\varkappa)$ описывает диссипацию энергии под действием вязкости и характеризует убывание кинетической энергии пульсаций возмущений с волновым числом $\varkappa$, пропорциональное интенсивности этих возмущений, умноженной на $2\nu\varkappa^2$. Это означает, что под действием вязкости энергия длинноволновых возмущений (с малыми $\varkappa$) убывает значительно медленнее, чем энергия коротковолновых возмущений, отражая тем самым факт пропорциональности силы трения градиенту скорости. Спектры энергии $E(\varkappa)$, диссипации энергии $2\nu\varkappa^2 E(\varkappa)$ и вид функции $T(\varkappa, t)$, определяющей перераспределение энергии по спектру, схематически показаны на рис. 1.1.1. Как видим, отрицательные значения функции $T(\varkappa)$ в области малых $\varkappa$, которым соответствует максимум энергии крупномасштабных движений на кривой $E(\varkappa)$, сменяется положительными значениями в области больших $\varkappa$, которым соответствует максимум диссипации энергии на кривой $2\nu\varkappa^2 E(\varkappa)$. Это подтверждает представление о каскадном переходе энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным компонентам движения, для которых характерны большие локальные градиенты скорости и, следовательно, велика роль вязкости. Следуя Монину и Яглому (*1996*), первый из этих интервалов, где сосредоточено до 80—90% полной энергии турбулентности (1.1.1), носит название интервала энергии, а второй, где происходит ее полная диссипация

$$2\nu\int_0^\infty \varkappa^2 E(\varkappa)\,d\varkappa \cong 2\nu\int_{\varkappa_0}^\infty \varkappa^2 E(\varkappa)\,d\varkappa$$

— интервала вязкой диссипации спектра (здесь $\varkappa_0$ — промежуточное значение волнового числа в инерционном интервале, лежащее за интервалом энергии и перед интервалом диссипации). Там же приведено более полное рассмотрение проблемы «скорости перераспределения энергии по спектру» $T(\varkappa)$, исходя из спектрального представления самого поля скорости, в основе которого лежит подход, развитый Бетчелором (*1955*). Мы еще раз, таким образом, убеждаемся в том, что первоначальная энергия крупных вихрей, определяющая динамические и кинематические свойства течения, затрачивается на их дробление, что выражается через турбулентную вязкость, и, в конечном итоге, определяет свойства вязкой диссипации, при выполнении условия общего энергетического баланса.

1.1.4. Турбулентная диффузия

В комплексе проблем, связанных с теоретическим рассмотрением процессов турбулентного тепло-и массопереноса в природной среде, важное значение имеет моделирование распространения малых примесей (в том числе химически активных компонентов газа в атмосферах планет и диспергированных частиц различного типа и размеров, частично также участвующих в химических превращениях и фазовых переходах). В процессе переноса указанных примесей и их перемешивании определяющую роль играет турбулентная диффузия, характер которой зависит от структуры пульсационного поля скоростей и распределения энергии турбулентности между пульсациями различных пространственных масштабов. При описании процессов диффузии в турбулизованной среде можно выделить средние значения концентраций примеси $\langle Z_\alpha \rangle$ и пульсационные отклонения Z'_α от них, наряду со средней величиной $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ и пульсациями $\boldsymbol{u}'$ скорости движения газовой смеси. Это позволяет с помощью обычных приемов осреднения перейти от уравнений диффузии для мгновенных значений концентраций к уравнениям диффузии масштаба среднего движения [см. уравнения (2.1.7) и (3.1.23)]. Как известно, в теории турбулентной диффузии смеси, в зависимости от масштабов явления, различают диффузию градиентного типа, создаваемую сравнительно мелкими вихрями, и диффузию неградиентного типа, создаваемую крупными вихрями (*Монин, Яглом, 1965*). К турбулентной диффузии градиентного типа может быть применен феноменологический подход [см. гл. 3]. Поскольку турбулентность является свойством режима течения жидкости, а не самой жидкости, механизм обмена импульсом (энергией, веществом) лишь отдаленно напоминает молекулярный обмен импульсом. Тем не менее существует определенная аналогия между диффузией смеси в поле мелкомасштабной турбулентности и молекулярной диффузией (справедливая и в случае загрязнения среды мелкодисперсной примесью, когда масштаб турбулентности мал по сравнению с масштабами «облака загрязнения»). В основу такой аналогии положено допущение о пропорциональности между турбулентным потоком некоторого диффундирующего вещества и градиентом его осредненной концентрации. Действительно, подобно тому, как хаотическое молекулярное движение характеризуется некоторой средней скоростью движения молекул v_m и длиной свободного пробега l_m (так что молекулярный коэффициент диффузии $D \propto v_m l_m$), хаотическое турбулентное перемешивание можно описать через коэффициенты турбулентной диффузии $D^{\text{turb}} \propto v_{\text{turb}} l_{\text{turb}}$, где v_{turb} — характерная величина турбулентных флуктуаций скорости и $\boldsymbol{l}_{\text{turb}}$ — локальный масштаб турбулентности (так называемый путь перемешивания). Однако, в отличие от v_m и l_m, параметры v_{turb} и l_{turb} определяют не просто свойства среды, а режим течения жидкости. Соответственно, D и D^{turb} понимаются как коэффициенты пропорциональности — в первом случае между молекулярным диффузионным потоком $\boldsymbol{J}_\alpha$ некоторой субстанции α и градиентом ее концентрации $\partial Z_\alpha / \partial \boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{J}_\alpha = -D \partial Z_\alpha / \partial \boldsymbol{r}$), а во втором случае — между турбулентным потоком данной субстанции в пульсирующем поле скоростей $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} = \overline{\rho Z''_\alpha \boldsymbol{u}''}$ и градиентом ее осредненной концентрации $\partial \langle Z_\alpha \rangle / \partial \boldsymbol{r}$, т. е.

$$\boldsymbol{J}_\alpha^T = -\overline{\rho} D^{\text{turb}} \cdot \partial \langle Z_\alpha \rangle / \partial \boldsymbol{r} \tag{1.1.9}$$

(*Монин, 1962*). Заметим, что поскольку турбулентная диффузия, в отличие от молекулярной, обычно имеет анизотропный характер, то в общем случае под D^{turb} и $\boldsymbol{l}_{\text{turb}}$ следует понимать тензоры.

Если частицы диффундирующей субстанции сохраняют свои индивидуальные свойства при движении в пульсирующем потоке (пассивная примесь), то наиболее естественно в основу модели турбулентного перемешивания положить лагранжеву концепцию [см. (3.3.1)], что дает возможность без детальной конкретизации механизма перемешивания рассматривать такой перенос как «обычное движение» частиц жидкости, при котором происходит диффузия. Введение лагранжевой турбулентной пульсации $Z''_{\alpha L}$ $(\equiv Z''_{\alpha} + \boldsymbol{l}_{\mathrm{turb}} \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle Z_{\alpha}\rangle \cong 0)$ консервативного признака Z_{α} позволяет в этом случае определить некоторую длину $l_{\mathrm{turb}} = |\boldsymbol{l}_{\mathrm{turb}}|$ (приблизительно пропорциональную среднему линейному масштабу пульсаций скорости), на котором исчезает корреляция между начальной и конечной скоростью данной лагранжевой частицы, и смоделировать турбулентный коэффициент диффузии

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{turb}} = \overline{\boldsymbol{l}_{\mathrm{turb}} \boldsymbol{u}''} \tag{1.1.10}$$

на всем временном интервале пульсационного движения. Нельзя при этом исключить возможности некоторого прямого влияния молекулярной диффузии на турбулентный диффузионный перенос при условии, что за время, в течение которого сохраняется определенная корреляция между значениями скорости движения крупномасштабного вихря, количество диффундирующей субстанции в этом вихре успеет заметно измениться. Следует, по-видимому, также допустить, что эти разноприродные диффузионные процессы обладают свойствами суперпозиции.

При моделировании коэффициентов турбулентной диффузии D^{turb} для всевозможных атмосферных компонентов (в том числе загрязняющих примесей) необходимо учитывать такие факторы, которые оказывают наиболее существенное влияние на их перемешивание (рассеяние). В частности, в первую очередь необходима априорная оценка пути перемешивания (масштаба турбулентности), или его аппроксимация, с учетом термической (и/или концентрационной) стратификации атмосферы, которая и определяет, в конечном счете, характер диффузионных процессов. Как уже упоминалось, в общем случае анизотропного пульсационного поля скоростей (концентраций) диффузионный перенос малых компонентов характеризуется тензором турбулентной диффузии $\boldsymbol{D}^{\mathrm{turb}}$ (или тензором вязкости $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{turb}}$). Для течений с ярко выраженным направлением неоднородности (например, в атмосфере, стратифицированной в поле силы тяжести) турбулентные флуктуации скорости накладываются на ее среднюю (ветровую) составляющую в горизонтальном направлении и усиливаются при наличии ветрового сдвига. Для подобных течений успешно используются различные упрощенные аппроксимации для вертикального коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} (типа модели пути перемешивания Прандтля [см. (3.3.15)] или гипотезы Гейзенберга о роли малых вихрей в оценке ν^{turb}, когда допустимо градиентное приближение), справедливые, однако, лишь при условии локального равновесия турбулентного поля, обеспечивающего баланс генерации и диссипации турбулентной энергии в каждой пространственной точке среды. При всем том, подобные подходы, вообще говоря, неприменимы для многокомпонентной химически активной смеси, поскольку в этом случае существенную роль может играть химическая кинетика, нарушающая лагранжеву инвариантность переносимой субстанции. Здесь мы вновь сталкиваемся с необходимостью разработки новых подходов к моделированию турбулентных коэффициентов переноса для смеси, которые позволили бы учесть специфику подобных сред.

1.1.5. Геофизическая турбулентность

На характер геофизической турбулентности специфическое влияние оказывает стратификация атмосферы (распределение массовой плотности ρ и других термогидродинамических параметров по направлению силы тяжести) и вращение Земли (с угловой скоростью $\Omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$). Кроме этого, многокомпонентность реальной атмосферы приводит часто к бароклинности смеси, вызванной зависимостью ρ не только от давления p (как в баротропных средах), но также от температуры T и/или концентраций Z_α отдельных ее компонентов.

Бароклинность имеет динамическое значение, так как она приводит к появлению источникового члена в известном уравнении Фридмана для завихренности [см. (1.3.1)]. При неустойчивой стратификации атмосферы в ней развивается турбулентная конвекция, источником которой служит ускоряющее действие архимедовой силы. Следствием вращения Земли является образование турбулентных пограничных (экмановских) слоев у поверхности суши в атмосфере, а также у поверхности дна в океане. За счет глобального изменения параметра Кориолиса $f = 2\Omega \cos\theta$ (где θ — дополнение широты φ до $\pi/2$; $f = 10^{-4}$ с$^{-1}$ всюду за исключением областей, близких к экватору) в меридиональном направлении возникают волны Россби—Блиновой, порождающие циклоны и антициклоны в атмосфере и синоптические вихри в океане, служащие примерами двумерной макро турбулентности. В свою очередь, макро турбулентность, возникающая вследствие крупномасштабных неоднородностей притока тепла к атмосфере от подстилающей поверхности, порождает интенсивную микро турбулентность, обусловленную гидродинамической неустойчивостью вертикальных градиентов скорости ветра. С наличием тонких квазиоднородных слоев, разделенных поверхностями разрыва температуры и солености, связано развитие сравнительно слабой микро турбулентности (с малыми числами Re) в океане (*Монин, 1988*). При изучении геофизической турбулентности и в некоторых других случаях оценка интенсивности турбулентного переноса может осуществляться по значениям коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} (или диффузии D^{turb}).

Приток солнечного тепла к атмосфере и поверхности Земли (а также других планет земного типа) служит основным источником энергии атмосферных физико-химических процессов, относительно небольшая доля которой превращается в кинетическую энергию вихревых движений всех масштабов. Характерный размер крупных энергонесущих вихрей, в которых, вследствие изменения (сдвига) средней гидродинамической скорости V, возникает кинетическая энергия турбулентного движения системы, определяет внешний (интегральный) масштаб турбулентности L. Вихри с размерами больше, чем L, как правило, анизотропны, а вихри, размеры которых меньше внешнего масштаба турбулентности, — приблизительно изотропны. В интервале масштабов от миллиметров до тысяч километров $l \ll r \ll L$ (где l — так называемый внутренний масштаб турбулентности, пропорциональный колмогоровскому микромасштабу η), охватывающем практически весь спектр динамических процессов в атмосфере, происходит каскадный процесс передачи энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным вихревым движениям. Квазистационарный режим существования подобного каскадного механизма в турбулизованной атмосфере Земли характеризуется некоторой приблизительно постоянной (не зависящей от масштаба вихря) величиной $\varepsilon_e \approx 3$ см^2/с^3, которая, с одной стороны, является скоростью передачи кинетической энергии вихревого вращения от крупных атмосферных вихрей к более мелким вихрям, а с другой стороны, характеризует удельную скорость диссипации турбулентной (кинетической) энергии в тепло за счет молекулярной вязкости, которая происходит в вихрях колмогоровского размера η.

В инерциальном интервале масштабов, в котором имеет место указанный каскадный процесс в атмосфере, коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, отвечающий эмпирическому «закону четырех третей» Ричардсона—Обухова (этот закон следует также из соображений теории размерности и подобия), имеет вид: $\nu^{\text{turb}}(r) \propto \varepsilon_e^{1/3} r^{4/3}$ (*Richardson*, *1926*; *Обухов*, *1941*). Зависимость эффективного вертикального коэффициента диффузии $\nu(L)$ от локального масштаба турбулентности $L(z)$ показана на рис. 1.1.2, где выделены область ламинарного движения при малых L, с коэффициентом молекулярной вязкости $\nu = 0{,}16$ см^2/с, и область свободной турбулентности (инерционный интервал) при больших L.

Как уже говорилось выше, при этих значениях L отсутствует продуцирование или диссипация кинетической энергии, а происходит лишь ее передача

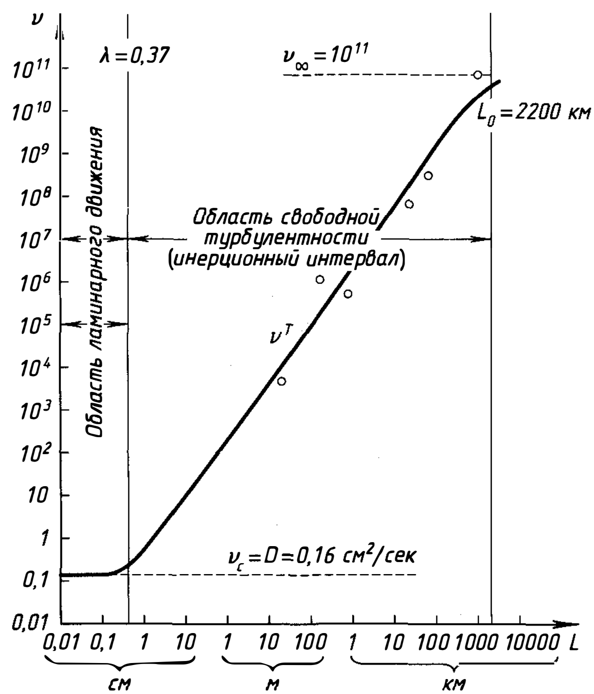


Рис. 1.1.2. Вертикальный коэффициент диффузии в функции масштаба турбулентности L. Выделены области ламинарного движения и свободной турбулентности (инерционный интервал). Показаны эмпирические точки, отвечающие закону Ричардсона—Обухова. Согласно (*Монин*, *1969*)

ко все более мелким масштабам r (вплоть до масштаба $r \simeq \eta$), которым отвечает рост волнового числа $\varkappa$ на кривой спектральной плотности распределения энергии $E(\varkappa)$ поля скорости (см. рис. 1.1.1). Максимальный коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb} в атмосфере соответствует типичному масштабу длины для синоптических процессов $L_0 = a/f$ (*Обухов, 1949*), где $a = \sqrt{gH}$ — изотермическая скорость звука. В умеренных широтах Земли $L_0 \sim 3000$ км и $\nu^{\text{turb}} \approx 10^{11}$ см^2/с. Очевидно, что при этом время вырождения атмосферной кинетической энергии вследствие турбулентной вязкости $\tau(L) \sim L^2/\nu^{\text{turb}}(L) \sim \sim \varepsilon_e^{-1/3} L^{2/3}$ отвечает типичному времени превращения потенциальной энергии синоптических процессов $\tau = (E^{-1}\partial E/\partial t)^{-1} \cong 5 \cdot 10^5$ с, т. е. равно примерно неделе (здесь $E \approx 10^{21}$ Дж — полная кинетическая энергия атмосферы; $\partial E/\partial t \approx \approx 1\text{—}2 \cdot 10^{12}$ кВт — скорость превращения потенциальной энергии в кинетическую) (*Монин, 1969*).

Как видим, турбулентность с коэффициентом турбулентной вязкости ν^{turb} можно рассматривать в качестве эффективного механизма диссипации кинетической энергии для движений синоптического масштаба или характерного размера крупномасштабных вихрей L. При этом минимальный масштаб синоптических движений, способных преодолеть вязкость, оценивается как $L_{\min} \propto \varepsilon_e^{-1/4} (\nu^{\text{turb}})^{3/4}$ (*Монин, 1969*). Такой подход отвечает представлениям о наличии универсальных связей между характеристиками крупно- и мелкомасштабных пульсаций для турбулентных течений, определяемых при $\mathrm{Re} \to \infty$ мелкомасштабными флуктуациями, а не крупномасштабными колебаниями скорости, определяющими средние значения всех термогидродинамических величин и по существу не зависящих от Re. В этом находит свое выражение гипотеза Бетчелора (*1955*) о статистической независимости крупно- и мелкомасштабных движений.

1.1.6. О некоторых методах моделирования турбулентности

Помимо статистического подхода к моделированию турбулентности в настоящее время все более широкое применение находят методы прямого численного моделирования турбулентности на основе решения нестационарной системы трехмерных уравнений Навье—Стокса, хотя в силу стохастичности данного явления в реальности удается получать лишь осредненные характеристики движения. Это позволяет, тем не менее, иногда проследить не только эволюцию образований различных пространственных структур с течением времени, но также изучать общую динамику и природу развития турбулентности. Например, результаты численного моделирования явления «перебросов» в гидродинамической системе (сконструированной в виде многоярусной модели зацепления простейших элементов — триплетов) иллюстрируют каскадный процесс передачи энергии в развитом турбулентном потоке, соответствующий закону Колмогорова—Обухова (*Гледзер и др., 1981*) и подкрепляют представления об общих свойствах в поведении динамических систем. Интересно также отметить, что исследование процесса стохастизации динамических систем и сценариев перехода к хаосу при численном моделировании турбулентности служит аналогом решения некорректных задач с использованием оператора осреднения и «параметрического расширения» (*Тихонов и Арсенин, 1986*). При таком подходе упорядоченная структура турбулентного течения, которая определяется как аттрактор асимптотически устойчивого решения для осредненных величин, представляет собой его регуляризованное описание (*Белоцерковский, 1997*). Следует однако заметить, что использование методов прямого численного моделирования турбулентности для решения практически важных задач (особенно задач, связанных с расчетами турбулентного тепло- и массопереноса в многокомпонентных химически активных смесях) часто затруднительно. Более того, полное решение уравнений гидродинамики для флуктуирующих параметров (из-за очень большого числа турбулентных степеней свободы) содержало бы столь большую информацию, которая не могла бы быть полностью использована.

В связи с этим на первый план выступает задача приближенного (полуэмпирического) описания турбулентности. При выводе осредненных уравнений движения жидкости, представляющих основу современной гидродинамической теории турбулентности, основная масса исследователей опирается на уравнения гидродинамики в форме уравнений Навье—Стокса, которые по предположению описывают течение жидкости и в турбулизованном режиме даже при экстремально больших значениях безразмерных параметров. Однако сама возможность выбора этих уравнений в качестве стартовых для перехода к осредненным уравнениям Рейнольдса не является бесспорной, хотя бы потому, что при их выводе делается достаточно сильное предположение о линейной связи тензора вязких напряжений Π_{ij} с первыми производными поля скоростей $\partial u_i/\partial x_j$. Хотя в ламинарных и слабо надкритических течениях это предположение хорошо работает, но в сильно нелинейных турбулентных движениях жидкости нельзя исключить более сложной зависимости тензора вязких напряжений от тензора скоростей деформаций. В связи с этим, приведем еще один аргумент в пользу подобного рода сомнений, процитировав выдержку из работы О. М. Белоцерковского (*1984*): «Таким образом, гипотеза о том, что турбулентность полностью описывается уравнениями Навье—Стокса, математически не обоснована, поскольку нет общей теоремы, гарантирующей глобальное существование решений уравнений Навье—Стокса как задачи с начальными условиями. Вполне вероятно (хотя таких примеров пока нет), что эти решения могут стать сингулярными, так что уравнения перестают быть справедливыми и для построения полной теории нужны, по-видимому, новые физические принципы, выходящие за рамки классической гидродинамики».

Для преодоления трудности доказательства существования решения уравнений Навье—Стокса, в работах О. Ладыженской была проведена регуляризация этих уравнений путем введения в рассмотрение нелинейной вязкости. Это означало следующее переопределение тензора вязких напряжений:

$$\Pi_{ij} = -\nu(\partial u_i/\partial x_j) \to -\nu[1 + \varepsilon(\partial u_i/\partial x_j)^2](\partial u_i/\partial x_j),$$

где ε — произвольный малый коэффициент. Нелинейный вклад в вязкость нивелирует большие градиенты скорости и тем самым существенно влияет на характер гидродинамического движения в области малых масштабов. Однако из-за очень большого числа коллективных (макроскопических) степеней свободы едва ли возможно полное решение даже регуляризованного уравнения Навье—Стокса.

В данной книге использован в основном классический подход к моделированию сдвиговой турбулентности, который основывается на идее Рейнольдса об осреднении гидродинамических уравнений по ансамблю тождественных течений (возможных реализаций), или посредством другой эквивалентной процедуры. Полученные таким образом уравнения масштаба среднего движения, вследствие нелинейности исходных гидродинамических уравнений, содержат неопределенные корреляционные члены (типа векторов турбулентной диффузии и тепла, или тензора турбулентных напряжений Рейнольдса) и потому оказываются незамкнутыми. Замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики смеси обычно проводится с помощью тех или иных полуэмпирических моделей турбулентности, основанных, например, на привлечении последовательности дифференциальных уравнений для моментов флуктуаций (чему посвящена третья глава данной монографии). Вместе с тем, важно уже здесь указать на принципиальный недостаток этого подхода, который состоит в том, что осреднение Рейнольдса осуществляется по всем пространственным масштабам турбулентности, т. е. моделирование на основе полуэмпирических гипотез замыкания по необходимости проводится одновременно по всему спектру разномасштабных вихревых структур.

Если учесть, что, в отличие от практически универсального спектра мелкомасштабных пульсаций, крупномасштабные вихревые структуры существенно различны для разных течений (см. рис. 1.1.3), то становится очевидной бес-

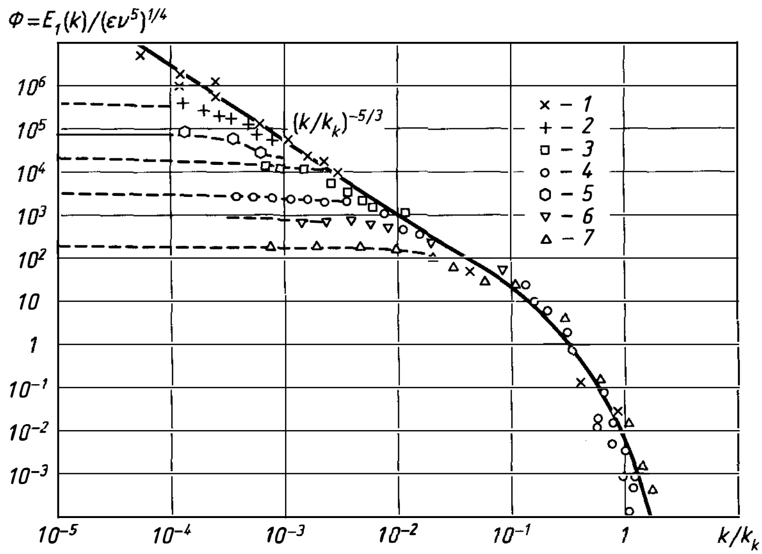


Рис. 1.1.3. Спектр продольной составляющей турбулентных пульсаций для различных течений. Здесь: 1 — приливно-отливный канал; 2 — круглая струя; 3 — течение в трубе; 4 — течение с постоянным сдвигом; 5 — след за цилиндром; 6 — турбулентность за сеткой; 7 — пограничный слой. Согласно (*Чепмен, 1980*)

перспективность создания универсальных полуэмпирических моделей турбулентности, пригодных для описания разнотипных турбулентных течений. По этой причине задача состоит главным образом в установлении границ применимости той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Тем не менее есть некоторые основания надеяться, что привлечение многопараметрических аппроксимаций, основанных на эволюционных уравнениях переноса для старших моментов пульсирующих в потоке термогидродинамических параметров, позволит до некоторой степени продвинуться на пути построения универсальных моделей турбулентности с усложненными свойствами, описывающих достаточно большое число разнообразных турбулизованных природных сред.

Вместе с тем, актуальная на сегодня проблема моделирования структурированной турбулентности ставит вопрос о поиске и других базовых уравнений, для которых имеются физические основания для решения соответствующей проблемы замыкания. Возможность описания подобного рода турбулентности может быть основана, в частности, на конструировании кинетических уравнений типа Фоккера—Планка—Колмогорова, аналогичных тем, которые используются в теории фазовых переходов второго рода [см. гл. 5]. Нам представляется, что такой путь построения теории развитой турбулентности окажется эффективным.

§ 1.2. Хаос и самоорганизация в динамических системах

Стохастичность является одним из важнейших свойств нелинейных динамических систем способных совершать как регулярные, так и нерегулярные, хаотические движения, причем стохастическая эволюция системы является следствием такого неотъемлемого внутреннего свойства движения, как неустойчивость. Проблема моделирования хаоса в окружающей нас природе и во Вселенной приобретает в последние десятилетия все большую актуальность. Для таких систем характерны исключительная сложность и нерегулярность, обусловленные, в конечном счете, совокупностью разнообразных нелинейных взаимодействий, приводящих к хаотичности, т. е. к возможности отдельной траектории быть случайной даже при отсутствии воздействия на систему явных случайных сил. Можно говорить об определенной универсальности методов нелинейной динамики, предполагающей общность процессов, происходящих в самых различных системах, что, в свою очередь, предопределяет общность подходов при решении широкого класса модельных задач, представляющих междисциплинарный интерес.

Говоря о физической природе турбулентности в предыдущем разделе, мы подчеркивали стохастичность характера пульсаций скорости и других физических параметров в турбулентном потоке, что дает основание отождествить турбулентность с хаосом. Отмечалось также, что в более общем смысле отражением стохастической природы турбулентности служит полное перемешивание фазовых траекторий с различной топологией аттракторов. В этом параграфе мы рассмотрим кратко некоторые общие положения стохастической динамики и условия, при которых на фоне полностью хаотического движения возникают относительно устойчивые упорядоченные структуры, т. е. происходит самоорганизация.

1.2.1. Элементы стохастической динамики

Основы динамического описания эволюционных процессов базируются на понятии динамической системы (ДС) — объектов любой природы, состояние $\{X_i\}$ которых изменяется во времени в результате действия детерминированного оператора эволюции, задающего соответствие между начальным состоянием системы и единственным состоянием в каждый последующий момент времени. Набору N динамических переменных X_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) или N-мерному вектору $\boldsymbol{X}$ ставится в соответствие точка в пространстве состояний $\mathbb{R}^N$ (фазовом пространстве ДС).

Пусть изучаемая динамическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t)), \tag{1.2.1}$$

где $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t))$ — векторы, компонентами которых являются соответственно параметры состояния X_i и функциональные зависимости, выражающие локальную эволюцию параметров X_i во времени t и пространстве $\boldsymbol{r}$. Функционалы $\boldsymbol{f}_\alpha$, как правило, содержат частные производные по пространственным переменным $\boldsymbol{r}$ и нелинейны, например, из-за явлений переноса (таких как конвекция в гидродинамике). Они могут также зависеть от некоторого набора управляющих параметров α, воспроизводящих силовое воздействие на систему внешней среды. Движение фазовой точки соответствует эволюции состояния системы с течением времени. Для того чтобы задача (1.2.1) была хорошо поставлена, значения управляющих параметров и граничные условия, поддерживаемые на границе системы Σ, должны быть известны. Граничные условия обычно являются либо условиями Дирихле, задающими значения $\{X_i^\Sigma\}$ параметров состояния на поверхности, либо условиями Неймана, задающими значения потоков на поверхности $\{\boldsymbol{n} \cdot \nabla X_i^\Sigma\}$ ($\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к поверхности). В общем случае режиму эволюции ДС из некоторого заданного начального состояния $X_0 = \boldsymbol{X}(t_0)$ соответствует конкретная траектория $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t)$ в фазовом пространстве, которую описывает фазовая точка $\boldsymbol{X}$ при $t \to \pm\infty$.

Выделяют два класса ДС — консервативные системы, например гамильтоновы системы с динамикой, сохраняющей начальный объем фазового пространства, и диссипативные системы, для которых с течением времени облако точек в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ сжимается и собирается в итоге на одном или нескольких аттракторах (притягивающее множество точек в фазовом пространстве, к которому приближаются все соседние траектории после затухания переходных процессов). Простые примеры классических аттракторов — равновесие, периодическое движение, или предельный цикл, квазипериодическое движение. Классическим аттракторам соответствуют классические геометрические объекты в фазовом пространстве: равновесному состоянию — точка, периодическому движению, или предельному циклу, — замкнутая кривая, а квазипериодическому движению соответствует предельный N-мерный тор в фазовом пространстве.

Достижением теории ДС стало открытие хаотической динамики. Возникновение хаоса непосредственно связано с неустойчивостью динамических систем. Уже Пуанкаре, инициировавший исследования по нелинейной динамике, в 1882 году показал (см. *Пуанкаре*, *1971*, *1972*), что ряд механических задач с участием нескольких тел — например, задача трех тел в небесной механике — имеет дело с неустойчивостью. В неустойчивых (стохастических) областях фазового пространства расхождение двух изначально бесконечно близких траекторий увеличивается с течением времени экспоненциально. Системы такого рода определяют как хаотические. Возникновение хаоса кажется на первый взгляд несовместимым с определением ДС, подразумевающим возможность однозначного предсказания конечного состояния по начальному состоянию. И тем не менее в действительности допустим хаотический режим движения динамической системы, при котором сколь угодно малая неопределенность в начальных условиях быстро нарастает во времени, так что предсказуемость поведения ДС становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени. В фазовом пространстве диссипативных систем этим процессам отвечают странные или хаотические аттракторы, являющиеся образом детерминированного хаоса. С подобными аттракторами связаны новые (по отношению к классической геометрии) геометрические объекты, называемые фрактальными множествами. Свойства странных аттракторов не до конца исследованы. Важным свойством является размерность странного аттрактора, которая обычно является дробной (фрактальной), но не целой. В частном случае трехмерного фазового пространства фрактальное множество странного аттрактора выглядит как набор бесконечного числа слоев или параллельных плоскостей, причем расстояние между некоторыми из них становится бесконечно малым. Существование фрактальной структуры у подобных притягивающих множеств при асимптотическом стремлении к ним фазовых траекторий можно отнести к одной из парадигм нелинейной динамики.

Наличие хаотической динамики тесно связано с неустойчивостью, присущей фазовым траекториям системы. Таким образом, задача анализа неустойчивости конкретного режима движения является одной из наиболее важных в стохастической теории ДС. Существует несколько различных определений устойчивости, а именно: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, орбитальная устойчивость и устойчивость по Пуассону (см., например, *Анищенко*, *1990*). Исследуемая фазовая траектория $\boldsymbol{x}^*(t)$ является устойчивой (по Ляпунову) по отношению к возмущению начальных данных, если по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех траекторий $\boldsymbol{x}(t)$ таких, что $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta$, будет выполнено при $t \geqslant t_0$ неравенство $\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$.

Знак $\|\ldots\|$ обозначает любую норму в $\mathbb{R}^N$ $\left(\text{например, } \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})},\ \max\limits_i |x_i| \text{ или } \sum\limits_i |x_i|\right)$.

Таким образом, малое начальное возмущение устойчивых по Ляпунову фазовых траекторий не возрастает с течением времени. Устойчивость называется асимптотической, если, кроме того, $\|x(t) - x^*(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

При исследовании устойчивости часто принимают упрощающее предположение о том, что среда постоянна во времени, тогда $\boldsymbol{f}_\alpha = \boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}))$ (автономная система). Ясно, что такое предположение требует постоянства во времени всех управляющих параметров α и граничных условий. В этом случае проблема возникновения в системе неустойчивого режима может быть исследована, например, следующим образом. Поскольку среда постоянна, мы можем предположить, что существует, по крайней мере, одно не зависящее от времени решение $\overline{X}(\boldsymbol{r})$ уравнения (1.2.1), т. е. тривиальное решение для которого $f_\alpha(\overline{X})=0$. Его мы примем далее за опорное состояние. Простейший способ исследования чувствительности к начальным условиям состоит прежде всего в проверке устойчивости опорного состояния $\overline{X}$ относительно малых возмущений. Для этого необходимо положить

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}, t)=\overline{\boldsymbol{X}}+\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}, t), \qquad \text{где} \quad |x_i/\overline{X}_i| \ll 1, \tag{1.2.2}$$

и подставить в (1.2.1). Тогда временная эволюция возмущения $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}, t)$ задается решением системы уравнений

$$\partial x_i/\partial t=\sum_j A_{ij}x_j, \tag{1.2.3}$$

которая получается при линеаризации векторного уравнения (1.2.1). Здесь A_{ij} — составленная из частных производных векторной функции $f_\alpha(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{r}))$ матрица $A_{ij}=\partial f_i/\partial x_j|_{x(t)=\overline{x}}$, которая характеризуется собственными векторами $\boldsymbol{e}^k$ и собственными значениями ω_k: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^k=\omega_k\boldsymbol{e}^k$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Следовательно, система уравнений (1.2.3) допускает решения вида

$$x_i(\boldsymbol{r}, t)=x_i^k(\boldsymbol{r}, t_0)\exp[\omega_k(t-t_0)], \tag{1.2.4}$$

где собственные значения ω_k матрицы A_{ij} являются корнями характеристического уравнения $\mathrm{Det}[\boldsymbol{A}-\omega\boldsymbol{U}]=0$; здесь $\boldsymbol{U}$ — единичная матрица. Увеличение или уменьшение величины возмущения $\|x_i(\boldsymbol{r}, t)\|$ определяется знаком вещественной части ω_k. Ясно, что если опорное состояние $\overline{X}$ устойчиво, то все $\mathrm{Re}\{\omega_k\}$ должны быть отрицательны. Таким образом, для анализа свойств фазовых траекторий в локальной окрестности состояния равновесия необходимо исследовать поведение $\mathrm{Re}\{\omega_k\}$ как функции значений управляющего параметра α и наложенных на систему граничных условий.

Для неустановившегося опорного состояния $\overline{X}(\boldsymbol{r}, t)$ получаемая при линеаризации уравнения (1.2.1) матрица $A(t)$ будет зависеть от времени. По этой причине, ее собственные значения ω_k и собственные векторы $\boldsymbol{e}^k$ также будут меняться с течением времени. В этом случае при изменении t показатель экспоненты $\omega_k(t)$ принимает различные значения. Следовательно, возможна ситуация, когда некоторое малое возмущение $\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{x}^k(t)$ экспоненциально растет в одних точках изучаемой траектории $\overline{X}(\boldsymbol{r}, t)$ и уменьшается в других (здесь $\{\boldsymbol{x}^k(t)\}$ — фундаментальная система линейно независимых решений уравнения (1.2.3)). Для анализа этого случая рассмотрим, например, эволюцию компоненты малого возмущения $\boldsymbol{x}^k(t)$, направленной вдоль k-го собственного вектора $\boldsymbol{e}^k$ матрицы A. Как известно, количественной мерой стохастичности гамильтоновых и негамильтоновых диссипативных систем в теории

ДС служат так называемые характеристические показатели Ляпунова, рассчитываемые по известным уравнениям движения. При этом устойчивость траектории вдоль собственного вектора $\boldsymbol{e}^k(t)$ определяется характеристическим показателем Ляпунова λ_k (см., например, *Былов и др., 1966*):

$$\lambda_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t-t_0} \ln\left\| \frac{\boldsymbol{x}^k(t)}{\boldsymbol{x}^k(t_0)} \right\|, \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{1.2.5}$$

где черта сверху означает верхний предел. Для рассматриваемого N-мерного фазового пространства устойчивость траектории определяется набором из N показателей Ляпунова, которые, в случае их расположения в убывающем порядке $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$, образуют так называемый спектр характеристических показателей Ляпунова (ЛХП) фазовой траектории $\overline{X}(\boldsymbol{r}, t)$. Заметим, что спектр ЛХП не зависит от выбора фундаментальной системы $\{\boldsymbol{x}^k(t)\}$ и является характеристикой линейной системы (1.2.3) в целом. С помощью показателей Ляпунова проверяется чувствительность системы к вариациям начальных условий. Из теории показателей Ляпунова следует, что показатель λ_k можно трактовать как усредненную вдоль изучаемой траектории вещественную часть собственного значения $\omega_k(t)$ матрицы линеаризации $\boldsymbol{A}(t)$

$$\lambda_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\,\omega_k(t')\, dt'. \tag{1.2.6}$$

Это выражение позволяет понять, что происходит с соответствующей компонентной начального возмущения в среднем вдоль траектории. Если траектории $\overline{X}(\boldsymbol{r}, t)$ устойчивы по Ляпунову, то произвольное начальное возмущение $\boldsymbol{x}(t_0)$, в среднем, вдоль траектории не растет. Для этого необходимо и достаточно, чтобы спектр ЛХП не содержал положительных показателей; случаю положительности хотя бы одного из них отвечает хаотическое движение системы. Таким образом, критерий хаоса в терминах показателя Ляпунова имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda > 0 \text{ — хаотическое движение в динамической системе,} \\ \lambda \leqslant 0 \text{ — регулярное движение в динамической системе.} \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Если частное решение $\overline{X}(\boldsymbol{r}, t)$ автономной системы (1.2.1) является состоянием равновесия, т. е. $f_a(\overline{X}) = 0$, то показатели Ляпунова равны вещественным частям собственных значений: $\lambda_k = \mathrm{Re}\,\omega_k$. Зная показатели Ляпунова, легко определить, к какому типу предельных множеств принадлежит исследуемое состояние равновесия. Положение равновесия является аттрактором, если оно асимптотически устойчиво во всех направлениях, т. е. спектр ЛХП состоит только из отрицательных показателей (устойчивый узел или фокус). Если состояние равновесия неустойчиво во всех направлениях, то оно является репеллером (неустойчивый узел или фокус). Если спектр ЛХП включает как положительные, так и отрицательные показатели, то состояние равновесия принадлежит к седловому типу (простое седло или седло-фокус). Показатели Ляпунова позволяют исследовать также поведение фазовых траекторий в окрестности периодических, квазипериодических или хаотических решений системы (1.2.1) (см., например, *Анищенко и др., 2005*). Непериодические решения системы (1.2.1) могут соответствовать хаотическим аттракторам сложной геометрической структуры, которые имеют, по крайней мере, один положительный показатель Ляпунова и, как следствие, дробную Хаусдорфову размерность.

С показателями Ляпунова, определяющими меру расхождения траекторий, теснейшим образом связана и так называемая энтропия Колмогорова—Синая (K-энтропия) для динамических систем (*Колмогоров, 1959*; *Синай, 1970*). Строгое определение этой величины выходит за рамки нашего изложения. В самом общем случае величина эта равна сумме положительных показателей Ляпунова, характеризующих количественную меру процесса хаотизации. При этом положительность K-энтропии указывает на зарождение стохастичности, или, говоря другими словами, на экспоненциальные расходимости близлежащих траекторий, локальная неустойчивость которых по своей физической сути характеризует статистические свойства динамической системы (точнее, ее математической модели). Следует отметить, что именно цитируемые выше работы А. Н. Колмогорова и Я. Г. Синая, в которых дано объяснение хаотичности и ее зарождения в детерминированных системах, положили начало последовательной теории хаотических динамических систем.

Существует также тесная связь между показателями Ляпунова λ_j и дробной Хаусдорфовой размерностью аттрактора, которую можно оценить, например, по формуле Каплана—Йорка (*1978*)

$$D_L = k - \frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}{|\lambda_{k+1}|}, \tag{1.2.8}$$

где k — наибольшее целое число, для которого $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \geqslant 0$. Размерность D_L, вычисляемая по формуле (1.2.8), называется ляпуновской размерностью и служит оценкой снизу для метрической размерности аттракторов. Размерность Ляпунова имеет большое практическое значение, поскольку для ее вычисления требуется только спектр ЛХП. В частности, для состояния равновесия $D_L = 0$, для предельного цикла $D_L = 1$, для N-мерного тора $D_L = N$, т. е. во всех этих случаях фрактальная размерность равна метрической размерности этих регулярных аттракторов.

Зная показатели Ляпунова, можно оценить также фрактальную размерность гиперболических странных аттракторов, существование которых для грубой и гиперболической динамической системы (1.2.1), когда все ее фазовые траектории являются седловыми и сохраняют свои свойства при малых возмущениях, была доказана Рюэлем и Такенсом (*1971*). В этом случае спектр ЛХП содержит, по крайней мере, один положительный показатель. Гиперболический странный аттрактор состоит из континуума неустойчивых «листов», или кривых, всюду плотных в аттракторе, вдоль которых близкие фазовые траектории экспоненциально расходятся (минимальная размерность фазового пространства, в которое может быть вложен странный аттрактор, равна 3). Таким образом, на фазовой плоскости, где совокупность всех возможных траекторий образует устойчивые и неустойчивые многообразия, показатели

Ляпунова характеризуют среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий.

Следует иметь в виду, что область временного (и/или пространственного) хаоса может возникать практически в любой нелинейной динамической системе уже при малом числе степеней свободы. Так, исходные представления о случайных процессах, характеризующих статистические ансамбли и большие динамические системы, оказываются применимыми уже при числе степеней свободы $N \geqslant 3/2$, например, когда на систему с одной степенью свободы действует периодическая сила (см., например, *Заславский*, *2004*). В частности, в случае возмущенного движения ДС, описываемой гамильтонианом $H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, t)$ (где функция V — периодическая по времени с периодом $T = 2\pi/\nu$) в фазовом пространстве канонических переменных «действие-угол» I, θ, в ней могут, тем не менее, появиться случайные траектории даже при малых значениях безразмерного параметра возмущения $\varepsilon \ll 1$ и при отсутствии случайных сил. Это означает, что в некоторой области фазового пространства и значений управляющих параметров системы ее динамика будет стохастической, что является следствием сложности движения, возникающей при взаимодействии возможных в этом случае нелинейных резонансов и цепочки островков (областей начальных условий, в которых зарождаются устойчивые траектории). Резонансные члены в подобной гамильтоновой системе порождают сепаратрисы нелинейного резонанса (которые, не являясь реальными траекториями движения изображающей точки, разделяют между собой области фазовой плоскости с фазовыми траекториями различного типа) и связанные с ними системы эллиптических и гиперболических особых точек. Устойчивость внутри каждой ячейки сепаратрисы последовательно уменьшается, и ячейка «одевается» стохастическим слоем некоторой ширины со сложным временным поведением в окрестности сепаратрисы, что приводит к иерархии структур в фазовом пространстве. Появление стохастического слоя вблизи сепаратрисы оказывает сильное влияние на динамику нелинейных систем. Если сепаратрисы резонансов перекрываются, то стохастические слои (или так называемые гемоклинические структуры, возникающие при пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия одной седловой точки) различных резонансов могут объединяться, образуя более широкие области стохастичности. Образование стохастических слоев и затем их разрушения (сопровождаемое разрушением интегралов движения) сильно отражается на динамике нелинейных систем, приводя к появлению сепаратрисного хаоса (см. *Заславский*, *2004*; *Лоскутов*, *2007*). Очевидно, еще вероятнее появление хаотичности в динамике более сложных физических систем со многими степенями свободы, характерным примером которых может служить гидродинамическая турбулентность.

Заметим, что в полностью интегрируемых гамильтоновых системах, подверженных малым возмущениям, сохраняется большинство нерезонансных торов, которым отвечают квазипериодические движения, в отличие от резонансных (и части нерезонансных) торов, которым соответствует хаотическая динамика. Это важное утверждение составляет основу знаменитой теоремы Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ теоремы), которая явилась исходным пунктом в понимании природы возникновения хаоса в нелинейных гамильтоновых системах (*Колмогоров*, *1954*; *Арнольд*, *1963*; *Moser*, *1962*). Из нее, в частности, следует, что для систем с двумя степенями свободы инвариантные двумерные торы разделяют трехмерное энергетическое пространство $H = E$ на непересекающиеся области и при малых возмущениях система сохраняет устойчивость. В то же время, при $N > 2$ инвариантные торы уже не делят $(2N - 1)$-мерную энергетическую гиперповерхность на непересекающиеся части, что приводит к сильному изменению топологии фазовых траекторий и появлению хаотического движения.

Примерно те же черты рождения хаоса характерны и для негамильтоновых систем, однако имеющая место в этом случае диссипация приводит к уменьшению фазового объема системы, причем важным для этих систем условием является финитность динамики в фазовом пространстве, а осцилляторная динамика может вообще отсутствовать. Отличительным свойством диссипативных систем является возможность появления упоминавшихся ранее разнообразных инвариантных множеств точек фрактальной природы — аттракторов (репеллеров), притягивающих (отталкивающих) фазовые траектории, а также еще более сложных притягивающих множеств в конечной области фазового пространства, на которых реализуется стохастическая динамика, — стохастических аттракторов (обладающих свойством перемешивания) и квазиаттракторов. В условиях сильной неустойчивости все фазовое пространство системы, независимо от величины возмущения, покрыто стохастической паутиной, по которой блуждают фазовые точки (диффузия Арнольда). Двигаясь по нитям этой паутины, фазовая точка на гиперповерхности заданной энергии может сколь угодно близко подойти к любой точке этой гиперповерхности. Подобные структуры представляют собой фундаментальное свойство как гамильтоновых, так и негамильтоновых (диссипативных) систем, обусловленное как локальной неустойчивостью, так и топологией системы (подробнее см., например, *Лоскутов*, *2007*).

В свою очередь, с критерием локальной неустойчивости динамических систем, не обусловленных действием случайных полей, связано свойство перемешивания в некоторой конечной области фазового пространства, которым обладают все нелинейные (как консервативные, так и неконсервативные) динамические системы, совершающие финитное движение (*Крылов*, *1950*). Наличие такой неустойчивости приводит к тому, что с течением времени начальный элементарный объем, перемещаясь по всей энергетически доступной гиперповерхности, сильно деформируется. Перемешивание можно представить как своеобразный дрейф и переплетение фазовых траекторий нелинейной ДС при возникновении малых возмущений начальных условий. Из перемешивания вытекают три очень важных следствия, наблюдающиеся в реальных системах: непредсказуемость, расцепление временных корреляций и необратимость, присущая замкнутым системам.

Перемешивающий поток возникает тогда, когда в фазовом пространстве близкие в начальный момент времени точки будут двигаться по экспоненциально расходящимся траекториям. Иными словами, если в начальный момент времени положение фазовой точки известно с конечной точностью, то сказать, где именно она окажется через достаточно длительный промежуток времени, невозможно. Таким образом, возникает непредсказуемость в системах с перемешиванием. Определяющую роль здесь играет чувствительность системы к малым возмущениям начальных условий. Заметим, что существенная зависимость от начальных условий лежит в основе математической теории хаоса, на что, исходя из невозможности достоверных долгосрочных прогнозов погоды при наличии даже ничтожных ошибок в измерениях текущих погодных параметров среды, обратил внимание почти 40 лет назад Э. Лоренц (*1963*). Он назвал эту чувствительность к начальным условиям эффектом бабочки, что в дальнейшем в художественной форме развил известный писатель Р. Бредбери в рассказе «И грянул гром», 1952 г.

Кроме этого, перемешивание характеризуется расцеплением временных корреляций при $t \to \infty$. Иными словами, система с перемешиванием с течением времени «забывает» о своих начальных условиях, причем затухание корреляций может происходить экспоненциально с некоторым характерным временем τ_c расцепления корреляций. Расцепление временных корреляций является одним из очень важных следствий хаотичности, которое состоит в том, что спустя промежуток времени, равный времени расцепления корреляций τ_c, значения фазовых переменных оказываются статистически независимыми. Это свойство перемешивания часто используется как критерий хаотичности.

Наконец, из условия перемешивания автоматически вытекает упомянутое выше свойство эргодичности системы, т. е. равенство временных и фазовых средних для какой-либо интегрируемой функции в области фазового пространства ДС. В частности, характерной особенностью эргодического движения гамильтоновой системы является неизменность формы малой области, которая с течением времени просто блуждает по тору, пересекая каждый его участок бесконечное число раз. Таким образом, эргодичность еще не означает хаотичность, т. е. из эргодичности не следует перемешивания, при наличие которого поведение системы естественно считать хаотическим. Вместе с тем, наличие эргодичности объясняет необратимость временной эволюции систем, описываемых обратимыми динамическими уравнениями движения (например, уравнениями Гамильтона). Действительно, если система эргодична, то с течением времени она побывает во всех энергетически возможных состояниях и ее фазовая траектория посетит все доступные области фазового пространства. При этом время пребывания в конкретной области пропорционально объему этой области. При $t \to \infty$ любое из таких состояний будет наблюдаемо. Если число степеней свободы системы достаточно велико, то время, в течение которого система перейдет в некоторое выделенное (принимаемое за начальное) состояние, может оказаться очень большим. Отсюда очевидным образом вытекает необратимость замкнутых микроскопических систем с большим числом степеней свободы. Таким образом, макроскопическую необратимость динамической системы, являющуюся предпосылкой для протекания процессов самоорганизации в системе, можно объяснить неустойчивостью микроскопического движения, т. е. хаосом микромира. Следует, однако, подчеркнуть, что окончательное решение проблемы макроскопической необратимости еще впереди, и оно обязательно должно включать в себя космологический аспект проблемы.

В связи со всем сказанным сделаем следующее замечание. В то время как в литературе по хаотической динамике существуют четкие различия между регулярным (периодическим или квазипериодическим) и стохастическим движениями, вытекающие из анализа фундаментальных дифференциальных уравнений классической механики, для реальных механических систем условия соответствующих теорем не всегда выполняются. Действительно, теория ДС имеет, как правило, дело с асимптотическим поведением системы при стремлении расчетного времени к бесконечности. Это означает, что, например, нахождение характеристического показателя Ляпунова требует стремления к бесконечности расчетного времени. Между тем, характерные времена наблюдения некоторых систем, например астрономических систем, как правило, много меньше их времени жизни. В связи с невозможностью осуществить переход $t \to \infty$ во многих практически важных астрофизических задачах, возникает вопрос о достоверности получаемой в этом случае оценки характеристического показателя Ляпунова, например с целью изучения динамических свойств газового диска спиральной галактики. Такая оценка необходима, в частности, для понимания стохастической природы динамики реальных галактик. Конечность временного интервала наблюдений требует разработки соответствующих вычислительных алгоритмов для численного расчета показателя Ляпунова для различных семейств траекторий вблизи сепаратрис гигантских вихрей и седловых точек поля скоростей галактики (*Фридман и др.*, *2003*).

1.2.2. Соотношения порядка и турбулентного хаоса

Перейдем теперь к рассмотрению процесса самоорганизации хаотической системы, при которой система структурируется спонтанно, то есть «сама по себе», без какого-либо внешнего управления. Здесь слово «структура» понимается как тип упорядочивания элементов хаотической системы. Неустойчивость динамической системы инициирует процесс самоорганизации, порождающий новые когерентные образования, причем именно наличие необратимости в системе создает предпосылки для возникновения в ней процесса структурообразования. Заметим, что появившиеся в результате самоорганизации высокоорганизованные структуры возникают, как правило, вследствие скачкообразного понижения симметрии системы, которое в этом случае можно трактовать как некий «фазовый переход» второго рода (см. *Кадомцев*, *Рязанов*, *1983*). Результатом самоорганизации становится возникновение нового относительно устойчивого эволюционного состояния, которое может оказаться началом следующего цикла. При переходах между циклами самоорганизации, которые носят характер бифуркаций, динамическая система вблизи фазовых переходов демонстрирует некоторые особенности, к которым относятся мощные флуктуации, большие времена релаксации, обширные пространственные корреляции, структуры на многих масштабах, особые спектры шума (см. *Эбелинг*, *Файстель*, *2005*).

В классе открытых гидродинамических систем способность к самоорганизации реализуется только при определенных условиях, к которым можно отнести существование некоторой закритической области изменения параметров состояния, выводящей систему из состояния локального равновесия, и отвод энтропии из системы. В границах указанной области, определяемой эффективностью внутренних обратных связей, могут одновременно возникать новые ветви решения динамической системы (1.2.1) с более низкой симметрией в тех случаях, когда управляющие параметры α, воспроизводящие воздействие на систему внешнего мира, достигают некоторого порогового значения. Именно с этих позиций авторы подходят к процессу перехода от ламинарного течения к турбулентному, который обычно считается процессом хаотическим, но может рассматриваться также как процесс самоорганизации (см. *Пригожин*, *Стенгерс*, *2001*; *Климонтович*, *2002*). Иначе говоря, согласно данной концепции, сложную динамику турбулентных течений не следует *a priori* воспринимать как неупорядоченность. Напротив, гидродинамическую турбулентность надлежит рассматривать как течение, обладающее достаточно высокой степенью организации, при которой обусловленная турбулентными флуктуациями на мезомасштабном уровне часть энергии хаотической системы переходит в высокоорганизованное движение когерентных диссипативных структур. В частности, каскадный процесс дробления вихрей, происходящий в развитой турбулентности, может быть интерпретирован как неограниченная последовательность процессов самоорганизации. Исходя из такого подхода представляет первостепенный интерес конструирование макроскопической модели структурированной турбулентности с учетом происходящих в потоке нелинейных кооперативных процессов. Для решения этой задачи целесообразно использовать методы стохастической термодинамики необратимых процессов, столь хорошо зарекомендовавшие себя в последнее время при изучении различных неравновесных диссипативных структур вдали от термодинамического равновесия (см., например, *Кайзер*, *1990*). Все эти вопросы концептуально рассматриваются нами в пятой и шестой главах монографии.

Зададимся теперь ключевым вопросом: представляет стационарное развитое турбулентное движение жидкости хаос или порядок? В настоящем разделе мы попытаемся привести ряд аргументов, которые позволяют, на наш взгляд, трактовать переход от ламинарного к развитому турбулентному движению как процесс самоорганизации, т. е. как неравновесный «фазовый переход» (второго рода) от более симметричного (ламинарного) к менее симметричному (турбулентному) движению.

Прежде всего, перечислим характерные черты развитого турбулентного движения, совокупность которых и служит физическим определением понятия «турбулентность» (*Климонтович*, *2002*):

• Турбулентное движение жидкости суть следствие неустойчивости ламинарного течения или, иными словами, следствие динамической неустойчивости движения, описываемого уравнениями гидродинамики. Это неравновесный процесс в сплошной диссипативной среде, который характеризуется очень большим числом возбужденных коллективных (макроскопических) степеней свободы (в качестве которых могут фигурировать, например, моды фурье-разложения для поля скоростей).

• Конкретная реализация турбулентного движения существенно изменяется при малом изменении начальных и граничных условий. Из-за чрезвычайной сложности движения, связанной с возбуждением большого числа макроскопических степеней свободы, на динамическом уровне описания турбулентное течение практически непредсказуемо.

• Переход от ламинарного течения к турбулентному течению сопровождается уменьшением симметрии и может рассматриваться как неравновесный фазовый переход второго рода (когда критической температуре соответствует критическое значение числа Рейнольдса). В этом смысле динамическая неустойчивость ламинарного течения играет конструктивную, положительную роль.

• Развитое турбулентное течение представляет собой пример процесса самоорганизации в открытой системе, уменьшающей ее энтропию. Другими словами, турбулизованной жидкости свойственна самоорганизация, как процесс возникновения и усложнения мезомасштабных когерентных вихревых структур вдали от положения равновесия в первоначально симметричной мелкомасштабной пульсирующей среде. Мезомасштабные гидродинамические флуктуации (внешние по отношению к выделенным степеням свободы) играют при этом определяющую роль.

Существенное увеличение коэффициента турбулентной вязкости по сравнению с соответствующим коэффициентом молекулярной вязкости при ламинарном режиме течения также можно рассматривать как некое косвенное доказательство увеличения степени упорядоченности при переходе к турбулентному движению. Действительно, при ламинарном течении перенос импульса от слоя к слою потока осуществляется независимыми изменениями импульса отдельных молекул газа. В противоположность этому, при турбулентном течении передача импульса от слоя к слою является процессом коллективным и, следовательно, связанным с более высокоорганизованным движением.

Более того, в соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными (основательный обзор соответствующих публикаций приведен, например, в монографии (*Хлопков и др., 2002*)), наличие локализованных когерентных вихревых образований, случайно распределенных в пространстве и во времени, является характерной чертой многих, если не всех, развитых турбулентных течений. Как теперь стало ясно, развитая турбулентность связана с возникновением и эволюцией высокоорганизованных диссипативных структур — вихревых когерентных структур (КС) всевозможного пространственного, временного или пространственно-временного масштаба — при определенных режимах течения жидкости в существенно неравновесной открытой системе. Часть энергии системы, которая в ламинарном течении находилась в тепловом движении молекул, переходит в макроскопическое организованное движение КС. При этом когерентная вихревая структура может быть определена, в частности, как связанная, жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т. е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой [см. п. 6.2].

Термодинамическое доказательство возможности структурирования мелкомасштабного турбулентного хаоса

Согласно термодинамическим представлениям, предпосылкой для формирования упорядоченных когерентных структур в открытых динамических диссипативных системах является существование определенного соотношения между производством энтропии внутри системы и обменом энтропией с внешней средой. При этом формирование когерентных структур при необратимых процессах связано с определенными условиями — здесь, так же как и в случае равновесия, наблюдается качественный скачок (аналогичный фазовому переходу) при достижении пороговых значений критических параметров. Важнейшее физическое условие процесса возникновения упорядоченного состояния в диссипативных системах, проявляющегося в согласованности (когерентности) поведения молекул, заключается в том, что оно имеет место только вдали от положения термодинамического равновесия, при этом движение элементов системы (молекул, волн и т. п.) синхронизировано параметрами порядка. Нелинейность является важной и общей чертой процессов, происходящих вдали от равновесия. Кооперативное поведение молекул выражает, по-видимому, фундаментальный принцип организации упорядоченных структур, т. е. самоорганизации системы, уменьшающей ее энтропию.

В частности, типичным примером диссипативных структур в гидродинамике являются так называемые конвективные ячейки Бенара. По сравнению с однородным равновесным распределением скорости конвективные ячейки являются более высокоорганизованной структурой, возникающей в результате кооперативного движения молекул жидкости. В этом случае неравномерно нагреваемая жидкость отдает энтропию (или получает нэгэнтропию от внешней среды), причем в стационарном случае ровно столько, сколько ее производится внутри системы за счет потерь на внутреннее трение (вязкость) и теплообмен между различными ее участками. Именно таким образом для данного конкретного случая обозначен механизм формирования структуры при большом отклонении от равновесия.

Как уже упоминалось, переходы от одной диссипативной структуры к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам, если понятие фазового перехода распространить на подобный класс неравновесных явлений. Известно, что в закрытой системе турбулентное движение, созданное в начальный момент, монотонно затухает во времени (вырождается), т. е. деградирует к ламинарному. Это лишний раз показывает, что процесс самоорганизации может иметь место лишь в замкнутой (полузакрытой) гидродинамической системе, при наличии управляющего параметра, роль которого играет, как правило, число Рейнольдса. Замкнутые системы, обменивающиеся с окружением только теплотой (излучением), способны также «экспортировать» и «импортировать» энтропию, причем в тех случаях, когда энтропии отводится больше, чем производится внутри системы (т. е. энтропия в пределах системы уменьшается), в ней возникает порядок. Устойчивые мезомасштабные когерентные структуры на фоне мелкомасштабного турбулентного хаоса могут возникать, в частности, как результат непрерывного перераспределения энергии, поступающей в систему извне (т. е. в подсистему мелкомасштабного турбулентного хаоса от осредненного движения жидкости [см. гл. 3]), за счет диссипации, процессов переноса путем диффузии или конвекции, а также в результате нелинейного взаимодействия различных мелкомасштабных вихревых образований. Подчеркнем еще раз, что диссипация играет в процессах структуризации турбулентности конструктивную роль. Без ее участия невозможно образование устойчивых пространственно-временных образований, последовательности которых и составляют процесс самоорганизации.

Таким образом, возникает необходимость в разработке количественных критериев относительной степени упорядоченности различных неравновесных состояний замкнутых систем и направления их эволюции. В работах И. Пригожина по неравновесной термодинамике было показано, сколь существенную и разнообразную роль играют понятия «энтропии» и «производства энтропии» в описании характера эволюции диссипативной системы. Сформулированный им «Принцип минимума производства энтропии в стационарных состояниях» (см., например, *Пригожин*, *Дефей*, *1966*) является важнейшим инструментарием исследования термодинамических процессов в гидродинамической системе. Согласно этому принципу, доказанному лишь в рамках линейных необратимых процессов, состояние всякой замкнутой системы с независящими от времени краевыми условиями всегда изменяется в направлении уменьшения производства энтропии, пока в конце концов не будет достигнуто стационарное состояние, при котором производство энтропии минимально. Однако справедливость этого принципа ограничена лишь областью линейных процессов, т. е. относительно малыми отклонениями от равновесия. Авторы цитированной выше монографии показали, что стационарные состояния линейной системы всегда устойчивы к малым отклонениям, т. е. в линейной области принципиально невозможны неустойчивые стационарные состояния. Отсюда, в частности, следует, что в окрестности линейного стационарного состояния невозможно и осциллирующее движение жидкости, приводящее при некоторых условиях (как было отмечено выше) к возникновению из турбулентного хаоса вихревых когерентных структур.

В силу того что возникновение, например, временных структур, подобных периодическим колебаниям или переходам от неустойчивых стационарных состояний к устойчивым (что собственно и характерно для возникновения турбулентности) в линейной области невозможно, необходимо обратиться к нелинейной области, поскольку для них допустима совершенно иная ситуация. В случае нелинейной области теорема относительно минимального производства энтропии в стационарном состоянии видоизменяется — она переходит в известный принцип эволюции Пригожина—Гленсдорфа (см., например, *Гленсдорф*, *Пригожин*, *2003*). Когда какая-либо система сильно отклоняется от равновесия, характеризующие ее переменные состояния удовлетворяют, вообще говоря, уже не линейным, а более точным нелинейным уравнениям. При значительном удалении от равновесия в поведении замкнутых систем проявляются качественно новые особенности. В частности, становится возможным автоколебательное поведение типа известной реакции Белоусова—Жаботинского (когда, в результате введения в раствор высококачественных химикатов, ионы церия и брома и молекулы малоновой кислоты вступают в реакцию, образуя при этом пространственные и временные структуры), образование иерархически соподчиненных структур и т. д. Подчеркнем еще раз, что возникновение когерентных структур возможно только вдали от положения равновесия при особых внешних и внутренних условиях, заключающихся в том, что система замкнута и обладает нелинейной внутренней динамикой, а ее внешние параметры имеют сверхкритические значения. Напомним, что именно Пригожин предложил называть подобные пространственные, временные или пространственно-временные структуры, которые могут возникать вдали от равновесия в нелинейной области, когда параметры систем превышают критические значения, диссипативными структурами. Таким образом, нелинейная термодинамика необратимых процессов дает ключ к более глубокому пониманию процессов в нелинейных системах, какой и является турбулентность.

В комплексе проблем, которым посвящена монография, нас будут интересовать квазистационарные неравновесные состояния однородного турбулентного поля, эволюция которых может приводить к возникновению КС. Однако если для стационарных равновесных состояний можно пользоваться условием максимума энтропии, то для квазистационарной неравновесной системы такой универсальный экстремальный принцип отсутствует. В нелинейной неравновесной термодинамике не существует таких функций состояния, которые имели бы экстремум в стационарном состоянии; в частности, производство энтропии отнюдь не должно быть минимальным. Важно также иметь в виду, что в нелинейной области устойчивость стационарного состояния не доказывается, а существует по определению. В связи с этим возникает вопрос: можно ли обобщить пригожинский принцип на случай нелинейной термодинамики необратимых процессов? Теоретические исследования, проведенные Стратоновичем (*1985*), показали, что такая возможности в общем случае отсутствует.

Вместе с тем, в работе Климонтовича (см., например, *Климонтович*, *2002*) на основе конкретного физического процесса — перехода от ламинарного течения к турбулентному — был сформулирован «Принцип минимума производства энтропии в процессах самоорганизации», позволяющий отличить «порядок» от «хаоса». Суть этого принципа состоит в следующем: процесс самоорганизации представляется как «фазовый переход» (или последовательность «фазовых переходов»), в результате которого происходит переход системы в более упорядоченное состояние, отвечающее более низкой симметрии. Принцип утверждает, что производство энтропии в новом, менее симметричном состоянии, возникшем в результате очередного фазового перехода, меньше производства энтропии предыдущего состояния, которое мысленно продолжено в неустойчивую область. Автором этого принципа была продемонстрирована его эффективность, в частности, на примере перехода от стационарного ламинарного течения Пуазейля в трубе к стационарному турбулентному течению. В результате расчета, основанного на сопоставлении значений энтропии Больцмана—Гиббса—Шеннона (см. *Климонтович*, *1990*), перенормированных к заданному значению средней эффективной энергии открытой системы, было показано, что этот переход идет с уменьшением энтропии и, следовательно, представляет собой явление самоорганизации.

Заметим, что приведенный пример является лишь одним из множества других аргументов в пользу принятой здесь пригожинской точки зрения на турбулентность. Об относительной степени упорядоченности турбулентного движения можно судить по различным критериям: по значениям показателей Ляпунова, по энтропии Колмогорова—Синая, по фрактальной размерности эффективного фазового пространства и т. п. В гл. 5 данной книги нами рассмотрено также термодинамическое доказательство возможности структурирования мелкомасштабного турбулентного хаоса.

Инверсный каскад и фрактальная структура когерентных структур

Как уже было отмечено выше, для некоторых турбулентных движений характерна передача энергии от мелкомасштабных движений к крупномасштабным (инверсный каскад) (см., например, *Бершадский*, *1988*, *1989*). Физическим механизмом реверс-каскада может быть объединение мелкомасштабных вихрей в более крупномасштабные когерентные структуры, фрактальные вихревые кластеры. К течениям такого рода относятся: двумерная турбулентность, турбулентность во вращающейся жидкости, магнитогидродинамическая турбулентность и т. п. В частности, общая циркуляция в глобальной системе атмосферных движений может потреблять энергию циклонов благодаря инверсному каскаду. Следует отметить, что реальность процесса дробления, а также обратного ему процесса объединения вихрей, подтверждается и прямыми наблюдениями (см., например, *Offen*, *Kline*, *1975*). В гл. 8 нами будет сформулирована общая концепция энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности.

Фрактальный вихрь-кластер реализует перемежающееся турбулентное движение. При этом физико-химические свойства подобных кластеров существенно отличаются от соответствующих свойств как эквивалентной однородной частицы, так и системы независимых малых частиц. Фрактальный вихрь-кластер обладает пористой структурой, фрактальная размерность которой может быть значительно меньшей, чем размерность координатного пространства, в котором этот кластер образуется. Обычно фрактальный кластер имеет размеры до нескольких десятков микрон и включает до 10^4 частиц. При увеличении размера кластера падает его стабильность. Фрактальные агрегаты характеризуются убывающей плотностью, развитой структурой пор и высоким значением удельной поверхности. По мере роста кластера увеличивается размер пустот в нем и падает его средняя плотность. Заметим, что в гравитационном поле фрактальные кластеры оседают значительно медленнее, чем компактные частицы той же массы.

1.2.3. Возникновение упорядоченности в турбулентных течениях. Стохастико-термодинамическая модель

Поскольку энергия турбулентных движений благодаря вязкости непрерывно рассеивается, то достижение локального термодинамически равновесного состояния турбулентного хаоса оказывается в общем случае невозможным. Термодинамический порог самоорганизации системы достигается, когда термодинамическая ветвь претерпевает первую бифуркацию. В точке бифуркации (в критической точке, индуцированной естественным шумом подсистемы турбулентного хаоса, связанной с его «тепловой» структурой) динамика системы определяется существующими в ней нелинейностями. Другими словами, за термодинамическим порогом самоорганизации мы вступаем в область синергетики, когда огромное количество степеней свободы турбулизованной жидкости резко сокращается и триллионы молекул оказываются «подчиненными» по терминологии Хакена (*1991*) относительно небольшому числу мод.

Важно при этом иметь в виду, что турбулентные флуктуации (естественный шум хаоса) способны не только приводить к флуктуациям в термодинамических характеристиках системы, но и вызывать качественную перестройку ее режима, а именно инициировать появление новых стационарных состояний, возникновение незатухающих периодических осцилляций и т. п. Таким образом, в данной проблеме важен новый класс эффектов — неравновесные «фазовые переходы», индуцированные естественным шумом хаоса.

Теория индуцированных шумом фазовых переходов базируется на математической теории случайных процессов (см. *Хорстхемке*, *Лефевр*, *1987*). Математическим описанием линейных явлений в случайной среде (в нашем случае подсистеме турбулентного хаоса) являются уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) для марковских диффузионных процессов и стохастические дифференциальные уравнения. Стохастико-термодинамический подход к построению феноменологической макроскопической модели развитой турбулентности в сжимаемой жидкости при учете образования в ней устойчивых пространственно-временных диссипативных структур позволяет проследить эволюцию пульсирующих характеристик турбулентного хаоса. А включение в модель структурированной турбулентности набора случайных переменных в качестве внутренних параметров подсистемы турбулентного хаоса (относящихся, например, к каскадному процессу дробления крупномасштабных вихревых образований или температурных неоднородностей в системе) дает возможность вывести методами стохастической неравновесной термодинамики кинетические уравнения ФПК в пространстве конфигураций, например в пространстве флуктуирующей энергии турбулентной диссипации. Эти уравнения предназначены для определения временной эволюции плотности распределения условной вероятности параметров состояния структурированного хаоса, а также для анализа марковских стохастических процессов перехода из одного стационарно-неравновесного состояния в другое в результате последовательной потери устойчивости при изменении управляющих параметров (например, числа Рейнольдса). Альтернативный метод описания механизмов перехода подобного рода, тесно связанный с полученными термодинамическим путем кинетическими уравнениями ФПК, основан на стохастических уравнениях ланжевеновского типа.

Все эти вопросы специально рассматриваются в гл. 5 настоящей монографии, где дано детальное обоснование ряда постулатов и предположений физического и математического характера, используемых в стохастико-термодинамической модели структурированной турбулентности. В частности, проанализирована кардинальная проблема развиваемого подхода — возможность существования асимптотически устойчивых состояний подсистемы турбулентного хаоса и доказана соответствующая H-теорема для уравнений ФПК, позволяющая заключить, что любое решение уравнений ФПК при $t \to \infty$ стремится к стационарному режиму. Получен неравновесный вероятностный потенциал, обобщающий известное соотношение Больцмана—Планка для термодинамически равновесных состояний на стационарно-неравновесные состояния представляющего ансамбля, и показано, что он является функцией Ляпунова для таких состояний.

В свою очередь, в шестой главе рассмотрен один из возможных механизмов образования мезомасштабных когерентных вихревых структур, связанный с частотно-фазовой синхронизацией автоколебательных мод как механизма образования мезомасштабных вихревых структур в системах большой размерности. Указанный механизм предполагает исследование синхронизации элементов ансамбля, состоящего из большого числа взаимодействующих стохастических генераторов и моделирующего подсистему турбулентного хаоса. Важность последнего обстоятельства обусловлена тем, что, как известно, синхронизация в ансамбле автогенераторов служит причиной ограничения роста размерности аттракторов, что приводит к возникновению устойчивых пространственно-временных структур. Кроме этого, рассмотрены эффекты образования частотных кластеров в неоднородных цепочках квазигармонических генераторов и исследовано влияние шума на режим кластерной синхронизации.

§ 1.3. Космические среды: примеры самоорганизации

Тематика, охватываемая содержанием монографии, является развитием синергетического подхода при разработке моделей турбулентности и процессов самоорганизации, относящихся к различным астрофизическим и геофизическим системам. Вместе с тем, мы приведем здесь несколько характерных примеров таких систем, описание и динамические свойства которых выходят далеко за рамки более узкой проблемы самоорганизации в развитой турбулентности. Проблема порядка и хаоса в окружающей природе и, в частности, в космической среде, исключительно многообразна, и цель этого раздела — показать на нескольких конкретных примерах, с одной стороны, специфику и сложность изучаемых объектов, а с другой — определенную общность концептуальных подходов при создании такого рода моделей, что важно для полноты развиваемых синергетических представлений. Само понимание природных комплексов и обусловивших их эволюционных процессов, с точки зрения самоорганизации в динамической системе, носит до известной степени субъективный характер. Оно отражает позицию авторов, отчетливо осознающих, что этого подхода придерживаются далеко не все исследователи природных процессов, природных и космических сред. С этих же позиций нами никоим образом не отрицается возможность преобладания более сложного функционального уровня упорядоченности в природе, особенно в той части, которая касается процессов эволюции в проблеме происхождения жизни и естественного отбора (*Галимов*, *2001*; *2005*; *2008*).

1.3.1. Динамическая астрономия. Общие положения

Проблема порядка и хаоса имеет важное приложение в динамической астрономии (*Contopoulos*, *2002*). Многие ключевые понятия динамических систем находят свое выражение в современных представлениях о галактических, звездных и планетных структурах и их эволюции. Они подкрепляются хорошо известными примерами из небесной и статистической механики, включая проблему N-тел, с использованием как аналитических, так и особенно численных методов. Можно поэтому говорить о том, что динамическая астрономия — это та область, где четко проявляются фундаментальные концепции порядка и хаоса, наряду с другими многочисленными областями современной науки, такими как гидродинамика, геофизика, биология, физика плазмы, космология и др.

Изучение хаотических и упорядоченных структур в динамической астрономии включает, наряду с полностью интегрируемыми динамическими системами, отвечающими интегрируемому гамильтониану H_0, также и системы $H = H_0 + \varepsilon H_1$, отличающиеся от интегрируемых малыми возмущениями ($\varepsilon \ll 1$). Сюда же относится важная проблема сходимости канонических разложений гамильтониана $H(I, \theta, t)$ для регулярных и резонансных режимов движения, выраженных в широко используемых в небесной механике переменных действие-угол (I, θ). В случае периодически возмущенных гамильтоновых систем $H_1(I, \theta, t+\tau) = H_1(I, \theta, t)$, для стабильных орбит в $(2N+1)$-мерном фазовом пространстве применима упомянутая выше KAM теорема о существовании инвариантных торов размерности $N+1$, а условие невырожденности

$$\det |\partial^2 H_0/\partial I_i \partial I_j| \neq 0$$

обеспечивает сохранение большинства из них при малом возмущении $\varepsilon \ll 1$. При $N = 1$ выполнение этого условия также гарантирует «устойчивость» переменных действий, которые при достаточно малых ε остаются на протяжении всего времени t близки к своим исходным значениям (более общему случаю орбитальной стабильности во времени отвечает обобщенная теорема Нехорошева). Как уже упоминалось выше, в случае $N > 2$ инвариантные KAM-торы не делят энергетическую гиперповерхность на непересекающиеся части, что приводит к замещению упорядоченных орбит хаотическими.

В фазовом пространстве консервативных систем для семейств плоских орбит (важных для астрономических приложений), периодически зависящих от времени, наблюдаются на большом временном интервале изменения в характере движения (бифуркации), а для возмущенных реальных гамильтоновых систем резонансные возмущения могут создавать в фазовом пространстве цепочки островков и увеличивать число эллиптических и гиперболических точек, причем перекрытие резонансных цепочек островков приводит к хаотической динамике. Заметим, что для исследования гамильтониана, плавно меняющегося со временем, эффективно привлечение теории так называемых адиабатических инвариантов (функций фазовых переменных и параметров, значения которых мало изменяются при значительном изменении параметров).

В динамической астрономии к консервативным системам относят звездную динамику, в то время как орбиты искусственных и некоторых естественных тел следует рассматривать в терминах диссипативных систем, для которых характерны хаотические домены с возможными островками стабильности. Нерегулярность (хаотическое поведение) орбит наиболее часто наблюдается при наличии возмущений, вызванных гетероклинным пересечением орбит, первоначально находящихся в различных областях фазового пространства. Этот случай имеет много общего с линейными эргодическими системами, и в неявной форме его можно уподобить полигональным биллиардам. Переход к хаосу может также возникать в случае, когда гамильтониан системы ограничен некоторой критической энергией и орбиты могут уходить на бесконечность. Такие динамические системы обладают максимумом потенциала, и им отвечают нестабильные ляпуновские орбиты (*Арнольд*, *1963a*, *b*).

Важное значение в динамической астрономии имеет анализ периодических и/или хаотических орбит в системах с тремя и более степенями свободы. В этих случаях зачастую труднее отделить стабильные системы от нестабильных (с этой целью в системах с $N \geqslant 3$ используется известная теорема Крейна—Мозера), а также проявление реального хаоса от неупорядоченности и шума. Характеристические показатели Ляпунова растут с числом N, хотя этот рост замедляется, когда N достигает ~ 10. Периодические орбиты на фазовой плоскости отличаются большой сложностью и неустойчивостью, включая столкновения и бифуркации, а также появление упорядоченных и хаотических доменов. Поведение орбит иногда можно проследить по специфическим формам спектров мощности (при представлении траекторий с помощью преобразования Фурье) в различных системах. Изучение поведения таких систем возможно также, исходя из упоминавшейся в разделе 1.2.1 диффузии Арнольда, что позволяет, в частности, уменьшить размерность системы. Поскольку в настоящее время при анализе свойств орбит широко используются численные эксперименты, задачей первостепенной важности является качественная верификация общности получаемых результатов для тех или иных астрономических приложений. Заметим также, что особенно эффективно численные методы используются при анализе систем, состоящих из совокупности частиц с N степенями свободы, находящихся под воздействием линейных или нелинейных сил. Важной задачей является нахождение связи между диффузией Арнольда и различными каналами разделения суммарной энергии системы с учетом формы потенциала взаимодействия частиц и вклада резонансных и нерезонансных мод.

Некоторые общие концепции динамической астрономии подкрепляются наблюдениями звездно-галактических и планетных систем. Сочетание порядка и хаоса следует считать важнейшим механизмом формирования структуры и динамики галактик (*Diagu*, *Holmes*, *1997*; *Binney*, *Merrifield*, *1998*). Лишь ограниченное их число описывается сферическим потенциалом, но многие обладают осевой или трехосной симметрией. В последнем случае потенциал сильно деформирован и происходят сильно неупорядоченные хаотические движения. Основное семейство орбит в двумерных галактиках содержит эпициклические, резонансные и нерезонансные орбиты внутри и вне областей коротации, а также коротко- и долгопериодические орбиты, наряду с непериодическими и исчезающими (уходящими на бесконечность) орбитами. В плоскости симметрии $2D$-галактик выделяются также планарные кольца, ударные волны и вихри. В то же время характерной особенностью структур галактик с заметной z-компонентой являются неустойчивые орбиты, порождающие хаос, которые обычно не сочетаются с непериодическими орбитами, а также орбиты, уходящие за область коротации. Неустойчивые орбиты могут возникать из планарных орбит, как следствие множественных бифуркаций в направлении оси z, и они непосредственно связаны с линдбладовскими резонансами, будучи ограничены частотой z-осцилляций. Подобно двумерным, трехмерные галактики содержат также полярные кольца, а сами семейства трехмерных орбит наиболее характерны для искривленных, закрученных и пекулярных галактик, напоминающих по форме земляной орех или короб (*Contopoulos*, *2002*).

Порядок и хаос в структуре галактик возникает также при взаимодействии резонансов, порождаемых возмущающей силой достаточно большой амплитуды, что может приводить к хаотическому движению. В то же время, для рукавов спиральных галактик характерно распространение нелинейных волн плотности, оказывающих влияние на периодические орбиты, как это следует из теории волновой плотности спиральной структуры, разработанной в начале 40-х годов прошлого века Б. Линдбладом. Подобные взаимодействия могли, по-видимому, иметь место на самой ранней стадии формирования звездных систем, что привело в процессе эволюции к образованию определенной упорядоченности в структуре вещества во Вселенной. Попытки воспроизведения этого процесса предпринимаются в рамках самосогласованных эволюционных моделей, в основе которых лежат уравнения Лиувилля и Пуассона для описания начальной функции пространственного распределения плотности, а также путем прямого численного моделирования для задачи N-тел с использованием различных моделей столкновительно-релаксационных процессов и линден-белловской статистики.

В заключение обратим внимание на важное отличие звездной динамики от статистической физики и неприменимость концепции термодинамического равновесия к любой самогравитирующей (звездной) системе. В частности, не существует аналогии между описанием заданного состояния в соответствии с распределением Гиббса и вероятностью нахождения определенного числа звезд на данной орбите. Это означает, что, если в термодинамической системе существует тенденция к установлению равновесия, в самогравитирующей системе, обладающей плотным центром, такой процесс не происходит *(Binney, Merrifield, 1998; EAA, 2001)*. Таким образом, в отличие от самой звезды, обладающей тепловым равновесием и определенным значением температуры на каждом радиусе, в звездной системе звезды движутся с постоянной энергией в широком диапазоне расстояний от гравитирующего центра, и распределение скоростей звезд на заданном радиусе не является характеристикой температуры. Вне зависимости от конкретной конфигурации звездной системы, энтропия в ней растет за счет передачи энергии от плотной центральной к значительно более разреженной внешней области.

1.3.2. Солнечная система: Динамические свойства

Одним из важнейших разделов динамической астрономии является динамика планетных систем и в первую очередь планет Солнечной системы. Ее изучение на протяжении нескольких тысячелетий, начиная от «Альмагеста» К. Птолемея и до революционной смены картины мира Н. Коперником, заложило основы небесной механики, у истоков которой стояли И. Ньютон, И. Кеплер, Ж.-П. Лаплас. Лишь в самом конце прошлого столетия были открыты первые планетные системы у других звезд, что неизмеримо расширило представления о свойствах и многообразии ближайших окрестностей звездного населения. Несколько раньше детальные изображения открыли поистине фантастический мир собственной звезды — Солнца и его ближайших областей, в которых на фоне хаотической динамики можно выделить отдельные упорядоченные структуры, возникающие вследствие взаимодействия плазмы с магнитным полем (рис. Ц.1).

К населению небесных тел Солнечной системы относятся большие планеты и их спутники, малые планеты (астероиды), кометы, метеороиды и метеорная пыль (рис. Ц.2). Для описания характерных черт их орбитальных движений служит плоская ограниченная задача трех тел. Изучению периодических решений этой задачи, в том числе вырождающих решений, когда масса одного из двух тел, вращающихся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс, стремится к нулю, посвящено много исследований (см., например, *Marchal, 1990; Murray, Dermott, 1999; Брюно, 1990*). Классическим примером является динамика астероидов Троянцев в лагранжевых точках L_4 и L_5 на орбите Юпитера, обладающих максимумом потенциала, но сохраняющих устойчивость благодаря наличию кориолисовой составляющей во вращающейся координатной системе. Подходы к изучению общей проблемы трех тел, заключающей в себе регулярные и хаотические движения, периодические орбиты, столкновения и др., основаны на теореме Хопфа, являющейся частным случаем рекуррентной теоремы Пуанкаре (см. *Barrow-Green, 1996*).

Детально разработанные и широко применяемые точные и приближенные аналитические методы небесной механики позволяют находить решения задач определения орбит и их эволюции, в том числе устанавливать области устойчивости и неустойчивости решений для различных классов движений. Однако наибольшее распространение за последние десятилетия получили методы прямого численного интегрирования, которые, наряду с численно-аналитическими методами, оказались наиболее эффективными, в частности для исследования порядка и хаоса в Солнечной системе. Они привели к выводу, что орбиты планет, обладающие малыми эксцентриситетами и наклонениями, лишь слабо хаотичны и не имеют сколь-нибудь заметной вековой составляющей на временных интервалах, сопоставимых с возрастом Солнечной системы (*Laskar*, *1989*; *1990*; *Sussman*, *Wisdom*, *1992*; *Duncan*, *Lissauer*, *1999*; *Murray*, *1999*). Между тем, существуют резонансы и соизмеримости в движениях планет, наиболее известными из которых являются спиново-орбитальный резонанс 3 : 2 в движении Меркурия, приводящий к уникальному соотношению между меркурианским годом и солнечными сутками, и характерная соизмеримость в движениях Нептуна и Плутона, благодаря чему столкновение между этими телами исключено, хотя точные вычисления орбиты Плутона выявили в его движении определенную хаотичность (*Sussman*, *Wisdom*, *1988*). Но, в то время как возможность тесных сближений между планетами, способных повлиять на их движение вследствие взаимных притяжений, исключена, кометы и астероиды испытывают сильные возмущения, особенно те из них, которые испытывают приливные воздействия от планет. Наиболее сильной хаотизации подвержены орбиты комет, с чем связаны сложности прогноза их движений и точного определения эфемерид. Вычисления характеристических чисел Ляпунова для некоторых типов комет и астероидов с хаотическими орбитами подтверждают их чрезвычайно малое (по космическим масштабам) время жизни (см. *Wisdom*, *1987*; *Fernandez*, *1999*).

Большое число малых тел захватываются на резонансные орбиты с ближайшими планетами. Замечательным примером служат люки Кирквуда в Главном поясе астероидов между орбитами Марса и Юпитера в области 2,7—3,2 а. е., обусловленные наличием резонансов орбитальных периодов астероидов с периодом Юпитера (4 : 1; 3 : 1; 5 : 2; 2 : 1; 3 : 2). Другой пример — транснептуновые тела в поясе Койпера, у которых обнаружено наличие резонансов среднего движения (соизмеримостей периодов) с Нептуном (4 : 3; 3 : 2; 2 : 1) и вековых резонансов (прецессии орбит) вследствие соизмеримостей долготы восходящего узла и аргумента перигелия. Интересно, что орбиты этих тел стабильны (вне резонансов) на $t \sim 10^8$ лет, однако «накопление нестабильности» и резкий рост эксцентриситета за счет гравитационного влияния Нептуна приводит к их рассеянию из пояса Койпера (*Ward*, *Hahn*, *1998*; *Morbidelli*, *1998*; *Levison*, *Weismann*, *1999*).

Вследствие наличия вековых возмущений, область между «внутренним» и «классическим» поясом ($\sim$40—43 а. е.) отличается наибольшей нестабильностью. Из этой зоны тела мигрируют внутрь Солнечной системы и первоначально захватываются преимущественно на орбиты, пересекающиеся с орбитой Юпитера (JCO), а определенная их фракция в дальнейшем мигрирует в направлении к Солнцу, пополняя Главный пояс астероидов и три группы астероидов (Амур, Аполлон, Атон), пересекающихся с орбитами планет земной группы, называемых обобщенно Near Earth Objects (NEO). Орбиты этих объектов, особенно сближающихся с Землей астероидов группы Аполлон и даже заходящих внутрь земной орбиты астероидов группы Атон, подвержены наибольшей хаотизации и представляют основную опасность столкновения с

Землей (*McFadden*, *1999*). Свой вклад в астероидную опасность, представляющую угрозу для нашей цивилизации, вносят также кометы.

Вообще следует подчеркнуть, что столкновения малых тел с планетами служили одним из наиболее важных факторов планетной эволюции. Распространенность и важность этих процессов наглядно демонстрирует сильное кратерирование поверхностей планет и их спутников, особенно тех из них, на которых следы ударной бомбардировки не стерты последующими эрозионными процессами за счет воздействия атмосферы и гидросферы. Наиболее характерными здесь являются Луна, Меркурий, спутники планет-гигантов и даже сами астероиды, поверхности которых буквально испещрены кратерами различных размеров. В частности, образование крупных котловин («морей») поперечником свыше 1000 км на Луне было обусловлено выпадением на нее астероидов размером в несколько сот километров. Весь же спектр размеров лунных кратеров простирается от сантиметров до тысяч километров. Существенно выше нижний порог размеров кратеров на Земле, Марсе и особенно на Венере, обладающих атмосферами, отвечающий «порогу обрезания» размеров тел, способных проникнуть до проверхности. В атмосфере Земли разрушаются тела размером $\leqslant 10$ м, и до поверхности в виде метеоритов доходят только их фрагменты (*Иванов*, *2003*). Между тем, имеются многочисленные свидетельства столкновений даже крупных астероидов и комет с Землей на протяжении, по крайней мере, последних нескольких сот миллионов лет ее истории, что приводило к глобальным катаклизмам. Например, катастрофические глобальные последствия для земной биосферы предположительно имело событие Чиксулюб (*Chicxulub*, *)* при столкновении с Землей астероида размером ~ 10 км, оставившего кратер диаметром около 170 км на полуострове Юкатан в Мексике на рубеже мелового периода и палеоцена ~ 65 млн лет тому назад. Другим примером является катастрофа локального масштаба у реки Тунгуска в Сибири в 1908 г., вызванная, скорее всего, столкновением с Землей фрагмента кометы, размер которого оценивается ~ 60 м. Убедительным свидетельством того, что подобные явления происходят в Солнечной системе более или менее регулярно, служит выпадение на Юпитер в 1994 г. 21 примерно километровых фрагментов кометы P/Shoemaker—Levy-9, разорванной приливными силами при тесном сближении с этой планетой.

Популяции комет и астероидов непрерывно изменяются под действием гравитационного притяжения планет, с чем, в частности, связаны преимущественные потоки метеоритов, берущие свое начало в резонансных зонах Главного пояса и пояса Койпера и делающие доступным лабораторное изучение внеземного вещества. Наибольшие изменения на динамику комет оказывают тесные сближения с планетами, что может приводить к переходу их на гиперболические орбиты и «испарению» в межзвездную среду. С другой стороны, под воздействием приливных возмущений от ближайших звезд кометы из облака Оорта могут забрасываться внутрь Солнечной системы, обеспечивая тем самым ее связь с Галактикой и, в частности, как бы «зондирование» материала протосолнечной туманности. Таким образом, взаимодействие комет с планетами открывают возможности лучшего понимания роли этих примитивных тел в планетной космогонии и галактической эволюции.

На перекрестке астрономии и геофизики растет понимание ударных явлений при взаимодействии малых тел с планетами на протяжении всей истории Солнечной системы. Важность этих явлений в эволюции планет проявляется не только в очевидном факте, что малые тела оставляют «шрамы» в виде кратеров на поверхности планет, но и в нарастающем наборе свидетельств, что обусловленные ими стохастические процессы оказывали существенное воздействие на формирование природных условий, непосредственно связанных, в частности, с существованием на планете атмосферы и гидросферы. Так, хаотизация орбит транснептуновых объектов, рассматриваемых как реликты тел (планетезималей), из которых формировались планеты, могла сыграть важную роль в поставке летучих на начальном этапе их эволюции, особенно в период максимально интенсивной бомбардировки планет около 4 млрд лет тому назад (*Marov, Ipatov, 2001; 2005; 2006*), о чем подробнее будет сказано ниже. С транспортом вещества внутри и вне пределов Солнечной системы за счет миграционно-столкновительных процессов связываются в последнее время проблемы происхождения жизни (см. *McKay, Davis, 1999; Маров, 2005*). Такие события можно рассматривать как порождение и следствие механизма локальной неустойчивости в нелинейной хаотической системе с большим числом степеней свободы, приводящим к последовательности бифуркаций состояния и возможности возникновения самоорганизации, которой отвечают иная совокупность и взаимодействие природных условий на планете.

Неменьший интерес представляет подход, основой которого также служит наличие самоорганизации в процессе предбиологической эволюции, исходя из механизма химического упорядочения, ключевую роль в котором играет молекула аденозинтрифосфата (АТФ) (*Галимов, 2001; 2005; 2008*). В рамках данной модели нарастающая упорядоченность исходной (хаотической) системы состоит в последовательности бифуркаций, от появления примитивных полимерных структур через развитие универсальной каталитической функции пептидов до возникновения нуклеотидных последовательностей (кодонов), участвующих в синтезе белка, и генетического кода. Реализация модели требует наличия восстановительной среды в условиях раздельного существования атмосферы и гидросферы и при обеспечении доступности и подвижности фосфатов (*Галимов, 2005а*), что не противоречит существующим представлениям о природных условиях на Земле в период, с которым связывают возникновение первых примитивных форм жизни (примерно 3,8 млрд лет назад). Выбор между альтернативными моделями зарождения жизни и биосферы непосредственно на Земле или с участием внешнего источника — одна из наиболее актуальных и интригующих проблем современного естествознания.

1.3.3. Солнечная система: Природа планет и спутников

С позиций процессов самоорганизации в природных динамических комплексах первостепенный интерес представляет вся совокупность небесных тел, населяющих Солнечную систему — планет, их спутников, комет, астероидов, метеороидов. Каждое из них является по-своему уникальным объектом и отражает определенные характерные особенности космических сред.

При громадном разнообразии этих тел, можно, вместе с тем, выявлять некоторые общие закономерности, обусловленные, по-видимому, единым процессом происхождения Солнечной системы, и одновременно изучать механизмы, обусловившие пути эволюции, отличные от сценария эволюции Земли. Соотношения порядка и хаоса, несомненно, играли важную роль в становлении разнообразных природных объектов. Пониманию формировавших их процессов способствует наблюдаемый на рубеже XX—XXI столетий существенно более тесный симбиоз астрофизических, планетных и геофизических исследований с целью ответа на ключевые вопросы космогонии, эволюции Вселенной, происхождения жизни (астробиологии).

В комплексе проблем, связанных с изучением планет и объединяемых чрезвычайно емким понятием планетология, можно выделить три основных направления: происхождение и эволюция Солнечной системы; природа Луны, планет и их спутников; природа малых тел и их связь с проблемами эволюции планет и происхождением жизни. Очевидно, ключевым среди этих проблем является исследование и моделирование основных физико-химических процессов, обеспечивших зарождение Солнечной системы и ее последующую эволюцию, и реконструкция этих процессов на основе имеющихся наблюдательных данных и развиваемых моделей. В отличие от звезд, представления о свойствах которых основываются на возможности сопоставления множества объектов на различных стадиях эволюции, до недавнего времени мы распологали лишь единственным примером планетной системы — нашей Солнечной системы, что исключало, в частности, статистический подход при анализе планетного населения.

Открытие путем наблюдений с высоким разрешением в оптическом, инфракрасном и субмиллиметровом диапазонах длин волн околозвездных дисков (*Hildebrand*, *1983*; *Artymowicz*, *1997*; *O'Dell*, *1998*; *Schneider и др.*, *1999*; *Padgett и др.*, *1999*; *Lagrange и др.*, *2000*; *Watson и др.*, *2007*) и планет у других звезд (*Mayor*, *Queloz*, *1995*; *Marcy и др.*, *2000*) позволило значительно расширить представления о свойствах планетных систем и большом разнообразии их конфигураций. Появились уникальные возможности понять особенности их формирования, хотя использование по существу единственно пока доступных методов доплеровской спектрометрии и транзитов (прохождения планеты по диску звезды) ограничивает предел массы открываемых планет массами Юпитера-Сатурна на расстоянии порядка 10 а. е. от родительской звезды. В результате пока не удается обнаруживать планеты типа Земли и воспроизводить в целом конфигурацию всей планетной системы (*Black*, *1999*; *Nagasava и др.*, *2007*)[1]. Между тем, это представляет первостепенный интерес, особенно если учесть, что открытие суперюпитеров на орбитах, находящихся в непосредственной близости от звезды, делает подобные экзотические конфигурации принципиально отличными от Солнечной системы и остро ставит вопрос об устойчивости таких планетных систем.

Предложена, в частности, модель, согласно которой сформировавшиеся планеты земного типа из-за взаимодействия с остаточным газом диска (дина-

[1] Запуск в марте 2009 г. космического аппарата «Кеплер» открывает широкие возможности обнаружения планет типа Земли у миллионов звезд.

мического трения) мигрируют внутрь системы, что сильно ограничивает время их жизни (*Papaloizou и др.*, *2007*). Альтернативная модель исходит из представлений о важной роли массивных планетезималей, оставшихся в окрестности образовавшейся планеты, которые оказывают существенное гравитационное воздействие на эволюцию ее первоначальной орбиты и миграцию самой планеты и роя планетезималей на значительные расстояния по направлению к звезде или от нее, следуя условию сохранения орбитальной энергии и углового момента планеты и диска. Другими словами, миграция контролирует структуру формирующейся планетной системы, обладающей динамической неустойчивостью, и в конечном итоге ответственна за приобретаемую ею конфигурацию (*Levison и др.*, *2007*). Вполне возможно, что миграционный механизм оказал влияние на эволюцию планетных орбит в Солнечной системе, по крайней мере в ее внешних областях, с чем связано перемещение дальше от Солнца Урана и Нептуна из зоны их первоначального формирования ближе к Юпитеру-Сатурну и образование пояса Койпера (*Энеев*, *1981*; *Malhotra*, *1995*). Обоснованием такого предположения служит, наряду с рядом геохимических соображений, тот факт, что для аккумуляции самых далеких планет на их современных орбитах потребовались бы времена, превышающие возраст Солнечной системы.

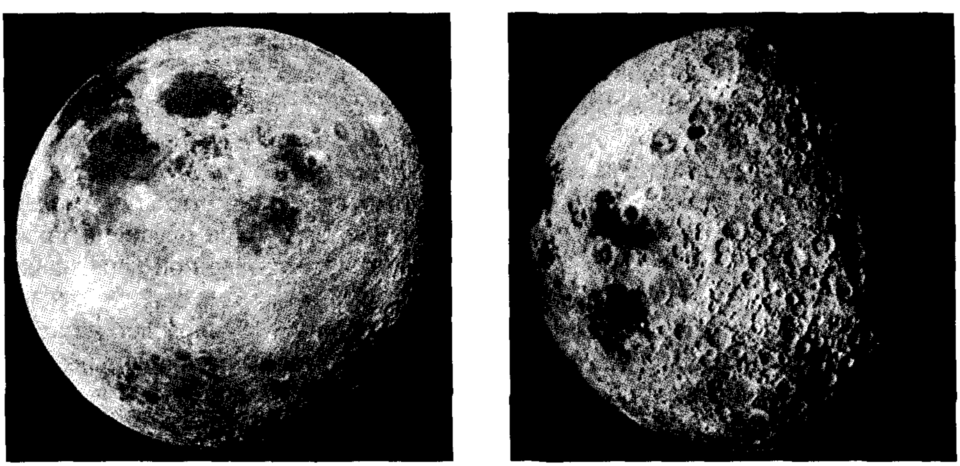
Обращаясь к своему ближайшему космическому окружению, мы, естественно, хотим не просто понять, как произошла Солнечная система, но и благодаря чему возникла ее устойчивая конфигурация, о чем говорилось в предыдущем разделе. Необходимо также понять, что выделило Землю с ее уникальными природными условиями среди других планет земной группы, в первую очередь ее ближайших соседей Венеры и Марса, и каковы пределы существующих регуляционных механизмов обратной связи на Земле, препятствующих неблагоприятным сценариям ее дальнейшей эволюции. Другими словами, не приведет ли, например, накопление негативных антропогенных воздействий на окружающую природную среду к радикальному изменению условий, ассоциируемому с бифуркацией состояния открытой нелинейной диссипативной системы. Ответ на этот кардинальный вопрос призвана дать интеграция наук о Земле и планетах с целью лучшего понимания настоящего, прошлого и будущего Земли на основе сравнительной планетологии. Одновременно это должно помочь решению кардинальных проблем планетной космогонии и, в частности, наложить значительно более жесткие ограничения на диапазон параметров, используемых при разработке моделей происхождения Земли (см., например, *Wetherill*, *1990*).

В этом разделе мы уделим внимание, прежде всего, самим планетам и спутникам, что представляется нам необходимым, поскольку их природные особенности в той или иной степени отражают общие принципы самоорганизации, и именно на это мы хотим обратить внимание. Это позволит нам также лучше понять возникновение упорядоченностей в газовых оболочках этих тел — атмосферах, которым посвящен специальный раздел данной главы. В них наиболее отчетливо проявляются синергетические процессы в турбулентных природных средах, на изучении которых сосредоточены основные усилия авторов в последующих главах монографии.

Луна

Луна, как ближайшее к Земле небесное тело, представляет первостепенный интерес для планетологии и наук о Земле — геофизики, геологии, геохимии. К сожалению, несмотря на громадный прорыв в знаниях о Луне, обеспеченный беспрецедентной по масштабам и затратам американской и советской космическими программами в 1960—70-х годах, многие проблемы остаются нерешенными. Несколько полетов к Луне в 1990-х годах американских аппаратов («Клементина», «Лунар-Проспектор») и запущенных в последние годы японского аппарата «Кагуя», китайского спутника «Ченг-Е» и индийского «Чандраян-1», исследующих морфологию лунного рельефа и гравитационное поле, не решают задачи проведения комплексных исследований и обеспечения значительного повышения точности измерений в первую очередь ключевых геохимических характеристик на поверхности Луны (рис. 1.3.1).

Изучение Луны имеет важнейшее значение, прежде всего, в контексте ее происхождения и лучшего понимания истории Земли. Необходимо, в частности, найти убедительные факты для выбора между двумя основными гипотезами образования Луны: вместе с Землей из частично дифференцированного вещества протопланетного диска или столкновения ранней Земли ($\sim 4{,}4 \cdot 10^9$ лет назад) с крупным небесным телом (см. *Галимов и др.*, *1995*; *2005*; *Hartmann*, *Davies*, *1975*; *Cameron*, *Ward*, *1976*; *Melosh*, *Sonett*, *1986*; *Taylor*, *1999*). В любом случае, сам факт образования Луны можно связать либо с возникновением определенной упорядоченнсти в исходной структуре протопланетного вещества на орбите Земли, обусловившей последующую контрактацию двух отдельных газопылевых сгустков, либо с первоначальной хаотичностью орбит крупных планетезималей (протопланет) в окрестности сформировавшейся Земли, что вследствие катастрофического столкновения с ней одного из таких тел привело к колоссальному выбросу вещества мантии и образованию новой конфигурации планета-спутник в процессе самоорганизации.



а *б*

Рис. 1.3.1. Видимая (*а*) и обратная (*б*) стороны Луны

Для выбора между этими двумя гипотезами упор должен быть сделан на подробном изучении геологической истории Луны, к чему прямое отношение имеют анализ содержания в лунных породах тугоплавких и сидерофильных элементов, определение теплового потока из недр, сейсмозондирование. Сюда непосредственно примыкают вопросы о внутреннем строении Луны, в частности о том, сохранила ли она жидкое ядро, его размере и степени дифференциации лунного вещества. Эти вопросы необходимо рассматривать в контексте формирования всех планет и их спутников, включая расстояние от Солнца, раннюю эволюцию с учетом обилий высоко- и низкотемпературных конденсатов и газов, запасы радиогенных элементов, что лежит в основе процессов самоорганизации, предопределивших упорядоченности во внутреннем строении недр (рис. Ц.3). Луна дает вполне определенный подход к решению данных проблем. Ниже мы приведем краткий обзор современных представлений о проблематике и актуальных задачах лунных исследований, основываясь, главным образом, на материалах сборника (*Виноградов*, *1975*) и работах (*Галимов*, *2004*; *Wilhelms*, *1993*; *Canup*, *Asphaug*, *2001*).

Абсолютный возраст и датировка событий, определенные по отношению изотопов U/Pb, Rb/Sr, K/Ar в образцах лунных пород, привели к выводу, что Луна образовалась практически одновременно с Землей 4,55 млрд лет назад и за последующие 200 млн лет прошла этап дифференциации недр с выделением ядра. Примерно 3,9—4 млрд лет назад завершился этап интенсивной ударной бомбардировки планетезималями, оставшимися от стадии аккреции в районе Земля—Луна, оставившими на поверхности громадные котловины и многоярусные структуры. Им же обязаны своим существованием высокие (до 8 км) горы, образовавшиеся при деформации коры и наслоениях выброшенного материала, сосредоточившиеся на обратной стороне. Энергия ударов и разогрев мантии радиогенными изотопами привели к излиянии на поверхность лавы из мантии с глубины свыше 100 км и заполнению лунных морей на видимой стороне, где кора была значительно тоньше. Особенности лунной морфологии связаны с остыванием лавы, что привело к образованию разломов, возвышений, долин. Изотопный анализ в первую очередь изотопов кислорода ^{16}O-^{17}O-^{18}O (рис. 1.3.2) привел также к выводу, что Земля и Луна образовались из единого резервуара, отношение изотопов в котором отличалось от родительских тел метеоритов. Близки к земных и лунные минералы, хотя в них существенно ниже содержание летучих. Особенно это касается водорода: в лунных породах он практически отсутствует, так что Луну можно считать самым «сухим» местом в Солнечной системе. Луна обеднена также калием, который входит в состав земных гранитов, зато в лунной коре значительно больше тугоплавкого кальция.

Эндогенные процессы по существу прекратились 3,18 млрд лет назад, и в последующий период Луна подвергалась лишь ударной бомбардировке телами, мигрирующими из внешних областей Солнечной системы, о чем специально говорится в разделе 1.3.5. Процессы метеоритной переработки поверхностного материала, с чем связано происхождение реголита, имеют чрезвычайно медленную временную шкалу. Как следствие Луна хранит на своей поверхности и в слое реголита летопись событий, включая взаимодействие с

Солнцем и межпланетной средой, за несколько миллиардов лет. Интересно, что без заметной эрозии, определяемой средним уровнем метеоритной бомбардировки, сохранятся, по крайней мере, в течение нескольких миллионов лет следы астронавтов и колес луноходов.

Рассмотрим теперь подробнее наиболее актуальные проблемы, призванные дать ответ на ключевые вопросы генезиса и внутреннего строения Луны. Первостепенный интерес представляет точное определение содержания в веществе Луны тугоплавких элементов. Эти элементы в группе обычно не разделяются между собой, но вся группа может отделяться от других классов элементов на предаккреционной стадии планеты. Принципиальный вопрос относительно тугоплавких элементов — сопоставимо ли их содержание в лунном веществе с силикатной мантией Земли или с веществом всей Земли. Из анализа лунных пород ранее был сделан вывод относительно обогащенности коры Луны оксидом Al, однако представления об изменении его содержания в верхней и нижней мантии, основанные на сопоставлении моделей упругих свойств распределенного по глубине мантийного вещества с модельными профилями сейсмозондирования, носят достаточно умозрительный характер. Соответственно, трудно сопоставить общее содержание как тугоплавких, так и других породообразующих элементов на Земле и Луне, включая допущение об их частичном испарении в высокотемпературном процессе на стадии формирования Луны.

Геохимические данные не могут быть непосредственно использованы для получения оценки степени сегрегации металлической фракции и, соответственно, размера ядра, поскольку такая оценка зависит от неизвестного исходного содержания сидерофильных элементов (спутников железа) — W, Mo,

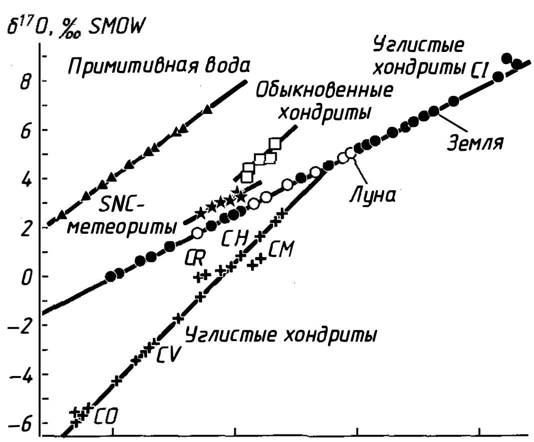


Рис. 1.3.2. Диаграмма отношений изотопов кислорода δ^{17}O и δ^{18}O (δ^{17}O и δ^{18}O — величины, характеризующие сдвиги изотопных отношений кислорода $^{17}O/^{16}O$ и $^{18}O/^{16}O$, относительно принятого стандарта SMOW (*Standard Model Ocean Water*). На этой диаграмме образцы Луны и Земли ложатся на общую линию фракционирования, что определенно указывает на генетическое родство их состава

P, Co, Cd, Ni, Pt, Re, Os и др. — и степени дифференциации лунного вещества. Поэтому, как и в случае тугоплавких элементов, решение проблемы дефицита в лунном веществе сидерофилов принципиально зависит от используемой модели глубинного строения в первую очередь наличия и размеров ядра, ограничиваемых безразмерным моментом инерции Луны, согласно которому оно не превышает $R \sim 300$ км. Учет изменения степени экстрагирования сидерофильных элементов в силикатно-металлической системе, при наличии в растворе силиката в твердой фазе и неопределенности степени плавления мантии, дополнительно усложняет проблему.

Важным индикатором первоначального состава силикатной планеты и степени ее дифференциации служит магнезиальное число $Mg/(Mg + Fe)$. Для земной мантии, по геохимическим и петрологическим данным, оно ограничено величиной 0,89. Для Луны получена оценка 0,80, но погрешность достигает 30%, так что верхний порог можно согласовать с земным значением. Эта оценка, следовательно, не является адекватной для характеристики состава вещества всей Луны, и такое различие, в случае его подтверждения, лишь означало бы, что либо Луна образовалась из Земли, либо, что после «независимой» аккреции, механизм ее последующей эволюции включал сложные процессы химическик превращений. Таким образом, и в этом случае необходимо использование ряда допущений при интерпретации результатов измерений этого отношения в поверхностной породе, и однозначный ответ о степени дифференциации вещества Луны получить пока вряд ли возможно.

Предполагаемое обогащение тугоплавкими элементами и потеря железа могли быть обусловлены высокотемпературным процессом, проходимым Луной при ее эволюции. Однако для обоснования необходимого разогрева совсем не обязательно прибегать к модели контрактации начального газопылевого сгущения, поскольку и в рамках модели аккумуляции мантийного вещества Земли обеспечивается достаточное энерговыделение за счет столкновений многочисленных родительских тел. С наличием интенсивного разогрева, естественно, связывается обогащенность лунной коры плагиоклазом в составе полевых шпатов, что свидетельствует о начальной дифференциации на глубину, по крайней мере, первых нескольких сот километров. Однако численные оценки толщины слоя расплавления над недифференцированным веществом недр весьма противоречивы: ряд геохимических аргументов, основанных на объемном содержании родительского материала, необходимого для создания существующей концентрации элементов в коре, свидетельствует в пользу модели полностью дифференцированной Луны, в то время как из интерпретации содержания вулканических газов в морских районах более вероятна модель недифференцированных недр. К тому же существование первичного океана магмы может быть объяснено механизмом интрузии магмы в первичную кору. Так или иначе, вопрос о степени начального расплавления Луны и источниках разогрева остается проблематичным и в известной мере напоминает ситуацию с родительскими телами частично дифференцированных метеоритов.

Известно, что при частичном расплавлении силикатной фракции часть тугоплавких элементов легче концентрируется в менее плотной жидкой, нежели в твердой фазе, и это приводит к их повышенному содержанию в поверхностных породах при дрейфе вещества из недр. Используя данные «Аполлонов», основанные на измерениях теплового потока в двух точках ($F \cong 18$ эрг/см$^{-2}$с), для Луны было получено содержание урана U ~ 35 ppb, по сравнению с U = 20 ppb для Земли. Однако, поскольку лунная оценка сопряжена со значительной неопределенностью, этот результат нельзя считать убедительным, особенно если учесть, что для выбора между альтернативными гипотезами происхождения Луны называются значения теплового потока между 16—20 и 10—15 эрг/см$^{-2}$с. Необходимы поэтому измерения с высокой точностью и в нескольких представительных районах, чтобы попытаться снять эту неопределенность.

Выбор между альтернативными моделями происхождения Луны связан в первую очередь с интерпретацией характера скоростей распространения сейсмических волн в мантии и естественно, что сейсмозондирование является ключевым в любой будущей программе лунных исследований. К сожалению, модели скорости распространения сейсмических волн даже в коре Луны обладают большой погрешностью из-за неопределенного состава коры: от габбро и норитов до анортозитов. Что же касается мантии, то, как известно, наличие в ней сильно поглощающей зоны препятствует возможности исследовать ядро. Фокальная зона лунотрясений находится на глубине от 800 до 1100 км, что принципиально ограничивает максимальную глубину, до которой возможно в настоящее время определять скорости сейсмоволн.

Следует принять во внимание и то обстоятельство, что геохимические измерения в пределах относительно небольшой глубины на лунной поверхности ограничены верхним слоем реголита, состав которого может отличаться от подстилающего слоя изверженных пород, прежде всего из-за неизвестного соотношения вещества Луны и метеоритов, бомбардирующих ее поверхность. Это соображение особенно существенно при обсуждении гипотезы отрыва Луны от Земли с учетом большой неопределенности в оценках относительного вклада материала мишени (земной мантии) или ударника (космического тела) в формирование Луны. Большой интерес представляет район на обратной стороне Луны вблизи Южного полюса, представляющий собой многоярусную структуру, тянущуюся на 2500 км от кратера Эйткен диаметром 135 км и глубиной 13 км, которые образовались при падении крупного астероида 4,1 млн лет назад. Существуют косвенные свидетельства того, что внутри этой котловины, в постоянно затененной области, могут быть отложения водяного льда из-за более позднего столкновения с Луной кометы, которые оцениваются величиной $\sim 3 \cdot 10^8$ т, а также принесенного первичного органического вещества, что представляет особый интерес.

С точки зрения перспектив будущего освоения Луны (см., например, *Spudis*, *1996*), ключевое значение приобретают, наряду с оценками локальных запасов воды, также вопросы о возможности освоения и промышленного использования минералов, содержащих Fe, Al, Si, Ti, служащих источником строительных материалов, о содержащихся в горных породах H_2 и O_2 как сырье для получения воздуха и воды, а также о реальных перспективах практического использования в качестве эффективного энергетического источника изотопа ^{3}He, содержание которого в ильмените оценивается величиной ~ 10 ppb (*Галимов*, *2006*).

Венера

Среди планет Солнечной системы Венера выделяется, прежде всего, своей массивной газовой оболочкой и тепловым режимом. Самым актуальным является вопрос о том, почему эволюция Венеры, обладающей многими сходными чертами с Землей и находящейся от нас на расстоянии всего лишь ~ 40 млн километров, пошла по отличному от Земли сценарию, что обусловило, в конечном итоге, формирование горячей углекислой атмосферы этой планеты со средней температурой у поверхности 475°C и давлением 92 атм, плотность которой всего лишь примерно на порядок меньше плотности воды. Эти уникальные свойства принципиально отличают Венеру от двух других планет земной группы, обладающих атмосферами — Земли и Марса. Как ближайший аналог Земли Венеру естественно рассматривать в качестве одной из ее предельных моделей (рис. Ц.4).

Необычный, во многом экзотический, климат Венеры предопределяется многими факторами, в первую очередь необратимым парниковым эффектом, возникшим, по-видимому, вследствие потери воды и разложения карбонатов поверхностных пород. Вместе с тем, хотя из-за близости к Солнцу инсоляция на Венере приблизительно вдвое больше, чем на Земле, ее интегральное сферическое альбедо A также примерно вдвое превышает альбедо Земли. В результате обе планеты получают в современную эпоху сопоставимые величины лучистой энергии от Солнца, и причину разогрева поверхности Венеры следует, очевидно, искать в особенностях формирования природных условий на самых ранних этапах ее эволюции. Мы едва ли можем воспроизвести этот процесс, но можем достаточно подробно исследовать физический механизм сформировавшегося устойчивого состояния теплового равновесия на планете в современную эпоху, опираясь на колоссальный прорыв в знаниях об атмосфере, поверхности и внутреннем строении этой ближайшей к Земле и оказавшейся столь не похожей на нее планете. Радиоволны, способные, в отличие от оптического диапазона, проникать сквозь плотную атмосферу и облачный слой, позволили исследовать поверхность Венеры, выявить многочисленные особенности рельефа и восстановить определенные черты ее эволюции, одновременно похожие и отличные от земной. Было обнаружено, в частности, что широко распространенная вулканическая деятельность на Венере, по-видимому, прекратилась относительно недавно (~ 10—100 млн лет назад), и с ней во многом связано формирование специфического теплового режима (рис. Ц.5). То, что нам известно сегодня о Венере, подробно изложено в монографии (*Marov*, *Grinspoon*, *1998*) и обзорах (*Hunten*, *1999*; *Head*, *Basilevski*, *1999*).

Начало исследований природы парникового эффекта относится к концу 1960-х гг., когда были разработаны первые модели лучисто-конвективного теплообмена в нижней атмосфере Венеры, основанные на прямых измерениях высотных профилей температуры и давления (*Авдуевский и др.*, *1968*; *1971*; *Маров*, *1971*; *Marov*, *1972*). Дальнейший прогресс в этом направлении был достигнут благодаря в первую очередь результатам прямых измерений интегральных и монохроматических потоков солнечной радиации в атмосфере и на поверхности Венеры (*Marov и др.*, *1973*; *Авдуевский и др.*, *1976*), измерениям высотного хода и микрофизических свойств венерианских облаков, состоящих из серной кислоты (*Маров и др.*, *1976*; *Marov и др.*, *1980*; *Esposito и др.*, *1983*), уточнением высотных профилей атмосферных параметров с учетом их суточных вариаций (*Маров и др.*, *1989а*; *Marov*, *1978*; *Seiff и др.*, *1985*). Наряду с этим, были проведены комплексы теоретических и лабораторных исследований характеристик непрозрачности основных поглощающих газов в нижней атмосфере Венеры — углекислоты, водяного пара, двуокиси серы в широком диапазоне давлений и температур, разработана методика численного моделирования лучистого теплопереноса (*Маров*, *Шари*, *1973*; *Маров и др.*, *1984*, *1985*, *1989b*), проведены первые измерения эффективных тепловых потоков в нескольких районах планеты (*Revercomb и др.*, *1985*). Это позволило перейти от сравнительно простых оценок к более полному анализу теплового режима и построению радиационной модели, с учетом имеющихся данных о содержании в атмосфере Венеры малых примесей (*Маров и др.*, *1985*, *1989*; *Tomasko и др.*, *1983*; *Marov*, *Grinspoon*, *1998*). Ниже мы рассмотрим характер лучистого теплообмена в атмосфере Венеры, затронув по необходимости также основные свойства планетарной циркуляции, которая вносит свой вклад в энергетический баланс на планете. Некоторые другие особенности рассмотрены в разделе, посвященном динамике атмосфер планет.

В отличие от звездных атмосфер, поглощаемый атмосферой планеты приток лучистой энергии, являющийся постоянно действующим неадиабатическим фактором, приводит к отсутствию постоянства теплового потока по высоте. Взаимодействие излучения с газовой средой характеризует величину энерговыделения. Таким образом, чтобы понять основные черты теплового режима атмосферы Венеры, необходимо ответить на вопросы о том, как формируется уходящий (суммарный) тепловой поток (*net flux*) и какова взаимосвязь радиационного и динамического теплообмена.

Измерения монохроматических и интегрального потоков солнечной радиации в зависимости от солнечного зенитного угла служат ключевым ограничивающим фактором для оценок теплового баланса. Прямые солнечные лучи не доходят до поверхности Венеры из-за большой оптической толщины ее атмосферы и облаков, поэтому, начиная примерно с 60 км, доминирует рассеянная радиация. При этом с приближением к поверхности растет ослабление солнечного света в коротковолновом диапазоне, и у поверхности преобладают красные лучи, которые окрашивают в красный (или, скорее, оранжевый) оттенок небо Венеры и детали ее ландшафта. Если осреднить измеренный поток солнечной радиации по всей поверхности планеты, то величина потока, падающего на единицу поверхности, оказывается равной $16{,}8 \pm 2{,}3$ Вт/м^2. Это немногим больше 10% от величины энергии, поглощаемой Венерой и отвечающей ее эффективной температуре (157 ± 6 Вт/м^2). Поскольку полученная из анализа фотометрических измерений и панорам Венеры оценка альбедо поверхности не превышает 10% (*Marov*, *1978*), это означает, что поверхность поглощает почти 90% доходящего до нее потока солнечной радиации. В свою очередь, с учетом ряда дополнительных данных измерений и теоретических оценок (*Moroz и др.*, *1985*) можно прийти к выводу, что свыше 65% солнечного потока поглощается в верхнем слое облаков и надоблачной дымке (в интервале высот 60—90 км), около 8% в среднем и нижнем слоях облаков (49—60 км) и примерно 27% поглощается нижней атмосферой и поверхностью.

Очевидно, в случае, если в атмосфере реализуется режим лучистого равновесия (как это имеет место в земной стратосфере), величина энергии солнечного излучения компенсируется на каждом уровне потоком уходящей радиации. Другими словами, скорости притока солнечной энергии и охлаждения атмосферы за счет ИК-радиации в этом случае равны. Если же выполняется условие лучисто-конвективного равновесия (как это обычно имеет место в тропосфере), то приток солнечного излучения компенсируется на каждом уровне в атмосфере суммарным тепловым потоком за счет уходящего излучения и конвективного теплопереноса. На самом деле эти варианты служат локальным приближением к более полной картине теплообмена, включающей динамические процессы различных пространственных масштабов (планетарная циркуляция, конвекция, турбулентность). Возникновение этих движений происходит вследствие преобразования части лучистого потока энергии от Солнца. В самом общем смысле можно говорить о том, что планетарная динамика отражает баланс между скоростью генерации потенциальной энергии за счет солнечной радиации и скоростью потери кинетической энергии за счет диссипации. С этой точки зрения атмосферу планеты часто сравнивают с тепловой машиной, у которой нагревателем служат районы экваториальных широт, а холодильником — полюса. КПД такой машины очень мал, он не превышает нескольких процентов (см., например., *Кузьмин*, *Маров*, *1974*).

Как видим, источником движений различных пространственных масштабов служит отсутствие равенства между поступающей и отдаваемой энергией в отдельных районах планеты при общем строгом выполнении условия теплового баланса в глобальном масштабе, характеризуемого эффективной температурой вблизи верхней границы облаков, которая для Венеры составляет $T_e = 228$ K. Другими словами, возникновение тепловых неоднородностей (горизонтальных температурных градиентов вследствие дифференциального нагрева) компенсируется развитием крупномасштабных движений с широким спектром пространственных размеров, включая каскадные процессы дробления турбулентных вихрей до значений, при которых происходит диссипация механической энергии в тепло (*Колесниченко*, *Маров*, *1998*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2001*). На Венере динамические процессы переноса весьма эффективны, с чем связано известное явление атмосферной суперротации (4-суточной циркуляции) и образование громадных вихревых структур на полюсах (*Limaye и др.*, *1982*; *Marov*, *Grinspoon*, *1998*; *Titov и др.*, *2004*). К сожалению, количественные оценки составляющих теплообмена в общем энергетическом бюджете атмосферы довольно ограничены, особенно в части, связанной с ролью планетарной динамики.

Для расчетов радиационного переноса необходимо знание оптическиех свойств основных компонентов атмосферы, включая содержания малых примесей, и их распределение по высоте. ИК-излучение поглощают практически все газы тропосферы Венеры. Как уже отмечалось, основной составляющей является углекислый газ, а азот, содержание которого не превышает 3%, может вносить некоторый вклад только при очень высоких давлениях за счет возникновения индуцированного дипольного момента, либо за счет образования одновременных переходов с трехатомными молекулами типа CO_2. Значительно больший вклад вносят малые примеси в первую очередь водяной пар и серосодержащие соединения, хотя их относительное содержание (отношение смеси) составляет сотые и даже тысячные доли процента. По степени вклада в общую непрозрачность атмосферы Венеры, с учетом концентрации и характеристик инфракрасного спектра, эффективна следующая последовательность газов: CO_2, H_2O, SO_2, COS, CO, H_2S, другими словами, наиболее важную роль, кроме CO_2, играют H_2O и SO_2 (*Маров и др.*, *1989b*). Однако влияние этих газов на перенос теплового излучения определяется тем, попадают ли их полосы поглощения в те области ИК-спектра, где непрозрачность углекислой атмосферы сравнительно мала, тем самым перекрывая «окна прозрачности» CO_2. Заметим, что в гомогенной среде отношения смеси сохраняются постоянными лишь для компонентов, не подверженных химическим или фазовым превращениям в рассматриваемом диапазоне температур. К последним как раз относятся водяной пар и двуокись серы, содержания которых изменяются с высотой, особенно в облачном слое.

Оптические свойства CO_2 определяются, в основном, рядом сильных колебательно-вращательных полос, а также нескольких более слабых полос, образуемых за счет несимметричных изотопов. Значительное содержание CO_2 на пути луча (порядка 10^9 атм · см) и высокая температура приводят к тому, что в области интенсивных полос атмосфера Венеры непрозрачна, и перенос излучения осуществляется между ними в упомянутых выше окнах прозрачности. Поглощение в них обусловлено далекими крыльями сильных полос и слабыми полосами, попадающими в эти окна (*Маров и др.*, *1989b*). Сильное влияние оказывает также индуцированный спектр поглощения CO_2, полосы которого приходятся на участки, где при нормальных условиях поглощение отсутствует (за исключением слабых полос несимметричных изотопов молекулы CO_2).

Оптические свойства водяного пара также определяются рядом полос, из которых наибольшую интегральную интенсивность имеют полосы 6,3 и 2,7 мкм. Так как нелинейная молекула H_20 имеет, в отличие от молекулы CO_2, постоянный дипольный момент, то в поглощении активна также вращательная полоса, расположенная в области спектра около 50 мкм. Несмотря на имеющиеся детальные расчеты интенсивности вращательных линий водяного пара и их полуширины, для условий атмосферы Венеры наиболее пригодны модели пропускания в относительно узких интервалах спектра.

Вклад диоксида серы в оптические свойства атмосферы Венеры меньше вклада водяного пара, тем не менее его учет необходим. Подобно молекуле H_2O, молекула SO_2 представляет собой асимметричный волчок, и несколько ее наиболее характерных полос поглощения расположены в спектральном интервале от 3,5 до 19 микрон. К сожалению, имеющиеся данные о характеристиках вращательных линий мало пригодны для условий Венеры, и поэтому для расчета спектра пропускания SO_2, так же как для молекулы H_2O, приходится вводить ряд допущений и использовать приближенный метод (*Маров и др.*, *1989b*; *Marov*, *Grinspoon*, *1998*).

На характер теплообмена в атмосфере планеты сильно влияет также облачность, как это имеет место на Земле. Между тем, как показали расчеты, в условиях большой непрозрачности молекулярной атмосферы Венеры, вкладом облачности в эффективный поток тепла вблизи поверхности и в нижней части тропосферы можно пренебречь. В то же время на больших высотах (в облачном слое и вблизи его нижней границы) ее учет необходим. Расчет переноса излучения в облаках определяется свойствами аэрозолей, что представляет самостоятельную достаточно сложную задачу. При использовании имеющихся в настоящее время достаточно надежных данных о микрофизических свойствах трех мод облачных частиц в диапазоне размеров примерно от 1 до 8 мкм (*Маров и др., 1976*; *Marov и др., 1980*; *Esposito и др., 1983*; *Grinspoon и др., 1993*) такие расчеты позволяют уточнить профили тепловых потоков внутри облачного слоя. Альтернативным подходом служит параметризация оптических характеристик облаков, рассматриваемых как поверхность с определенной степенью отражения или теплового излучения («степенью черноты»). Этот параметр можно условно отнести к нижней границе облаков, расположенной на высоте 48—49 км.

Как видим, моделирование переноса ИК-излучения в атмосфере Венеры, определяющего ее тепловой режим, сопряжено с большими трудностями прежде всего из-за недостаточно полных данных о непрозрачности среды в широком диапазоне изменения температуры и давления. Тем не менее разработанные нами методы (*Маров и Шари, 1973*; *Маров и др., 1984, 1985, 1989b*) и сравнение результатов серии проведенных расчетов с данными измерений и подходами других авторов (*Pollack и др., 1980*; *Crisp, Titov, 1997*) позволили убедиться в приемлемой точности определения спектра поглощения для основных атмосферных компонентов в требуемом спектральном интервале. В последнее время, благодаря значительному повышению мощности вычислительных средств, были разработаны алгоритмы расчетов формфактора спектральной линии в полосах CO_2 и на этой основе определены функции пропускания с учетом далеких крыльев полос, успешно использованные в расчетах теплового режима Венеры (*Афанасенко, Родин, 2006*). Они не изменили, однако, основных ранее сделанных нами выводов.

Расчеты переноса теплового излучения в среднеширотной атмосфере Венеры проводились более чем в 500 интервалах длин волн с высоким спектральным разрешением. Приведем некоторые результаты этих расчетов, основываясь на работах (*Маров и др., 1984, 1985, 1989b*), которые полностью сохранили свое значение, поскольку содержат в своей основе единственно пока доступные данные прямых измерений на посадочных аппаратах «Венера» и «Пионер-Венера».

Практически все равновесное излучение атмосферы при температуре поверхности $T_s = 735$ K сосредоточено в ИК-области спектра от 1,5 до 1000 микрон, причем максимум интенсивности приходится на 4 микрона и смещается на 8,2 микрона у нижней границы облаков, при температуре 365 K. В рассмотренной спектральной области суммарный односторонний поток равновесного излучения составляет более 99,7% от полного. Как показали расчеты, в чисто углекислой атмосфере вынос тепловой энергии с поверхности и нижней атмосферы оказывается очень большим, значительно превышающим в максимуме приток энергии к вращающейся планете от Солнца (15 ± 6 Вт/м^2 при солнечной постоянной $E = 2621$ Вт/м^2 и $A = 0{,}76 \pm 0{,}01$), что противоречит физическому смыслу. Отсюда следует, что поглощение теплового излучения в подоблачной атмосфере Венеры определяется также другими, кроме CO_2, компонентами в первую очередь парами H_2O и SO_2.

На трех уровнях высот, отвечающих температурам 300 K, 500 K, и 700 K, была исследована эффективность перекрытия окон прозрачности чисто углекислой атмосферы водяным паром при его относительных содержаниях 10^{-5}, 10^{-4} и 10^{-3} и двуокисью серы при ее максимальном относительном содержании $2 \cdot 10^{-4}$, отвечающем данным измерений в пределах $(0{,}4 - 2) \cdot 10^{-4}$ (*Bezard и др.*, *1993*; *Pollack и др.*, *1993*; *Jenkins и др.*, *2002*). Как и следовало ожидать, наличие паров H_2O особенно сильно влияет на степень непрозрачности атмосферы для уходящего теплового излучения. Вклад в суммарное поглощение малой примеси SO_2 существенно меньше, чем паров H_2O. Особенно велика роль H_2O в увеличении поглощения в интервалах от 1,7 до 1,9 мкм; от 2,3 до 2,7 мкм; от 2,9 до 3,8 мкм; от 4,9 до 9,1 мкм; и от 20 до 200 мкм. При этом влияние H_2O уменьшается с приближением к поверхности (см. рис. 1.3.3). Одновременно уменьшается влияние широтной зависимости физических параметров атмосферы на высотах ниже 33 км.

Расчеты для влажной углекислой атмосферы Венеры позволили выявить пять основных спектральных интервалов, в которых происходит вынос теплового потока даже при максимально возможном относительном содержании паров воды 0,1%: 1,6—1,92 мкм; 2,08—2,67 мкм; 2,86—4,00 мкм; 4,65—9,09 мкм; и 18,2—1000 мкм. Пары воды существенно экранируют вынос энергии в 4-м и 5-м окнах уже при относительном содержании 10^{-5}, в то время как на перенос излучения во 2-м и 3-м окнах такая концентрация H_2O еще практически не сказывается. Определяющий вклад в поток на высотах более 35 км при всех рассмотренных содержаниях H_2O до $5 \cdot 10^{-3}$ дает 4-е окно. Этот вклад уменьшается к поверхности планеты и исчезает вблизи нее при содержании H_2O $\sim 10^{-3}$. Максимальный вклад в суммарный поток в 5-м окне не превышает 5% во влажной атмосфере, а ниже 30 км практически отсутствует. Ниже 20 км потоки во 2-м и 3-м «окнах» близки, а максимально различаются на высоте ~ 35 км. Уровень потоков в 1-м окне уменьшается подобным образом с ростом содержания паров воды в атмосфере. Путем сравнения рассчитанных профилей суммарной тепловой радиации при разных отношениях смеси $H_2O : CO_2$ с учетом неоднозначности измеренных значений H_2O (*Oyama*, *1980*; *Suomi и др.*, *1980*; *Мороз и др.*, *1983*) были получены ограничения на предельное содержание водяного пара в нижней атмосфере Венеры и его распределение по высоте (*Маров и др.*, *1985*; *Marov и др.*, *1989*).

Вклад диоксида серы в экранирование теплового потока сильно зависит от высоты. В нижних слоях, вплоть до высоты 20 км, влияние SO_2 на величину потока невелико. В то же время на высотах более 40 км поток уменьшается в несколько раз, приводя к более монотонной его зависимости от высоты. Это обусловлено тем, что основной вклад в непрозрачность атмосферы вносят полосы SO_2 7,35 и 8,69 мкм, которые расположены в области индуцированной

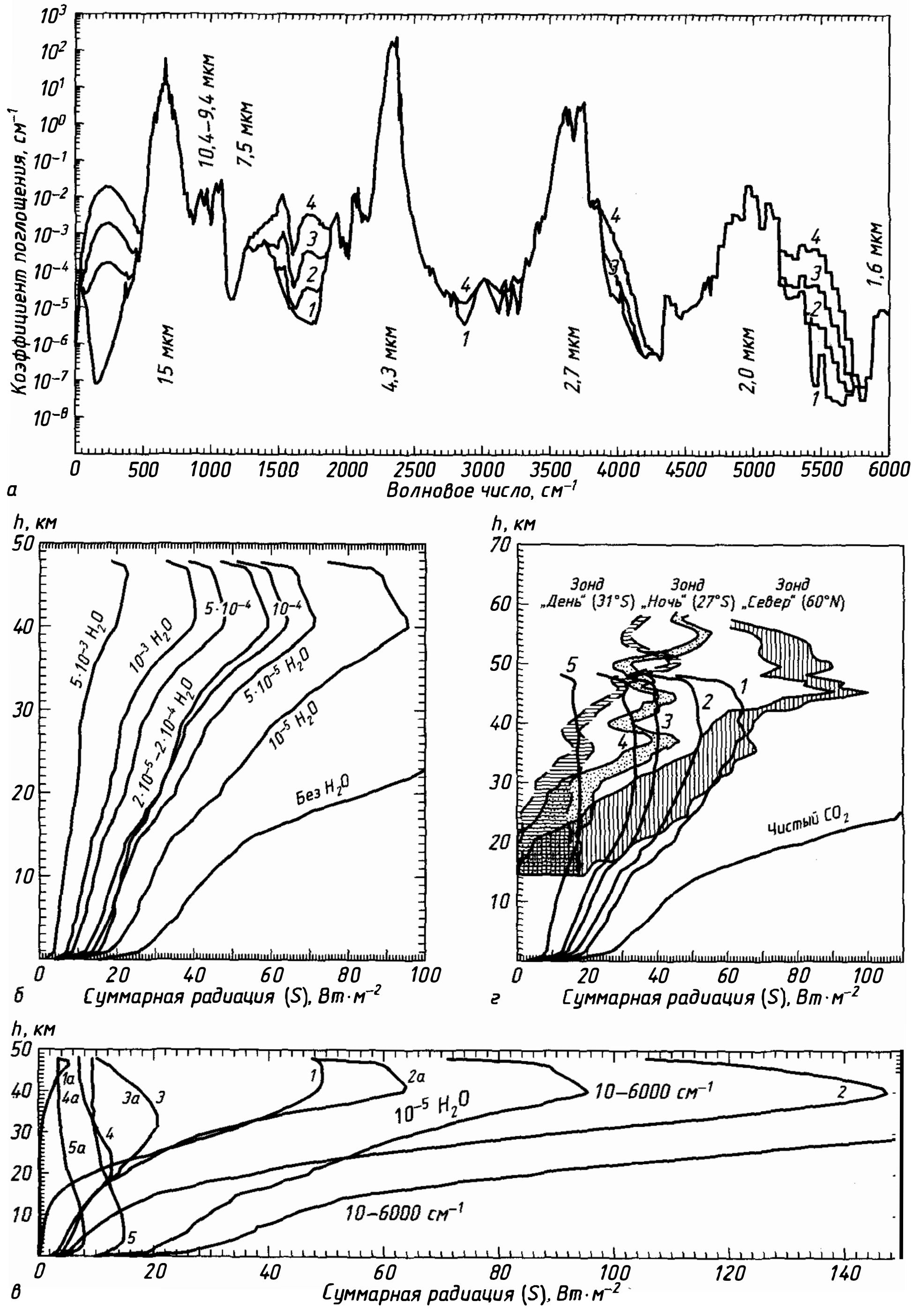


Рис. 1.3.3. Моделирование теплового режима атмосферы Венеры. (*а*) Пример расчета непрозрачности углекислой атмосферы Венеры в тепловом ИК-диапазоне спектра при температуре 500 К. Выделяются основные полосы поглощения и окна прозрачности, частично перекрываемые добавлением паров воды. (*б*) Потоки теплового излучения в нижней атмосфере для чисто углекислой атмосферы и при различных относительных содержаниях водяного пара. (*в*) Вклад отдельных полос CO_2 в перенос теплового излучения. (*г*) Сравнение расчетных потоков суммарной радиации с измеренными на зондах космического аппарата «Пионер-Венера»

полосы CO_2 7,5 мкм, а поглощение в ней уменьшается с высотой пропорционально квадрату давления. Таким образом, непрозрачность слоя атмосферы 0—20 км обусловлена в основном CO_2 и H_2O, а выше этого уровня значительный вклад вносит SO_2.

Как видим, результаты моделирования отличаются достаточно высокой точностью. И тем не менее они позволяют сделать в основном только качественные выводы о характере теплообмена на Венере. Причиной являются остающиеся неопределенности в оценках непрозрачности углекислой атмосферы с примесями малых компонентов в широком диапазоне парциальных давлений и температур, оптические свойства облачного аэрозоля. Даже в пределах погрешностей $\sim$10—20% можно по-разному истолковать природу дисбаланса расчетных тепловых потоков с измеренным высотным ходом приходящей солнечной радиации в средней тропосфере. Не прояснили ситуацию и данные радиометрических измерений тепловых потоков на большом и трех малых зондах «Пионер—Венера» из-за больших ошибок бортовых радиометров (*Revercomb и др.*, *1985*). Вместе с тем, они не обнаружили заметных отличий в высотных профилях тепловых потоков, измеренных на дневном и ночном зондах, что представляется довольно очевидным, если учесть громадное теплосодержание атмосферы Венеры и незначительные теплопотери в течение ночи (*Кузьмин*, *Маров*, *1974*). В то же время оказалось, что тепловой поток, измеренный на высокоширотном зонде, выше, чем на экваториальном. Это позволяет предположить наличие широтной зависимости в теплопереносе, обусловленной различиями непрозрачности атмосферы, а именно, что высокоширотная атмосфера существенно суше, чем низко- и среднеширотная. Справедливость этого вывода подкрепляется выявленным по данным микроволнового зондирования атмосферы Венеры значительным широтным ходом высотных профилей температуры (*Kliore*, *Patel*, *1980*). Возможно, на профиль теплового потока вблизи нижней границы облаков оказывает влияние диоксид серы, содержание которого в полярных областях примерно вдвое меньше по сравнению с экваториальными (*Jenkins и др.*, *2002*).

Для суждения о специфике радиационного теплообмена и роли атмосферной динамики важно сопоставить высотные профили солнечной и тепловой радиации, каждый из которых представляет собой разность нисходящего и восходящего потоков. По-видимому, на Венере очевидное различие в величине притока тепла от Солнца к экватору и полюсам не скомпенсировано уходящим радиационным тепловым потоком из-за изменения содержания H_2O и SO_2 в зависимости от широты. Другими словами, на низких широтах, при большем притоке солнечной радиации, потери тепла меньше, а в высоких широтах ситуация обратная. Если принять во внимание, что суточные вариации теплового режима нижней атмосферы малы, то объяснение этого феномена можно найти в механизме планетарной циркуляции, за счет которой происходит перераспределение тепла и, соответственно, дополнительный нагрев или охлаждение нижней атмосферы.

Кроме этого, сопоставляя данные измерений солнечного излучения и уходящей тепловой радиации с результатами модельных расчетов, легко убедиться в том, что в подоблачной атмосфере широтный градиент ИК-охлаждения существенно превышает широтный градиент солнечного нагрева на тех же высотах. Данное обстоятельство может служить важным энергетическим фактором механизма планетарной циркуляции, отличительной особенностью которой является глобальная суперротация атмосферы Венеры. Действительно, лучистый теплоперенос отражает характер теплообмена между экватором и полюсами, с образованием ячеек типа Хедли и восходящими движениями у экватора (*Rossow и др.*, *1980*; *Limaye и др.*, *1982*; *Schubert и др.*, *1983*). В этом случае значительный вынос тепла на высоких широтах может быть обусловлен существованием нисходящих движений атмосферного газа, сопровождаемых обратными течениями в нижних слоях атмосферы в меридиональном направлении. С этим же механизмом должно быть связано возникновение суперротации и образование вихрей у полюсов при общем сохранении углового момента для атмосферной циркуляции.

Вернемся теперь к вопросу, с которого мы начали обсуждение проблемы формирования теплового режима: почему Венера пошла по иному, чем Земля, эволюционному пути?

Основываясь на существующих представлениях (см., например, *Маров*, *1986*; *Marov*, *Grinspoon*, *1998*), Земля находится в сравнительно узкой зоне околосолнечного пространства, где возможно развитие благоприятных (с точки зрения существования жизни) климатических условий. Ее внутренняя граница находится всего лишь на 10—15 млн км ближе к Солнцу, а внешняя доходит примерно до орбиты Марса. Орбита Венеры оказывается вне этой зоны, на расстоянии, почти втрое превышающем критическое значение. Другими словами, если переместить Землю на место Венеры, она, по-видимому, эволюционировала бы по венерианскому сценарию.

Действительно, если допустить, что первоначальное альбедо Земли определялось целиком поверхностью и соответствовало лунному ($A = 0{,}07$), то при современном уровне светимости Солнца ее равновесная температура не превысила бы 275 K. При такой температуре и при достижении сравнительно небольшого давления ($\sim 0{,}005$ атм) Земля могла сохранить свою воду, которая сосредотачивалась в первичных водоемах и атмосфере. В свою очередь, углекислый газ аккумулировался в земной гидросфере и карбонатах осадочных пород, за счет связывания с окислами металлов, входящих в состав океанической коры и верхней мантии (с образованием водных силикатов), и биогенным путем, за счет отложений известковых скелетов морских организмов.

Следует отметить, что если исходить из среднегодового баланса солнечной радиации, поглощаемой земной поверхностью и излучаемой Землей тепловой (болометрической) радиации при пониженной светимости молодого Солнца, то эффективная температура оказывается 255 K, что ниже точки замерзания даже соленой воды. Нужно, следовательно, предположить, что парниковый эффект вносил заметный вклад уже на самых ранних этапах эволюции земной атмосферы, имевшей, вероятнее всего, восстановительный характер. Средняя же температура у земной поверхности в современную эпоху благодаря парниковому эффекту составляет 288 K (*Mitchel*, *1989*). Возможно, аналогичная ситуация была на раннем Марсе, если принять гипотезу его начального благоприятного климата; в противном случае, Марс не смог бы удержать на поверхности жидкую воду, поскольку его равновесная температура не превышает 220 K.

Для Венеры, при той же постулируемой величине начального альбедо, равновесная температура оказывается не менее 325 K, что вплоть до давления 0,2 атм выше точки кипения воды (*Маров, 1986*). Таким образом, чтобы сохранить на поверхности воду, Венера должна была обладать почти на два порядка более плотной первоначальной атмосферой по сравнению с Землей, что при одинаковых скоростях дегазации мантийного вещества и диссипации атмосферы в окружающее пространство маловероятно. Скорее следует допустить, что в атмосфере постепенно накапливалась углекислота вместе с парами воды. Это, в свою очередь, способствовало дальнейшему росту температуры поверхности за счет парникового эффекта и переводу все больших количеств CO_2 и H_2O в атмосферу, вплоть до некоторого равновесного состояния, характеризуемого определенными соотношениями между минеральными фазами и летучими на поверхности, важнейшим из которых является карбонатно-силикатное взаимодействие в верхнем слое коры планеты.

Другими словами, могло произойти то, что характерно для системы с положительной обратной связью, когда система неустойчива, и начальное возмущение не подавляется, а, наоборот, усиливается, причем достаточно быстро. Не случайно поэтому такое развитие событий на Венере получило название необратимого (runaway) парникового эффекта, приведшего в конечном итоге к столь высокой поверхностной температуре. При такой температуре углекислота оказалась не связанной в карбонатах осадочных пород, как на Земле (и, вероятно, на Марсе), а вся выделилась в атмосферу, создав столь высокое давление (*Виноградов, Волков, 1971*). По существующим оценкам, количество углекислоты, запертой в осадочном чехле Земли, сравнимо с содержанием CO_2 в атмосфере Венеры, и при неблагоприятном сценарии разогрева Земли нельзя исключить, что может произойти разложение карбонатов и, соответственно, резкое повышение атмосферного давления.

Если вопрос об обилии углекислоты на Венере находит объяснение в рамках достаточно простой равновесной модели (хотя реальные геохимические процессы с участием серосодержащих и других соединений имеют более сложный характер), то понять ситуацию с водой значительно труднее. При допущении о «геохимическом подобии» процессов эволюции с участием эндогенных и экзогенных процессов объем летучих и, соответственно, запасы воды на Венере должны были бы соответствовать объему земной гидросферы, который составляет примерно 1370 млн км^3, или свыше $1{,}37 \cdot 10^{24}$ г. Между тем, на поверхности Венеры, при температуре выше критической (647 K), вода не сохраняется, что остается справедливым и для водных растворов (рассолов), имеющих несколько более высокую критическую температуру (675—700 K). Что же касается атмосферы, то при среднем относительном содержании водяного пара ($5 \cdot 10^{-4}$) количество воды в ней не превышает $3{,}5 \cdot 10^{20}$ г. Это значительно превышает общее содержание воды в земной атмосфере, но почти на четыре порядка меньше запасов воды в гидросфере.

Таким образом, ключевым в проблеме эволюции Венеры и ее атмосферы остается вопрос о том, была ли на Венере вода и в каких количествах, и если да, то когда и как произошла ее потеря. Вполне обоснованной представляется аргументация, что Земля и Венера получили примерно одинаковый запас летучих, в том числе воды, вследствие как дегазации из мантии, сопровождавшей процесс дифференциации недр, так и гетерогенной аккреции вследствие миграции планетезималей из зоны формирования планет-гигантов и их выпадения на поверхности внутренних планет в виде комет и астероидов (*Marov, Ipatov, 2001*), о чем будет сказано ниже. В этом случае можно ожидать, что Венера обладала в начальной фазе эволюции океаном, по объему сопоставимым с земным, и в дальнейшем произошла его потеря. Подкреплением такой концепции служит измеренное в атмосфере Венеры отношение дейтерия к водороду, которое оказалось на два порядка больше, чем в атмосфере Земли (*Donahue и др., 1982*). Объяснить столь высокую обогащенность можно за счет эффективного теплового убегания более легкого изотопа водорода при испарении первичного океана и диссоциации молекул воды солнечным ультрафиолетом. Однако сам механизм потери океана, требующий эвакуации из атмосферы огромных масс водорода и связывания поверхностными породами высвобождающегося кислорода, встречается с большими трудностями.

Существует и иная точка зрения, согласно которой Венера первоначально сформировалась как «сухая» планета, однако и в этом случае предполагается важная роль привноса летучих за счет вещества комет и углистых хондритов. В данном сценарии содержание воды практически не менялось на протяжении всей геологической истории Венеры, оставаясь примерно на современном уровне, а эффективности гетерогенной аккреции и механизма диссипации водорода из атмосферы были существенно меньше. Заметим, что в этом случае также удается воспроизвести наблюдаемую обогащенность венерианской атмосферы дейтерием при разделении изотопов в процессе их диссипации из атмосферы (*Donahue и др., 1997; Marov, Grinspoon, 1998*).

Как видим, в настоящее время, в силу ограниченных возможностей подкрепления моделей экспериментальными данными, ответить на вопрос о том, был ли на Венере первичный океан и, тем самым, сделать выбор между рассмотренными сценариями ее эволюции, затруднительно. Оба сценария по существу приводят к развитию необратимого парникового эффекта и современным климатическим условиям. Вместе с тем, нельзя исключить, что на самых ранних этапах эволюции Венера обладала более умеренным климатом. К этому приводят представления о возможности существования вместо положительной обратной связи, усиливающей парниковый эффект, отрицательной обратной связи, стабилизирующей некоторое равновесное состояние. Последняя может быть обусловлена характером атмосферно-литосферного взаимодействия, контролируемого карбонатно-силикатным циклом (*Kasting и др., 1988*), и в принципе могла существовать на Венере в определенный период, до повышения светимости Солнца на 20% (при его переходе на Главную последовательность диаграммы Герцшпрунга—Рассела) и до достижения некоторого порога влажности атмосферы. Сам механизм получил название «влажного» парникового эффекта. Как показали расчеты, переход от влажного к необратимому парниковому эффекту мог бы не случиться, если бы повышение альбедо планеты до его современного значения произошло раньше повышения светимости Солнца и, тем самым, скомпенсировало увеличение притока солнечной энергии. Тогда, возможно, Венера обладала бы влажной углекислой атмосферой с давлением у поверхности в несколько атмосфер и темпертурой менее ста градусов Цельсия. Такая планета могла бы оказаться пригодной для возникновения на ней примитивных форм жизни.

Данное рассмотрение вновь приводит нас к мысли о том, что в эволюции Венеры существовал некоторый спектр возможностей, содержавших как детерминированную, так и стохастическую составляющие, что в конечном итоге привело к сценарию необратимого парникового эффекта. В совокупности случайных процессов, приведших к бифуркации системы из первоначального к существующему состоянию, можно выделить последовательность, начиная от аккумуляции планеты на определенном расстоянии от Солнца, ориентацию оси вращения в пространстве, разложение карбонатов и потерю воды, сохранение в атмосфере малых компонентов, поддерживаемых вулканической деятельностью и обеспечивающих ее высокую непрозрачность, круговорот серосодержащих и галогенов между поверхностью, атмосферой и облаками, характер геологической эволюции и литосферно-атмосферного взаимодействия, формирование специфических черт планетарной циркуляции. Можно думать, что при отсутствии или нарушении какой-либо из перечисленных компонент данная нелинейная диссипативная система перешла бы в иное устойчивое состояние с отличными от нынешних природными условиями.

К сожалению, современное состояние Венеры представляется более устойчивым, чем климатическое состояние Земли, с чем, с одной стороны, небезосновательно связаны опасения за последствия неблагоприятных воздействий человечества на окружающую природную среду, а с другой — сомнительная, но, тем не менее, обсуждаемая в литературе (см., например, *Dyson*, *1989*; *Pollack*, *Sagan*, *1991*; *Gillett*, *1991*) возможность предпринять в далеком будущем попытку изменения климата (терраформинг) Венеры. В этой связи уместно вспомнить приведенное И. Пригожиным в книге «Конец определенности» (2001) высказывание Нобелевского лауреата А. Бергсона, что человеческое существование состоит из «непрерывного сотворения непредсказуемой инновации». Другими словами, это — пример неравновесной ситуации, в которой могут возникать диссипативные структуры и новый уровень самоорганизации.

Марс

С точки зрения эволюции Марс является антиподом Венеры и представляет собой другую противоположность Земле, хотя по своим природным свойствам более похож на нее и, возможно, был близким аналогом Земли на ранних этапах эволюции. Наиболее актуальные задачи, которые стоят сейчас перед исследователями Марса, включают изучение кратковременных и долгопериодических вариаций климата, геологический и химический состав пород, образующих поверхностный слой коры планеты, сезонные циклы содержания в атмосфере воды и углекислоты, поиск распределения различных форм воды как на глубине, так и в приповерхностном слое — жидкой, связанной и водяного льда. Вообще, с проблемой воды в геологическом прошлом и настоящем

Марса связано построение различных климатических, геологических и эволюционных моделей этой планеты и наличие возможных следов примитивных форм существующей или палеожизни.

В нашу задачу, естественно, не входит рассмотрение многочисленных аспектов природы Марса, в исследованиях которого за последние десятилетия достигнут громадный прогресс. Этому способствовали в первую очередь успешные полеты орбитальных космических аппаратов «Марс Реконнейсанс Орбитер», «Марс Глобал Сорвейор», «Марс Одиссей», «Марс Экспресс», «Феникс», работа на поверхности марсоходов «Спирит» и «Оппортьюнити», обзор результатов которых и развитых модельных подходов потребовал бы значительного расширения списка литературы. Поэтому мы ограничимся ссылкой на ряд обзоров и монографий (см., например, *Kieffer и др.*, *1992*; *Carr*, *1981*; *1996*; *1999*; *2000*; *Jakosky*, *Jones*, *1997*; *Fanale*, *1999*; *Hartmann*, *2003*; *Hartmann*, *Neukum*, *2001*), где можно найти необходимые первоисточники. Для нас первостепенный интерес представляет обсуждение проблемы эволюции Марса как открытой нелинейной диссипативной системы, с учетом влияния отдельных факторов или их совокупности на переход к устойчивому состоянию природной среды.

Необходимо, в частности, ответить на вопрос о том, какие механизмы могли оказать критическое воздействие на те природные условия, которые предположительно были на Марсе в раннюю эпоху, что подкрепляется сохранившимися на поверхности морфологическими особенностями. Они свидетельствуют о наличии потоков жидкой воды на поверхности при значительно более плотной атмосфере и, следовательно, гораздо более благоприятном климате. Если такие условия действительно существовали, то природу современного сухого (содержание H_2O в атмосфере не превышает 10 мкм осажденной воды) и холодного (средняя температура 210 К) Марса нельзя объяснить тем, что он расположен на 0,5 а. е. дальше от Солнца, чем Земля, а скорее следует связать с его размером, который примерно вдвое меньше земного. Соответственно, масса Марса почти на порядок меньше, чем у Земли, и это должно было привести к раннему исчерпанию радиогенных изотопов, что оказало сильное влияние на геологию и коллапс атмосферы. В отличие от Венеры, сохранившаяся тонкая углекислая атмосфера Марса (95 объемных % CO_2, 2,7% N_2 и 1,6% Ar) со средним давлением у поверхности 6,1 мбар (в 160 раз меньше земного) не создает сколь-нибудь заметного парникового эффекта, и сезонно-суточные вариации температуры превышают сто пятьдесят градусов, от +20°C в некоторых районах у экватора до −130°C на зимней полярной шапке, где конденсируется сухой лед CO_2. Однако древняя атмосфера, сопоставимая по плотности с земной, вполне могла обеспечить достаточно высокую поверхностную температуру, способную удерживать жидкую воду и даже ее круговорот между поверхностью и атмосферой (*Squyres*, *Kasting*, *1994*; *Carr*, *1999*). Интересно, что современная разреженная атмосфера повышает температуру у поверхности за счет парникового эффекта всего на 4 К, а его климатические условия подвержены сезонным вариациям (*Родин*, *Уилсон*, *2006*).

Современный Марс — это холодный пустынный мир с обилием кратеров, системами горных хребтов, плато, плоскогорий и долин, сохранивший следы палеомагнитного поля, развитого вулканизма, разрушенных изверженных пород, влияния на поверхностные ландшафты атмосферной динамики (рис. Ц.6, Ц.7). Несомненно, что поверхность и атмосфера Марса изменялись на протяжении его геологической истории в результате интенсивной ударной бомбардировки, вулканических, тектонических и эрозионных процессов. Тектоника, вероятно, оказала влияние на эволюцию древнего Марса (*Anderson и др.*, *2001*). С тектоническими и вулканическими процессами следует связать появление на рубеже 3,9—3,8 млрд лет назад гидрологического цикла и атмосферы вторичного происхождения Под действием гидрологических и гляциологических процессов вместе с атмосферным выветриванием сильно эродировали кратеры и подверглись модификации марсианские ландшафты. Степень эрозии кратеров свидетельствует, в частности, о том, что она произошла в условиях плотной атмосферы, — современная атмосфера не могла бы оказать такого разрушительного воздействия. Сильнее всего их разрушали процессы выветривания (*weathering*) с участием ветра и воды и происходило это свыше 3,5 млрд лет тому назад, до катастрофического коллапса атмосферы, так что самые старые кратеры практически стерты с лица Марса (*Brain*, *Jakosky*, *1998*; *Golombek*, *Bridges*, *2000*).

Громадные наслоения пыле-песчанного материала скрыли многие первоначальные структуры, в том числе большие отложения подповерхностного льда, образовавшиеся после изменения климата (*Mangold*, *Allemand*, *2001*; *Mellon et al.*, *2004*). Наличие таких отложений на примерно метровой глубине, преимущественно на высоких широтах, подверженных сезонным вариациям, подтверждено измерениями путем нейтронной спектрометрии при мониторинге с орбиты спутника «Марс Одиссей» (*Митрофанов и др.*, *2004*; *Litvak et al.*, *2006*; *Tokano*, *2005*; *Кузьмин и др.*, *2007*). Содержание льда в каменистых породах по массе достигает 50%. Формирование отдельных деталей рельефа, особенно расположенных на склонах, происходило, по-видимому, с участием потоков воды, а на ряде поверхностных структур обнаруживаются особенности, которые заманчиво связать с периодическими просачиваниями (*seepage*) подповерхностной воды в недавнем прошлом, см. рис. Ц.8 (*Malin*, *Edgett*, *2000*). С большой вероятностью можно ожидать, что еще более значительные запасы воды в виде ледяных линз и прослоев сохранились на глубине в сотни метров и нельзя исключить, что вследствие аккумуляции тепла за счет внутреннего теплового потока (при крайне низкой теплопроводности льда) у нижней поверхности подтаивающей линзы может находиться жидкая вода (*Маров*, *1986*; *Clifford*, *Parker*, *2001*) или, что еще более вероятно, резервуары рассолов.

О том, что вода бороздила поверхность Марса в течение нескольких сот миллионов лет его истории (вероятно, в период приблизительно от 3,8 до 3,5 млрд лет тому назад) свидетельствуют многие признаки, являющиеся неотъемлемой чертой марсианской геологии. Прежде всего это системы долин и промоины, напоминающие русла высохших рек с многочисленными притоками, тянущимися на многие сотни километров, некоторые из которых можно связать с бурными водными потоками, образующимися из-за таяния подповерхностного льда при обнажении ледяных линз, или уподобить движениям антарктических ледников (*Gulick*, *2001*; *Lucchitta*, *2001*). Примером таких образований служит район к северу от Элизиума, где через разломы в марсианской коре на поверхность могла выходить вода. В свою очередь, в областях древней тектонической активности обнаруживаются эродированные следы потоков на склонах, которые могли быть вызваны выпадением обильных дождей и даже селями и где на общем хаотическом фоне рельефа сформировались отдельные упорядоченности (рис. Ц.9).

Между тем, обнаружены и более молодые промоины на внутренних склонах ударных кратеров или на стенках глубоких ложбин, в основном на их южной стороне, возраст которых оценивается не миллиардами, а миллионами лет. Возможно, эти черты рельефа связаны с периодическими изменениями наклона оси вращения Марса в пределах от 15° до 35° на временной шкале ~ 10 млн лет, обусловленными, главным образом, влиянием мощного гравитационного поля Юпитера. На еще больших временных интервалах возмущения могут приобретать хаотический характер, так что наклон оси вращения изменяется от 0 до 60°. Это создает предпосылки для грандиозных изменений климата вследствие изменения инсоляции на полюсах и интенсивности перехода летучих в атмосферу из полярных шапок, состоящих из водяного льда вместе с отложениями в зимнем полушарии углекислоты, реголита и пермофроста (*Ward и др.*, *1974*; *Ward*, *Rudy*, *1991*; *Phillips и др.*, *2001*). Рельеф высокоширотных областей не противоречит такой возможности. Обнаружено, в частности, что поверхность между полюсами и экватором перекрыта осадочными породами толщиной 4—6 км на севере и 1—2 км на юге, а сама поверхность изрезана обрывами и трещинами, которые как бы закручиваются вокруг полюсов. Сам осадочный чехол имеет слоистую структуру, что подкрепляет предположение о периодических изменениях климата. Наконец, ряд морфологических особенностей можно связать с появлением на поверхности жидкой воды значительно позднее 3,5 млрд лет, что требует наличия парникового эффекта в значительно более плотной, чем современная, атмосфере. Убедительным примером служит обнаружение на снимке, полученном космическим аппаратом «Марс Экспресс» внутри одного из кратеров большого ледяного озера (рис. Ц.10).

Структуры рельефа в северных районах Марса, по данным наблюдений со спутника «Марс Глобал Сорвейер», напоминают береговые линии древнего океана, ограничивающие области постоянной высоты поверхности, что можно объяснить равномерным осадконакоплением в больших объемах воды на северных равнинах Марса. По оценкам геологов, общая средняя глубина океана могла достигать 0,5 км (*Carr*, *1999*; *Head и др.*, *1999*; *Ivanov*, *Head*, *2001*; *Malin*, *Edgett*, *2001*) и, видимо, это значение ограничивает максимальные запасы воды, которая могла бы сохраниться на Марсе, за вычетом потерь ($\sim 30\%$) вследствие аэрономических процессов, как показали расчеты нетеплового убегания атомов водорода и кислорода из атмосферы планеты, рис. 1.3.4 (*Крестьянникова*, *Шематович*, *2006*; *Шематович и др.*, *2007*). Подтверждением существования древнего океана на Марсе служит обнаружение при помощи марсохода «Оппортьюнити» на плато Мердиани слоистых пород осадочного происхождения (аналогичных осадочным породам на океаническом ложе Земли) с высокой концентрацией солей хлора и брома (рис. Ц.11).

Эти отложения можно действительно ассоциировать с береговой линией древнего океана, где на мелководье происходили циклические процессы испарения и/или вымерзания, оставившие после себя слоистые осадочные породы, богатые солями хлора и брома (*Squyres et al.*, *2004*; *Rieder et al.*, *2004*).

Маловероятно, однако, что вода в океане и реках могла появляться на поверхности в периоды сравнительно кратковременных климатических потеплений. Об этом свидетельствует возраст кратеров, соседствующих с этими формами рельефа, которые, вероятнее всего, относятся к первым миллиардам лет эволюции планеты (*Hartmann*, *Berman*, *2000*). В то же время с этими представлениями трудно согласовать приведенные выше данные о слоистой структуре осадочных пород в средних широтах, так что определенные противоречия сохраняются. Более того, они никак не исключают эпизодическую гидрологическую активность на современном Марсе, равно как и сохранившийся остаточный вулканизм. Разрешению этих противоречий могут помочь результаты морфологического и минералогического картирования поверхности Марса со спутника «Марс Экспресс» (*Bibring et al.*, *2005*).

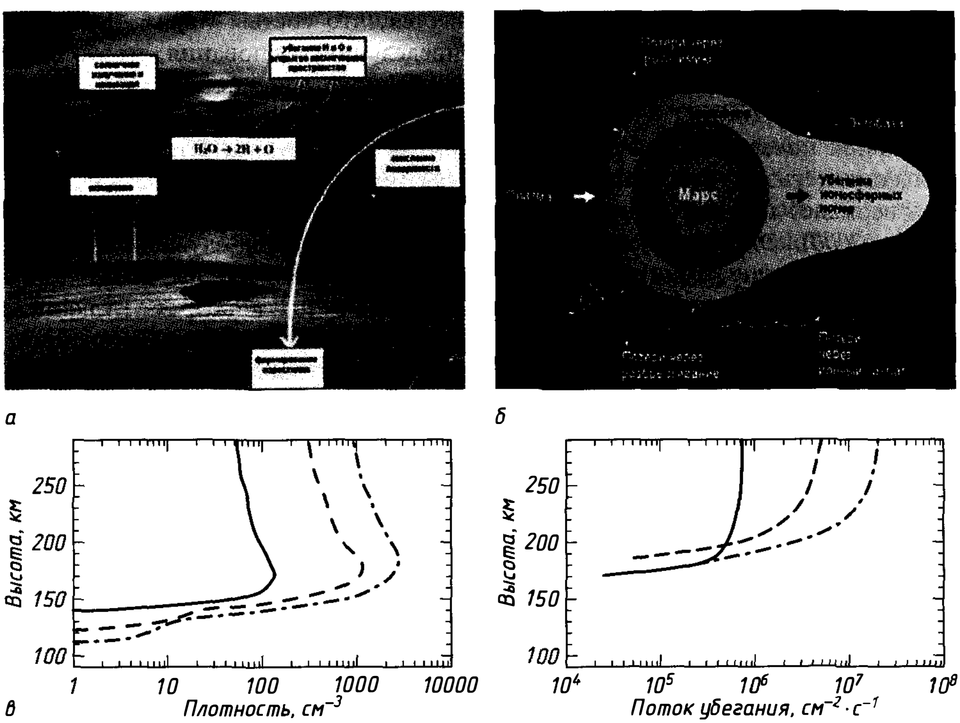


Рис. 1.3.4. (*а*) Модель потери воды из атмосферы Марса посредством аэрономических процессов, за счет которых Марс мог потерять за геологическое время примерно треть своего древнего океана. (*б*) Механизмы диссипации из атмосферы водорода и кислорода, основным из которых является образование сверхтепловых атомов кислорода, обладающих энергией, достаточной для убегания с Марса. (*в*) Рассчитанные потоки и плотность сверхтепловых атомов кислорода в верхней атмосфере Марса как следствие механизмов фотолиза молекул воды и дезактивации возбужденных атомов О

Если принять гипотезу о благоприятном климате древнего Марса, то немедленно возникает принципиальный вопрос: сформировались ли его современные природные условия в результате долгой и сложной эволюции, или же эти изменения в геологическом масштабе времен произошли, по-существу, внезапно. На стандартную модель тепловой эволюции определенные ограничения накладывает состав SNC-метеоритов, в частности, отношение D/H, происхождение которых связывается с Марсом (*McSween*, *1994*; *Watson и др.*, *1994*; *Mathew*, *Marti*, *2001*; см. также *Carr*, *1996*). Модель предполагает выделение железо-сульфидного ядра вскоре после завершения аккумуляции, дифференциацию слагающего вещества на оболочки (хотя и менее полную, чем у Земли), конвективный теплоперенос в мантии, обеспечивший ранний вулканизм, и генерацию магнитного поля за счет динамо в ядре, пока оно сохранялось жидким (*Zuber и др.*, *2000*; *Zharkov*, *Gudkova*, *2005*). Между тем, не удается ответить на вопрос о том, сформировался ли Марс, подобно другим планетам земной группы, из наиболее древнего первичного вещества, из которого состоят метеориты хондритового состава и, в частности, соответствует ли отношение содержаний в нем железа и кремния земному, равному 1,7 (*McSween*, *1999*). Если окажется, что состав Марса отличается от хондритовой модели, для чего есть определенные основания, то это будет иметь принципиальное значение для космогонии Солнечной системы. Отголоском существования у Марса магнитного поля служат зарегистрированные в древних поверхностных породах южного полушария магнитные аномалии (палеомагнетизм). Эти районы обогащены гематитом, что, в свою очередь, подтверждает наличие подповерхностного льда (*Acuna и др.*, *1999*; *Christensen и др.*, *2000*). Энергетическими источниками, очевидно, служили диссипация тепла при аккрециии и дифференциации вместе с теплом, выделяемым при распаде долгоживущих радиоактивных изотопов в недрах. Вулканизм прекратился в связи с начавшимся остыванием Марса из-за ограниченного запаса радиогенных изотопов на планете относительно небольшой массы, что, вероятно, способствовало редукции атмосферы.

Такая модель представляется нам достаточно обоснованной. Вместе с тем, выдвинута гипотеза, согласно которой вулканизм на Марсе появился в результате его соударения с крупным астероидом, образовавшим котловину Эллада поперечником около 2000 км в районе, антиподальном возвышенности Фарсида, на которой как раз находятся крупнейшие в Солнечной системе щитовые вулканы высотой до 26 км. Другими словами, выходы магматических пород через молодую марсианскую кору были инициированы таким катастрофическим событием, а это, свою очередь, привело к радикальному изменению рельефа северного полушария и, возможно, внесло свой вклад в образование атмосферы. С другой, более поздней, глобальной катастрофой, также вызванной столкновением с крупным астероидом, связывают потерю атмосферы и переход Марса от сходного с Землей эволюционного пути приблизительно в первый миллиард лет на развитие по совершенно иному сценарию. Следует признать, что обе эти гипотезы носят в значительной степени умозрительный характер, хотя исключать возможность катастрофических событий, конечно, нельзя.

Вместе с тем, и без привлечения подобных событий отличная от Венеры и Земли эволюция Марса была, вероятно, предопределена его формированием в кольцевом сгущении турбулентного газопылевого диска ближе к Юпитеру, где меньше величина солнечной постоянной, и довольно большим экцентриситетом орбиты, подвергающейся коротко- и долгопериодическим вариациям из-за влияния Юпитера. К этому следует добавить отсутствие у Марса крупного спутника типа Луны, способного застабилизировать положение оси вращения в пространстве (два небольших астероидоподобных спутника Марса Фобос и Деймос не способны выполнить эту роль). Наконец, свой вклад могла внести большая эффективность ударной бомбардировки в окрестности Юпитера и сравнительно слабое гравитационное поле Марса, ограничившее возможность удержания плотной атмосферы. Другими словами, все эти факторы создают предпосылки для меньшей степени устойчивости системы и ее большей уязвимости для внешних воздействий. Под влиянием таких воздействий, которые, несомненно, играли важную роль в истории Марса, могла существено легче происходить последовательность бифуркаций системы, ассоциируемой с совокупностью природных комплексов на определенном этапе эволюции и их переходом в новое состояние.

Планеты-гиганты и спутники

В отличие от планет земной группы, которые сформировались вблизи Солнца из тяжелой высокотемпературной фракции исходного материала протопланетного облака, планеты-гиганты — Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун — аккумулировали значительно более легкие элементы, отвечающие космической распространенности элементов. Соответственно, Юпитер и Сатурн состоят в основном из наиболее обильных водорода и гелия, то есть их состав близок к солнечному. Только очень массивные планеты были способны аккрецировать эти легкие газы из протопланетного облака и удержать их в своем составе — согласно существующим оценкам (*Wetherill*, *Steward*, *1989*; *Lissauer*, *1993*) такому сценарию соответствует пороговое значение массы $M > 10 M_E$. По доступному измерениям химическому составу атмосферы можно судить как о составе недр, так и о составе материала протопланетного диска. Вместе с тем, атмосферы планет-гигантов обогащены более тяжелыми элементами, в частности углеродом, содержание которого на Юпитере втрое, а на Уране и Нептуне даже в 30 раз, превышает солнечное, что возможно объясняется бомбардировкой планетезималями, продолжавшейся в течение длительного времени после завершения основной фазы аккреции (*Owen и др.*, *1999*; *Atreya и др.*, *2003*).

При очень низких температурах в областях Солнечной системы между 10 и 30 а. е. наиболее эффективно конденсировались водородсодержащие соединения — вода, аммиак, метан («льды»), которые в различных соотношениях вошли, главным образом, в состав Урана и Нептуна. Еще более тяжелые элементы и соединения сосредоточились только в ядрах планет-гигантов, на которые происходила аккреция более легких элементов и соединений (рис. Ц.3, *б*). У Юпитера и Сатурна они составляют относительно небольшую долю массы планеты, всего от 3 до 15%, достигая 60—80% у Урана и Нептуна, что, по-видимому, объясняется меньшим содержанием первичных газов в этой области диска на более поздней стадии формирования этих планет. Предполагают, что примерно аналогичное соотношение тяжелой и легкой фракции элементов содержит недавно открытая вресолнечная планета HD 149026b, сопоставимая по размерам с Сатурном (см. *Lissauer*, *2007*). В целом же планеты-гиганты являются газовожидкими и ледяными телами малой средней плотности, несмотря на огромное давление в недрах, не имеющими твердой поверхности, а атмосферой можно называть продолжение их недр, т. е. наружный слой верхней мантии. О свойствах динамики атмосфер специально говорится в разделе 1.3.4.

Заметим, что Юпитеру, масса которого $\sim 0{,}1\%\ M_S$, не хватило всего двух-трех порядков, чтобы могли начаться термоядерные реакции, соответственно, в водородно-дейтериевом ($M = 0{,}11 M_S$) и водородно-гелиевом ($M = 0{,}8M_S$) циклах. Можно поэтому думать, что Юпитер занимает позицию у нижней границы звездной эволюции, находясь вблизи коричневых карликов [см. раздел 1.3.6].

У всех планет-гигантов есть спутники и кольца. Благодаря громадному прогрессу методов и техники наблюдений наземной астрономии число открытых за последние годы спутников возросло в несколько раз, и в настоящее время известно 162 спутника: 62 у Юпитера, 60 у Сатурна, 27 у Урана и 13 у Нептуна (*Вашковьяк*, *Тесленко*, *2008*). Размеры большинства спутников не превышают десятков и сотен километров, но некоторые сопоставимы с Луной и даже Меркурием. Тем не менее отношение суммарной массы спутников к массе планеты не более 0,01%. В отличие от самой планеты, ее спутники являются твердыми телами, обладающими поверхностью, хотя их относительно низкие средние массы свидетельствуют о значительной доли в их составе льдов, прежде всего водяного льда. Очевидно, большинство крупных спутников сформировалось из вещества того же диска, что и сама планета, и гораздо ближе к ней, увеличив в дальнейшем свои радиальные расстояния за счет приливных взаимодействий с планетой. В то же время спутники, находящиеся значительно дальше от планеты, преимущественно являются захваченными астероидами и ядрами комет. Сама система спутников вокруг каждой из планет, лежащих вблизи плоскости ее экватора, напоминает Солнечную систему в миниатюре.

Внимание привлекают прежде всего галилеевы спутники Юпитера — Ио, Европа, Ганимед, Каллисто (рис. Ц.12, Ц.13), в понимание природы которых решающий вклад внесли полеты космических аппаратов «Вояджер» и «Галилей» (*Барсуков*, *Маров*, *1985*; *Burns*, *Matthews*, *1986*; *Buratti*, *1999*). Галилеевы спутники образовались, вероятно, одновременно с самой планетой вблизи нее и в дальнешем увеличили свои радиальные расстояния вследствие приливного воздействия Юпитера (см. *Spencer*, *2001*). Их теория движения обладает характерной особенностью, обнаруженной еще Лапласом, — в системе этих спутников имеется тройной резонанс 1 : 2 : 4, т. е. в таком кратном соотношении находятся периоды обращения Ио, Европы и Ганимеда вокруг Юпитера. Наряду с этим, существует соотношение между средними движениями, что вызывает либрацию спутников, а сами они испытывают возмущениями от сильного гравитационного взаимодействия друг с другом (*Lieske*, *1977*). В результате каждому из галилеевых спутников свойственны определенные уникальные черты, но особенно выделяются ближайшие к Юпитеру Ио и Европа с периодами обращения соответственно 1,77 и 3,55 суток. Последующее обсуждение несет, по нашему мнению, убедительные свидетельства того, что формирование уникальных особенностей как этих, так и многих других спутников гигантов, является следствием процессов самоорганизации, приведших вначале к возникновению резонансов, а в процессе дальнейшей эволюции — к формированию специфических природных комплексов.

На Ио, радиус которой (1821 км) сопоставим с размером Луны, обнаружена широкомасштабная вулканическая активность глобального масштаба, продолжающаяся в современную эпоху. На поверхности, практически лишенной следов ударных кратеров из-за ее непрерывного обновления со скоростью до ~ см/год, наблюдается, как правило, несколько одновременно действующих вулканов, самые крупные из которых получили названия Прометей и Пеле. Сама поверхность в областях широко распространенных долин покрыта отложениями серы и ее аллотропов, образующихся вследствие фазовых переходов и придающих ей характерную желто-оранжевую окраску (рис. Ц.14). Свой вклад в формирование этих свойств, кроме самой лавы, вероятно, вносили процессы конденсации летучих и пирокластики. Наряду с этим, имеются горы (до 15 км высотой) и многочисленные кальдеры шириной от 10 до 200 км и глубиной до 2 км, а следы лавовых потоков тянутся на сотни километров (*Johnson*, *Soderblom L. A.*, *1983*; *Nash и др.*, *1986*). Существуют многочисленные тепловые аномалии на фоне окружающей холодной поверхности, среди которых особенно выделяется область Локи патера.

Грандиозным является сам процесс извержения лавы и газов в вакуум со скоростью около 1 км/с, образующих в условиях малой силы тяжести плюмажи высотой свыше 200—400 км (рис. Ц.15). В состав лавы входят преимущественно силикаты вместе с сернистыми соединениями, так что вулканизм на Ио по своей природе мало отличается от силикатного взрывного вулканизма на планетах земной группы, с той разницей, что генерируется он не газами H_2O и CO_2, а SO_2 (*Keszthelyi*, *McEwen*, *1997*; *McEwen и др.*, *1998a*, *b*; *Wilson*, *1999*). Силикатному вулканизму не противоречит как зарегистрированная высокая температура лавы (свыше 1500 K), так и модель недр Ио, состоящих из железного или железо-сульфидного ядра (~ 20% по массе), частично расплавленной конвективной силикатной мантии (возможно, обогащенной магнием) и литосферы толщиной ~ 30 км. Однако, в отличие от Земли, Венеры, Марса, где вулканизм обусловлен радиогенным теплом, на Ио, как и на Луне, из-за малости размеров радиоактивные изотопы давно исчерпаны, и источником извержений служит диссипация приливной энергии вследствие упомянутого выше гравитационного взаимодействия Ио с другими галилеевыми спутниками при орбитальном движении в гравитационном поле Юпитера, что приводит к периодическим сильным деформациям фигуры (*Peale и др.*, *1979*). Согласно существующим оценкам, этот механизм примерно на два порядка превышает другие возможные энергетические источники. Достаточно высокая средняя плотность (3,53 г/см^3) свидетельствует о том, что Ио состоит практически целиком из каменистых пород, а водно-ледяная оболочка (если она когда-либо существовала) была, по-видимому, потеряна благодаря разогреву недр уже на ранней стадии эволюции. Интересно, что энергия, излучаемая Ио в окружающее пространство (2,5—5 Вт/м^2) примерно на два порядка превышает внутренние тепловые потоки на Земле (0,08 Вт/м^2) и Луне (0,02 Вт/м^2). Поскольку, к тому же, эта энергия в современную эпоху почти на порядок больше равновесного значения (0,8 Вт/м^2), то следует, видимо, допустить, что скорость приливной диссипации энергии претерпевала заметные изменения (*Matson*, *Blaney*, *1999*).

Благодаря вулканической деятельности Ио обладает атмосферой из двуокиси серы, хотя и очень разреженной, и многочисленными нейтральными облаками, для которых из-за сильного рассеяния солнечного света наиболее характерна натриевая эмиссия, хотя преобладают в них сера и кислород. Те же компоненты в состоянии ионизации образуют ионосферу и плазменный тор вдоль орбиты Ио, который активно взаимодействует с мощной магнитосферой Юпитера (*Schneider и др.*, *1995*; *Krimigis и др.*, *2002*). Это взаимодействие приводит, в частности, к известной модуляции декаметрового излучения Юпитера, зарегистрированной еще в середине прошлого столетия. Ио, находящаяся на радиальном расстоянии 5,91 R_j, буквально погружена в его магнитосферу, следствием чего является интенсивное выбивание с поверхности нейтральных частиц энергичными магнитосферными ионами (*sputtering*), что служит основным механизмом потерь материала со спутника и пополнения атмосферы и тора. Взаимодействие окружающей Ио плазмы с магнитосферой Юпитера порождает токи силой до миллиона ампер, проецирующиеся от тора в ионосферу планеты.

Примерно аналогичное, но меньшее приливное воздействие испытывает находящаяся немного дальше от Юпитера и наименьшая по размерам среди галилеевых спутников, но, возможно, наиболее интригующая в Солнечной системе, Европа (радиус 1561 км, плотность 3 г/см^3). Но если мощный разогрев и связанный с ним вулканизм на Ио привел, как уже говорилось, к утрате ее ледяной оболочки, как у других галилеевых спутников, то на Европе она предположительно превратилась в водный океан глубиной ~50 км, находящийся под ледяным панцирем толщиной ~10—20 км (рис. Ц.16). К возможности появления жидкой воды на такой глубине приводит оценка теплового потока за счет диссипации приливной энергии — около 5 К/км. Об этом же свидетельствует обусловленное приливами несинхронное по отношению к недрам вращение внешней оболочки Европы, наличие во льду многочисленных трещин, образование областей с хаотическим нагромождением блоков, которые можно уподобить айсбергам, необычная форма ударных кратеров (*Spencer*, *2001*; *Carr и др.*, *1998*). Более того, за счет периодического энерговыделения в недрах спутника океан может прогреваться и быть, таким образом, даже подходящей биогенной средой. Интересно, что если эти оценки верны, то объем воды в океане Европы существенно превышает водные запасы Земли.

Подтверждением существования океана служит и уникальная гладкость фигуры Европы, а также то, что ее ледяная поверхность буквально испещрена хаотически расположенными бесчисленными невысокими хребтами и разломами длиной до 3000 км, шириной до 70 км и глубиной в несколько сот метров, как это видно на изображениях, полученных при нескольких сближениях с Европой спутника Юпитера «Галилей». Эти геологические особенности рельефа, лишенные какой-либо упорядоченности, по-видимому, образовались сравнительно недавно, о чем свидетельствует отсутствие на поверхности древних кратеров ударного происхождения. Происхождение разломов можно отнести на счет конвективных и других динамических процессов в океане, инициирующих подвижки льдов и, возможно, частичный вынос воды наружу, где образующиеся трещины заполняются свежим льдом типа шуги. С этими же процессами, очевидно, связана достаточно быстрая эрозия (сглаживание) следов метеоритной бомбардировки Европы. Другим важным аргументом служит наличие сравнительно небольшого магнитного поля, скорее всего обязанного наличию электропроводящего соленого океана, в котором индуцируются электрические токи, вследствие чего магнитосфера Юпитера испытывает заметные возмущения.

Магнитные поля обнаружены также на Ганимеде, самом крупном спутнике в Солнечной системе, размер которого больше Меркурия, и несколько уступающем ему по размерам Каллисто (*Kivelson и др.*, *1996*; *1999*). На Ганимеде (рис. Ц.17) отчетливо выделяются светлые и темные области, происхождение которых, по-видимому, обусловлено обнажением водяного льда или, наоборот, отложениями каменистых пород при метеоритной бомбардировке поверхности, включая крупные астероиды и кометы Наряду с этим, присутствуют системы желобов и трещин, вероятно, связанные с тектонической активностью, обусловленной, наряду с притоком приливной энергии при резонансном взаимодействии с Европой и Ио, также, возможно, сохранившимся источником радиогенного тепла в силикатной мантии, контролируемой конвективным переносом. Так или иначе, эти энергетические источники привели к дифференциации недр Ганимеда, с чем, очевидно, и связано наличие у него магнитного поля. Оно может быть обусловлено как механизмом динамо в частично расплавленном железном или железо-сульфидном ядре, радиус которого оценивается ~ 1000 км, так и механизмом индукции в предполагаемой водно-ледяной внешней оболочке протяженностью ~ 800 км (*Anderson и др.*, *1996*; *Kivelson и др.*, *1996*; *1999*; *Schubert и др.*, *1996*).

Каллисто наименее модифицирована среди всех галилеевых спутников (*Anderson и др.*, *1998*). Степень кратерирования ее поверхности близка к насыщению, что свидетельствует о высокой эффективности ударной бомбардировки в окрестности Юпитера. На Каллисто сохранились крупные старые кратеры, деградированные значительно меньше, чем на Ганимеде. Особенно выделяется область Валхалла с системой концентрических валов и гребней высотой в сотни метров и протяженностью в несколько тысяч километров, вызванных, вероятно, падением крупного астероида и образовавшего обширную котловину, подобную лунным. Однако, в отличие от Луны, ледяная поверхность этого спутника, покрытая наслоениями более темного материала (вероятно, экзогенного происхождения), в составе которого такие углеродсодержащие соединения, как CH, CO_2, CN, SO_2 и, возможно, SH-радикалы, сохранила последовательность рапространения волн от эпицентра взрыва благодаря пластичности ледяной коры.

Поскольку Каллисто не подвержена приливному разогреву вследствие орбитального динамического резонанса Лапласа, как три других галилеевых спутника, какие-либо следы эндогенной активности на ней отсутствуют. С этим же связано и то обстоятельство, что степень дифференциации пород, слагающих Каллисто, существенно меньше, чем у Ганимеда, о чем свидетельствует измеренное значение квадрупольного момента гравитационного поля, которому отвечает более высокое значение его безразмерного момента инерции $I = C/MR^2 = 0{,}359 \pm 0{,}005$, в то время как у Ганимеда оно $I = 0{,}3105 \pm 0{,}0028$.

В отсутствие внешнего энергетического источника трудно ожидать, что на глубине сохранилась жидкая вода, поскольку за геологическое время недра должны были охладиться сабсолидусной конвекцией, контролируемой вязкостью льда, хотя и менее эффективной, чем на Ганимеде. Существует, однако, и иная точка зрения, подкрепляемая отсутствием на стороне, противоположной котловине Валхала, заметных сейсмических следов ударного воздействия от падения крупного тела, что можно объяснить поглощением энергии удара жидким слоем недр. В пользу данного предположения свидетельствует и наличие у Каллисто магнитного поля, сопоставимого по напряженности с Европой (*Shubert*, *1997*; *Anderson и др.*, *1998*; *Khurana и др.*, *1998*).

Помимо галилеевых спутников, наибольшее внимание у других планет-гигантов привлекают спутник Сатурна Титан и спутник Нептуна Тритон. Заслуживает вместе с тем упоминания и совсем небольшой почти целиком ледяной спутник Сатурна Энцелад, размер которого 500 км, а плотность всего 1,120 г/см$^{-3}$. Несмотря на столь малые размеры, значительная часть его поверхности сильно модифицирована активными геологическими процессами, оставившими хребты и желоба, а отсутствие кратеров и альбедо спутника, близкое к единице, свидетельствует о том, поверхность очень молодая. Ее альбедо достигает 90% и является самым высоким из всех тел Солнечной системы. Как оказалось, и в этом случае наблюдаемые структуры являются следствием самоорганизации, возникшей из-за слабо эллиптической орбиты Энцелада, находящегося в резонансе 2 : 1 с другим спутником Сатурна Дионой. Ее приливное воздействие достаточно для того, чтобы разогреть его недра до температуры 176 К, отвечающей температуре плавления водно-аммиачной эвтектики. По-видимому, этим механизмом обусловлена как сохранившаяся геологическая активность этого холодного тела в виде обнаруженного «водного вулканизма», так и источник частиц, заполняющих кольцо Сатурна Е, внутри которого как раз и находится Энцелад.

Судя по величине средней плотности, Титан и Тритон, подобно Ганимеду и Каллисто, состоят наполовину из каменистых пород и наполовину из льдов, вероятно, в основном водяного, с разными типами кристаллизации. Уникальность Титана, сопоставимого по размерам с Меркурием и Ганимедом, — наличие у него мощной азотно-аргоновой атмосферы протяженностью ~ 400 км и несколькими инверсионными слоями, с давлением у поверхности 1,6 атм при температуре 94 К. Заметим, что эта температура близка к тройной точке метана, при которой на поверхности происходят фазовые переходы. Поскольку ускорение силы тяжести на Титане составляет примерно одну седьмую часть от земного, то для создания давления 1,6 атм масса атмосферы Титана должна быть на порядок больше земной (*Hunten и др.*, *1984*; *Coustenis*, *Lorenz*, *1999*). Наличие в атмосфере ^{40}Ar, по-видимому, означает существование на нем вулканической деятельности. Особенности морфологии поверхности не исключают также, что на нее оказали влияние тектонические процессы.

Другой интересной особенностью Титана является круговорот метана, включающий образование в атмосфере метановых облаков и выпадение на поверхность осадков в виде метановых дождей. Существование такого метанового цикла предполагалось ранее на основе расчетных моделей и исследования свойств поверхности путем радиолокационных измерений и при помощи космического телескопа «Хаббл» (*Meier и др.*, *2000*). Эти ожидания подтверждила съемка панорам поверхности с борта посадочного аппарата «Гюйгенс», отделенного от орбитального комплекса «Кассини» при подлете к Сатурну и осуществившего посадку на Титан в январе 2005 г. На снимках видны глыбы округлой формы, состоящие, вероятно, из водяного и метанового льдов и, вероятно, других органических соединений, темные пятна, долины, напоминающие русла рек, стекающих с возвышенностей, ряды дюн, состоящих из частиц «углеводородной пыли», видимо, образованные сильными ветрами, и отдельные заполненные или высохшие озера размером в сотни километров, образование которых действительно можно связать с выпадением из атмосферы жидкого метана (рис. Ц.18). Метан конденсируется в облака на высоте в несколько десятков километров, из них постоянно выпадает на поверхность слабая изморось, а из особо плотных облаков вблизи Южного полюса — более крупные «дождевые» капли, компенсируемые испарением, что представляет собой аналог гидрологического цикла на Земле. При очень низкой температуре жидкой воды на поверхности быть не может, но не исключено, что, подобно галилеевым спутникам, она есть на глубине, в подповерхностном слое. Наряду с этим, есть основания предполагать, что на поверхности кроме метана существуют и более сложные непредельные углеводороды (этан, этилен, ацетилен, диацетилен, метилацетилен, цианоацетилен), а также пропан, синильная кислота и другие органические соединения, образующиеся в верхней атмосфере и углеводородных облаках под действием ультрафиолетового излучения в результате процессов фотолиза метана. Углеводороды придают атмосфере характерный красно-оранжевый цвет. Можно думать, что на Титане создаются благоприятные условия для начальных этапов биогенного синтеза, подобные тем, которые существовали на ранней Земле (*Sagan и др.*, *1984*), и это привлекает к Титану особый интерес.

В противоположность Титану, Тритон, размер которого чуть меньше Луны, практически лишен атмосферы (давление не превышает 15 микробар), а температура его азотно-метановой поверхности всего 38 K (*Benner*, *1997*; *McCinnon*, *Kirk*, *1999*). Заметим, что ряд признаков роднит Тритон с Плутоном, до недавнего времени считавшимся девятой планетой Солнечной системы, а ныне переведенного в категорию крупных тел пояса Койпера — плутонидов. Между тем, существуют и очень большие различия, ставшие очевидными после пролета вблизи Нептуна космического аппарата «Вояджер». Прежде всего на поверхности Тритона в области Южной полярной шапки было обнаружено несколько десятков темных полос, некоторые из которых отождествлены с гейзероподобными выбросами жидкого азота на высоту в несколько километров (криовулканизм, рис. Ц.19). С гейзерами, вероятно, связаны также отложения на замерзшем метане пылевых частиц, переносимых преобладающими ветрами даже в сильно разреженной среде. Кроме того, на поверхности обнаружены образования, напоминающие замерзшие озера с азотно-метановыми береговыми террасами высотой до километра, образование которых, возможно, связано с последовательными эпохами плавления — замерзания при изменении условий инсоляции или, скорее, в результате приливных взаимодействий Тритона с Нептуном. По-видимому, разогрев недр за счет диссипации приливной энергии служит, подобно галилеевым спутникам, основным источником криовулканизма на этом очень холодном теле. Другим источником энергии гейзероподобных выбросов могло бы быть повышение уровня инсоляции, поскольку они наблюдаются на широтах, на которых Солнце находится в зените. Однако данный механизм, скорее всего, играет второстепенную роль. Так или иначе, о сохранившейся геологической активности Тритона свидетельствует малое число ударных кратеров на его относительно молодой поверхности.

У Тритона очень необычная орбита, что остро ставит вопрос о его происхождении. Она сильно наклонена к плоскости эклиптики и обладает почти нулевым эксцентриситетом, а сам Тритон, в отличие от всех других крупных спутников планет, движется не в прямом, а в обратном направлении (по часовой стрелке). Особенности орбитального движения Тритона позволяют предположить, что он первоначально образовался в поясе Койпера, как и Плутон, а позднее был захвачен Нептуном. Однако обычный гравитационный захват, как показали расчеты, маловероятен, поэтому дополнительно предполагается, что Тритон был членом двойной системы, либо постепенно затормозился в верхней атмосфере Нептуна. Подкреплением данной гипотезы служит то обстоятельство, что при переходе на орбиту вокруг Нептуна Тритон должен был испытать со стороны Нептуна и существовавшей системы его спутников (в частности, Нереиды) мощное приливное воздействие, что привело к расплавлению его преимущественно водно-ледяных недр (средняя плотность 2,07 г/см^3). Вполне вероятно, что, как уже говорилось, продолжающееся приливное взаимодействие Нептуна и Тритона в современную эпоху разогревают планету, следствием чего является тепловой поток из недр, почти втрое превышающий величину инсоляции. Другим следствием является то, что Тритон постепенно приближается к Нептуну и в далекой перспективе войдет внутрь предела Роша, где будет разорван на части.

Из краткого обзора небесных тел во внешних областях Солнечной системы можно заключить, что всем им свойственна удивительная упорядоченность природных комплексов, которая складывалась в процессе самоорганизации в открытой диссипативной системе первоначально хаотических образований в виде роя планетезималей, из которых рождались планеты-гиганты и системы их спутников. Самоорганизация была обеспечена в первую очередь гравитационными силами, приведшими к возникновению соизмеримостей и резонансов в движениях планет и спутников, приливными взаимодействиями, вызвавшими разогрев недр и уникальные природные явления в виде вулканов, гипотетического теплого водного океана и азотных гейзеров в условиях крайне низких температур. Формирование вулканических плюмажей, сопровождающих истечение газов в вакуум, напрямую связано с турбулентными движениями многокомпонентных сред и фазовыми переходами в таких средах, ответственными за морфологию и свойства поверхности, как это имеет место на Ио. По-видимому, турбулентность вносит свой вклад в образование разломов и трещин ледяной поверхности, возникающих при конвективных движениях в водной толще гипотетического океана Европы. С круговоротом метана в турбулизованной атмосфере Титана связаны многие особенности формирования облаков, фотохимических процессов, морфологии поверхности, образования сложных органических соединений.

Замечательный пример самоорганизации — кольца планет-гигантов. Она возникает в системе частиц, находящихся в орбитальном движении и одновременно испытывающих хаотические взаимодействия. При этом образуются упорядоченности в конфигурациях колец, обязанные в первую очередь возникновению коллективных процессов и наличию в дисковой системе неупругих столкновений макрочастиц (*Fridman*, *Polyachenko*, *1984*; *Горькавый*, *Фридман*, *1994*). Другими словами, самоорганизация заложена в самой системе, а находящиеся вблизи или внутри структуры колец спутники, часто называемые «пастухами», оказывают дополнительное «стимулирующее» влияние. Наряду с этим, частицы колец, сами представляющие собой бесконечное количество мелких спутников, оказываются в резонансах с более крупными спутниками планеты (рис. Ц.20). Это приводит к нарушению однородной структуры колец, в частности, к образованию внутри их щелей, таких как щели Кассини, Энке в кольцах Сатурна, по своей природе аналогичных люкам Кирквуда в Главном поясе астероидов (*Greenberg*, *Brahic*, *1984*; *Esposito и др.*, *1984*). С этим же механизмом связана генерация волн плотности, формирование иерархической структуры колец и вследствие механизма развития гравитационно-диссипативной неустойчивости — их расслоение на тысячи тонких спиральных колечек (*ringlets*). Другим примером самоорганизации и взаимодействия с кольцами близко расположенных спутников планеты служит образование у Урана системы очень узких колец (рис. Ц.21), в которых частицы концентрируются вследствие эффекта гравитационной фокусировки (*Elliot*, *Nicholson*, *1984*; *Esposito и др.*, *1991*; *French и др.*, *1991*), а в кольцах Нептуна наблюдается даже неравномерное распределение частиц в виде отдельных «арок» вдоль орбиты, дрейфующих в азимутальном направлении. Два наиболее характерных кольца с арками названы Адамс и Леверье в честь первооткрывателей Нептуна путем предвычислений («на кончике пера»), что вскоре блестяще подтвердилось наблюдениями. Механизм образования арок до конца не понят, хотя одним из объяснений служит наличие резонансов (42 : 43) частиц колец с эксцентрисететом и наклонением спутника Нептуна Галатеи, что препятствует равномерному расределению частиц вдоль орбиты (*Porco и др.*, *1995*; *Porco*, *1999*). Этот механизм нуждается, однако, в дополнительном обосновании.

Все кольца планет, вероятно, представляют собой либо рой первоначальных частиц, формированию которых в спутник препятствовали гравитационные силы внутри предела Роша, либо они, наоборот, являются результатом распада астероида или кометы, зашедших внутрь предела Роша. Характерным примером такого события, видимо, служит кольцо Юпитера, заполненное очень мелкими частицами и окруженное снаружи и изнутри диффузными туманностями (*Ockertbell и др.*, *1999*). Гипотеза распада выдвинута, исходя из оценок ограниченного времени существования колец, $\sim 0{,}5$ млрд лет, что существенно меньше возраста Солнечной системы (*Esposito и др.*, *1984*; *1991*). В этом случае нужно считать кольца не реликтом стадии аккумуляции самой планеты, а периодически возникающими и исчезающими образованиями в результате катастрофического события гравитационного захвата планетой и последующего разрушения малого тела, что, вообще говоря, представляется вполне вероятным. В пользу этого предположения говорит и то обстоятельство, что, например, преимущественно ледяные частицы колец Сатурна обладают высоким альбедо, то есть не покрылись темным микрометеорным веществом, как это произошло бы с реликтовыми кольцами за время существования Солнечной системы.

1.3.4. Атмосферы Земли и планет

Многочисленные примеры самоорганизации в турбулентных природных средах мы находим в планетных атмосферах.

Атмосфера планеты земного типа представляет собой газовую оболочку, ограниченную снизу твердой подстилающей поверхностью, а для газовожидкой планеты-гиганта — это, как уже отмечалось, просто верхний газовый слой. Атмосферы плавно переходят в околопланетное космическое пространство. Примыкающие к поверхности области нижней атмосферы относятся к сфере интересов метеорологии, в то время как области верхней атмосферы, подверженные непосредственному воздействию солнечного коротковолнового электромагнитного и корпускулярного излучения — к сфере планетной аэрономии (*Маров*, *Колесниченко*, *1987*). В переходных областях средней атмосферы происходят интенсивные процессы тепломассообмена, оказывающие существенное влияние на формирование климата и атмосферную эволюцию.

Основные свойства

Свойства планетных атмосфер сильно отличаются друг от друга даже при относительно небольших расстояниях в пределах Солнечной системы, занимаемых планетами земной группы. Меркурий, подобно Луне, практически лишен атмосферы — плотность его газовой оболочки у поверхности не превышает 10^{-17} г/см^3, хотя при взаимодействии плазмы солнечного ветра с магнитосферой и экзосферой Меркурия возникает ряд интересных динамических эффектов. Вторичные атмосферы Венеры и Марса, различающиеся между собой по плотности почти на четыре порядка, имеют окислительный характер и состоят в основном из углекислого газа, с относительно небольшими фракциями азота и ничтожными содержаниями кислорода и воды, в отличие от первичных восстановительных атмосфер планет-гигантов, состоящих из водорода, гелия и водородсодержащих соединений, наиболее типичными из которых являются аммиак и метан. Подробный обзор свойств атмосфер планет и их спутников, рассматриваемых с точки зрения проблем происхождения и эволюции, можно найти, например, в работах (*Atreya и др.*, *1989*; *Del Genio*, *1997*; *Samuelson*, *1997*; *West*, *1999*).

Помимо химического состава, атмосферы планет-гигантов отличает от планет земного типа целый ряд особенностей структуры и динамики. Их тропосферы обладают большой протяженностью (~ 120—200 км), а тепловая структура в целом соответствует адиабатическому температурному градиенту. Прямое зондирование атмосферы Юпитера в диапазоне давлений 0,4—22 бар было осуществлено в декабре 1995 г. при помощи спускаемого аппарата «Галилей». Подробное изложение результатов содержится в целевых обзорах и тематических выпусках журналов (см. *Galileo Probe Team*, *1996*; *Galileo Orbiter Team*, *1996*; *JGR*, *1998*, *special issues*; *Icarus*, *1998*, *special issue*). Измерения показали, что отношение $He/H = 0{,}24$ близко к солнечному, в то время как содержания более тяжелых элементов — углерода (в форме CH_4), азота (в форме NH_3) и серы (в форме H_2S) примерно втрое превышают солнечные значения, что заставляет думать о связи зоны формирования Юпитера с более далекими холодными областями. Другой неожиданностью стала высокая сухость атмосферы и, следовательно, ее обеднение кислородом, хотя этот вывод, скорее всего, не представляет планету в целом, а справедлив лишь для локальной области спуска, известной как 5-мк пятно, где из-за разрыва в облаках происходит тепловая эмиссия с более глубоких уровней атмосферы. Видимо, с этим связана и определенная аномалия в формировании трехслойной структуры облаков, состоящих, согласно модельным расчетам (*West и др.*, *1986*; *Atreya*, *1989*), из аммиака, гидросульфида аммония и воды. Вопреки ожидаемой в этом диапазоне температур конденсации NH_3, H_2S и H_2O, обнаружены были только кристаллы NH_4SH. В то же время не были найдены кристаллы аммиака, придающие белый цвет зонам. При малых относительных содержаниях соединений, образующих облака, фазовые переходы по существу не оказывают влияния на температурный профиль, отвечающий сухой адиабате. Заметим, что температура возрастает от 135 К на верхней границе облаков до 900 К в термосфере; в условиях слабого потока солнечного коротковолнового излучения на орбите Юпитера это, вероятнее всего, связано с диссипацией энергии внутренних гравитационных волн, распространяющихся из глубинных слоев, и нагревом за счет энергичных частиц, высыпающихся из мощной магнитосферы планеты.

По содержанию CH_4 и NH_3 можно судить о том, в каких формах находились углерод и азот в протопланетном диске. Из условия термохимического равновесия, отвечающего обратимым реакциям $CH_4 + H_2O \rightleftarrows CO + 3H_2$ и $2NH_3 \rightleftarrows N_2 + 3H_2$, следует, что при низких температурах эти реакции идут в направлении образования CH_4 и NH_3, а при высоких — в направлении образования CO и N_2. Это условие, однако, далеко не всегда выполняется, примером чего служит атмосфера Титана, в которой доминирует азот при относительно небольшом содержании метана. Возможно, конкурентными приведенным термохимическим реакциям оказались реакции фотолиза NH_3, содержавшегося в протовеществе диска и изначально вошедшего в состав газовой оболочки Титана. Что касается областей расположения планет земной группы, то, очевидно, образование CO и N_2 сопровождалось реакцией $CO + H_2O \rightarrow CO_2 + H_2$, что объясняет, наряду с дегазацией из недр, углекислый состав их атмосфер. По существующим представлениям, аномальный с этой точки зрения состав атмосферы Земли с обилием кислорода и азота обязан своим происхождением возникновению биосферы. Подчеркнем, что химический и изотопный состав атмосферы во многом отражают характер эволюции самой планеты и, в частности, историю воды. Наиболее показательным здесь является отношение HDO/H_2O, которое в 120 раз превышает земное на Венере и в 6 раз на Марсе (см., например, *Pollack и др.*, *1980*). Обогащение атмосферы дейтерием является следствием потери воды и позволяет получить оценки ее первоначальных запасов и степени дегазации недр. В свою очередь, вода служила основным фактором, определившим ключевые черты эволюции планеты и ее атмосферы в первую очередь тепловой режим и атмосферную динамику, с которыми непосредственно связаны процессы формирования погоды и климата.

С точки зрения энергообмена твердый (жидкий) подстилающий и газовый слои представляют собой единую термодинамическую систему, энергетический баланс которой обусловливается либо приходящей солнечной радиацией, либо преимущественно внутренней энергией недр, которая на Юпитере, Сатурне и Нептуне примерно вдвое превышает величину инсоляции. Природа этого источника, очевидно, связана с выделением гравитационной энергии за счет продолжающегося сжатия этих планет, в соответствие с теоремой о вириале для системы, обладающей гравитационным потенциалом и находящейся в гидростатическом равновесии.

Поглощаемая атмосферой планеты энергия, преобразуемая во внутреннюю и кинетическую энергию газовой среды, частично излучается в космос в виде ИК-радиации, обеспечивая в конечном итоге энергетический баланс. Тепло- и массоперенос происходит на фоне глобальной с масштабами $L \gg H$ ($H = p/\rho g$ — высота однородной атмосферы), мезомасштабной $L \approx H$ и локальной $L \ll H$ атмосферной динамики. Она ответственна за многообразие происходящих в атмосфере метеорологических процессов, при этом роль молекулярных процессов переноса ничтожна. Существенными составляющими регулярного тепло- и массопереноса служат адвекция, определяемая планетарной циркуляцией, и конвекция. Последняя обусловлена тем, что, поскольку на вращающихся планетах земной группы температура на некотором данном уровне давления систематически изменяется в зависимости от широты φ, баротропная атмосфера становится бароклинной, в которой, вследствие нелинейной эволюции гидродинамической неустойчивости Рэлея—Тейлора, возникает турбулентность. Сильные возмущения в течениях среды проявляются также в виде циклонических ветров, сопровождаемых турбулентным тепло- и массопереносом (*Chamberlain*, *Hunten*, *1987*).

У всех планетных атмосфер наблюдается широкий спектр движений, от микромасштабов до планетарной циркуляции, за счет чего компенсируется неравномерность нагрева солнечным излучением. В атмосферных движениях число Рейнольдса Re обычно превышает критическое значение $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$, и поэтому течение является турбулентным. Турбулизация атмосферных течений возникает либо из-за их существенной деформации потока при обтекании неровностей подстилающей поверхности, либо при потере гидродинамической устойчивости крупномасштабным течением под воздействием повышенных значений скорости ветра и градиентов температуры. В свободной атмосфере основной причиной возникновения турбулентности является конвективная неустойчивость в тропосфере и потеря устойчивости внутренних гравитационно-сдвиговых волн в средней атмосфере. Разрушение этих волн может вызываться «первичной» или «вторичной» неустойчивостью. «Первичная» неустойчивость (неустойчивость Кельвина—Гельмгольца) развивается в сдвиговом слое между течениями с различными скоростями, если для большей части слоя справедливо условие $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$. При «вторичной» неустойчивости поток в среднем устойчив, а неустойчивые участки локализуются вблизи гребней волн. Такой вид неустойчивости характерен в основном для слоев с сильно искривленными вертикальными профилями температуры и скорости ветра.

Дополнительные проблемы, касающиеся устойчивости и энергообмена, возникают при обращении к верхней атмосфере планеты. Здесь проявляются такие специфические особенности, как многокомпонентность и химическая активность атмосферных газов, и потому решающую роль начинают играть аэрономические процессы (см. *Маров*, *Колесниченко*, *1987*). Характер турбулентности в течении однокомпонентной жидкости и в реагирующем многокомпонентном потоке существенно различается. В частности, появление локальных неоднородностей в распределении плотности, температуры и состава атмосферной смеси газов, обусловленных процессами фотолиза и сопровождающими их химическими реакциями, приводят к дополнительной турбулизации течения. Возникающие градиенты плотности среды (которая в этом случае является переменной) порождают дополнительную завихренность путем взаимодействия с градиентами (или флуктуациями) поля давления. Это связано с появлением источникового члена $\rho^{-1}(\partial\rho^{-1}/\partial\boldsymbol{r}) \times (\partial p/\partial\boldsymbol{r})$ (равного нулю в баротропных средах) в известном уравнении Фридмана для завихренности

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega_a}{\rho}\right) = \left(\frac{\Omega_a}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) - \rho^{-1}\left(\frac{\partial\rho^{-1}}{\partial\boldsymbol{r}} \times \frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \rho^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{F}\right), \qquad (1.3.1)$$

где $\Omega_a = \omega + 2\Omega$ — вихрь абсолютной скорости движения, $\omega = (\partial/\partial\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{u}$ — вектор завихренности, Ω — вектор угловой скорости вращения планеты; $\boldsymbol{F}$ — сумма ускорений силы вязкости и внешних массовых сил (см., например, *Монин*, *Яглом*, *1992*). В случае когда массовая плотность ρ постоянна, все динамические эффекты, потенциально зависящие от этого члена «завихренности», отсутствуют. Таким образом, существование локальных неоднородностей (градиентов) массовой плотности составляет важнейшее свойство многокомпонентных реагирующих течений, которое обычно не рассматривается классическими моделями турбулентности однокомпонентной жидкости. Другим усложняющим обстоятельством в проблеме моделирования многокомпонентной турбулентности являются локальные источники энергии, связанные с химическими реакциями. Локальное тепловыделение в газовых потоках ускоряет расширение среды и может индуцировать неустойчивость Релея—Тейлора в стратифицированных в поле силы тяжести течениях при наличии архимедовой силы плавучести, реализуя тем самым обратную связь с гидродинамикой. Все эти проблемы подробно рассматриваются в монографиях авторов (*Маров, Колесниченко, 1987*; *Колесниченко, Маров, 1998*; *Marov, Kolesnichenko, 2001*).

Динамика атмосфер планет земной группы

Конкретные реализации динамического переноса вещества на разных планетах, при наличии четырех типов сил, действующих на элементарный объем воздушной среды (сила тяжести, сила Кориолиса ($2\rho\Omega \times \boldsymbol{u}$), вязкое трение и градиент давления), зависят в основном от соотношений периодов вращения планет и тепловой релаксации атмосферы. Относительный вклад силы Кориолиса в динамику атмосферы определяется числом Кибеля—Россби $\mathrm{Ro} = U/fL$, где U и L — типичные горизонтальные масштабы скорости и длины для синоптических процессов (для земной атмосферы $\mathrm{Ro} \approx 10^{-1}$). Уравновешивая в масштабах синоптических процессов горизонтальные градиенты давления, сила Кориолиса придает течениям геострофичность, с которой связаны специфические колебания в атмосфере с инерционной частотой $\tau = 2\Omega_z$, где Ω_z — вертикальная составляющая угловой скорости вращения планеты.

Совместное влияние вращения и сферичности планеты, с чем связано изменение частоты τ (или f) по широте φ (так называемый «β-эффект»), порождает планетарные волны Россби—Блиновой, в ложбинах и гребнях которых образуются основные генераторы погоды — циклоны и антициклоны. В атмосфере Земли эти планетарные волны, распространяющиеся по горизонтали в западном направлении, имеют период, превышающий как период вращения планеты, так и периоды трех других типов атмосферных волновых движений — приливных, акустических и внутренних гравитационных волн (*ВГВ*). Короткопериодные *ВГВ* с относительно малыми амплитудами относятся к разряду микрометеорологических колебаний атмосферы и, наряду с конвекцией, служат источником мелкомасштабной турбулентности. Тем самым они оказывают энергетическое (за счет диссипации) воздействие на формирование крупномасштабных погодных процессов.

Для волн Россби—Блиновой справедливо условие Эртеля сохранения так называемой потенциальной завихренности Ω_* основного течения в виде

$$d\Omega_*/dt = 0, \qquad \Omega_* \equiv \rho^{-1}\boldsymbol{\Omega}_a \cdot (\partial S/\partial \boldsymbol{r}), \tag{1.3.2}$$

где S — энтропия на единицу массы среды, причем направление $(\partial S/\partial \boldsymbol{r})/|\partial S/\partial \boldsymbol{r}|$ в стратифицированной атмосфере приблизительно вертикально — это, так называемая, термодинамическая вертикаль; Ω_* — потенциальный вихрь — адиабатический лагранжев инвариант, каковым по определению адиабатических процессов является также энтропия S ($dS/dt \cong 0$). Условие (1.3.2) следует из уравнения для завихренности Фридмана (1.3.1) при адиабатических процессах, когда $\boldsymbol{F}=0$. Характерным является также колебательный обмен между градиентом глобальной завихренности β, определяемой как $\beta = r^{-1}\partial f/\partial\varphi$, и относительной завихренностью самой волны (*Charney*, *Stern*, *1962*; *Монин*, *1988*; *Ingersoll и др.*, *1995*).

Поскольку в атмосфере Земли силы, обусловленные градиентами давления, практически уравновешиваются силами Кориолиса (число Россби $\mathrm{Ro} \ll 1$), то типичной синоптической характеристикой является геострофический ветер, и по известному распределению давления могут быть определены его зональная и меридиональная составляющие ($u = -(\rho f)^{-1}\partial p/\partial y$, $v = (\rho f)^{-1}\partial p/\partial x$). В отличие от Земли, на очень медленно вращающейся Венере (один оборот за 243 земных суток) влияние сил Кориолиса незначительно ($\mathrm{Ro} \gg 1$), в связи с чем оказывается справедливым условие циклострофического баланса (*Marov*, *Grinspoon*, *1998*). Для него характерно то, что на циркуляционную ячейку типа ячейки Хэдли, возникающую вследствие температурного градиента между экватором и полюсом, накладывается зональная компонента скорости, возрастающая с высотой. В результате создается атмосферная суперротация (ее называют еще циркуляцией карусельного типа), в результате чего скорость зонального ветра в атмосфере Венеры нарастает от ~0,5 м/сек у поверхности до ~100 м/сек на высоте около 65 км, соответствующей верхней границе облаков вблизи тропопаузы, где с этой скоростью происходит перемещение характерных ультрафиолетовых контрастов, предположительно обусловленных поглощением солнечной радиации содержащимися в облаках аллотропами серы (см. рис. Ц.4, *а*).

Интересно, что хотя в тропосфере Венеры выполняется условие статической устойчивости

$$d\theta/dz = (\theta/T)(dT/dz - \gamma_a) > 0, \tag{1.3.3}$$

где $\theta = T(p_0/p)^{(\gamma-1)\gamma}$ — потенциальная температура, p_0 — стандартное давление, $\gamma_a = g/c_p$ — адиабатический градиент, а градиентное число Ричардсона удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Ri} = (g/\theta)(\partial\theta/\partial z)(\partial u_h/\partial z)^{-2} > \mathrm{Ri}_{cr} = 1/4, \tag{1.3.4}$$

то теоретически в ней не должно возникать турбулентности. Дело в том, что теоретически необходимым условием неустойчивости малых возмущений в невязком течении со сдвигом является неравенство $\mathrm{Ri} < 0{,}25$, а в тропосфере Венеры $\mathrm{Ri} \approx 2$—6, аналогично тому, что имеет место в земной атмосфере. И тем не менее турбулентность реально существует, о чем свидетельствуют характерные для сдвиговой турбулентности флуктуации температуры ~0,1 K с масштабами ~100 м, измеренные в атмосфере Венеры в области высот 45—50 км (*Woo*, *1982*; *Seiff*, *1983*). По-видимому, турбулентность, присутствует и в нижней тропосфере на высотах >15—20 км, где были обнаружены вертикальные пульсации скорости величиной 0,2—0,3 м/с при парашютном спуске аппаратов «Венера» путем измерений вертикальной составляющей допплеровского сдвига частоты бортовых передатчиков (*Kerzhanovich*, *Marov*, *1983*).

В свою очередь, у верхней границы облаков устойчивость атмосферы повышается (параметр $\partial\theta/\partial z$ возрастает), однако, помимо сдвиговых течений, наблюдаются также вихревые структуры различных пространственных и временных масштабов, ассоциируемые с процессами глобальной циркуляции. Все это свидетельствует о статической неустойчивости, по крайней мере, отдельных областей нижней атмосферы Венеры, для которых турбулентность является важным элементом атмосферной динамики (рис. 1.3.5). Не менее важную роль турбулентность могла играть на ранних этапах эволюции Венеры, с чем связана гипотеза о первичном океане, который в дальнейшем был потерян вследствие развития рассмотренного в разделе 1.3.2.2 необратимого парникового эффекта (*Marov*, *Grinspoon*, *1998*).

Динамика разреженной атмосферы Марса, обладающей малой тепловой инерцией, во многом отличается от земной (и венерианской) прежде всего из-за отсутствия океанов, являющихся тепловыми аккумуляторами и демпфирующими суточно-сезонные температурные неоднородности, а также формирования (в условиях малого влагосодержания в атмосфере и сохранения сухоадиабатического градиента) массивных облаков. Модель глобальной циркуляции (GCM), в основе которой лежит условие геострофического баланса ($\mathrm{Ro} \ll 1$), предсказывает аналогичную топологию движений в тропосфере и стратосфере, с преобладанием ветров, дующих в восточном направлении на высоких широтах зимой и в субтропиках летом, и в западном направлении на остальных широтах. В то же время, основным движущим механизмом переноса в меридиональном направлении служит сезонный обмен углекислым газом между атмосферой и полярными шапками, в результате чего возникают конфигурации типа ячейки Хэдли, с восходящими и нисходящими потоками,

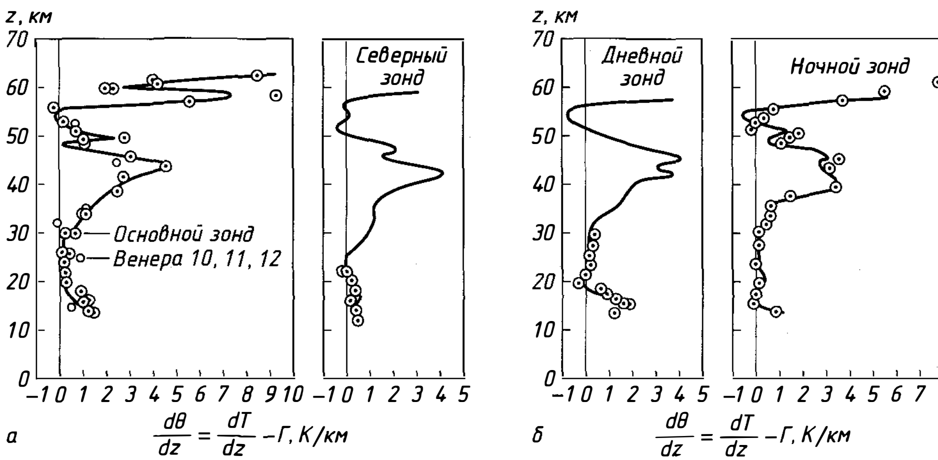


Рис. 1.3.5. Изменение параметра устойчивости атмосферы $d\theta/dz$ в функции высоты z на Венере по данным измерений температуры на КА «Венера 10, 11, 12» и зондах «Пионер-Венера». Выделяются области конвективной неустойчивости на высотах 52—57 км и сдвиговых течений между 45 и 50 км. Наблюдаемое хорошее согласие данных в различных областях измерений и в разное время суток свидетельствует об однородном характере динамики атмосферы Венеры. Согласно (*Sieff*, *1983*)

перестраивающейся системой ветров у поверхности и на больших высотах в летней и зимней полусферах и сезонными изменениями облачного покрова (*Kahn*, *1984*; *Zurek и др.*, *1992*; *Маров*, *1994*).

На характер циркуляции в атмосфере Марса сильное влияние оказывает рельеф поверхности (ареография), от которой зависят как наблюдаемая картина ветров, так и генерация горизонтальных волн различного пространственного масштаба. В свою очередь, планетарные волны, обусловленные бароклинной нестабильностью атмосферы, и внутренние гравитационные волны проявляются в виде нерегулярностей в профилях температуры и вертикальных движений в стратосфере. С ними связаны также наблюдаемые волновые движения в структуре облаков с подветренной стороны при обтекании препятствий, свидетельствующие о существовании в марсианской атмосфере сильных сдвиговых течений. За счет сдвиговых течений, даже в условиях относительно устойчивой стратификации, вся приповерхностная атмосфера оказывается турбулентной.

Конвекция компенсирует высокую статическую нестабильность марсианской атмосферы, близкой к насыщению даже при очень низком относительном содержании водяного пара. Эффективность механизма возбуждения конвекции в дневные часы примерно на порядок выше, чем в атмосфере Земли, в то время как ночью она полностью блокируется вследствие образования у поверхности инверсионного слоя, имеющего положительный температурный градиент. Конвекция поддерживает также большое содержание пыли, постоянно присутствующей в тропосфере Марса и создающей дополнительный динамический эффект, накладывающийся на глобальную систему ветров. Он возникает за счет положительной обратной связи между содержанием пыли и степенью разогрева атмосферного газа, что находит свое выражение в виде термически генерируемых суточных и полусуточных приливов. Такая специфическая особенность атмосферы Марса наиболее ярко проявляется в периоды периодически возникающих глобальных пылевых бурь, когда мелкая пыль благодаря турбулентному перемешиванию поднимается до высоты свыше 30—40 км. Вследствие высокой степени непрозрачности тропосферы (с оптической толщей $\tau \geqslant 5$) у поверхности создается антипарниковый эффект, сильно демфирующий циркуляционный перенос. Заметим, что открытие этого уникального природного явления во время глобальной пылевой бури на Марсе в 1971 г. послужило толчком к проведению аналогии между ним и возможностью возникновения «ядерной зимы» на земле, как неизбежного последствия использования атомного оружия (*Sagan*, *1977*).

В комплексе процессов, ответственных за возникновение, поддержание и распад марсианской пылевой бури, несомненно, важную роль играет турбулентность диспергированной среды, характер которой существенно зависит от динамического и энергетического взаимодействия газовой и пылевой фаз, хотя детали этих механизмов остаются до конца не ясными. Как известно, по данным измерений высотных профилей средней скорости $u(z)$ и температуры $T(z)$ в приземном погранслое можно оценивать турбулентные потоки импульса и тепла (*Монин и Яглом*, *1992*). Допуская, что подобные закономерности справедливы также для атмосфер других планет, можно, обращая задачу, получить оценки соответствующих профилей для пограничного слоя Марса, которые модифицируются в случае турбулентных потоков, содержащих тяжелую примесь (*Баренблат, 1955*; *Голицын, 1973*). Было показано, что при нейтральной стратификации профиль средней скорости сводится к виду:

$$u(z) = (u_*/\varkappa\omega)\ \ln(z/z_0), \tag{1.3.5}$$

где $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ — динамическая скорость (скорость трения); $\tau = -\overline{\rho u''v''}$ — турбулентный поток импульса; $\varkappa$ — постоянная Кармана; ρ — плотность газовой фазы. Безразмерный параметр $\omega = v/a\varkappa u_*$ определяется через скорость оседания пылевых частиц v, отношение коэффициентов турбулентного обмена для примеси и количества движения a ($a \approx 1$) и величину u_*. При этом оказывается, что в случае присутствия в потоке сравнительно мелких частиц ($v < a\varkappa u_*$, или $\omega < 1$), формулу (1.3.5) можно интерпретировать так, что присутствие пыли в потоке приводит к уменьшению постоянной Кармана $\varkappa$. Другими словами, градиенты скорости у поверхности возрастают, что способствует эффекту сальтации — отрыву и подъему в атмосферу больших количеств пылевых частиц. Это еще один характерный пример неравновесной структуры в динамической диссипативной системе, производство энтропии в которой по мере затухания пылевой бури стремится к своему минимальному значению, отвечающему равновесному состоянию.

Динамика атмосфер планет-гигантов

Главным свойством атмосферной циркуляции на Юпитере, а также на Сатурне, является наличие на низких и средних широтах упорядоченной системы зон и поясов и сильного джетового потока в направлении собственного вращения планеты в экваториальной области (рис. Ц.22). Кориолисовы силы индуцируют зональные ветры севернее и южнее каждой зоны, приводя к образованию вихрей и сдвиговой турбулентностит. На Сатурне скорость зонального ветра достигает 500 м/с, по сравнению со средней величиной ~ 150 м/с на Юпитере, здесь же наблюдаются наибольшие температурные градиенты на фоне отсутствия заметного различия температур между экватором и полюсами. Светлые зоны являются областями восходящих, а темные пояса — нисходящих течений. Для этих быстровращающихся планет $\mathrm{Ro} \ll 1$, поэтому, вследствие кориолисова взаимодействия меридиональных течений, между зонами и поясами возникают сильные зональные потоки. Наиболее сильные ветры переменного направления наблюдаются в этих переходных областях, где образуются сдвиговые течения.

Вместе с тем, основным механизмом планетарной динамики, равно как и неупорядоченных движений и многочисленных когерентных вихревых структур (конвективных ячеек), которые наблюдаются на высоких широтах, является естественная конвекция, обусловленная существованием теплового источника в недрах. По-видимому, с этим связан измеренный на зонде «Галилей» рост с глубиной скорости зонального ветра от 70 до 175 м/с между уровнями с давлением 0,4 и 5 бар. Данный механизм во многом аналогичен классической проблеме гидродинамической неустойчивости Рэлея—Тейлора горизонтального слоя жидкости, подогреваемой снизу — проблеме Бенара. Однако в рассматриваемом случае конвективные недра находятся в тесном динамическом взаимодействии с вышележащим газовым слоем, в котором происходит поглощение солнечной энергии, что приводит к чрезвычайно сложной структуре течений с многочисленными вихревыми образованиями и высокой степенью турбулизации, как это наиболее отчетливо наблюдается на диске Юпитера. Такой модели отвечает схема, показанная на рис. 1.3.6 (*Busse*, *1976*; *Ingersoll*, *Pollard*, *1982*). В свою очередь, за счет нелинейного механизма передачи энергии вихрей в кинетическую энергию среднего движения можно объяснить формирование зонального потока и поддержание планетарной циркуляции на вращающейся планете (*Ингерсолл и др.*, *1990*).

Индикатором разнообразных движений в сильно турбулизованных атмосферах Юпитера и Сатурна служат облака (*West и др.*, *1986*). Приведенный выше состав основных конденсатов не объясняет, однако, наблюдаемой палитры цветов на дисках этих планет, представляющих поистине уникальное явление природы. Следует поэтому допустить присутствие в атмосфере и облаках более сложных соединений, включая фосфин (PH_3), углеводороды (C_nH_n) и органические полимеры, образующиеся предположительно под воздействием солнечной ультрафиолетовой радиации и грозовых разрядов. В то же время на Уране и Нептуне, при более низкой эффективной температуре, верхние слои облаков состоят из метана, под которыми, вероятно, расположены облачные слои из аммиака и серосодержащих соединений. Интенсивное поглощение метаном красной части солнечного спектра объясняет характерный аквамариновый цвет этих планет. Очевидно, динамические процессы, происходящие с участием химических превращений, являются типичными для многоком-

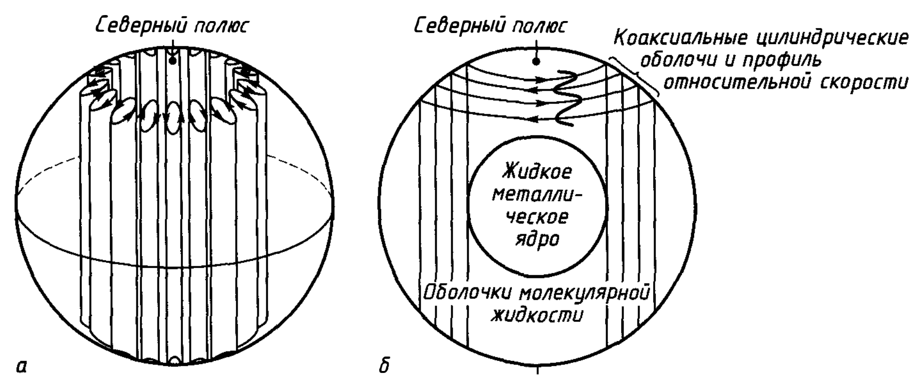


Рис. 1.3.6. Формирование конвективных ячеек валикового типа (*а*) и цилиндрического зонального потока (*б*) на быстро вращающейся жидкой сфере. Валиковая конвекция является наиболее характерной формой конвективной неустойчивости вязкой проводящей жидкости, подогреваемой снизу, при равномерном осесимметричном вращении, а коаксиальные цилиндрические поверхности служат наиболее общей формой зонального течения идеальной жидкости с внутренним адиабатическим градиентом температуры. Передача энергии наклонных конвективных ячеек зональному течению в сдвиговом горизонтальном слое отражает взаимодействие этих двух форм движений. Согласно (*Ingersoll*, *Pollard*, *1982*; *Ingersol и др.*, *1984*)

понентных турбулентных сред планет-гигантов (*Колесниченко, Маров, 1999*), упорядоченности в хаотической структуре которых, наблюдаемые в атмосфере на уровне облаков, возникают при наличии энергообмена на микроуровне. Примеры сильно развитой турбулентности в атмосферах Юпитера, Сатурна и Нептуна показаны на рис. Ц.23 и Ц.24, а на рис. Ц.24 приведен также пример возникновения упорядоченных вихревых структур в турбулизованных облаках Сатурна, обусловленных процессами самоорганизации.

Подобно Юпитеру и Сатурну, конвекция, действующая в качестве теплового механизма при передаче энергии из глубины, должна играть важную роль также в динамике атмосферы Нептуна, обладающего, в отличие от Урана, внутренним источником тепла, вдвое превышающим приток энергии от Солнца. В то же время наиболее интересной особенностью, определяющей тепловой режим и динамику атмосферы Урана, является необычная ориентация его оси вращения, лежащей почти в плоскости околосолнечной орбиты, так что смена сезонов происходит дважды в год (который на Уране составляет 84 года). Однако, несмотря на большое различие в наклонениях и энергетике, у обеих планет наблюдаются качественно одинаковые меридиональные профили температуры и зонального ветра на уровне облаков, хотя на Уране ветер примерно вдвое слабее. Важно, кроме того, подчеркнуть, что на Нептуне, несмотря на то, что мощность его энергетических источников на единицу площади примерно в 20 раз меньше, чем в атмосфере Юпитера, скорость ветра почти в 2,5 раза выше, достигая 400 м/с на экваторе, т. е. почти как у Сатурна. Это связано с тем, что атмосфера Нептуна обладает очень малой турбулентной вязкостью, и соответственно, низким уровнем диссипации энергии ветровых движений и турбулизации сдвиговых течений (*Ingersoll и др., 1995; 1998*). Интересно, что, в противоположность Нептуну, земная атмосфера обладает наибольшим уровнем диссипации, главную роль в которой, наряду с мелкомасштабной конвекцией и поверхностным трением, играют процессы, связанные с гидрологическим циклом. Поэтому, хотя Земля получает несравненно больше солнечной энергии, скорости ветра на ней почти на порядок ниже, чем на Нептуне. Другой интересной особенностью является то, что направление ветров на Нептуне и Уране противоположно направлению их вращения, что отличает их от Юпитера, Сатурна и Венеры (а также Солнца и Титана), для которых характерна экваториальная суперротация.

Среди замечательных особенностей облачных структур у планет-гигантов особо выделяются многочисленные крупномасштабные вихревые образования, природа которых, как уже говорилось, связана с переменными направлениями зональных ветров под действием кориолисовой силы. Наиболее известные из них — Большое Красное Пятно (*БКП*) на Юпитере, размер которого варьирует от 10 000 до 14 000 км в широтном и от 24 000 до 40 000 км в долготном направлении и Большое Темное Пятно (*БТП*) на Нептуне размером $\sim$15 000 км (рис. Ц.23, Ц.25). Последнее отражает существование интенсивной атмосферной динамики (сильного зонального ветра, достигающего 400 км/с на экваторе) в условиях, когда тепловой поток из недр в 1,6 раза превышает величину инсоляции. Заметим, что в метановой атмосфере Нептуна, даже при сравнительно небольшом потоке солнечных ультрафиолетовых квантов на расстоянии 30 а. е., инициируются процессы фотохимии, приводящие к образованию в атмосфере и облаках сложных углеводородов. Вместе с тем, неожиданным явилось отсутствие в атмосфере Нептуна (как и Урана) аммиака. Объяснить это можно, если предположить, что, одновременно с образованием в упомянутых выше равновесных термохимических реакциях, происходит его эвакуация в реакции с H_2S, приводящей к образованию в облаках кристаллов NH_4SH. Это требует, однако, допущения, что область аккреционного диска, где формировались Уран и Нептун, содержала существенно больше H_2S по сравнению с NH_3 и что отношение S/N в пять раз превышало солнечное (*Lunine*, *1993*; *Cruikshank*, *1995*).

БКП на Юпитере представляет собой гигантский антициклон, время жизни которого, оцениваемое по параметрам подобия, составляет несколько тысяч лет, в отличие от земных циклонических образований с характерным временем жизни порядка недели. Он находится в атмосфере выше окружающего его слоя облаков благодаря восходящим движениям и возможно его дополнительным энергетическим источником служит выделению скрытой теплоты парообразования. *БКП* обладает яркой гаммой цветов и сложной морфологией внутренних вихревых течений. На периферии, где скорости движений превышают 100 м/с, наблюдается особенно сильная турбулизация потока и обмен частицами газа и облаков между вихрем и соседними зонами. Вихрь совершает полный оборот за 7 суток, а само *БКП* периодически дрейфует по долготе в прямом и обратном направлениях, трижды обернувшись в двадцатом столетии вокруг планеты. На Сатурне таких крупных образований нет, однако, также как на Юпитере и Нептуне, существуют многочисленные вихри (овалы) меньших размеров и с меньшим временем жизни. К тому же в атмосфере Сатурна чаще происходят мощные бури. Движения в овалах происходят преимущественно по часовой стрелке, а их долготно-широтные осцилляции напоминают движение верхней части вихря в стабильно стратифицированном сдвиговом потоке. Подобно упорядоченным зональным течениям, их естественно рассматривать с позиций формирования гидрологического цикла в стратифицированной газовожидкой среде, с учетом ее химического состава, энергетики и выполнения критерия устойчивости.

Нельзя не упомянуть об уникальной динамике атмосферы еще на одном теле в системе планет гигантов — спутнике Сатурна Титане. Инсоляция на Титане слишком мала, чтобы обеспечить развитие интенсивных динамических процессов, но, тем не менее, они существуют. Можно предположить, что основным энергетическим источником служат приливные воздействия Сатурна, которые в 400 раз сильнее лунных приливов на Земле. Предположение о приливном механизме ветровых движений подкрепляется упоминавшейся нами ранее ориентировкой гряд дюн, повсеместно встречающихся на Титане. Как показали измерения, проведенные на космическом аппарате «Кассини», преимущественное направление ветров свидетельствует о наличии в атмосфере Титана суперротации, подобной атмосфере Венеры. Близок к венерианскому и высотный ход скорости ветра, которая в атмосфере Титана нарастает от единиц до ~ 30 м/с в диапазоне высот 10—60 км. Интересно, что выше этой области движения сильно ослабевают, а начиная с высоты

~ 120 км наблюдается сильная турбулизация атмосферы. К сожалению, пока не удается объяснить, чем вызваны такие необычные динамические свойства среды. Возможно, они связаны с формированием в этой области атмосферы Титана слоистой структуры углеводородных облаков.

Мы видели, что в атмосферах планет периодически возникают более или менее устойчивые образования на фоне хаотических (турбулентных) движений газа внутри открытой нелинейной системы, обменивающейся энергией с окружающей средой. Такими наиболее характерными устойчивыми образованиями являются циклоны и антициклоны на Земле, суперротация атмосферы на Венере и на Титане, вызываемая различными энергетическими источниками, мощные пылевые бури на Марсе, стабильные структуры типа *БКП* и *БТП* и другие овалы циклонического типа в атмосферах Юпитера, Сатурна и Нептуна. Они наблюдаются более или менее длительное время в турбулентной среде на фоне хаотической мелкомасштабной активности в виде относительно небольших облаков, появляющихся и исчезающих в течение нескольких часов. Сюда же, по-видимому, следует отнести возникновение антипарникового эффекта на Марсе, сопровождающего развитие глобальной пылевой бури, а также роль относительно малых атмосферных компонентов, играющих важнейшую роль в комплексе аэрономических процессов и оказывающих громадное влияние на ход эволюции планеты. Исходя из концепции нелинейной динамики сложных диссипативных систем эти феномены атмосферной динамики можно рассматривать с позиций самоорганизации в структурах хаотических турбулентных сред.

1.3.5. Природа и динамика малых тел

Малые тела (кометы, астероиды, метеороиды, метеорная пыль), спектр размеров которых простирается от нескольких сот километров (крупные астероиды) до микронов (пылевые частицы), являются наиболее динамичными объектами в Солнечной системе. Они играли и продолжают играть важную роль в ее эволюции благодаря процессам миграции и многочисленным соударениям с планетами. По разнообразию и сложности физико-химических процессов особенно интересны кометы, ядра которых обладают сложной структурой и химическим составом. Помимо первостепенного интереса для планетной космогонии, кометы привлекают возрастающий интерес также как возможные носители первичных форм жизни (*Marov*, *2005*; *Gaidos*, *Selsis*, *2007*).

Классификация и свойства

Исследование малых тел принципиально важно прежде всего с космохимической точки зрения, поскольку они являются носителями первичного материала, из которого образовалась Солнечная система. Можно думать, что кометы и наиболее примитивный класс астероидов — углистые хондриты — сохранили в своем составе частицы протопланетного облака и газопылевого аккреционного диска, поскольку претерпели наименьшие изменения в процессе эволюции (*Weidenschilling*, *1997*; *Wooden и др.*, *2007*). Более подробное обсуждение этого вопроса содержится в разделе 1.3.6. Кометы естественно рассматривать поэтому в качестве своеобразных «зондов» ближайших к Солнечной системе областей Галактики. Кометы можно ассоциировать с планетезималями, выброшенными вследствие приливных возмущений из областей рождения планет юпитерианской группы в процессе их роста на периферию Солнечной системы, где образовались основные кометные резервуары — пояс Койпера, находящийся вблизи плоскости эклиптики, и сферическое по форме облако Оорта (рис. Ц.26).

Число транснептуновых объектов (TNO) в поясе Койпера, находящемся за орбитой Нептуна и простирающемся примерно до 100 а. е., оценивается величиной $\sim 10^9$, причем по оценкам свыше 10^4 могут быть размером свыше 200 км (*Энеев*, *1981*). К настоящему времени открыто около тысячи TNO, среди которых обнаружены тела, сопоставимые с Плутоном (Седна, Кварар, Эрида со спутником Дисномия и др.), являющиеся характерными представителями этого семейства занептуновых мини-планет — плутонидов (*Jewitt*, *1999*; *Jewitt и др.*, *1998*; *Cruikshank и др.*, *2007*). Для TNO характерно большое разнообразие физических свойств, которые проявляются в различиях их альбедо (от 2,5 до $>60\%$) и спектральных особенностей, что позволяет диагностировать свойства поверхностей. В частности, у некоторых тел обнаружены отложения льдов H_2O, CH_4 и N_2, что роднит их с Плутоном и Тритоном, хотя средняя плотность заметно ниже и ближе к ядрам комет ($\sim 0{,}5$ г/см^3). Интересно, что около 11% исследованных объектов являются двойными системами, а у Плутона даже три спутника (*Cruikshank и др.*, *2007*). Не исключено, что астероиды Троянцы в либрационных точках L4 и L5 являются телами из пояса Койпера, захваченными Юпитером в ранней хаотической фазе Солнечной системы (*Morbidelli и др.*, *2005*), вопреки традиционной точке зрения, что они сформировались по мере роста самой планеты и были затем захвачены в резонанс 1:1 (*Chiang*, *Lithwick*, *2005*). В пользу гипотезы связи с TNO говорит факт сходства цветового альбедо Троянцев и ядер комет (рост отражения с длиной волны) и отсутствие четко выраженных спектральных признаков, как у большинства тел в занептуновой зоне. Аналогичные свойства характерны для группы тел, расположенных между орбитами Юпитера и Нептуна, — Кентавров, также, по-видимому, генетически связанных с поясом Койпера и частично эволюционирующих на орбиты комет семейства Юпитера.

Кометы в облаке Оорта, расположенном примерно на половине расстояния до ближайших звезд (30—60 тыс. а. е.), периодически испытывают гравитационные возмущения от гигантских межзвездных газопылевых облаков, галактического диска, при случайных сближениях со звездами. Тогда некоторые тела из облака могут переходить на высокоэллиптические орбиты и при сближении с Солнцем наблюдаться как долгопериодические кометы. В дальнейшем, под влиянием гравитационных возмущений от планет, они либо пополняют известные семейства *короткопериодических комет*, *регулярно* возвращающихся к Солнцу, либо, переходя на параболические или гиперболические орбиты, навсегда покидают Солнечную систему (*Fernandez*, *1994*; *Weissman*, *1996*). Но основным источником короткопериодических комет является пояс Койпера, испытывающий гравитационные возмущения от Нептуна, вследствие чего относительно небольшая доля ледяных тел мигрирует, как будет видно из дальнейшего, во внутренние области Солнечной системы, пополняя Главный пояс астероидов, находящийся между орбитами Марса и Юпитера (рис. Ц.26).

Ядра комет обладают небольшими размерами — от единиц до первых десятков километров — и очень низкой средней плотностью, обычно не превышающей десятых долей г/см^3. Это свидетельствует о пористой структуре этих тел, состоящих преимущественно из водяного льда и некоторых других низкотемпературных конденсатов с примесью силикатов, графитов, металлов и органических соединений (*Маров*, *1994*; *Boice*, *Huebner*, *1999*). Водно-ледяной состав комет объясняется тем, что молекула воды является самой обильной в Солнечной системе и не случайно, что льды H_2O составляют также значительную долю массы спутников планет-гигантов и других малых тел. О процессах с участием жидкой воды на начальных этапах эволюции Солнечной системы свидетельствует, в частности, минеральный состав метеоритов и, следовательно, их основных родительских тел — астероидов Главного пояса (*Jewitt и др.*, *2007*).

Основываясь на данных измерений, проведенных при сближении с несколькими кометами космических аппаратов, можно говорить о том, что по своим физическим свойствам ядро в целом отвечает модели грязного снежного кома (или кома замерзшей грязи), предложенной еще в середине прошлого века Ф. Уипплом (*Whipple*, *1951*). При сближении кометы с Солнцем и росте инсоляции вследствие сублимации льдов формируются атмосфера (кома) протяженностью в десятки тысяч километров, водородное гало размером в сотни тысяч километров и хвост, простирающийся в антисолнечном направлении на миллионы километров. Кома состоящая, в основном, из молекул воды, гидроксила и водорода, образует голову кометы, светящуюся благодаря процессам люминисценции и частично ионизованную коротковолновым солнечным излучением (рис. Ц.27). При сублимации льдов в атмосферу интенсивно выносится пыль, субмикронные частицы которой под действием светового давления создают кометный хвост второго и третьего типов, а образующаяся во внешней коме плазма при взаиводействии с солнечным ветром создает хвост первого типа (согласно классификации Ф. Бредикина — С. Орлова).

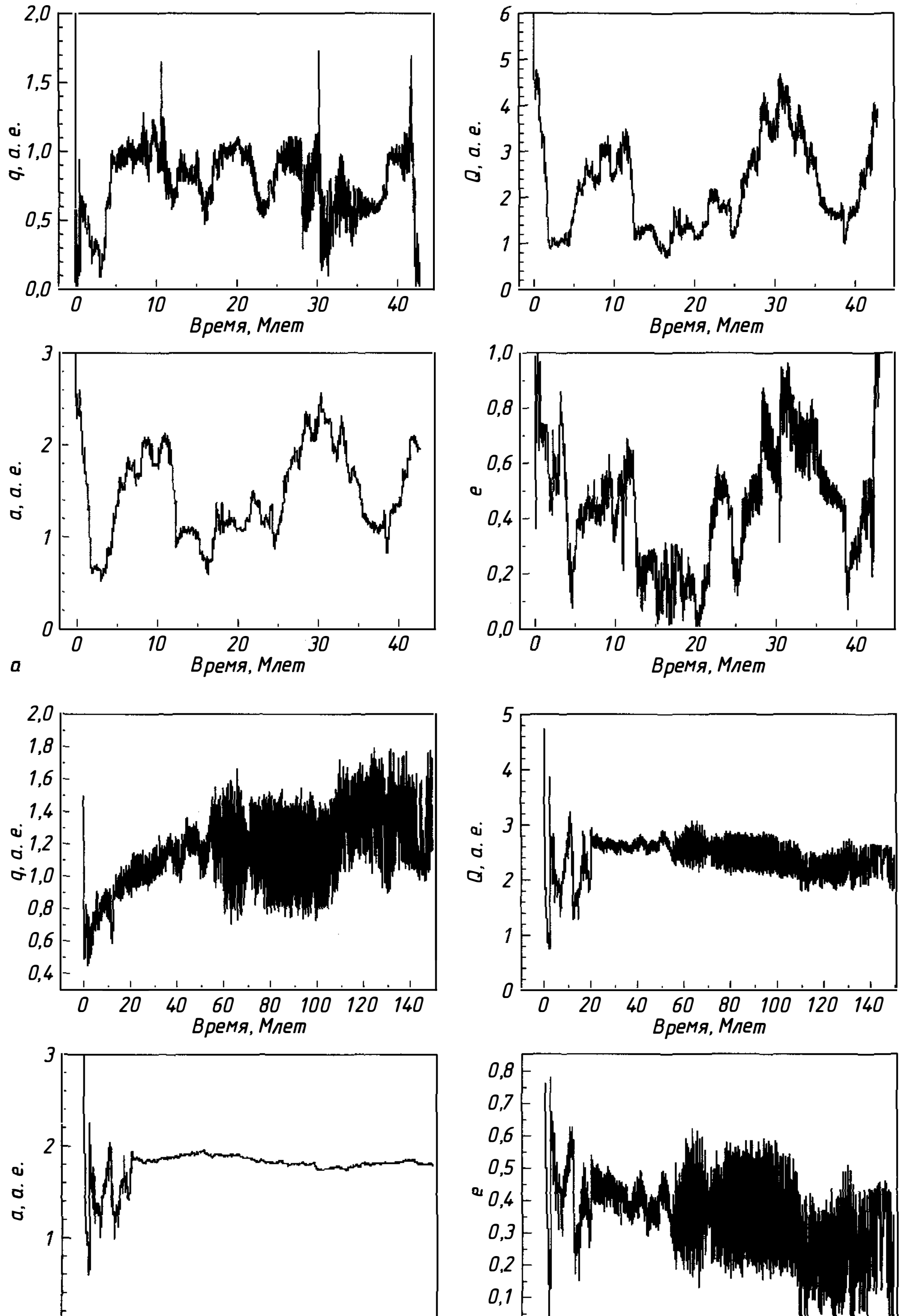
Для понимания природы и эволюции комет на различных гелиоцентрических расстояниях ключевое значение имеет изучение нестационарных процессов тепломассопереноса в пористом ядре и формирования неоднородной структуры поверхности, с которой происходит сублимация ледяного конгломерата и образуется газопылевая кома. Как показали результаты кинетического моделирования (*Marov и др.*, *1996*; *Skorov и др.*, *2002*), вблизи ядра активных комет во всей дневной полусфере течение близко к равновесному, плотность газа быстро падает по мере удаления от поверхности ядра, причем из-за адиабатического расширения в вакуум температура на удалении от ядра ~130 км падает до ~3,5 К (*Bisikalo et al*, *1989*; *Marov и др.*, *1996*) а в окрестности оси симметрии образуется хорошо выраженная струя. На изображении ядра кометы Галлея, полученном при пролете вблизи него космического аппарата «Джотто», видны несколько струй (джетов), обусловленных интенсивным выносом газа и пыли (рис. Ц.27). Такую неравномерность сублимации с поверхности ядра можно объяснить за счет тепловых деформаций, вызывающих разломы и трещины в пыле-ледяной корке, образующейся при последовательных сближениях кометы с Солнцем.

Миграция малых тел и следствия

Как уже отмечалось, свойства орбит малых тел отражают динамику регулярных и хаотических процессов в Солнечной системе, одним из характерным проявлений которых служит миграция. Следствием миграции являются столкновения комет и астероидов с планетами. Как уже отмечалось, они приводят к катастрофическим событиям и транспорту вещества, что имеет важнейшее значение для эволюции планет и их атмосфер. Убедительным подтверждением периодически происходящих в Солнечной системе столкновительных процессов служат, помимо упоминавшихся нами ранее Тунгусского события и Чиксулюба, выпадение на Юпитер в 1994 г. более 20 фрагментов кометы Шумейкеров—Леви-9, разорванной в его ближайшей окрестности приливными силами (рис. Ц.28).

Считается общепризнанным, что на планетах земной группы первичные (восстановительные) атмосферы, захваченные из протопланетного облака на стадии их аккумуляции, были потеряны. Убедительным свидетельством такой потери служит тот факт, что содержание и изотопный состав инертных газов в существующих атмосферах вторичного происхождения резко отличается от солнечного. Несомненно, что дегазация из недр в процессе последующей эволюции этих планет внесла значительный вклад в формирование гидросферы и окислительные атмосферы вторичного происхождения. Однако такой источник не был, по-видимому, единственным и достаточным, чтобы компенсировать потерю низкотемпературных летучих (вода, азот, углерод, сера и др.) в зоне формирования планет земной группы при температуре > 1000 K в этой части протопланетного диска (внутри так называемой «снеговой линии») за счет механизма джинсоновской диссипации. Малая масса этих планет, наряду с высокой температурой, также способствовала убеганию в космос наиболее легких атмофильных элементов.

Объяснить существующее, тем не менее, относительно высокое содержание летучих на планетах земной группы можно за счет их интенсивной бомбардировки кометами и астероидами из внешних областей Солнечной системы на ранней стадии эволюции. Такой сценарий известен как механизм гетерогенной аккреции (*Anders*, *Owen*, *1977*; *Owen*, *Bar-Nun*, *1995*; *Chyba и др.*, *1994*). Количественные оценки эффективности данного механизма были получены нами путем изучения орбитальной динамики малых тел, прежде всего, комет из занептунового пояса (TNO), содержащих наибольшее количество летучих. В основу развитой численной миграционной модели была положена классическая задача N тел и вычислительные коды BULSTO и RMVS (*Ипатов*, *2000*; *Marov*, *Ipatov*, *2001*; *2005*; *2006*; *2007*; *Ipatov и др.*, *2006a*, *b*). Согласно существующим оценкам (см. *Duncan*, *Levison*, *1997*), из $\sim 10^9$ TNO размером $\geqslant 1$ км $\sim 20{,}000$ могут переходить из упоминавшейся нами выше



q, а. е.
Время, Млет
Q, а. е.
Время, Млет
a, а. е.
Время, Млет
e
Время, Млет
а
q, а. е.
Время, Млет
Q, а. е.
Время, Млет
a, а. е.
Время, Млет
e
Время, Млет
б

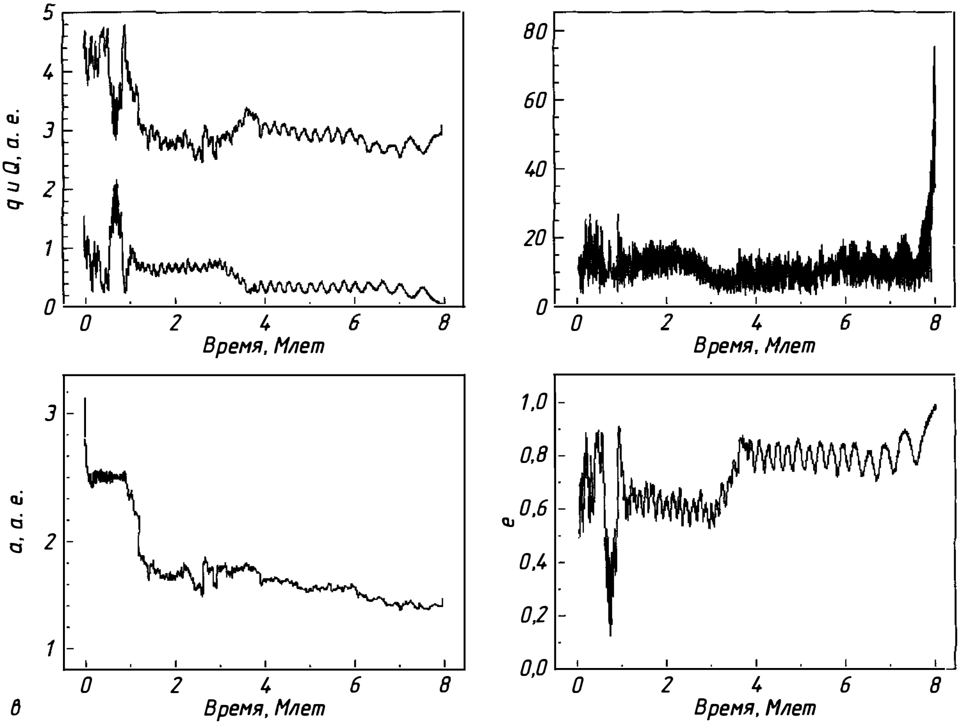


Рис. 1.3.7. Примеры расчетов миграции виртуальных тел, первоначально находящихся на орбитах типа орбит комет семейства Юпитера, 10P и 2P, внутрь Солнечной системы. Показаны изменения во времени перигелийного расстояния *q*, афелийного расстояния *Q*, большой полуоси *a* и эксцентриситета *e*

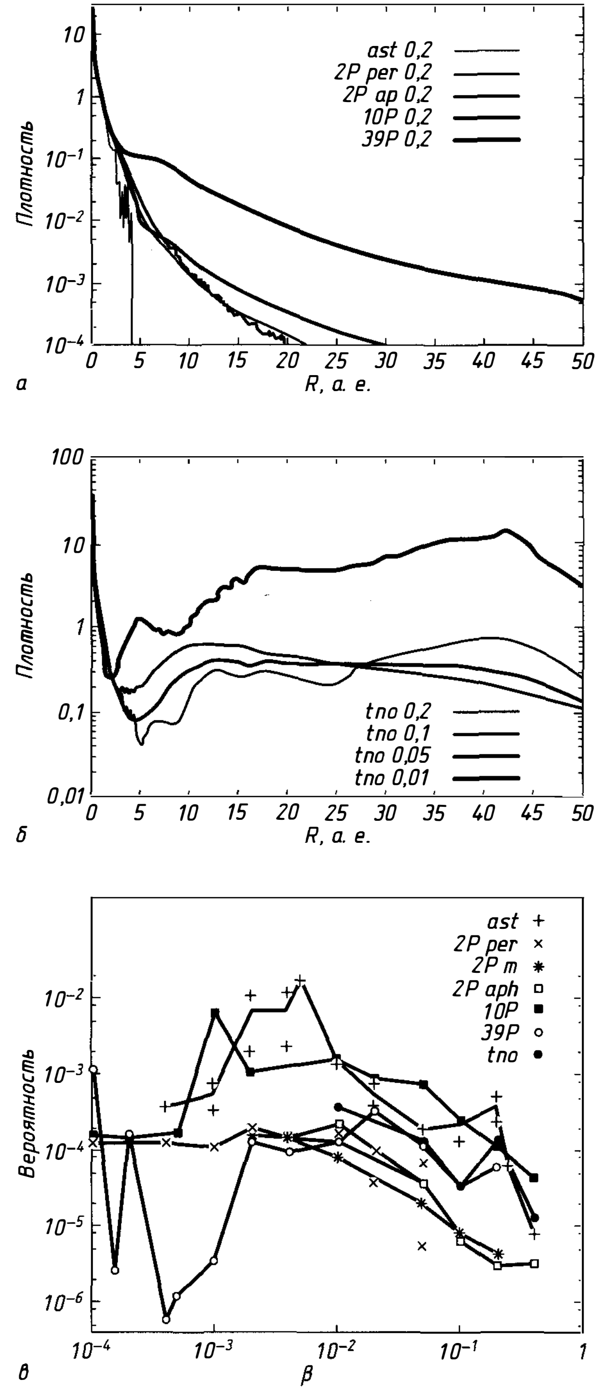


Рис. 1.3.8. Результаты численного моделирования миграции пыли. (*а*), (*б*) Пространственная плотность частиц межпланетной пыли различного генезиса. (*в*) Вероятности соударения с Землей пылевых частиц различного генезиса

зоны накопления вековых возмущений в поясе Койпера на орбиты, пересекающиеся с орбитой Юпитера (JCO), при их миграции внутрь Солнечной системы и находиться там в течение $T \sim 0{,}13$ Млет. Из этих 20,000 JCO была численно проинтегрирована (на временных интервалах 10 Млет с шагом 500 лет и относительной ошибкой 10^{-8}—10^{-9}) эволюция к Солнцу 5500 виртуальных объектов из известных семейств или типов комет с учетом гравитационного воздействия планет. Примеры расчетов показаны на рис. 1.3.7. В результате были получены оценки вероятности их столкновения с Землей, Венерой и Марсом. Интегрирование проводилось с начальными условиями, отвечающими параметрам орбит трех типов комет: семейства Юпитера, 9P Tempel 1 и 10P Tempel 2. Вероятности P_S соударения одного ~ 1 км объекта с планетой за время T_S находились из условия $q < a$, где q — перегелийное расстояние, a — большая полуось орбиты планеты; при этом средние вероятности и времена определялись как $P_r = P_S/N$ и $T_r = T_S/N$. Оказалось, что для Земли $P_r = 6{,}65 \cdot 10^{-6}$ за $T_r > 1$ Млет, т. е. один объект может соударяться с Землей каждые $\sim 0{,}5$ млн лет. Сопоставимые, хотя и несколько меньшие значения вероятности ($P = 4 \cdot 10^{-7}$ и $P \leqslant (1—3) \cdot 10^{-6}$), получены, соответственно, в моделях (*Morbidelli и др.*, *2000*) и (*Levison и др.*, *1997*), что может быть обусловлено тем, что согласно нашей модели значительная фракция тел ($\sim 0{,}0015$) с афелийным расстоянием $Q < 4{,}7$ а. е. дольше находилась на орбитах, пересекающихся с орбитой Земли.

Средняя вероятность соударения с Венерой оказалась примерно такой же, а с Марсом — примерно втрое меньше. Один из каждых 300 таких объектов выпадает на Солнце — их называют объектами, «царапающими Солнце» (*sun-grazers*). На рис. 1.3.7 показан пример вычислений миграции виртуального TNO с начальными параметрами орбиты кометы семейства Юпитера (*а*), 10*P* (*б*) и 2*P* (*в*) в виде эволюции перегелийного и афелийного расстояний, большой полуоси и эксцентриситета q, Q, a, и e. По результатам моделирования сделан ряд важных выводов относительно характера миграции тел из пояса Койпера, первоначально захваченных на орбиту пересечения с орбитой Юпитера, внутрь Солнечной системы и времен их перехода в семейства Главного пояса и NEO (*Morrison*, *1982*). Достаточно высокая вероятность столкновений малых тел между собой и с планетами приводит к перманентному дроблению/выбросу вещества и его транспорту в межпланетной среде, обеспечивая своего рода «обменные процессы», и может вызывать катастрофические последствия на временных интервалах порядка нескольких миллионов лет.

Ключевым следствием модели является подтверждение важной роли комет как источника летучих в эволюции Земли, Венеры, Марса. Исходя из нижней оценки вероятности соударений $P_r = 4 \cdot 10^{-6}$ и оценки суммарной массы планетезималей, пересекавших орбиту Юпитера, $\sim 100\mathrm{M_E}$ ($\mathrm{M_E}$ — масса Земли), получаем массу тел, столкнувшихся с Землей, $\mathrm{M} \sim 0{,}0004\mathrm{M_E}$. Предполагая далее, что содержание водяного льда было $\sim 0{,}5$ М, приходим к выводу, что масса воды, доставленная на Землю из зоны питания планет-гигантов, составила $\sim 2 \cdot 10^{24}$ г, что почти в 1,5 раза больше массы воды в земных океанах (*Виноградов*, *1967*). Приблизительно такие же объемы воды получили в расчете на единицу массы планеты Венера и Марс. Этот важный вывод согласуется с представлениями о существовании древних океанов на соседних с Землей планетах, потерянных в ходе их последующей эволюции: необратимого парникового эффекта на Венере и захоронения в криосфере Марса, о чем говорилось в предыдущем разделе этой главы.

Полученные оценки привноса воды на Землю кометами, естественно, справедливы лишь по порядку величины, и мы далеки от утверждения, что такой источник был единственным. Несомненно, что определенный вклад был внесен за счет дегазации недр, хотя, как уже упоминалось, определить относительную роль эндогенного и экзогенного источников пока вряд ли возможно. Важно, однако, подчеркнуть, что оценка с погрешностью на уровне 50%, а не на порядки величин, суть несомненное свидетельство реалистичности кометной модели. Ее ограничением служит отношение дейтерия к водороду D/H, полученное по измерениям H_2O и HDO в кометах Хаютаки (Hyakutake) и Хале—Боп (Hale—Bopp), которое оказалось вдвое выше, чем в земных океанах, а именно $3{,}3 \cdot 10^{-4}$ по сравнению со стандартным океаническим значением (SMOW) $D/H = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ (см. *Meier*, *Owen*, *1999*). Это вряд ли отвергает, однако, связь земной гидросферы с кометным источником. Прежде всего, измеренное кометное отношение D/H относится к долгопериодическим кометам, которые по своему генезису значительно отличаются от комет семейства Юпитера (JFC), с которыми связывается доставка летучих на планеты земной группы. В частности, обе группы могли формироваться в различных областях протопланетного диска при разных температурах, что должно было повлиять на отношение D/H. Кроме того, оценка привноса воды кометами имеет погрешность в пределах, по крайней мере, фактора 2 и, как уже говорилось, мы не исключаем предположения, что половина океанической воды обязана своим происхождением эндогенному источнику. Наконец, упомянем также, что, согласно ряду динамических моделей, ответственными за определенную долю воды земных океанов, могли быть, помимо комет, гидратированные астероиды Главного пояса (*Morbidelli и др.*, *2000*). Более полное обсуждение этих проблем, включая отношения изотопов и содержания инертных газов, интересующийся читатель может найти в работе (*Jewitt и др.*, *2007*).

Можно предполагать, что транспорт вещества, включая его первичные формы, а также миграция частиц межпланетной пыли, имеет самое непосредственное отношение не только к эволюции планет, но и к проблеме происхождения жизни, как одной из обсуждавшихся выше альтернативных моделей. На основе численных расчетов миграции пыли с учетом, помимо гравитационных, ряда других эффектов, были получены оценки относительной доли кометных и транснептунных частиц, содержащих в своем составе $\sim 10\%$ летучих, в общем балансе пыли, выпадавшей на планеты земной группы (*Marov*, *Ipatov*, *2005*; *2006*; *2007*). Примеры этих расчетов показаны на рис. 1.3.8. Оказалось, что, по сравнению с малыми телами, вклад пыли в принос летучих был на 3—4 порядка меньше. Однако пылевые частицы могли быть наиболее эффективными с точки зрения поставки на Землю органического или даже биогенного вещества вследствие существенно меньшего нагрева при прохождении через ее атмосферу с пологих траекторий вследствие значительно большего отношения поверхности к массе и, следовательно, более интенсивного охлаждения.

Такое случайное и на первый взгляд незначительное воздействие могло при благоприятных условиях вызвать раскачку изначально устойчивой системы вследствие возникновения примитивных форм жизни и привести к бурному развитию первичного биоценоза с колоссальным коэффициентом усиления, свойственным, в частности, микроорганизмам. Такой процесс можно ассоциировать с переходом (бифуркацией) природной среды в новое устойчивое состояние, как прообразу ранней биосферы Земли.

1.3.6. Протопланетные аккреционные диски

Изучение процессов зарождения и эволюции Солнечной системы и формирования планетных систем у других звезд относится к фундаментальным проблемам современного естествознания. По своему содержанию эта проблема является междисциплинарной и требует развития обобщающей теории, лежащей в основе разработки математических моделей физико-химической структуры и эволюции газопылевого аккреционного турбулентного диска вокруг одиночной звезды солнечного типа. Области звездообразования представляют собой сильно турбулизованные хаотические среды, в которых происходят последовательные процессы упорядоченности, начиная от фрагментации молекулярного облака и рождения звезды до формирования планетной системы. Примеры таких сред показаны на рис. Ц.29. Согласно модельным представлениям, околозвездный диск образуется вследствие конечного углового момента молекулярного облака и через него звезда получает значительную часть своей массы. Внутри диска происходят магнитные аккреционные течения, ответственные за перенос углового момента, которые сопровождают рост массы звезды и эволюцию диска.

Структура и состав дисков

То что значительная часть молодых звезд окружена газопылевыми дисками, похожими на диск у молодого Солнца, стало очевидным уже к началу 1990-х годов (*Strom и др., 1993*). Последующие наблюдения (см., например, *Lagrange и др., 2000*; *Schneider и др., 1999*) подкрепили отправную концепцию, согласно которой в процессе звездного коллапса определенная часть материала родительского облака (небулы), обладающего заметным угловым моментом, остается на орбите вокруг центрального сгущения и входит в состав протопланетного диска. По существу в основе этих представлений лежат гипотезы Канта—Лапласа об одновременном образовании Солнца и протопланетного облака вместе с идеей ротационной неустойчивости, ответственной за последовательное отделение с периферии этого облака плоских концентрических колец, из вещества которых в дальнейшем формируются планеты. Можно думать, что после выделения звезды вещество из внешних областей облака продолжает аккретировать на диск, что приводит к сильной турбулизации газопылевой среды из-за рассогласования удельных угловых моментов падающего вещества и вещества диска, участвующего в кеплеровском вращении (*Lissauer, 1993*; *Kwok, 2000*; *Макалкин, 2003*; *Дорофеева, Макалкин, 2004*; *Russell и др., 2006*).

Создание космогонических моделей требует детального изучения турбулизованной многокомпонентной газопылевой среды с учетом кинетических процессов в протопланетном диске, его динамической и тепловой эволюции и космохимических ограничений, накладываемых свойствами первичного вещества, из которого формируются планеты (см., например, *Lewis*, *1997*; *Lagrange и др.*, *2000*). Заметим в связи с этим, что в инициирование фрагментации и коллапса молекулярных облаков важный вклад вносят, по-видимому, процессы термической бифуркации, подобно тому как они способствуют образованию силикатных частиц во внешних областях расширяющихся красных сверхгигантов или автокаталитическому охлаждению CO-областей в солнечной хромосфере (*Ayres*, *1981*). Это — один из примеров структурирования молекулярного газопылевого облака и образующегося турбулентного диска, где важную роль играют процессы самоорганизации.

Громадный прогресс в изучении проблем планетной космогонии достигнут за последние годы благодаря использованию широкого арсенала наблюдательных (в первую очередь, космических) средств и усовершенствованию математических моделей. Наиболее существенный вклад в исследование химии протопланетных дисков внесли измерения инфракрасной эмиссии газовой и пылевой компонент (*Millan-Gabet и др.*, *2007*) и наблюдения с высоким угловым разрешением в субмиллиметровом диапазоне длин волн, которые позволили отождествить многочисленных переходы молекулярных составляющих, таких как CO, и их изотопный состав (*Dutrey и др.*, *2007*). Пониманию структуры и эволюции околозвездных дисков особенно способствовали исследования, проводимые на космическом телескопе «Спицер» (см. *Meyer и др.*, *2007*), в частности, обнаружение нескольких молодых звезд, окруженных дисками, в довольно небольшой области звездообразования (рис. Ц.30). Протяженность некоторых дисков сопоставима с размером орбиты Нептуна в Солнечной системе (рис. Ц.31).

В протопланетных дисках найдены многочисленные молекулы, часть которых, вероятно, генетически связана с летучими, содержащимися в замороженных гранулах первичного аккретирующего материала (таких, как H_2O, CO, N_2, H_2CO, HCN и др.) и подвергшихся в дальнейшем значительной химической и термической переработке. Некоторые из них, по-видимому, находятся в неравновесном состоянии вследствие процессов фотолиза, обусловленных жестким ультрафиолетовым и рентгеновским излучением молодой звезды, вызывающим, в частности, ионизацию поверхностных слоев.

Принципиальное значение для понимания особенностей эволюции протопланетного аккреционного диска, особенно структуры, теплового режима и динамики его внутренних областей, имеют данные о составе и свойствах пылевой компоненты. Этой цели служат исследования, проводимые в оптическом, ближнем и тепловом ИК диапазонах спектра, в том числе измерения эмиссионных спектров с использованием метода длиннобазовой интерферометрии, дающих сведения о минералогии пылевых частиц (*Hildebrand*, *1983*; *Pollack и др.*, *1994*; *Watson и др.*, *2007*; *Millan-Gabet и др.*, *2007*). Разработана эффективная методика решения обратных задач светорассеяния с учетом зависимости свойств частиц от длины волны, позволяющая восстанавливать физические характеристики пыли, аналогом которой служат метеорные частицы земной атмосферы. Несомненный интерес представляет вывод, сделанный по данным светорассеяния в ИК-диапазоне длин волн и миллиметровой интерферометрии, что частицы в диске существенно крупнее, чем в диффузной межзвездной среде, достигая миллиметровых и даже сантиметровых размеров, то есть напоминают песок и гальку (*Natta и др.*, *2007*). При этом обнаружено, что их размеры подчиняются высотной стратификации, так что мелкие микронные частицы сосредоточены у поверхности диска, а крупные — внутри него, причем такая стратификация может сохраняться миллионы лет. Естественно, что спектр размеров твердых частиц (гранул), влияющих на непрозрачность среды и турбулентность потока с учетом зависимости от концентрации и инерционности пыли, необходимо учитывать при моделировании эволюции диска, приводящей к формированию субдиска.

Содержание и свойства гранул напрямую связаны с химическими превращениями в газовой среде и в совокупности оказывают наиболее сильное влияние на тепловой режим и вязкостные свойства диска, особенно в активных зонах, определяемых удалением от звезды и от центральной плоскости (*Bergin и др.*, *2007*). Есть основания считать, что происхождение и природа твердых частиц примерно аналогичны частицам, находящимся в межзвездной среде и обнаруженным в метеоритах. В их состав входят такие компоненты, как нерастворимая углеродсодержащая органика (IOM) и термически закаленные стекла с включениями металла и сульфида (annealed GEMS). Такие субмикронные частицы можно отождествить с кристаллической компонентой преимущественно аморфных силикатов межзвездной пыли, обогащенных магнием. Не исключено, однако, что они являются конденсатами ранней Солнечной системы, сохранившимися в кометах и связанных с ними метеорных потоках, а также в хондритовых пористых частицах межпланетной пыли (CP-IDPs). Следовательно, по своему генезису они могут соответствовать веществу, рождающемуся в ближайших окрестностях околозвездных дисков и, возможно, претерпевшему в дальнейшем процессы испарения-кристаллизации при радиальном перемещении в диске или при нагреве ударными волнами в зоне аккреции и последующем быстром охлаждении (см. *Mathis*, *1990*; *Kemper и др.*, *2004*; *Bouwman и др.*, *2001*, *2005*; *van Boekel и др.*, *2004*; *Alexander и др.*, *2007*; *Wooden и др.*, *2007*).

Большую популярность в планетной космогонии получила идея о том, что образование протосолнечной туманности произошло под воздействием взрыва сверхновой в окрестности компактного газового облака, изначально сформировавшегося вследствие фрагментации более массивного газового скопления. Основой данной гипотезы явилось изучение короткоживущих радионуклидов в метеорите Альенде, в частности, отношения изотопа ^{26}Al к его дочернему изотопу ^{26}Mg, образованных в процессе нуклеосинтеза в звезде на завершающей фазе жизни и иплантированных в частицы протосолнечной туманности при инжекции в нее остатка сверхновой (*Wasserburg*, *1985*; *Вассербург*, *Папанастасиу*, *1986*). С этой идеей связаны общие представления о роли короткоживущих радионуклидов со средним периодом полураспада $\leqslant 10$ млн лет в эволюции ранней Солнечной системы (см. *Wadhwa*, *Russell*, *2000*; *McKeegan*, *Davis*, *2004*; *Kita и др.*, *2005*; *Gounelle и др.*, *2006*; *Wadhwa и др.*, *2007*). В частности, получены свидетельства вероятного вклада в энергетику ^{10}Be и ^{36}Cl, что, в свою очередь, позволило уточнить содержания других короткоживущих радионуклидов, таких как ^{26}Al, ^{60}Fe, ^{41}Ca и ^{182}Hf, и с большей точностью восстановить хронологию событий в солнечном протопланетном диске. Сделан вывод о том, что содержащиеся в хондритовых метеоритах тугоплавкие включения миллиметровых-сантиметровых размеров, обогащенные Al и CA (CAIs), относятся к самому древнему твердому материалу, возраст которого, определенный из анализа углистого хондрита Ефремовка составляет $4567{,}2 \pm 0{,}6$ млн лет. По-видимому, одновременно с CAI за время ~ 3 млн лет в примитивном веществе хондритов сформировались субмиллиметровые хондры (*spherules*), состоящие из ферромагнитных силикатов. Можно думать, что спустя еще несколько миллионов лет, когда такие наиболее эффективные тепловые источники, как короткоживущие нуклиды ^{26}Al и ^{60}Fe, были исчерпаны, образовались недифференцированные хондриты, не испытавшие плавления и ставшие родительскими телами планетезималей (*Wadhwa и др.*, *2007*).

Концепции взрыва сверхновой благоприятствуют результаты моделирования, свидетельствующие о необходимости избыточного давления, чтобы вызвать гравитационный коллапс диффузного облака, подобного родительскому облаку Солнечной системы, и отделение диска. В принципе такое избыточное давление, наряду с ускоряющей процесс турбулизацией межзвездной среды, могли быть обеспечены за счет ударных волн, порожденных взрывом сверхновой (см. обширную библиографию к обзору *Ballesteros-Paredes и др.*, *2007*).

В рамках разрабатываемых моделей предпринимаются попытки с большей определенностью ответить на вопросы относительно последовательности изменения агрегатного состояния основных компонент допланетного вещества, расположении фронтов конденсации-испарения в зависимости от термодинамических параметров диска, роли процессов сублимации и коагуляции частиц в двухфазной среде, относительном вкладе в тепломассоперенос излучения и турбулентности и о механизмах развития гидродинамической и гравитационной неустойчивости с учетом сдвиговых напряжений в пограничных слоях и полидисперсности взвешенных пылевых частиц. Особый интерес представляют плохо разрешаемые внутренние области диска в пределах нескольких астрономических единиц, где вещество активно аккрецирует на молодую звезду, в связи с чем сильно изменяются отношение пыль/газ, вклад фотохимических процессов и термический режим, условия формирования которого определяются двумя предельными моделями оптически тонкого и оптически толстого диска (*Najita и др.*, *2007*; *Dullemond и др.*, *2007*). Чрезвычайно важно при этом понять, насколько процессы эволюции в околосолнечном протопланетном диске отличались от тех, которые сейчас наблюдаются у молодых звезд солнечного типа. С этим связана, в частности, актуальная проблема образования специфических конфигураций внесолнечных планетных систем, особенно в ближайших окрестностях родительской звезды, и их устойчивости на значительных временных интервалах.

Рис. Ц.1. Изображение Солнца во время мощных корональных выбросов плазмы (Coronal Mass Ejection, CME). Наблюдаются многочисленные эруптивные волокна, соединенные с активными областями на солнечной фотосфере, и громадные плазменные пузыри, простирающиеся на расстояния свыше 2 млн. км. В них под влиянием магнитного поля происходят процессы самоорганизации. Такие часто происходящие события на Солнце приводят к возникновению на Земле магнитных бурь. Изображение получено в 2002 г. космическим аппаратом SOHO (ESA)

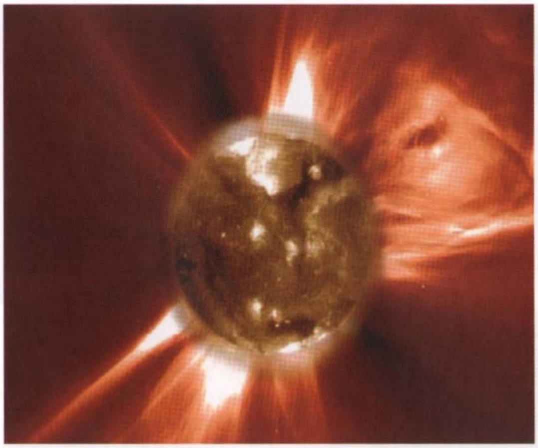
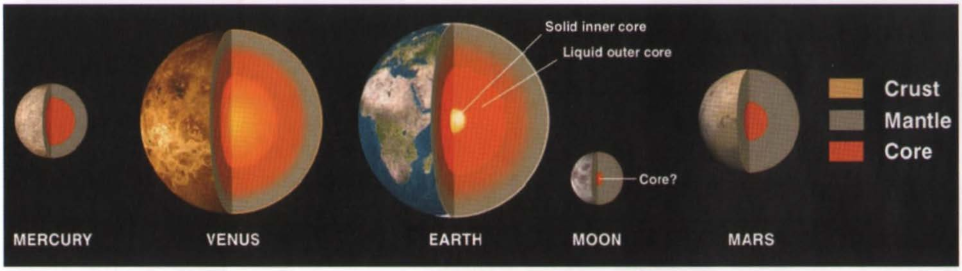
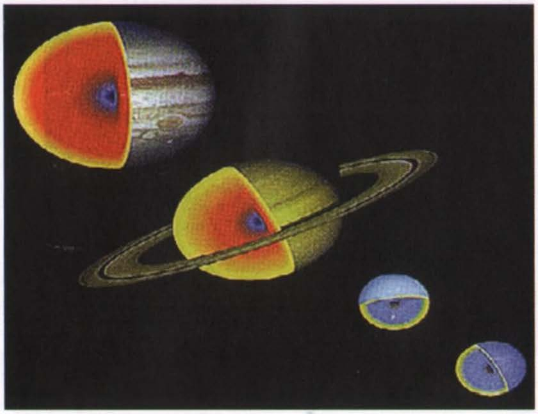


Рис. Ц.2. Население Солнечной системы: большие планеты и представители малых тел — кометы и астероиды (Монтаж, NASA)



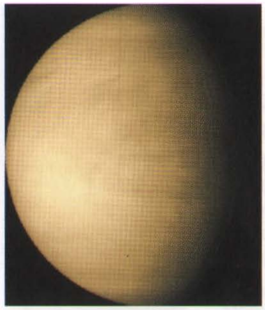
а



б

Рис. Ц.3. Внутреннее строение планет земной группы и Луны (*а*) и планет-гигантов (*б*). Упорядоченность в расположении основных областей (ядро, мантия, кора) является следствием процесса дифференциации слагающего вещества на оболочки, а их протяженность зависит от размеров (массы) планеты, обилий основных компонентов и температуры образования конденсатов в зоне формирования. У планет земной группы и Луны этим предопределяется также состояние ядра и толщина коры (литосферы), а у планет-гигантов — соотношение между составляющими газами и льдами

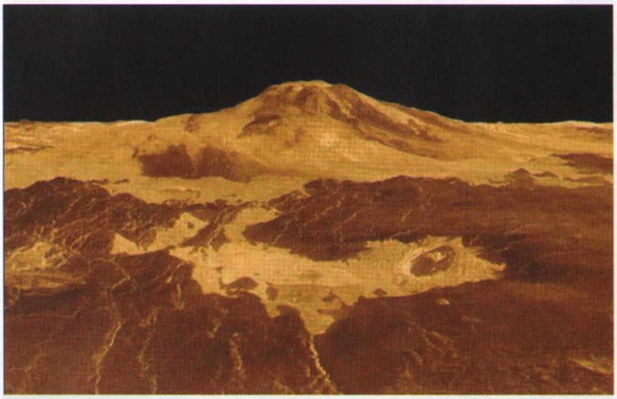
а



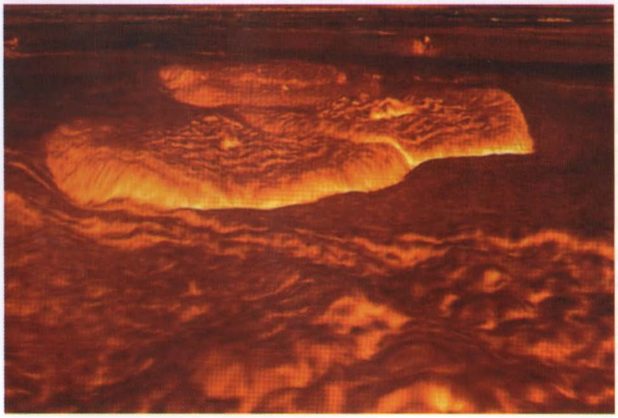
б

в

Рис. Ц.4. Изображение Венеры в ультрафиолетовом (*а*) и видимом спектре (*б*), а также в сантиметровом радиодиапазоне, полученное методом апертурного синтеза (*в*). В ультрафиолетовых лучах наблюдаются характерные образования вследствие наличия поглотителя (вероятно, частиц серы) на верхней границе облаков. Эти образования перемещаются по диску Венеры со скоростью ~ 100 м/с, превышающей на два порядка скорость ветра у поверхности из-за суперротации атмосферы. Видимый диапазон малоинформативен, отдельные полосы связаны с неоднородной структурой сернокислотных облаков. Поверхность Венеры можно видеть лишь в радиодиапазоне, для которого атмосфера и облака прозрачны. Радиокартирование позволило выявить многие детали рельефа и особенности поверхности Венеры. *а* — снимок с Земли, на котором отчетливо видна упорядоченность в структуре УФ-облаков; *б* — снимок космического аппарата «Галилей» при пролете вблизи Венеры; *в* — мозаика снимков поверхности с космического аппарата «Магеллан», в хаотическом характере рельефа которой можно выделить более упорядоченные структуры. С любезного разрешения NASA



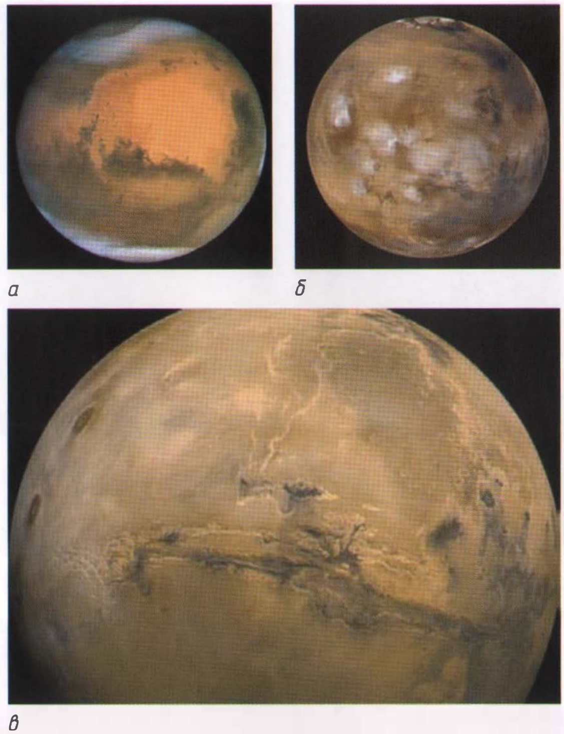
а



б

Рис. Ц.5. (*а*) Изображение в перспективной проекции вулканической горы Маат (область Алта — земля Афродиты) на Венере. Высота горы 5 км, отчетливо видны следы лавовых потоков. Вертикальный масштаб увеличен для наглядности в 10 раз. (*б*) Изображение в перспективной проекции излияния на поверхность вулканической лавы («блинов»). По результатам радиолокационного картирования Венеры с космического аппарата «Магеллан». С любезного разрешения NASA

Рис. Ц.6. Снимки Марса, полученные с космических аппаратов. (*а*) Изображение поверхности Марса, на котором хорошо видны различия альбедо северного и южного полушарий, сильно кратерированные области вблизи экватора и облака над полярными районами. (*б*) На этом изображении выделяются облака над вулканами, рельеф северной полярной области и долина Маринер южнее экватора. (*в*) Мозаика снимков, на которой отчетливо видны основные детали рельефа Марса, прежде всего высочайшие в Солнечной системе щитовые вулканы высотой до 26 км в области Эллада на северо-западе и огромный тектонический разлом у экватора (долина Маринер) протяженностью свыше 3000 км, шириной свыше 100 км и глубиной до 8 км. С любезного разрешения NASA



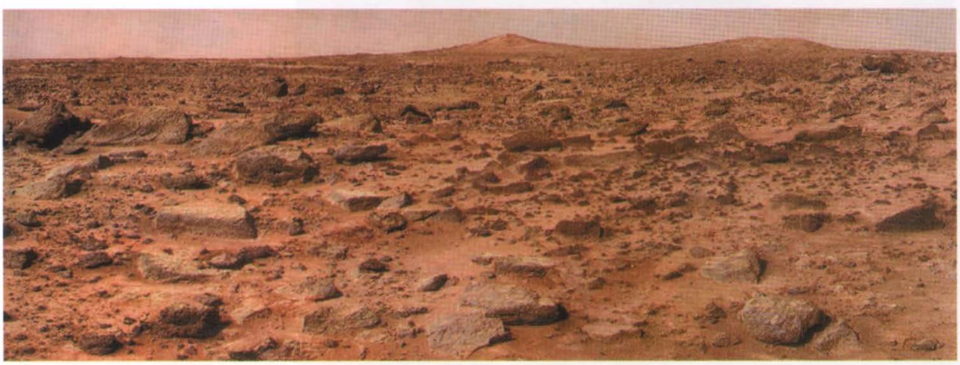


Рис. Ц.7. Панорама поверхности Марса в месте посадки марсохода «Pathfinder». С любезного разрешения NASA

Рис. Ц.8. Примеры водной эрозии на Марсе. Слева — расщелины, вероятнее всего образованные потоками воды; справа — овраги (gallies), образование которых может быть обусловлено выходом воды на поверхность. С любезного разрешения NASA

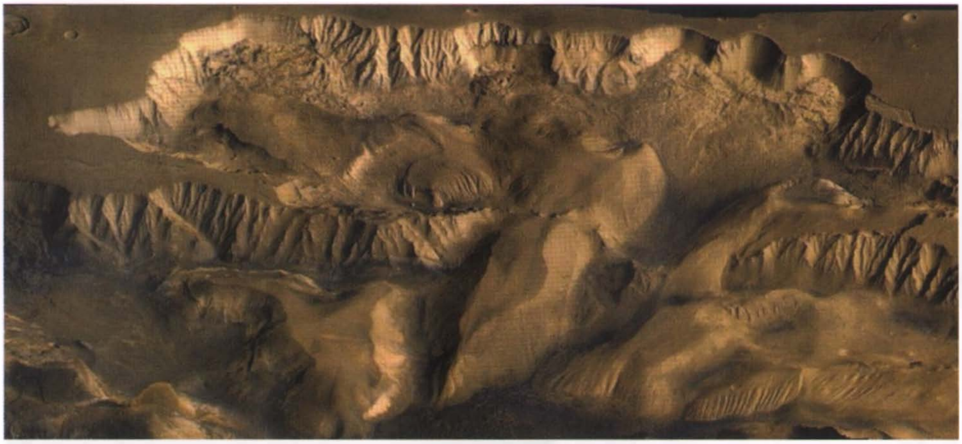


Рис. Ц.9. Область Кандор в центральной части долины Маринер на Марсе. На фоне хаотической морфологии, обусловленной ранними тектоно-вулканическими процессами, образовавшими крупные каньоны, столовые горы и равнины, выделяются отдельные более упорядоченные структуры, образование которых, очевидно, связано с гигантскими водными потоками. С любезного разрешения Геологической службы США и NASA

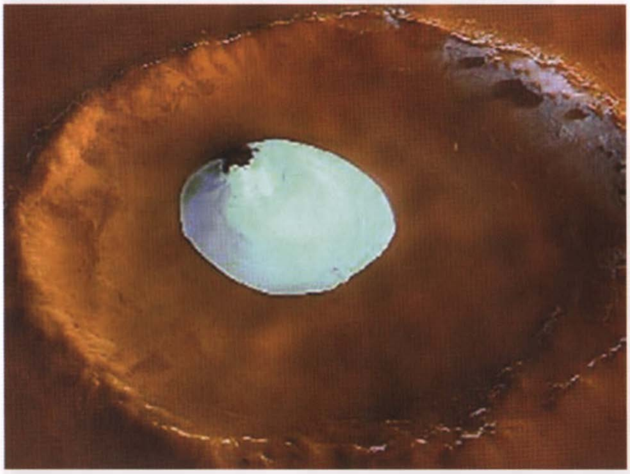


Рис. Ц.10. Ледяное озеро на дне марсианского кратера. Снимок космического аппарата «Mars Express», ESA

Рис. Ц.11. Эти камни на марсианском плато Меридиани представляют собой слоистые породы осадочного происхождения, аналогичные по структуре осадочным породам на океаническом ложе Земли. В них обнаружены высокие концентрации солей хлора и брома, что также связывает их возникновение с океанами Марса. Область на снимках, возможно, представляет собой береговую линию древнего океана, где на мелководье происходили циклические процессы испарения и/или вымерзания. Снимки марсохода «*Opportunity*». С любезного разрешения NASA

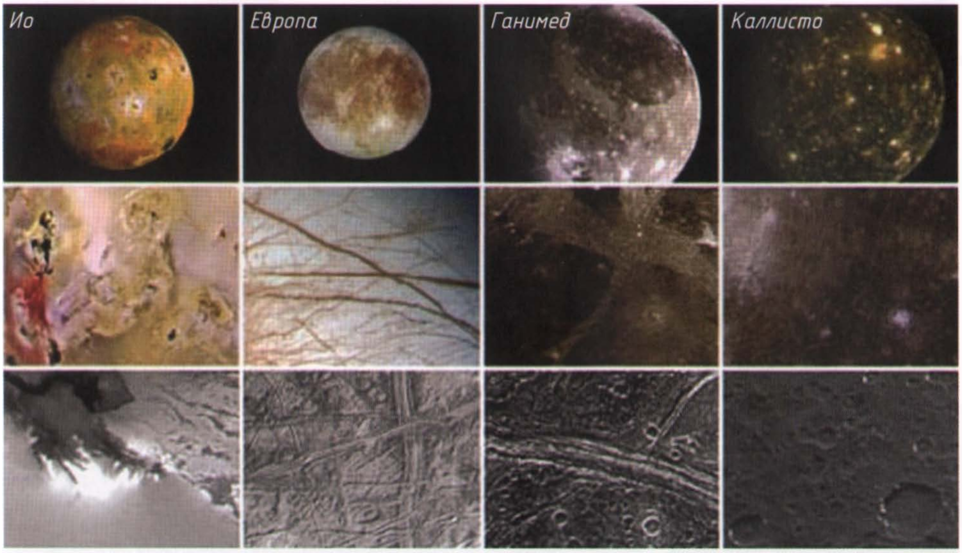


Рис. Ц.12. Галилеевы спутники Ио, Европа, Ганимед и Каллисто. Уникальные особенности спутников показаны на изображениях участков поверхности под каждым из них. Снимки космических аппаратов «Вояджер» и «Галилей». С любезного разрешения NASA

Рис. Ц.13. Галилеевы спутники на фоне Большого Красного Пятна Юпитера (монтаж). С любезного разрешения NASA

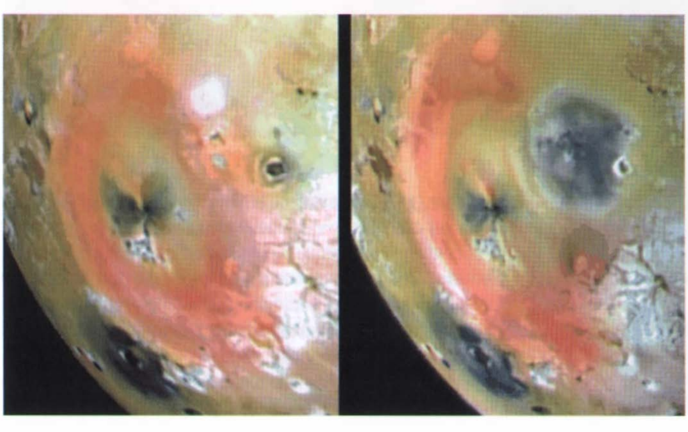
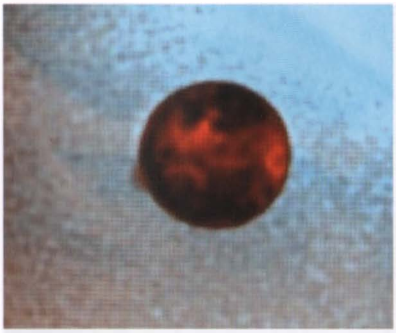
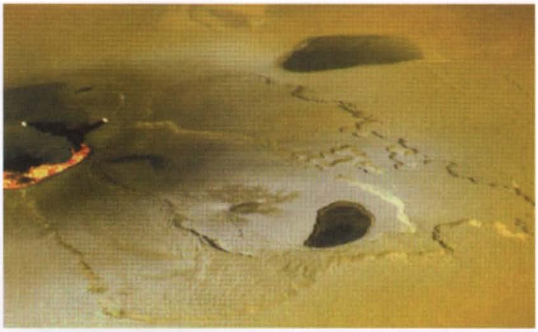


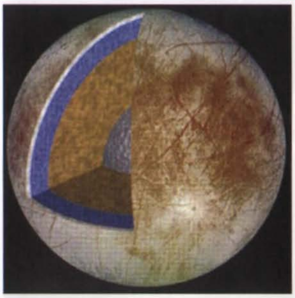
Рис. Ц.14. Участок поверхности Ио с действующим вулканом на изображениях, полученных космическими аппаратами «Вояджер» в 1981 г. (слева) и «Галилей» в 1996 г. (справа). Поверхность претерпела небольшие изменения, отсутствие ударных кратеров свидетельствует о ее молодом возрасте, обусловленном активным вулканизмом. С любезного разрешения NASA





а *б*

Рис. Ц.15. (*а*) Вулканическое извержение (плюмаж) на лимбе Ио. Снимок КА «Вояджер». (*б*) Истечение лавы. Снимок КА «Галилей». С любезного разрешения NASA



а *б*

Рис. Ц.16. (*а*) Галилеев спутник Юпитера Европа. Поверхность изрезана хребтами, ложбинами и трещинами, рельеф которых не превышает сотен метров. Отсутствие кратеров свидетельствует о молодой поверхности. Разрез слева соответствует современной модели внутреннего строения Европы, согласно которой под относительно тонкой ледяной корой толщиной ~ 10 км находится водный океан глубиной ~ 50 км, а ниже его — силикатная мантия и ядро, состоящее из каменистых пород. Снимок космического аппарата «Галилей» 17.12.1996. (*б*) Участок поверхности Европы размером 70 км × 30 км (область Конамара). Цвета контрастированы, чтобы подчеркнуть особенности рельефа, Солнце находится справа. Белые и голубые области отвечают свежей поверхности, частично покрытой пылью, а коричневые, вероятно, обязаны своим происхождением минеральным отложениям. Участки размером ~ 10 км несут на себе следы перемещений верхнего слоя ледяной коры, что можно связать с наличием на сравнительно небольшой глубине воды или мягкого льда. Снимок космического аппарата «Галилей». С любезного разрешения NASA

Рис. Ц.17. Спутник Юпитера Ганимед. На темной сильно кратерированной ледяной поверхности, покрытой минеральной пылью, с многочисленными хребтами, желобами и крупными депрессиями, выделяются белые яркие области, обусловленные относительно свежими обнажениями ледяной коры при ударной бомбардировке. Снимок космического аппарата «Галилей». С любезного разрешения NASA

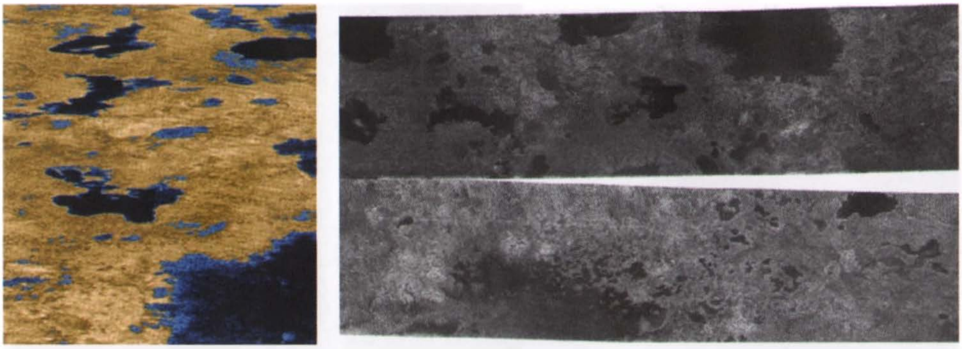
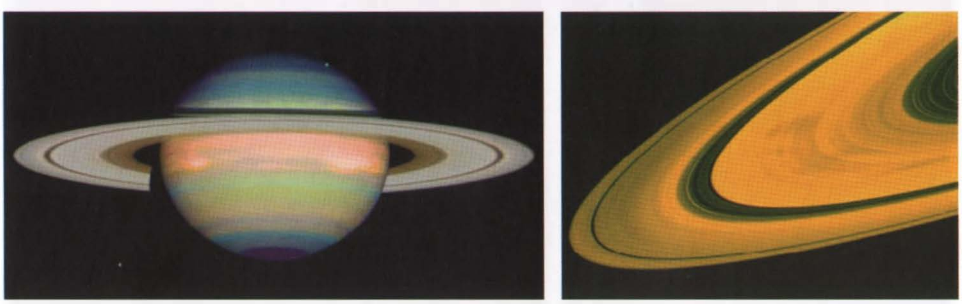


Рис. Ц.18. Поверхность спутника Сатурна Титана. Темные пятна на более светлой поверхности из водяного и углеводородных льдов ассоциируются с озерами из метана, что подкрепляет предположение о существовании метанового цикла между поверхностью и атмосферой. Цвета на левом снимке искажены, чтобы подчеркнуть контрастность деталей. Изображения получены космическим посадочным аппаратом «Гюйгенс» (ESA)

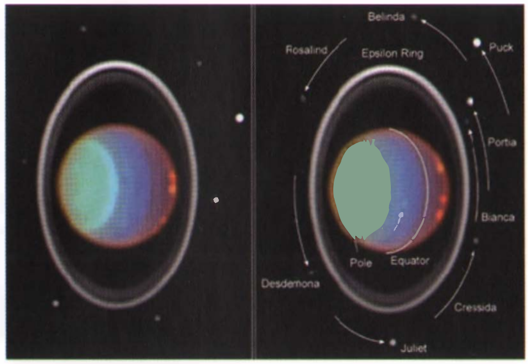
Рис. Ц.19. Спутник Нептуна Тритон. На метановой поверхности обнаружены действующие азотные гейзеры. Снимок космического аппарата «Вояджер». С любезного разрешения NASA

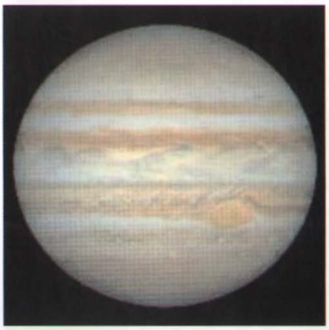


а *б*

Рис. Ц.20. (*а*) Сатурн в контрастных искусственных цветах. Голубой цвет соответствует основным облакам, красный и оранжевый — высотным облакам, зеленый — надоблачной дымке. В окружающих Сатурн кольцах выделяются три основных кольца: С, В и А. Между кольцами А и В — -деление Кассини. Снимок космического телескопа «Хаббл». (*б*) Кольца Сатурна. Отчетливо выделяется их тонкая структура — множество отдельных колечек (*ringlets*), которые являются следствием процесса самоорганизации в структуре колец. Радиальные темные полосы — спицы (*dark spokes*) в кольце В обусловлены образованием пылевой плазмы, находящейся над плоскостью колец и контролируемой магнитным полем планеты. Снимок космического аппарата «Вояджер 2». С любезного разрешения NASA

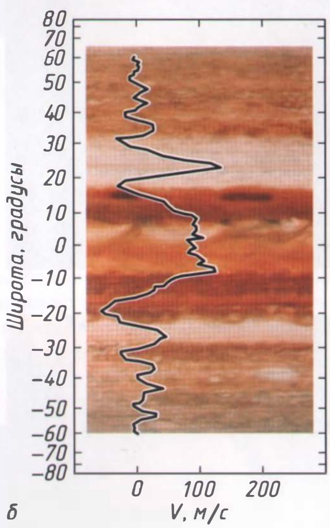
Рис. Ц.21. Кольца Урана по наблюдениям космического телескопа «Хаббл». Левый снимок сделан в 1997 г., правый получен позднее и на нем показаны движения спутников и атмосферных образований. На формирование узких колец Урана, наряду с коллективными процессами взаимодействия частиц, оказывают влияние спутники (показанные на правом снимке), расположенные вблизи колец. Они ответственны за возникновение дополнительных упорядоченностей в структуре колец. С любезного разрешения NASA





а

Рис. Ц.22. (*а*) Юпитер с характерными светлыми зонами и темными поясами в сильно турбулизованной атмосфере на уровне верхней границы облаков. Снимок космического телескопа «Хаббл» в октябре 1995 г. (*б*) Структура зон и поясов на Юпитере. Светлые области восходящих течений — зоны, более темные области нисходящих течений — пояса. Сплошной кривой показаны ветры переменного направления (со скоростью и в направлении собственного вращения планеты в зонах и в противоположном направлении в поясах); при этом в переходных областях возникают сильные сдвиговые течения. На эту картину накладываются неупорядоченные движения различного масштаба, наблюдаемые в структуре облаков. Две темных области в поясе на широте 8—18° N — горячие пятна. Снимок космического аппарата «Вояджер». С любезного разрешения NASA



б

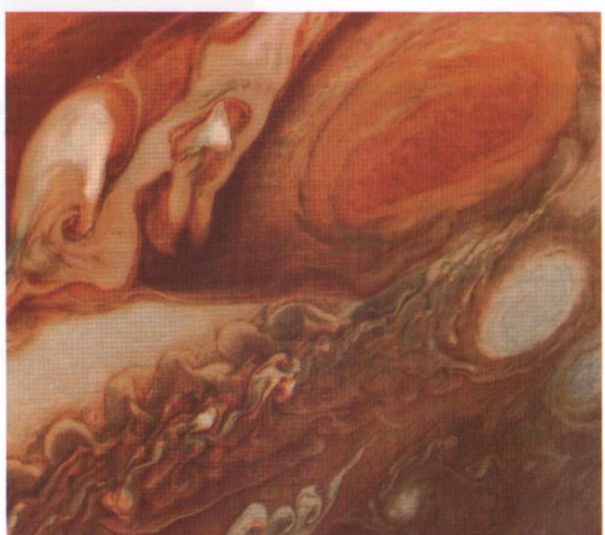
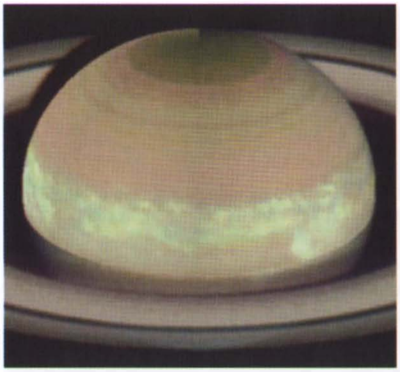
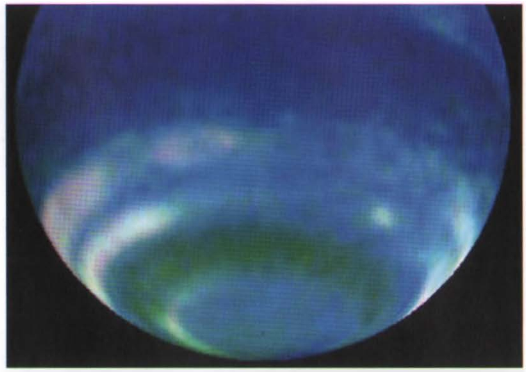


Рис. Ц.23. Сильно развитая турбулентность в окрестности БКП в атмосфере Юпитера с богатой гаммой цветов облаков. Большое Красное Пятно (БКП) на Юпитере (размером 25 000 × 12 000 км) с сильно турбулизованными областями течений к западу и югу от него. Справа — вихри меньшего размера («белые овалы»). Максимальное разрешение на снимке 95 км. Снимок космического аппарата «Вояджер». С любезного разрешения NASA



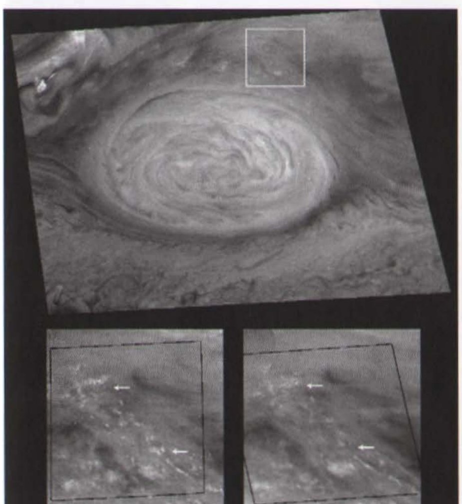
а



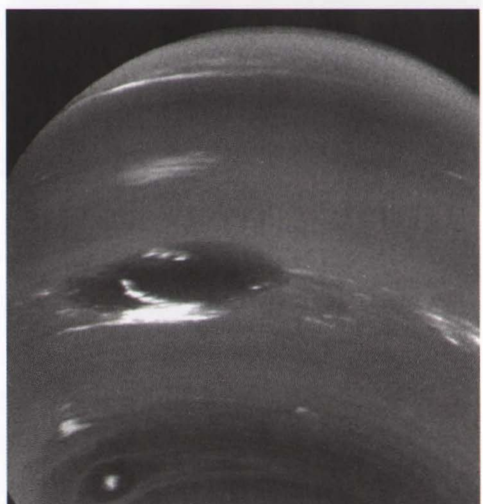
б

в

Рис. Ц.24. (*а*) Снимок Сатурна КА «Кассини». Хорошо различается полосчатая структура облачного слоя, обусловленная планетарной циркуляцией и турбулизованная структура облаков вблизи экватора. (*б*) Нептун с системой полос, обусловленных зональной циркуляцией на уровне облаков. Аквамариновый цвет диска планеты объясняется метановым поглощением красной области спектра. Снимок КА «Вояджер». (*в*) Пример возникновения упорядоченных структур в облаках турбулизованной атмосферы Сатурна. Снимок КА «Вояджер 2» 20 августа 1981 г. С любезного разрешения NASA

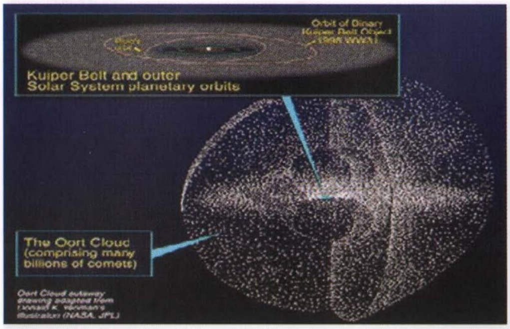


а

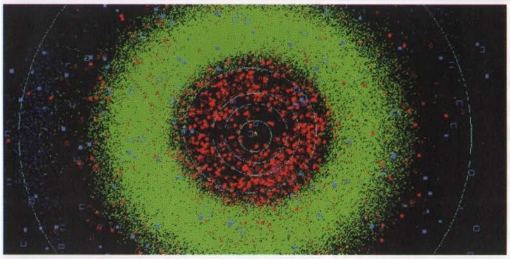


б

Рис. Ц.25. Сопоставление Большого Красного Пятна (БКП) на Юпитере и Большого Темного Пятна (БТП) на Нептуне, как примеров самоорганизации в атмосфере планет. (*а*) БКП — громадный устойчивый вихрь с движением против часовой стрелки в южном полушарии (антициклон) со средними размерами ~ 12 тыс. км по широте и ~ 30 тыс. км по долготе. В нижней части — последовательность перемещения облаков в турбулентной атмосфере Юпитера к северу от БКП. Размер выделенной области 50 км, время между изображениями 70 мин. Снимок КА «Галилей». (*б*) БТП — устойчивый вихрь циклонического типа размером ~ 15 тыс. км. С южной стороны БТП и ниже его видны яркие белые пятна, образованные вышележащими облаками. Снимок КА «Вояджер». С любезного разрешения NASA



а



б

Рис. Ц.26. (*а*) Облако Орта и пояс Койпера. Пояс Койпера, находящийся на периферии нашей планетной системы (40—100 а. е.) лежит глубоко внутри облака Орта, внешняя граница которого находится на расстоянии 10^4—10^5 а. е. (*б*) Главный пояс астероидов между орбитами Марса и Юпитера (2,7—3,2 а. е.), обозначен зелеными точками. Внутри его находятся группы астероидов, сближающихся с Землей (Амур, Аполлон, Атон), называемые также *NEO* (красные точки). С любезного разрешения Д. Йоманса и NASA

а

б

Рис. Ц.27. (*а*) Снимок кометы Хейла—Боппа (1995 01) при сближении с Солнцем. Небольшое ядро (~ 10 км) скрыто глубоко внутри яркой области — комы поперечником в десятки тысяч километров, образующейся вследствие сублимации газа и пыли с ледяной поверхности ядра. Хорошо видны протяженные хвосты I и II типов (Dennis di Cicco, 5.4.1997). (*б*) Ядро кометы Галлея с расстояния 4 тыс. км. Средний размер ядра ~ 15 км. Слева видны потоки газа и пыли (джеты) с ледяной поверхности ядра при сближении кометы с Солнцем. Снимок КА «Джотто», ESA

Рис. Ц.28. Выпадение на Юпитер в 1994 г. фрагментов кометы Шумейкеров—Леви-9, разорванной приливными силами при ее сближении с планетой. Это событие наглядно иллюстрирует хаотический характер миграционных и столкновительных процессов в Солнечной системе. С любезного разрешения NASA

а

б

в

Рис. Ц.29. (*а*) Область звездообразования NGC2024 в туманности Ориона. Снимки получены инфракрасной камерой аппарата «Джемини» в трех полосах ближней ИК-области спектра (λ = 1,2, 1,65 и 2,2мкм) и затем обработаны путем наложения изображений. На снимке им отвечают, соответственно, голубой, зеленый и красный цвета. В то время как на обычной фотографии в видимом свете центральная часть туманности выглядит темной из-за поглощения света пылью, в инфракрасном свете обнаруживается плотный кластер молодых звезд. С любезного разрешения UCLA и NASA. (*б*) Область звездообразования в Орионе. (Согласно M Bessell, RSAA, ANU.) (*в*) Область звездообразования η Карине. Снимок получен при помощи космического ИК-телескопа «Спицер» (SIRTF). Слева для сравнения показан тот же участок неба в видимом диапазоне спектра. С любезного разрешения NASA

а *б*

Рис. Ц.30. (*а*) Газопылевые диски (темные полосы между яркими областями) у молодых звезд по данным наблюдений космического телескопа «Хаббл». (*б*) Область звездообразования NGC 1333 по наблюдениям при помощи ИК-телескопа космического аппарата «Спицер» (SIRTF). У нескольких звезд хорошо видны окружающие их диски. С любезного разрешения NASA

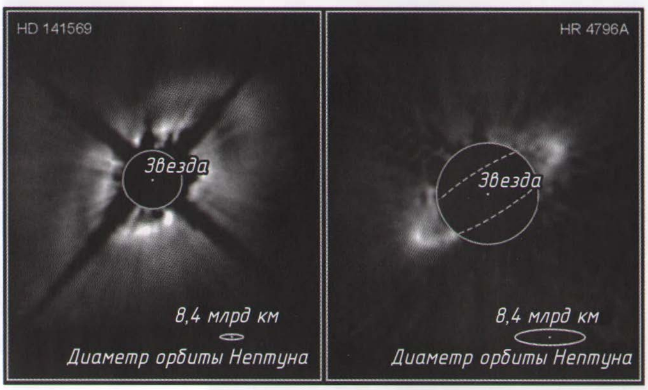


Рис. Ц.31. Изображения газопылевых дисков, полученные по наблюдениям при помощи телескопов STS OPO и Хаббл. С любезного разрешения NASA

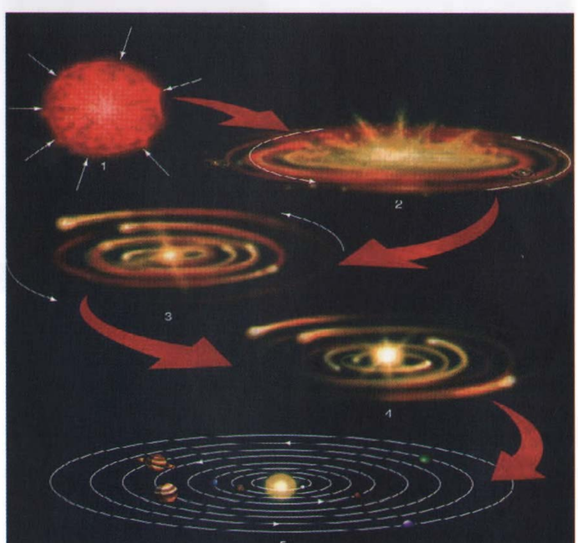


Рис. Ц.32. Схема образования Солнечной системы от коллапса фрагмента молекулярного облака (1) через образование прото-Солнца, протопланетного диска и субдиска (2) до его распада на отдельные кольцевые сгущения и образования в них твердых частиц — планетезималей (3—4). Объединение планетезималей приводит, в конечном счете, к образованию планет

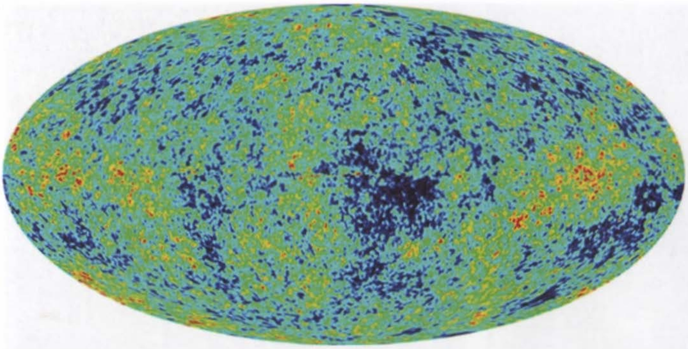


Рис. Ц.33. Космическая фоновая радиация (реликтовое излучение) по данным измерений зонда Уилкинсона (WMAP). Флуктуации составляют менее 10^{-5} (*Мазер, 2007*). С любезного разрешения NASA

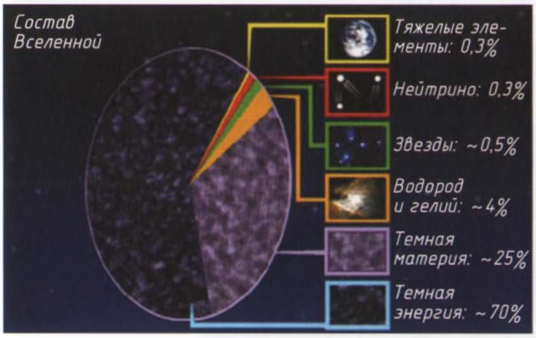
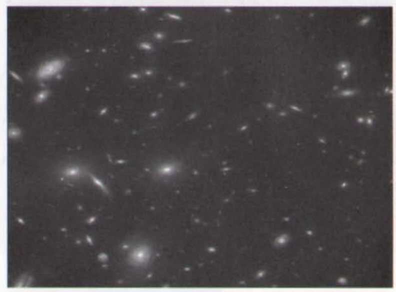


Рис. Ц.34. Состав Вселенной

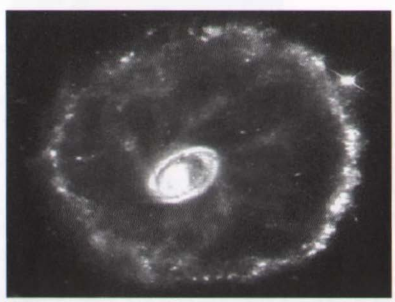
а



б

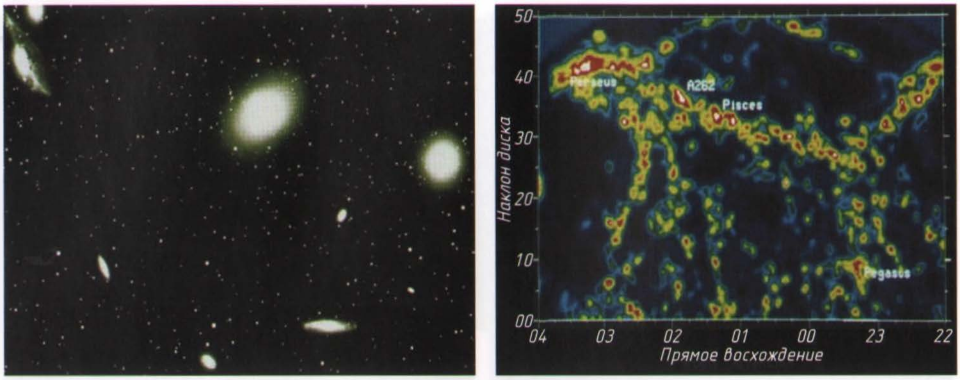
Рис. Ц.35. Галактики как упорядоченность хаотической турбулизованной межгалактической среды. (*а*) Локальная группа галактик NGC 3190 (Hickson 44) — пример структурирования видимого вещества Вселенной. Данная группа содержит свыше 30 галактик, в том числе нашу Галактику (Млечный путь) и ближайшие к нам наиболее яркие галактики Андромеда и Магеллановы облака (звезда в правом верхнем и эллиптическая галактика в левом верхнем углах сопоставимы по яркости). (*б*) Центральная часть далекого галактического кластера CL 0939 + 4713, содержащая множество спиральных галактик, некоторые из которых выглядят возмущенными. Снимки космического телескопа «Хаббл». С любезного разрешения NASA

а



б

Рис. Ц.36. (*а*) Пример самоорганизации материи — галактика «Колесо телеги» кольцевой формы. Вверху слева две других галактики. Снимок Англо-австралийской обсерватории. (*б*) Снимок той же галактики с большим разрешением космического телескопа Хаббл. С любезного разрешения NASA



а *б*

Рис. Ц.37. (*а*) Галактический кластер ДЕВА (VIRGO). (*б*) Суперкластер галактик, наблюдаемый в диапазоне радиоволн. С любезного разрешения NASA

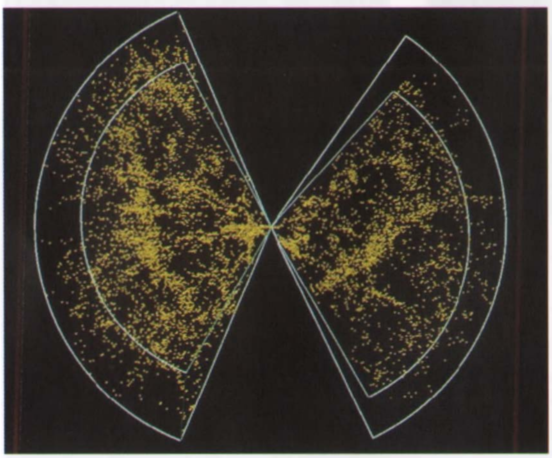
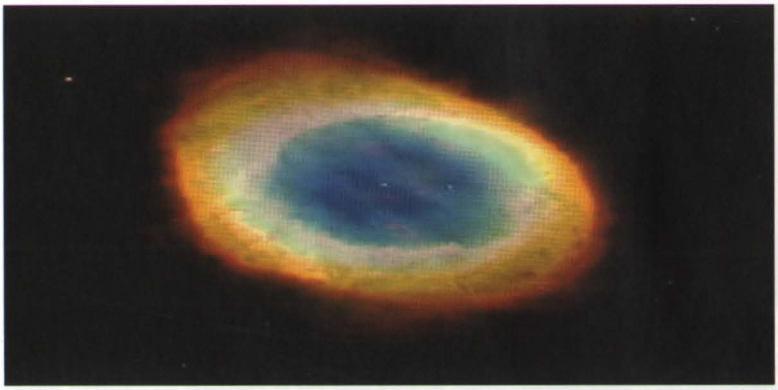


Рис. Ц.38. Крупномасштабная структура Вселенной. Скопления галактик (галактические кластеры и суперкластеры) разделены пустотами (*voids*). С любезного разрешения NASA

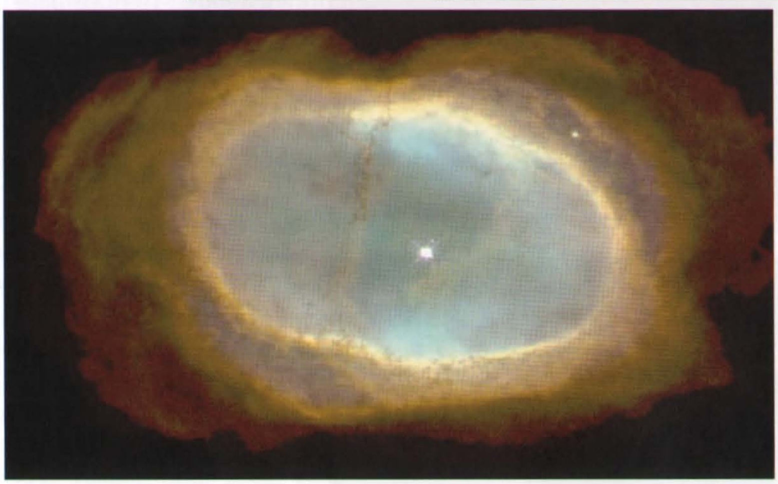
Рис. Ц.39. Эволюция материи во Вселенной после Большого взрыва

Рис. Ц.40. Схематическое изображение эволюции Солнечной системы. Время жизни Солнца (относящегося к классу звезд G2) составляет около 10 млрд лет; через ~ 5 млрд лет после исчерпания запасов ядерного топлива Солнце эволюционирует в состояние красного гиганта, а затем белого карлика. Одновременно коллапсирует планетная система. В нижней части рисунка — планетарная туманность, оставленная Солнцем. Согласно (*EAA*, *2002*)



а

б



в

Рис. Ц.41. Конфигурации планетарных туманностей. (*а*) Кольцевая планетарная туманность «Лира» (M57, NGC 6720) в близком к реальному цвете. Голубой соответствует ионизованному гелию, зеленый — дважды ионизованному кислороду, красный — водороду и ионизованному азоту. В центре находится звезда 15^m на заключительной стадии эволюции к белому карлику, с температурой поверхности $\sim 150\,000$ K. (*б*) Планетарная туманность «Паук». Газ сброшенной оболочки сильно турбулизован и имеет нерегулярную структуру с некоторой упорядоченностью. (*в*) Планетарная туманность квазикольцевой формы с неравномерным истечением газа и упорядоченными структурами во внутренней зоне. Снимки космического телескопа «Хаббл». С любезного разрешения NASA

а *б* *в*

Рис. Ц.42. Неоднородная структура околозвездных газопылевых дисков. (*а*) Диск вокруг звезды Бета Пикторис (β Pictoris). Его протяженность в одном направлении от звезды 25 а. е., хорошо различимая неоднородная структура обусловлена турбулентными процессами в газопылевой среде, на которые возможно накладываются гравитационные возмущения от планет, формирующихся внутри диска. Снимок получен на 3,6-м телескопе с адаптивной оптикой Европейской обсерватории. (*б*) Пылевой диск около звезды HR 4796A. Изображение получено при помощи космического телескопа «Хаббл» в ближней ИК-области спектра на $\lambda = 1{,}1$ мкм. Пик яркости находится на расстоянии ~ 70 а. е. от центральной звезды (*Schneider и др.*, *1999*). (*в*) Протопланетная туманность «Яйцо», внутри которой находится супергигант класса F. Истечение газа и пыли от звезды создает радиальные колонны в виде двух симметричных газопылевых дисков неоднородной структуры. С любезного разрешения NASA и ESA

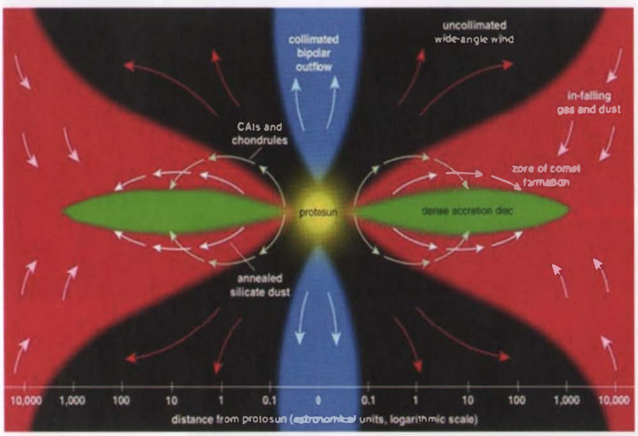


Рис. Ц.43. Схема формирования газопылевого аккреционного диска и субдиска. В центре — протосолнце, на которое продолжает аккретировать вещество протопланетной туманности (красный цвет). Зеленым цветом показан образующийся пылевой субдиск, в окрестности которого происходит отток наружу газа и пыли, включая образовавшиеся высокотемпературные конденсаты, такие как тугоплавкие CAIs. Голубым цветом показаны биполярные потоки вещества, обусловленные магнитным полем Солнца

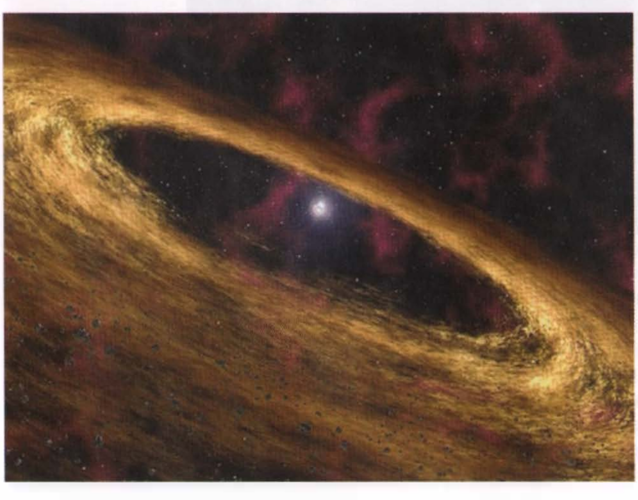


Рис. Ц.44. Газопылевой диск вокруг центральной звезды с образующимися внутри его твердыми частицами и более крупными фрагментами — планетезималями. Рисунок, NASA

Формирование планетной системы

Если модельные представления о происхождении протопланетных туманностей подкрепляются наблюдательными данными, то отправной концепцией образования самих планет служат, главным образом, механические, физические и космохимические характеристики Солнечной системы (см. *Lewis*, *1997*; *Cassen*, *Woolum*, *1999*; *Дорофеева*, *Макалкин*, *2004*). Действительно, существующие закономерности в системе планет и спутников определенно указывают на единый процесс их формирования, а данные о свойствах поверхностей и составе вещества планет и малых тел, в сопоставлении с образцами материала их зародышей и «осколков» — метеоритов, позволяют составить некоторые представления о вероятных источниках, путях и хронологии этого процесса, о чем говорилось выше. Наибольшее признание получила идея об аккумуляции планет из газопылевого диска после его отделения от центрального сгущения — молодой звезды (*Шмидт*, *1957*; *Сафронов*, *1969*; *1982*). Она включает в себя динамику самого диска, первичных гравитирующих тел, возникающих после развития возмущений во вращающемся плотном пылегазовом субдиске и его распада вследствие возникновения гравитационной неустойчивости. Заключительная фаза данного сценария — последовательность аккреции вещества на телах промежуточных размеров (зародышевых сгустках) и постепенное вычерпывание ими более мелких тел в процессе эволюции роя (рис. Ц.32). При этом из-за увеличения торможения в газе их скорость вращения становится меньше кеплеровской, что должно способствовать ускорению данного процесса. Важную роль мог также играть механизм обмена исходным веществом в радиальном направлении, эффективность которого накладывает определенные ограничения на возможность реализации различных сценариев эволюции диска и степень его хаотизации при формировании зародышей планет (*Levy*, *Lunin*, *1993*; *Weidenshilling*, *2000a*, *b*).

Выше было показано, что вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации. Это вещество, являющееся в общем случае пылевой плазмой, замагничено и находится в состоянии сильной турбулизации. По современным представлениям, планеты формируются вследствие потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения турбулизованного протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой компоненты к экваториальной (центральной) плоскости диска, перпендикулярной оси вращения (*Toomre*, *1964*; *Сафронов*, *1969*, *1982*; *Goldreich*, *Ward*, *1973*; *Nakagawa и др.*, *1981*; *Makalkin*, *1994*; *Youdin*, *Shu*, *2002*; *Durisen и др.*, *2007*). Заметим, что сплющивание вращающегося допланетного облака является следствием противоборства двух основных динамических сил — гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, самогравитация диска и электромагнитные явления. Можно думать, что вещество диска вследствие вязкостных сил трения (возникающих вследствие относительного сдвига элементов газовзвеси при орбитальном движении) дрейфует к протосолнцу по очень пологой спиральной траектории по мере того, как его момент количества движения передается наружу — из внутренних областей диска во внешние. Поскольку вязкость зависит от температуры, определяющим образом влияющей также на условия конденсации летучих, в том числе воды, это оказывает существенное влияние на относительное содержание твердых частиц, энергетику диска и условия передачи углового момента (*Cuzzi и др., 2005*; *Маров и др., 2007*; *2008*).

По существу, является общепризнаным, что ключевое значение в динамике околозвездных газопылевых аккреционных дисков любого рода имеет их турбулентная природа (см., напр., *Zel'dovich, 1981*; *Фридман, 1989*; *Dubrulle, 1993*; *Balbus, Hawley, 1998*; *Richard, Zahn, 1999*; *Bisnovatyi-Kogan, Lovelace, 2001*). Вместе с тем, в развиваемых космогонических моделях процессы турбулентности, во многом определяющие структуру и эволюцию диска, к сожалению, учитываются весьма приближенно. Это не случайно, если принять во внимание, что вещество диска представляет собой неоднородную дисперсную среду, состоящую из газа (в общем случае многокомпонентного) и пылевых частиц различного размера. При этом роль пылевых частиц, включая динамику их дрейфа в направлениях, радиальном и ортогональном к центральной плоскости диска, а также фазовых переходов при испарении и/или конденсации частиц с учетом температурной стратификации в диске, оказывается определяющей. Именно поэтому изучению турбулентных дисперсных сред уделяется большое внимание в последующих главах. Здесь же мы ограничимся следующими замечаниями.

Исходя из соображений размерности для турбулентного сдвигового слоя толщиной z, вращающегося с угловой скоростью Ω, можно предположить, что вихрь, возникающий в силу существования вертикального градиента скорости вращения $dv/dz = \Omega = l\,\mathrm{Ro}$ (где Ro — число Россби) при $\mathrm{Ro} = \mathrm{const}$ адаптируется к угловой скорости всего диска, что, однако, далеко не очевидно при наличии пылевых частиц (*Сафронов, 1987*; *Cuzzi, 2004, 2006*). Градиент dv/dz приводит к оседанию частиц вблизи плоскости $z = 0$ и образованию пылевого субдиска, что сопровождается возникновением радиального дрейфа в диске и изменением теплового режима за счет диссипации турбулентной энергии. Очевидно, турбулентность, отсутствующая в условиях полного перемешивания при $dv/dz = 0$, должна возрастать при оседании растущих частиц. С увеличением dv/dz до l Ro будет происходить изменение скорости оседания и временной шкалы этих конкурирующих процессов, что, в свою очередь, должно повлиять на возникновение условий гравитационной неустойчивости в субдиске, обусловливающей рост более крупных тел. Заметим, что привлечение механизма сдвиговой турбулентности подкрепляет, вообще говоря, представления о возможности кольцевого сжатия плоского протопланетного облака и образования планет из первоначально «рыхлых» газопылевых сгустков, заполняющих значительную часть своей сферы притяжения (сферы Хилла) и медленно сжимающихся за счет внутренних гравитационных сил (*Энеев, Козлов, 1981*).

Обращает на себя внимание тот факт, что генерируемая на границах слоев протопланетного диска турбулентность по своему характеру отвечает параметрам экмановского погранслоя с толщиной $\delta \sim (\nu^{\text{turb}}/\Omega)^{1/2} \sim \Delta\nu/\Omega\text{Re}^{\text{turb}}$ (где, как и раньше, ν^{turb} — турбулентная вязкость, $\Delta\nu$ — разность вращательной скорости газового диска и келлеровой скорости пылевых частиц и $\text{Re}^{\text{turb}} = \Delta\nu\delta/\nu^{\text{turb}}$ — турбулентное число Рейнольдса (*Сафронов*, *1969*). При этом длина перемешивания $\sim\delta$, а скорость турбулентного перемешивания $\nu^{\text{turb}} \sim \delta^2\Omega$. В рамках большинства рассматриваемых эволюционных моделей аккреционного диска у молодого Солнца коэффициент ν^{turb}отвечает большей относительной скорости частиц v_r. Тем не менее это не позволяет утверждать, что при столкновениях частиц более вероятны процессы объединения (*кохезии*), а не фрагментации, от чего зависит решение проблемы образования пылевых кластеров и постепенного роста зародышей планет в пылевом субдиске. Более того, имеющиеся лабораторные эксперименты не согласуются с существовавшими до недавнего времени представлениями об эффективности такого сценария (см. *Blum*, *Wurm*, *2000*; *Sekiya*, *Takeda*, *2003*; *2005*; *Chiang*, *2004*).

Одна из главных проблем формирования планетной системы связана с механизмом передачи от коллапсирующей звезды солнечного типа протопланетному диску момента количества движения $J_\odot$. Для протосолнечной туманности равномерной плотности его величина заключена в пределах $10^{52} < J_\odot < 10^{53}$ г см^2 сек$^{-1}$ и ограничена примерно на порядок большим значением для диска с массой, концентрирующейся к центру. Наиболее вероятно, что такая передача была обусловлена турбулентной вязкостью во вращающемся, конвективно нестабильном газовом диске, что определило временную шкалу его расширения (*Сафронов*, *1969*; *1987*). В дальнейшем, в процессе аккумуляции зародышей, не менее важную роль могли играть турбулентные вихри, за счет которых частицы ускорялись и легче объединялись в «кольца» вещества.

Альтернативные возможности потери углового момента Солнца на ранней стадии эволюции связываются со сдвиговыми движениями при кеплеровском вращении диска, а при наличии частично ионизованной среды — с действием электромагнитных сил или возникновением локальных шировых нестабильностей в полоидальном магнитном поле. Перенос углового момента мелкомасштабными магнитными полями был предложен Шакурой и Сюняевым (*Shakura*, *Sunyaev*, *1973*), вместе с допущением о дисковой α-вязкости, а важность этого механизма для аккреционного диска была показана Бальбусом и Хоули (см. обзор *Hawley*, *Balbus*, *1991*). Заметим, что в условиях значительной ионизации вещества диска при определенном соотношении его толщины и радиального расстояния H/r (*aspect ratio*) данный подход позволяет снять ограничения на возможность возникновения гидродинамической турбулентности в чисто кеплеровском течении. Другими словами, в этом случае доминирующими оказываются магнитные (максвелловские) напряжения, а не динамика самого течения. Нельзя также исключить возможности уноса избыточного момента вращения на стадии сжатия, которому способствует магнитное поле, хотя у звезд магнитные поля относительно слабы. В последующем момент количества движения вещества может уноситься звездным ветром и, поскольку сумма момента количества движения плазмы на единицу массы и момента, связанного с магнитными напряжениями, сохраняется постоянной, момент вращения передается поверхности через магнитные напряжения, что приводит к постепенному уменьшению угловой скорости вращения звезды. Однако ни в одной из перечисленных моделей, включая турбулентную конвекцию, пока не удается найти адекватный механизм появления эффективной вязкости, чтобы объяснить перенос углового момента $J_\odot$ в радиальном направлении от центрального сгущения.

Так или иначе, турбулентный и электромагнитный механизмы следует считать наиболее физичными и вероятными для объяснения этого феномена. Действительно, допланетные аккреционные диски обладают значительной вязкостью, что, кстати говоря, приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного «собственного» источника тепловой энергии в них. По современным представлениям, наиболее вероятными причинами вязкости дифференциально-вращающихся дисков являются сдвиговая турбулентность (*Фридман, 1989*; *Горькавый, Фридман, 1994*) и хаотические магнитные поля (*Armitage и др., 2001*), причем энергия последних часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности. Хаотические магнитные поля, тянущиеся вместе с аккрецируемой плазмой, перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению диска и испытывающие пересоединение на границах между хаотическими ячейками, также должны вносить значительный вклад в вязкость во внутренней области диска и во внешних слоях его атмосферы, где достигается достаточная степень ионизации вещества. В свою очередь, крупномасштабные магнитные поля могут играть важную роль как в переносе углового момента, так и в физике аккреции (*Eardley и др., 1978*).

Проблема переноса углового момента легче решается в рамках модели дисковой структуры, образующейся при эволюции тесной двойной звездной системы. Как известно, основным фактором, определяющим отличие ранних этапов эволюции двойных звезд от одиночных, является удельный угловой момент исходного газопылевого облака. Исходя из распределения тесных двойных звезд по угловым моментам было оценено, что примерно у одной трети протозвезд с газопылевыми дисками угловой момент слишком велик для одиночной звезды, но недостаточен для образования тесной двойной системы (*Масевич, Тутуков, 1988*). Это привело к выводу, что планетные системы должны образовываться, в основном, у таких протозвезд, а другая часть образуется в двойных звездных системах при распаде одной из компонент в диск около более массивной компоненты (см. *Protostars and Planets, 2007*).

В численных экспериментах рассматривался сценарий эволюции в зависимости от параметров исходной двойной звезды и было показано, что в зависимости от отношения масс донора и аккретора и степени заполнения ими своих полостей Роша получаются различные конфигурации (*Каретников, Сироткин, 2006*; *Маров и др., 2007*). Были найдены ограничения на диапазон параметров, при которых происходит либо слияние двойной звезды, либо обмен массой, в результате чего образуются либо планетные системы типа солнечной, либо системы с суперпланетами В частности, было показано, что для формирования протосолнечной системы соотношение масс исходной двойной системы должно соотноситься как (0,63/0,47) M_S при значении большой полуоси системы $\sim 6R_S$. Оказалось, что при слиянии двойной звезды формируется протопланетная система с центральной звездой и расширяющимся экскреционным газовым диском или с протяженным газовым рукавом в виде спирали, распадающимся на отдельные облака (конденсации) с массами порядка масс планет-гигантов за время порядка сотен орбитальных периодов исходной двойной системы. Наиболее массивные облака получены на орбитах с большими полуосями в диапазоне 1 а. е. $< a <$ 3 а. е., которые могут уменьшаться за счет приливной диссипации и трения при взаимодействии с диском, обеспечивая условие сохранения углового момента. Независимо в рамках численной модели околозвездного газового аккреционно-декреционного диска было показано, что сохранение углового момента требует развития протяженной декреционной части диска, которая аккумулирует на периферии его «избыточный» момент. Соответственно, аккреция идет в кольцо с радиусом всего в несколько радиусов звезды, а диск расширяется до многих десятков и даже сотен ее радиуса (*Тутуков*, *Павлюченков*, *2004*).

Независимо от того, формируется протопланетный диск у одиночной звезды или в тесной двойной системе, в нем присутствуют сдвиговые течения и поэтому самого пристального внимания заслуживает механизм турбулентного переноса. Более того, представляется достаточно очевидным, что условия возникновения и поддержания сдвиговой турбулентности на различных стадиях эволюции диска необходимо рассматривать, исходя из математического описания двухфазной (газопылевой) среды, обладающей дифференциальной угловой скоростью вращения Ω, различным относительным содержанием пылевых частиц η (так что плотности газа ρ_g и пыли ρ_d связаны соотношением $\rho_d = \eta\rho_g$), их распределением по размерам и с учетом подробно рассматриваемых в гл. 7 процессов коагуляции.

1.3.7. Эволюция космических объектов во Вселенной

Процессы самоорганизации на фоне турбулентного движения относятся к числу важнейших механизмов, формирующих свойства объектов во Вселенной на разных стадиях эволюции. Сюда относятся фундаментальные процессы эволюции материи, возникновение галактик и галактических кластеров, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, формирование аккреционных дисков и планетных систем. Основополагающие представления о последовательности процессов преобразования вещества и развиваемые модели звездно-галактической эволюции являются важнейшим элементом космологии Вселенной (см., например, *Narlikar*, *1993*; *Peebles*, *1993*).

Модели Вселенной

В основу современных представлений о Вселенной положена модель Большого взрыва (*Big Bang*), отголоском которого служит случайно открытое в 1964 г. Пензиасом и Уилсоном фоновое микроволновое (реликтовое) излучение (СМВ), почти равномерно заполняющее пространство (*Penzias*, *Wilson*, *1965*). Ключевым для астрофизики, космологии, физики элементарных частиц является вопрос о том, каков основной состав Вселенной. Видимое вещество — звезды наблюдаются благодаря световой эмиссии слагающей их обычной барионной материи. С другой стороны, определение гравитирующей массы галактик и галактических кластеров по их динамическим свойствам обнаружило наличие громадной невидимой массы — темной материи (CDM). Этот термин был предложен Фрицем Цвики еще в 1933 г., но изучение этого феномена началось значительно позднее (*Trimble, 1987*; *EAA, 2001*). Определенным доказательством существования CDM стало обнаружение анизотропии температуы и флуктуаций фонового микроволнового излучения (*«ripples in space»*) на спутнике COBE (*Cosmic Background Explorer*) в 1992 г. (*Mather и др., 1999*; *Мазер, 2006*). Эти измерения прежде всего убедительно продемонстрировали справедливость теории Большого взрыва, представив изображение новорожденной Вселенной, находившейся в близком к идеальному состоянии термодинамического равновесия, и открыли первичные возмущения плотности, образовавшие впоследствии ее крупномасштабную структуру. Одновременно они подтвердили теоретически предсказанную величину анизотропии излучения в пределах всего лишь фактора 2, чему соответствует модель однородной и плоской Вселенной (*Holtzman, 1989*; *Holtzman, Primack, 1993*; *Liddle, Rand, 1993*; *Zuckerman, Becklin, 1993*; *Dalal, Kochanek, 2002*). Новым важным шагом стал запуск в 2001 г. космического зонда микроволновой спектроскопии WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), позволившего получить карты CMB с чувствительностью и угловым разрешением, почти на два порядка выше, чем на COBE. На основе этих измерений сделаны высокоточные оценки плотности темной материи, темной энергии и возраста Вселенной, который принят сейчас равным 13,7 млрд лет (*Fixsen, Mather, 2002*; *Смут, 2007*). Наблюдаемые барионные осцилляции (рис. Ц.33), возможно, представляют собой отпечаток акустических волн в ранней Вселенной (см. *Смут, 2007*), с чем связана возможность дальнейшего уточнения относительных содержаний наблюдаемой и темной материи.

Ограничения, накладываемые на физические свойства CDM, не отвечают представлениям о барионной категории элементарных частиц как главной составляющей вещества и приводят к выводу, что массивные галактики гравитационно удерживаются иной, небарионной, формой материи. Эту роль могли бы в принципе выполнять слабо взаимодействующие нейтрино, имеющие массу порядка нескольких электрон-вольт, которые называют «горячей темной материей» (HDM), что, однако, не нашло подтверждения. Тем не менее были предложены модели, согласно которым Вселенная состоит из совокупности холодной и горячей материи и в их основу была положена CHDM теория (*Klypin и др., 1993*; *Primack и др., 1995*; *Primack, Gross, 2001*; *Elgaroy и др., 2002*).

Согласно современной модели Вселенной, холодная темная материя составляет около 25% от ее критической плотности. Содержание наблюдаемой материи не превышает 4,4 ± 0,4%, что согласуется с оценками, отвечающими модели первичного нуклеосинтеза. В рамках стандартной модели этому значению соответствует отношение нескольких миллиардов фотонов, заполняющих Вселенную (в виде, главным образом, CMB) на один нуклон. Остальная

Вселенная заполнена энергией вакуума, как это, в частности, следует из анализа характера кластеризации $\sim 250\,000$ галактик и наблюдений сверхновых. В форме плотности энергии вакуума находится $\sim 70\%$ материи, с которой связывают открытое космическое ускорение Вселенной и чему отвечает значение введенной А. Эйнштейном космологической константы Λ (позднее им же ошибочно отвергнутой). Это, в свою очередь, подкрепляет упомянутое выше представление о том, что Вселенная имеет пространственно плоскую геометрию, которой соответствует практически нулевая (на уровне $< 10^{-41}$) кривизна пространства, на что независимо указывает также факт близости средней плотности Вселенной (в пределах одного порядка величины) к критической плотности. Выдвинуто предположение о том, что в уравнении баланса массы правильное значение члена Λ могло бы уравновесить производимую им отрицательную пространственную кривизну с положительной кривизной, создаваемой обычным и темным веществом (*Мазер, 2007*). Модельный состав Вселенной показан на схеме (рис. Ц.34).

В состав галактик — островов вещества в преимущественно «пустом» пространстве — входят триллионы звезд различных возрастов, масс, светимостей и химического состава, находящихся на разных стадиях эволюции и представляющих собой основное состояние материи видимой Вселенной (рис. Ц.35, Ц.36). Сами галактики, относительные скорости которых достигают ~ 1000 км/с, образуют галактические скопления (кластеры) и мегакластеры (рис. Ц.37), разделенные «пустотами» (*voids*), в узлах между которыми находятся скопления галактик (рис. Ц.38). Темная материя, возможно, входит в состав только очень крупных галактик с массой, превышающей $\sim 10^{10} M_S$. Это следует из факта, что до этого предела спектр масс галактик $dN \approx dM/M^n$ имеет показатель степени $n = 1$ (т. е. нет избранной массы), а после него $n = 2-5$, что может быть обусловлено межгалактическими столкновениями. Галактики и их скопления являются замечательными примерами упорядоченностей, образующихся вследствие процессов самоорганизации в хаотической турбулизованной межгалактической среде, в которой темная материя выполняет структурообразующие функции. По существу, речь идет о существовании во Вселенной генератора устойчивых структур, возникающих из хаоса структурированных элементов. Иллюстрацией сказанного служит, например, показанная в численных экспериментах возможность возникновения сверхмассивной CD-галактики в центре типичного скопления с массой около процента от массы скопления (*Тутуков и др., 2007*).

Исходя из существующей космологической парадигмы, подкрепленной результатами COBE и WMAP, галактические структуры возникли вследствие малых флуктуаций плотности вскоре после Большого взрыва и в дальнейшем были усилены гравитацией, хотя физическая природа этих флуктуаций остается до конца неясной. Согласно инфляционной модели, они генерировались уже на стадии экспоненциального расширения и суперохлаждения в самые первые мгновения после Большого взрыва (между 10^{-34} и 10^{-32} с после начала отсчета времени), когда температура достигала $\sim 10^{12}$ Гэв и из начальной объединенной силы возникли сильное и электро-слабое взаимодействия. При этом выделилась громадная энергия вакуума, содержавшаяся в скалярном поле пространства-времени. В момент «фазового изменения» состояния хаотической ранней Вселенной из первичной горячей плазмы образовались первые нейтральные атомы водорода, СМВ и предположительно возникла также холодная темная материя с преобладающей массовой плотностью (*Kolb, Turner, 1990*; *Borner, 1993*). Последовательность процессов схематически показана на рис. Ц.39.

Галактики, вероятно, образовывались внутри темной материи вследствие объединения гало субгалактических масс, коллапса самогравитирующих объектов при развитии гравитационной неустойчивости, которая усилила квантовые флуктуации, возникшие еще в самую раннюю инфляционную эпоху. Этот процесс, очевидно, происходил при участии внутренних источников энерговыделения за счет диссипативных газодинамических процессов, нагрева ударными волнами при взрыве сверхновых и аккреции сверхмассивных черных дыр (*Binney, Merrifield, 1998*; *Смут, 2007*; *Mayer и др., 2008*). В дальнейшем протогалактики росли, аккрецируя на себя меньшие сгустки и/или объединяясь с гало сопоставимых размеров. На этой стадии должно было происходить мощное радиационное охлаждение газа, сопровождаемое рентгеновской эмиссией, рекомбинацией и столкновительным возбуждением эмиссионных линий (*White и др., Rees, 1983*). К этому же периоду следует, по-видимому, отнести перераспределение углового момента системы, образование газового галактического диска и начало звездообразования. Заметим, что образование галактик и галактических кластеров в расширяющейся Вселенной, подчиняющееся современной теории гравитации и эйнштейновской общей теории относительности, можно связать с наличием гауссовых адиабатических флуктуаций метрики в инфляционной модели, чему также не противоречат наблюдения фонового микроволнового излучения.

Концепция самоорганизации, от момента вариаций плотности и вихревых движений в первичной плазме до завершения рекомбинации с образованием плотных облаков нейтрального газа, появлением ударных волн, вихрей и турбулентности в сжатом газе, возникновением галактик и звезд, так или иначе затрагивалась в разных моделях ранней эволюции горячей Вселенной. Например, согласно одной из них, представляющей сейчас лишь исторический интерес, расширяющаяся Вселенная уже на самых ранних стадиях обладала анизотропией и динамической структурированностью, в которой присутствовала заметная вихревая составляющая, а роль турбулентности была определяющей (*Озерной и Чибисов, 1970*; *Озерной, 1976*). Такая догалактическая, или космологическая, турбулентность, которая получила название фотонной, должна вызывать возмущения плотности, которые затем усиливаются за счет гравитационной неустойчивости, что приводит к процессам самоорганизации с образованием протогалактик. К сожалению, вихревая теория встретилась с рядом трудностей и не получила дальнейшего развития.

Другим примером служит адиабатическая теория образования галактик, в которой турбулентность возникает естественным путем и играет важную роль в «гидродинамике» галактического и межгалактического газа (*Sunyaev, Zeidovich, 1972*; *Дорошкевич и др., 1976*). Последовательность процессов включает в себя возникновение плотных уплощенных облаков газа, для которого характерна анизотропия возмущений тензора деформации за счет действия приливных сил, адиабатическое сжатие газа в малой окрестности некоторой точки при его движении вдоль одного из направлений и последующая аккреция основной массы вещества на уже сжатый газ. В результате возникает своеобразное распределение вещества в формирующемся диске, с острым максимумом плотности в центре, быстро спадающим к периферии. Совокупностью процессов, протекающих в сжатом в «блин» веществе определяется дальнейшая эволюция сжатого вещества в галактики и звезды. Модель блина предполагает наличие в нем мощных вихревых движений и турбулизации как горячего, так и остывающего газа. В горячем газе они поддерживаются потоком вихревой скорости через фронт ударной волны, а при остывании газа — тепловой неустойчивостью и неоднородностью плотности, что приводит к распаду блина на отдельные облака. Согласно этим представлениям, турбулентные движения, особенно в его внешних областях, оказывают сильное влияние на параметры образующихся галактик, а само образование галактик можно рассматривать как процесс самоорганизации в турбулентной среде при эволюции такой динамической системы. Заметим, что образование плоских структур — блинов со шкалой суперкластеров (окружающих квазисферические пустые пространства, *voids*), которые затем фрагментируют в галактики, предполагалось также, исходя из HDM модели преобладания во Вселенной нейтрино, обладающего массой, с гауссовыми первичными флуктуациями. Эта модель не получила, однако, подкрепления, уступив свои позиции модели холодной темной материи (*Silk и др.*, *1983*; *White и др.*, *1983*; *Gawiser*, *Silk*, *1998*).

Образование и эволюция звезд

Звезды, проходящие последовательные циклы эволюции от рождения до смерти (*Шкловский*, *1987*), являются основными доступными для наблюдения астрофизическими объектами. В процессах звездной эволюции наблюдается вполне определенная упорядоченность, в частности, в рождении звезд различных масс в Галактике, в первом приближении отвечающая начальной функции масс (IMF), а ее наклон в области аккрецирующих массивных звезд — известной функции Салпитера (см. *Salpeter*, *1955*; *Andersen*, *1991*; *Bonnell и др.*, *2007*).

Очаги звездообразования генетически связаны с массивным, сравнительно плоским галактическим диском, в плоскости симметрии которого концентрируется видимое вещество, представляющее собой смесь газа и пыли с неоднородным распределением плотности. Такая многофазная многокомпонентная среда характерна для массивных холодных плотных облаков, находящихся в процессе гравитационного сжатия и являющихся, по-видимому, ранней стадией формирования звездных скоплений и ассоциаций. В дисковых галактиках звездообразование активно происходит в OB-ассоциациях с массой $\sim 10^7 M_S$ и с размерами порядка толщины газового диска, так что в процессе коллапса около 90% скопления распадается на звезды массой $\sim 10^3 M_S$ (*Пикельнер*, *Каплан*, *1976*; *Kippenhahn*, *Weigert*, *1990*; *Hansen*, *Kawaler*, *1994*).

Из этой среды при достижении некоторой критической плотности вследствие гравитационной неустойчивости возникают газовые конденсации, сопровождаемые сжатием и интенсивным тепловыделением вследствие перехода потенциальной энергии в кинетическую, а также передачей момента количества движения от образующегося сгущения периферийным областям. При достижении в недрах протозвезды температуры в несколько миллионов градусов начинается процесс термоядерного синтеза, и силы тяготения уравновешиваются внутренним давлением газа (гравитационное равновесие), в результате чего сжатие прекращается, и звезда занимает определенное положение на диаграмме Герцшпрунга—Рассела, зависящее от соотношения массы-светимости, где она находится вплоть до исчерпания запасов ядерного горючего (см., например, *Chiosi и др., 1992*). Энерговыделение вследствие ядерных реакций в центральной области звезды сопровождается лучистым и конвективным теплопереносом, что приводит к активному перемешиванию вещества недр (звезды малых масс целиком конвективные).

Из теории звездной эволюции следует, что после завершения выгорания водорода звезда с массой $M \leqslant 8M_S$, где M_S — масса Солнца, сходит с главной последовательности, превращаясь вначале в красный гигант, а затем эволюционирует в состояние белого (вырожденного) карлика. Неявно существование такого объекта было предсказано еще в 1844 г. Бесселем, который по наблюдениям нерегулярностей в собственном движении Сириуса предположил, что у него есть невидимый компаньон примерно солнечной массы (см. *EAA, 2001*). Как показали более поздние наблюдения, им оказался белый карлик Сириус B, а само название таким вырожденным звездам было дано Фаулером (*Fowler, 1926*).

Белые карлики представляют собой наиболее характерную форму заключительной стадии эволюции большей части звездного населения (до 95% звезд нашей Галактики), начальная масса которых лежит в диапазоне (0,08—8) M_S. Нижний порог отвечает условию начала классической водородно-гелиевой термоядерной реакции, когда звезда находится в тепловом равновесии. Для звезды типа Солнца это так называемая цепочка PP, которая предшествует C—N—O циклу горения следующих за водородом и гелием оболочек для более массивных звезд. Соответственно, конечной стадией одиночных и компаньонов широких двойных (с $a \geqslant 300R_S$) звезд с $M \leqslant 8M_S$ являются углеродно-кислородные белые карлики, а конечной стадией компаньонов тесных двойных систем (с $a \leqslant 300R_S$) и массой $M \sim 2{,}5M_S$ — вырожденные гелиевые белые карлики. Их следует отличать от коричневых карликов — квазизвезд массой $0{,}01M_S < M < 0{,}08M_S$, температура в недрах которых недостаточна для возбуждения PP цикла, и они занимают поэтому промежуточное положение между маломассивными звездами и планетами (*Basri, 2000*; *Luhman и др., 2007*; *Whitworth и др., 2007*).

Заметим, что у части белых карликов заключительная фаза эволюции может сопровождаться взрывом новой, что обусловлено аккрецией на ядро водородной оболочки, в которой резко возрастает температура и происходит нестабильное горение водорода в коротком C—N—O цикле в условиях частичного вырождения электронов. Конечная масса большинства белых карликов, определяемая «крутизной» салпитеровского спектра $M_{WO} \approx 0{,}6M^{0{,}4}$, составляет примерно $0{,}6M_S$, а размер порядка размера планеты земной группы, благодаря чему они обладают большой средней плотностью. Эффективные температуры лежат в широком диапазоне от 150 000 K до 4 000 K. Холодные вырожденные карлики противостоят гравитационному сжатию благодаря высокой плотности вырожденного газа свободных электронов, сохраняющих кинетическую энергию даже вблизи абсолютного нуля. С ростом плотности амплитуда движений и степень вырождения возрастают, что препятствует коллапсу такой звезды на завершающем этапе эволюции.

Более массивные звезды с $8M_S \leqslant M \leqslant 100M_S$ проходят все последовательные циклы выгорания водорода, гелия и более тяжелых элементов вплоть до образования железа. Сжатие звезды после формирования железного ядра уже не может быть остановлено выделением энергии за счет термоядерных реакций в ее центральной части. Энергия сжатия расходуется на развал ядер железа, вплоть до образования нейтронного ядра, и давление в центре определяется вырождением электронного газа, а плотность — газом атомных остатков. Согласно представлениям статистической физики, максимальная масса, которая может удерживаться холодными электронами, равна предельной массе Чандрасекара $M = 5{,}75M_S/\mu_e$, где μ_e — число нуклонов, приходящихся на один электрон (см., например, *Бете*, *1966*).

В отличие от маломассивных звезд, звезды с $M \geqslant 8M_S$ в конце своей жизни сбрасывают внешние оболочки (взрываются), что наблюдается как вспышки сверхновых, когда выделяемая суммарная гравитационная и кинетическая энергия (главным образом, в виде нейтрино) достигает 10^{53} эрг/с. От этого громадного энерговыделения видимое излучение составляет около 1%. Данное явление можно описать в рамках теории сильного взрыва, а его распространение по межзвездному газу — как детонационную волну (*Седов*, *1965*; *Зельдович и Райзер*, *1966*; *Зельдович*, *1983*). При этом различают сверхновые двух типов, для которых пороговое значение массы составляет (30—40) M_S. Звезды с массой ниже этого предела эволюционируют обычным образом и после фазы взрыва сверхновой светят как красные сверхгиганты, находясь на соответствующей ветви диаграммы Герцшпрунга—Рассела. Более массивные объекты с $M \geqslant 10M_S$ полностью теряют водородную оболочку, а взрыв сверхновой сопровождается коллапсом ядра, после чего остается сверхмассивный компакт в виде нейтронной звезды (пульсара) или (при $M \geqslant 30M_S$) черной дыры (см., например, *Масевич*, *Тутуков*, *1988*; *Lyne*, *Graham-Smith*, *1998*). Плотность внутри нейтронной звезды, состоящей преимущественно из нейтронов с несколькими процентами протонов и электронов, соответствует плотности ядерной упаковки, достигая $\rho_0 = 2{,}8 \cdot 10^{14}$ г см$^{-3}$ при радиусе $R \simeq 10$—15 км. В ядрах CD-галактик образуются сверхмассивные черные дыры (квазары), аккрецирующие галактический газ и выделяющие огромное количество гравитационной энергии.

От массы звезды принципиально зависят конфигурации, образующиеся на завершающей стадии эволюции. Маломассивные звезды, при сравнительно медленном истечении вещества из красных гигантов, оставляют на стадии перехода к белому карлику планетарные туманности, имеющие самые разнообразные, но достаточно упорядоченные формы (рис. Ц.40, Ц.41). Они содержат сильно турбулизованный газ и можно думать, что эти формы были приобретены в процессе самоорганизации вещества туманности. Частично такая упорядоченность, в том числе ярко выраженная цилиндрическая симметрия, может быть обусловлена наличием у звезды близкого спутника и совместной эволюцией их оболочек При вспышках сверхновых также возникают чрезвычайно сложные конфигурации, вызываемые процессами взаимодействия расширяющегося газа с межзвездной средой, в которых на фоне хаотизации можно выделить определенные упорядоченности. В зависимости от обогащенности межзвездной галактической среды тяжелыми элементами, рождающимися в процессах нуклеосинтеза в недрах звезд и при вспышках сверхновых (*Alpher и др., 1948*), различают условия формирования звезд первого и последующих поколений, чем обусловлена, в частности, степень металлизации (отношение к водороду более тяжелых элементов) звездного вещества и вероятность образования планетной системы.

Самоорганизация во Вселенной

Как уже отмечалось, моделирование структуры и эволюции галактик и всей Вселенной тесно связано с изучением природы реликтового излучения, равномерно и почти изотропно заполняющего Вселенную. Его обнаружение послужило основным толчком к разработке стандартной теории Большого взрыва, согласно которой на постинфляционной стадии Вселенная представляла собой чрезвычайно плотную горячую плазму в состоянии полного термодинамического равновесия с планковским спектром излучения. Ее постепенное охлаждение в ходе расширения от момента сингулярности отвечает в современную эпоху идеальному чернотельному спектру с температурой $T = 2,725 \pm 0,001$ К. Измеренные относительно небольшие пространственные вариации интенсивности реликтового излучения на уровне $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ К, или $\Delta T \sim 30$ мкК на угловых масштабах $> 7°$ (*Smoot др., 1992*; *Массер, 2006*) можно, как уже говорилось, связать с относительно небольшими вариациями плотности соседних областей, что привело в конечном итоге к образованию гигантских галактических скоплений вследствие гравитационной неустойчивости. Таковы были, вероятно, процессы начальной самоорганизации на фоне хаотической структуры первичного атомного вещества, образовавшегося вскоре после Большого взрыва.

Так или иначе, привлечение представлений о динамической эволюции нелинейных диссипативных систем может помочь в поиске ответов на фундаментальные вопросы о происхождении галактик и галактических скоплений, а также о природе темной материи и темной энергии. С решением этих проблем, берущих свое начало в упоминавшейся выше инфляционной модели с последующим постепенным упорядочением материи из первоначально хаотически заполнявшего космос излучения, связано развитие представлений о топологии Вселенной. Сюда же примыкает попытка объединения современных представлений о природе элементарных частиц и действующих сил, исходя из теории суперструн в десятимерной конфигурации пространства-времени, шесть из которых скрыты в недрах Вселенной (см., например, *Грин*, *2004*). В контексте супергравитации и космических струн, простирающихся через огромные области пространства, предпринимаются попытки усовершенствовать сценарии инфляционной Вселенной, привлекая модели расширенной, топологической, гибридной и других типов инфляции, в основе которых лежат одни и те же физические принципы и исходная хаотическая инфляционная модель, а выбор между различными сценариями с постулируемыми уникальными свойствами может быть, очевидно, сделан только на основе чрезвычайно сложных и тонких экспериментов (*Linde*, *1990*; *1994*). Изменения на спутнике WMAP позволили получить подтверждения предсказаний инфляционной теории и дополнительные аргументы в пользу почти плоской модели Вселенной с приведенными выше отношениями барионной материи, темного вещества и темной энергии. Дальнейшие прецезионные измерения углового степенного спектра температурных флуктуаций фонового микроволнового излучения и поляризации, индуцированной гравитационными волнами от момента Большого взрыва, призваны ответить на ключевой вопрос о природе различий между барионным составом Вселенной и ее динамической массовой плотностью и дать подход к возможности отождествления частиц или объектов экзотической холодной темной материи.

В заключение отметим, что, в дополнение к данным COBE и WMAP, теория Большого взрыва получила дополнительное подкрепление в связи с открытием в 1998 г. факта ускорения расширения Вселенной. Как мы уже подчеркивали ранее, этот факт согласуется с введенной Эйнштейном космологической постоянной Λ и может быть отнесен на счет экзотической темной энергии. Но существует и другой важный аспект, к которому мы еще раз хотим привлечь внимание читателя. Согласно, например, (*Массер*, *2006*), «Правильнее всего представлять Большой взрыв не как единичное событие, а как продолжающийся процесс постепенного формирования порядка из хаоса». Другими словами, эволюция Вселенной — это непрерывный процесс самоорганизации, приведший к ее современной наблюдаемой структуре с множеством галактик и галактических скоплений. Если же исходить из представлений современной космологии о существовании параллельных вселенных, как малых частях многоуровневой «сверхвселенной» переходы между которыми осуществляются путем «Кротовых нор» (см., напр., *Тегмарк*, *2006*; *Новиков и др.*, *2006*), то можно рассматривать постулируемые теорией исходные квантовые флуктуации и зарождение постинфляционных доменов (с различной размерностью пространства-времени и иными физическими константами) как всеобщую парадигму бесконечного процесса упорядочения бесконечного числа изначально хаотических структур, заполненных полями и веществом. Здесь мы выходим, однако, далеко за пределы тех менее абстрактных проблем, которым посвящена монография.

Глава 2

Основы математического моделирования реагирующих смесей газов

Эта вводная глава, посвященная формулировке общих законов баланса массы, количества движения и энергии в многокомпонентной химически активной газовой смеси, служит подготовительной для более подробных рассмотрений турбулентности, представленных в последующих разделах книги, в которых даются ссылки на эту главу. Характерными представителями природных сред такого рода служат, например, внешние газовые оболочки небесных тел (планет, комет), отличительными особенностями которых является многокомпонентность или многофазность состава и непосредственное воздействие солнечного электромагнитного и корпускулярного излучения, под влиянием которого происходят разнообразные фотохимические и химические реакции. Как уже отмечалось в Предисловии, структура и физико-химические свойства этих сред, лежащих в пограничных областях между атмосферой и космосом и обычно называемых верхней атмосферой, существенно различаются в зависимости от массы небесного тела, его расстояния от Солнца, наличия магнитного поля, условий формирования и эволюции. Возникающие при этом локальные температурные, концентрационные и барические градиенты приводят к развитию разномасштабных гидродинамических движений и процессов тепло- и массопереноса, характер которых до основания термосферы сохраняется турбулентным. При наличии турбулентности проблема моделирования атмосферы приобретает совершенно новые грани, поскольку классические представления о турбулентных движениях в несжимаемой жидкости переплетаются с другими областями механики, которые объединяют многокомпонентную гидродинамику, неравновесную термодинамику и кинетику химических реакций. В дополнение к флуктуациям скорости приобретают существенное значение флуктуации плотности, температуры и концентраций отдельных химических компонентов смеси. В результате мы сталкиваемся с одной из сложнейших проблем механики турбулизованных сред, относящихся к полуэмпирическому моделированию взаимосвязанных гидродинамических, физико-химических и радиационных процессов и явлений в турбулентном течении. В частности, возникающая при этом проблема замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения чрезвычайно усложняется из-за необходимости осреднения сильно нелинейных «источниковых членов» производства (расхода) вещества в химических реакциях (имеющих, как правило, экспоненциальный характер), и моделирования большого числа дополнительных корреляционных моментов, связанных с пульсациями различных термогидродинамических параметров.

§ 2.1. Исходные законы сохранения и балансовые уравнения для регулярного движения газовой смеси

2.1.1. О моделях сплошных сред

Изучение явлений окружающего нас материального мира удобно осуществлять с помощью математических моделей для сред, полей и процессов, которые позволяют осмысливать наблюдения и развивать методы прогнозирования предстоящих событий. Каждая такая модель представляет собой определенную схематизацию изучаемого физического явления, учитывающую не всю полноту свойственных ему факторов, а лишь некоторую их часть, характеризующую явление с той или иной стороны. При этом правдоподобная схематизация зачастую представляет собой трудную задачу, требующую от исследователя немалого опыта, интуиции и глубокого проникновения в сущность методов познания механизмов изучаемого природного явления. Одним из общих методов схематизации движения жидкостей, газов и других деформируемых тел, является метод, основанный на построении новых континуальных моделей среды с усложненными физико-химическими свойствами (*Седов*, *1980*). Схематизация, при которой происходит замена реальной природной среды, состоящей из отдельных молекул, непрерывным континуумом, оказывается весьма удобной для применения мощного математического аппарата непрерывных функций и, как показала практика, в подавляющем большинстве случаев вполне эффективна для изучения множества наблюдаемых природных явлений и процессов.

Существует множество интересных и актуальных задач, которые удается решать в рамках классических моделей сплошных сред, таких как модели движения идеальных или вязких несжимаемых (сжимаемых) жидкостей и газов, модели движения многокомпонентных или гетерогенных смесей, модели движения ионизованных газов и т. п. Нам представляется уместным отметить здесь исключительную роль академика Л. И. Седова, который впервые в нашей стране поставил вопрос о необходимости построения неклассических моделей сплошных сред с усложненными физико-химическими и тепловыми свойствами, которые позволяют дать описание новых механических эффектов и разрешать важные проблемы, возникающие во всевозможных механических приложениях. В частности, им впервые была обоснована фундаментальная роль термодинамических представлений и кинетических закономерностей физики и химии при конструировании моделей континуальной механики для получения определяющих материальных соотношений, которые совместно с основными законами сохранения описывают движение и физико-химические явления и процессы (см. *Седов*, *1962*). Отметим, что в последние три-четыре десятилетия в научной литературе интенсивно разрабатываются новые модели природных сред для описания внешних газовых оболочек небесных тел и окружающего их космического пространства. Такие модели характеризуются дополнительным набором физико-механических параметров, подобных концентрациям различных веществ и фаз в составе химически активной газовзвеси, электромагнитным характеристикам турбулизованной электропроводной среды, параметрам внутренней структуры, тензорам корреляционных величин и т. п.

В связи с построением моделей сплошных сред, возникает проблема получения на единых основаниях фундаментальных уравнений, которые содержали бы в себе как частные случаи соответствующие базовые закономерности, плодотворность которых уже продемонстрирована и доказана в механике, физике и химии при изучении материальных сред и полей. Очевидно, что в качестве фундаментальной основы получения замкнутых систем соответствующих дифференциальных уравнений должны лежать универсальные законы, которые могут служить базой для введения различных гипотез и закономерностей, подлежащих проверке при моделировании разнообразных физических явлений. Как хорошо известно, таким опорным базисом при теоретическом построении моделей сплошных сред служат универсальные законы механики о сохранении массы, количества движения и момента количества движения, универсальные законы термодинамики о сохранении энергии (первый закон термодинамики), об изменении или сохранении энтропии (второй закон термодинамики), законы химической кинетики и т. п.

Важно особо отметить, что законы неравновесной термодинамики при моделировании новых континуальных моделей играют первостепенную роль, поскольку используются также для установления определяющих материальных соотношений, выражающих специфические свойства конкретной сплошной среды. Современная неравновесная термодинамика включает в себя несколько относительно новых направлений, таких как теории с внутренними переменными (*Пригожин, Кондепуди, 2002*), новые формулировки рациональной термодинамики (*Трусделл, 1984*), теории, включающие флуктуации или основанные на кинетической теории газов (*Кайзер, 1990*), теория информации или нелинейные динамические системы (*Анищенко и др., 2003*). Все подобного рода научные направления опираются на общую идею, согласно которой модели механики сплошной среды и сопряженную им неравновесную термодинамику необходимо разрабатывать параллельно в близком соотнесении между собой. Они предполагают, что используемая модифицированная термодинамика заранее определяется гипотезой о локальном термодинамическом равновесии, но может отличаться от другой в зависимости от выбранных базисных параметров состояния, определения энтропии и потока энтропии, интерпретации второго закона и т. п.

Вместе с тем, в последнее десятилетие широкое распространение получила так называемая расширенная необратимая термодинамика, выходящая за пределы гипотезы о локальном равновесии за счет модификации таких базовых и концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление или химический потенциал (см. *Жоу, Касас-Баскес, Лебон, 2006*). Эта теория вводит в рассмотрение в качестве дополнительных независимых переменных диссипативные термодинамические потоки (типа потока тепла, диффузии или тензора вязких напряжений), фигурирующие в уравнениях баланса массы, импульса и энергии. Это позволяет разработать формализм для получения как определяющих соотношений для классических переменных, задаваемых обычными законами баланса, так и для нахождения соответствующих эволюционных уравнений (совместимых со вторым законом термодинамики) для диссипативных потоков, описывающих реакцию системы на воздействие высокочастотных (коротковолновых) возмущений — путем введения функций «памяти» и обобщенных коэффициентов переноса, зависящих от частоты и волнового вектора. Таким образом, среди определяющих соотношений могут быть как связи между равновесными параметрами состояния, различные уравнения состояния среды, так и соотношения между параметрами, описывающими процесс — кинетические материальные соотношения, например, эволюционные уравнения, связывающие между собой тензор напряжений и тензор скоростей деформации в вязкой жидкости. Использование подобного рода материальных соотношений позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений, характеризующих модель материальной среды, а в совокупности с граничными и начальными условиями — конкретную математическую задачу в рамках данной модели.

Одним из важнейших вопросов моделирования физического явления является выбор определяющих (структурных) параметров модели, которые должны рассматриваться как независимые аргументы, изменяющиеся в некоторых пределах при рассмотрении полной совокупности всех возможных состояний и процессов в среде, для которой строится модель (*Седов, 1962*). Определяющие параметры могут быть скалярами и тензорами (задающими, например, соответствующие группы симметрии элементарных частиц сплошной среды), размерными и безразмерными величинами, постоянными и переменными, но в любом случае они должны быть инвариантными относительно выбора системы координат и единиц измерений. Появление разнообразных структурных параметров механической или физико-химической природы связано с количественным описанием имеющих в изучаемых явлениях существенное значение механизмов обмена энергии, диссипации энергии и других взаимодействий между частицами внутри материальных тел. Так, в случае стохастического турбулизованного движения в качестве такого рода характеристик необходимо дополнительно вводить в рассмотрение различные скалярные и тензорные корреляционные величины. Возникает вопрос — как выявить систему определяющих параметров? Это можно сделать, если, например, иметь адекватную математическую схематизацию изучаемого явления или процесса. Обычно, если замкнутая система уравнений написана, то пространство базисных независимых переменных легко выделить и перечислить. Если уравнения системы дифференциальные и их число ограничено, то для бесконечно малой жидкой частицы число определяющих параметров может быть небольшим и, уж во всяком случае, конечным.

В этой и последующих главах книги упор делается на постановках задач и конструировании континуальных эволюционных моделей природных и космических сред. Их базисом служат модели движений многокомпонентных или гетерогенных систем с учетом диффузии, теплопередачи и вязкости, процессов излучения, химических и фазовых превращений, модели различного рода турбулентных движений химически активных газов и газовзвесей, модели структурированных турбулентных течений однородной жидкости, модели турбулизованных электропроводных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем и т. п.

2.1.2. Общее уравнение баланса

Конкретизируем теперь сделанные выше общие замечания на примере математического моделирования регулярных движений газовой N-компонентной смеси, которую будем далее рассматривать как один континуум с усложненными физико-химическими свойствами. Дополнительные усложнения, связанные с влиянием электромагнитного поля не учитываются, поскольку в этой главе рассматриваются газовые смеси незаряженных частиц. В отличие от гидродинамики одножидкостного континуума, смесь будем охарактеризовывать рядом дополнительных параметров, определяющих ее химический состав. К переменным состояния смеси будем относить среднемассовую плотность $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, гидродинамическую скорость $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, термодинамическое давление $p(\boldsymbol{r}, t)$, температуру $T(\boldsymbol{r}, t)$ и концентрации $n_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ отдельных химических компонентов. Далее параметрам системы, относящимся к различным компонентам смеси, будем присваивать нижние индексы, в качестве которых используются буквы греческого алфавита α, β, ... ($\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, N$). Переменные состояния будем считать непрерывными функциями времени t и пространственных (эйлеровых) координат $\boldsymbol{r}$ в системе координат, неподвижной относительно рассматриваемого космического объекта (здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор с компонентами x_1, x_2, x_3).

Как известно (см., например, *де Гроот*, *Мазур*, *1964*), в основе гидродинамической модели реагирующей смеси лежат дифференциальные уравнения в частных производных (являющиеся следствием интегральных законов сохранения) и определяющие соотношения для потоков диффузии, тепла и тензора вязких напряжений. Эти уравнения должны быть дополнены соответствующими уравнениями химической кинетики, уравнениями состояния для давления (термическое уравнение состояния) и внутренней энергии (калорическое уравнение состояния). Кроме этого, необходимо знание алгебраических выражений для всевозможных термодинамических функций (таких как внутренняя энергия, энтропия, или теплоемкость среды), формул для различных коэффициентов молекулярного переноса и формул для коэффициентов скоростей химических реакций. Дифференциальные уравнения движения требуют задания начальных и граничных условий, которые, описывая геометрию рассматриваемой термогидродинамической системы (материальный объект, имеющий четко заданные границы) и обмен массой, импульсом и энергией с внешней средой, должны быть сформулированы *ad hoc* для каждой конкретной гидродинамической задачи.

Рассмотрим сначала общий вид уравнения баланса для различных термогидродинамических параметров, характеризующих состояние смеси и ее динамику (например, массы, количества движения, внутренней энергии и пр.). Локальное изменение какой-либо полевой величины $\Lambda = \int\limits_W (\mathscr{A}\rho)\, dW$ за единицу времени

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_W (\mathscr{A}\rho)\, dW = \int\limits_W \frac{\partial}{\partial t} (\mathscr{A}\rho)\, dW$$

равно разности между скоростью образования $\int\limits_W \sigma_{(\mathscr{A})}\, dW$ величины Λ в не меняющем своего положения (в системе координат x_1, x_2, x_3) объеме жидкости W и скоростью оттока $\oint\limits_{\partial W} (\boldsymbol{J}'_{(\mathscr{A})} \cdot \boldsymbol{n})\, d\boldsymbol{\Sigma}$ этой величины через поверхность ∂W, ограничивающую объем W. Здесь $\partial(..)/\partial t$ — локальная производная Эйлера по времени; $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ — удельное значение экстенсивного параметра Λ; $\sigma_{(\mathscr{A})}(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность внутреннего источника признака $\mathscr{A}$ (скорость производства (> 0), или уничтожения (< 0) величины $\mathscr{A}$ в единице объема); $\boldsymbol{J}'_{(\mathscr{A})}(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность молекулярного потока признака $\mathscr{A}$ (равная сумме всех видов переноса $\mathscr{A}$ через единичную поверхность), включающая конвективную часть $(\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u})$ и кондуктивный субстанциональный поток $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}$, определяющий поверхностные воздействия рассматриваемой системы на интегральную величину Λ $(\boldsymbol{J}'_{(\mathscr{A})} \equiv \rho\mathscr{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})})$; $\boldsymbol{n}$ — нормальный единичный вектор с внешней стороны поверхности ∂W, ограничивающей объем жидкости W, а $d\boldsymbol{\Sigma}$ — величина площадки на ∂W. Таким образом, интегральная форма уравнения баланса (сохранения) величины Λ имеет вид

$$\int\limits_W \frac{\partial}{\partial t} (\mathscr{A}\rho)\, dW = \int\limits_W \sigma_{(\mathscr{A})}\, dW - \oint\limits_{\partial W} ((\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n})\, d\boldsymbol{\Sigma} - \oint\limits_{\partial W} (\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})} \cdot \boldsymbol{n})\, d\boldsymbol{\Sigma} =$$

$$= \int\limits_W \left\{ \sigma_{(\mathscr{A})} - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})} \right) \right\} dW,$$

где второе равенство в правой части записано с учетом теоремы Гаусса—Остроградского (здесь символ $\partial(..)/\partial \boldsymbol{r}$ обозначает набла-оператор). Поскольку это уравнение справедливо для любого объема W, покоящегося относительно системы координат x_1, x_2, x_3, то (в случае если подынтегральные выражения являются непрерывными функциями координат) интегральному уравнению баланса можно придать дифференциальную (локальную) форму

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\mathscr{A}) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u}) \right) = -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})} \right) + \sigma_{(\mathscr{A})}. \tag{2.1.1}$$

Если в этом уравнении характеристика $\mathscr{A}$ является векторной или тензорной величиной, то поток $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}$ представляет собой тензор на один порядок выше, а скорость образования $\sigma_{(\mathscr{A})}$ имеет тот же тензорный ранг, что и параметр $\mathscr{A}$.

Следует отметить, что величины $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}$ и $\sigma_{(\mathscr{A})}$ определяются, вообще говоря, не однозначно, поскольку их замена на $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})} + \boldsymbol{K}$ и $\sigma_{(\mathscr{A})} + ((\partial/\partial \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{K})$ соответственно не изменяет уравнения баланса (2.1.1). Однако когда выбор потока $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}$ окончательно произведен, источник $\sigma_{(\mathscr{A})}$ определяется однозначно. При выборе конкретного выражения для потока $J_{(\mathscr{A})}$ следует учитывать физический смысл величины Λ.

Отметим также, что если область жидкости W содержит некоторую поверхность сильного разрыва G такую, что все подынтегральные функции в поверхностных интегралах по δW при стягивании δW к G имеют конечные значения (различные на разных сторонах G), то с помощью интегрального уравнения баланса можно получить универсальные динамические и термодинамические условия на сильных разрывах для материальных сред

$$-[(\mathscr{A}\rho\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}]+[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})})]=\sigma^{G}_{(\mathscr{A})}.$$

Здесь прямые скобки означают скачок какой-либо характеристики $\mathscr{A}$ на разрыве, а величина $\sigma^{G}_{(\mathscr{A})}$ является поверхностной плотностью распределения интенсивности производства признака $\mathscr{A}$ на G (очевидно, что для сохраняющихся величин $\sigma^{G}_{(\mathscr{A})}=0$).

Проанализируем теперь в (2.1.1) последовательно случаи различных параметров $\mathscr{A}$, описывающих регулярное движение смеси реагирующих газов.

2.1.3. Уравнения баланса массы реагирующей смеси газов

Классическим примером уравнения баланса (2.1.1) является уравнение неразрывности жидкости

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\rho\boldsymbol{u}\right)\equiv-\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}),\tag{2.1.2}$$

отражающее факт сохранения полной массы смеси в произвольной внутренней точке среды при ее движении. В этом случае $\mathscr{A}\equiv 1$, $\Lambda\equiv M=\int\limits_W \rho\,dW$, $\boldsymbol{J}_{(M)}\equiv 0$, $\sigma_{(M)}\equiv 0$. Для многокомпонентной среды массовая плотность $\rho(\boldsymbol{r},t)$ и общая гидродинамическая скорость течения $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ определяются формулами

$$\rho\equiv\sum_{\alpha=1}^{N}\rho_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha n_\alpha,\qquad \rho\boldsymbol{u}\equiv\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha n_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha,\tag{2.1.3}$$

где $n_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, $\rho_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ и m_α — соответственно числовая плотность на единицу объема смеси, массовая плотность, гидродинамическая скорость и молекулярная масса частиц сорта α.

Далее будем использовать операторное соотношение

$$\rho\frac{d\mathscr{A}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathscr{A})+\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u})\right),\tag{2.1.4}$$

дающее связь между субстанциональным и локальным изменениями характеристики $\mathscr{A}$, и позволяющее записать дифференциальное уравнение баланса (2.1.1) в субстанциональной форме

$$\rho\frac{d\mathscr{A}}{dt}=-\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\right)+\sigma_{(\mathscr{A})}.\tag{2.1.1*}$$

Соотношение (2.1.4) является следствием уравнения неразрывности (2.1.2) и определения субстанциональной (лагранжевой) производной по времени

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \left(\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \mathcal{A}\right), \tag{2.1.5}$$

описывающей скорость изменения $\mathcal{A}$ в сопутствующей системе координат, связанной с элементом среды, движущимся со скоростью $\boldsymbol{u}$. Часто удобно выразить баланс массы (2.1.2) в терминах удельного объема смеси $v(\boldsymbol{r}, t)(\equiv 1/\rho)$. Если положить в (2.1.4) $\mathcal{A} \equiv v$, то получим следующую форму уравнения (2.1.2):

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \operatorname{div} \boldsymbol{u}. \tag{2.1.6}$$

Субстанциональные уравнения балансов для отдельных химических компонентов смеси имеют вид

$$\rho \frac{d}{dt}(Z_\alpha) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho Z_\alpha) + \operatorname{div}(\rho Z_\alpha \boldsymbol{u}) = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_\alpha + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \xi_s, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.1.7}$$

Здесь $Z_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \equiv n_\alpha/\rho$ — удельная (на единицу массы суммарного континуума) числовая плотность α-компоненты; $\boldsymbol{J}_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \equiv n_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u})$ — молекулярный поток диффузии частиц сорта α ($\boldsymbol{J}_\alpha \equiv \boldsymbol{J}_{(Z_\alpha)}$); $\sigma_{(Z_\alpha)} \equiv \sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \xi_s$ — «источниковый член», представляющий собой интенсивность производства частиц (атомов и молекул) сорта α за счет химических реакций; $\xi_s(\boldsymbol{r}, t)$ — скорость протекания s-й химической реакции ($s = 1, 2, \ldots, r$); $\nu_{\alpha s}$ — стехиометрические коэффициенты вещества сорта α в s-й реакции, которые положительны для продуктов реакции и отрицательны для реагентов. Заметим, что уравнения (2.1.7) линейно зависимы, поскольку справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha Z_\alpha = 1, && (^1) \\ &\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha = 0, && (^2) \\ &\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} \xi_s \left[\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \nu_{\alpha s}\right] = 0, && (^3) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

причем тождества $(2.1.8^{(1,2)})$ являются следствием определений (2.1.3) для массовой плотности ρ и гидродинамической скорости $\boldsymbol{u}$ полного континуума, а соотношение $(2.1.8^{(3)})$ суть следствия закона сохранения массы в химических реакциях, $\sum_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha s} = 0$, ($s = 1, 2, \ldots, r$). В связи с этим, одно из дифференциальных уравнений (2.1.7) всегда можно исключить из рассмотрения, заменив его алгебраическим интегралом $(2.1.8^{(2)})$.

2.1.4. Уравнение движения многокомпонентной газовой смеси

В задачах астро- и геофизики часто приходится иметь дело с относительными движениями газовой среды, изучаемой в системе координат, связанной с вращающейся поверхностью космического тела. Благодаря этому в соответствующих уравнениях движения появляются дополнительные члены, учитывающие силу Кориолиса, а также центростремительное ускорение (зачастую малое по сравнению с ускорением свободного падения), связанные с вращением объекта. Полное уравнение сохранения количества движения для многокомпонентной газовой смеси в субстанциональной форме в этом случае принимает вид

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{u}) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})\right) = -\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + 2\rho\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\Pi}\right) + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha, \quad (2.1.9)$$

где $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ — полная гидродинамическая скорость среды относительно движущейся системы координат; $p(\boldsymbol{r}, t)$ — термодинамическое давление смеси; $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$ — тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения всех компонентов смеси (записанный здесь, в так называемом, диффузионном приближении (*Седов*, *1984*; *Нигматулин*, *1987*; см. также гл. 4); $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения системы координат, в которой записано уравнение (2.1.9) (далее предполагается, что скорость вращения $\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathrm{const}$); $\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — суммарная внешняя сила, действующая на одну частицу сорта α; $\boldsymbol{uu}$ — диада (тензор с девятью декартовыми компонентами). В дальнейшем силу тяжести будем выделять в явном виде, тогда

$$\boldsymbol{F}_\alpha \equiv m_\alpha \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_\alpha^*, \qquad \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha = \rho\boldsymbol{g} + \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^*, \quad (2.1.10)$$

где $\boldsymbol{g} = \{0, 0, -g\}$; $g = |\boldsymbol{g}|$ — приведенное (с учетом центробежной силы) ускорение свободного падения, $\boldsymbol{g} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{2}|\Omega\times\boldsymbol{R}|^2 - G\frac{M_{pl}}{|\boldsymbol{R}|}\right)$; G — гравитационная постоянная; M_{pl} — масса космического тела; $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор, проведенный из центра тела в рассматриваемую точку пространства; $\boldsymbol{F}_\alpha^*$ — сила негравитационного происхождения (например, электромагнитная сила Лоренца). При написании формулы (2.1.10) нами учитывалось, что ось Oz направлена вверх, по нормали к эквипотенциальной поверхности силы тяжести (координата $x_3 \equiv z$ отсчитывается от некоторой начальной эквипотенциальной поверхности). Сопоставление уравнения (2.1.9) и выражения (2.1.1), записанного при $\mathcal{A} \equiv \boldsymbol{u}$, дает для субстанционального потока и объемного источника параметра $\boldsymbol{u}$ следующие конкретные выражения

$$\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\boldsymbol{\Pi}, \qquad \sigma_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + 2\rho\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega} + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha. \quad (2.1.11)$$

Соотношения (2.1.11) и другие подобного вида формулы используются в гл. 5 в связи с выводом уравнений переноса для корреляционных вторых моментов пульсирующих в турбулизованном потоке термогидродинамических параметров. Эти дополнительные уравнения для корреляций будут привлекаться к рассмотрению для замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси, в частности, при так называемом инвариантном моделировании развитой турбулентности.

2.1.5. Уравнения энергетического баланса

При феноменологическом построении моделей (различного уровня сложности) многокомпонентной турбулентной среды нам понадобятся разнообразные уравнения энергетического баланса для реагирующей смеси при ламинарном режиме течения. В этом вводном разделе мы дадим краткий вывод этих уравнений в случае консервативных внешних полей.

Баланс потенциальной энергии

Определим удельную потенциальную энергию газовой смеси соотношением

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha Z_\alpha, \tag{2.1.12}$$

где $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ — скалярный потенциал (на одну частицу сорта α), удовлетворяющий условию $\boldsymbol{F}_\alpha = -\partial\psi_\alpha/\partial\boldsymbol{r}$, $\partial\psi_\alpha/\partial t = 0$. Соответствующее уравнение баланса получим, исходя из операторного соотношения (2.1.4). Полагая для этого $\mathscr{A} \equiv \Psi$, будем иметь

$$\rho\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z_\alpha) + \operatorname{div}(\rho Z_\alpha \boldsymbol{u})\right] + \sum_{\alpha=1}^{N} \rho Z_\alpha\left[\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial t} + \left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha\rho\frac{dZ_\alpha}{dt} - \left(\boldsymbol{u}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha\right) = -\operatorname{div}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \left(\boldsymbol{u}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\sigma_\alpha.$$

Предполагая далее, что плотность внутреннего источника потенциальной энергии обращается в нуль $\left(\sigma_{(\Psi)}^{(i)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha\sigma_\alpha = 0\right)$, что справедливо в случае, когда в химических реакциях выполняется условие сохранения потенциальной энергии (см. *Дьярмати, 1974*):

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \nu_{\alpha s} = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.1.13}$$

окончательно получим

$$\rho\frac{d\Psi}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho\Psi) + \operatorname{div}(\rho\Psi\boldsymbol{u}) = -\operatorname{div}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \left(\boldsymbol{u}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha\right). \tag{2.1.14}$$

Сопоставляя теперь это уравнение и уравнение (2.1.1), записанное при $\mathscr{A} \equiv \Psi$, получим для субстанционального потока $\boldsymbol{J}_{(\Psi)}$ и объемного источника $\sigma_{(\Psi)}$ потенциальной энергии многокомпонентной смеси следующие выражения

$$\boldsymbol{J}_{(\Psi)} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha, \qquad \sigma_{(\Psi)} \equiv -\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{F}_\alpha) - \left(\boldsymbol{u}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha\right). \tag{2.1.15}$$

Сохранение полной энергии смеси

Балансовое уравнение (закон сохранения) для полной энергии многокомпонентного континуума в субстанциональной форме имеет вид

$$\rho \frac{dU_{\text{tot}}}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_{\text{tot}}) + \operatorname{div}(\rho U_{\text{tot}} \boldsymbol{u}) = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_{(U_{\text{tot}})}, \tag{2.1.16}$$

где

$$U_{\text{tot}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Psi + E \tag{2.1.17}$$

— полная удельная энергия среды; $E(\boldsymbol{r}, t)$ — внутренняя удельная энергия газовой смеси (которая фактически определяется этим соотношением);

$$\boldsymbol{J}_{(U_{\text{tot}})} \equiv \boldsymbol{q} + (p\boldsymbol{U} - \Pi) \cdot \boldsymbol{u} + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha \tag{2.1.18}$$

— вектор субстанционального потока полной энергии движущейся смеси; $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность молекулярного потока тепла; $\boldsymbol{U}$ — единичный тензор. Соотношение (2.1.18) фактически можно рассматривать, как точное определение теплового потока $\boldsymbol{q}$, выбором которого весьма свободно, как известно, пользуются в экспериментальной физике и теплофизике.

Важно ясно себе представлять, что вводимое соотношением (2.1.17) определение внутренней энергии смеси $E \equiv \sum_\alpha Z_\alpha e_\alpha$ (где $e_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — парциальная (на одну частицу) внутренняя энергия компоненты α, включающая химическую энергию) не является, вообще говоря, корректным. Это связано с тем, что величина E в общем случае должна включать в себя помимо членов, связанных с тепловым движением молекул и короткодействующим силовым межмолекулярным взаимодействием (что согласуется с обычным пониманием внутренней энергии), еще и члены, зависящие от макроскопической кинетической энергии диффузии химических компонентов (в системе центра масс). Для многокомпонентной среды эти дополнительные члены являются, как известно, величинами второго порядка малости и потому часто могут быть опущены (это случай, так называемого, диффузионного приближения (*Седов*, *1984*)). Однако для многофазной среды (например, газопылевой), подобная добавка $\frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha Z_\alpha |\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}|^2$ может быть значительной и должна приниматься во внимание в явном виде (см. гл. 7).

Баланс механической энергии смеси

Запишем уравнение баланса для удельной кинетической энергии поступательного движения центра масс. Скалярно умножая для этого уравнение движения (2.1.9) на вектор скорости $\boldsymbol{u}$ и делая стандартные преобразования, получим теорему живых сил для многокомпонентной смеси в субстанциональной форме

$$\rho \frac{d(|\boldsymbol{u}|^2/2)}{dt} = p \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \operatorname{div}(p\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{u}) - \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}\right) + \left(\boldsymbol{u} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha\right). \tag{2.1.19}$$

Здесь произведение $\mathbf{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}$ тензора $\mathbf{\Pi}$ на вектор $\boldsymbol{u}$ определяется как вектор с компонентами $(\mathbf{\Pi}\cdot\boldsymbol{u})_k=\sum\limits_j \Pi_{kj}u_j$, а двойное произведение двух тензоров $(\mathbf{\Pi}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{u})$ определяется как скаляр, равный $(\mathbf{\Pi}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{u})=\sum\limits_{i,j}\Pi_{ij}(\partial u_j/\partial x_i)$ (краткое изложение используемых здесь формул тензорного исчисления дано в приложении).

Если сложить теперь (2.1.14) и (2.1.19), то получим уравнение субстанционального баланса удельной механической энергии $e_m(\boldsymbol{r},t)\equiv|\boldsymbol{u}|^2/2+\Psi$:

$$\rho\frac{de_m}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_m)+\mathrm{div}(\rho e_m\boldsymbol{u})=-\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}_{(e_m)}+\sigma_{(e_m)},\tag{2.1.20}$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{(e_m)}&\equiv(pU-\mathbf{\Pi})\cdot\boldsymbol{u}+\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha, \quad (^1)\\ \sigma_{(e_m)}&\equiv p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\left(\mathbf{\Pi}:\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right)-\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{F}_\alpha^* \quad (^2)\end{aligned}\tag{2.1.21}$$

— соответственно плотность субстанционального потока механической энергии e_m и скорость образования механической энергии смеси.

2.1.6. Уравнение баланса внутренней энергии среды

Уравнение притока тепла для многокомпонентной газовой смеси получим путем вычитания (2.1.20) из (2.1.16); в результате будем иметь

$$\rho\frac{dE}{dt}\equiv\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho E\boldsymbol{u})=-\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}-p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\left(\mathbf{\Pi}:\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha^*.\tag{2.1.22}$$

В астро- и геофизических приложениях часто удобно использовать уравнение притока тепла, записанное через полную удельную энтальпию $H(\boldsymbol{r},t)$ газовой смеси, определяемую соотношением

$$H\equiv\sum_{\alpha=1}^{N}h_\alpha Z_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{N}\left(e_\alpha+\frac{p_\alpha}{n_\alpha}\right)Z_\alpha=E+\frac{p}{\rho},\tag{2.1.23}$$

где $h_\alpha(\boldsymbol{r},t)$, $p_\alpha(\boldsymbol{r},t)$ — соответственно парциальная энтальпия и парциальное давление компоненты α. Тогда, с учетом преобразования $\rho dE/dt+p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ $=\rho dH/dt-dp/dt$, являющегося следствием уравнения неразрывности (2.1.2) и определения величины H, получим

$$\rho\frac{dH}{dt}\equiv\frac{\partial(\rho H)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho H\boldsymbol{u})=-\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}+\frac{dp}{dt}+\left(\mathbf{\Pi}:\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha^*.\tag{2.1.24}$$

Для большинства целей, рассматриваемых в данной книге, достаточно аппроксимировать парциальную энтальпию $h_\alpha(T)$ с помощью выражения $h_\alpha\cong c_{p\alpha}T+h_\alpha^0$, в котором через $c_{p\alpha}(T)$ обозначена парциальная изобарная (при постоянном давлении) теплоемкость на одну частицу компоненты α, а через h_α^0 — парциальная энтальпия компоненты α при нулевой температуре (которую часто называют стандартной теплотой образования частиц сорта α). Тогда, при использовании (2.1.23), можно получить следующее калорическое уравнение состояния

$$H(Z_\alpha, T) \cong c_p T + \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha^0 Z_\alpha, \qquad c_p = \sum_{\alpha=1}^{N} c_{p\alpha} Z_\alpha, \tag{2.1.25}$$

в котором $c_p(\boldsymbol{r}, t)$ — удельная изобарная теплоемкость смеси. Величины $c_{p\alpha}$ считаются далее постоянными, аппроксимирующими действительные изменения парциальных теплоемкостей $c_{p\alpha}(T)$ в ограниченном температурном интервале. Сопоставление (2.1.24) и уравнения (2.1.1), записанного для $\mathscr{A} \equiv H$, позволяет определить следующие конкретные представления для субстанционального потока и «источника» энтальпии смеси:

$$\boldsymbol{J}_{(H)} \equiv \boldsymbol{q}, \qquad \sigma_{(H)} \equiv \frac{dp}{dt} + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^*. \tag{2.1.26}$$

Наконец, запишем уравнение притока тепла (2.1.24) через температуру $T(\boldsymbol{r}, t)$. Используя (2.1.7), (2.1.23) и (2.1.25), получим

$$\rho \frac{dH}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} - \operatorname{div}\left\{\sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha\right\} + \sum_{s=1}^{r} q_s \xi_s + \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} c_{p\alpha} \boldsymbol{J}_\alpha\right), \tag{2.1.27}$$

где соотношением

$$q_s(T) = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \nu_{\alpha s} = q_s^0 + \sum_{\alpha=1}^{N} c_{p\alpha} \nu_{s\alpha}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{2.1.28}$$

введена так называемая теплота химической реакции s при давлении p и температуре T, равная разности между суммой произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагирующих веществ. При этом величины $q_s^0 = \sum_\alpha h_\alpha^0 \nu_{\alpha s}$, которые могут интерпретироваться как теплоты химических реакций при абсолютном нуле температуры, являются исходными параметрами модели химически активной среды. Тогда из (2.1.24) и (2.1.27) окончательно будем иметь

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div}\left\{\boldsymbol{q}_R + \boldsymbol{q} - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha\right\} + \frac{dp}{dt} + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}\right) - \\ - \sum_{s=1}^{r} q_s \xi_s + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^* - \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} c_{p\alpha} \boldsymbol{J}_\alpha\right) + Q_d. \tag{2.1.29}$$

Предпоследнее слагаемое в правой части (2.1.29) представляет собой эффект, так называемых, «диффундирующих теплоемкостей». В большинстве практически важных случаев удельные изобарные теплоемкости отдельных компонентов газовой смеси $c_{p\alpha}^* \equiv c_{p\alpha}/m_\alpha$ могут считаться весьма близкими (так, что

$c^*_{p\alpha} \approx \mathrm{idem}$). Именно это обстоятельство позволяет, в силу (2.1.8$^{(2)}$), не учитывать этот член уравнения (2.1.29).

Важно иметь в виду, что только в уравнении для T в явном виде присутствуют химические источники (стоки) тепла, что связано с непосредственным влиянием химических реакций именно на температурное поле. Для полного определения модели многокомпонентной среды необходимо дополнительно задать парциальные теплоемкости $c_{p\alpha}$ всех компонентов смеси и теплоты $q_s(T)$ всех химических реакций.

При написании энергетического уравнения (2.1.29) нами были для большей общности добавлены дивергентный член div $\boldsymbol{q}_R$, в котором поток

$$\boldsymbol{q}_R = \int_0^\infty \boldsymbol{q}_{R\nu}\, d\nu = \int_0^\infty \boldsymbol{\Omega} I_\nu \, d\boldsymbol{\Omega}\, d\nu, \tag{2.1.30}$$

связан с радиационной энергией (вектор Пойнтинга), и член Q_d, характеризующий возможные дополнительные (локальные) источники нагрева многокомпонентной среды. Здесь I_ν — спектральная интенсивность излучения: количество радиационной энергии, заключенное в единичном интервале частот ν и в телесном единичном угле $d\boldsymbol{\Omega}$, переносимое за единицу времени через единичную площадку, помещенную в точке $\boldsymbol{r}$ перпендикулярно направлению распространения энергии излучения $\boldsymbol{\Omega}$.

По поводу уравнения (2.1.29) сделаем еще одно замечание. Как было показано в монографии авторов (*Маров*, *Колесниченко*, *1987*), весьма сложную проблему, возникающую, например, при моделировании верхней атмосферы планеты, представляет задача адекватного описание дополнительного притока тепла в рассматриваемую область атмосферы. Это тепло может быть обусловлено прямым поглощением солнечной коротковолновой (и корпускулярной) радиации атмосферными составляющими и ее последующей трансформацией вследствие фотохимических и химических реакций, а также отдельными диссипативными процессами гидродинамической природы (включая, например, диссипацию магнитогидродинамических, внутренних гравитационных волн и других волновых движений различных пространственных и временных масштабов), в результате действия которых происходит изменение температурного поля в атмосфере. Подобного рода локальные источники нагрева многокомпонентной смеси атмосферных газов, учтенные в уравнении (2.1.29) членом Q_d, могут быть подробно проанализированы только для конкретной задачи.

2.1.7. Термическое уравнение состояния

Будем использовать в качестве термического уравнения состояния суммарного многокомпонентного газового континуума (уравнения для давления) уравнение состояния для смеси совершенных газов:

$$p = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha = k_{\mathrm{B}} T \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha = \mathscr{R}^* \rho T, \tag{2.1.31}$$

где $p_\alpha = k_B T n_\alpha$ — уравнение Клапейрона для отдельной газовой составляющей; $\mathscr{R}^* = k_B \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha = k_B/M$ — так называемая «газовая постоянная» смеси; k_B — постоянная Больцмана; $p_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — парциальное давление компоненты α; $\mathscr{M} \equiv \rho/n$ — средняя молекулярная масса смеси. Задание внутренней энергии как функции температуры и состава $E = E(Z_\alpha, T)$ доопределяет конкретную модель газовой смèси. Для смеси совершенных газов с постоянными парциальными теплоемкостями $c_{V\alpha}$ (при постоянном объеме) имеем:

$$e_\alpha(T) = c_{V\alpha} T + h_\alpha^0, \quad E(Z_\alpha, T) = c_V T + \sum_\alpha Z_\alpha h_\alpha^0, \tag{2.1.32}$$

где $c_V \equiv \sum_\alpha Z_\alpha c_{V\alpha}$ — удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме; легко показать, что $c_p - c_V = \mathscr{R}^*$. Заметим, что первое равенство в (2.1.31) (закон Дальтона) справедливо для любой газовой смеси (независимо от того, являются отдельные газовые составляющие совершенными газами или нет), поскольку является следствием определения величины p_α как произведения общего термодинамического давления среды p на мольную долю $x_\alpha = n_\alpha/n$ частиц сорта α.

$$p_\alpha = x_\alpha p \quad \left(n = \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\right),$$

где $n(\boldsymbol{r}, t)$ — полная числовая плотность среды.

Система гидродинамических уравнений (2.1.2), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.29) и (2.1.31) должна быть дополнена уравнениями химической кинетики, соответствующими выражениями для скоростей и теплот химических реакций, а также определяющими соотношениями для потоков диффузии, тепла и тензора вязких напряжений.

§ 2.2. Второй закон термодинамики. Возникновение энтропии в вязких теплопроводных газовых смесях

Процессы переноса массы, количества движения и энергии в приведенных выше гидродинамических уравнениях описываются их некоторыми частями, в каждое из которых входит дивергенция потока соответствующей величины, связанной, хотя бы и неявно, с градиентами скорости, температуры, давления и концентраций компонентов среды (так называемыми термодинамическими силами). Существует два способа получения определяющих соотношений между термодинамическими потоками и сопряженными им термодинамическими силами, основывающиеся на газокинетическом и феноменологическом подходах. Газокинетический подход носит, вообще говоря, ограниченный характер, поскольку связан с методами решения системы обобщенных уравнений Больцмана для многокомпонентной газовой смеси (в частности, с методом Чепмена—Энскога), полностью разработанными в настоящее время только для одноатомных газов умеренной плотности, и в случае, когда известны молекулярные силы взаимодействия двух сталкивающихся частиц, например, когда заданы сферически симметричный потенциал межмолекулярного взаимодействия, или функциональная зависимость частоты столкновений частиц от их скорости и т. п. (см. *Чепмен, Каулинг, 1960*; *Ферцигер, Капер, 1976*). Феноменологический подход, базирующейся на применении методов неравновесной термодинамики к макроскопическому объему смеси, не связан с постулированием конкретной молекулярной модели взаимодействия частиц и годится для широкого класса сплошных сред с усложненными свойствами (например, для электролитов). Однако термодинамика необратимых процессов не дает, к сожалению, метода определения так называемых коэффициентов переноса — коэффициентов пропорциональности при градиентах термогидродинамических параметров в определяющих соотношениях. Явные алгебраические выражения для этих коэффициентов в общем случае произвольной газо-жидкой среды могут быть найдены экспериментально; вместе с тем, для одноатомных многокомпонентных газовых смесей при малых плотностях, их можно рассчитать из детального рассмотрения динамики столкновений молекул с помощью кинетической теории (см., например, *Ферцигер, Капер, 1976*).

Мы будем следовать феноменологическому выводу определяющих уравнений (для термодинамических потоков) и дополнительных алгебраических соотношений, связывающих между собой коэффициенты переноса.

2.2.1. Принцип Онзагера

Прежде чем применить формализм неравновесной термодинамики непрерывных сред к описанию процессов тепло-массопереноса в ламинарном (а далее и в турбулентном) течении многокомпонентной реагирующей смеси, обсудим здесь очень кратко сущность тех основных постулатов, которые лежат в основе теории и могут быть практически использованы при термодинамическом анализе любого необратимого процесса. Как известно (см., например, *Де Гроот, Мазур, 1964*), в неравновесной термодинамике в качестве определяющих соотношений, которые дополняют систему гидродинамических уравнений, применяются феноменологические линейные уравнения необратимых процессов (так называемые материальные законы Онзагера)

$$\mathrm{J}_k = \sum_{k=1}^{f} L_{kl} X_l, \quad (k = 1, 2, \ldots, f), \tag{2.2.1}$$

в которых $L_{kl}(\boldsymbol{r}, t)$ — скалярные кинетические (феноменологические) коэффициенты (функции локальных параметров состояния среды: температуры, давления, концентраций, возможно напряженности магнитного поля и т. п.) связывают между собой потоки $\mathrm{J}_k(\boldsymbol{r}, t)$ и термодинамические (обобщенные) силы $\mathrm{X}_l(\boldsymbol{r}, t)$; f — количество независимых скалярных потоков и сил. Здесь скаляры J_k и X_l обозначают независимые скалярные термодинамические потоки и силы, а в случае векторных и тензорных процессов — все декартовы компоненты соответствующих тензорных и векторных величин, входящих в билинейные выражения для производства энтропии [см. ниже формулу (2.2.23)].

Потоки J_k соответствуют скоростям изменения экстенсивных параметров (таких как масса, количество движения, энергия), для которых существуют законы сохранения, или переносимым величинам (таким как теплота), которые входят в дивергентные члены законов сохранения; обобщенные силы X_l пропорциональны градиентам интенсивных параметров или внешним силам, отклоняющим термодинамическую систему от равновесия. Диагональные коэффициенты L_{kk} являются коэффициентами, представляющими прямые эффекты (обычная диффузия, теплопроводность и т. п.), недиагональные коэффициенты L_{kl} ($k \neq j$) являются феноменологическими коэффициентами перекрестных эффектов (термическая теплопроводность, диффузионный термоэффект (эффект Дюфора) и т. п.). Линейные соотношения (2.2.1) применимы в состояниях достаточно близких к положению локального термодинамического равновесия (и фактически определяют область применимости термодинамики необратимых процессов).

В принципе, каждая декартова компонента вектора потока J_k может быть линейной функцией декартовых компонент всех термодинамических сил. Заметим, однако, что потоки и термодинамические силы в (2.2.21) обладают, в общем случае, различными тензорными свойствами, т. е., при преобразованиях вращения и отражения, декартовы компоненты этих величин преобразуются разным образом. В результате может оказаться, что в силу определенных свойств симметрии рассматриваемой материальной среды, декартовы компоненты потоков будут зависеть не от всех декартовых компонент термодинамических сил, что ограничивает число отличных от нуля кинетических коэффициентов L_{kl} в (2.2.1) (принцип симметрии Кюри). Так, в частном случае изотропной системы, свойства которой в равновесном состоянии одинаковы во всех направлениях, физико-химические и гидродинамические процессы разной тензорной размерности не взаимодействуют друг с другом (см. *де Гроот*, *Мазур*, *1964*).

Кроме этого, при аксиоматическом подходе принимаются в качестве независимого постулата соотношения симметрии кинетических коэффициентов — принцип взаимности Онзагера—Казимира:

$$L_{kl}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Omega}) = \varepsilon_k \varepsilon_l L_{kl}(-\boldsymbol{B}, -\boldsymbol{\Omega}), \quad (k, l = 1, 2, \dots, f). \tag{2.2.2}$$

Эти соотношения являются следствием инвариантности микроскопической динамики при обращении времени. При написании (2.2.2) предполагается, что механическая система может подвергаться воздействию внешней магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ или испытывать угловое вращение $\boldsymbol{\Omega}$. В случае наличия магнитной индукции $\boldsymbol{B}$, для того чтобы частицы среды при обращении времени прошли по своему ранее пройденному пути, необходимо обращать (т. е. изменять на противоположный) не только вектор скорости, но и вектор магнитного поля, что является следствием формульного представления для электромагнитной силы Лоренца [см. гл. 9]. Аналогичные рассуждения справедливы и для процессов, эволюция которых рассматривается в неинерциальных системах координат, вращающихся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Соотношения взаимности (2.2.2) вносят ограничения на конфигурацию материальных уравнений (2.2.1), сводя до минимума число кинетических коэффициентов в них.

Для изотропной системы (и в случае, когда внешнее магнитное поле и угловая скорость равны нулю) соотношения взаимности (2.2.2) приобретают более простой вид:

$$L_{kl} = \varepsilon_k \varepsilon_l L_{lk}, \quad (k, l = 1, 2, \dots, f). \tag{2.2.2*}$$

Если величины L_{kl} относятся к перекрестным эффектам, которые можно описать либо переменными α-типа (в статистической механике так принято называть переменные, являющиеся четными функциями скоростей молекул), либо β-параметрами (переменные, являющиеся нечетными функциями скоростей молекул), то коэффициенты $\varepsilon_k = \varepsilon_l = 1$ (вариант симметричных соотношений взаимности Онзагера). Однако при наличии смешанных перекрестных эффектов для переменных α- и β-типов коэффициенты $\varepsilon_l = 1$, а коэффициенты $\varepsilon_k = -1$ (вариант антисимметричных соотношений взаимности Казимира).

Отметим, что в настоящее время соотношения симметрии (2.2.2) кинетических коэффициентов считаются эмпирически устойчивой аксиомой, независимо от их доказательства в рамках статистической механики (*Миллер*, *1974*). Согласно Мейсону (*1974*), экспериментальное подтверждение принципа взаимности Онзагера—Казимира столь же убедительно, как и подтверждение 1-го, 2-го и 3-го начал термодинамики. Это обстоятельство дает основание, возвести постулат (2.2.2) в статус парадигмы и использовать его в качестве основы для описания широкого круга макроскопических процессов переноса.

Для явного определения в выражении (2.2.1) потоков и сопряженных им термодинамических сил обычно используется конкретное представление скорости производства $\sigma_{(S)}(\boldsymbol{r}, t)$ (плотности источника) энтропии $S(\boldsymbol{r}, t)$ внутри системы (с заранее определенным набором необратимых процессов), записанное в виде билинейной формы

$$\sigma_{(S)}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{k=1}^{f} \mathrm{J}_k \mathrm{X}_k \geqslant 0; \tag{2.2.3}$$

при этом каждый отдельный поток и каждая отдельная термодинамическая сила обращается в нуль в состоянии локального термодинамического равновесия. Важно подчеркнуть, что разложение $\sigma_{(S)}(\boldsymbol{r}, t)$ на термодинамические силы и потоки является достаточно произвольным; тем не менее это обстоятельство не оказывает непосредственного влияния на интерпретацию окончательных результатов: после того как установлены потоки J_k, сопряженные им термодинамические силы X_l находятся однозначным образом, как коэффициенты перед соответствующими потоками в выражении (2.2.3).

Таким образом, для расшифровки в рамках феноменологической теории формулы (2.2.3) для плотности источника энтропии необходимо иметь в явном виде уравнение баланса энтропии $S(\boldsymbol{r}, t)$ непрерывной системы

$$\rho \frac{dS}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \operatorname{div}(\rho S \boldsymbol{u}) = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_{(S)} + \sigma_{(S)}, \quad (\sigma_{(S)} \geqslant 0), \tag{2.2.4}$$

в котором вектор $\boldsymbol{J}_{(S)}(\boldsymbol{r}, t)$ определяет субстанциональную плотность потока энтропии. Здесь дивергенция $\operatorname{div} \boldsymbol{J}_{(S)}$ описывает обратимый теплообмен между рассматриваемой системой и внешней средой, а неравенство $\sigma_{(S)} \geqslant 0$ соответствует второму закону термодинамики, который гласит, что энтропия замкнутой системы не может уменьшаться. Важно ясно себе представлять, что смысл неравенства $\sigma_{(S)} \geqslant 0$ в неравновесной термодинамике выходит за рамки обычной формулировки второго закона равновесной термодинамики, в которой рассматривается лишь глобальный рост энтропии между двумя состояниями равновесия изолированной системы. Здесь же предполагается, что условие $\sigma_{(S)} \geqslant 0$ выполняется в любой точке координатного пространства в любой момент времени эволюции системы.

Конкретный вид уравнения (2.2.4), играющего в неравновесной термодинамике ключевую роль, может быть получен для многокомпонентной термогидродинамической системы, при использовании балансовых уравнений для удельного объема (2.1.6), удельных числовых плотностей компонентов смеси (2.1.7) и удельной внутренней энергии (2.1.22), из фундаментального тождества Гиббса для этих величин. Записанное вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объема, это тождество имеет вид (см., например, *Пригожин, Дефей, 1966*):

$$T\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{n_\alpha}{\rho}\right), \tag{2.2.5}$$

где $\mu_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ $(= h_\alpha - Ts_\alpha)$, $s_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — соответственно парциальный химический потенциал, рассчитываемый на одну частицу вещества, и парциальная энтропия частиц сорта α.

По поводу применимости тождества Гиббса для неравновесных процессов в любой непрерывной термодинамической системе важно иметь в виду следующее. Фундаментальным предположением, на котором основана неравновесная термодинамика (в том виде, в каком она была разработана Онзагером, Пригожиным и другими авторами), является предположение о состоянии локального термодинамического равновесия (ЛТР). Суть ЛТР заключается в том, что всю систему можно мысленно разбить на достаточно малые (но макроскопические) области, каждую из которых можно рассматривать как равновесную термодинамическую систему, для которой энтропия является той же самой функцией параметров состояния, что и в состоянии полного термодинамического равновесия. В частности, если при построении модели сплошной среды в качестве переменных состояния смеси выбраны удельный объем $1/\rho$, удельная плотность внутренней энергии E и удельные концентрации (n_α/ρ) химических компонентов, то термодинамическое состояние физически элементарного объема в окрестности точки $\boldsymbol{r}$ в момент времени t полностью описывается фундаментальным интегральным уравнением Гиббса (см. *Мюнстер, 2002*)

$$S(\boldsymbol{r}, t) = S(E, (1/\rho), (n_1/\rho), \ldots, (n_N/\rho)),$$

дифференциальная форма которого имеет вид (2.2.5). Собственно только на основании тождества Гиббса (2.2.5) сопряженным величинам

$$\begin{gathered} 1/T \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{(1/\rho),\{n_\alpha/\rho\}}, \quad p/T \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial(1/\rho)}\right)_{E,\{n_\alpha/\rho\}}, \\ -\mu_\alpha/T \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(n_\alpha/\rho)}\right)_{E,(1/\rho),\{n_\beta \neq n_\alpha\}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots N) \end{gathered} \tag{2.2.6}$$

может быть приписан смысл локальной температуры $T(\boldsymbol{r}, t)$, локального термодинамического давления $p(\boldsymbol{r}, t)$ и локального химического потенциала $\mu_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ для частиц сорта α. Другими словами, эти величины фактически определяются соотношениями (2.2.6). Энтропия S в этом случае является термодинамическим потенциалом. Обычно постулат о локальном термодинамическом равновесии справедлив в том случае, когда диссипативные процессы в системе играют существенную роль и исключают появление больших градиентов параметров состояния. Следует также иметь в виду, что гипотеза о ЛТР среды эквивалентна предположению о справедливости не только тождества Гиббса, но и всех других соотношений равновесной термодинамики для бесконечно малых областей неравновесных систем.

Суммируем теперь основные утверждения, которые принимаются в качестве независимых постулатов при практическом использовании классической неравновесной термодинамики к любому необратимому процессу:

- справедлив принцип квазилокального термодинамического равновесия;
- для производства энтропии, связанного с необратимыми процессами в самой системе, справедливо неравенство $\sigma_{(S)} \geqslant 0$, выражающее второе начало термодинамики;
- если ограничиться линейной областью, то справедливы линейные феноменологические соотношения (2.2.1) для потоков и термодинамических сил, входящих в выражение (2.2.3) для производства энтропии;
- имеют место соотношения симметрии (2.2.2) для кинетических коэффициентов, входящих в линейные законы (2.2.1).

В заключение этого раздела дополнительно отметим следующее. Классическая неравновесная термодинамика не является единственной термодинамической теорией, пригодной для исследования неравновесных состояний континуальной системы. Существуют и другие хорошо разработанные формализмы, например так называемая рациональная термодинамика (разработанная в своих основах Колеманом (*1964*), Трусделлом (*1984*) и Ноллом (*1974*)), которые часто позволяют преодолеть проблемы, не поддающиеся решению в рамках классической необратимой термодинамики. Рациональная термодинамика позволяет, в частности, получить материальные уравнения для сред, имеющих «память», поскольку предположения о локальном состоянии равновесия в этом подходе не делается. Вместе с тем, с практической точки зрения, материальные уравнения, записанные в форме функционалов от всей предыстории переменных, представляют собой непростой для математического моделирования объект исследования и требуют в общем случае знания слишком большого объема информации.

Как уже отмечалось выше, в последнее десятилетие получила значительное развитие так называемая расширенная необратимая термодинамики (см. *Жоу*, *Касас-Баскес*, *Лебон*, *2006*), которая также выходит за пределы гипотезы о ЛТР за счет модификации диссипативных потоков соответствующих физических величин, выступающих в качестве дополнительных независимых переменных рассматриваемой системы. Разумеется, что потоки не являются единственно возможным набором новых неравновесных переменных: например, в качестве последних могут фигурировать переменные, связанные с внутренними степенями свободы молекул или микроструктурой системы. Обе возможности можно считать в какой-то мере дополняющими друг друга. Естественно, что выход за рамки локального термодинамического равновесия предполагает всестороннее переосмысление таких базовых и концептуальных понятий, как энтропия, температура, давление и химический потенциал для случаев более общих, чем рассматриваемая в этой главе многокомпонентная смесь, в частности, при моделировании турбулизованных сплошных сред (см. гл. 3).

2.2.2. Уравнение баланса энтропии и производство энтропии в реагирующих газовых смесях

Для изучения процессов переноса в многокомпонентных смесях газов воспользуемся формализмом классической неравновесной термодинамики, с помощью которой можно, как известно, описать широкий класс неравновесных процессов переноса в полном соответствии с экспериментальными данными. Для вывода онзегеровских соотношений (2.2.1), сначала необходимо найти явную форму уравнения баланса энтропии (2.2.4) для рассматриваемой модели многокомпонентной газовой среды. Исключим для этого при помощи гидродинамических уравнений смеси производные по времени от величин E, $(1/\rho)$ и (n_α/ρ) в правой части тождества Гиббса (2.2.5); в результате получим конкретный вид уравнения (2.2.4) для субстанционального баланса энтропии смеси S, в котором плотность потока энтропии $\boldsymbol{J}_{(S)}$ задается выражением

$$\boldsymbol{J}_{(S)} \equiv \frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{q} - \sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha\right\}, \tag{2.2.7}$$

а умноженное на T производство энтропии $\sigma_{(S)}$ (так называемое, рассеяние энергии), определяется как

$$0 \leqslant T\sigma_{(S)} \equiv -\left(\boldsymbol{J}_q \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \left\{T\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\mu_\alpha}{T}\right) + h_\alpha \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}_\alpha\right\} + \sum_{s=1}^{r} A_s \xi_s. \tag{2.2.8}$$

Рассеяние энергии $T\sigma_{(S)}(\boldsymbol{r}, t)$ — количественная мера неравновесных процессов в системе, согласно второму закону термодинамики есть положительно определенная величина. Здесь

$$A_s(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\sum_{\alpha=1}^{N} \mu_\alpha \nu_{\alpha s}, \qquad (s = 1, 2, \dots, r) \tag{2.2.9}$$

— так называемое химическое сродство s-й реакции (функция состояния системы, которая согласно де Донде является движущей силой химической реакции (см. *Пригожин, Дефей, 1966*));

$$\boldsymbol{J}_q \equiv \boldsymbol{q} - \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha \tag{2.2.10}$$

— вектор приведенного потока тепла. В отличие от полного потока тепла $\boldsymbol{q}$, включающего тепло $\sum_\alpha h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha$, переносимое диффузией вследствие разницы в энтальпиях (теплосодержаниях) диффундирующих веществ, приведенный тепловой поток $\boldsymbol{J}_q$ есть тепло, переносимое только чистой теплопроводностью.

Для дальнейшего анализа удобно разложить градиентный тензор скорости $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r}$ (тензор второго ранга) в (2.2.8) на симметрическую и антисимметрическую части

$$\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r} = (\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^s + (\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^a = \overset{0}{(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^s} + (\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^a + \frac{1}{3}\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}, \tag{2.2.11}$$

а симметричный тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\Pi}$ представить следующим образом

$$\boldsymbol{\Pi} = \pi\boldsymbol{U} + \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}{}^s. \tag{2.2.12}$$

Здесь

$$(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^a_{jk} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_{jk}, \qquad (j,\,k = 1,\,2,\,3) \tag{2.2.13}$$

— кососимметричный градиентный тензор скорости;

$$\widetilde{D}_{jk} \equiv (\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^s_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) \tag{2.2.14}$$

— тензор скорости деформации, $\widetilde{\boldsymbol{D}} \equiv (\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})^s$;

$$\widetilde{S}_{jk} \equiv \overset{0}{(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})}{}^s_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \tag{2.2.15}$$

— тензор скорости сдвига, $\widetilde{\boldsymbol{S}} \equiv \widetilde{\boldsymbol{D}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \equiv \overset{0}{(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})}{}^s$;

$$\pi \equiv \frac{1}{3}(\boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{U}) = \frac{1}{3}\Pi_{kk} \tag{2.2.16}$$

— так называемое вязкое давление. Тогда скалярное произведение тензора вязких напряжений и тензора градиента скорости можно представить так:

$$\sigma^v_{(S)} \equiv \frac{1}{T}\left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) = \frac{1}{T}\left(\overset{0}{\Pi}{}^s : \overset{0}{(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r})}{}^s\right) + \pi\frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{T}. \tag{2.2.17}$$

При написании (2.2.17) использовано то обстоятельство, что скалярное произведение симметрического и антисимметрического тензоров всегда равно нулю. Заметим, что полный вклад вязких явлений в производство энтропии оказывается разделенным на две части. Вторая часть, величина $-T^{-1}\pi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = -T^{-1}\pi\rho d(1/\rho)/dt$, связана со скоростью изменения удельного объема и обусловлена наличием объемной (второй) вязкости сжимаемой среды.

Таким образом, производство энтропии $\sigma_{(S)}$ в движущейся многокомпонентной реагирующей газовой смеси определяется следующим набором термодинамических потоков $\boldsymbol{J}_q$, ξ_s, $\boldsymbol{J}_\alpha$, π, $\overset{0}{\Pi}{}^s$ и сопряженных им термодинамических сил

$$X_q \equiv -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{T}\right), \tag{2.2.18}$$

$$A_s^* \equiv \frac{A_s}{T} = -\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\mu_\beta}{T} \nu_{\beta s}, \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.2.19}$$

$$\boldsymbol{X}_\alpha^* \equiv -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\mu_\alpha}{T}\right) + h_\alpha \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{T}\boldsymbol{F}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.2.20}$$

$$X_\pi \equiv \frac{1}{T}\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \tag{2.2.21}$$

$$\overset{0}{X^s} \equiv \frac{1}{T}(\partial \overset{0}{\boldsymbol{u}}/\partial \boldsymbol{r})^s = \frac{1}{T}\widetilde{\boldsymbol{S}}. \tag{2.2.22}$$

Здесь полярный вектор X_q представляет собой термодинамическую силу, обусловливающую явление теплопроводности; химическое сродство для s-й реакции A_s является скалярной термодинамической силой, сопряженной со скоростью ξ_s химической реакции; термодинамическая сила диффузии X_α^* сопряжена с плотностью потока диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ (полярный вектор); скалярная сила вязкости X_π сопряжена с вязким давлением π (как со скалярным потоком импульса, обусловливающим явления, связанные с объемной вязкостью); тензорная сила (второго ранга) $\overset{0}{X^s}$, сопряженная с той частью тензора вязких напряжений $\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}^s}$, след которой равен нулю, вызывает явление вязкого сдвига (отметим, что вязкие силы являются переменными β-типа, поскольку скорость $\boldsymbol{u}$-типичный β-параметр). С помощью введенных указанным способом потоков и термодинамических сил производство энтропии $\sigma_{(S)}$ в реагирующей газовой смеси может быть записано в следующей билинейной форме

$$\sigma_{(S)} = \sum_{s=1}^{r} A_s^* \xi_s + \pi X_\pi + \boldsymbol{J}_q \cdot \boldsymbol{X}_q + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \boldsymbol{X}_\alpha^* + \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}^s} : \overset{0}{X^s} \geqslant 0, \tag{2.2.23}$$

отвечающей трем (скалярным, векторным и тензорным) независимым источникам неравновесных процессов в реагирующей смеси, имеющих существенно различную физическую природу. Выражение (2.2.23) позволяет конкретизировать материальные линейные соотношения (2.2.1) между потоками и термодинамическими силами для рассматриваемого здесь многокомпонентного континуума.

§ 2.3. Определяющие соотношения для потоков диффузии, тепла и тензора вязких напряжений

В этом параграфе мы для простоты ограничимся случаем изотропной среды, для которой явления, описываемые термодинамическими силами и потоками различной тензорной размерности, не влияют друг на друга (принцип Кюри). Анизотропный случай подробно рассмотрен, например, в известной монографии де Гроота и Мазура (*1964*), к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя.

2.3.1. Линейные кинематические материальные уравнения

В изотропном случае выражение (2.2.23) для производства энтропии можно разбить на четыре части разного тензорного характера, каждая из которых, согласно второму закону термодинамики, должна быть положительно определенной величиной. Другими словами, согласно второму закону и одновременно в соответствии с принципом Кюри, необходимо, чтобы выполнялось не только суммарное условие

$$\sigma_{(S)} = \overbrace{\sigma_{(S)}}^{\text{(скаляр)}} + \overbrace{\sigma_{(S)}}^{\text{(вектор)}} + \overbrace{\sigma_{(S)}}^{\text{(тензор)}} \geqslant 0,$$

но и чтобы для всех не взаимодействующих друг с другом процессов различного тензорного характера производство энтропии было положительно определенной величиной.

Тогда соответствующие феноменологические уравнения (2.2.1) в прямоугольной системе координат записываются в виде

$$\boldsymbol{J}_q = L_{qq}\boldsymbol{X}_q + \sum_{\beta=1}^{N} L_{q\beta}\boldsymbol{X}^*_\beta, \tag{2.3.1}$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha = L_{\alpha q}\boldsymbol{X}_q + \sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}\boldsymbol{X}^*_\beta, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \tag{2.3.2}$$

$$\overset{0}{\Pi}{}^s_{jk} = L\widetilde{S}_{jk} = \frac{L}{2T}\left\{\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right\}, \quad (j, k = 1, 2, 3), \tag{2.3.3}$$

$$\pi = l_{\pi\pi}\frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{T} + \sum_{s=1}^{r} l_{\pi s}A^*_s, \tag{2.3.4}$$

$$\xi_s = -l_{s\pi}\frac{\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{T} + \sum_{m=1}^{r} l_{sm}A^*_s, \quad (s = 1, 2, \dots, r), \tag{2.3.5}$$

причем между скалярными кинетическими коэффициентами $L_{q\alpha}$, $L_{\alpha\beta}$, l_{sv} и l_{sm} в этих соотношениях существуют следующие соотношения симметрии Онзагера—Казимира

$$L_{q\beta} = L_{\beta q}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, N); \quad L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N); \tag{2.3.6}$$

$$l_{s\pi} = -l_{\pi s}, \quad (s = 1, 2, \dots, r); \quad l_{sm} = l_{ms} \quad (s, m = 1, 2, \dots, r). \tag{2.3.7}$$

Здесь кинетические коэффициенты, описывающие перекрестные эффекты между химическими реакциями и объемной вязкостью, удовлетворяют антисимметричным соотношениям Казимира, поскольку сродство A_s является силой α-типа, а вязкая сила X_π относится к β-типу.

Следует отметить, что кроме соотношений взаимности (2.3.6) коэффициенты Онзагера $L_{q\alpha}$ и $L_{\alpha\beta}$ удовлетворяют еще $(N + 1)$ дополнительным связям, вытекающим из определения $\boldsymbol{J}_\alpha \equiv n_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u})$ диффузионных потоков и из факта линейной независимости термодинамических сил X_q и X^*_β. Действительно, подставляя в тождество (2.1.8$^{(2)}$) соотношения (2.3.2), получим

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L_{\alpha q}\right)\boldsymbol{X}_q + \sum_{\beta=1}^{N}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L_{\alpha\beta}\right)\boldsymbol{X}^*_\beta,$$

откуда, в силу линейной независимости сил X_q и X^*_β, следует

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L_{\alpha q}=0, \quad (^1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L_{\alpha\beta}=0, \quad (\beta=1, 2, \ldots, N). \quad (^2) \tag{2.3.8}$$

По поводу линейного приближения (2.3.5) в отношении скоростей химических реакций важно ясно себе представлять следующее: Как известно, линейные соотношения (2.3.5) термодинамики необратимых процессов справедливы для химических реакций только тогда, когда выполняется условие $A_s \ll \mathscr{R}T$ [см. (4.1.4)]. Однако в общем случае это условие удовлетворяется лишь на последней стадии химической реакции. Таким образом, для химических реакций линейное приближение феноменологических законов несправедливо, хотя общее выражение (2.2.8) для производства энтропии за счет протекания реакций справедливо для тех химических реакций, для которых выполняется закон действующих масс [см. п. 3.3]. Именно по этой причине, в дальнейшем для описания турбулизованных химически реагирующих смесей мы будем использовать аррениусову газофазную кинетику (см. *Штеллер, 2000*).

2.3.2. Вязкое течение изотропной жидкости

Используя соотношения (2.3.3) и (2.3.4), легко показать, что для изотропной среды связь между тензорами $\mathbf{\Pi}$ и $(\partial/\partial \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}$ имеет следующую форму (без членов, учитывающего «химию», которыми, как известно, в реальных случаях можно пренебречь)

$$\Pi_{jk} = \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right) + \mu_\theta \delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}, \tag{2.3.9}$$

где молекулярные коэффициенты сдвиговой вязкости $\mu(\boldsymbol{r}, t)(\equiv L/2T)$ и объемной вязкости $\mu_\theta(\boldsymbol{r}, t)$ $(\equiv l_{\pi\pi}/T)$ зависят только от локальных термодинамических свойств среды. Сдвиговая вязкость μ играет важную роль в течениях, в которых последовательные плоские слои жидкости движутся с различными скоростями. Коэффициент объемной вязкости μ_θ оказывается существенным при процессах расширения среды. Часто удобно ввести коэффициент молекулярной кинематической вязкости $\nu(\boldsymbol{r}, t)$, связанный с обычным коэффициентом вязкости (коэффициентом внутреннего трения) μ соотношением $\nu \equiv \mu/\rho$.

Из (2.2.17) и (2.3.9) следует, что вклад эффектов вязкости в выражение для скорости диссипации кинетической энергии в теплоту (диссипативная функция) равен

$$0 \leqslant T\sigma^{\mathrm{vis}}_{(S)} \equiv 2\mu(\widetilde{\boldsymbol{S}}:\widetilde{\boldsymbol{S}}) + \mu_\theta(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2 = \frac{\mu}{2}\sum_{k,j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right)^2 + \mu_\theta(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^2, \tag{2.3.10}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ — тензор сдвиговой скорости, определенный формулой (2.2.15). Множители, стоящие при μ и μ_θ, являются суммами квадратов и, следовательно, оба положительны. Из условия того, что один из множителей может быть равен нулю, тогда как другой не равен нулю, следует, что коэффициенты $\mu \geqslant 0$ и $\mu_\theta \geqslant 0$.

2.3.3. Теплопроводность, диффузия и перекрестные эффекты

В литературе можно встретить различные определения теплового и диффузионных потоков, коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, t)$, теплопроводности $\lambda(\boldsymbol{r}, t)$ и термодиффузии $D_{T\alpha}(\boldsymbol{r}, t)$ для многокомпонентной смеси. Правильными определениями коэффициентов переноса являются те, которые согласуются с соотношениями взаимности Онзагера—Казимира в неравновесной термодинамике. Для газокинетической теории многокомпонентных смесей это согласование приобретает особое значение при обобщении ее результатов на случай систем с несохраняющимися плотностями частиц отдельных компонентов, например, в газовых смесях, в которых между компонентами протекают химические реакции, или в многоатомных газах, в которых возможны переходы между состояниями с различными внутренними степенями свободы. Наиболее адекватное определение этих коэффициентов, согласующееся с термодинамическими соотношениями взаимности Онзагера—Казимира, предложено Ферцигером и Капером (*1976*), которое предпочтительнее определения, данного, например, в широко известной монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда (*1961*). В этой монографии многокомпонентные коэффициенты диффузии определены, как не симметричные функции относительно перестановок индексов $D_{\alpha\beta} \neq D_{\beta\alpha}$, что является следствием принятого там допущения о равенстве нулю диагональных коэффициентов $D_{\alpha\alpha} = 0$.

Для возможности сравнения определяющих соотношений для молекулярных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ и тепла $\boldsymbol{q}$ (выведенных нами далее методами неравновесной термодинамики) и аналогичных соотношений, полученных газокинетическими методами в книге (*Ферцигер*, *Капер*, *1976*), выразим градиент химического потенциала μ_α частиц сорта α через градиенты термогидродинамических параметров. Считая рассматриваемую газовую смесь идеальной системой (заметим, что практически идеальными смесями являются разбавленные растворы и смеси совершенных газов), запишем химический потенциал μ_α в виде (см. *Пригожин*, *Дефей*, *1966*)

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^0(T, p) + k_{\mathrm{B}} T \ln\left(\frac{n_\alpha}{n}\right), \tag{2.3.11}$$

где $\mu_\alpha^0(T, p)$ — химический потенциал чистой компоненты α при данных температуре T и давлении p. Если теперь воспользоваться известными термодинамическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu_\alpha^0(T, p)}{T}\right)\right)_p = -\frac{h_\alpha}{T^2}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial p}\mu_\alpha^0(T, p)\right)_T = v_\alpha = 1/n \tag{2.3.12}$$

(где v_α — парциальный молярный объем), то для термодинамической силы X_α^* легко получить следующее выражение

$$X_\alpha^* \equiv -\frac{1}{nT}\,\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} - k_{\mathrm{B}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\,\ln(n_\alpha/n) + \frac{F_\alpha}{T}. \tag{2.3.13}$$

Диффузионные термодинамические силы

Для дальнейших целей удобно материальные соотношения (2.3.1) и (2.3.2) для потоков $\boldsymbol{J}_q$ и $\boldsymbol{J}_\alpha$ записать с помощью некоторых других линейно зависимых векторов $\boldsymbol{d}_\alpha$, тесно связанных с $\boldsymbol{X}^*_\alpha$. Это можно сделать, например, следующим образом: положим $\boldsymbol{d}_\alpha \equiv -Tn_\alpha \boldsymbol{X}^*_\alpha/p + n_\alpha m_\alpha \boldsymbol{K}/p$ и определим общий для всех компонентов α вектор $\boldsymbol{K}$ из условия

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{d}_\alpha = 0; \qquad (2.3.14)$$

тогда получим

$$\boldsymbol{d}_\alpha = -\frac{Tn_\alpha}{p}\boldsymbol{X}^*_\alpha - \frac{n_\alpha m_\alpha}{p\rho}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{n_\alpha m_\alpha}{p\rho}\sum_{\beta=1}^{N} n_\beta \boldsymbol{F}_\beta.$$

Если теперь исключить из этой формулы векторы $\boldsymbol{X}^*_\alpha$ с помощью выражения (2.3.13), то в результате будем иметь

$$\boldsymbol{d}_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right) + \left(\frac{n_\alpha}{n} - \frac{\rho_\alpha}{\rho}\right)\frac{\partial \ln p}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{n_\alpha}{p}\left(\boldsymbol{F}_\alpha - m_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta \boldsymbol{F}_\beta\right). \qquad (2.3.15)$$

Вектор $\boldsymbol{d}_\alpha$, широко используемый также и в газокинетической теории, обычно называют диффузионной термодинамической силой компоненты α (здесь $\rho_\alpha(\boldsymbol{r}, t)(\equiv m_\alpha n_\alpha)$ — массовая плотность частиц сорта α). Подставляя теперь в соотношения (2.3.1) и (2.3.2) векторы $\boldsymbol{X}^*_\alpha = -(k_{\mathrm{B}} n/n_\alpha)\boldsymbol{d}_\alpha + m_\alpha \boldsymbol{K}/T$ и учитывая (2.3.8), в результате получим

$$\boldsymbol{J}_q = L_{qq}\boldsymbol{X}_q - k_{\mathrm{B}} n \sum_{\alpha=1}^{N} L_{q\alpha}\frac{\boldsymbol{d}_\alpha}{n_\alpha}, \qquad (2.3.16)$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha = L_{\alpha q}\boldsymbol{X}_q - k_{\mathrm{B}} n \sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}\frac{\boldsymbol{d}_\beta}{n_\beta}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N). \qquad (2.3.17)$$

Введем теперь в рассмотрение симметричные коэффициенты многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$, коэффициенты термодиффузии $D_{T\alpha}$ и парциальный коэффициент теплопроводности λ' многокомпонентной газовой смеси (при отсутствии диффузионных сил), используя для этой цели следующие определения

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha} \equiv pL_{\alpha\beta}/Tn_\alpha n_\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N); \qquad (2.3.18)$$

$$D_{T\alpha} \equiv L_{q\alpha}/Tn_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \quad \lambda' \equiv L_{qq}/T^2. \qquad (2.3.19)$$

Согласно соотношениям (2.3.8), связывающим кинетические коэффициенты $L_{q\alpha}$ и $L_{\alpha\beta}$, введенные нами обобщенные коэффициенты диффузии и термодиффузии являются линейно зависимыми:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha D_{T\alpha} = 0, \quad (^1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha D_{\alpha\beta} = 0, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N) \quad (^2) \qquad (2.3.20)$$

(здесь $C_\alpha \equiv \rho_\alpha/\rho$ — массовая концентрация частиц сорта α); поэтому для

N-компонентной смеси имеется только $N(N-1)/2$ независимых коэффициентов диффузии и $(N-1)$ независимых коэффициентов термодиффузии. При использовании определений (2.3.18) и (2.3.19), материальные линейные уравнения (2.3.16) и (2.3.17) для потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ и тепла $\boldsymbol{q}$ примут следующий окончательный вид

$$\boldsymbol{q} = -\lambda' \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} - p \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta} \boldsymbol{d}_\beta + \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta \boldsymbol{J}_\beta, \qquad (2.3.21)$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha = -n_\alpha D_{T\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} - n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} \boldsymbol{d}_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \qquad (2.3.22)$$

который полностью совпадает с результатами современной кинетической теорией газов (см. *Ферцигер, Капер, 1976*).

Термодиффузионные отношения

Известно, что термодиффузия является эффектом второго порядка малости, важным лишь в тех случаях, когда существует большая разница в массах участвующих в процессе переноса компонентов. Для дальнейших целей удобно ввести новые коэффициенты переноса для описания эффектов термодиффузии — так называемые термодиффузионные отношения $k_{T\alpha}$:

$$\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} k_{T\beta} = D_{T\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \qquad (2.3.23)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha} = 0. \qquad (2.3.24)$$

Термодиффузионное отношение $k_{T\alpha}$ характеризует меру относительной значимости термодиффузии по отношению к обычной диффузии. В силу соотношений (2.3.20$^{(2)}$) детерминант коэффициентов системы уравнений (2.3.23) обращается в нуль. Единственным решением системы однородных уравнений, соответствующих уравнениям (2.3.23) является N-компонентный вектор массовых концентраций $C_\alpha \equiv \rho_\alpha/\rho$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), но, согласно (2.3.20$^{(1)}$), этот вектор ортогонален N-компонентному вектору коэффициентов термодиффузии. Таким образом, уравнения (2.3.23) имеют решение в форме некоторого вектора $\boldsymbol{k}_T$ с компонентами $k_{T\alpha}$, определенными с точностью до некоторой произвольной постоянной, умноженной на C_α; условие (2.3.24) обеспечивает единственность вектора $\boldsymbol{k}_T$. Заметим, что явные выражения для величин $k_{T\alpha}$ в газокинетической теории получены в предположении, что газы в смеси являются одноатомными либо внутренние степени свободы молекул газа «заморожены» (см. *Ферцигер, Капер, 1976*).

При использовании коэффицитентов $k_{T\alpha}$, выражение (2.3.22) для потока диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ может быть переписано в виде следующего обобщенного закона Фика

$$\boldsymbol{J}_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{N} n_\alpha D_{\alpha\beta} \left(\boldsymbol{d}_\beta + k_{T\beta} \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} \right), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N). \qquad (2.3.25)$$

Относительно соотношения (2.3.21) для потока тепла $\boldsymbol{q}$ сделаем теперь следующее важное замечание. Член $\sum_\beta h_\beta \boldsymbol{J}_\beta$ в соотношении (2.3.21) соответствует потоку энтальпии, обусловленному диффузией молекул в системе координат, движущейся с гидродинамической скоростью $\boldsymbol{u}$. Теплопроводность обычно измеряется в условиях, когда все диффузионные потоки $\boldsymbol{J}_\alpha$ равны нулю. Поэтому коэффициент λ' не может быть определен в результате прямого экспериментального измерения, так как градиент температуры в газовой смеси вызывает термодиффузию и, следовательно, приводит к градиентам концентрации. Таким образом, даже в стационарных процессах векторы $\boldsymbol{d}_\beta$ не равны нулю, а значит, и тепловой поток, обусловленный градиентом температуры, всегда сопровождается тепловым потоком, обусловленным и градиентами концентрации. С помощью соотношений (2.3.23), (2.3.18) и (2.3.22) можно выразить векторы $\boldsymbol{d}_\beta$ через потоки диффузии и градиент температуры:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} D_{T\alpha}\boldsymbol{d}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}k_{T\beta}\boldsymbol{d}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} D_{\beta\alpha}k_{T\beta}\boldsymbol{d}_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{N} k_{T\beta}\left(\frac{1}{n_\beta}\boldsymbol{J}_\beta + D_{T\beta}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right).$$

Подставляя это выражение в (2.3.21), получаем уравнение для вектора теплового потока в виде

$$\boldsymbol{q} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} + p\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{k_{T\beta}}{n_\beta} + h_\beta\right)\boldsymbol{J}_\beta, \tag{2.3.26}$$

где λ — истинный (молекулярный) коэффициент теплопроводности многокомпонентной смеси,

$$\lambda \equiv \lambda' - nk_{\text{B}}\sum_{\beta=1}^{N} k_{T\beta}D_{T\beta}. \tag{2.3.27}$$

Именно этот коэффициент можно непосредственно измерить экспериментально в стационарной системе, поскольку в стационарном случае все потоки диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ равны нулю, когда газ в целом покоится. Как видно из (2.3.27), разность между λ' и λ порядка D_T^2. Вследствие известной малости коэффициентов термодиффузии (напомним, что все перекрестные эффекты являются эффектами второго порядка малости (см. *де Гроот, Мазур, 1964*) этой разностью часто пренебрегают. Слагаемое $p\sum_\beta \frac{k_{T\beta}}{n_\beta}\boldsymbol{J}_\beta$ в выражении (2.3.26) для вектора теплового потока соответствует диффузионному потоку тепла.

Наконец, из (2.3.25) и (2.3.26) следует, что вклад эффектов теплопроводности и диффузии в выражение (2.2.23) для скорости возникновения энтропии равен

$$\overset{(\text{вект})}{\sigma_{(S)}} = \lambda\left|\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right|^2 + kn\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{d}_\alpha + k_{T\alpha}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{d}_\beta + k_{T\beta}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \geqslant 0. \tag{2.3.28}$$

Из очевидного условия, что одно из слагаемых может быть равно нулю, тогда как другие не равны нулю, следует, что коэффициент теплопроводности $\lambda > 0$, а для коэффициентов многокомпонентной диффузии справедливо неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \geqslant 0$$

при любых векторах x_α, удовлетворяющих равенству $\sum_\alpha x_\alpha = 0$. Из свойств неотрицательно определенной матрицы коэффициентов $D_{\alpha\beta}$ можно указать следующие условия Сильвестра: $D_{\alpha\alpha} \geqslant 0$ — неотрицательность всех элементов матрицы $D_{\alpha\beta}$ на главной диагонали; $D_{\alpha\beta} D_{\beta\alpha} \leqslant D_{\alpha\alpha} D_{\beta\beta}$ (каждый минор неотрицательно определенной матрицы $D_{\alpha\beta}$ содержащий элементы ее главной диагонали как свою собственную главную диагональ, также должен быть неотрицательным) и т. п. В пределах указанных ограничений коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ изменяются в очень широком диапазоне значений в соответствии со степенью связи между процессами тепло- и массопереноса.

2.3.4. Соотношения Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии

Использование определяющих соотношений (2.3.22) для потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha$ в общем многокомпонентном случае крайне затруднительно, поскольку в литературе за редким исключением отсутствуют какие-либо практические сведения по обобщенным коэффициентам многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$ (величины $D_{\alpha\beta}$ зависят в общем случае от молярных долей x_α и обычно не табулируются), а существующие экспериментальные данные относятся в основном к коэффициентам диффузии $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ в бинарных газовых смесях. Вместе с тем, газокинетическая теория смесей дает чрезвычайно громоздкие формулы, связывающие коэффициенты диффузии $D_{\beta\alpha}$ с бинарными коэффициентами $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ для различных пар компонентов смеси. Эти формулы обычно трудно использовать при решении конкретных задач. К тому же система уравнений, получающаяся после подстановки $\boldsymbol{J}_\alpha$ из (2.3.22) в балансовые уравнения диффузии (2.1.7), оказывается не разрешенной относительно старших производных. Как известно, численная реализация подобных систем сопряжена с определенными трудностями. Поэтому, при анализе процессов диффузии в многокомпонентных газовых смесях, часто выгодна иная формулировка задачи, когда определяющие соотношения (2.3.22) для потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha \equiv n_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u})$ используются в виде, разрешенном относительно диффузионных термодинамических сил $\boldsymbol{d}_\alpha$ через потоки $\boldsymbol{J}_\alpha$. Подобное обратное преобразование может быть записано в виде так называемых обобщенных соотношений Стефана—Максвелла

$$\boldsymbol{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{n^2 X \mathscr{D}_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta) + \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{n^2 \mathscr{D}_{\alpha\beta}} (D_{T\alpha} - D_{T\beta}), \qquad (2.3.29)$$

в которые вместо обобщенных коэффициентов многокомпонентной диффузии $D_{\beta\alpha}$ входят молекулярные коэффициенты диффузии в бинарных газовых смесях $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$. Преимуществом этих уравнений является то, что в них величина $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ почти не зависит от концентраций отдельных компонентов газовых смесей при низкой плотности.

Исторически соотношения (2.3.29) (без учета термодиффузии, $D_{T\alpha}=0$) были получены Стефаном (*1871*) и Максвеллом (*1890*) феноменологически в предположении, что сила, действующая на частицы сорта α со стороны частиц сорта β, пропорциональна разности их диффузионных скоростей, а полная сила сопротивления движению частиц сорта α в смеси равна сумме независимых сил сопротивления от всех остальных частиц (других сортов). Обобщенные соотношения Стефана—Максвелла (учитывающие термодиффузию и влияние внешних массовых сил) методами кинетической теории одноатомных газов были получены в книге (*Гиршфельдер и др.*, *1961*) в рамках учета первого приближения теории Чепмена—Энскога для многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$ и второго приближения для коэффициентов термодиффузии $D_{T\alpha}$. В работе (*Макенфус*, *Куртис*, *1958*) эти соотношения были выведены в рамках полного второго приближения теории Чепмена—Энскога. Позднее в ряде работ предпринимались безуспешные попытки получить соотношения (2.3.29) из газокинетической теории в любом приближении коэффициентов переноса (см., например, *Макенфус*, *1973*). В связи с этим, Трусделлом (*1962*) было высказано предположение, что соотношения Стефана—Максвелла (2.3.29) не носят всеобъемлющего характера, а являются приближенным результатом кинетической теории. Однако позднее, в работе (*Колесниченко*, *Тирский*, *1976*) эти соотношения впервые были получены методами неравновесной термодинамики, что доказывает их абсолютную универсальность (т. е. законность применения к любым взаимно диффундирующим средам).

Термодинамический вывод соотношений Стефана—Максвелла

Для получения соотношений Стефана—Максвелла разрешим определяющие соотношения (2.3.16) и (2.3.17) относительно обобщенных термодинамических сил $\boldsymbol{X}_q$ и $\boldsymbol{X}_\alpha \equiv (p/Tn_\alpha)\boldsymbol{d}_\alpha$ ($\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ N$) через потоки $\boldsymbol{J}_q$ и $\boldsymbol{J}_\alpha$ ($\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ N$). Опуская для этого последнее уравнение системы (2.3.17) и используя (2.3.8), представим соотношения (2.3.16) и (2.3.17) в виде

$$\boldsymbol{J}_q - L_{qq}\boldsymbol{X}_q = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{q\beta}\left(\boldsymbol{X}_\beta - \frac{m_\beta}{m_N}\boldsymbol{X}_N\right), \tag{2.3.30}$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha - L_{\alpha q}\boldsymbol{X}_q = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{X}_\beta - \frac{m_\beta}{m_N}\boldsymbol{X}_N\right), \quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \tag{2.3.31}$$

Разрешая теперь систему (2.3.31) относительно разностей $\boldsymbol{X}_\beta - (m_\beta/m_N)\boldsymbol{X}_N$, в результате найдем

$$\boldsymbol{X}_\beta - (m_\beta/m_N)\boldsymbol{X}_N = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathscr{M}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{J}_\alpha - L_{\alpha q}\boldsymbol{X}_q), \quad (\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \tag{2.3.32}$$

Здесь $\mathscr{M}_{\beta\alpha}$ — элементы обратной матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathscr{M}_{\beta\alpha}L_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \beta=\gamma; \\ 0, & \beta\neq\gamma, \end{cases} \tag{2.3.33}$$

где $\delta_{\beta\gamma}$ — символ Кронекера. Из симметрии феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ следует симметрия и коэффициентов $\mathscr{M}_{\alpha\beta}$:

$$\mathscr{M}_{\alpha\beta} = \mathscr{M}_{\beta\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N-1). \tag{2.3.34}$$

Из (2.3.30), с использованием (2.3.32), получим следующее соотношение для определения термодинамической силы X_q через потоки $\boldsymbol{J}_q$ и $\boldsymbol{J}_\alpha$

$$\boldsymbol{J}_q = \left(L_{qq} - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{q\beta}\mathscr{M}_{\beta\alpha}L_{\alpha q}\right)\boldsymbol{X}_q + \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left(\sum_{\beta=1}^{N-1} L_{q\beta}\mathscr{M}_{\beta\alpha}\right)\boldsymbol{J}_\alpha. \tag{2.3.35}$$

Умножим теперь каждое из уравнений (2.3.32) на Z_β $\left(\text{заметим, что } \sum_\beta m_\beta Z_\beta = \right.$ $= 1, \ \sum_\beta Z_\beta \boldsymbol{X}_\beta = 0)$ и просуммируем их от 1 до $(N-1)$; в результате получим искомые соотношения для векторов диффузионных сил $\boldsymbol{d}_\alpha \equiv (Tn_\alpha/p)\boldsymbol{X}_\alpha$ в виде

$$\boldsymbol{X}_N = \left(m_N \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha} L_{\alpha q}\right)\boldsymbol{X}_q - m_N \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left(\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha}\right)\boldsymbol{J}_\alpha, \tag{2.3.36}$$

$$\boldsymbol{X}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{\alpha q}\left(m_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha} - \mathscr{M}_{\beta\alpha}\right)\boldsymbol{X}_q - \sum_{\alpha=1}^{N-1}\left(\mathscr{M}_{\beta\alpha} - m_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha}\right)\boldsymbol{J}_\alpha. \tag{2.3.37}$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, N-1).$$

Таким образом, система уравнений (2.3.36) и (2.3.37) представляет собой обращение соотношений (2.3.31).

Для того, чтобы записать уравнения (2.3.36) и (2.3.37) в виде обобщенных соотношений Стефана—Максвелла, прибавим к (2.3.35), (2.3.36) и (2.3.37) тождество $\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha = 0$, умноженное соответственно на неопределенные пока константы a_q, a_N и a_β $(\beta = 1, 2, \dots, N-1)$. Тогда получим

$$\boldsymbol{J}_q = \mathscr{A}_{qq}\boldsymbol{X}_q + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathscr{A}_{q\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha, \tag{2.3.38}$$

$$-\boldsymbol{X}_\beta = \mathscr{A}_{\beta q}\boldsymbol{X}_q + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathscr{A}_{\beta\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha, \quad (\beta = 1, 2, \dots, N), \tag{2.3.39}$$

где свободные параметры a_q и a_β находим из требования симметрии коэффициентов $\mathscr{A}_{\beta\alpha} = \mathscr{A}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N)$

$$a_q = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha} L_{\alpha q}, \tag{2.3.40}$$

$$a_\beta = (m_\beta/m_N)a_N - \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\beta}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, N-1), \tag{2.3.41}$$

а сами коэффициенты $\mathscr{A}_{\beta\alpha}$ равны

$$\mathscr{A}_{qq} = L_{qq} - \sum_{\beta=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{q\beta}\mathscr{M}_{\beta\gamma}L_{\gamma q}, \tag{2.3.42}$$

$$\mathscr{A}_{qN} = \mathscr{A}_{Nq} = a_q m_N = -m_N \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha}L_{\alpha q}, \tag{2.3.43}$$

$$\mathscr{A}_{q\alpha} = \mathscr{A}_{\alpha q} = a_q m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{q\alpha}\mathscr{M}_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\beta q}\left(\mathscr{M}_{\beta\alpha} - m_\alpha \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\beta}\right), \tag{2.3.44}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$\mathscr{A}_{\beta\alpha} = \mathscr{A}_{\alpha\beta} = -\frac{m_\alpha m_\beta}{m_N} a_N + \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma (m_\alpha \mathscr{M}_{\gamma\beta} + m_\beta \mathscr{M}_{\gamma\alpha}) - \mathscr{M}_{\beta\alpha}, \tag{2.3.45}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N-1)$$

$$\mathscr{A}_{N\alpha} = \mathscr{A}_{\alpha N} = -a_N m_\alpha + m_N \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha}, \tag{2.3.46}$$

$$\mathscr{A}_{NN} = -a_N m_N, \tag{2.3.47}$$

причем имеет место тождество

$$\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \mathscr{A}_{\alpha q} = 0. \tag{2.3.48}$$

Таким образом, коэффициенты $\mathscr{A}_{\alpha\beta}$ определены с точностью до константы a_N, которую можно выбрать, вообще говоря, произвольно. Выберем ее здесь из условия, чтобы наряду с тождеством (2.3.48) выполнялись тождества

$$\sum_{\beta=1}^{N} Z_\beta \mathscr{A}_{\beta\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3.49}$$

Подставляя сюда (2.3.45) и (2.3.46), находим a_N:

$$a_N = -m_N \sum_{\beta=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\beta Z_\gamma \mathscr{M}_{\beta\gamma}. \tag{2.3.50}$$

Как видим, коэффициенты $\mathscr{A}_{\beta\alpha}$ определены полностью через элементы симметричной матрицы феноменологических коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ и элементы обратной к ней симметричной матрицы $\mathscr{M}_{\alpha\beta}$.

Приведем теперь выражения (2.3.39) к виду обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии. Вычтем для этого из (2.3.39) равенства (2.3.49), умноженные предварительно на J_β/Z_β. Тогда найдем

$$-\boldsymbol{X}_\beta = \mathscr{A}_{\beta q}\boldsymbol{X}_q + \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \mathscr{A}_{\beta\alpha} n_\alpha (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.3.51}$$

или в более привычных обозначениях

$$\boldsymbol{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{p} \mathscr{A}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta) - \frac{\mathscr{A}_{\beta q} n_\beta}{Tp}\frac{\partial \ln T}{\partial t}, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3.52}$$

Осталось еще показать, что

$$\mathscr{A}_{\beta q} = -\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \mathscr{A}_{\beta\alpha}\left(\frac{L_{q\alpha}}{n_\alpha} - \frac{L_{q\beta}}{n_\beta}\right), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3.53}$$

Используя для этого (2.3.44), (2.3.45) и тождества (2.3.48) и (2.3.49), найдем

$$\sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \mathscr{A}_{\beta\alpha}\left(\frac{L_{q\alpha}}{n_\alpha} - \frac{L_{q\beta}}{n_\beta}\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathscr{A}_{\beta\alpha} L_{q\alpha} - \frac{L_{q\beta}}{n_\beta} \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha \mathscr{A}_{\beta\alpha} = \mathscr{A}_{\beta N} L_{qN} + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \mathscr{A}_{\beta\alpha} L_{q\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{q\alpha}\left(\mathscr{A}_{\beta\alpha} - \frac{m_\alpha}{m_N}\mathscr{A}_{\beta N}\right) = \sum_{\alpha=1}^{N-1} L_{q\alpha}\left(-\mathscr{M}_{\beta\alpha} + m_\beta \sum_{\gamma=1}^{N-1} Z_\gamma \mathscr{M}_{\gamma\alpha}\right) = -\mathscr{A}_{\beta q}. \tag{2.3.54}$$

Подставляя, наконец, (2.3.53) в (2.3.52) и используя обозначения (2.3.19) для молекулярных коэффициентов термодиффузии ($D_{T\alpha} \equiv L_{q\alpha}/Tn_\alpha$), для векторов диффузионных сил найдем

$$\boldsymbol{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{p} \mathscr{A}_{\beta\alpha}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta) + \frac{\partial \ln T}{\partial t} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{p} \mathscr{A}_{\beta\alpha}(D_{T\alpha} - D_{T\beta}),$$

$$(\beta = 1, 2, \ldots, N-1)$$

что полностью совпадает с классическими соотношениями Стефана—Максвелла (2.3.29)

$$\boldsymbol{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta \boldsymbol{J}_\alpha - n_\alpha \boldsymbol{J}_\beta}{n^2 \mathscr{D}_{\alpha\beta}} + \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{n^2 \mathscr{D}_{\alpha\beta}}(D_{T\alpha} - D_{T\beta}), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{2.3.55}$$

если определить бинарные коэффициенты диффузии соотношением

$$\mathscr{D}_{\alpha\beta} = k_{\text{B}} T / n\mathscr{A}_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3.56}$$

Как уже было отмечено выше очень удобными параметрами термодиффузионных процессов [см. (2.3.25) и (2.3.26)], являются термодиффузионные отношения $k_{T\beta}$, которые определим здесь через феноменологические коэффициенты $\mathscr{A}_{q\beta}$ по формуле

$$k_{T\beta} \equiv n_\beta \mathscr{A}_{\beta q}/p, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.3.57}$$

Тогда, в силу (2.3.48), справедливо равенство $\sum\limits_\beta k_{T\beta} = 0$ [ср. с (2.3.24)]. Кроме этого, легко проверить, что имеют место соотношения

$$\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta} \mathscr{A}_{\beta q} = L_{q\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{2.3.58}$$

из которых, с учетом определений (2.3.18), (2.3.19) и (2.3.57), следует система уравнений (2.3.23) $\sum\limits_\beta D_{\alpha\beta} k_{T\beta} = D_{T\alpha}$ для нахождения термодиффузионных отношений $k_{T\beta}$ через коэффициенты многокомпонентной диффузии $D_{\alpha\beta}$ и коэффициенты термодиффузии $D_{T\alpha}$. Действительно, используя соотношения (2.3.8), (2.3.33), (2.3.43) и (2.3.44), можно последовательно получить

$$\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}\mathscr{A}_{\beta q} = L_{\alpha N}\mathscr{A}_{Nq} + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\mathscr{A}_{\beta q} = -a_q \sum_{\beta=1}^{N-1} m_\beta L_{\beta\alpha} +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\left(a_q m_\beta + \sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{q\gamma}\mathscr{M}_{\gamma\beta}\right) = \sum_{\beta=1}^{N-1}\sum_{\gamma=1}^{N-1} L_{\alpha\beta}\mathscr{M}_{\gamma\beta}L_{q\gamma} = L_{q\beta}. \quad (2.3.59)$$

Таким образом, введенные ранее формулами (2.3.23) и (2.3.24) термодиффузионные отношения $k_{T\beta}$ полностью совпадают с коэффициентами (2.3.57).

Используя теперь определения (2.3.18), (2.3.19) и (2.3.56), а также выражение (2.3.53) для величин $k_{T\beta}$, заданных формулами (2.3.57) получим важные алгебраические соотношения

$$k_{T\beta} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta n_\alpha}{n^2\mathscr{D}_{\alpha\beta}}(D_{T\beta} - D_{T\alpha}), \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N-1), \quad (2.3.60)$$

связывающие термодиффузионные отношения $k_{T\beta}$ с коэффициентами термодиффузии $D_{T\beta}$ для многокомпонентной смеси и бинарными коэффициентами диффузии $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$. Эти соотношения, фигурирующие также в современной газокинетической теории, носят, таким образом, универсальный характер, поскольку их вывод стал возможен в рамках развитого здесь термодинамического подхода.

Наконец, используя (2.3.60), перепишем обобщенные соотношения Стефана—Максвелла (2.3.55) в следующем виде

$$\boldsymbol{d}_\beta = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{n_\beta \boldsymbol{J}_\alpha - n_\alpha \boldsymbol{J}_\beta}{n^2\mathscr{D}_{\alpha\beta}} + k_{T\beta}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \sum_{\gamma=1}^{N} m_\gamma \boldsymbol{J}_\gamma = 0, \quad (2.3.55^*)$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots, N-1),$$

где $\boldsymbol{d}_\beta$ определяется равенством (2.3.15). Эта форма соотношений Стефана—Максвелла более удобна для фактического решения гидродинамических задач, поскольку коэффициенты $\mathscr{D}_{\alpha\beta}$ и $k_{T\beta}$ имеют существенно более простые выражения для практического вычисления, чем коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ и $D_{T\beta}$ (см. *Ферцигер*, *Капер*, *1976*).

Приближенный закон диффузии Фика

В случае прямого численного решения соотношений (2.3.55*) относительно диффузионных потоков $\boldsymbol{J}_\alpha$, возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью обращения матриц размерности $(N-1)^2$, когда количество необходимых арифметических операций возрастает пропорционально $(N-1)^3$ на ячейку. Это обстоятельство практически исключает возможность использования соотношений (2.3.55*) без дополнительной модификации для смеси с числом более четырех или пяти компонент. Поэтому при определении диффузионных потоков из (2.3.55*) удобно применять такие вычислительные процедуры (например, метод последовательных приближений), которые позволяют избежать подобного обращения матриц (см. *Оран*, *Борис*, *1990*). Например, применительно к задаче расчета состава верхней атмосферы может быть осуществлена некоторая итерационная процедура на основе следующей формы записи соотношений (2.3.55*):

$$\boldsymbol{J}_\beta = -D_\beta\left(n\boldsymbol{d}_\beta - nk_{T\beta}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{x_\beta \boldsymbol{J}_\alpha}{D_{\alpha\beta}}\right) = -\rho D_\beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{n_\beta}{\rho}\right) + \delta\boldsymbol{J}_\beta, \tag{2.3.61}$$

где

$$\delta\boldsymbol{J}_\beta \equiv n_\beta D_\beta\left\{-\frac{\partial \ln \mathcal{M}}{\partial \boldsymbol{r}} - \left(1-\frac{m_\beta}{M}\right)\frac{\partial \ln p}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{n}{p}\left(\boldsymbol{F}_\beta - m_\beta\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha\right) + \frac{k_{T\beta}}{x_\beta}\frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\boldsymbol{J}_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}\right\};$$

$$\frac{1}{D_\beta} \equiv \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}, \qquad \mathcal{M} \equiv \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha n_\alpha, \qquad n \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha, \qquad x_\alpha \equiv \frac{n_\alpha}{n}$$

— соответственно средний молекулярный вес, полная числовая плотность и молярная концентрация частиц сорта α смеси. Соотношения (2.3.61) получены путем формального разрешения каждого из уравнений системы (2.3.55*) относительно потока $\boldsymbol{J}_\beta$, так как если бы остальные потоки были нам известны. Уравнения (2.3.61) имеют вид, аналогичный закону Фика, с той, однако, существенной разницей, что значение эффективного коэффициента диффузии D_β каждого из компонент β находится усреднением по правилу Уилке (см. *Франк-Каменецкий*, *1987*). Коэффициент D_β зависит от состава смеси и при многокомпонентной диффузии является, строго говоря, величиной переменной.

Согласно формуле (2.3.61), поток диффузии частиц сорта β зависит от состава и диффузионных потоков других компонент; однако, так как в случае численного решения задач часто используются методы последовательных приближений, это обстоятельство не является существенным. Численный расчет по формуле (2.3.61) может быть реализован, в частности, с помощью метода Гаусса—Зейделя, при котором на каждом шаге по времени (глобальной итерации при решении стационарной задачи методом установления) выполняется только одна итерация (см. *Лапин и др.*, *1984*). Следует отметить, что с точки зрения затрат машинного времени этот метод практически эквивалентен методу расчета диффузионных потоков $\boldsymbol{J}_\beta$ на основе обобщенного закона Фика для многокомпонентной диффузии

$$\boldsymbol{J}_\beta = -\rho D_\beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{n_\beta}{\rho}\right), \qquad \frac{1}{D_\beta} \equiv \sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{x_\alpha}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, N-1) \tag{2.3.61*}$$

справедливого, как известно, только в приближении независимой диффузии (т. е. в случае, когда термодиффузия пренебрежимо мала, молекулярные массы диффундирующих веществ могут считаться приблизительно постоянными, а отнесенная к единице массы массовая сила одна и та же для каждой компоненты, например, $\boldsymbol{F}_\alpha = m_\alpha \boldsymbol{g}$), с эффективным коэффициентом диффузии Уилки D_β. В то же время он свободен от существенных недостатков последнего, связанных, в частности, с невыполнением тождества (2.1.8$^{(2)}$), что приводит, в общем случае, к заметному нарушению интегральных условий баланса масс для отдельных компонент смеси. Вместе с тем, слабой стороной метода Гаусса—Зейделя, основанного на соотношениях (2.3.61), является необходимость хранения в машинной памяти больших массивов — полей векторов $\boldsymbol{J}_\alpha$.

Тепловой поток в многокомпонентной смеси

Выше было показано, что приведенный тепловой поток $\boldsymbol{J}_q$ за счет теплопроводности и диффузии определяется формулой (2.3.21)

$$\boldsymbol{J}_q \equiv \boldsymbol{q} - \sum_{\beta=1}^{N} h_\beta \boldsymbol{J}_\beta = -\lambda' \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} - p \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta} \boldsymbol{d}_\beta. \tag{2.3.62}$$

С другой стороны, из (2.3.38), при учете (2.3.57), следует [ср. с (2.3.26)]

$$\boldsymbol{J}_q = \mathscr{A}_{qq} \boldsymbol{X}_q + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathscr{A}_{q\alpha} \boldsymbol{J}_\alpha = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} + p \sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha} \frac{\boldsymbol{J}_\alpha}{n_\alpha}, \tag{2.3.63}$$

где выражением

$$\lambda = \mathscr{A}_{qq}/T^2 \tag{2.3.64}$$

определен истинный коэффициент теплопроводности, который связан с парциальным коэффициентом теплопроводности λ' соотношением [ср. с (2.3.27)]

$$\lambda = \lambda' - k_B n \sum_{\alpha=1}^{N} k_{T\alpha} D_{T\alpha} = \lambda' - k_B n \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} k_{T\alpha} D_{\alpha\beta} k_{T\beta}. \tag{2.3.65}$$

Действительно, в силу (2.3.33), (2.3.42) и (2.3.59), будем иметь

$$\mathscr{A}_{qq} \equiv L_{qq} - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\delta=1}^{N-1} L_{q\delta} \mathscr{M}_{\delta\alpha} L_{q\alpha} = L_{qq} - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{\delta=1}^{N-1} L_{q\delta} \mathscr{M}_{\delta\alpha} \left(L_{qN} A_{Nq} + \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{\alpha\beta} \mathscr{A}_{\beta q} \right) =$$

$$= L_{qq} - \sum_{\beta=1}^{N-1} L_{q\beta} \mathscr{A}_{\beta q} - \mathscr{A}_{Nq} L_{qN} = L_{qq} - \sum_{\beta=1}^{N} L_{q\beta} \mathscr{A}_{\beta q}, \tag{2.3.66}$$

откуда, при использовании обозначений (2.3.19), (2.3.57) и (2.3.64), следует выражение (2.3.65). Отметим, что чрезвычайно полезные полуэмпирические формулы для расчета коэффициента теплопроводности λ для многокомпонентной многоатомной смеси приведены в работе Мэйсона и Саксены (*1958*). Оценки точности этих формул, а также других полуэмпирических соотношений можно найти в неоднократно цитированной выше книге Ферцигера и Капера (*1976*).

Записанное с учетом формул (2.3.10) и (2.3.62), уравнение притока тепла (2.1.29), принимает вид

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}_R + \operatorname{div}\left(\lambda' \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}} + p \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta} \boldsymbol{d}_\beta\right) + \frac{\mu}{2} \sum_{k,j}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)^2 +$$

$$+ \mu_\theta (\operatorname{div} \boldsymbol{u})^2 - p \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \sum_{s=1}^{r} q_s \xi_s + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^* + Q_d. \qquad (2.1.29^*)$$

Это дифференциальное уравнение соответствует первому закону термодинамики (т. е. закону сохранения тепловой энергии) для случая консервативных внешних сил.

2.3.5. Формулы для определения многокомпонентных коэффициентов диффузии через бинарные коэффициенты

Развитый выше метод позволяет получить также алгебраические уравнения для определения симметричных коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}$ через бинарные коэффициенты $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$. Легко проверить, что справедливо соотношение

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} \mathcal{A}_{\beta\alpha}(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}) = n_\gamma(\delta_{\alpha\gamma} - C_\alpha), \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, N). \qquad (2.3.67)$$

Действительно, в силу (2.3.8), (2.3.45) и (2.3.49) имеем

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} \mathcal{A}_{\beta\alpha}(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}) = \sum_{\beta=1}^{N} \mathcal{A}_{\beta\alpha}(n_\beta L_{\gamma\alpha} - n_\alpha L_{\gamma\beta}) - n_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} \mathcal{A}_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta} =$$

$$= -n_\alpha\left(\sum_{\beta=1}^{N-1} \mathcal{A}_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta} + \mathcal{A}_{\beta N} L_{\gamma N}\right) = -n_\alpha\left[m_\alpha \sum_{\delta=1}^{N-1} Z_\delta\left(\sum_{\beta=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\delta\beta} L_{\beta\gamma}\right) - \sum_{\beta=1}^{N-1} \mathcal{M}_{\beta\alpha} L_{\gamma\beta}\right] =$$

$$= -n_\alpha\left(m_\alpha \sum_{\delta=1}^{N-1} Z_\delta \delta_{\delta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\right) = n_\gamma(\delta_{\alpha\gamma} - C_\alpha).$$

При использовании обозначений (2.3.18) и (2.3.56) для величин $\mathcal{A}_{\beta\alpha}$ $(= k_B T / n\mathcal{D}_{\alpha\beta})$ и $L_{\gamma\alpha}$ $(= n_\gamma n_\alpha D_{\gamma\alpha}/p)$, соотношения (2.3.67) могут быть переписаны в виде следующих алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N} \frac{x_\alpha x_\beta}{\mathcal{D}_{\alpha\beta}}(D_{\gamma\alpha} - D_{\gamma\beta}) = \delta_{\gamma\alpha} - C_\alpha, \qquad (\gamma, \alpha = 1, 2, \ldots, N), \qquad (2.3.68)$$

пригодных для определения многокомпонентных коэффициентов диффузии смеси $D_{\gamma\beta}$ через бинарные диффузионные коэффициенты $\mathcal{D}_{\gamma\beta}$. Уравнения (2.3.68) линейно зависимы (т. к. суммирование (2.3.67) по α приводит к тождеству), поэтому к ним следует добавить еще одно уравнение, а именно $(2.3.20^{(2)})$.

Уравнениям (2.3.68) и (2.3.20[(2)]) можно придать следующий окончательный вид

$$\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{N}\left(\frac{n_\alpha n_\beta}{\mathscr{D}_{\alpha\beta}}+\sum_{\substack{\delta=1\\ \delta\neq\alpha}}^{N}\frac{m_\beta}{m_\alpha}\frac{n_\alpha n_\delta}{\mathscr{D}_{\alpha\delta}}\right)D_{\gamma\beta}=n^2(C_\alpha-\delta_{\gamma\alpha}),\qquad (\alpha,\gamma=1,2,\ldots,N),\tag{2.3.69}$$

который является весьма удобным для практических расчетов многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{\gamma\beta}$. Для бинарной смеси из (2.3.69) получаются следующие выражения для коэффициентов многокомпонентной диффузии

$$D_{11}=\frac{m_1m_2\rho_2n^2}{\rho_1\rho^2}\mathscr{D}_{12},\qquad D_{22}=\frac{m_1m_2\rho_1n^2}{\rho_2\rho^2}\mathscr{D}_{12},\qquad D_{12}=D_{21}=-\frac{m_1m_2n^2}{\rho^2}\mathscr{D}_{12}.\tag{2.3.70}$$

Для смеси, состоящей из трех компонент, типичные коэффициенты многокомпонентной диффузии имеют вид:

$$\begin{aligned}D_{11}&=\frac{n^2}{\rho^2n_1^2}\left(\frac{n_1n_3m_3^2\mathscr{D}_{23}\mathscr{D}_{31}+n_1n_2m_2^2\mathscr{D}_{12}\mathscr{D}_{23}+(\rho_2+\rho_3)^2\mathscr{D}_{12}\mathscr{D}_{31}}{n_1\mathscr{D}_{23}+n_2\mathscr{D}_{31}+n_3\mathscr{D}_{12}}\right),\\ D_{12}&=\frac{n}{\rho^2}2\left(\frac{n_3m_3^2\mathscr{D}_{23}\mathscr{D}_{31}-m_2(\rho_1+\rho_2)\mathscr{D}_{12}\mathscr{D}_{23}-m_1(\rho_2+\rho_3)\mathscr{D}_{31}\mathscr{D}_{11}}{n_1\mathscr{D}_{32}+n_2\mathscr{D}_{31}+n_3\mathscr{D}_{12}}\right),\end{aligned}\tag{2.3.71}$$

где $\rho_\alpha=m_\alpha n_\alpha$ — массовая плотность частиц сорта α. Выражения для других коэффициентов $D_{\alpha\beta}$ могут быть получены из (2.3.71) с помощью простой перестановки индексов.

Таким образом, предложенная в этой главе методика термодинамического вывода обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии позволяет также получить целый ряд алгебраических соотношений, связывающих термодиффузионные отношения с коэффициентами термодиффузии и многокомпонентной диффузии, истинный и парциальный коэффициенты теплопроводности, многокомпонентные и бинарные коэффициентов диффузии (*Колесниченко, Маров, 1999*). Все выведенные нами соотношения находятся в полном согласии с результатами газокинетической теории многокомпонентных смесей одноатомных газов, полученными в рамках второго приближения метода Чепмена—Энскога (см. *Куртисс, 1968*; *Ферцигер, Капер, 1976*). Однако, в отличие от газокинетического, термодинамический подход не связан с постулированием конкретной микроскопической модели взаимодействия молекул. Это доказывает универсальность, всех полученных здесь результатов, которые могут быть использованы для описания широкого класса сплошных сред, в частности, многоатомных химически активных газовых смесей, плотных газов, жидких растворов и т. п.

Глава 3

Замкнутая система гидродинамических уравнений для описания турбулентных движений многокомпонентных сред

Растущий в последнее время интерес к исследованиям развитых турбулентных течений сжимаемых газов и жидкостей (см., например, *Ван Мигем*, *1977*; *Иевлев*, *1975*, *1990*; *Компаниец и др.*, *1979*; *Бруяцкий*, *1986*; *Колесниченко*, *Маров*, *1999*) инициирован необходимостью решения многочисленных задач ракетной и космической техники, химической технологии, а также задач, связанных с охраной окружающей среды. Параллельно с этим совершенствуются методы теоретического моделирования природных сред, включая ранее недоступные области околоземного космического пространства и атмосфер других планет Солнечной системы разнообразных астрофизических объектов. В частности, стало очевидным, что моделирование верхней атмосферы планеты (решение аэрономических задач) требует разработки адекватной модели турбулентного движения, учитывающей многокомпонентность и сжимаемость среды, процессы тепло- и массопереноса и химические реакции (*Маров*, *Колесниченко*, *1987*).

Мы начнем с вывода замкнутой системы осредненных гидродинамических уравнений, предназначенных для описания широкого класса турбулентных течений и физико-химических процессов в многокомпонентных средах, и проанализируем физический смысл отдельных членов этих уравнений, в том числе скоростей перехода энергии между различными составляющими энергетического баланса. Наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением здесь систематически использовано весовое (средневзвешенное) осреднение Фавра (*1969*), позволяющее в значительной степени упростить запись и анализ осредненных уравнений движения химически активных газов с переменными плотностью и теплофизическими свойствами. При этом особое внимание уделено выводу термодинамическими методами замыкающих соотношений для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений Рейнольдса. Для удобства читателя все выкладки проведены весьма подробно и могут быть прослежены во всех деталях.

Прогресс в развитии и применении полуэмпирических моделей турбулентности первого порядка замыкания (так называемых градиентных моделей) для одножидкостной среды позволяет получить обобщения некоторых из них на важный для целей астро- и геофизики случай турбулентных течений реагирующих газовых смесей (см., например, *Либби и др.*, *1983*). Вместе с тем, оценивая в целом состояние проблемы замыкания первого порядка, следует признать, что в настоящее время фактически не существует общей феноменологической теории турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии для многокомпонентных смесей. Используемые в литературе градиентные соотношения (см., например, *Хинце, 1963*; *Монин, Яглом, 1992*) не обладают достаточной общностью и получены, в основном, для турбулентных потоков с четко выраженным доминирующим направлением при сильных и не всегда оправданных предположениях, таких, например, как консервативность переносимых турбулентными пульсациями характеристик течения или равенство путей смешения для различных процессов турбулентного переноса.

В связи с этим, возникает необходимость рассмотрения других подходов к проблеме замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси на уровне моделей турбулентности первого порядка, в частности, с использованием методов расширенной необратимой термодинамики. Онзагеровский формализм позволяет в этом случае получить наиболее общую структуру замыкающих градиентных соотношений как для тензора рейнольдсовых напряжений, так и для турбулентных потоков тепла и диффузии в многокомпонентной смеси, в том числе, в виде обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной турбулентной диффузии. На рассматриваемом уровне замыкания подобного рода соотношения наиболее полно описывают турбулентный тепло- и массоперенос в многокомпонентной среде. При этом для определения коэффициентов турбулентного обмена могут быть использованы, как классические представления, восходящие к Прандтлю, Тейлору и Карману (см., например, сб. *«Проблемы турбулентности», 2006*), так и более современные модели замыкания второго порядка, основанные, в частности, на дифференциальных уравнениях баланса для турбулентной энергии и интегрального масштаба турбулентности.

§ 3.1. Основные понятия и уравнения механики турбулентности для смеси реагирующих газов

Одной из основных задач теоретической геофизики является численный расчет пространственных распределений и временных вариаций плотности, скорости, температуры и концентраций химических компонентов, а также некоторых других термогидродинамических характеристик газовой смеси в турбулизованной среде при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = UL/\nu$ (здесь U — характерная скорость течения в атмосфере, L — масштаб основных энергонесущих вихрей, ν — кинематическая молекулярная вязкость). Будем далее считать, что система дифференциальных уравнений реагирующей газовой смеси, приведенная во второй главе, описывает при заданных начальных и граничных условиях все детали актуального (мгновенного, пульсирующего) состояния полей указанных величин и в случае развитой турбулентности. Однако без определенной модификации, связанной с осреднением, она является практически бесполезной, поскольку не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Применение численных методов расчета в этом случае повлекло бы за собой аппроксимацию колоссального пространственно-временного поля течения конечным числом узлов сетки, которое необходимо использовать при замене дифференциальных уравнений их конечно-разностными аналогами. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход из этого положения: решать стохастические уравнения гидродинамики смеси только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные структурные параметры турбулизованной среды (например, атмосферы планеты), а движения на малых масштабах (так называемую подсеточную турбулентность) моделировать феноменологически.

Стохастичность в данном случае означает существование ансамбля возможных реализаций поля турбулентного течения, для которого определено понятие статистически среднего (математически ожидаемого) для всех пульсирующих термогидродинамических характеристик. Тогда осреднение любого параметра течения может быть проведено либо по множеству реализаций в различные моменты времени в данной точке координатного пространства, либо по множеству значений в различных пространственных точках некоторого объема в фиксированный момент времени. Как уже упоминалось в гл. 1, для устранения очевидной непоследовательности в осредненных гидродинамических уравнениях (когда параметры течения определены как осредненные по времени, хотя они представлены в этих уравнениях временными производными), промежуток времени T, за который производится подобное осреднение, должен быть достаточно большим по сравнению со временем отдельных турбулентных пульсаций, но, вместе с тем, малым по сравнению со временем заметного изменения осредненных величин, если осредненное движение нестационарно. Соответственно, масштаб пространственного осреднения должен удовлетворять условиям, аналогичным тем, которые накладываются на промежуток времени T. В частности, в атмосферной динамике принято различать средние зональные движения (их горизонтальный размер порядка 10 км^4) и отклонения относительно этих средних движений (называемые пульсациями, флуктуациями, вихрями). Эти пульсации могут иметь различный пространственный масштаб, от нескольких метров до тысяч километров. Таким образом, под словом «турбулентные пульсации» будем часто понимать просто отклонения от среднего, независимо от их масштабов (*Брасье*, *Соломон*, *1987*).

Итак, разделение реального стохастического движения турбулизованной среды на медленно изменяющееся среднее и турбулентное (нерегулярное, пульсирующее около средних значений) полностью зависит от выбора пространственно-временной области, для которой определены средние величины. Размер этой области фиксирует масштаб осредненного движения. Все вихри большего размера вносят вклад в осредненное движение, определенное средними значениями параметров состояния ρ, $\boldsymbol{u}$, T, Z_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$). Все вихри меньшего размера, отфильтрованные в процессе осреднения, вносят вклад в турбулентное движение, определенное соответствующими пульсациями тех же самых параметров. Заметим, что для получения репрезентативных средних значений и соответствующих им пульсаций физических величин необходимо, чтобы пространственно-временная область осреднения включала очень большое число вихрей, размер которых меньше области осреднения, и очень малую часть вихрей, размер которых превышает область осреднения (см. *Ван Мигем, 1977*).

3.1.1. Выбор оператора осреднения

Проблема осреднения является одной из центральных в механике сплошных сред, а в случае такой сложной системы, как турбулизованная жидкость, часто именно от способа осреднения зависит само построение ее макроскопической модели. В теориях турбулентности жидкости и газа применяются различные способы осреднения физических величин $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$, например, временное осреднение

$$\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)} = (1/T) \int_0^T \mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t+\tau) d\tau, \tag{3.1.1}$$

когда интервал осреднения T предполагается достаточно большим по сравнению с характерным временным периодом соответствующего пульсационного поля, но значительно меньшим периода изменения осредненного поля; пространственное осреднение, посредством интегрирования по пространственному объему W; теоретико-вероятностное осреднение по статистическому ансамблю возможных реализаций случайных гидродинамических полей турбулентного течения. Последний подход, использующий понятие ансамбля, то есть бесконечной совокупности гидродинамических систем одинаковой физической природы, отличающихся друг от друга состоянием поля скоростей и/или других термогидродинамических параметров в данный момент времени, является наиболее фундаментальным. Согласно известной гипотезе об эргодичности (см. *Монин, Яглом, 1992*), для стационарного случайного процесса средние по времени и по ансамблю идентичны. Не обсуждая здесь подробнее преимущества и недостатки различных способов осреднения, отметим лишь, что «практика построения феноменологических моделей для изучения турбулентных движений показывает, что способы введения осредненных характеристик движения, вообще говоря, несущественны для составления полной системы осредненных гидродинамических уравнений, если потребовать в процессе любого осреднения выполнения следующих постулатов Рейнольдса» (*Седов, 1980*):

$$\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{A}} + \overline{\mathscr{B}}, \quad \overline{a\mathscr{A}} = a\overline{\mathscr{A}}, \quad \overline{\overline{\mathscr{A}}\mathscr{B}} = \overline{\mathscr{A}}\,\overline{\mathscr{B}}. \qquad (^1) \tag{3.1.2}$$

Здесь $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\mathscr{B}(\boldsymbol{r}, t)$ — некоторые пульсирующие характеристики турбулентного поля; $\overline{\mathscr{A}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\overline{\mathscr{B}}(\boldsymbol{r}, t)$ — их средние значения, a— константа (не имеющая флуктуаций). Далее будем предполагать, что любой используемый оператор осреднения в (3.1.2$^{(1)}$) коммутирует с операторами дифференцирования и интегрирования, как во времени, так и в пространстве

$$\begin{aligned} &\overline{\partial\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)/\partial t} = \partial\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}/\partial t, \quad \overline{\int \mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t) dt} = \int \overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}\, dt, \qquad (^2)\\ &\overline{\partial\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)/\partial \boldsymbol{r}} = \partial\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}/\partial \boldsymbol{r}, \quad \overline{\int \mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)\, d\boldsymbol{r}} = \int \overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}\, d\boldsymbol{r}. \qquad (^3) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Следует отметить, что при временном (и/или пространственном) осреднении некоторые из соотношений (3.1.2) выполняются, вообще говоря, только приближенно, хотя они будут тем точнее, чем меньше среднее значение $\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}$ изменяется во времени и пространстве в рассматриваемой области интегрирования. Вместе с тем, при теоретико-вероятностном осреднении гидродинамических уравнений (по соответствующему статистическому ансамблю реализаций) постулаты Рейнольдса (3.1.2) выполняются точно, поскольку они оказываются попросту вытекающими из обычных свойств математического ожидания в теории вероятности. Именно по этой причине далее мы будем ими пользоваться без всяких ограничений.

В классических теориях турбулентности однородных несжимаемых жидкостей, разработанных к настоящему времени достаточно глубоко (см., например, *Таунсенд, 1959*; *Монин, Яглом, 1992*), осреднения для всех без исключения термогидродинамических параметров вводятся некоторым одинаковым способом и, как правило, без весовых коэффициентов. При осреднении по времени (пространству) или по ансамблю возможных реализаций

$$\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \mathscr{A}^{(p)} \tag{3.1.3}$$

(где суммирование ведется по числу реализаций ($p = 1, 2, \ldots, M$), а соответствующее среднее поле $\overline{\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)}$ определяется как математически ожидаемое значение $\mathscr{A}$ для ансамбля одинаковых гидродинамических систем), мгновенное значение параметра $\mathscr{A}$ представляется в виде суммы осредненной $\overline{\mathscr{A}}$ и пульсационной $\mathscr{A}'$ составляющих:

$$\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}} + \mathscr{A}', \qquad (\overline{\mathscr{A}'} = 0). \tag{3.1.4}$$

Однако подобное одинаковое для всех физических параметров среды осреднение, примененное к многокомпонентному континууму с изменяющейся плотностью $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям масштаба среднего движения (что связано с необходимостью удержания в структуре уравнений корреляционных моментов типа $\overline{\rho'\boldsymbol{u}'}$, $\overline{\rho'\boldsymbol{u}'u'}$, $\overline{\rho' Z'_\alpha}$ и т. п.), но и к затруднениям физической интерпретации каждого отдельного члена этих осредненных уравнений. Имея ввиду разнообразные приложения развиваемой в данной книге феноменологической модели турбулентности реагирующей смеси, в частности, к некоторым астрофизическим явлениям, в которых отношение характерной скорости космической жидкости к осредненной скорости звука (мера значимости флуктуаций плотности) намного больше единицы, далее мы будем предполагать переменность массовой плотности ρ.

Как известно (см., например, *Колесниченко, Маров, 1999*), при построении модели развитой турбулентности в сжимаемой многокомпонентной среде удобно использовать, наряду с «обычными» средними значениями физических величин (таких как плотность, давление, молекулярные потоки переноса массы, количества движения и энергии), так называемые, средневзвешенные значения (или средние по Фавру (см. *Фавр, 1969*)) для некоторых других параметров (например, температуры, внутренней энергии, энтропии, гидродинамической скорости и т. п.), задаваемые соотношением

$$\langle \mathscr{A} \rangle \equiv \overline{\rho \mathscr{A}}/\overline{\rho} = \left(\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{(p)} \mathscr{A}^{(p)} \right) \Big/ \left(\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{(p)} \right); \tag{3.1.5}$$

при этом:

$$\mathscr{A} = \langle \mathscr{A} \rangle + \mathscr{A}'', \qquad (\overline{\mathscr{A}''} \neq 0), \tag{3.1.6}$$

где $\mathscr{A}''$ — соответствующая турбулентная флуктуация поля $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$. Таким образом, для обозначения средних значений физических величин далее в книге мы будем использовать два символа: черта сверху означает осреднение по ансамблю реализаций (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки будут означать средневзвешенное осреднение. Двойной штрих используется далее для обозначения пульсаций тех величин, которые осреднены по Фавру.

Если $\rho \cong \rho - \mathrm{const}$ (например, в жидкости со свойствами Буссинеска (*Буссинеск*, *1977*), то обе процедуры осреднения совпадают. В то же время использование осреднения (3.1.5) для ряда пульсирующих физических величин, характеризующих многокомпонентный континуум, в значительной степени упрощает запись и анализ осредненных гидродинамических уравнений (*Маров*, *Колесниченко*, *1999*). Кроме этого, оно удобно еще и по той причине, что экспериментальные исследования турбулентных течений, проводимые традиционными методами, приводят, по-видимому, к измерению именно этих средних значений (см., например, *Компаниец и др.*, *1979*).

Средневзвешенные значения

Приведем здесь некоторые, широко употребляемые далее в книге, свойства средневзвешенного осреднения физических величин, которые легко выводятся из определения (3.1.5) и постулатов Рейнольдса (3.1.2) (см. *Ван Мигем*, *1977*; *Колесниченко*, *Маров*, *1979*)

$$\begin{gathered}
\overline{\langle \mathscr{A} \rangle} = \langle \mathscr{A} \rangle, \quad \langle \overline{\mathscr{A}} \rangle = \overline{\mathscr{A}}, \quad \langle \mathscr{A} \langle \mathscr{B} \rangle \rangle = \langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle, \quad \overline{\rho' \mathscr{A}'} = \overline{\rho' \mathscr{A}''}, \\
\overline{\rho \mathscr{A}''} = 0, \quad \overline{\mathscr{A}''} = -\overline{\rho' \mathscr{A}''}/\overline{\rho}, \quad \overline{\rho \mathscr{A} \mathscr{B}} = \overline{\rho} \langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle + \overline{\rho \mathscr{A}'' \mathscr{B}''}, \\
(\mathscr{A}\mathscr{B})'' = \langle \mathscr{A} \rangle \mathscr{B}'' + \langle \mathscr{B} \rangle \mathscr{A}'' + \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' - \overline{\rho \mathscr{A}'' \mathscr{B}''}/\overline{\rho}, \\
(\rho \mathscr{A})' = \overline{\rho} \mathscr{A}'' + \rho'' \langle \mathscr{A} \rangle, \quad \overline{\frac{\partial \langle \mathscr{A} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}} = \frac{\partial \langle \mathscr{A} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}, \\
\overline{\rho \mathscr{A} \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial \boldsymbol{r}}} = \overline{\rho} \langle \mathscr{A} \rangle \frac{\partial \langle \mathscr{B} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} + \overline{\rho \mathscr{A} \frac{\partial \mathscr{B}''}{\partial \boldsymbol{r}}}, \quad \overline{\rho \frac{d \mathscr{A}}{dt}} = \overline{\rho} \frac{D \langle \mathscr{A} \rangle}{Dt} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \overline{\rho \mathscr{A}'' \boldsymbol{u}''} \right),
\end{gathered} \tag{3.1.7}$$

где $D\langle \mathscr{A} \rangle / Dt$ — субстанциональная производная по времени для осредненного движения, определенная формулой (3.1.11).

Осредненное уравнение неразрывности

Легко проверить, что осредненная плотность $\overline{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость смеси $\langle \boldsymbol{u} \rangle \equiv \overline{\rho \boldsymbol{u}}/\overline{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right)=0. \tag{3.1.8}$$

Это уравнение может быть получено путем применения операции рейнольдсового осреднения (3.1.2) к уравнению неразрывности (2.1.2), справедливому (по предположению) для мгновенных (актуальных) значений плотности и гидродинамической скорости. Так как турбулентный поток массы $\overline{\rho\boldsymbol{u}''}=0$ ($\overline{\boldsymbol{u}''}\neq 0$), то в среднем (при осреднении по Фавру) переноса массы за счет турбулентности не происходит. Заметим, что при известных трудностях моделирования корреляций $\overline{\rho'\boldsymbol{u}'}$, появляющихся при «обычном» осреднении (без веса) уравнения (2.1.2), сохранение стандартной формы уравнения неразрывности (с формальной заменой истинных значений плотности и скорости на осредненные) является сильным аргументом в пользу использования средневзвешенного осреднения $\langle\boldsymbol{u}\rangle$ для гидродинамической скорости течения (см. *Ван Мигем, 1977*). Далее при разработке модели многокомпонентной турбулентности, в качестве оператора осреднения будем использовать оператор стохастического осреднения (3.1.3), если иной способ осреднения специально не оговаривается.

Осредненное операторное соотношение

Осреднение операторного соотношения (2.1.4), при использовании (3.1.7) и (3.1.8), приводит к следующему тождеству

$$\overline{\rho\frac{d\mathcal{A}}{dt}}=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle)+\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\overline{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle\langle\mathbf{u}\rangle)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\overline{\rho\mathcal{A}''\boldsymbol{u}''}\right)=$$

$$=\overline{\rho}\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t}+\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}+\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\overline{\rho\mathcal{A}''\boldsymbol{u}''}\right). \tag{3.1.9}$$

Определим формулой

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})}\equiv\overline{\rho\mathcal{A}''\boldsymbol{u}''}=\overline{\rho}\langle\mathcal{A}''\boldsymbol{u}''\rangle \tag{3.1.10}$$

турбулентный поток признака $\mathcal{A}(\boldsymbol{r},t)$, который является вторым статистическим моментом (одновременной одноточечной парной корреляционной функцией), представляющим собой перенос какой-либо пульсирующей характеристики $\mathcal{A}''$ турбулентной среды пульсациями $\boldsymbol{u}''$ скорости, и введем обозначение

$$\frac{D}{Dt}(\ldots)\equiv\frac{\partial}{\partial t}(\ldots)+\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}(\ldots) \tag{3.1.11}$$

для субстанциональной производной по времени для осредненного континуума. Тогда тождество (3.1.9) приобретет следующий вид

$$\overline{\rho\frac{d\mathcal{A}}{dt}}=\overline{\rho}\frac{D\langle\mathcal{A}\rangle}{Dt}+\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})}\right). \tag{3.1.12}$$

Кроме этого, в силу (3.1.8), справедливо операторное соотношение

$$\overline{\rho}\frac{D\mathcal{A}}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\mathcal{A}) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\overline{\rho}\mathcal{A}\langle \boldsymbol{u}\rangle)\right), \tag{3.1.13}$$

определяющее связь между субстанциональным и локальным изменением величины $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$ в осредненном течении. Следует подчеркнуть, что в последнем соотношении величина $\mathcal{A}$ может быть как мгновенным значением некоторой удельной полевой характеристики потока (скаляром, вектором или тензором), так и ее осредненной $\langle\mathcal{A}\rangle$, или пульсационной составляющей $\mathcal{A}''$.

3.1.2. Законы сохранения массы и импульса для осредненного движения

Будем далее рассматривать турбулизованную многокомпонентную газовую смесь, как континуальную среду, актуальные (мгновенные) состояния движения которой могут быть описаны системой уравнений гидродинамики (2.1.2), (2.1.7), (2.1.9), (2.1.29) и (2.1.31) при случайной выборке начальных и граничных условий. Это возможно для пространственно-временных масштабов, заключенных между масштабами молекулярных движений и минимальными масштабами турбулентности (определяемыми линейными размерами и временем существования наименьших из вихрей), которые, как правило, на несколько порядков (по крайней мере, на три порядка) превосходят масштабы молекулярных движений, т. е. расстояние между молекулами, а тем более — размеры молекул. Исключение составляют случаи сильно разреженных газов, которые нами здесь не рассматриваются.

Осредненное уравнение баланса общего вида

Используя тождество (3.1.12) при теоретико-вероятностном осреднении балансового уравнения (2.1.1), получим общую дифференциальную форму субстанционального баланса какого-либо структурного параметра $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$ для осредненного континуума

$$\overline{\rho}\frac{D\langle\mathcal{A}\rangle}{Dt} \equiv \overline{\rho}\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial t} + \overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle \cdot \frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} = -\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathcal{A})}\right) + \overline{\sigma_{(\mathcal{A})}}, \tag{3.1.14}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathcal{A})} \equiv \overline{\boldsymbol{J}_{(\mathcal{A})}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})} \tag{3.1.15}$$

— субстанциональная плотность суммарного потока, включающая осредненный молекулярный $\overline{\boldsymbol{J}_{(\mathcal{A})}}$ и турбулентный $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})}$ потоки признака $\mathcal{A}$; $\overline{\sigma_{(\mathcal{A})}}$ — осредненная скорость внутреннего источника величины $\mathcal{A}$. Заметим, что именно с нахождением неизвестных турбулентных потоков $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})}$ через осредненные параметры состояния среды связана главная проблема феноменологической теории турбулентности — так называемая проблема замыкания.

Наконец, если преобразовать левую часть уравнения (3.1.14) с помощью соотношения (3.1.13), то получим локальную форму дифференциального уравнения баланса для осредненной по Фавру полевой величины $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}^{\Sigma 0}_{(\mathcal{A})} = \overline{\sigma_{(\mathcal{A})}}, \tag{3.1.16}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma 0}_{(\mathscr{A})} \equiv \overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathscr{A})} = \overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle + \overline{\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathscr{A})}$$

— локальная плотность суммарного потока характеристики $\langle\mathscr{A}\rangle$ в осредненном турбулизованном континууме, включающая конвективный член $\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle$. При этом, плотность потока $\boldsymbol{J}^{\Sigma 0}_{(\mathscr{A})}$ есть количество величины $\langle\mathscr{A}\rangle$, проходящее в единицу времени через единицу площади поверхности ∂W (положение площади поверхности задается единичным вектором $\boldsymbol{n}$, лежащем с внешней стороны поверхности ∂W, ограничивающей объем W турбулизованной жидкости).

Перейдем теперь к выводу осредненных уравнений многокомпонентной гидродинамики, рассматривая в (3.1.14) последовательно случаи различных определяющих параметров $\mathscr{A}$, описывающих мгновенное термогидродинамическое состояние турбулизованной среды. Эти уравнения, в отличие от обычных гидродинамических уравнений смеси, описывающих по предположению беспорядочные пульсации всех физических величин, содержат уже только плавно меняющиеся осредненные величины; именно это обстоятельство позволяет использовать для их решения мощный математический аппарат непрерывных функций, а также эффективные численные методы.

Уравнение баланса удельного объема для осредненного движения

Примем в (3.1.14) $\mathscr{A} \equiv 1/\rho$, и используем выражения (2.1.6) для величин $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)} \equiv -\boldsymbol{u}$ и $\sigma_{(1/\rho)} \equiv 0$. Тогда получим

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(1/\overline{\rho}) \equiv \overline{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(1/\overline{\rho}) + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(1/\overline{\rho}) = -\operatorname{div}\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(1/\rho)}, \tag{3.1.17}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(1/\rho)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \tag{3.1.18}$$

— субстанциональная суммарная плотность потока удельного объема в турбулизованном континууме; при этом осредненный молекулярный и турбулентный потоки величины $(1/\rho)$ определяются соответственно соотношениями [см. ((3.1.7))]

$$\overline{\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}} = -\overline{\boldsymbol{u}} = -\langle\boldsymbol{u}\rangle - \overline{\boldsymbol{u}''}, \tag{3.1.19}$$

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho(1/\rho)''\boldsymbol{u}''} = \overline{\boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho'\boldsymbol{u}''}/\overline{\rho}. \tag{3.1.20}$$

Поэтому для полного потока удельного объема $\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(1/\rho)}$ будем иметь:

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(1/\rho)}(\boldsymbol{r}, t) = -\langle\boldsymbol{u}\rangle - \overline{\boldsymbol{u}''} + \overline{\boldsymbol{u}''} = -\langle\boldsymbol{u}\rangle. \tag{3.1.18*}$$

Таким образом, уравнение баланса осредненного удельного объема в субстанциональной форме принимает следующий окончательный вид

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(1/\overline{\rho}) = \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle. \tag{3.1.21}$$

Приведем здесь также широко используемое далее соотношение

$$\overline{\rho}(1/\rho)'' = -\rho'/\rho, \tag{3.1.22}$$

связывающее пульсации плотности ρ' и удельного объема $(1/\rho)''$. Это соотношение следует непосредственно из определения величины $(1/\rho)''$:

$$(1/\rho)'' = 1/\rho - \langle 1/\rho\rangle = 1/\rho - 1/\overline{\rho} = (\rho - \overline{\rho})/\rho\overline{\rho} = -\rho'/\rho\overline{\rho}.$$

Уравнения баланса химических компонентов для осредненного движения

Для получения осредненных диффузионных уравнений положим в (3.1.14) $\mathscr{A} \equiv Z_\alpha = n_\alpha/\rho$. Тогда величины $\boldsymbol{J}_{(Z_\alpha)} \equiv \boldsymbol{J}_\alpha$ и $\sigma_{(Z_\alpha)} \equiv \sigma_\alpha = \sum\limits_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\xi_s$ являются, соответственно, потоками диффузии компонент α и скоростями возникновения частиц сорта α при протекании химических реакций [см. п. 2.1]. В результате искомое балансовое уравнение примет вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle Z_\alpha\rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial\overline{n}_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{n_\alpha}\langle\boldsymbol{u}\rangle) = -\operatorname{div}\boldsymbol{J}_\alpha^{\boldsymbol{\Sigma}} + \sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\overline{\xi}_s, \tag{3.1.23}$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$$

где

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha + \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \tag{3.1.24}$$

— полный диффузионный поток компоненты α в осредненной турбулизованной среде;

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho Z_\alpha''\boldsymbol{u}''} = \overline{\rho}\langle Z_\alpha''\boldsymbol{u}''\rangle = \overline{n_\alpha\boldsymbol{u}''} \tag{3.1.25}$$

— поток турбулентной диффузии вещества сорта α; $\langle Z_\alpha\rangle \equiv \overline{n}_\alpha/\overline{\rho}$.

Заметим, что при использовании свойств (3.1.7) средневзвешенного осреднения, легко получить другую (более традиционную) форму записи для потока турбулентной диффузии: $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} = \overline{n_\alpha'\boldsymbol{u}'} - (\overline{n}_\alpha/\overline{\rho})\overline{\rho'\boldsymbol{u}'}$. Громоздкость этого выражения по сравнению с формулой (3.1.25) лишний раз свидетельствует об эффективности употребления принятого нами весового осреднения Фавра для турбулизованной смеси с переменной плотностью.

Применяя оператор осреднения (3.1.3) к равенствам (2.1.8) и (2.1.9), получим следующие их эквиваленты для осредненного движения

$$\sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\langle Z_\beta\rangle = 1 \quad (^1); \qquad \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\overline{\boldsymbol{J}}_\beta = 0 \quad (^2); \qquad \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\overline{\sigma}_\beta = 0 \quad (^3). \tag{3.1.26}$$

Кроме этого, для турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$ справедливо тождество

$$\sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\boldsymbol{J}_\beta^{\text{turb}} = \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\overline{\rho Z_\beta\boldsymbol{u}''} = \overline{\rho\left(\sum_{\beta=1}^{N} m_\beta Z_\beta\right)\boldsymbol{u}''} = \overline{\rho\boldsymbol{u}''} = 0,$$

и, следовательно,

$$\sum_{\beta=1}^{N} m_\beta\boldsymbol{J}_\beta^{\Sigma}(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{3.1.27}$$

Таким образом, осредненные диффузионные уравнения (3.1.23) для многокомпонентного турбулизованного континуума, подобно их регулярным аналогам (2.1.7), являются линейно зависимыми; по этой причине одно из них может быть заменено алгебраическим интегралом (3.1.27).

Осредненное уравнение количества движения

Уравнение осредненного движения смеси (называемое в литературе уравнением Рейнольдса) получается из (3.1.14), если положить $\mathscr{A} \equiv \boldsymbol{u}$. В этом случае величина $\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\boldsymbol{\Pi}$ (тензор вязких напряжений) соответствует поверхностным силам [см. (2.1.11)], как в обычной гидродинамике, а величина источника

$$\sigma_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + 2\rho \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha$$

связана с объемными силами, действующими на единицу объема многокомпонентной смеси (далее пульсациями величин $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{F}_\alpha$ будем пренебрегать). В результате осредненное уравнение движения, записанное в векторной форме, примет следующий вид

$$\bar{\rho}\frac{D\langle \boldsymbol{u}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}\right) + 2\bar{\rho}\langle \boldsymbol{u}\rangle \times \boldsymbol{\Omega} + \bar{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha \rangle \boldsymbol{F}_\alpha. \tag{3.1.28}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\boldsymbol{u})} = -\overline{\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})}} - \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\boldsymbol{u})} = \overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{R} \tag{3.1.29}$$

полный (суммарный) тензор напряжений в турбулизованном потоке, играющий по отношению к осредненному движению роль вязкого тензора напряжений; $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$ — осредненный тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости;

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\boldsymbol{u})} = -\overline{\rho \boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}''} = -\bar{\rho}\langle \boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}''\rangle \tag{3.1.30}$$

— так называемый тензор Рейнольдса, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений. Появление тензора $\boldsymbol{R}$ в уравнении (3.1.28) является непосредственным следствием нелинейности исходных (мгновенных) уравнений движения (2.1.9). Тензор Рейнольдса, записанный в декартовых координатах, имеет вид

$$R_{ij}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\overline{\rho u_i'' u_j''} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u_1''^2} & -\overline{\rho u_1'' u_2''} & -\overline{\rho u_1'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_2'' u_1''} & -\overline{\rho u_2''^2} & -\overline{\rho u_2'' u_3''} \\ -\overline{\rho u_3'' u_1''} & -\overline{\rho u_3'' u_2''} & -\overline{\rho u_3''^2} \end{pmatrix}, \tag{3.1.31}$$

где u_1'', u_2'' и u_3'' — пульсационные составляющие скорости относительно осей x_1, x_2 и x_3 соответственно. Он является симметричным тензором второго ранга и описывает турбулентные напряжения, обусловленные взаимодействием движущихся турбулентных вихрей. Турбулентные напряжения, как и молекулярные, являются в действительности результатом переноса количества движения от одних объемов жидкости к другим, но за счет турбулентного перемешивания, создаваемого пульсациями скорости завихренной жидкости. В тех случаях, когда в потоке преобладает турбулентное перемешивание (например, при развитой турбулентности, возникающей при очень больших числах Рейнольдса), тензором осредненных вязких напряжений $\overline{\mathbf{\Pi}}$ можно, как правило, пренебречь по сравнению с напряжениями Рейнольдса $\boldsymbol{R}$ (за исключением областей вязкого подслоя, граничащих с твердой поверхностью). Составляющие тензора турбулентных напряжений $R_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$ являются, таким образом, новыми неизвестными величинами. Отметим еще раз, что собственно с разнообразием способов определения замыкающих соотношений для этих величин и связано конструирование различных моделей сдвиговой турбулентности [см. гл. 4].

Как было отмечено в гл. 2, выбор величин $\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})}$ и $\sigma_{(\boldsymbol{u})}$ является неоднозначным и может быть, вообще говоря, иным. Так, для геофизических приложений полное давление смеси часто представляют в виде суммы двух слагаемых $p = p^d + p_0$, где p^d — так называемое динамическое давление, а p_0 — часть давления, удовлетворяющая уравнению гидростатики

$$\partial p_0/\partial x_j = \rho_0 g_j = -\rho_0 g \delta_{3j}, \quad (j = 1, 2, 3). \tag{3.1.32}$$

Здесь ρ_0 — некоторая характерная для атмосферы постоянная величина массовой плотности (например, на уровне моря), $\boldsymbol{g} = \{0, 0, -g\}$ — вектор ускорения свободного падения,$g = |\boldsymbol{g}|$. В этом случае, при определении величин $\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})}$ и $\sigma_{(\boldsymbol{u})}$ соотношениями

$$\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})} \equiv p^d \boldsymbol{U} - \mathbf{\Pi},$$

$$\sigma_{(\boldsymbol{u})} \equiv \Delta\rho(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g}) + 2\rho \boldsymbol{u} \times \mathbf{\Omega} + \rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^*, \quad (\text{где} \quad \Delta\rho = \rho - \rho_0),$$

можно получить другую форму записи осредненного уравнения движения смеси

$$\overline{\rho} \frac{D\langle \boldsymbol{u} \rangle}{Dt} = (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g})\Delta\overline{\rho} - \frac{\partial \overline{p}^d}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \mathbf{\Pi}^\Sigma \right) + 2\overline{\rho}\langle \boldsymbol{u} \rangle \times \mathbf{\Omega} + \overline{\rho} \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha \rangle \boldsymbol{F}_\alpha^*. \tag{3.1.33}$$

Для течений в свободной стратифицированной атмосфере, когда важны силы Архимеда (первое слагаемое в правой части (3.1.33)), все члены уравнения (3.1.33), как правило, имеют порядок $g\Delta\overline{\rho}$ или меньший. Так как градиент полного давления выражается суммой градиентов динамического и гидростатического давлений, то справедливо приближенное равенство

$$\partial \overline{p}/\partial x_j = \partial \overline{p}^d/\partial x_j + \partial p_0/\partial x_j \approx -\delta_{j3} g \Delta\overline{\rho} - \delta_{j3}\rho_0 g = -\delta_{j3}\rho_0 g(1 + \Delta\overline{\rho}/\rho_0).$$

Отсюда следует, что градиент полного давления, в тех случаях, когда верна оценка $\Delta\overline{\rho}/\rho_0 \ll 1$, может быть представлен приближенным соотношением:

$$\partial \overline{p}/\partial x_j \approx -\delta_{j3}\rho_0 g. \tag{3.1.34}$$

Это соотношение будет использовано в гл. 4.

3.1.3. Энергетика турбулентного потока

Для осредненного течения турбулизованной смеси, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объемов среды, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию суммарного материального континуума. Для наиболее всестороннего физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса, проанализируем здесь различные энергетические уравнения для осредненного движения многокомпонентной смеси, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осредненной потенциальной энергии смеси

Осреднение по Рейнольдсу уравнения (2.1.14) приводит, при учете тождества (3.1.12), к следующему уравнению баланса осредненной удельной потенциальной энергии многокомпонентной смеси

$$\bar{\rho}\frac{D\langle\Psi\rangle}{Dt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\Psi)} + \overline{\sigma_{(\Psi)}}, \tag{3.1.35}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\Psi)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{J}_{(\Psi)}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\Psi)} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha \tag{3.1.36}$$

— полный субстанциональный поток потенциальной энергии в турбулизованном континууме;

$$\overline{\boldsymbol{J}_{(\Psi)}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha \tag{3.1.37}$$

— осредненный молекулярный поток потенциальной энергии смеси;

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\Psi)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \bar{\rho}\langle\Psi''\boldsymbol{u}''\rangle = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \overline{\rho Z_\alpha \boldsymbol{u}''} = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_\alpha \tag{3.1.38}$$

— турбулентный поток потенциальной энергии смеси.

Осредненный источник потенциальной энергии многокомпонентной смеси задается соотношением

$$\overline{\sigma_{(\Psi)}} = -\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}^*_\alpha\right) - \bar{\rho}\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha\rangle \boldsymbol{F}_\alpha\right). \tag{3.1.39}$$

Здесь величина $\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}^*_\alpha\right)$ представляет собой полную скорость перехода (в единице объема смеси) потенциальной энергии среднего движения в другие формы энергии, что следует из сопоставления уравнений (3.1.39) и (3.1.54); величина $\bar{\rho}\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha\rangle \boldsymbol{F}_\alpha\right)$ связана со скоростью превращения осредненной потенциальной энергии в кинетическую энергию среднего движения [см. (3.1.40)], причем этот процесс является обратимым (адиабатическим).

Уравнение баланса кинетической энергии среднего движения

Умножая скалярно уравнение (3.1.28) на вектор скорости $\langle \boldsymbol{u} \rangle$, получим после необходимых преобразований следующую субстанциональную форму уравнения живых сил для осредненного движения многокомпонентной смеси (теорема количества движения)

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2) = \overline{p}\ \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle + \mathrm{div}(-\overline{p}\langle \boldsymbol{u} \rangle + \mathbf{\Pi}^{\Sigma}\cdot\langle \boldsymbol{u} \rangle) - \left(\mathbf{\Pi}^{\Sigma} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle \boldsymbol{u} \rangle\right) + \left(\langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{n}_{\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}\right), \tag{3.1.40}$$

где $|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2$ — удельная кинетическая энергия среднего движения. Это уравнение описывает закон превращения кинетической энергии среднего движения в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учета необратимого перехода механической энергии в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (3.1.40): дивергенция $\mathrm{div}(\mathbf{\Pi}^{\Sigma}\cdot\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение $\mathbf{\Pi}^{\Sigma}$ совершает работу в единичном объеме осредненной движущейся системы; величина $\overline{p}\ \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle$ связана со скоростью обратимого (адиабатического) превращения осредненной внутренней энергии (тепла) в механическую энергию [см. (3.1.54)] и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема против осредненного давления $\overline{p}$ потоком движущейся смеси; знак величины $\overline{p}\ \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться $(0 < \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ или сжиматься $(0 > \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle)$; величина $(\mathbf{\Pi}^{\Sigma} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ представляет собой полную скорость необратимого превращения в единице объема кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии [см. (3.1.54) и (3.1.68)], причем диссипация энергии среднего движения происходит как под влиянием молекулярной вязкости со скоростью $(\overline{\mathbf{\Pi}} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle) > 0$, так и под влиянием турбулентной вязкости со скоростью $(\boldsymbol{R} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ (эта величина в общем случае может быть разной по знаку).

Суммируя (3.1.35) и (3.1.40), получим уравнение баланса механической энергии $\langle E_m \rangle \equiv |\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2 + \langle \Psi \rangle$ для осредненного движения турбулизованного многокомпонентного континуума

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2 + \langle \Psi \rangle) = -\ \mathrm{div}\left(\overline{p}\langle \boldsymbol{u} \rangle - \mathbf{\Pi}^{\Sigma}\cdot\langle \boldsymbol{u} \rangle + \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_{\alpha}\boldsymbol{J}_{\alpha}^{\Sigma} + \right) +$$
$$+ \overline{p}\ \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle - \left(\mathbf{\Pi}^{\Sigma} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle \boldsymbol{u} \rangle\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_{\alpha}^{\Sigma}\cdot\boldsymbol{F}_{\alpha}\right). \tag{3.1.41}$$

3.1.4. Уравнение притока тепла для осредненного движения смеси

Это уравнение получим из общего уравнения баланса (3.1.14), полагая в нем $\mathscr{A} \equiv H$ и используя выражения

$$\boldsymbol{J}_{(H)} \equiv \boldsymbol{q}, \quad \sigma_{(H)} \equiv \frac{dp}{dt} + \left(\mathbf{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_{\alpha}^{*}\right)$$

для потока и источника энтальпии смеси соответственно [см. (2.1.26)]. В результате будем иметь

$$\rho\frac{D\langle H\rangle}{Dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\Sigma}}+\overline{\frac{dp}{dt}+\left(\boldsymbol{\Pi}:\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right)+\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{F}_\alpha^*\right)},\tag{3.1.42}$$

где

$$\boldsymbol{q}^{\Sigma}(\boldsymbol{r},t)\equiv\overline{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}\tag{3.1.43}$$

— суммарный поток тепла в осредненном многокомпонентном турбулизованном континууме;

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r},t)\equiv\overline{\rho H''\boldsymbol{u}''}\cong\langle c_p\rangle\overline{\rho T''\boldsymbol{u}''}+\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}\tag{3.1.44}$$

— турбулентный поток тепла (явного — первое слагаемое и скрытого — второе слагаемое), возникающий благодаря корреляции между пульсациями H'' удельной энтальпии и пульсациями $\boldsymbol{u}''$ гидродинамической скорости течения смеси. Заметим, что приближенное равенство (3.1.44) записано здесь с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Его легко получить, используя выражение

$$H''=\sum_{\alpha=1}^{N}(\langle Z_\alpha\rangle h_\alpha''+\langle h_\alpha\rangle Z_\alpha''+(Z_\alpha''h_\alpha'')'')\cong\langle c_p\rangle T''+\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle Z_\alpha''\tag{3.1.45}$$

для флуктуаций удельной энтальпии смеси и подходящие для данного случая свойства средневзвешенного осреднения по Фавру [см. (3.1.7)]. Здесь формулами

$$h_\alpha''=c_{p\alpha}T'',\quad (^1)\qquad \langle c_p\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N}c_{p\alpha}\langle Z_\alpha\rangle\quad (^2)\tag{3.1.46}$$

определены соответственно флуктуации парциальных энтальпий отдельных компонентов и осредненная удельная изобарная теплоемкость турбулизованной смеси. Далее мы будем предполагать справедливость следующего выражения для осредненной полной энтальпии в уравнении (3.1.42)

$$\langle H\rangle\cong\langle c_p\rangle\langle T\rangle+\sum_{\alpha=1}^{N}h_\alpha^0\langle Z_\alpha\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\langle Z_\alpha\rangle.\tag{3.1.47}$$

Это выражение может быть получено из формулы (2.1.25) при ее осреднении по Фавру и в случае пренебрежения малыми пульсациями теплоемкости c_p в турбулизованной среде ($c_p''\cong 0$).

Субстанциональную производную от полного давления смеси в выражении для источника $\sigma_{(h)}$ удобно преобразовать к виду

$$\frac{dp}{dt}=\frac{Dp}{Dt}+\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=\frac{Dp}{Dt}+\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial p'}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=$$

$$=\frac{Dp}{Dt}+\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\operatorname{div}(p'\boldsymbol{u}'')-p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\frac{dp}{dt}} = \frac{D\overline{p}}{Dt} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \operatorname{div}(\overline{p'\boldsymbol{u}''}) - \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}. \tag{3.1.48}$$

Кроме этого, используем далее преобразование

$$\overline{\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}} = \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}} = \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\langle \varepsilon_b\rangle, \tag{3.1.49}$$

где формулой

$$\overline{\rho}\langle \varepsilon_b\rangle \equiv \overline{\left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} \tag{3.1.50}$$

определена так называемая (удельная) скорость диссипации турбулентной энергии в тепло под действием молекулярной вязкости. Сразу отметим, что величина $\langle \varepsilon_b\rangle$ является одной из ключевых статистических характеристик турбулизованной среды.

Подставим теперь выражения (3.1.43), (3.1.48) и (3.1.49) в уравнение (3.1.42); в результате получим осредненное уравнение притока тепла для турбулизованной смеси в следующей субстанциональной форме [ср. с (2.1.24)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt} = -\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}) + \frac{D\overline{p}}{Dt} + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) -$$

$$- \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}^*_\alpha\right) + \overline{\rho}\langle \varepsilon_b\rangle. \tag{3.1.51}$$

Для дальнейших целей нам понадобится также уравнение (3.1.51), записанное через осредненную внутреннюю энергию $\langle E\rangle$. Для определения величины $\langle E\rangle$ используем выражение

$$\langle E\rangle = \langle H\rangle - \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} \cong \langle c_V\rangle\langle T\rangle + \sum_{\alpha=1}^{N} h^0_\alpha \langle Z_\alpha\rangle, \tag{3.1.52}$$

которое представляет собой результат осреднения по Фавру формулы (2.1.32). Тогда, с учетом преобразования

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} + \overline{p}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle = \overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt} - \frac{D\overline{p}}{Dt}, \tag{3.1.53}$$

являющегося следствием (3.1.52) и (3.1.8), окончательно получим

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} = -\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}) - \overline{p}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}^*_\alpha\right) - \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\langle \varepsilon_b\rangle. \tag{3.1.54}$$

В уравнении (3.1.54) величина $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$ связана со скоростью преобразования кинетической энергии турбулентных вихрей в осредненную внутреннюю энергию [см. (3.1.69)] и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема окружающей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций давления p' и расширения ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' > 0$) или сжатия ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' < 0$) вихрей. Сопоставление уравнений (3.1.54) и (3.1.35) показывает, что величина $\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\boldsymbol{J}_\alpha} \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^*\right)$ определяет скорость перехода между осредненной внутренней и осредненной потенциальной энергией в результате работы негравитационных внешних сил. Аналогично, сравнение уравнений (3.1.54) и (3.1.40) показывает, что величины $\overline{p} \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle$ и $(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ связаны со скоростью перехода между внутренней и кинетической энергиями среднего движения. Корреляция $\overline{\rho}\langle \varepsilon_b \rangle \equiv \overline{(\boldsymbol{\Pi} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}'')}$ $(\cong \overline{(\boldsymbol{\Pi}' : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}')})$ в развитом турбулентном потоке [см. гл. 4] может быть отождествлена со средним значением работы (отнесенной к единице времени и единице объема), совершаемой пульсациями вязких напряжений над турбулентными вихрями со сдвигом скорости $((\partial/\partial \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}'' \neq 0)$. Заметим, что эта работа всегда положительна, поскольку $\langle \varepsilon_b \rangle$ представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости.

Проанализируем теперь скорость превращения $(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}} \cdot \partial \overline{p}/\partial \boldsymbol{r})$. Эту величину, при воздействии сил Архимеда, удобно экстраполировать, с учетом формулы (3.1.34), следующим выражением

$$(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}} \cdot \partial \overline{p}/\partial \boldsymbol{r}) \approx g(\rho_0/\overline{\rho})\overline{\rho' u_3''}. \tag{3.1.55}$$

Известно (см., например, (*Ван Мигем*, *1977*)), что в турбулизованном течении жидкости в общем случае допустимы следующие две возможности:

• Для крупных вихрей величина $g\overline{\rho' u_3''}$ отрицательна. Это связано с тем, что под влиянием эффекта плавучести крупномасштабная пульсация плотности ρ' (имеющая термическое происхождение) определяет знак смещения вихря по вертикали. Действительно, т. к. легкие ($\rho' < 0$) и тяжелые вихри ($\rho' > 0$) являются соответственно теплыми и холодными вихрями, то, например, для поднимающихся ($u_3'' > 0$) в гравитационном поле теплых вихрей ($\rho' < 0$) величина $g\overline{\rho' u_3''} < 0$. Таким образом, крупные вихри преобразовывают тепловую (внутреннюю) энергию потока в кинетическую энергию турбулентного движения.

• Для мелкомасштабной турбулентности величина $g\overline{\rho' u_3''}$ всегда положительна. Действительно, в этом случае для эйлеровой флуктуации плотности ρ' справедливо приближенное соотношение ($\rho' \approx -(\partial \overline{\rho}/\partial x_3)\xi_3$, где ξ_3 — вертикальное смещение вихря, или путь смешения. Распределение средней плотности в поле силы тяжести устойчивое $[-(\partial \overline{\rho}/\partial x_3) > 0]$, благодаря чему турбулентные вихри, приходящие на данный уровень снизу $[u_3'' > 0, x_3 > 0]$, вызывают положительные флуктуации плотности ($\rho' > 0$), а приходящие сверху $[u_3'' < 0, x_3 < 0]$ — отрицательные флуктуации ($\rho' < 0$); отсюда $g\overline{\rho' u_3''} > 0$. Таким образом, в этом случае архимедова сила является возвращающей, т. е. турбулентность тратит свою энергию на работу против сил плавучести. Величина $g\overline{\rho' u_3''}$ представляет собой скорость превращения в единице объема среды турбулентной энергии в осредненную внутреннюю энергию, или, другими словами, мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло [см. (3.1.69)].

Наконец, запишем осредненное уравнение притока тепла для многокомпонентной турбулизованной смеси через температуру. При учете формул (3.1.46) и (3.1.47) для величин $\langle c_p\rangle$ и $\langle H\rangle$ соответственно, а также уравнения диффузии для среднего движения (3.1.23), легко получить выражение [ср. с (2.1.27)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt}=\overline{\rho}\langle c_p\rangle\frac{D\langle T\rangle}{Dt}-\operatorname{div}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}\right)+\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}c_{p\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}\right)+\sum_{s=1}^{r}\langle q_s\rangle\overline{\xi}_s, \quad (3.1.56)$$

где

$$\langle q_s\rangle=\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\langle h_\alpha\rangle, \qquad (s=1,2,\ldots,r) \quad (3.1.57)$$

— осредненная теплота s-й реакции. С использованием этого выражения, осредненное уравнение притока тепла (3.1.51) принимает следующий окончательный вид [ср. с (2.1.29)]

$$\begin{aligned}\overline{\rho}\langle c_p\rangle\frac{D\langle T\rangle}{Dt}=&-\operatorname{div}\left(\boldsymbol{q}^{\Sigma}-\overline{p'\boldsymbol{u}''}-\sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}\right)+\\&+\frac{D\overline{p}}{Dt}+\left(\overline{\boldsymbol{\Pi}}:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\sum_{s=1}^{r}\langle q_s\rangle\overline{\xi}_s+\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\boldsymbol{J}_\alpha}\cdot\boldsymbol{F}_\alpha^{*}\right)-\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}+\\&+\left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle-\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}c_{p\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}\right)\end{aligned} \quad (3.1.58)$$

(последнее слагаемое обычно опускают [см. гл. 2]). Это наиболее общая форма энергетического уравнения, которая может быть использована в моделях реагирующей турбулентности разной сложности, в частности, основанных на использовании простых градиентных схем замыкания. Важно подчеркнуть, что уравнение притока тепла (3.1.58), записанное через осредненную температуру $\langle T\rangle$, позволяет выделить в явном виде вклад теплот отдельных химических реакций в энергетику турбулизованной реагирующей газовой среды, причем химический источник является при турбулентном течении осредненной величиной. Заметим, что нелинейность алгебраической зависимости скорости реакции $\xi_s(T, n_\alpha)$ от температуры и состава смеси означает, что в общем случае величины $\overline{\xi}_s$ не могут быть рассчитаны только по осредненным значениям температуры и состава смеси (т. е. $\overline{\xi}_s\neq\xi_s(\langle T\rangle,\overline{n_\alpha})$), поскольку существенно зависят от интенсивности турбулентных пульсаций этих параметров. Подробное рассмотрение этого вопроса мы отложим до следующей главы.

Закон сохранения полной энергии осредненного движения смеси

Запишем теперь в субстанциональной форме осредненный закон сохранения полной энергии для турбулизованной многокомпонентной смеси. Это уравнение позволит нам получить, в частности, фундаментальное в теории турбулентности уравнение переноса турбулентной энергии (осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций скорости). Применяя с этой целью оператор осреднения (3.1.3) к уравнению (2.1.16) и используя соотношения (2.1.17) и (2.1.18) для величин $E(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{J}_{(E)}$, будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D\langle U_{\text{tot}}\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\left(\overline{\boldsymbol{J}_{U_{\text{tot}}}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{U_{\text{tot}}}\right) = 0, \tag{3.1.59}$$

где

$$\langle U_{\text{tot}}\rangle = \langle|\boldsymbol{u}|^2/2\rangle + \langle\Psi\rangle + \langle E\rangle \tag{3.1.60}$$

полная удельная энергия осредненного континуума;

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{U_{\text{tot}}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \bar{\rho}\langle U''_{\text{tot}}\boldsymbol{u}''\rangle = \overline{\rho(|\boldsymbol{u}|^2/2 + \Psi + E)\boldsymbol{u}''} \tag{3.1.61}$$

— турбулентный поток полной энергии смеси;

$$\overline{\boldsymbol{J}_{U_{\text{tot}}}} \equiv \overline{\boldsymbol{q} + p\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u} + \sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha} = \bar{\boldsymbol{q}} + \bar{p}\langle\boldsymbol{u}\rangle - \overline{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle + \overline{p\boldsymbol{u}''} - \overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''} + \sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\overline{\boldsymbol{J}_\alpha} \tag{3.1.62}$$

— осредненный молекулярный поток полной энергии смеси.

Для дальнейших целей удобно преобразовать кинетическую энергию мгновенного движения среды к виду

$$\rho|\boldsymbol{u}|^2/2 \equiv \rho(\langle\boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{u}'')\cdot(\langle\boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{u}'')/2 = \rho|\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2/2 + \rho(\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\boldsymbol{u}'') + \rho|\boldsymbol{u}''|^2/2.$$

Производя осреднение (по Рейнольдсу) этого выражения, в результате получим

$$\overline{\rho|\boldsymbol{u}|^2/2} \equiv \bar{\rho}|\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2/2 + \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2/2},$$

или

$$\langle|\boldsymbol{u}|^2/2\rangle \equiv |\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2/2 + \langle b\rangle, \tag{3.1.63}$$

где формула

$$\langle b\rangle(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho b}/\bar{\rho} = \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\bar{\rho} \tag{3.1.64}$$

вводит в рассмотрение еще одну ключевую статистическую характеристику турбулентного движения — турбулентную энергию; величина $b(\boldsymbol{r}, t) \equiv |\boldsymbol{u}''|^2/2$ представляет собой удельную пульсационную кинетическую энергию течения. В итоге, соотношения (3.1.60) и (3.1.61) могут быть переписаны в виде

$$\langle U_{\text{tot}}\rangle = |\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2/2 + \langle\Psi\rangle + \langle E\rangle + \langle b\rangle, \tag{3.1.65}$$

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{U_{\text{tot}}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \bar{\rho}\langle U''_{\text{tot}}\boldsymbol{u}''\rangle = \overline{\rho(|\boldsymbol{u}|^2/2 + \Psi + E)\boldsymbol{u}''} = \bar{\rho}\langle b\boldsymbol{u}''\rangle - \boldsymbol{R}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\Psi)} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(E)}, \tag{3.1.66}$$

где корреляционная функция

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{E}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \bar{\rho}\langle E''\boldsymbol{u}''\rangle = \overline{\rho(H - p/\rho)\boldsymbol{u}''} = \boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p\boldsymbol{u}''} \tag{3.1.67}$$

определяет турбулентный поток удельной внутренней энергии смеси.

Наконец, объединяя формулы (3.1.38), (3.1.62), (3.1.66) и (3.1.67), перепишем балансовое уравнение (3.1.59) для полной энергии среднего движения турбулизованной смеси следующим образом

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{|\langle \boldsymbol{u}\rangle|^2}{2}+\langle\Psi\rangle+\langle E\rangle+\langle b\rangle\right)+\operatorname{div}\left(\boldsymbol{q}^{\Sigma}-\overline{p'\boldsymbol{u}''}+\overline{\rho\left(b+\frac{p'}{\rho}\right)\boldsymbol{u}''}-\right.$$

$$\left.-\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''}+\overline{p}\langle\boldsymbol{u}\rangle-\boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle+\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}\right)=0. \quad (3.1.68)$$

Здесь $\boldsymbol{q}^{\Sigma}(\boldsymbol{r},t)\equiv\overline{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}$ — суммарный поток тепла, обусловленный как осредненным молекулярным, так и турбулентным переносом; $\overline{p}\langle\boldsymbol{u}\rangle$ — поток механической энергии; $\boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle$ — суммарный поток энергии, обусловленный работой вязких и турбулентных напряжений; $(\overline{\rho b\boldsymbol{u}''}-\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''})$ — поток вихревой турбулентной энергии, как следствие турбулентной «диффузии»; $\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}$ — суммарный поток потенциальной энергии, обусловленный осредненной молекулярной и турбулентной диффузией.

Следует подчеркнуть, что член $\overline{p'\boldsymbol{u}''}$ в уравнении (3.1.68) не играет роли потока энергии поскольку, как мы увидим далее, он выпадает из полного энергетического уравнения и введен здесь и далее из соображений удобства.

Уравнение баланса турбулентной энергии

Известно, что фундаментальное в теории турбулентности уравнение баланса турбулентной энергии (или некоторые его модификации) лежит в основе многих современных полуэмпирических моделей турбулентности (см., например, *Монин*, *Яглом*, *1992*). Оно может быть получено разнообразными способами, один из которых будет приведен в гл. 4. Здесь же мы рассмотрим вывод этого уравнения для многокомпонентной смеси, основанный на использовании полученных выше уравнений (3.1.47), (3.1.54) и (3.1.59).

Вычитая (3.1.41) и (3.1.54) из (3.1.59), получим искомое уравнение баланса для удельной турбулентной энергии $\langle b\rangle\equiv\overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho}$ в следующем общем виде

$$\overline{\rho}\frac{D\langle b\rangle}{Dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\mathrm{turb}}+\sigma_{\langle b\rangle}, \quad (^1)$$

$$\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\mathrm{turb}}\equiv\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2+p'/\rho)\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''}, \quad (^2) \quad (3.1.69)$$

$$\sigma_{\langle b\rangle}\equiv\left(\boldsymbol{R}:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}+\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}\cdot\boldsymbol{F}^{\cdot *}\right)-\left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \quad (^3)$$

где $\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r},t)$, $\sigma_{\langle b\rangle}(\boldsymbol{r},t)$ — соответственно турбулентно-диффузионный поток и локальное производство (сток) осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций (турбулентной энергии). Левая часть этого уравнения характеризует изменение во времени турбулентной энергии $\langle b\rangle$, а также конвективный перенос величины $\langle b\rangle$ осредненным движением; второе слагаемое в правой части соотношения (3.1.69$^{(3)}$) — работу сил давления в пульсационном движении; третье и четвертое — скорость порождения энергии турбулентности под действием сил негравитационного происхождения и эффектов плавучести; наконец, пятое слагаемое — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности в тепловую внутреннюю энергию вследствие молекулярной вязкости. Величина $\boldsymbol{R} : (\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})$ в правых частях уравнений (3.1.40) и (3.1.69$^{(3)}$) имеет противоположные знаки и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Важно еще раз подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбранной нами операции осреднения турбулентного поля. Известно, что в случае мелкомасштабной турбулентности величина $\boldsymbol{R} : (\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r}) > 0$, так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности. Однако крупномасштабная турбулентность может превращать кинетическую энергию турбулентности в энергию среднего движения (см. *Ван Мигем, 1977*).

Уравнение притока тепла для квазистационарной турбулентности

Во многих практических приложениях уравнение притока тепла (3.1.54) для турбулизованной смеси в своей общей форме не поддается численному решению. Однако в некоторых частных случаях возможны его значительные упрощения. Так, если в структуре пульсационного поля для развитой турбулентности устанавливается такое стационарно-неравновесное состояние, при котором турбулентная энергия $\langle b\rangle \equiv \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho}$ сохраняется как во времени, так и в пространстве, то $\sigma_{\langle b\rangle} \cong 0$. В этом случае из (3.1.69$^{(3)}$) следует соотношение

$$\left(\boldsymbol{R} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = -\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} - \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \cdot \boldsymbol{F}^{\cdot *}\right) + \left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \langle \varepsilon_b\rangle \equiv \mathfrak{I}_{E,b},$$

учет которого позволяет придать уравнению притока тепла для турбулизованной смеси (3.1.54) почти «классическую» форму [ср. с (2.1.22)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{q}^\Sigma - \overline{p'\boldsymbol{u}''}) - \overline{p}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\Pi^\Sigma : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^*\right). \qquad (3.1.54^*)$$

Соответственно уравнение (3.1.58) принимает вид

$$\overline{\rho}\langle c_p\rangle\frac{D\langle T\rangle}{Dt} = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{q}^\Sigma - \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma\right) + \frac{D\overline{p}}{Dt} + \left(\Pi^\Sigma : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \sum_{s=1}^{r}\langle q_s\rangle\overline{\xi}_s. \qquad (3.1.58^*)$$

3.1.5. Уравнение состояния для турбулизованной смеси в целом

Осредненные уравнения движения для турбулизованной реагирующей смеси должны быть дополнены осредненным уравнением состояния для давления. Повсюду в этой книге многокомпонентная газовая смесь рассматривается как сжимаемая бароклинная среда, для которой уравнение состояния для давления является уравнением состояния смеси совершенных газов (2.1.31). Применяя оператор статистического осреднения (3.1.3) к уравнению состояния (2.1.31), получим следующее точное выражение для осредненного давления

$$\overline{p}=\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{p}_\alpha=\overline{\rho}k_B\langle T\rangle\sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle+\overline{\rho}k_B\sum_{\alpha=1}^{N}\langle T''Z''_\alpha\rangle=\overline{\rho}k_B\langle T\rangle\sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle\left(1+\frac{\langle T''Z''_\alpha\rangle}{\langle T\rangle\langle Z_\alpha\rangle}\right), \tag{3.1.70}$$

содержащее в общем случае большое число корреляционных функций от пульсирующих температуры и концентраций отдельных компонентов. В тех случаях когда корреляционные члены $\langle T''Z''_\alpha\rangle$ малы по сравнению с членами первого порядка $\langle T\rangle\langle Z_\alpha\rangle$ (например, когда $m_\alpha\cong m$; в этом случае имеем: $Z_\alpha\cong n_\alpha/nm=x_\alpha/m$, $\sum\limits_\alpha\langle T''Z''_\alpha\rangle=\sum\limits_\alpha\langle T''Z_\alpha\rangle\approx\langle T''\rangle/m=0$), уравнение состояния для давления связывает между собой осредненные значения плотности, температуры и давления в турбулентном течении точно так же, как и в регулярном потоке

$$\overline{p}=\overline{\rho}k_B\langle T\rangle\sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle=\overline{\rho}\langle\mathcal{R}^*\rangle\langle T\rangle, \tag{3.1.71}$$

где

$$\langle\mathcal{R}^*\rangle=k_B\sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle=k_B\overline{n}/\overline{\rho} \tag{3.1.72}$$

— осредненная по Фавру «газовая постоянная» смеси. Термическое уравнение состояния в форме (3.1.71) применяется обычно в простых моделях многокомпонентной турбулентности, основанных на градиентных гипотезах замыкания.

3.1.6. Проблема замыкания осредненных уравнений смеси

Итак, в рамках континуальной модели многокомпонентной среды на основе общих законов сохранения массы, количества движения и энергии нами были выведены при использовании средневзвешенного осреднения Фавра основные гидродинамические уравнения в частных производных, предназначенные для описания турбулентных течений (масштаба среднего движения) газофазных реагирующих смесей[1]. Эти уравнения имеют ту же общую форму, как и представленные в гл. 2. гидродинамические уравнения реагирующей смеси для ламинарного режима движения. Однако система осредненных турбулентных уравнений (3.1.21), (3.1.23), (3.1.28), (3.1.54), (3.1.69) и (3.1.71) является незамкнутой, поскольку содержит, наряду со средними значениями термогидродинамических параметров состояния $\overline{\rho}$, $\langle\boldsymbol{u}\rangle$, $\overline{p}$, $\langle T\rangle$, $\langle Z_\alpha\rangle$ и их производными, новые неопределенные потоки, которые возникли при

[1] Отметим, что осреднение Фавра позволило нам получить точные уравнения баланса для различных сохраняющихся в потоке величин, поскольку при их выводе не делалось каких-либо упрощающих предположений, в результате которых было бы возможно априорное отбрасывание отдельных неопределенных членов осредненных уравнениях.

осреднении исходных нелинейных уравнений гидродинамики смеси. Из этой системы видно, что осредненное движение описывается, помимо осредненных молекулярных потоков $\overline{\boldsymbol{q}}$, $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$, $\overline{\boldsymbol{J}_\alpha}$ и $\overline{\xi}_s$, еще и неизвестными смешанными корреляционными (одноточечными и одномоментными) моментами второго порядка. В связи с этим, возникает центральная проблема теории турбулентности (известная, как проблема замыкания), связанная с конструированием определяющих соотношений для всех неопределенных величин, входящих в турбулентно осредненные гидродинамические уравнения. Эта проблема для химически активной многокомпонентной смеси сопряжена еще и с дополнительными трудностями. Первая трудность связана с необходимостью учета сжимаемости суммарного континуума, отвечающего рассматриваемому движению среды. Существование градиентов плотности составляет одно из важнейших свойств реагирующих течений, которое не учитывалось классическими моделями нереагирующей турбулентности. В частности, в метеорологии рассматривались турбулентные конвективные течения исключительно при использовании приближения Буссинеска. Как известно, в этом приближении изменение плотности принимается во внимание лишь в членах, описывающих влияние ускорения силы тяжести. Однако такой подход абсолютно неприменим, например, к медленному (дефлаграционному) турбулентному горению, когда в потоке возникают многократные изменения плотности. Вторая трудность, на которой мы остановимся подробно в гл. 4, обнаруживается при моделировании большого числа дополнительных парных корреляций пульсаций температуры и концентраций, появляющихся (как будет показано далее) при осреднении источниковых членов производства вещества $\overline{\sigma}_\alpha$ в диффузионных уравнениях (3.1.23), описывающих изменение осредненного состава реагирующей смеси. Эволюционные уравнения переноса для корреляций подобного рода в случае турбулизованного движения сжимаемой реагирующей смеси сильно усложняются.

Относительно осредненных молекулярных потоков важно отметить следующее: поскольку осреднение Фавра не позволяет достаточно просто осреднить их актуальные аналоги, приведенные, например, во второй главе данной книги (в частности, рейнольдсово осреднение соотношения Навье—Стокса (2.3.9) для тензора вязких напряжений П, при использовании средневзвешенного значения $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ для скорости, значительно усложняет, как это легко проверить, его вид), то, с точки зрения последовательного построения феноменологической модели сжимаемой турбулентности, нам представляется более правильным выполнить непосредственный вывод определяющих соотношений для этих потоков в рамках осредненного турбулизованного континуума, например, методами неравновесной термодинамики, как это было проделано в п. 2.3 для их регулярных аналогов.

Подобную процедуру целесообразно выполнить еще и потому, что одновременно и точно таким же термодинамическим способом могут быть получены линейные алгебраические связи (модели турбулентности) между фигурирующими в осредненных гидродинамических уравнениях турбулентными потоками и осредненными параметрами состояния среды (или их производными), которые предполагаются известными или легко вычисляются (см. *Ко-*

лесниченко, 1980). Речь идет, прежде всего, о турбулентном потоке тепла $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}$ (3.1.44)), турбулентных диффузионных потоках $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) (3.1.25), турбулентных рейнольдсовых напряжениях $\boldsymbol{R}$ (3.1.30), а также о большом числе парных корреляций $\langle Z_\alpha'' T'' \rangle$ и $\langle Z_\alpha'' Z_\beta'' \rangle$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N$), которые явно входят в осредненное уравнение состояния для давления (3.1.70), или появляются (для химически активной смеси) при осреднении источниковых членов в диффузионных уравнениях (3.2.23). Наряду с этим потребуется промоделировать еще и связанный с пульсациями плотности турбулентный поток удельного объема $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}}$ (3.1.20), осредненные «источниковые члены» производства масс $\overline{\sigma}_\alpha$ в химических реакциях, а также целый ряд неизвестных корреляционных членов, включающих пульсации давления.

Напомним, что в простейших моделях турбулентности несжимаемой однокомпонентной жидкости (в том числе и с пассивной добавкой, не влияющей на динамический режим турбулентности) первоначально наиболее широкое распространение получили простейшие схемы замыкания, основанные на градиентной гипотезе Буссинеска (*Буссинеск, 1977*). Этот подход позволяет линейно связать неизвестные турбулентные потоки массы, количества вещества и энергии с градиентами осредненных параметров состояния среды через некоторые локальные коэффициенты пропорциональности, так называемые коэффициенты турбулентного переноса (или обмена). Для сжимаемой многокомпонентной смеси подобного рода соотношения в наиболее общем виде были впервые получены методами неравновесной термодинамики в работе (*Колесниченко, Маров, 1984*) и будут приведены в следующем разделе. Заметим, что использование градиентных замыкающих соотношений для турбулентных потоков дает возможность записать турбулентно осредненные гидродинамические уравнения реагирующей смеси точно в таком же виде, какой имеют эти уравнения для регулярного движения. Это обстоятельство позволяет, в частности, проводить численное решение тех гидродинамических задач, для которых чрезвычайно важны переходы ламинарного режима течения реагирующей смеси газов в турбулентный режим течения. Вместе с тем, следует отметить, что градиентная гипотеза совсем не решает проблемы замыкания, если относительно коэффициентов турбулентного обмена не приняты некоторые дополнительные предположения и не указаны способы их расчета. Более того, подобный подход оказывается совершенно неприменимым в тех случаях, когда существенно влияние предыстории процесса турбулизации на локальные характеристики течения; в этих случаях адекватные коэффициенты турбулентного обмена вообще не удается определить (см. *Иевлев, 1990*).

Объективная оценка состояния проблемы замыкания первого порядка показывает, что до настоящего времени фактически не разработана общая феноменологическая теория турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии для многокомпонентных смесей. Широко используемые в литературе градиентные соотношения (см., например, *Монин, Яглом, 1992*; *Ван Мигем, 1977*; *Лапин Ю. В., Стрелец, 1989*) не обладают, как уже отмечалось, достаточной общностью и получены, в основном, для одножидкостной среды с пассивной добавкой. В связи с этим, возникает необходимость рассмотрения более общих подходов к проблеме замыкания турбулентных уравнений смеси на уровне моделей первого порядка, например, в рамках термодинамического моделирования турбулентности сжимаемого континуума. В этом случае онзагеровский формализм неравновесной термодинамики позволяет получить максимально общую структуру определяющих (реологических) соотношений для турбулентных потоков, в том числе, и в виде обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для турбулентной многокомпонентной диффузии и соответствующего им выражения для полного потока тепла. На рассматриваемом уровне замыкания такого рода определяющие соотношения, по-видимому, достаточно адекватно описывают турбулентный тепло- и массоперенос в многокомпонентной среде. Однако, в силу ограниченности экспериментальных данных по коэффициентам турбулентного обмена, на практике часто все же приходится использовать более простые модели.

Таким образом, дальнейшая наша задача заключается в том, чтобы получить явные градиентные выражения для осредненных молекулярных и турбулентных потоков переноса тепла, количества движения и массы, т. е. получить так называемые определяющие соотношения турбулентности чисто феноменологическим путем, используя методы расширенной неравновесной термодинамики.

§ 3.2. Реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений

Этот раздел посвящен разработке термодинамической модели многокомпонентной турбулентности, описывающей связи между корреляционными моментами, фигурирующими в осредненных гидродинамических уравнениях смеси, и осредненными термогидродинамическими переменными, которые являются известными или легко вычисляются. Здесь в рамках неравновесной термодинамики разработан метод получения замыкающих градиентных соотношений для турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и тепла $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, а также для тензора рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t)$, которые обобщают на случай турбулентного движения многокомпонентной смеси соответствующие результаты регулярной гидродинамики, представленные в гл. 2. Развитая здесь феноменологическая модель турбулентности основана на представлении пульсационного движения смеси термодинамическим континуумом, состоящим из двух взаимодействующих открытых подсистем (континуумов) — подсистемы осредненного движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения гидродинамических уравнений для мгновенного течения смеси, и подсистемы турбулентного хаоса (так называемая турбулентная надструктура), которая связана с пульсационным движением среды (*Колесниченко*, *1998*). Сразу же подчеркнем, что предложенная «двухжидкостная модель»турбулентности, подобно модели двух жидкостей в теории сверхтекучести гелия, является лишь удобным способом феноменологического описания такого сложного явления, как гидродинамическая турбулентность и не претендует на полное объяснение физики процесса. Тем не менее она позволяет, в частности, получить при использовании онзагеровского формализма неравновесной термодинамики не только «классические» градиентные соотношения для однокомпонентной турбулизованной жидкости, но и наиболее общую структуру подобного рода соотношений для турбулизованной многокомпонентной среды.

Здесь путем осреднения фундаментального тождества Гиббса, справедливого по предположению для микродвижений системы, получено балансовое уравнение для осредненной энтропии $\langle S\rangle$ турбулизованной среды и найден явный вид для потока $\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$ энтропии $\langle S\rangle$ и величины $\sigma_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$ ее локального производства, обусловленного необратимыми физическими процессами как внутри подсистемы среднего движения, так и при взаимодействии с подсистемой турбулентного хаоса. Постулирование для подсистемы турбулентного хаоса термодинамического тождества Гиббса позволяет ввести в рассмотрение такие ее характеристики, как энтропия $S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и температура $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ турбулизации, а также пульсационное давление $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (см. *Невзглядов, 1945 а, б*). Эти обобщенные параметры связаны с турбулентными флуктуациями и динамическими изменениями в квазистационарном состоянии хаоса точно таким же образом, как, например, локальная равновесная энтропия $S(\boldsymbol{r}, t)$ связана с молекулярными пульсациями и динамическими изменениями в квазиравновесном состоянии. При использовании балансового уравнения для суммарной энтропии $S_{\boldsymbol{\Sigma}} \equiv \langle S\rangle + S_{\text{turb}}$ турбулизованной смеси получены линейные градиентные соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений. Дан подробный вывод этих соотношений для случая изотропной турбулентности, когда статистические свойства турбулентного поля не зависят от направления. Выведены обобщенные соотношения Стефана—Максвелла для турбулентной многокомпонентной диффузии и выражение для турбулентного потока тепла, которые наиболее полно описывают тепло- и массообмен при турбулентном течении смеси.

3.2.1. Уравнение баланса средневзвешенной энтропии смеси

Термодинамический анализ движения турбулизованной многокомпонентной среды проведем в предположении, что одноточечные корреляции $\langle \mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle$ для любых (не равных гидродинамической скорости течения $\boldsymbol{u}$) пульсирующих термодинамических параметров $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathscr{A}\rangle\langle \mathscr{B}\rangle$ и могут быть опущены, т. е. далее будем предполагать, что

$$\frac{\langle \mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle}{\langle \mathscr{A}\rangle\langle \mathscr{B}\rangle} \ll 1, \quad (\mathscr{A} \neq \boldsymbol{u}, \mathscr{B} \neq \boldsymbol{u}). \tag{3.2.1}$$

Балансовое уравнение для средневзвешенной удельной энтропии $\langle S\rangle(\boldsymbol{r}, t) \equiv \equiv \overline{\rho S}/\overline{\rho}$ турбулентной смеси получим путем статистического осреднения (3.1.5) эволюционного уравнения (2.2.4) для пульсирующей энтропии S:

$$\overline{\rho}\frac{D\langle S\rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle S\rangle) + \operatorname{div}(\overline{\rho}\langle S\rangle\langle \boldsymbol{u}\rangle) = -\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{J}_{(S)}} + \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle S\rangle}) + \sigma_{\langle S\rangle}. \tag{3.2.2}$$

Здесь $\sigma_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\sigma_{(S)}}$ — локальное производство осредненной энтропии смеси, т. е. возникновение величины $\langle S\rangle(\boldsymbol{r}, t)$ в единицу времени в единице объема среды; $\overline{J_{\langle S\rangle}}$ и $J_{\langle S\rangle}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho S'' \boldsymbol{u}''}$ — осредненное значение мгновенного молекулярного потока энтропии смеси и турбулентный поток энтропии подсистемы среднего движения соответственно.

Для получения (расшифровки) явного вида выражений для величин $\overline{J_{\langle S\rangle}}$, $J_{\langle S\rangle}^{\text{turb}}$ и $\sigma_{\langle S\rangle}$ в (3.2.2) можно поступить двояким образом: либо осреднить (например, по ансамблю возможных реализаций) их соответствующие мгновенные аналоги, либо сопоставить осредненное уравнение (3.2.2) с тем уравнением, которое получается из осредненного тождества Гиббса (2.2.5) при исключении из него соответствующих субстанциональных производных от осредненных параметров состояния среды $\langle 1/\overline{\rho}\rangle$, $\langle Z_\alpha\rangle$ и $\langle E\rangle$. Воспользуемся здесь последним способом.

Осредненное тождество Гиббса

Осреднение справедливого для микродвижений смеси фундаментального тождества Гиббса (2.2.5) (записанного вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объема) приводит к следующему уравнению для средневзвешенных удельной энтропии $\langle S\rangle$ и удельной внутренней энергии $\langle E\rangle$ смеси (*Колесниченко, 1998*)

$$\overline{\rho}\langle T\rangle \frac{D\langle S\rangle}{Dt} = \overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} + \overline{\rho}\overline{p}\frac{D\langle 1/\overline{\rho}\rangle}{Dt} - \overline{\rho}\sum_{\alpha=1}^{N}\langle \mu_\alpha\rangle \frac{D\langle Z_\alpha\rangle}{Dt} + \Delta. \qquad (3.2.3)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta \equiv -\overline{T''\rho dS/dt} - \langle T\rangle\, \mathrm{div}(\overline{\rho S''\boldsymbol{u}''}) + \mathrm{div}(\overline{\rho E''\boldsymbol{u}''}) + \overline{p\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}''} - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\mu_\alpha'' \rho dZ_\alpha/dt} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle \mu_\alpha\rangle\, \mathrm{div}(\overline{\rho Z_\alpha''\boldsymbol{u}''}). \qquad (3.2.4)$$

Можно показать, что если для осредненных значений термодинамических параметров справедливы те же термодинамические соотношения, что и для их значений в случае микродвижений (а это имеет место при выполнении условия (3.2.1) и, в частности, справедливы следующие основные термодинамические тождества

$$\langle G\rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^{N}\langle \mu_\alpha\rangle\langle Z_\alpha\rangle = \langle E\rangle + \overline{p}\langle 1/\overline{\rho}\rangle - \langle T\rangle\langle S\rangle, \qquad (^1)$$

$$\langle S\rangle\delta\langle T\rangle + \sum_{\alpha=1}^{N}\langle \mu_\alpha\rangle\delta\langle Z_\alpha\rangle = \delta\langle E\rangle + \overline{p}\delta\langle 1/\overline{\rho}\rangle, \qquad (^2)$$

$$(3.2.5)$$

то величина $\Delta \equiv 0$ (здесь δ — символ приращения любого вида), т. е. фундаментальное тождество Гиббса (3.2.3) в субстанциональной форме сохраняет свой «классический» вид также и для подсистемы среднего движения (*Колесниченко, 1980а*).

Действительно, осредняя по ансамблю возможных реализаций справедливое для любой полевой величины $\mathscr{A}$ тождество

$$\delta(\rho\mathscr{A}\varepsilon) - T\delta(\rho\mathscr{A}S) + p\delta\mathscr{A} - \sum_{\alpha=1}^{N}\mu_\alpha\delta(\rho\mathscr{A}Z_\alpha) \equiv 0,$$

будем иметь

$$0=\delta(\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle E\rangle)-\langle T\rangle\delta(\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle S\rangle)+\overline{p}\delta\langle\mathscr{A}\rangle-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{N}\langle\mu_\alpha\rangle\delta(\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle Z_\alpha\rangle)=-\delta(\overline{\rho\mathscr{A}''E''})+\langle T\rangle\delta(\overline{\rho\mathscr{A}''S})+$$
$$+\overline{T''\delta(\rho SA)}-\overline{p\delta\mathscr{A}''}+\sum_{\alpha=1}^{N}\langle\mu_\alpha\rangle\delta(\overline{\rho Z_\alpha''\mathscr{A}''})+\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\mu_\alpha''\delta(\rho Z_\alpha\mathscr{A})},\tag{3.2.6}$$

причем в силу допущения (3.2.5) левая часть этого равенства равна нулю при любых $\mathscr{A}$. Полагая в (3.2.6) последовательно $\mathscr{A}=1$ и $\mathscr{A}=\boldsymbol{u}$, получим, соответственно, следующие два тождества:

$$\overline{T''\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}}+\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\mu_\alpha''\frac{\partial(\rho Z_\alpha)}{\partial t}}=0,\qquad (^1)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{N}\langle\mu_\alpha\rangle\overline{\operatorname{div}(\rho Z_\alpha''\boldsymbol{u}'')}+\overline{\operatorname{div}(\rho E''\boldsymbol{u}'')}-\langle T\rangle\overline{\operatorname{div}(\rho S''\boldsymbol{u}'')}-$$
$$-\overline{T''\operatorname{div}(\rho S\boldsymbol{u})}+\overline{p\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}-\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\mu_\alpha''\operatorname{div}(\rho Z_\alpha\boldsymbol{u})}=0,\qquad (^2)\tag{3.2.7}$$

из которых, как легко видеть, и следует $\Delta\equiv 0$.

Формула для производства средневзвешенной энтропии смеси

Исключим теперь из правой части осредненного соотношения Гиббса (3.2.3) субстанциональные производные от параметров $(1/\overline{\rho})$, $\langle Z_\alpha\rangle$ $(\alpha=1,2,\ldots$ $\ldots,N)$ и $\langle E\rangle$ с помощью осредненных уравнений (3.1.21), (3.1.23) и (3.1.54). В результате получим уравнение субстанционального баланса осредненной энтропии $\langle S\rangle(\boldsymbol{r},t)$ смеси в следующем явном виде [ср. с (2.2.7) и (2.2.8)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle S\rangle}{Dt}+\operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}^\Sigma-\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\langle\mu_\alpha\rangle\boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma}{\langle T\rangle}\right)=\sigma_{\langle S\rangle}=\sigma_{\langle S\rangle}^{(i)}+\sigma_{\langle S\rangle}^{(e)},\tag{3.2.8}$$

где локальное производство осредненной энтропии определяется соотношением

$$\sigma_{\langle S\rangle}\equiv\frac{1}{\langle T\rangle}\left\{-\left(\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^\Sigma\cdot\frac{\partial\ln\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\left(\overline{\boldsymbol{\Pi}}:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\right.$$
$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma\cdot\left[\langle T\rangle\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\langle\mu_\alpha\rangle}{\langle T\rangle}\right)+\langle h_\alpha\rangle\frac{\partial\ln\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right]\right)+\sum_{s=1}^{r}\langle A_s\rangle\overline{\xi}_s-$$
$$\left.-\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha^-\cdot\boldsymbol{F}_\alpha^*\right)-\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}+\left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right\}.\tag{3.2.9}$$

Здесь с помощью соотношений

$$\langle A_s\rangle(\boldsymbol{r},t)\equiv-\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\langle\mu_\alpha\rangle,\qquad(s=1,2,\ldots,r)\tag{3.2.10}$$

нами введены в рассмотрение осредненные химические сродства $\langle A_s \rangle$ реакций s в турбулизованной реагирующей среде [ср. с (2.2.9)], а также использованы следующие обозначения

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\Sigma} \equiv \overline{\boldsymbol{J}}_q + \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}}, \quad \overline{\boldsymbol{J}}_q \cong \overline{\boldsymbol{q}} - \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha, \quad \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} \equiv \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} - \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\Sigma} \equiv \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\Sigma} - \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}, \quad \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\Sigma}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{q}} + \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} = \boldsymbol{q}^{\Sigma} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}, \\ \boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma} \equiv \overline{\boldsymbol{J}_\alpha} + \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} \equiv \boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

для суммарных потоков диффузии и тепла в многокомпонентном турбулентном континууме. Сопоставляя теперь (3.2.8) и (3.2.9) с уравнением (3.2.2), получим для двух диффузионных потоков энтропии (осредненного молекулярного $\overline{\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle}}$ и турбулентного $\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle}^{\text{turb}}$), а также для производства энтропии $\sigma_{\langle S \rangle}$ подсистемы среднего движения, следующие выражения:

$$\overline{\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle}} \equiv \frac{1}{\langle T \rangle}\left(\overline{\boldsymbol{q}} - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle \mu_\alpha \rangle \overline{\boldsymbol{J}}_\alpha\right) = \frac{1}{\langle T \rangle}\overline{\boldsymbol{J}}_q + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle S_\alpha \rangle \overline{\boldsymbol{J}_\alpha}, \tag{3.2.12}$$

$$\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle}^{\text{turb}} \equiv \frac{1}{\langle T \rangle}\left[\widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle \mu_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}\right] = \frac{1}{\langle T \rangle}\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle S_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \tag{3.2.13}$$

$$\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{1}{\langle T \rangle}\left\{-\left(\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\Sigma} \cdot \frac{\partial \ln\langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \sum_{s=1}^{r} \langle A_s \rangle \overline{\xi}_s - \right.$$

$$\left. - \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma} \cdot \left[\langle T \rangle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\langle \mu_\alpha \rangle}{\langle T \rangle}\right) + \langle h_\alpha \rangle \frac{\partial \ln\langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}_\alpha\right]\right\} \geqslant 0, \tag{3.2.14}$$

$$\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{1}{\langle T \rangle}\left\{\left(-\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \cdot \boldsymbol{F}_\alpha\right) - \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\langle \varepsilon_b \rangle\right\} \equiv \frac{\mathfrak{J}_{E,b}}{\langle T \rangle}. \tag{3.2.15}$$

Здесь $\langle \mu_\alpha \rangle \cong \langle h_\alpha \rangle - \langle T \rangle \langle S_\alpha \rangle$ — осредненное значение парциального химического потенциала; положительная величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t)$ определяет скорость локального производства осредненной энтропии $\langle S \rangle$ смеси, обусловленного необратимыми процессами переноса и химическими реакциями внутри подсистемы осредненного движения; величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\boldsymbol{r}, t)$ (сток или приток энтропии), как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения.

Следует отметить, что величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(\boldsymbol{r}, t)$ может быть разной по знаку, в зависимости от конкретного режима турбулентного течения. Действительно, скорость диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle(\boldsymbol{r}, t)$ всегда является положительной величиной. Однако скорость перехода энергии $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$ (представляющая собой работу, совершаемую над турбулентными вихрями за единицу времени в единице объема окружающей средой, как следствие существования пульсаций давления p' и расширения ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' > 0$) или сжатия ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' < 0$) вихрей) может быть разной по знаку. Величина $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\overline{p} \approx g\overline{\rho' u_3}$, представляющая собой скорость порождения энергии турбулентности под действием сил плавучести, положительна в случае мелкомасштабной турбулентности, однако для крупных вихрей она может быть как положительной, так и отрицательной (см. *Ван Мигем, 1977*). Таким образом, из уравнения (3.2.9) следует, что в общем случае энтропия $\langle S \rangle$ подсистемы среднего движения может, как возрастать, так и уменьшаться, что является характерной чертой термодинамически открытых систем.

Заметим также, что отнесение отдельных членов уравнения (3.2.8) к турбулентному потоку энтропии или к производству осредненной энтропии до некоторой степени неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения турбулентного теплового потока, отличные от (3.2.8). Подобного рода соображения подробно изложены в работах (*де Гроот, Мазур, 1964*; *Дьярмати, 1974*).

3.2.2. Уравнения баланса энтропии и производство энтропии для подсистемы турбулентного хаоса

Итак, мы убедились, что одной только осредненной по Фавру энтропии $\langle S \rangle$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулизованного континуума, поскольку она не связана с какими-либо параметрами, характеризующими внутреннюю структуру подсистемы турбулентного хаоса, и, в частности, с таким первостепенным параметром, как энергия турбулентности (осредненная пульсационная кинетическая энергия единицы массы среды)

$$\langle b \rangle(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho |\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho}. \tag{3.2.16}$$

В связи с этим, при разработке феноменологической модели турбулентности представляется целесообразным термодинамическое рассмотрение также и подсистемы турбулентного хаоса. Эта цель может быть достигнута путем расширения числа независимых переменных при термодинамическом описании этой подсистемы, находящейся в случае сильно развитой турбулентности в неравновесно-стационарном состоянии. Будем далее охарактеризовывать физически элементарный объем $d\boldsymbol{r}$ турбулентного хаоса (как правило, при построении модели сплошной среды бесконечно малые частицы рассматриваются как термодинамические системы, для которых определены физические понятия о внутреннем состоянии) следующими структурными параметрами: экстенсивными переменными состояния $E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (плотность внутренней энергии турбулизации) и $S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (обобщенная локальная энтропия турбулизации) и интенсивными переменными состояния $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (обобщенная температура турбулизации, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (давление турбулизации) (*Блэкадар, 1955*). При этом важно отметить, что такие обобщенные параметры состояния хаоса, как энтропия S_{turb} и энергия E_{turb} турбулизации (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций) вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности теории и не имеют, вообще говоря, точной физической интерпретации (см. *Жоу* *и др.*, *2006*). Тем не менее далее предполагается, что термодинамические соотношения общего характера, справедливые в квазиравновесном состоянии, остаются в силе также и для квазистационарного состояния турбулентного хаоса. В частности, важным моментом является формулировка второго закона термодинамики, который служит исключительно в качестве ограничения на форму представления соответствующих конститутивных уравнений. Под допустимыми физически реальными процессами (т. е. процессами, в которых в рамках применяемой модели турбулентного движения последовательность состояний может осуществляться с течением времени) в нашем рассмотрении понимается решение балансовых уравнений сохранения, дополненных определяющими соотношениями (полученными обычным способом) при выполнении принципа Клаузиуса, согласно которому изменения суммарной энтропии $S_\Sigma = (< S > + S_{\text{turb}})$ турбулизованной системы, вызванные внутренними необратимыми процессами, могут быть только положительными или (в крайнем случае) равным нулю.

Перейдем теперь к следствиям из этого формализма. Следуя изящному методу Гиббса (см., например, *Мюнстер*, *2002*), выберем в качестве локальной характеристической функции (содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в стационарном состоянии) следующее фундаментальное уравнение Гиббса (в интегральном виде) для обобщенной энтропии:

$$S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = S_{\text{turb}}(E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t),\ 1/\bar{\rho}(\boldsymbol{r}, t)); \tag{3.2.17}$$

это функциональное соотношение считается заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построении классической локально-равновесной термодинамики, следующие определения сопряженных переменных $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/T_{\text{turb}} \equiv \{\partial S_{\text{turb}}/\partial E_{\text{turb}}\}_{1/\bar{\rho}}, \qquad p_{\text{turb}}/T_{\text{turb}} \equiv \{\partial S_{\text{turb}}/\partial(1/\bar{\rho})\}_{E_{\text{turb}}}.$$

Тогда интенсивным переменным $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ можно приписать смысл соответственно обобщенной температуры и давления (турбулизации). Соответствующая дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса (3.2.17), записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объема, принимает вид

$$T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)\frac{D}{Dt}(S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)) = \frac{D}{Dt}(E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)) + p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}(\boldsymbol{r}, t)\right). \tag{3.2.18}$$

Очевидно, что различного рода функциональные связи между переменными E_{turb}, T_{turb}, p_{turb} и S_{turb}, которые могут быть получены обычным для термодинамики способом из (3.2.18), допустимо интерпретировать как «уравнения состояния» рассматриваемой подсистемы. Далее будем отождествлять величину $E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ с энергией турбулентности

$$E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \langle b\rangle(\boldsymbol{r}, t) + \text{const} = \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\bar{\rho} + \text{const} \tag{3.2.19}$$

и полагать, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является совершенным классическим газом с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно (ключевые гипотезы модели). Тогда, в частности, имеем

$$\begin{gathered}\langle b\rangle = c_V^{\text{turb}} T_{\text{turb}} = \frac{3}{2}\mathscr{R}^* T_{\text{turb}} = \frac{3}{2} p_{\text{turb}}/\overline{\rho}, \qquad p_{\text{turb}} = \mathscr{R}^* T_{\text{turb}}\overline{\rho}, \\ S_{\text{turb}} = \frac{3}{2}\mathscr{R}^* \ln(p_{\text{turb}}/\overline{\rho}^{\frac{5}{3}}) + \text{const}.\end{gathered} \tag{3.2.20}$$

Соответствующее уравнение баланса для энтропии турбулизации S_{turb} получим из (3.2.18) выполненным выше способом [см. п. 2.2] с помощью уравнения (3.1.21) для удельного объема $(1/\overline{\rho})$ и балансового уравнения (3.1.69) для турбулентной энергии $\langle b\rangle$; в результате получим:

$$\overline{\rho}\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_{(S_{\text{turb}})} = \sigma_{(S_{\text{turb}})} \equiv \sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})} + \sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})}, \tag{3.2.21}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{(S_{\text{turb}})} \equiv \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left(\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'/\rho)\boldsymbol{u}'' - \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''}\right) = \frac{1}{T_{\text{turb}}}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}, \tag{3.2.22}$$

$$0 \leqslant \sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})} = \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\cdot\frac{\partial \ln T_{\text{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\boldsymbol{R} : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + p_{\text{turb}} \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right\}, \tag{3.2.23}$$

$$\sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})} \equiv \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{F}^{*}\right) + \overline{p' \operatorname{div}\boldsymbol{u}''} - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right\} \equiv -\frac{\mathfrak{I}_{E,b}}{T_{\text{turb}}}. \tag{3.2.24}$$

Здесь $\boldsymbol{J}_{(S_{\text{turb}})}(\boldsymbol{r}, t)$ — субстанциональный поток энтропии S_{turb} подсистемы турбулентного хаоса; величины $\sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})}$ и $\sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})}$ имеют смысл, соответственно, скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии S_{turb}.

Для дальнейшего анализа удобно разложить градиент осредненной скорости $\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r}$ (тензор второго ранга) в выражениях (3.2.14) и (3.2.23) на симметрическую и антисимметрическую части [см. (2.2.11)].

$$\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r} = (\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^s + (\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^a = \boldsymbol{S} + \frac{1}{3}\boldsymbol{U}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + (\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^a, \tag{3.2.25}$$

а симметричный тензор напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}$ (учитывая уравнение состояния (3.2.20)) представить следующим образом

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R} : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R} + p_{\text{turb}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R} + \frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle\boldsymbol{U}, \tag{3.2.26}$$

где

$$\begin{gathered}p_{\text{turb}} = -\frac{1}{3}(\boldsymbol{R} : \boldsymbol{U}), \qquad \boldsymbol{D} \equiv (\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^s, \\ \boldsymbol{S} \equiv \overset{0}{\boldsymbol{D}} \equiv (\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^{\overset{0}{s}} = \boldsymbol{D} - \frac{1}{3}\boldsymbol{U}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\end{gathered} \tag{3.2.27}$$

— соответственно давление турбулизации, тензор скорости деформации и тензор скорости сдвига и для турбулизованного континуума. Тогда скалярное произведение тензора Рейнольдса и градиента скорости можно записать следующим образом $(\boldsymbol{R} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u}\rangle) = \overset{0}{\boldsymbol{R}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} - p_{\text{turb}}\, \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle$, а уравнение баланса для энтропии турбулизации S_{turb} (3.2.21) приобретает вид

$$\bar{\rho}\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\frac{1}{T_{\text{turb}}}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\right\} = \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\cdot\frac{\partial \ln T_{\text{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overset{0}{\boldsymbol{R}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} - \Im_{E,b}\right\}. \tag{3.2.28}$$

При написании (3.2.28) использовано то обстоятельство, что скалярное произведение симметрического и антисимметрического тензоров всегда равно нулю.

3.2.3. Балансовое уравнение для суммарной энтропии турбулизованного континуума

Введение двух энтропий $\langle S\rangle$ и S_{turb} конкретизирует наше представление об исходном турбулизованном континууме, как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем — подсистемы среднего движения и подсистемы турбулентного хаоса. Из (3.2.8) и (3.2.28) следует уравнение баланса для суммарной энтропии $S_\Sigma = (<S> + S_{\text{turb}})$ многокомпонентной системы

$$\bar{\rho}\frac{DS_\Sigma}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\frac{\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}}{T_{\text{turb}}} + \frac{\left(\boldsymbol{q}^\Sigma - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle\mu_\alpha\rangle \boldsymbol{J}^\Sigma_\alpha\right)}{\langle T\rangle}\right\} = \sigma_\Sigma \equiv \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(i)}_{S_{\text{turb}}} + \sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}}, \tag{3.2.29}$$

где

$$0 \leqslant \sigma_\Sigma \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{-\left(\widetilde{\boldsymbol{J}}^\Sigma_q \cdot \frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \bar{\pi}\, \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \overset{0}{\overline{\boldsymbol{\Pi}}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{r}\langle A_s\rangle \bar{\xi}_s - \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}^\Sigma_\alpha \cdot \left[\langle T\rangle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\langle\mu_\alpha\rangle}{\langle T\rangle}\right) + \langle h_\alpha\rangle \frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}_\alpha\right]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\cdot\frac{\partial \ln T_{\text{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overset{0}{\boldsymbol{R}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right\} + \Im_{E,b}\left(\frac{T_{\text{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle}\right), \tag{3.2.30}$$

$$\Im_{E,b} \equiv -\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}_\alpha\right) - \overline{p'\, \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \tag{3.2.31}$$

$$\sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}} \equiv \sigma^{(e)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(e)}_{S_{\text{turb}}}. \tag{3.2.32}$$

Отсюда видно, что локальное производство суммарной энтропии σ_Σ, связанное с необратимыми процессами внутри турбулизованного континуума, определяется следующим набором термодинамических потоков $\widetilde{\boldsymbol{J}}^\Sigma_q$, $\bar{\xi}_s$, $\boldsymbol{J}^\Sigma_\alpha$, $\bar{\pi}$, $\overset{0}{\overline{\boldsymbol{\Pi}}}$, $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}$, p_{turb}, $\overset{0}{\boldsymbol{R}}$, $\Im_{E,b}$ и сопряженных им термодинамических сил [ср. с формулами (2.2.18)—(2.2.22)]

$$\mathbf{Y}_q^{\Sigma} \equiv -\frac{1}{\langle T\rangle^2}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right), \qquad \mathbf{Y}_{\langle b\rangle} \equiv -\frac{1}{T^2_{\text{turb}}}\frac{\partial T_{\text{turb}}}{\partial \mathbf{r}} \tag{3.2.33}$$

$$Y_{A_s} \equiv \frac{\langle A_s\rangle}{\langle T\rangle} = -\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\langle \mu_\beta\rangle}{\langle T\rangle}\nu_{\beta s}, \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{3.2.34}$$

$$\mathbf{Y}_\alpha^* \equiv -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{\langle \mu_\alpha\rangle}{\langle T\rangle}\right) + \langle h_\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right) + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{\langle T\rangle}, \tag{3.2.35}$$

$$Y_\pi \equiv \frac{\operatorname{div}\langle \mathbf{u}\rangle}{\langle T\rangle}, \tag{3.2.36}$$

$$\mathbf{Y}_D \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\overset{0}{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{Y}_R \equiv \frac{1}{T_{\text{turb}}}\overset{0}{\mathbf{D}}, \tag{3.2.37}$$

$$Y_{E,b} \equiv \left(\frac{T_{\text{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle}\right). \tag{3.2.38}$$

При использовании этих определений, величина производства энтропии σ_Σ может быть записана в следующей билинейной форме

$$0 \leqslant \sigma_\Sigma = \overbrace{\sum_{s=1}^{r}\bar{\xi}_s Y_{A_s} + \widetilde{\mathbf{J}}_q^{\Sigma}\cdot\mathbf{Y}_q^{\Sigma} + \sum_{\alpha=1}^{N}\mathbf{J}_\alpha^{\Sigma}\cdot\mathbf{Y}_\alpha^{*} + \bar{\pi}Y_\pi + \overset{0}{\overline{\mathbf{\Pi}}}:\mathbf{Y}_D}^{\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}} +$$

$$+\overbrace{\mathbf{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\cdot\mathbf{Y}_{\langle b\rangle} + \overset{0}{\mathbf{R}}:\mathbf{Y}_R}^{\sigma^{(i)}_{S_{\text{turb}}}} + \overbrace{\Im_{E,b}Y_{E,b}}^{\sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}}}, \tag{3.2.39}$$

отвечающей трем независимым источникам неравновесных процессов в турбулизованной смеси, имеющих существенно различную физическую природу.

Согласно основному постулату обобщенной неравновесной термодинамики [см. п. 2.2], в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных функций от сопряженных им макроскопических сил: $J_{\gamma i} = \sum_\delta L^{ij}_{\gamma\delta}X_{\delta j}$ $(\gamma, \delta = 1, 2, \ldots, f)$. Важно отметить, что выражение (3.2.39) позволяет получить определяющие соотношения для трех основных режимов течения турбулизованной смеси — для осредненного ламинарного режима, для режима развитой турбулентности, когда турбулентные потоки переноса значительно эффективнее соответствующих осредненных молекулярных потоков ($\mathbf{R} \gg \overline{\mathbf{\Pi}}$, $\mathbf{q}^{\text{turb}} \gg \overline{\mathbf{q}}$ и т. п.), и, наконец, в общем случае, когда процессы осредненного молекулярного и турбулентного переноса сравнимы по результативности. Как видно из (3.2.39), спектр возможных перекрестных эффектов для турбулентного режима течения значительно расширяется по сравнению с ламинарным режимом. Так, например, приведенный поток тепла $\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\Sigma} \equiv \boldsymbol{q}^{\Sigma} - \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\Sigma}$, в турбулизованном континууме появляется не только под влиянием сопряженной с ним термодинамической силы $\boldsymbol{Y}_q^{\boldsymbol{\Sigma}}$, но и благодаря воздействию силы $\boldsymbol{Y}_{\langle b \rangle}$, сопряженной с потоком $\boldsymbol{J}_{\langle b \rangle}^{\text{turb}}$ (описывающим «диффузионный» перенос турбулентной энергии). Однако в настоящее время нет, к сожалению, надежных экспериментальных данных, количественно описывающих перекрестные эффекты подобного рода в турбулизованной среде. Кроме того, обычно вклад любых перекрестных эффектов в общую скорость процесса переноса на порядок меньше по сравнению с прямыми эффектами (см. *де Гроот*, *Мазур*, *1964*). С учетом этих обстоятельств, будем далее пользоваться требованиями положительности интенсивностей производства суммарной энтропии $\sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}$, $\sigma_{S_{\text{turb}}}^{(i)}$ $\sigma_{\langle S \rangle, S_{\text{turb}}}$ независимо друг от друга, т. е. полагая, что на любые линейные связи, относящиеся, например, к подсистеме осредненного движения (в частности, между симметричной частью осредненного тензора вязких напряжений $\overset{0}{\overline{\boldsymbol{\Pi}}}$ со следом, равным нулю, и тензорной силой вязкости $\boldsymbol{Y}_D$) подсистема турбулентного хаоса (тензорная сила $\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{R}}$) не оказывает заметного влияния. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение сделаем два замечания:

• Величина $\sigma_{\langle S \rangle, S_{\text{turb}}}$, описывающая производство энтропии внутри полной системы за счет необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения, в силу второго закона термодинамики также всегда положительна. Поэтому «направление» термодинамического потока $\mathfrak{I}_{E,b}(\boldsymbol{r}, t)$ определяется знаком функции состояния $Y_{E,b} \equiv (1/\langle T \rangle - 1/T_{\text{turb}})$, которую следует рассматривать как сопряженную термодинамическую силу (макроскопическую причину), вызывающую этот поток энтропии. Известно, что подобный обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием структурированного коллективного поведения, т. е. может быть источником самоорганизации в одной из них (см. гл. 5).

• В общем случае матрица феноменологических коэффициентов $L_{\gamma\delta}^{ij}$ для турбулизованного континуума будет зависеть не только от осредненных параметров состояния (температуры, плотности и т. п.), но и от характеристик самой турбулентной надструктуры, например, от параметров $\overline{\rho}$, $\langle \varepsilon_b \rangle$ и T_{turb} (или $\langle b \rangle$). Подобная ситуация, при которой имеется функциональная зависимость тензора кинематических коэффициентов $L_{\gamma\delta}^{ij}$ от самих термодинамических потоков (например, от скорости диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle$), типична, как известно, для самоорганизующихся систем (см. *Хакен*, *1985*; *1991*). Она может привести, вообще говоря, к тому, что отдельные слагаемые в сумме $\sigma_{\boldsymbol{\Sigma}}$ не будут положительно определенными, хотя сама сумма $\sigma_{\boldsymbol{\Sigma}} \geqslant 0$. В этом случае суперпозиция различных потоков может приводить в принципе к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы $L_{\gamma\delta}^{ij}$, чем, вероятно, и объясняется эффект отрицательной вязкости, в некоторых турбулентных течениях (см. гл. 5 и 8).

3.2.4. Линейные замыкающие соотношения для турбулизованной многокомпонентной смеси газов

Для конкретизации градиентных замыкающих соотношений (конститутивных законов Онзагера), связывающих между собой осредненные молекулярные и турбулентные термодинамические потоки с соответствующими термодинамическими силами, воспользуемся теперь формализмом неравновесной термодинамики, изложенным в п. 2.2. Рассмотрим здесь общий случай, когда процессы осредненного молекулярного и турбулентного переноса сопоставимы по значимости, и ограничимся выводом подобного рода соотношений для мезо- и мелкомасштабной турбулентности, для которой, как известно, наблюдается тенденция к установлению локальной статистической изотропности ее характеристик (статистические свойства турбулентного течения в этом случае не зависят от направления). Данный подход легко обобщается на случай неизотропной (крупномасштабной) турбулентности.

Как известно из общей теории тензорных функций (см. *Седов*, *1984*), свойства симметрии изотропных сред вполне характеризуются метрическим тензором g^{ij}: все тензоры будут тензорными функциями только метрического тензора, в частности, $L^{ij}_{\gamma\delta} = L_{\gamma\delta} g^{ij}$ (γ, $\delta = 1, 2, \ldots, f$), где $L_{\gamma\delta}$ — скалярные коэффициенты. Кроме этого, благодаря отсутствию интерференции потоков и термодинамических сил различной тензорной размерности в изотропной системе (принцип Кюри), можно рассматривать, например, явления, описываемые полярными векторами (теплопроводность или диффузия) независимо от явлений скалярных и тензорных (см. *де Гроот*, *Мазур*, *1964*). Тогда, принимая дополнительную гипотезу о марковости системы (когда потоки в данный момент времени зависят от обобщенных сил, взятых в тот же самый момент времени), из (3.2.39) получим следующие феноменологические соотношения (записанные в прямоугольной системе координат, $g^{ij} \equiv \delta_{ij}$) (*Колесниченко*, *1998*):

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}^{\Sigma}_q \equiv \boldsymbol{q}^{\Sigma} - \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha = L^{\Sigma}_{qq} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{1}{\langle T \rangle} \right) + \sum_{\beta=1}^{N} L^{\Sigma}_{q\beta} \boldsymbol{Y}^*_\beta, \tag{3.2.40}$$

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha = L^{\Sigma}_{\alpha q} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{1}{\langle T \rangle} \right) + \sum_{\beta=1}^{N} L^{\Sigma}_{\alpha\beta} \boldsymbol{Y}^*_\beta, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.2.41}$$

$$(\overset{0}{\overline{\Pi}})_{jk} = L(\boldsymbol{Y}_D)_{jk} = \overline{\mu} \left\{ \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jk} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle \right\}, \tag{3.2.42}$$

$$\overline{\pi} = \frac{l_{\overline{\pi}\overline{\pi}}}{\langle T \rangle} \left(\operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle + \sum_{s=1}^{r} l_{\overline{\pi}s} \langle A_s \rangle \right) \cong \overline{\mu}_\theta \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle, \tag{3.2.43}$$

$$\overline{\xi}_s = -l_{s\overline{\pi}} \frac{\operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\langle T \rangle} + \sum_{m=1}^{r} l_{sm} \frac{\langle A_s \rangle}{\langle T \rangle}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{3.2.44}$$

$$(\boldsymbol{R})_{jk} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle\delta_{jk} + L_{\text{turb}}(\boldsymbol{Y_R})_{jk} =$$

$$= -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle\delta_{jk} + \mu^{\text{turb}}\left\{\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\delta_{jk}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right\}, \qquad (3.2.45)$$

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle} = -\frac{l_b}{T^2_{\text{turb}}}\frac{\partial T_{\text{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\mu^{\text{turb}}}{\sigma_b}\frac{\partial\langle b\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}, \qquad (3.2.46)$$

$$\mathfrak{F}_{E,b} = l_{E,b}\left(\frac{T_{\text{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle}\right). \qquad (3.2.47)$$

Здесь формулами

$$\overline{\mu} \equiv L/2\langle T\rangle, \quad \overline{\mu}_\theta \equiv l_{\overline{\pi\pi}}/\langle T\rangle, \quad \mu^{\text{turb}} \equiv L_{\text{turb}}/2T_{\text{turb}}, \quad \nu^{\text{turb}} \equiv \mu^{\text{turb}}/\overline{\rho} \qquad (3.2.48)$$

введены осредненные молекулярные коэффициенты вязкости $\overline{\mu}(\boldsymbol{r}, t)$ и второй вязкости $\overline{\mu}_\theta(\boldsymbol{r}, t)$, необходимые для определения осредненного тензора вязких напряжений $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$, а также коэффициенты турбулентной вязкости $\mu^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и кинематической турбулентной вязкости $\nu^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, определяющие тензор турбулентных напряжений $\boldsymbol{R}$. Коэффициент σ_b представляет собой «число Прандтля» для турбулентной энергии, значение которого обычно предполагается постоянным. Скалярные кинематические коэффициенты $L^{\Sigma}_{q\beta}$ и $L^{\Sigma}_{\alpha\beta}$, как и в ламинарном случае [см. формулы (2.3.6) и (2.3.8)] удовлетворяют условиям симметрии Онзагера—Казимира $L^{\Sigma}_{\alpha\beta} = L^{\Sigma}_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N$) и условиям

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L^{\Sigma}_{q\alpha} = 0, \quad (^1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha L^{\Sigma}_{\alpha\beta} = 0, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N). \quad (^2) \qquad (3.2.49)$$

Следует иметь в виду, что в отличие от обычных коэффициентов $\overline{\mu}$ и $\overline{\mu}_\theta$ молекулярной вязкости, коэффициент турбулентной вязкости μ^{turb} характеризует не физические свойства жидкости, а статистические свойства ее пульсационного движения; именно поэтому он может в некоторых случаях принимать отрицательные значения. Кроме этого, известное увеличение турбулентной вязкости по сравнению с ее молекулярным аналогом лишний раз свидетельствует о большей упорядоченности (организованности) турбулентного движения по сравнению с ламинарным. Действительно, при ламинарном движении вязкость определяется передачей импульса на хаотическом молекулярном уровне. При турбулентном же движении передача импульса от слоя к слою осуществляется коллективными степенями свободы, а это является несомненным признаком его большей упорядоченности.

По поводу определяющего соотношения (3.2.45) для тензора $\boldsymbol{R}$ заметим следующее: в случае учета анизотропии турбулентного поля оно значительно усложняется, поскольку требует замены скалярного коэффициента турбулентной вязкости μ^{turb} тензором (4-го ранга) [см. гл. 7, а также монографию (*Монин*, *Яглом*, *1992*)]. Отметим также, что нам удалось получить здесь определяющее соотношение (в стандартном виде)

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{jk} = \overline{\mu}\left\{\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\delta_{jk}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right\} + \overline{\mu}_\theta\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle \qquad (3.2.42^*)$$

для осредненного тензора вязких напряжений непосредственно, т. е. без привлечения соответствующего регулярного аналога [см. (2.3.9)] для ламинарного режима движения и его последующего осреднения.

Линейный закон (3.2.44), как видим, можно использовать и при получении предельной формы выражений для осредненных скоростей химических реакций вблизи состояния химического равновесия. Однако, поскольку этот результат имеет ограниченную область применимости, мы здесь на нем останавливаться не будем, перенеся более подробное рассмотрение в гл. 4.

Теплопроводность и диффузия в турбулизованной смеси

Пользуясь полным формальным сходством определяющих соотношений для векторных турбулентных процессов диффузии и тепла, задаваемых формулами (3.2.40) и (3.2.41), с аналогичными соотношениями для ламинарного режима течения [см. (2.3.1) и (2.3.2)], перепишем (используя развитый в п. 2.3 подход) формулы (3.2.40) и (3.2.41) в следующем виде

$$\boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma = -\overline{n}_\alpha D_{T\alpha}^\Sigma \frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \overline{n}_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} D_{\alpha\beta}^\Sigma \boldsymbol{d}_\beta^{\text{turb}}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.2.50}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^\Sigma = -\widehat{\lambda}^\Sigma \frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \overline{p} \sum_{\beta=1}^{N} D_{T\beta}^\Sigma \boldsymbol{d}_\beta^{\text{turb}}, \tag{3.2.51}$$

где

$$\boldsymbol{d}_\beta^{\text{turb}} \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{n}}\right) + \left(\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{n}} - \langle C_\beta\rangle\right)\frac{\partial \ln \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\overline{n}_\beta}{\overline{p}}\left(\boldsymbol{F}_\beta - m_\beta \sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle \boldsymbol{F}_\alpha\right) \tag{3.2.52}$$

— обобщенные термодинамические силы для турбулентного режима движения смеси, которые аналогичны соответствующим выражениям (2.3.15) для регулярного движения и могут быть введены в рассмотрение для турбулизованной смеси с помощью соотношений

$$\begin{gathered} \boldsymbol{d}_\beta^{\text{turb}} \equiv -\frac{\langle T\rangle \overline{n}_\beta}{\overline{p}} \boldsymbol{Y}_\beta^* - \langle C_\beta\rangle \frac{\partial \ln \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\overline{\rho}_\beta}{\overline{p}} \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha\rangle \boldsymbol{F}_\alpha, \quad (^1) \\ \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{d}_\alpha^{\text{turb}} = 0, \quad (^2) \end{gathered} \tag{3.2.53}$$

т. е. точно таким же способом, как это было сделано в п. 2.3.3 (здесь $\langle C_\beta\rangle = m_\beta \overline{n}_\beta/\overline{\rho}$ — осредненная по Фавру массовая концентрация частиц сорта β).

В соотношениях (3.2.50) и (3.2.51), по аналогии с формулами для ламинарного режима течения жидкости, введены симметричные многокомпонентные коэффициенты турбулентной диффузии $D_{\alpha\beta}^\Sigma$ (α, $\beta = 1, 2, \ldots, N$), коэффициенты турбулентной термодиффузии $D_{T\beta}^\Sigma$ ($\beta = 1, 2, \ldots, N$) и коэффициент турбулентной теплопроводности λ^Σ для многокомпонентного газа с помощью следующих определений

$$\lambda^{\Sigma} \equiv \frac{L^{\Sigma}_{qq}}{\langle T\rangle^2}, \quad D^{\Sigma}_{T\beta} = \frac{L^{\Sigma}_{q\beta}}{\langle T\rangle \overline{n}_{\beta}}, \quad D^{\Sigma}_{\alpha\beta} = D^{\Sigma}_{\beta\alpha} = \frac{\overline{p}}{\langle T\rangle \overline{n}_{\alpha}\overline{n}_{\beta}} L^{\Sigma}_{\alpha q}, \tag{3.2.53*}$$

причем скалярные коэффициенты турбулентного переноса $D^{\Sigma}_{T\beta}$ и $D^{\Sigma}_{\alpha\beta}$, в силу (3.2.49), удовлетворяют условиям

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \langle C_{\alpha}\rangle D^{\Sigma}_{T\alpha\beta} = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{N} \langle C_{\alpha}\rangle D^{\Sigma}_{\alpha\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N). \tag{3.2.54}$$

Определенные формулой (3.2.53) коэффициенты являются эффективными коэффициентами переноса, которые обусловлены не только молекулярным переносом массы и тепла от одних объемов жидкости к другим, но турбулентным перемешиванием, создаваемым пульсациями скорости завихренной жидкости; поэтому можно считать, что $D^{\Sigma}_{\alpha\beta} \equiv \overline{D}_{\alpha\beta} + D^{\text{tyrb}}_{\alpha\beta}$, $\widehat{\lambda}^{\Sigma} \equiv \overline{\widehat{\lambda}} + \widehat{\lambda}^{\text{turb}}$. Поскольку перекрестные процессы, связанные с термодиффузией и диффузионной теплопроводностью, для турбулизованных смесей на сегодня совершенно не изучены, то далее мы будем ими пренебрегать, полагая, что $D^{\Sigma}_{T\alpha\beta} \cong 0$.

Таким образом, определяющие соотношения для потоков турбулентной диффузии и тепла могут быть записаны в следующем окончательном виде

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{\alpha} = -\overline{n}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^{N} D^{\Sigma}_{\alpha\beta} \boldsymbol{d}^{\text{turb}}_{\beta}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N), \tag{3.2.55}$$

$$\boldsymbol{q}^{\Sigma} - \overline{p'\boldsymbol{u}''} = -\widehat{\lambda}^{\Sigma} \frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{\beta=1}^{N} \langle h_{\beta}\rangle \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{\beta}. \tag{3.2.56}$$

Эти соотношения наиболее полно описывают процессы тепло- и массопереноса в развитом изотропном турбулентном течении многокомпонентной газовой смеси. К сожалению, в силу ограниченности экспериментальных данных по многокомпонентным коэффициентам турбулентной диффузии на данном этапе развития феноменологической теории турбулентности на практике приходится пользоваться более упрощенными моделями. К этому следует добавить, что определение введенных здесь коэффициентов турбулентного обмена, в частности коэффициентов $D^{\Sigma}_{\alpha\beta}$, может быть проведено в рамках, так называемой, K-теории развитой турбулентности, с привлечением дополнительных уравнений переноса для парных корреляций пульсирующих термогидродинамических параметров смеси [см. гл. 4].

Обобщенные соотношения Стефана—Максвелла для турбулизованной смеси

Так же как в случае ламинарного тепло- и массопереноса смеси, определяющие соотношения (3.2.55) и (3.2.56) для турбулентных потоков диффузии и тепла удобно (в частности, при численном моделировании многокомпонентных течений) привести к виду обобщенных соотношений Стефана—Максвелла, включающих бинарные (для бинарной смеси) коэффициенты турбулентной диффузии $\mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}$. Это связано с тем, что, в отличие от многокомпонентных коэффициентов диффузии $D^{\Sigma}_{\alpha\beta}$, для коэффициентов $\mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}$ легче, вообще говоря, воспользоваться эмпирическими данными.

Процедура вывода обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии в турбулентном потоке ничем не отличается от той, которую мы провели в п. 2.3.4 при выводе этих соотношений в случае ламинарного режима движения смеси. Используя эту аналогию, приведем сразу окончательный результат (*Колесниченко, 1998*):

$$\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N} \frac{\overline{n}_\beta \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha - \overline{n}_\alpha \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\beta}{\overline{n}^2 \mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}} = \boldsymbol{d}^{\text{turb}}_\beta, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, N-1); \quad \sum_{\alpha=1}^{N} m_\beta \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha = 0, \tag{3.2.57}$$

где

$$\boldsymbol{d}^{\text{turb}}_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{n}}\right) + \left(\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{n}} - \langle C_\beta\rangle\right)\frac{\partial \ln \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\overline{n}_\beta}{\overline{p}}\left(\boldsymbol{F}_\beta - m_\beta \sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle \boldsymbol{F}_\alpha\right).$$

В случае прямого численного решения этих соотношений относительно турбулентных диффузионных потоков $\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha$, их удобно, по аналогии с ламинарным движением смеси, привести к форме обобщенного закона Фика [см. формулу (2.3.61)]. В результате получим

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\beta = -D^{\Sigma}_\beta\left(\overline{n}\boldsymbol{d}^{\text{turb}}_\beta - \frac{1}{\overline{n}}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\overline{n}_\beta}{\mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}}\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha\right) = -\overline{\rho} D^{\Sigma}_\beta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\beta}{\overline{\rho}}\right) + \delta \boldsymbol{J}^{\Sigma}_\beta, \tag{3.2.58}$$

где

$$\delta\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\beta \equiv \overline{n}_\beta D^{\Sigma}_\beta\left\{-\frac{\partial \ln \mathscr{M}}{\partial \boldsymbol{r}} - \left(1 - \frac{m_\beta}{\mathscr{M}}\right)\frac{\partial \ln \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\overline{n}}{\overline{p}}\left(\boldsymbol{F}_\beta - m_\beta\sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle\boldsymbol{F}_\alpha\right) + \frac{1}{\overline{n}}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\alpha}{\mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}}\right\}; \tag{3.2.59}$$

$$D^{\Sigma}_\beta \equiv \left(\frac{1}{\overline{n}}\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq\beta}}^{N}\frac{\overline{n}_\alpha}{\mathscr{D}^{\Sigma}_{\alpha\beta}}\right)^{-1}; \quad \mathscr{M} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \overline{n}_\alpha \Big/ \sum_{\alpha=1}^{N}\overline{n}_\alpha = \frac{\overline{\rho}}{\overline{n}}. \tag{3.2.60}$$

Введение эффективного коэффициента диффузии D^{Σ}_β дает возможность существенно упростить численное решение задачи, несмотря на то, что обобщенный закон Фика в форме (3.2.58) не позволяет рассматривать в общем случае каждое диффузионное уравнение (3.1.23) отдельно от других. Однако так как для численного решения задач и как правило используются методы последовательных приближений, то наличие члена $\delta\boldsymbol{J}^{\Sigma}_\beta$ в (3.2.58) часто не имеет решающего значения.

Из соотношений (3.2.58)—(3.2.60) видно, что обычный закон диффузии Фика строго выполняется для турбулизованной смеси в следующих случаях:

а) термодиффузия пренебрежимо мала; б) смесь является бинарной; в) отнесенная к единице массы массовая сила одна и та же для каждого компонента ($\boldsymbol{F}_\alpha/m_\alpha = \boldsymbol{F}_\beta/m_\beta$); г) либо градиенты давления равны нулю, либо молекулярные веса обоих веществ одинаковы (если $m_\alpha \equiv m_\beta = m$, то и $\mathcal{M} = m$). Эти условия являются довольно жесткими и их при моделировании реальных процессов турбулентного переноса зачастую бывает трудно оправдать. Тем не менее ввиду сложности обобщенных соотношений Стефана—Максвелла для многокомпонентной диффузии и недостаточной изученности турбулентных коэффициентов $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha\beta}$, во многих аналитических приложениях для простоты может быть использован обобщенный закон диффузии Фика (3.2.58) (без учета второго слагаемого в правой части). При этом для сохранения интегрального условия баланса масс $\sum\limits_\alpha m_\beta \boldsymbol{J}^\Sigma_\alpha = 0$, необходимо считать, что все коэффициенты Уилке равны между собой, $D^{\text{turb}}_\beta \equiv D^{\text{turb}}$.

3.2.5. Формулы для определения корреляций, включающих пульсацию плотности

Рассмотрим теперь вывод определяющего соотношения для турбулентного потока удельного объема $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}$, который остается пока неизвестным. В отличие от одножидкостного турбулизованного континуума, в котором эффекты сжимаемости часто пренебрежимо малы, в многокомпонентной химически активной турбулентной среде полная массовая плотность $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ в общем случае значительно изменяется от точки к точке, например в результате образования новых компонентов и локального выделения тепла в химических реакциях. Как мы уже видели, в случае учета (в модели турбулентности) сжимаемости массовой плотности, в уравнение притока тепла для среднего движения (3.1.54), а также в уравнение баланса турбулентной энергии (3.1.69) входит еще одна неизвестная корреляционная функция $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \equiv \overline{\rho(1/\rho)''\boldsymbol{u}''} = \overline{\boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho'\boldsymbol{u}''}/\overline{\rho}$ — турбулентный поток удельного объема. Подобного типа корреляционные моменты (например, $\overline{\rho' Z''_\alpha}/\overline{\rho}$, $\overline{\rho' T''}/\overline{\rho}$ и т. п.) фигурируют также и в некоторых других уравнениях переноса вторых моментов локальных характеристик турбулентного поля, которые будут далее привлекаться к рассмотрению при разработке усложненных моделей многокомпонентной турбулентности второго приближения [см. гл. 4].

Следует отметить, что в случае так называемых развитых турбулентных течений, когда скорости производства и диссипации энергии турбулентности приблизительно равны между собой, эти дополнительные балансовые уравнения для вторых корреляционных моментов превращаются из дифференциальных в систему алгебраических соотношений, связывающих между собой искомые корреляционные моменты второго порядка (типа $\overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''}$ и $\overline{\rho\mathcal{A}''\mathcal{B}''}$) и градиенты осредненных скоростей, температур и концентраций отдельных компонентов смеси. Именно эти соотношения часто могут быть использованы для установления различного вида усложненных алгебраических зависимостей для коэффициентов турбулентного обмена от градиентов осредненных определяющих параметров среды.

Для определения корреляций вида $\overline{\mathscr{A}''} = -\overline{\rho'\mathscr{A}''}/\overline{\rho}$ необходимо, в общем случае, привлекать специальные дифференциальные уравнения для них, которые содержат, в свою очередь, целый ряд новых корреляционных членов, уже совсем плохо поддающихся моделированию. Тем не менее такой подход обсуждался в литературе (см. например, Сб. *«Методы расчета турбулентных течений»*, *1984*; *Колесниченко*, *Маров*, *1999*). Вместе с тем, возможен более простой путь определения корреляций $\overline{\rho'\mathscr{A}''}/\overline{\rho}$, позволяющий связать их алгебраически с турбулентными потоками диффузии и тепла. Основой этого является то обстоятельство, что часто относительные пульсации плотности, вызванные пульсациями давления, пренебрежимо малы по сравнению с их вариациями, вызванными пульсациями температуры и концентраций отдельных компонентов многокомпонентной среды.

Для вывода подобного рода алгебраических связей найдем прежде всего выражение для пульсаций плотности ρ' газовой смеси. С этой целью перепишем уравнение состояния для многокомпонентной смеси совершенных газов

$$p = \mathscr{R}^* \rho T, \qquad \mathscr{R}^* = k_B n/\rho = k_B \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \tag{3.2.61}$$

в виде

$$\begin{aligned} p/\rho &= \langle \mathscr{R}^* \rangle \langle T \rangle + (\mathscr{R}^*)'' \langle T \rangle + \langle \mathscr{R}^* \rangle T'' + (\mathscr{R}^*)'' T'' = \\ &= \langle \mathscr{R}^* \rangle \langle T \rangle + k_B \langle T \rangle \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha + \langle \mathscr{R}^* \rangle T'' + k_B \sum_{\alpha=1}^{N} (Z''_\alpha T''). \end{aligned} \tag{3.2.62}$$

Здесь актуальные значения величин T и R^* записаны в виде суммы осредненных и пульсационных значений $T = \langle T \rangle + T''$ и ($\mathscr{R}^* = \langle \mathscr{R}^* \rangle + (\mathscr{R}^*)''$), и использованы легко выводимые соотношения

$$\langle \mathscr{R}^* \rangle = k_B \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z_\alpha \rangle = k_B \overline{n}/\overline{\rho}, \qquad (\mathscr{R}^*)'' = k_B \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha. \tag{3.2.63}$$

Осредним теперь по Фавру выражение (3.2.62), в результате будем иметь

$$\langle \mathscr{R}^* \rangle \langle T \rangle = \overline{p}/\overline{\rho} - k_B \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z''_\alpha T'' \rangle. \tag{3.2.64}$$

Если с помощью этого выражения исключить $\langle \mathscr{R}^* \rangle \langle T \rangle$ из (3.2.64), предварительно переписанного в виде

$$\begin{aligned} p &= \overline{p}\rho/\overline{\rho} + \langle \mathscr{R}^* \rangle \rho T'' + k_B \rho \langle T \rangle \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha + k_B \rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z''_\alpha T'') - \\ &- k_B \rho \sum_{\alpha=1}^{N} \langle Z''_\alpha T'' \rangle = \overline{p} + \overline{p}\rho'/\overline{\rho} + \langle \mathscr{R}^* \rangle \rho T'' + k_B \rho \langle T \rangle \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha + k_B \rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z''_\alpha T'')'', \end{aligned}$$

то в результате получим искомое точное соотношение

$$\frac{\rho'}{\overline{\rho}} = \frac{1}{\overline{p}} \left(p' - \langle \mathscr{R}^* \rangle \rho T'' - k_B \langle T \rangle \rho \sum_{\alpha=1}^{N} Z''_\alpha - k_B \rho \sum_{\alpha=1}^{N} (Z''_\alpha T'')'' \right), \tag{3.2.65}$$

связывающее турбулентные пульсации массовой плотности ρ' с пульсациями давления, температуры и концентраций отдельных компонент газовой смеси.

Отметим, что при разработке моделей турбулентности второго приближения удобно в выражении (3.2.65) выразить пульсации температуры T'' через пульсации энтальпии H''. Это связано с тем, что для многокомпонентной смеси уравнения переноса вторых корреляционных моментов, содержащих пульсации температуры, значительно сложнее уравнений переноса моментов, содержащих пульсации полной энтальпии смеси (см. гл. 4). В частности, балансовое уравнение для среднего квадрата пульсаций энтальпии $\langle H''^2\rangle$, в отличие от аналогичного уравнения для дисперсии $\langle T''^2\rangle$, не содержит в себе большого числа парных корреляций $\langle Z''_\alpha T''\rangle$, присутствие которых в уравнении для $\langle T''^2\rangle$ определяется, в конечном счете, наличием химического источника тепловой энергии в мгновенном уравнении для температуры [ср. уравнения (2.1.24) и (2.1.29)]. Для исключения флуктуаций T'' из (3.2.65) будем использовать соотношение (3.1.45), записанное в виде

$$\langle c_p\rangle T'' = H'' - \sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle Z''_\alpha. \tag{3.1.45*}$$

Наконец, для вычисления искомой корреляции $\overline{\mathscr{A}''} \equiv -\overline{\rho'\mathscr{A}''}/\bar{\rho}$ умножим (3.2.65) на $\mathscr{A}''$ и осредним полученное выражение по ансамблю возможных реализаций. В результате, после отбрасывания корреляционных моментов третьего порядка, получим

$$\overline{\mathscr{A}''} = -\frac{\overline{p'\mathscr{A}''}}{\bar{p}} + \frac{\langle\mathscr{R}^*\rangle}{\bar{p}\langle c_p\rangle}\left(\overline{\rho H''\mathscr{A}''} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\overline{\rho Z''_\alpha\mathscr{A}''}\right) + \frac{k_B\langle T\rangle}{\bar{p}}\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\rho Z''_\alpha\mathscr{A}''}. \tag{3.2.66}$$

Соотношение (3.2.66) будет использовано в дальнейшем как при построении относительно простых моделей многокомпонентной турбулентности, основанных на градиентных схемах замыкания, так и при конструировании более сложных моделей турбулентности, основанных на дифференциальных уравнениях переноса для различных вторых корреляционных моментов пульсирующих термогидродинамических величин [см. гл. 4].

Отождествим теперь в общей формуле (3.2.66) параметр $\mathscr{A}$ последовательно с гидродинамической скоростью течения $\boldsymbol{u}$, с удельной числовой плотностью Z_α и энтальпией смеси H; в результате получим ряд ключевых для полуэмпирического моделирования многокомпонентной турбулентности (при использовании весового осреднения Фавра) соотношений

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)} \equiv -\frac{\overline{\rho'\boldsymbol{u}''}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{p'\boldsymbol{u}''}}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_q + \frac{1}{\bar{n}}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}^T_\alpha, \tag{3.2.67}$$

$$\overline{H''} \equiv -\frac{\overline{\rho'H''}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{p'H''}}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\left(\overline{\rho H''^2} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\overline{\rho Z''_\alpha H''}\right) + \frac{1}{\bar{n}}\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\rho Z''_\alpha H''}, \tag{3.2.68}$$

$$\overline{Z''_\beta} \equiv -\frac{\overline{\rho'Z''_\beta}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{p'Z''_\beta}}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\left(\overline{\rho H''Z''_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta}\right) + \frac{1}{\bar{n}}\sum_{\alpha=1}^{N}\overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta}. \tag{3.2.69}$$

Следует иметь в виду, что в случае течений с малыми числами Маха Ma в формуле (3.2.65) можно пренебречь относительными турбулентными пульсациями давления по сравнению с относительными пульсациями плотности и/или температуры, что означает также возможность отбрасывания первых слагаемых в формулах (3.2.67)—(3.2.69). Это положение известно как гипотеза Морковина, справедливость которой для течений без химических реакций была подтверждена вплоть до Ma = 5 (*Морковин, 1961*). В частности, для вынужденной конвекции в земной атмосфере, существенно проявляющейся только в тех струйных течениях, в которых градиенты скорости ветра достигают достаточно больших значений, отношения пульсаций ρ', p' и T'' к соответствующим средним значениям $\overline{\rho}$, $\overline{p}$ и $\langle T\rangle$ имеют следующий порядок величин (см. *Ван Мигем, 1977*)

$$|\rho'|/\overline{\rho} \approx |T''|/\langle T\rangle \approx 10^{-4}, \qquad |p'|/\overline{p} \approx 10^{-5}. \tag{3.2.70}$$

В то же время масштаб турбулентных пульсаций давления для режима свободной конвекции в земной атмосфере, как правило, значительно больше, чем для вынужденной конвекции, и потому члены с пульсациями давления p' в формуле (3.2.65) отбрасывать, вообще говоря, нельзя.

3.2.6. Реологические соотношения для турбулентных потоков диффузии и тепла в случае сильно развитой турбулентности

В разделе 3.2.4 мы вывели определяющие соотношения (3.2.55) и (3.2.56) для турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$ и тепла $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}$ для случая, когда молекулярный и турбулентный перенос вещества и энергии равноценны по их вкладу в динамику и энергетику потока. Получим теперь аналогичные соотношения для сильно развитой турбулентности, когда турбулентное перемешивание значительно эффективнее молекулярного, т. е. когда $\boldsymbol{R} \gg \overline{\boldsymbol{\Pi}}$, $\boldsymbol{q}^{\text{turb}} \gg \overline{\boldsymbol{q}}$ и т. п. В этом случае температура турбулизации T_{turb}, являющаяся, как известно, мерой интенсивности турбулентного перемешивания, много больше осредненной температуры смеси $\langle T\rangle$ — характеристики средней энергии в хаотическом тепловом движении атомов. С учетом неравенства $T_{\text{turb}} \gg \langle T\rangle$, выражение (3.2.30) для скорости возникновения суммарной энтропии σ_Σ системы может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sigma_\Sigma \equiv \tilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right) + \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right\} + \boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{T_{\text{turb}}}\right) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \cdot \left\{ -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\langle\mu_\alpha\rangle}{\langle T\rangle}\right) + \langle h_\alpha\rangle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right) + \frac{1}{\langle T\rangle \overline{n}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right\} + \\ + \frac{1}{T_{\text{turb}}} \overset{0}{\boldsymbol{R}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} + \sum_{s=1}^{r} \overline{\xi}_s \frac{\langle A_s\rangle}{\langle T\rangle} + \frac{1}{\langle T\rangle}\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle. \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

При написании (3.2.71) мы отбросили малые слагаемые, относящиеся к осредненному молекулярному движению, а для турбулентного потока $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}}$ использовали формулу (3.2.67) без малого члена, учитывающего пульсации давления (приближение свободной конвекции).

Таким образом, в случае сильно развитой многокомпонентной турбулентности производство энтропии σ_Σ определяется следующим набором термодинамических потоков $\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}}$, $\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\text{turb}}$, $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$, $\overset{0}{\boldsymbol{R}}$, $\overline{\overline{\xi}}$ и соответствующих им сопряженных термодинамических сил

$$\boldsymbol{Y}_q^{\text{turb}} \equiv -\frac{1}{\langle T\rangle^2}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right), \quad (^1) \qquad \boldsymbol{Y}_{\langle b\rangle} \equiv -\frac{1}{T_{\text{turb}}^2}\frac{\partial T_{\text{turb}}}{\partial\boldsymbol{r}}, \quad (^2) \tag{3.2.72}$$

$$\boldsymbol{Y}_\alpha^{**} \equiv -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\langle\mu_\alpha\rangle}{\langle T\rangle}\right) + \langle h_\alpha\rangle\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right) + \frac{1}{\overline{n}\langle T\rangle}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}} = -\frac{\overline{p}}{\overline{n}_\alpha\langle T\rangle}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{n}}\right), \tag{3.2.73}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{R}} \equiv \frac{1}{T_{\text{turb}}}\overset{0}{\boldsymbol{D}}, \quad (^1) \qquad Y_{A_s} \equiv \frac{\langle A_s\rangle}{\langle T\rangle} = -\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\langle\mu_\beta\rangle}{\langle T\rangle}\nu_{\beta s}, \quad (s = 1, 2, \dots, r), \quad (^2) \tag{3.2.74}$$

отвечающим скалярным, векторным и тензорным источникам неравновесности в системе. С помощью этих термодинамических потоков и сил производство суммарной энтропии $S_\Sigma = \langle S\rangle + S_{\text{turb}}$ в турбулизованной смеси может быть записано в следующей билинейной форме

$$0 \leqslant \sigma_\Sigma \equiv \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}}\cdot\boldsymbol{Y}_q^{\text{turb}} + \boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\text{turb}}\cdot\boldsymbol{Y}_{\langle b\rangle} + \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}\cdot\boldsymbol{Y}_\alpha^{**} + \overset{0}{\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{R}} + \sum_{s=1}^{r}\overline{\overline{\xi}}_s Y_{A_s} + \frac{1}{\langle T\rangle}\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle. \tag{3.2.75}$$

Выражение (3.2.75) позволяет получить, в частности, скорректированные для случая сильно развитой турбулентности определяющие соотношения для векторных термодинамических потоков, которые незначительно отличаются от соотношений (3.2.55) и (3.2.56). Для изотропной среды соответствующие соотношения, в случае пренебрежения малыми перекрестными эффектами, имеют вид

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} = -\frac{L_{qq}^{\text{turb}}}{\langle T\rangle^2}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right), \tag{3.2.76}$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} = -L_{\alpha\alpha}^{\text{turb}}\frac{\overline{p}\overline{\rho}}{\overline{n}_\alpha\overline{n}\langle T\rangle}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}}\right) + \frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}}\frac{\partial\ln\mathcal{M}}{\partial\boldsymbol{r}}\right\}. \tag{3.2.77}$$

Если теперь определить формулами

$$\lambda^{\text{turb}} \equiv \frac{1}{\langle T\rangle^2}L_{qq}^{\text{turb}}, \quad (^1) \qquad D_\alpha \equiv \frac{\overline{p}}{\langle T\rangle\overline{n}_\alpha\overline{n}}L_{\alpha\alpha}^{\text{turb}} \quad (^2) \tag{3.2.78}$$

турбулентные коэффициенты теплопроводности и диффузии, то замыкающие соотношения (3.2.76) и (3.2.77) могут быть записаны в следующем окончательном виде

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}} = \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \lambda^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \tag{3.2.79}$$

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \cong -\overline{\rho}D_\alpha\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}}\right). \tag{3.2.80}$$

Выражение (3.2.79) обобщает на многокомпонентные смеси аналогичное выражение для потока тепла, которое обычно используется в метеорологии для атмосферной турбулентности с пассивной примесью, а также в ряде других важных случаях, например при моделировании свободной турбулентной конвекции (см. *Монин, Яглом, 1992*).

Заметим, что в метеорологии вместо «обычной» температуры $\langle T \rangle$ используется, как правило, так называемая потенциальная температура

$$\theta \equiv \langle T \rangle \left(\frac{p_0}{\overline{p}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \langle T \rangle \left(\frac{p_0}{\overline{p}} \right)^{\frac{\mathscr{R}^*}{c_p}} \tag{3.2.81}$$

(здесь p_0 — некоторое стандартное давление), которая связана с энтропией S газовой смеси соотношением $S = c_p \ln \theta + \mathrm{const}$. Отсюда ясно, что, например, при адиабатических вертикальных перемещениях малых элементов турбулизованной среды потенциальная температура θ не меняется (т. е. является строго консервативной характеристикой потока), в то время как обычная температура $\langle T \rangle$ изменяется с высотой. Легко видеть, что имеет место следующее приближенное равенство

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{r}} \cong \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right),$$

с помощью которого формула (3.2.79) приобретает привычный для метеорологических исследований вид.

В заключение этого параграфа суммируем базисные (опорные) дифференциальные уравнения и определяющие соотношения, характеризующие относительно простую градиентную модель многокомпонентной реагирующей турбулентности. Она отвечает случаю, когда вторые корреляционные моменты типа $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle$ для пульсирующих термогидродинамических параметров смеси $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ (отличных от гидродинамической скорости течения $\boldsymbol{u}$) во всех применяемых формулах малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle$ и могут быть опущены. Градиентная модель многокомпонентной турбулентности определяется, прежде всего, гидродинамическими уравнениями для среднего движения (3.1.21), (3.1.23), (3.1.28), (3.1.58), осредненным уравнением состояния для давления в форме (3.1.71), соотношением (3.2.67), определяющим турбулентный поток удельного объема смеси $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}}$, а также реологическими соотношениями (3.2.55), (3.2.56) и (3.2.45) для турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma$, тепла $\boldsymbol{q}^\Sigma$ и тензора рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}$. Для полного описания турбулизованного течения и теплообмена химически реагирующих газов необходимы также данные по кинетике реакций, протекающих в потоке и на его границах. В рассматриваемой простой модели турбулентности можно считать, что величины $\overline{\xi}_s$ рассчитываются только по осредненным значениям температуры и состава смеси $\overline{\xi}_s = \xi_s(\langle T \rangle, \overline{n}_\alpha)$ [ср. с (4.1.4)]. Кроме этого, система дифференциальных уравнений и конечных соотношений должна быть дополнена набором химических компонентов, с учетом их газодинамических, термофизических и химических свойств; универсальными законами кинетики и термодинамики, включающими уравнения состояния и выражения для различных термодинамических функций, сохраняющих в рассматриваемом приближении свой обычный вид; формулами для молекулярных и турбулентных коэффициентов переноса; а также начальными и граничными условиями. Хотя построенная таким образом континуальная модель реагирующей многокомпонентной турбулентности является «упрощенной», тем не менее, в ее рамках могут быть сформулированы и достаточно правдоподобно решены разнообразные астро- и геофизические задачи.

§ 3.3. Моделирования коэффициентов турбулентного переноса. Масштаб турбулентности

Полученная в предыдущем параграфе градиентная модель или так называемая алгебраическая модель турбулентности первого приближения работает достаточно эффективно для простых квазистационарных течений, когда коэффициенты турбулентного обмена достаточно хорошо подобраны. Однако эта модель, как уже отмечалось, совершенно не пригодна для тех режимов течения, при которых локальные средние условия движения резко меняются в некоторой ограниченной области или когда имеется значительная область течения, подверженная влиянию турбулентного потока в целом. Это связано с тем, что при выводе подобного рода моделей обычно предполагают, что в структуре развитой турбулентности устанавливается «локально равновесное» состояние, при котором характеристики турбулентности в каждой точке потока целиком определяются только локальными характеристиками поля осредненного течения (и поля объемных сил) вблизи этой же точки, т. е. локальными значениями скорости диссипации и масштаба турбулентности, а также локальными осредненными параметрами состояния самой среды. Если же в уравнении баланса для турбулентной энергии существенны конвективные и диффузионные члены (т. е. параметры потока в точке зависят от характеристик турбулентного потока в целом), то подобные локальные формулы становятся, вообще говоря, несправедливыми (см. *Иевлев*, *1975*).

Таким образом, конкретное применение градиентных моделей к расчету турбулентных течений требует предварительной разработки методов определения коэффициентов турбулентного обмена. При этом расчетные формулы для коэффициентов турбулентной диффузии D^{turb}, турбулентной теплопроводности λ^{turb} и турбулентной вязкости ν^{turb} могут быть получены различными способами, отличающимися друг от друга степенью сложности. Один из возможных способов полуэмпирического определения этих коэффициентов, основанный на использовании дифференциальных уравнений переноса вторых корреляционных моментов (упрощенных до алгебраических соотношений), будет проанализирован в гл. 4. В данном же параграфе мы кратко обсудим традиционный подход к моделированию турбулентности, основанный на понятии пути перемешивания (или смешения) и проанализируем некоторые простые полуэмпирические способы моделирования коэффициентов турбулентного обмена.

3.3.1. Градиентная гипотеза

Введенное Прандтлем (*1925*) в теорию турбулентности понятие пути перемешивания позволяет не только очень просто выразить через длину пути перемешивания коэффициенты турбулентного обмена, фигурирующие в определяющих соотношениях для турбулентных потоков, но и получить для некоторых частных случаев сами эти соотношения, что мы сейчас и продемонстрируем на примере турбулентного переноса консервативной (пассивной) примеси. Но перед этим еще раз обращаем внимание читателя на то, что выведенные термодинамически в п. 3.2 определяющие соотношения для турбулентных потоков не связаны с ключевым предположением подобного подхода, а именно с предположением о консервативности переносимых турбулентными пульсациями характеристик течения, и, следовательно, имеют более широкую область применения.

Итак, будем предполагать, что перенос какой-либо скалярной характеристики течения турбулентными пульсациями происходит как диффузионный процесс и что можно допустить существование некоторого масштаба пути смешения — расстояния, которое проходит элементарный объем газа в турбулизованном потоке, прежде чем в результате пульсаций скорости этот объем необратимо перемешается с окружающей средой. Обозначим через $\mathscr{A}''_L$ лагранжеву турбулентную пульсацию полевой величины $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$, соответствующую эйлеровой пульсации $\mathscr{A}''$, а через $\xi_{(\mathscr{A})}(\boldsymbol{r}, t)$ — эффективный путь смешения признака A, на который перемещаются турбулентные вихри в потоке, прежде чем они разрушатся за счет взаимодействия с другими возмущениями; тогда будем иметь

$$\mathscr{A}''_L = \mathscr{A}'' + \xi_{(\mathscr{A})} \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \mathscr{A} \rangle. \tag{3.3.1}$$

Турбулентный поток диффузии

Считая теперь компонентный состав турбулизованной смеси консервативным (т. е. допуская, что вихри, смещаясь на расстояние $\xi_{(\alpha)}$, сохраняют в лагранжевом объеме ту же удельную числовую плотность ($Z_\alpha \equiv n_\alpha/\rho$) компоненты α, которой они обладали на исходном уровне), получим

$$(Z_\alpha)''_L = 0, \qquad Z''_\alpha = -\xi_{(\alpha)} \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle Z_\alpha \rangle. \tag{3.3.2}$$

Отсюда для турбулентного потока вещества J_α^{tyrb} ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) следует простое реологическое соотношение [ср. с (3.2.58)]

$$\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho}\langle \boldsymbol{u}'' Z''_\alpha \rangle = -\overline{\rho}\langle \boldsymbol{u}'' \xi_{(\alpha)} \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}}\right) = -\overline{\rho} D_\alpha^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}}\right), \tag{3.3.3}$$

где формулой $D_{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \langle \boldsymbol{u}'' \xi_{(\boldsymbol{\alpha})} \rangle$ определяется несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии, учитывающий в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости и состава вдоль разных осей координат. Длина $\xi_{(\boldsymbol{\alpha})}$ здесь, очевидно, в известном смысле аналогична длине свободного пробега в кинетической теории газов. Таким образом, коэффициент турбулентной диффузии D_α^{turb} очень просто выражается через длину перемешивания $\xi_{(\alpha)}$ (являющеюся случайной величиной). Соотношение (3.3.3) эквивалентно утверждению, что турбулентный поток вещества сорта α пропорционален градиенту средней концентрации $\langle Z_\alpha\rangle \equiv \overline{n}_\alpha/\overline{\rho}$ и имеет по отношению к нему обратное направление. Коэффициенты $D_\alpha^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ являются функциями координат и времени и обычно во много раз превосходят свои ламинарные аналоги.

В общем случае для каждой компоненты смеси необходимо, конечно, вводить в рассмотрение свой эффективный путь перемешивания $\xi_{(\alpha)}$ для процесса переноса вещества. Кроме этого, гипотеза консервативности (т. е. лагранжевой инвариантности) концентраций Z_α отдельных компонентов в химически активном потоке не оправдана в достаточной степени, поскольку при конечных скоростях химических реакций имеет место существенное воздействие осредненной аррениусовой химической кинетики на процессы турбулентного массопереноса (см. *Иевлев, 1975*). Тем не менее в силу недостаточной проработки этого вопроса в литературе, мы далее для простоты будем считать, что $\xi_{(\alpha)} \equiv \xi$.

Отметим еще раз, что, в отличие от коэффициентов молекулярной диффузии, коэффициенты турбулентной диффузии D^{turb} описывают не физические свойства газовой смеси, а свойства конкретного турбулентного режима движения среды и потому непосредственно зависят как от интенсивности турбулентного поля, так и от способа (масштаба) осреднения пульсирующих характеристик этого движения. По этой причине способ введения осредненных параметров турбулентности является той первоосновой, от которой зависят как сами подходы к разработке методов экспериментальных измерений коэффициентов турбулентного обмена, так и результаты сравнения теоретических и опытных данных. Это замечание касается, конечно, и всех других рассмотренных ниже коэффициентов турбулентного обмена.

Турбулентный поток тепла

Получим теперь точно таким же способом реологическое соотношение для турбулентного потока тепла в многокомпонентной смеси, определяемого формулой $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho H''\boldsymbol{u}''}$ [см. (3.1.44)]. Так как консервативной характеристикой течения является скорее энтропия S, чем энтальпия H смеси, то для получения нужного соотношения используем выражения (3.2.11) и (3.2.13), переписанные следующим образом

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}} = \widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} + \overline{p'\boldsymbol{u}''} + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \tag{3.3.4}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} = \langle T\rangle \boldsymbol{J}_{\langle S\rangle}^{\text{turb}} - \langle T\rangle \sum_{\alpha=1}^{N} \langle S_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}. \tag{3.3.5}$$

Используя определение (3.1.10) для турбулентного потока $\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho\mathscr{A}''\boldsymbol{u}''}$ признака $\mathscr{A}$, перепишем формулу (3.3.5) в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} = \langle T\rangle \boldsymbol{J}_{\langle S\rangle}^{\text{turb}} - \langle T\rangle \sum_{\alpha=1}^{N} \langle S_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} = \langle T\rangle \overline{\rho\boldsymbol{u}''\Big(S'' - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle S_\alpha\rangle Z_\alpha''\Big)}$$

и подставим сюда выражения

$$S_L'' = S'' + \xi \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle S\rangle \cong 0 \quad \text{и} \quad Z_{\alpha L}'' = Z_\alpha'' + \xi \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle Z_\alpha\rangle \cong 0, \tag{3.3.6}$$

связывающие между собой лагранжевы и эйлеровы турбулентные пульсации для энтропии S и концентрации Z_α (консервативных по предположению характеристик многокомпонентной среды); в результате получим

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{J}}_q^{\text{turb}} &= \overline{\langle T\rangle \rho \boldsymbol{u}''\Big(S_L'' - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle S_\alpha\rangle Z_{L\alpha}''\Big)} - \langle T\rangle \overline{\rho \boldsymbol{u}''\xi} \cdot \left(\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle S_\alpha\rangle \frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \cong \\ &\cong -\bar{\rho}\langle T\rangle D^{\text{turb}} \cdot \left(\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\alpha=1}^{N}\langle S_\alpha\rangle \frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = -\lambda^{\text{turb}} \cdot \left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right).\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

При написании последнего равенства в (3.3.7), нами использовано преобразование

$$\begin{aligned}\langle T\rangle \delta\langle S\rangle - \langle T\rangle \sum_{\alpha=1}^{N}\langle S_\alpha\rangle \delta\langle Z_\alpha\rangle &\equiv \langle T\rangle \sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle \delta\langle S_\alpha\rangle = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N}\langle Z_\alpha\rangle(\delta\langle h_\alpha\rangle - \delta\bar{p}_\alpha/\bar{n}_\alpha) = \langle c_p\rangle \delta\langle T\rangle - \delta\bar{p}/\bar{\rho},\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

являющееся следствием тождества Гиббса—Дюгема, и соотношение

$$\lambda^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = \bar{\rho}\langle c_p\rangle D^{\text{turb}}, \tag{3.3.9}$$

определяющее тензор коэффициентов турбулентной теплопроводности. Таким образом, для турбулентного потока тепла окончательно будем иметь [ср. с (3.2.79)]

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \lambda^{\text{turb}} \cdot \left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N}\langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}. \tag{3.3.10}$$

По поводу вывода формулы (3.3.10) сделаем несколько замечаний. Во-первых, она получена в предположении, что параметры S и Z_α являются консервативными характеристиками среды, т. е. в предположении, что турбулентное движение лагранжевой вихревой частицы смеси от уровня $\boldsymbol{r}(x_j, t)$, где произошел ее отрыв от общего потока, до уровня $\boldsymbol{r}(x_j, t) + \xi_j$ происходит не только изэнтропически, но и с неизменным пространственным распределением химических компонентов газа. Однако, как уже отмечалось, эти характеристики течения не являются, в общем случае, лагранжевыми инвариантами ($S_L'' \neq 0$, $Z_{\alpha L}'' \neq 0$) турбулентного поля, поскольку движение вихрей может сопровождаться разными тепловыми эффектами (например, локальным тепловыделением за счет химических реакций, или турбулентным мелкомасштабным нагревом за счет вязкой диссипации) и изменениями химического состава, что приводит к обратному эффекту переноса тепла на развитие турбулентности [см. гл. 7]. Во-вторых, при получении формулы (3.3.10) предполагалось, что так называемое турбулентное число Льюиса равно единице, $\mathrm{Le}^{\text{turb}} \equiv$

$\equiv \chi^{\mathrm{turb}}/D^{\mathrm{turb}} = 1$, где χ^{turb} — коэффициент турбулентной температуропроводности, связанный с обычным коэффициентом теплопроводности соотношением

$$\chi^{\mathrm{turb}} \equiv \lambda^{\mathrm{turb}}/\bar{\rho}\langle c_p\rangle. \tag{3.3.9*}$$

Это обычное в теории турбулентности предположение (см., например, *Лапин, Стрелец, 1989*) равнозначно тому, что пути смешения для вещества и энтропии смеси одинаковы, $\xi = \xi_{(S)}$ [см. (3.3.6)]. Однако эти масштабы в общем случае необходимо, конечно, различать, поскольку турбулентные вихри могут участвовать в переносе тепла более активно, чем в переносе вещества (и наоборот).

Для стратифицированной атмосферы реологическое соотношение (3.3.10) для вертикальной компоненты турбулентного потока тепла, при учете уравнения гидростатики (3.1.34), может быть записано в виде

$$q_z^{\mathrm{turb}} = \overline{p' u_z''} + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha\rangle J_{\alpha z}^{\mathrm{turb}} - \lambda^{\mathrm{turb}}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} + \frac{g}{\langle c_p\rangle}\right). \tag{3.3.11}$$

Напомним, что в метеорологической литературе величина $\gamma_a \equiv g/\langle c_p\rangle$ носит название сухоадиабатического градиента температуры (в условиях земной тропосферы $\gamma_a = 0{,}98$ град/100 м), а выражение $\theta \equiv \langle T\rangle + \gamma_a z$ приближенно совпадает с используемой в метеорологии потенциальной температурой [см. (3.2.81)].

Таким образом, в соответствии с соотношением (3.3.11), существуют два механизма передачи тепловой энергии через турбулизованный многокомпонентный газ: под действием осредненного градиента температуры (потенциальной температуры θ в стратифицированной среде) и потоками турбулентной диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}$, когда каждая частица вещества α переносит с собой в среднем $\langle h_\alpha\rangle$ тепловой энергии. Важно еще раз напомнить, что первый член в (3.3.11) не играет роли потока энергии — величина $\overline{p'\boldsymbol{u}''}$ выпадает из осредненного уравнения притока тепла (3.1.58) при подстановке в него выражения (3.3.11) для теплового потока.

Тензор Рейнольдса

Турбулентные напряжения, как и молекулярные, являются в действительности результатом переноса количества движения, но за счет пульсаций турбулентной скорости. В простейшем случае плоского сдвигового (по оси z) потока, горизонтальная составляющая напряжения Рейнольдса (3.3.32) принимает вид

$$R_{xz} \equiv -\overline{\rho u_x'' u_z''} = \bar{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\partial\langle u_x\rangle/\partial z, \tag{3.3.12}$$

где формулой $\nu^T = \langle \xi_z u_z''\rangle$ вводится вертикальный коэффициент турбулентной вязкости, определяющий отношение кажущегося внутреннего напряжения к соответствующей осредненной скорости деформации. При написании (3.3.12) предполагалось, что $u_x'' = -\xi_z \partial\langle u_x\rangle/\partial z$, т. е. вихри, смещающиеся по вертикали на расстояние ξ_z, сохраняют на уровне $z + \xi_z$ то количество движения, каким они обладали на исходном уровне z (гипотеза Прандтля).

Однако в общем случае тензор Рейнольдса R_{ij} связан с тензором скоростей деформаций более сложным линейным соотношением (3.2.45), которое, в проекциях на декартовы оси координат, принимает следующий вид

$$
\begin{aligned}
&R_{xx} \equiv -\overline{\rho (u''_x)^2} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle + 2\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial x} - \frac{1}{3}\,\text{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle\right),\\
&R_{yy} \equiv -\overline{\rho (u''_y)^2} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle + 2\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_y\rangle}{\partial y} - \frac{1}{3}\,\text{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle\right),\\
&R_{zz} \equiv -\overline{\rho (u''_z)^2} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle + 2\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial z} - \frac{1}{3}\,\text{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle\right),\\
&R_{xy} = R_{yx} \equiv -\overline{\rho u''_x u''_y} = -\overline{\rho u''_y u''_x} = \rho\overline{\nu}^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial y} + \frac{\partial\langle u_y\rangle}{\partial x}\right),\\
&R_{yz} = R_{zy} \equiv -\overline{\rho u''_z u''_y} = -\overline{\rho u''_y u''_z} = \rho\overline{\nu}^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial y} + \frac{\partial\langle u_y\rangle}{\partial z}\right),\\
&R_{zx} = R_{xz} \equiv -\overline{\rho u''_z u''_x} = -\overline{\rho u''_x u''_z} = \overline{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial x} + \frac{\partial\langle u_x\rangle}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\tag{3.3.13}
$$

3.3.2. Моделирование первого приближения для коэффициентов турбулентного переноса

Очевидно, что выведенные выше с использованием понятия пути смешения реологические соотношения для турбулентных потоков также не решают проблемы замыкания в теории турбулентности: формулы типа $D^{\text{turb}} \equiv \langle \boldsymbol{u}''\xi\rangle$, не позволяют экспериментально определить коэффициенты турбулентного переноса, поскольку локальный путь смешения ξ является слишком неопределенной величиной, которую невозможно измерить. Таким образом, проблема замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси сводится к задаче экспериментального нахождения аппроксимирующих алгебраических формул для коэффициентов турбулентного обмена. Подобный подход носит поэтому название полуэмпирической теории турбулентности первого порядка (приближения).

Проанализируем сначала наиболее простой способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb}. Но прежде отметим, что часто используемое предположение, позволяющее найти коэффициенты турбулентной теплопроводности λ^{turb} и турбулентной диффузии D^{tyrb}, состоит в том, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта, определяемые формулами

$$
\text{Pr}^{\text{tyrb}} \equiv \overline{\rho}\langle c_p\rangle\nu^{\text{turb}}/\lambda^{\text{turb}}, \qquad \text{Sc}^{\text{tyrb}} \equiv \nu^{\text{turb}}/D^{\text{turb}}, \tag{3.3.14}
$$

являются почти постоянными в пульсирующем многокомпонентном потоке. Это предположение связано с тем, что, в отличие от самих коэффициентов турбулентного переноса, указанные отношения слабо меняются как в пределах некоторого турбулизованного течения, так и при переходе от течения к течению. Обычно также принимают, что коэффициенты турбулентной температуропроводности $\chi^{\text{turb}} \equiv \lambda^{\text{turb}}/\overline{\rho}\langle c_p\rangle$ и турбулентной диффузии D^{turb} совпадают, т. е., что число Льюиса $\text{Le}^{\text{turb}} \equiv \chi^{\text{turb}}/D^{\text{turb}} = 1$. В этом случае турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны между собой, $\mathrm{Pr}^{\mathrm{tyrb}} = \mathrm{Sc}^{\mathrm{tyrb}}$. Согласно современным экспериментальным данным, $\mathrm{Pr}^{\mathrm{tyrb}} = 0{,}86$ или $0{,}90$ для течений вблизи твердой стенки и $\mathrm{Pr}^{\mathrm{tyrb}} = 0{,}5$ для плоских струй и в слоях смешения.

Алгебраическая модель Прандтля

В качестве примера рассмотрим осредненное течение, когда действие гравитационных сил создает преимущественное направление в координатном пространстве. Обычно постулируется следующий принцип локального подобия в теории турбулентного переноса (который согласуется с принципом локального внутреннего равновесия в структуре турбулентного течения): коэффициенты турбулентного переноса в каждой точке зависят только от свойств среды в этой же точке, от локального значения масштаба турбулентности, и от некоторых характеристик поля осредненного течения и объемных сил в этой точке. Тогда, выражение для коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} будет иметь вид:

$$\nu^{\mathrm{turb}} = \nu^{\mathrm{turb}}(\overline{\rho},\ \nu,\ L,\ f^i,\ \partial\langle u_x\rangle/\partial z), \tag{3.3.15}$$

где $L(\boldsymbol{r})$ — внешний масштаб турбулентности в данной точке потока, $f^i(\boldsymbol{r})$ — локальные характеристики полей объемных сил (в частности, сил инерции, связанных с ускорением жидкости в продольном направлении; тогда $f \propto \partial\langle u_x\rangle/\partial x$). В случае учета влияния на локальные свойства течения жидкости как первой, так и второй производной от осредненной скорости, указанная зависимость может быть другой. Масштаб $L(\boldsymbol{r})$ характеризует геометрическую структуру турбулентного поля или характерный размер (и тогда это интегральный масштаб турбулентности L), участвующих в турбулентном переносе крупных вихрей, несущих большую часть кинетической энергии потока. Иногда $L(\boldsymbol{r})$ можно трактовать как средний путь перемешивания $\Lambda(z) = \sqrt{\overline{\xi^2}}$ (как это первоначально и было сделано Прандтлем (*1925*, *1942*)). В этом случае он по порядку величины совпадает с радиусом корреляции поля скоростей. Внешний масштаб турбулентности $L(\boldsymbol{r})$ должен определяться из дополнительных соображений, и именно благодаря этой неопределенности, в сугубо локальных формулах для коэффициентов турбулентного обмена остается некоторая возможность для учета интегральных свойств потока и его предыстории. В частности, для свободных слоев со сдвигом параметр Λ можно по всему слою полагать равным длине, пропорциональной толщине этого слоя. Коэффициент пропорциональности, зависит, однако, от характера свободного течения. Например, для потока, обтекающего бесконечную плоскую поверхность, установлено, что средний путь перемешивания Λ пропорционален расстоянию до стенки: $\Lambda(z) = \varkappa z$, где $\varkappa$ — постоянная Кармана, которую можно принять равной $\sim 0{,}4$.

Вдали от твердой поверхности турбулентность слабо зависит от коэффициента молекулярной вязкости среды ν, и поэтому параметр ν из числа аргументов в формуле (3.3.15) можно исключить. Тогда для коэффициента турбулентной вязкости можно написать (при $f^i = 0$)

$$\nu^{\mathrm{turb}} = \nu^{\mathrm{turb}}(\overline{\rho},\ L,\ \partial\langle u_x\rangle/\partial z);$$

отсюда, при использовании соображений теории размерности, следует знаменитая формула Прандтля

$$\nu^{\mathrm{turb}}(z) = \alpha L^2 |\partial \langle u_x \rangle / \partial z)|,$$

или

$$\nu^{\mathrm{turb}}(z) = \Lambda^2 |\partial \langle u_x \rangle / \partial z)|, \qquad (\Lambda(z) = \varkappa z). \tag{3.3.16}$$

Постоянный множитель α устанавливается для каждого конкретного типа движения на основании экспериментальных данных, причем в некоторых случаях его удобно просто опустить, переопределив соответствующим образом масштаб турбулентности L.

Вблизи твердой стенки, где существенно влияние молекулярной вязкости ν, из (3.3.15) следует (при $f^i = 0$) также хорошо известная функциональная зависимость

$$\nu^{\mathrm{turb}} = \nu \varphi \left(\frac{\Lambda^2 |\partial \langle u_x \rangle / \partial z)|}{\nu} \right). \tag{3.3.17}$$

Дальнейшее уточнение этого выражения может быть проведено как с помощью теоретических (точнее полуэмпирических) соображений, так и чисто экспериментально (см., например, *Лапин, Стрелец, 1989*; *Монин, Яглом, 1992*). Если в число аргументов включены силы инерции в продольном направлении, то соотношения (3.3.16), и (3.3.17) видоизменяются и приобретают вид:

$$\nu^{\mathrm{turb}} = L^2 \cdot \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \left(\frac{\partial \langle u_x \rangle / \partial x}{\partial \langle u_x \rangle / \partial z} \right), \tag{3.3.16*}$$

$$\nu^{\mathrm{turb}} = \nu \varphi \left(\frac{\Lambda^2}{\nu} \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right|, \frac{\partial \langle u_x \rangle / \partial x}{\partial \langle u_x \rangle / \partial z} \right). \tag{3.3.17*}$$

Соотношение (3.3.12) далеко не всегда правильно описывает турбулентный перенос количества движения. В частности, в турбулентном потоке за сеткой могут существовать области, где скорость осредненного течения постоянна и градиент $\partial \langle u_x \rangle / \partial z) = 0$, в то время как корреляция $\langle u_x'' u_z'' \rangle \neq 0$, поскольку турбулентность генерируется непосредственно позади сетки и далее переносится по течению осредненным потоком. Однако гипотеза пути смешения (3.3.16) требует нулевых величин ν^{turb}, и согласно модели Прандтля (*Прандтль, 1942*), турбулентность отсутствует. Указанное обстоятельство раскрывает основной недостаток такого рода моделей: гипотеза пути смешения предполагает локальную равновесность турбулентного поля. К счастью, смещение друг относительно друга точек пространства, в которых $\langle u_x'' u_z'' \rangle \neq 0$ и $\partial \langle u_x \rangle / \partial z) = 0$, часто невелико и потому применение формулы (3.3.12) всюду в потоке не приводит к значительным ошибкам при численном моделировании течения.

В заключение приведем, пользуясь реологическими соотношениями (3.2.45), (3.3.3) и (3.3.11), удобные для практических целей выражения для рейнольдсовых напряжений и потоков турбулентных диффузии и тепла, описывающие перенос количества движения, вещества и тепловой энергии в вертикальном направлении при турбулентном движении многокомпонентной смеси

$$R_{xz} = \bar{\rho} L^2 \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z}, \qquad (^1)$$

$$J_{\alpha z}^{\text{turb}} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}^{\text{turb}}} \bar{\rho} L^2 \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{n}_\alpha}{\bar{\rho}} \right), \qquad (^2) \quad (3.3.18)$$

$$q_z^{\text{turb}} = -\frac{1}{\mathrm{Pr}^T} \bar{\rho} \langle c_p \rangle L^2 \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right| \cdot \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{g}{\langle c_p \rangle} \right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle J_{\alpha z}^{\text{turb}}. \qquad (^3)$$

Важно иметь в виду, что в общем случае температурно-неоднородной среды в эти соотношения необходимо вводить некоторую поправку к линейному масштабу L, учитывающую обратное влияние неоднородного распределения температуры (определяющего степень устойчивости течения) на эффективность турбулентного перемешивания. Такая поправка необходима, поскольку для химически активной газовой смеси, стратифицированной в гравитационном поле, гипотеза о лагранжевой инвариантности любой переносимой субстанции — не справедлива. В однородной стратифицированной среде (например, в хорошо перемешанной нижней атмосфере планеты) такого рода поправка может возникнуть только из-за имеющихся вертикальных градиентов температуры в отдельных областях пространства, благодаря чему появляются архимедовы силы (или силы плавучести), способствующие или препятствующие образованию энергии турбулентности. Для учета этого факта Ричардсоном был предложен безразмерный критерий — градиентное число Ричардсона

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{g}{\langle c_p \rangle} \right) \Big/ \left(\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial z} \right)^2. \qquad (3.3.19)$$

Исходя из соображений теории подобия, естественно предположить, что все безразмерные характеристики турбулентного потока являются определенными функциями безразмерного числа Ri. Для того чтобы учесть влияние сил плавучести в соотношениях (3.3.18) можно использовать следующие поправки к масштабу L:

- при устойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} > 0$), затрудняющей развитие турбулентности: $L = L^*(1 - \beta_1 \mathrm{Ri})$, $5 < \beta_1 < 10$ (обычно $\beta_1 \cong 7$) (*Монин*, *Яглом*, *1992*)];
- при неустойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} < 0$), увеличивающей энергию турбулентности за счет энергии неустойчивости: $L = L^*(1 - \beta_2 \mathrm{Ri})^{-1/4}$ ($\beta_2 \cong 14$) (*Ламли*, *Пановский*, *1966*); для этого же случая рекомендована также формула $L = L^*(1 - c\mathrm{Ri})^{0,25}$, где c — эмпирический коэффициент (*Брэдшоу*, *1969*);
- в предельном случае ($\mathrm{Ri} = 0$), когда адиабатическое распределение температуры с высотой ($\partial \langle T \rangle / \partial z = -g / \langle c_p \rangle \equiv -\gamma_a$) не оказывает влияния на развитие турбулентности: $L = L^*$ — длина пути смешения при отсутствии сил плавучести.

Одновременно архимедовы силы изменяют число Прандтля—Шмидта (*Манк*, *Андерсон*, *1948*):

$$\mathrm{Pr}^{\text{turb}*} = \mathrm{Pr}^{\text{turb}} (1 + 3{,}33\mathrm{Ri})^{1,5} / (1 + 10\mathrm{Ri})^{0,5}. \qquad (3.3.20)$$

Кроме модели турбулентности первого порядка Прандтля известны и другие модели пути смешения, основанные на иных концепциях о сохраняющейся величине при переходе от одного слоя турбулентного потока к другому. К числу таких моделей относятся, например, модель турбулентности Тейлора (*1932*), основанная на предположении, что сохраняющейся переносимой субстанции в турбулентном потоке является завихренность, а не количество движения, и модель Кармана, в которой длина пути смешения Λ в формуле (3.3.16) зависит от двух производных, $\Lambda = \mathrm{const}(\partial\langle u_x\rangle/\partial z/(\partial^2\langle u_x\rangle/\partial z^2)$. Однако модели Тейлора свойственны те же недостатки, что и модели Прандтля — невозможность описания процессов турбулентного переноса в точках, где $\partial\langle u_x\rangle/\partial z) = 0$, а применение формулы Кармана часто затруднительно, например, для свободных турбулентных течений, когда профиль скорости имеет точку перегиба, в которой $\partial^2\langle u_x\rangle/\partial z^2 = 0$ и, следовательно, ν^{turb} обращается в бесконечность, что не соответствует действительности (см. *Лойцянский*, *1978*).

3.3.3. Дифференциальная модель Колмогорова—Прандтля [b—L-модель]

Для преодоления отмеченной выше ограниченности гипотезы пути смешения возникла необходимость в конструировании моделей турбулентности, позволяющих каким-то образом все же учитывать отсутствие реального внутреннего равновесия между полем турбулентности и полем осредненных параметров течения. В равновесной турбулентности, когда производство энергии турбулентности в каждой точке течения компенсируется ее диссипацией, нет необходимости включать энергию турбулентности $\langle b\rangle \equiv \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho}$ в число аргументов, определяющих величину коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb}, поскольку она сама определяется тем же набором локальных параметров. С целью приближенного учета реальной «неравновесности» турбулентного поля Колмогоров (*1942*) и Прандтль (*1945*) предложили ввести параметр $\langle b\rangle$ в число аргументов определяющих коэффициент ν^{turb} и использовать при решении конкретных задач, наряду с гидродинамическими уравнениями для осредненного движения, также и уравнение баланса энергии турбулентности (3.1.69).

В поле массовых гравитационных сил, т. е. когда $\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} \cdot \boldsymbol{F}_\alpha^{*}\right) = 0$, уравнение (3.1.69) для определения величины $\langle b\rangle$ принимает вид

$$\overline{\rho}\frac{\partial\langle b\rangle}{\partial t} + \overline{\rho}\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle \cdot \frac{\partial\langle b\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = -\operatorname{div}\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\mathrm{turb}} + \left(\boldsymbol{R} : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \left(\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\mathrm{turb}} \cdot \frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \qquad (3.3.21)$$

где

$$\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle}^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'/\rho)\boldsymbol{u}'' - \boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{u}''} \qquad (3.3.22)$$

— поток турбулентной энергии. Согласно модели замыкания (второго порядка) Колмогорова—Прандтля, коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb} и скорость диссипации турбулентной энергии $\langle\varepsilon_e\rangle$ [см. формулы (3.1.50) и (3.2.16)] связаны с турбулентной энергией $\langle b\rangle$ течения следующими основополагающими соотношениями:

$$\nu^{\text{turb}} = c_\mu L \sqrt{\langle b \rangle}, \qquad (3.3.23)$$

$$\langle \varepsilon_b \rangle = c_\varepsilon \frac{\langle b \rangle^{\frac{3}{2}}}{L} \qquad (3.3.24)$$

(где c_μ и c_ε — эмпирические постоянные). Эти соотношения следуют по существу из соображений теории размерности и являются обобщением известной гипотезы Колмогорова (*1941*, *1942*), состоящей в том, что скорость диссипации энергии турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle(\boldsymbol{r}, t)$ в данной точке развитого турбулентного течения определяется только локальными значениями турбулентной энергии $\langle b \rangle(\boldsymbol{r}, t)$ и масштабом турбулентности $L(\boldsymbol{r}, t)$.

Для определения других неопределенных членов в уравнении (3.3.21) можно использовать соотношения (3.2.45), (3.2.46) и (3.2.67). Диффузионный член

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b \rangle} \equiv \overline{\rho(b + p'/\rho)\boldsymbol{u}'' - \boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{u}''} = -\frac{\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\sigma_b} \frac{\partial \langle b \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \qquad (3.3.25)$$

описывает полный субстанциональный поток энергии турбулентности, связанный с различными механизмами переноса в пространстве. В частности, величина $\boldsymbol{J}^{\text{tyrb}}_{(b)} \equiv \overline{\rho b \boldsymbol{u}''}$ интерпретируется, как поток кинетической энергии пульсационного (вихревого) движения, так что дивергенция $\operatorname{div} \boldsymbol{J}^{\text{tyrb}}_{(b)}$ описывает среднюю скорость уменьшения вихревой кинетической энергии в единице объема за счет «турбулентной диффузии». В свою очередь, величина $-\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{\Pi}' \cdot \boldsymbol{u}''})$ характеризует среднюю скорость увеличения вихревой кинетической энергии за счет работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений на границе элементарного объема.

Выражение для скорости образования турбулентности сдвиговым потоком, фигурирующее в уравнении (3.3.21), может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{R} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle) = \mu^{\text{turb}} \overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} - p_{\text{turb}} \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle =$$
$$= \mu^{\text{turb}} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk} \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle \right)^2 - \frac{2}{3}\bar{\rho}\langle b \rangle \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle \equiv \boldsymbol{\Phi}_\nu - \frac{2}{3}\bar{\rho}\langle b \rangle \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle, \qquad (3.3.26)$$

где положительная функция

$$\boldsymbol{\Phi}_\nu = \bar{\rho}\nu^{\text{turb}} \overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} = \bar{\rho}\nu^{\text{turb}} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk} \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle \right)^2 \qquad (3.3.27)$$

представляет собой скорость, с которой теплота порождается вязким турбулентным трением в единичном объеме в единицу времени, и в соответствии с этим называется диссипативной функцией. Согласно (3.1.40) величину $(\boldsymbol{R} : (\partial/\partial \boldsymbol{r})\langle \boldsymbol{u} \rangle)$ можно трактовать как скорость обмена между турбулентной энергией и кинетической энергией среднего движения среды (при этом следует иметь в виду, что этот обмен энергией является исключительно кинематическим процессом, существенно зависящим от выбора операции осреднения).

Наличествующую в уравнении (3.3.21) генерацию турбулентной энергии в поле силы тяжести $\overline{\rho}G$, обусловленную неоднородностью распределения температуры и/или состава смеси, можно представить следующим образом

$$\overline{\rho}G \equiv \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle 1/\rho \rangle} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) = -\frac{\nu^{\text{turb}}}{\text{Pr}^{\text{tyrb}}} \frac{1}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\nu^{\text{turb}}}{\text{Pr}^{\text{tyrb}}} \frac{\partial \ln \mathscr{M}}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{3.3.28}$$

если использовать формулы

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\alpha}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\text{Pr}^{\text{turb}}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{\overline{n}_\alpha}{\overline{\rho}} \right), \tag{3.3.29}$$

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{q}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \boldsymbol{q}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) - \sum_{\alpha=1}^{N} \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\alpha} = -\frac{\overline{\rho}\langle c_p \rangle \nu^{\text{turb}}}{\text{Pr}^{\text{tyrb}}} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p \rangle} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right), \tag{3.3.30}$$

для определения турбулентного потока $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}$ (член с пульсациями давления в соотношении (3.2.67) опущен).

Числа Ричардсона и Колмогорова

Как видно из выражения (3.3.28), в турбулизованных течениях многокомпонентной смеси возможны два дополнительных механизма генерации турбулентности. Если первый механизм имеет тепловую природу, то второй механизм возникновения турбулентности имеет диффузионную природу и возникает в том случае, когда имеется неоднородное распределение отдельных компонентов в рассматриваемой области пространства. Это, в конечном счете, связано с тем, что пространственно-временная неоднородность (пульсации) массовой плотности обусловлена двумя факторами: пространственной неоднородностью температуры и неоднородностью концентраций [см. формулу (3.2.65)]. Как известно, если в жидкости появляется локальная область с плотностью, меньшей плотности окружающей среды, то на нее в поле силы тяжести будет действовать выталкивающая сила Архимеда (так называемая сила плавучести). При определенных условиях происходит потеря устойчивости равновесия, и эта сила приводит жидкость в конвективное движение. С двойственной природой архимедовой силы связано, в конечном итоге, и возникновение (исчезновение) турбулентности двух видов — термической турбулентности и «концентрационной» турбулентности, вызванной пространственной неоднородностью состава.

Общепринято проводить учет влияния термической стратификации среды на эволюцию турбулентного течения с помощью числа Ричардсона Ri, которое в рамках развиваемой модели может быть записано в следующем общем виде

$$\text{Ri} = -\frac{\left\{ \frac{\partial \ln \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle} \left(\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \right\} \cdot \left(\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right)}{\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}} \cong \frac{\frac{g}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{g}{\langle c_p \rangle} \right)}{\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}} \tag{3.3.31}$$

(вторая форма записи числа Ri получена с учетом гидростатического уравнения (3.1.34)).

Для учета влияния неоднородного распределения химического состава многокомпонентной смеси на образование (исчезновение) турбулентности под действием сил плавучести далее будем использовать число Колмогорова

$$\mathrm{Ko} = \frac{\left\{ \frac{\partial \ln \mathscr{M}}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \right\}}{\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}} \cong \frac{g \frac{\partial \ln \mathscr{M}}{\partial z}}{\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}}, \quad \mathscr{M} \equiv \overline{\rho}/\overline{\boldsymbol{n}}, \tag{3.3.32}$$

введенное в теорию турбулентности смеси Баренблаттом (*1978*).

С использованием этих чисел уравнение переноса турбулентной энергии смеси для определения параметра $\langle b \rangle$, может быть записано в следующем общем виде

$$\overline{\rho} \frac{\partial \langle b \rangle}{\partial t} + \overline{\rho} \left(\langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \frac{\partial \langle b \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{\overline{\rho} \nu^{\mathrm{turb}}}{\sigma_b} \frac{\partial \langle b \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) -$$

$$= -\frac{2}{3} \overline{\rho} \langle b \rangle \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle + \overline{\rho} \nu^{\mathrm{turb}} \overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} \left\{ 1 - \frac{\mathrm{Ri} + \mathrm{Ko}}{\mathrm{Pr}^{\mathrm{turb}}} \right\} - \overline{\rho} c_\varepsilon \frac{\langle b \rangle^{\frac{3}{2}}}{L}. \tag{3.3.33}$$

Из уравнения (3.3.33) видно, что если $\mathrm{Ri} + \mathrm{Ko} < 0$, то турбулентная энергия генерируется как ветровым сдвигом, так и силами плавучести. Когда $\mathrm{Ri} + \mathrm{Ko} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{turb}}$, то соответствующая сумма членов в уравнении баланса турбулентной энергии обращается в нуль; это означает, что турбулентное движение не поддерживается. В тех практически важных случаях, когда один из двух указанных механизмов возникновения силы плавучести не эффективен, можно говорить о критических числах Ричардсона Ri_c (Колмогорова Ko_c). Эти числа определяются из условия, что турбулентное движение существует только при $\mathrm{Ri} < \mathrm{Ri}_c$ (при постоянном составе), или только при $\mathrm{Ko} < \mathrm{Ko}_c$ (при постоянной температуре). При включении двух механизмов возникновения архимедовых сил они могут действовать, вообще говоря, как в одном, так и в противоположных направлениях. В случае если толщины теплового и диффузионного слоев смешения существенно различаются, такая разнонаправленность действия источника турбулентной энергии может приводить к реверсированию в некоторой (внешней для более тонкого слоя) области струйного течения.

Существует целая группа полуэмпирических моделей турбулентности Колмогорова—Прандтля, в которых уравнение (3.3.33) используется для определения коэффициента турбулентной вязкости в свободных сдвиговых течениях (плоских или осесимметричных) путем его численного решения совместно с гидродинамическими уравнениями среднего движения и дифференциальным уравнением (или алгебраическим выражением) для внешнего масштаба турбулентности L (см., например, сб. *«Турбулентность: Принципы и применения»*, *1980*).

3.3.4. Уравнения для масштаба турбулентности. Модель с двумя уравнениями переноса

Для замыкания уравнения (3.3.33) необходимо иметь некоторые алгебраические соотношения, или дополнительное дифференциальное уравнение для определения масштаба турбулентности L. Вывод дифференциального уравнения для масштаба L является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории развитой турбулентности. Дело в том, что параметр L не может быть определен только через одноточечные моменты пульсирующих характеристик движущегося потока. Являясь мерой расстояния между двумя точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ в турбулизованном потоке, на котором двухточечные корреляционные моменты $\langle \mathscr{A}''(\boldsymbol{r}_1)\mathscr{A}''(\boldsymbol{r}_2)\rangle$ все еще заметно отличаются от нуля, масштаб L определяется из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путем их интегрирования по расстоянию между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ (см., например, *Ламли, Пановский, 1966*; *Левеллен, 1980*). Полученные таким путем дифференциальные уравнения для L, описывающие процессы его конвекции, генерации и диссипации, содержат большое число плохо устанавливаемых из опыта коэффициентов пропорциональности, т. е. являются, в общем случае, значительно менее достоверными, чем, например, балансовое уравнение для тензора напряжений Рейнольдса, в котором многие члены определены почти точно [см. гл. 4].

По этой причине, для обеспечения эффективности практических расчетов, масштаб турбулентности L часто задается в виде чисто эмпирически найденных функций, или находится с помощью алгебраической формулы (а иногда упрощенного дифференциального уравнения), учитывающей только геометрию потока (расстояние до стенки z, толщину пограничного слоя δ, форму канала и т. п.) и не зависящей от особенностей течения жидкости. Можно, например, для L/δ использовать эмпирическую формулу Никурадзе (*1936*), полученную им при исследовании течения жидкости в гладких трубах. Заменяя радиус трубы R величиной δ, будем иметь следующую формулу для определения величины L в пограничном слое

$$L/\delta = (0{,}14 - 0{,}08(1 - z/R)^2 - 0{,}06(1 - z/R)^4), \tag{3.3.34}$$

где z — расстояние по нормали от стенки. В случае свободной конвекции в стратифицированных слоях со сдвигом для определения масштаба L можно использовать следующее простое дифференциальное уравнение (см. *Лайхтман, 1970*)

$$L = -\varkappa c^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\langle b\rangle}{\nu^{\mathrm{turb}}}\right) \Big/ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\langle b\rangle}{\nu^{\mathrm{turb}}}\right)\right], \tag{3.3.35}$$

позволяющее рассчитать L через локальные средние характеристики движущегося потока. Здесь $\varkappa = 0{,}4$ — постоянная Кармана; c — эмпирическая константа. Эта формула в предельных случаях свободной конвекции и сильной устойчивости переходит в хорошо известные асимптотические соотношения, характерные для указанных предельных режимов стратификации.

Вместе с тем, указанные формулы отличаются сравнительно небольшой универсальностью и, будучи пригодными для одного класса турбулентных течений, должны быть значительно изменены при переходе к описанию течений другого типа. Кроме этого, формулы типа (3.3.34) могут быть использованы только в случае «локально равновесной» турбулентности, характеристики которой определяются локальными условиями в каждой точке. Для «неравновесной» турбулентности, когда крайне важно влияние предыстории потока на характеристики течения в точке, величина L должна определяться все же с помощью динамического уравнения, учитывающего все виды энергетических преобразований в турбулентном потоке и с коэффициентами, не зависящими от геометрии течения.

При инвариантном моделировании процессов турбулентного переноса необходимо использовать «универсальное» эволюционное уравнение для интегрального масштаба турбулентности L, в какой-то мере устраняющее указанные недостатки в его нахождении. В работе (*Левеллен, 1980*) приведено подобное уравнение для макромасштаба турбулентности L, определяемого формулой

$$L = \frac{\text{const}}{\langle b \rangle} \iiint\limits_{w} \langle u_k''(r) u_k''(r+l) \rangle \frac{dw}{l^2},$$

которое было получено путем интегрирования по объему уравнения переноса для двухточечных корреляций скорости $\langle u_k''(r) u_k''(r+l) \rangle$. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0{,}3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \left(L \langle b \rangle^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \right) - 0{,}35 \frac{L}{\bar{\rho} \langle b \rangle} \boldsymbol{R} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} +$$
$$+ 0{,}6 \frac{\nu L}{\lambda^2} - \frac{0{,}375}{\langle b \rangle^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} (\langle b \rangle^{\frac{1}{2}} L) \right]^2 + \frac{0{,}8 L}{\langle b \rangle} \frac{g}{\langle T \rangle} q_z^{\text{turb}}, \qquad (3.3.36)$$

где $\lambda = L/(3 + 0{,}125 \text{Re}^{\text{turb}})^{\frac{1}{2}}$ — так называемый микромасштаб Колмогорова—Тейлора. Слагаемое, включающее масштаб λ, до некоторой степени учитывает связь между пульсациями скорости на некотором расстоянии от стенки и пульсациями давления на стенке, а также различие размеров вихрей в поперечном направлении и вдоль стенки. Трудности вывода этого и подобных ему уравнений для L связаны с тем, что ни один из членов исходного уравнения для корреляций $\langle u_k''(r) u_k''(r+l) \rangle$ нельзя проинтегрировать и потому все они должны быть промоделированы. С другой стороны, для дифференциального уравнения (3.3.36) возникает непростая проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб L не стремится к нулю.

По этой причине для многокомпонентной турбулентности часто удобно привлекать к рассмотрению, вместо уравнения (3.3.36), какое-либо уравнение переноса для комбинации $\langle \mathscr{A}''^2 \rangle^m L^n$, которое при совместном использовании с уравнениями переноса для момента $\langle \mathscr{A}''^2 \rangle$ определяет масштаб L (см. коллективную монографию *Турбулентность: Принципы и применения, 1980*). Одним из уравнений такого рода является уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle$, которое, совместно с эмпирическим соотношением (3.3.24), позволяет полностью замкнуть систему осредненных гидродинамических уравнений на уровне моментов второго порядка. Вопрос о граничных условиях в этом случае значительно упрощается, поскольку величина $\langle \varepsilon_b \rangle$ стремится к нулю на внешней границе.

Впервые эволюционное уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle$ в случае течения однородной несжимаемой жидкости получил Давыдов (*1959*, *1961*,). В случае развитой турбулентности это уравнение имеет вид

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\langle\varepsilon_b\rangle}{\partial t}+\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\varepsilon_b\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=$$

$$=0{,}15\bar{\rho}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\left(\frac{\langle b\rangle^2}{\langle\varepsilon_b\rangle}\frac{\partial\langle\varepsilon_b\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+1{,}45\frac{\langle\varepsilon_b\rangle}{\langle b\rangle}\left(\boldsymbol{R}:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}+0{,}48\bar{\rho}G\right)-1{,}92\frac{\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle^2}{\langle b\rangle},\qquad(3.3.37)$$

где величины $\boldsymbol{R}:(\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})$ и $\bar{\rho}G$ определяются формулами (3.3.26) и (3.3.28) соответственно. В правой части уравнения (3.3.37) стоят простейшим образом промоделированные члены, которые остаются при больших числах $\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}}$: генерация $\langle\varepsilon_b\rangle$ под действием градиента скорости, порождение диссипации турбулентной энергии силами плавучести и массовыми негравитационными силами, молекулярное разрушение величины $\langle\varepsilon_b\rangle$. Это уравнение, рассматриваемое совместно с эмпирическими соотношениями

$$L=\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}/\langle\varepsilon_b\rangle,\qquad \nu^{\mathrm{turb}}=0{,}09\langle b\rangle/\langle\varepsilon_b\rangle,\qquad(3.3.38)$$

вытекающими из соображений размерности, позволяет полностью замкнуть уравнение переноса турбулентной энергии (3.3.33). Таким образом, b—ε-модель, предложенная Лаундером (*1972*) применительно к расчету свободных сдвиговых течений, по существу, является вариантом модели Колмогорова—Прандтля. При расчетах пристеночных течений, когда необходимо вести расчет вплоть до стенки (где местные числа Рейнольдса малы), эмпирические коэффициенты в (3.3.37), полученные в условиях больших чисел Рейнольдса, не работают. В работе (*Лаундер*, *Морс*, *1982*) предложены модификации и на этот случай.

В заключение этого раздела еще раз подчеркнем, что константы в b—ε-модели зависят как от геометрии потока, так и от физико-химической природы моделируемой среды. Другим недостатком подобного рода моделей является допущение о градиентном характере процессов турбулентного переноса. Тем не менее, эти модели широко используются для практических целей, например в таких программах, как PHOENICS™, FLUENT™, FIRE™, NUMECA™, STAR-CD™ и KIVA™, разработанных для численного моделирования химически реагирующих турбулентных потоков в двигателях, турбинах, горелках и химических реакторах (см., например, *Ростен*, *Сполдинг*, *1987*).

Глава 4

Дифференциальные модели замыкания осредненных гидродинамических уравнений для турбулентной химически активной сплошной среды

В предыдущей главе было рассмотрено несколько различных по степени сложности и точности полуэмпирических градиентных моделей развитой турбулентности первого приближения, основанных на гипотезе о линейной зависимости неопределенных корреляционных моментов второго порядка (входящих в систему осредненных гидродинамических уравнений многокомпонентной смеси) от градиентов осредненных скоростей, температур и концентраций различных химических веществ. Полученные методами неравновесной термодинамики линейные определяющие соотношения для турбулентных потоков диффузии, тепла и тензора рейнольдсовых напряжений позволили замкнуть эту систему уравнений, что по существу обеспечило возможность ее применения для численного моделирования сравнительно простых и медленно изменяющихся турбулентных течений многокомпонентного реагирующего газа. Вместе с тем, как уже неоднократно нами отмечалось, градиентные модели первого приближения не всегда правильно отражают некоторые важные особенности реального поведения турбулентных течений со сложной геометрией (в частности, пространственных течений, отрывных течений и т. п.). Более того, структура турбулентных коэффициентов обмена и набор эмпирических констант (фигурирующих в замыкающих градиентных соотношениях), предназначенных, например, для описания течений в трубах, каналах, пограничных слоях, струях и следах, не являются достаточно универсальными, и их следует подбирать всякий раз заново для турбулентных течений разной интенсивности или с отличающейся геометрией.

Для однокомпонентной жидкости в последние годы наибольшее распространение получили модели турбулентности второго порядка, имеющие, по мнению ряда авторов, оптимальный уровень сложности (см., например, сб. «*Турбулентность: Принципы и применения*», *1980*). В этих схемах все входящие в осредненные гидродинамические уравнения корреляционные моменты второго порядка описываются системой дифференциальных уравнений переноса, подобных уравнению (3.3.33) для турбулентной энергии, замыкание которых основано на использовании градиентной гипотезы, позволяющей аппроксимировать входящие в них корреляционные моменты третьего и более высоких порядков соотношениями, включающими моменты только второго и первого порядков. Подобного рода дифференциальные уравнения лежат в основе так называемого инвариантного метода моделирования развитой турбулентности. Термин «инвариантное моделирование» понимается здесь в том смысле, что сконструированная модель турбулентности, оставаясь полуэмпирической, не содержит, тем не менее, сильно изменяющихся эмпирических коэффициентов, значения которых необходимо подбирать заново для каждого нового течения. Этот подход нашел широкое применение, в частности, при численном моделировании реальных режимов течения турбулизованной жидкости, для которых существенно влияние предыстории потока на характеристики турбулентности в точке (*«Турбулентность: Принципы и применения»*, *1980*).

Однако данный сравнительно эффективный путь инженерного решения проблемы моделирования развитой турбулентности также сталкивается с принципиальными трудностями построения замкнутой системы дифференциальных уравнений. Это связано с тем, что, например, в модельные уравнения переноса для вторых корреляционных моментов входят третьи моменты, которые неизвестны, в уравнения для третьих моментов входят четвертые неопределенные моменты и т. д. Обрыв подобного рода бесконечной цепочки уравнений переноса, так называемой цепочки Фридмана—Келлера (см. *Келлер*, *1930*), возможен лишь на пути установления какой-либо новой гипотезы замыкания, с помощью которой иерархия уравнений и неизвестных обрывается введением определенных связей между моментами высших порядков и моментами низших порядков. Роль такого рода связей могут выполнять, в частности, те же градиентные соотношения (но уже для моментов высоких порядков), содержащие различные эмпирические константы. Важно отметить, что при наличии такой формы аппроксимирующих соотношений для статистических корреляционных моментов высоких порядков явно или неявно предполагается (как и в случае моделей турбулентности первого приближения) существование некоторого внутреннего «равновесия» в структуре турбулентного поля, что, естественно, приводит к снижению общности подобного подхода (*Иевлев*, *1975*, *1990*).

В настоящее время значительный прогресс в инвариантном моделировании развитых турбулентных течений многокомпонентных реагирующих сред также связан с использованием дополнительных дифференциальных уравнений переноса для разнообразных одноточечных корреляционных моментов разного порядка, которые, наряду с уравнениями переноса турбулентной энергии (3.3.33) и уравнением переноса макромасштаба турбулентности (3.3.36), замыкают систему осредненных гидродинамических уравнений смеси (см., например, сб. *«Турбулентные течения реагирующих газов»*, 1983; *Колесниченко*, *Маров*, *1998*). Данная глава как раз и посвящена проблеме конструирования подобного рода полуэмпирических моделей турбулентности второго приближения для реагирующей смеси газов. Предлагается вывод дифференциальных уравнений переноса для различных одноточечных вторых корреляционных моментов турбулентных пульсаций термогидродинамических параметров среды, входящих в осредненные уравнения многокомпонентной гидродинамики с переменной плотностью и переменными теплофизическими свойствами. Несмотря на полуэмприрический характер этих дополнительных уравнений (в которых, при аппроксимации неизвестных корреляций, используются приближенные выражения, содержащие эмпирические константы), следует признать достаточную гибкость основанных на них моделей турбулентности. В частности, они позволяют учесть воздействие механизмов конвекции, диффузии, возникновения, перераспределения и диссипации корреляционных характеристик турбулентного поля на пространственно-временное распределение осредненных термогидродинамических параметров среды. С другой стороны, ими также можно воспользоваться для получения более достоверных алгебраических соотношений для коэффициентов турбулентного обмена в течениях смеси с поперечным сдвигом (в том числе применительно к специфике моделирования природных и космических сред), чем те, которые были рассмотрены нами в гл. 3 (см. также *Колесниченко, Маров, 1999*).

Сделаем еще несколько вводных замечаний, касающихся отличительных особенностей метода инвариантного моделирования применительно к многокомпонентной турбулентности. Как уже отмечалось, наличие градиентов плотности составляет одно из специфических свойств химически реагирующих течений, которое, как правило, не рассматривалось классическими моделями турбулентности. Однако, градиенты плотности, температуры и концентраций, возникающие, в частности, из-за локального тепло- и массовыделения в химических реакциях, могут сильно изменить поле гидродинамической скорости, осуществляя тем самым обратную связь химической кинетики с гидродинамикой. Одновременно и сами химические реакции в турбулизованной среде протекают иначе, чем в ламинарном потоке. Другими словами, необходимо учитывать взаимовлияние турбулентности и аррениусовой неравновесной кинетики. В случае турбулизации движения многокомпонентной смеси, в дополнение к пульсациям скорости, возникают пульсации массовой плотности, температуры и концентраций отдельных компонентов. Собственно по этой причине для замыкания турбулентно осредненных гидродинамических уравнений смеси необходимо в общем случае привлекать к рассмотрению большое число дополнительных дифференциальных уравнений переноса для одноточечных парных корреляций, включающих указанные пульсации.

Кроме того, для реагирующей среды проблема замыкания сильно усложняется еще и вследствие необходимости осреднения нелинейных «источниковых членов» производства вещества в химических реакциях, имеющих экспоненциальный характер. В данной главе предложена оригинальная процедура осреднения скоростей химических реакций любого порядка и намечена схема полуэмпирического моделирования появляющихся при этом дополнительных статистических корреляций. Отметим также, что развиваемый здесь подход, не являясь принципиально новым, содержит, однако, систематическое изложение (при использовании средневзвешенного осреднения Фавра) метода инвариантного моделирования развитой турбулентности применительно к специфике движения многокомпонентных химически активных природных сред. В намерения авторов не входило дать полный обзор литературы по затронутому вопросу. Соответствующую подборку можно найти, например, в цитируемой выше коллективной монографии (*«Турбулентность: Принципы и применения»*, 1980).

§ 4.1. Неравновесная аррениусова кинетика в турбулизованном потоке

Мы начнем с изложения процедуры осреднения скоростей химических реакций $\xi_s(T, Z_\alpha)$ в осредненных диффузионных уравнениях (3.1.23) для многокомпонентной турбулизованной среды. В простых градиентных моделях турбулентности для реагирующей смеси, описанных в предыдущей главе, при использовании уравнений (3.1.23) нами было принято приближение, согласно которому под величиной осредненной скорости $\overline{\xi_s(T, Z_\alpha)}$ подразумевается функция $\bar{\xi}_s \equiv \xi_s(\langle T \rangle, \langle Z_\alpha \rangle)$, в которой все аргументы являются осредненными. Это условие согласуется с основным предположением нашего подхода (3.2.1), в рамках которого были сконструированы простые градиентные модели — одноточечные корреляции $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle$ для любых (не равных гидродинамической скорости течения $\boldsymbol{u}$) пульсирующих термодинамических параметров $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle$ и могут быть опущены. В более точных моделях реагирующей турбулентности корреляционные вторые моменты, связанные с пульсациями температуры и состава, разумеется, не могут быть отброшены и должны учитываться в структуре гидродинамических уравнений масштаба среднего движения. Это происходит из-за того, что осредненные скорости химических реакций в реальных условиях турбулентного течения не определяются, вообще говоря, аррениусовой кинетикой для осредненных параметров, а существенным образом зависят от их пульсаций (см., например, *Кузнецов, 1969*; *Иевлев, 1990*). Тепловая энергия, выделяемая химическими реакциями, инициирует расширение среды и, если течение существенно экзотермическое, может индуцировать дополнительную силу плавучести. Именно таким способом химическая кинетика реализует обратную связь с гидродинамикой.

Таким образом, при моделировании химической турбулентности возникают дополнительные трудности, связанные не только с нахождением явного вида источников (стоков) $\bar{\sigma}_\alpha$ химических веществ в осредненных уравнениях неразрывности (3.1.23) для частиц сорта α и определением точной величины тепловыделения (теплопоглощения) $\sum_{s=1}^{r} \langle q_s \rangle \bar{\xi}_s$ в осредненном уравнении притока тепла (3.1.58), но также и с моделированием целого ряда стохастических корреляционных членов, типа $\langle H'' Z_\alpha'' \rangle$ и $\langle Z_\alpha'' Z_\beta'' \rangle$, входящих в уравнения переноса вторых корреляционных моментов. В конечном счете, собственно с наличием подобного рода корреляционных членов и связаны эффекты взаимодействия химической кинетики и различных процессов переноса в турбулизованной многокомпонентной среде.

Процедура осреднения величин $\overline{\xi_s(T, Z_\alpha)}$ не тривиальна и требует специального рассмотрения. Трудности осреднения обусловлены тем, что алгебраические выражения, связывающие мгновенные скорости реакций с пульсирующими характеристиками течения существенно нелинейны, причем уровень затруднения зависит, очевидно, от суммарного порядка химической реакции, а также от существования нелинейной зависимости коэффициента скорости реакции от температуры.

4.1.1. Элементы неравновесной аррениусовой кинетики

Рассмотрим некоторые необходимые для дальнейшего сведения из формальной теории кинетики гомогенных (объемных) химических реакций. Химические процессы, протекающие в реагирующей смеси, можно описать уравнениями реакций, которые символически записываются следующим образом:

$$\beta_{1s}[1] + \beta_{2s}[2] + \ldots \underset{\mathcal{K}_{rs}}{\overset{\mathcal{K}_{fs}}{\Longleftrightarrow}} \eta_{1s}[1] + \eta_{2s}[2] + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, r); \tag{4.1.1}$$

здесь $\beta_{\alpha s}$ и $\eta_{\alpha s}$ — стехиометрические коэффициенты (целые числа) компоненты α по отношению к s-й химической реакции; $[\alpha]$ — химические символы реагирующих веществ; знак $\Leftrightarrow$ означает, что реакция может протекать в обоих направлениях. Если обозначить через $\mathcal{K}_{fs}$ коэффициент скорости для s-й прямой реакции, а через $\mathcal{K}_{rs}$ — для s-й обратной реакции, то скорость прямой реакции может быть записана в виде

$$\omega_{fs} \equiv \mathcal{K}_{fs} n_1^{\beta_{1s}} n_2^{\beta_{2s}} \ldots, \tag{4.1.2}$$

где n_α — текущая числовая плотность компонента α. Подобное выражение можно написать и для обратной реакции. Общая скорость образования молекул сорта α в результате протекания всех химических реакций равна

$$\sigma_\alpha = \sum_{s=1}^{r} (\eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s}) \xi_s = \sum_{s=1}^{r} (\eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s}) [(\mathcal{K}_{fs} n_1^{\beta_{1s}} n_2^{\beta_{2s}} \ldots) - (\mathcal{K}_{rs} n_1^{\eta_{1s}} n_2^{\eta_{2s}} \ldots)]. \tag{4.1.3}$$

Результирующая скорость s-й реакции для идеальных термодинамических смесей [см. п. (2.3.3)] определяется через параметры скорости прямой реакции ω_{fs} и константу равновесия $\mathcal{K}_s$ следующей формулой (см., например, *де Гроот*, *Мазур*, *1964*):

$$\xi_s(T, n_\alpha) = \mathcal{K}_{fs} \prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\beta_{\alpha s}} \left\{ 1 - \frac{1}{\mathcal{K}_s} \prod_{\alpha=1}^{N} n_\alpha^{\nu_{\alpha s}} \right\} = \omega_{fs} \left[1 - \exp\left(-\frac{A_s}{k_B T} \right) \right], \tag{4.1.4}$$

где

$$\mathcal{K}_s \equiv \mathcal{K}_{fs} / \mathcal{K}_{rs}, \qquad \nu_{\alpha s} \equiv \eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s}, \tag{4.1.5}$$

$A_s \equiv -\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \nu_{\alpha s} \mu_\alpha$ — химическое сродство s-й реакции [см. (2.2.9)]. Заметим, что суммарный порядок прямой реакции ω_{fs} определяется как $\Delta\beta_s \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \beta_{\alpha s}$.

Известно, что в приближении аррениусовой кинетики коэффициент скорости $\mathcal{K}_{fs}$ аппроксимируется выражением (см., например, ***Вильямс***, *1971*)

$$\mathcal{K}_{fs}(T) = \mathcal{K}_{fs}^0 T^{a_{fs}} \exp(-E_{fs}/k_B T), \tag{4.1.6}$$

в котором через $\mathcal{K}_{fs}^0$ и a_{fs} соответственно обозначены постоянная частотного фактора (так называемый предэкспоненциальный множитель) и температурный показатель частотного фактора химической реакции, а через E_{fs} — аррениусовская энергия активации.

Рассматривая далее идеальные многокомпонентные системы, запишем химический потенциал (2.3.11) в следующем общем виде (см. *Пригожин, Дефей, 1966*)

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha^0(T,\, p) + k_B T \ln\left(\frac{n_\alpha}{n}\right), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N), \tag{4.1.7}$$

где

$$\mu_\alpha^0(T,\, p) = k_B T \ln p + h_\alpha^0 - T c_{p\alpha}^0 \ln T - T\int_0^T \frac{dT}{T}\int_0^T c_{p\alpha}^*(T)dT - k_B T\gamma_\alpha \tag{4.1.8}$$

— химический потенциал чистой компоненты α при данных температуре T и давлении p смеси; γ_α — химическая постоянная частиц α-го сорта; $c_{p\alpha}^0$, $c_{p\alpha}^*(T)$ — соответственно, поступательная и колебательная составляющие парциальной изобарной теплоемкости $c_{p\alpha}$, определяемой соотношением $c_{p\alpha} \equiv (\partial h_\alpha/\partial T)_{p,\{n_\beta\}}$; h_α^0 — экстраполированная на нулевую температуру парциальная энтальпия компоненты α. Тогда константа равновесия $\mathcal{K}_s$ и химическое сродство A_s s-й химической реакции могут быть записаны так (*Пригожин, Дефей, 1966*):

$$A_s \equiv -\sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}\mu_\alpha = k_B T \ln\left[\mathcal{K}_s(T)\Big/\prod_{\alpha=1}^N n_\alpha^{\nu_{\alpha s}}\right], \quad (s = 1, 2, \ldots, r) \tag{4.1.9}$$

$$\mathcal{K}_s(T) = n^{\Delta\nu}\exp\left[-\sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}\frac{\mu_\alpha^0}{k_B T}\right] = \Delta\nu_s \ln(k_B T) - \frac{q_s^0}{k_B T} +$$

$$+\frac{1}{k_B}\sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}c_{p\alpha}^0 \ln T + \frac{1}{k_B}\int_0^T \frac{dT}{T}\int_0^T \sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}c_{p\alpha}^*(T)dT + \sum_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}\gamma_\alpha. \tag{4.1.10}$$

Здесь $\Delta\nu_s = \sum\limits_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}$ — алгебраическая сумма стехиометрических коэффициентов s-й химической реакции; $q_s^0 = \sum\limits_{\alpha=1}^N \nu_{\alpha s}h_\alpha^0$ — так называемая теплота s-й реакции, экстраполированная к абсолютному нулю температуры.

Выражение в квадратных скобках в правой части (4.1.9) имеет исключительно важное значение в химической кинетике. Поскольку в случае химического равновесия, как скорость ξ_s, так и сродство A_s обращаются в нуль, что вытекает из чисто термодинамических соображений [см. (2.2.8)], то из (4.1.9) в этом случае следует так называемый закон действующих масс

$$\mathcal{K}_s(T) = \prod_{\alpha=1}^N \{(n_\alpha)_{eq}\}^{\eta_{\alpha s}-\beta_{\alpha s}}, \quad (s = 1, 2, \ldots, r), \tag{4.1.11}$$

позволяющий рассчитать состав продуктов реакции при химическом равновесии (здесь индексом (eq) обозначено равновесное значение числовой плотности).

4.1.2. Осреднение скоростей неравновесных химических реакций

Осреднение скорости образования (4.1.3) α-компоненты в результате протекания всех химических реакций (4.1.1), с последующим отбрасыванием членов, содержащих моменты третьего и более высоких порядков, представляет, как уже отмечалось, нетривиальную задачу. Возникающие трудности связаны, во-первых, с сильной нелинейностью выражения (4.1.4) для результирующей скорости s-й реакции, причем степень усложнения, очевидно, зависит как от суммарного порядка $\Delta\beta_s$ реакции, так и от наличия нелинейной зависимости коэффициента скорости реакции $\mathcal{K}_{fs}$ от температуры; во-вторых, с необходимостью последующего нахождения большого числа корреляционных членов второго порядка, содержащих турбулентные пульсации температуры и состава. Эти корреляционные члены должны определятся, в общем случае, из соответствующих эволюционных уравнений переноса, содержащих, в свою очередь, корреляции третьего и более высокого порядков. Замыкание подобного рода уравнений возможно только при дополнительных предположениях о характере связи статистических корреляций высоких порядков с корреляционными моментами низших порядков.

Прежде чем получить осредненное значение скорости химической реакции, записанной в самом общем виде, рассмотрим, в качестве примера, показывающего характерную сложность проблемы, типичную химическую реакцию второго порядка $[1]+[2]\xrightarrow{\mathcal{K}_f}[3]$, протекающую только в прямом направлении. Осредненное значение скорости исчезновения компоненты $[1]$ можно записать в виде

$$-\overline{\sigma}_1=\overline{\mathcal{K}_f n_1 n_2}=\overline{\rho^2\mathcal{K}_f Z_1 Z_2}=\langle\rho\mathcal{K}_f\rangle(\overline{\rho}\langle Z_1\rangle\langle Z_2\rangle+\overline{\rho Z_1'' Z_2''})+$$
$$+\langle Z_1\rangle\overline{\rho^2\mathcal{K}_f Z_2''}+\langle Z_2\rangle\overline{\rho^2\mathcal{K}_f Z_1''}+\overline{\rho(\rho\mathcal{K}_f)'' Z_1'' Z_2''}. \qquad (*)$$

В этом выражении первый член справа содержит произведение осредненных величин и может быть получен путем подстановки в выражение для источника σ_1 соответствующих средних параметров течения, а второй член описывает неоднородность распределения концентраций реагентов при эффективной величине константы скорости реакции, соответствующей принятому способу осреднения; остальные члены обусловлены влиянием пульсаций концентраций и константы скорости реакции. Поскольку константа скорости химической реакции зависит от температуры [формула (4.1.6)], то в случае неизотермического процесса пульсация константы скорости чрезвычайно сложным образом зависит от пульсаций температуры, что, в свою очередь, вносит значительные осложнения в формулу (*). Но даже в случае изотермического процесса в сильно разбавленных системах, когда можно с достаточной степенью точности считать постоянными плотность и коэффициент скорости реакции, выражение (*) содержит дополнительный член, приводящий к изменению скорости химической реакции по сравнению с ее значением, вычисленным по средним величинам (см. сб. «*Турбулентные течения реагирующих газов*», 1983).

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Будем далее считать, что соотношения (4.1.2)—(4.1.10) относятся к актуальному (мгновенному) состоянию химически активного течения турбулизованной смеси. Тогда параметры состояния T, p и n_α, в соответствии с допущением Рейнольдса, могут быть представлены в виде суммы осредненных значений $\langle T\rangle$, $\overline{p}$ и $\overline{n}_\alpha$ и их турбулентных пульсаций δT, δp, δn_α (в этом разделе для единообразия записи будем использовать одинаковые обозначения для пульсационных составляющих параметров, независимо от способа их осреднения, т. е. $\delta T \equiv \rho T''/\overline{\rho}$, $\delta n_\alpha \equiv n'_\alpha$). Так как $\xi_s = \xi_s(T, n_\alpha)$, то можно, ограничиваясь приближением только второго порядка малости, принять

$$\xi_s(T, n_\alpha) \cong \xi_s(\langle T\rangle, \overline{n}_\alpha) + \delta\xi_s + \frac{1}{2}\delta^2\xi_s, \tag{4.1.12}$$

где

$$\delta\xi_s = \left(\frac{\partial\xi_s}{\partial T}\right)_0 \delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial n_\alpha}\right)_0 \delta n_\alpha, \tag{4.1.13}$$

$$\delta^2\xi_s = \left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial T^2}\right)_0 (\delta T)^2 + \sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial T\partial n_\beta}\right)_0 \delta T\delta n_\beta + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\xi_s}{\partial n_\alpha\partial n_\beta}\right)_0 \delta n_\alpha\delta n_\beta. \tag{4.1.14}$$

Здесь индексом «0» отмечены значения производных, вычисленные при $T = \langle T\rangle$ и $n_\alpha = \overline{n}_\alpha$.

Из выражения (4.1.4) варьированием независимых переменных T и n_β легко получить первую вариацию результирующей скорости $\xi_s = \xi_s(T, n_\alpha)$, которую запишем в виде

$$\delta\xi_s = \left[1 - \exp\left(-\frac{A_s}{k_B T}\right)\right]\delta\omega_{fs} + \omega_{fs}\exp\left(-\frac{A_s}{k_B T}\right)\delta\left(\frac{A_s}{k_B T}\right), \tag{4.1.15}$$

где

$$\delta\omega_{fs} = \omega_{fs}\left(\frac{E_{fs} + k_B T a_{fs}}{k_B T^2}\delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\beta_{\alpha s}}{n_\alpha}\right). \tag{4.1.16}$$

Далее, для получения вариации $\delta(A_s/k_B T)$ воспользуемся известными термодинамическими соотношениями (*де Гроот*, *Мазур*, *1964*)

$$\left(\frac{\partial(A_s/T)}{\partial T}\right)_p = \sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\left(\frac{\partial(\mu_\alpha/T)}{\partial T}\right)_p = \frac{q_s(T, p)}{T^2}, \tag{4.1.17}$$

$$\left(\frac{\partial A_s}{\partial p}\right)_T = -\sum_{\alpha=1}^{N}\nu_{\alpha s}\left(\frac{\partial\mu_\alpha}{\partial p}\right)_T = V_s(T, p), \tag{4.1.18}$$

$$\left(\frac{\partial A_s}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p} = -\sum_{\beta=1}^{N}\nu_{\beta s}\left(\frac{\partial\mu_\beta}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p} = -\sum_{\beta=1}^{N}\nu_{\beta s}\mu_{\beta\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N}\mu_{\beta\alpha}n_\beta\left(\frac{\nu_{\beta s}}{n_\beta} - \frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha}\right), \tag{4.1.19}$$

в которых введены следующие обозначения

$$q_s(T, p) = \sum_{\alpha=1}^{N} h_\alpha(\eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s}) = q_s^0 + \sum_{\alpha=1}^{N} v_{\alpha s} \int_0^T c_{p\alpha}(T)dT, \tag{4.1.20}$$

$$V_s(T, p) = \sum_{\alpha=1}^{N}(\eta_{\alpha s} - \beta_{\alpha s})v_\alpha, \tag{4.1.21}$$

$$\mu_{\beta\alpha} = \left(\frac{\partial\mu_\beta}{\partial n_\alpha}\right)_{T,p,\{n_\beta\}(\beta\neq\alpha)}. \tag{4.1.22}$$

Здесь v_α — парциальный молярный объем α компоненты [см. (2.3.12)]; q_s — теплота реакции s при постоянных T и p, равная разности между суммой произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагирующих веществ [см. (2.1.28)]; $V_s(T, p)$ — так называемое изменение удельного объема при протекании s-й реакции при постоянных температуре и давлении; $\mu_{\beta\alpha}$ — частная производная от химического потенциала μ_β по числовой плотности n_α при постоянных температуре T и давлении p и всех других числовых плотностей $n_\beta \neq n_\alpha$, $\left(\text{заметим, что } \sum_{\alpha=1}^{N} n_\alpha\mu_{\beta\alpha} = 0\right)$.

Для смеси совершенных газов будем иметь [см. (2.3.12)]:

$$v_\beta = \frac{1}{n}, \qquad \mu_{\beta\alpha} = k_B T\left(\frac{\delta_{\beta\alpha}}{n_\alpha} - \frac{1}{n}\right), \tag{4.1.23}$$

где $\delta_{\beta\alpha}$ — символ Кронекера. Тогда

$$\delta\left(\frac{A_s}{k_B T}\right) = \frac{q_s(T, p)}{k_B T^2}\delta T - \frac{V_s(T, p)}{k_B T}\delta p + \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\Delta v_s}{n} - \frac{v_{\alpha s}}{n_\alpha}\right)\delta n_\alpha =$$
$$= \frac{q_s(T, p) - \Delta v_s k_B T}{k_B T^2}\delta T - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{v_{\alpha s}}{n_\alpha}\delta n_\alpha. \tag{4.1.24}$$

Подставляя теперь соотношения (4.1.16) и (4.1.24) в формулу (4.1.15), получим следующее выражение для первой вариации $\delta\xi_s$ скорости s-й химической реакции

$$\delta\xi_s = \Lambda_0^s \delta T + \sum_{\alpha=1}^{N} \Lambda_\alpha^s \delta n_\alpha, \tag{4.1.25}$$

где

$$\Lambda_0^s \equiv \omega_{fs}\left\{\frac{a_{fs}}{T} + \frac{E_{fs}}{k_B T^2} + \frac{q_s - E_{fs} - (\Delta v_s + a_{fs})k_B T}{k_B T^2}\left(\frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{v_{\beta s}}\right)\right\}, \tag{4.1.26}$$

$$\Lambda_\alpha^s \equiv \omega_{fs}\left\{\frac{\beta_{\alpha s}}{n_\alpha} - \frac{\eta_{\alpha s}}{n_\alpha}\left(\frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{v_{\beta s}}\right)\right\}. \tag{4.1.27}$$

Получим теперь вторую вариацию $\delta^2\xi_s$ результирующей скорости s-й химической $\xi_s \equiv \omega_{fs} - \omega_{rs}$ (здесь $\omega_{rs} = \omega_{fs}\exp(-A_s/k_B T)$ — скорость обратной реакции). Для этого представить ее сначала в виде

$$\delta^2\xi_s = \delta(\delta\omega_{fs} - \delta\omega_{rs}) = \delta[\omega_{fs}\delta(\ln\omega_{fs}) - \omega_{rs}\delta(\ln\omega_{rs})] =$$
$$= \omega_{fs}[(\delta\ln\omega_{fs})^2 + \delta^2(\ln\omega_{fs})] - \omega_{rs}[(\delta\ln\omega_{rs})^2 + \delta^2(\ln\omega_{rs})]. \quad (4.1.28)$$

Тогда, используя формулу (4.1.16), а также легко выводимые (с учетом (4.1.16) и (4.1.24) соотношения

$$\delta(\ln\omega_{rs}) = \frac{E_{fs} + a_{fs}k_B T - q_s + \Delta\nu_s k_B T}{k_B T^2}\delta T + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\eta_{\alpha s}}{n_\alpha}\delta n_\alpha, \quad (4.1.29)$$

$$\delta^2(\ln\omega_{fs}) = -\frac{2E_{fs} + a_{fs}k_B T}{k_B T^3}(\delta T)^2 - \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\beta_{\alpha s}}{n_\alpha^2}(\delta n_\alpha)^2, \quad (4.1.30)$$

$$\delta^2\left(\frac{A_s}{k_B T}\right) = \frac{\Delta\nu_s k_B T - q_s - q_s^0}{k_B T^3}(\delta T)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\nu_{\alpha s}}{n_\alpha^2}(\delta n_\alpha)^2, \quad (4.1.31)$$

$$\delta^2(\ln\omega_{rs}) = \delta^2(\ln\omega_{fs}) - \delta^2\left(\frac{A_s}{k_B T}\right), \quad (4.1.32)$$

окончательно получим (*Колесниченко, Маров, 1984*)

$$\frac{1}{2}\delta^2\xi_s = \mathscr{B}_0^s(\delta T)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N}\mathscr{B}_\alpha^s(\delta T\delta n_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\mathscr{B}_{\alpha\gamma}^s(\delta n_\alpha\delta n_\gamma), \quad (4.1.33)$$

где

$$\mathscr{B}_\alpha^s \equiv \omega_{fs}\frac{E_{fs}^*}{k_B T^2 n_\alpha}\left\{\beta_{\alpha s} - \eta_{\alpha s}\left(1 - \frac{q_s^*}{E_{fs}^*}\right)\left(\frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{\nu_{\beta s}}\right)\right\}, \quad (4.1.34)$$

$$\mathscr{B}_{\alpha\gamma}^s \equiv \frac{\omega_{fs}}{2n_\alpha n_\gamma}\left\{\beta_{\alpha s}^2 - \beta_{\gamma s} - (\eta_{\alpha s}^2 - \eta_{\gamma s})\left(\frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{\nu_{\beta s}}\right)\right\}, \quad (4.1.35)$$

$$\mathscr{B}_0^s \equiv \omega_{fs}\left\{\left(1 - \frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{\nu_{\beta s}}\right)\frac{E_{fs}^{*2} - k_B T(2E_{fs}^* - a_{fs}k_B T)}{2k_B^2 T^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{q_s^*(q_s^* - 2E_{fs}^* + 2k_B T)}{2k_B^2 T^4}\left(\frac{1}{\mathscr{K}_s}\prod_{\beta=1}^{N}(n_\beta)^{\nu_{\beta s}}\right)\right\}. \quad (4.1.36)$$

Здесь введены обозначения

$$E_{fs}^* \equiv E_{fs} + a_{fs}k_B, \quad q_s^* \equiv q_s(T, p) - \Delta\nu_s k_B T. \quad (4.1.37)$$

Заметим, что все фигурирующие в формулах (4.1.26), (4.1.27), (4.1.34), (4.1.35) и (4.1.36) физические параметры p, T, n_α осреднены указанным выше образом, но для упрощения записи символ осреднения опущен.

Осредняя теперь по ансамблю возможных реализаций приближенное равенство (4.1.12) и используя соотношения (4.1.25) и (4.1.33), для осредненной скорости химической реакции в турбулизованном потоке окончательно будем иметь

$$\overline{\xi_s(T, n_\alpha)} = \xi_s(\langle T\rangle, \overline{n}_\alpha) + \mathscr{B}_0^s\overline{(\delta T)^2} + \sum_{\alpha=1}^{N} \mathscr{B}_\alpha^s\overline{\delta T\delta n_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \mathscr{B}_{\alpha\beta}^s\overline{\delta n_\alpha\delta n_\beta}, \tag{4.1.38}$$

где

$$\overline{(\delta T)^2} \cong \overline{\rho^2 T''^2}/\overline{\rho}^2 \cong \overline{\rho T''^2}/\overline{\rho} = \langle T''^2\rangle, \tag{4.1.39}$$

$$\overline{\delta T\delta n_\alpha} \equiv \overline{\rho T'' n'_\alpha}/\overline{\rho} = \overline{\rho^2 T'' Z_\alpha}/\overline{\rho} \cong \overline{\rho T'' Z_\alpha} = \overline{\rho}\langle T'' Z''_\alpha\rangle, \tag{4.1.40}$$

$$\overline{\delta n_\alpha\delta n_\beta} \equiv \overline{n'_\alpha n'_\beta} \cong \overline{\rho}^{\,2}(\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle - \langle Z_\alpha\rangle\overline{Z''_\beta} - \langle Z_\beta\rangle\overline{Z''_\alpha}), \tag{4.1.41}$$

причем соотношение (4.1.41) следует из очевидного преобразования

$$n'_\alpha = n_\alpha - \overline{n}_\alpha = \rho Z_\alpha - \overline{\rho}\langle Z_\alpha\rangle = \rho Z''_\alpha + \rho'\langle Z_\alpha\rangle. \tag{4.1.42}$$

Из выражения (4.1.38) следует, что в случае учета взаимовлияния осредненной гидродинамики и химической кинетики на характер протекания химических реакций и процессы тепло- и массопереноса в турбулизованном течении, необходимо привлекать к рассмотрению в общем случае многокомпонентной смеси достаточно большое количество дополнительных уравнения переноса для парных корреляционных функций от пульсаций температуры и состава.

По поводу широко используемой далее формулы (4.1.38) сделаем следующее замечание. В силу экспоненциальной формы выражения (4.1.4) и медленной сходимости соответствующих степенных рядов разложения (4.1.12), в общем случае необходимы более детальные сведения о структуре турбулентного поля течения многокомпонентной реагирующей смеси. Другими словами, знания одних только вторых корреляционных моментов для пульсирующих температуры и состава может оказаться совершенно недостаточным для удовлетворительной аппроксимации осредненной величины «источникового» члена $\overline{\sigma}_\alpha$. Естественно, что наиболее полную информацию о химической турбулентности можно было бы получить, вводя в рассмотрение функцию распределения совместных вероятностей для гидродинамической скорости $\boldsymbol{u}$ и основных термодинамических параметров течения химически активной смеси во всех точках координатного пространства. Однако такой подход все-таки слишком сложен для практического употребления и потому может играть лишь ограниченную роль в исследованиях реагирующей турбулентности.

Достаточно широкое распространение (в частности, в связи с исследованиями турбулентного горения) получили методы, основанные на использовании одноточечной плотности распределения вероятностей скорости, концентраций и некоторых других величин в турбулентных потоках, $P(\rho, \boldsymbol{u}, T, Z_\alpha; \boldsymbol{r}, t)$ (см., например, *Борги, 1984*; *О'Брайен, 1983*). Однако оценить в полной мере перспективность этого существенно упрощенного подхода также не представляется возможным, как из-за отсутствия завершенной теории, позволяющей непосредственно находить функцию P с помощью определяющего ее интегро-дифференциального уравнения, так и вследствие все еще немногочисленного количества численно решенных тестовых задач турбулентного горения. Вместе с тем, предложенная выше аппроксимация осредненных скоростей химических реакций $\overline{\xi_s}$ на уровне моментов второго порядка позволяет, до известной степени, учитывать влияние химической кинетики на процессы возникновения и эволюции реагирующей турбулентности. Несомненным является то, что даже такой ограниченный подход к решению сложной проблемы взаимодействия турбулентности и химической кинетики все-таки значительно лучше, чем ее полное игнорирование.

4.1.3. Формула для корреляционных моментов, включающих пульсации источника вещества за счет химических реакций

Для дальнейших целей нам понадобится выражение, позволяющее записать величины $\overline{\mathscr{A}''\sigma_\alpha}$, содержащие пульсации σ'_α источника вещества сорта α за счет химических реакций, через корреляционные моменты $\langle H''Z''_\alpha\rangle$ и $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$. Используя свойства средневзвешенного осреднения (3.1.7) и соотношение (4.1.3) для источника σ_α, величину $\overline{\mathscr{A}''\sigma_\alpha}$ представим первоначально в виде

$$\overline{\mathscr{A}''\sigma_\alpha} = \overline{\sigma}_\alpha\overline{\mathscr{A}''} + \overline{\sigma'_\alpha\mathscr{A}''} = \overline{\mathscr{A}''}\left(\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\xi_s(\langle T\rangle, \overline{n}_\alpha)\right) + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\overline{\xi'_s\mathscr{A}''}, \qquad (4.1.43)$$

где пульсация скорости ξ'_s, согласно формуле (4.1.25), определяется выражением

$$\xi'_s = \Lambda_0^s(\rho T''/\overline{\rho}) + \sum_{\beta=1}^{N} \Lambda_\beta^s n'_\beta. \qquad (4.1.44)$$

Поскольку употребляемые далее (при конструировании феноменологической модели реагирующей турбулентности) уравнения переноса корреляционных моментов второго порядка содержат корреляции вида $\langle H''Z''_\alpha\rangle$ и $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$, то именно через них удобно будет выразить и пульсации ξ'_s скорости химической реакции. Это можно сделать с помощью формулы (3.1.45), переписанной в виде

$$\langle c_p\rangle T'' = H'' - \textstyle\sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle Z''_\alpha.$$

В результате будем иметь

$$\overline{\xi'_s\mathscr{A}''} = \Lambda_0^s\langle T''\mathscr{A}''\rangle + \sum_{\beta=1}^{N} \Lambda_\beta^s\overline{n'_\beta\mathscr{A}''} =$$

$$\cong \frac{\Lambda_0^s}{\langle c_p\rangle}\langle H''\mathscr{A}''\rangle + \sum_{\beta=1}^{N}\left(\overline{\rho}\Lambda_\beta^s - \frac{\langle h_\beta\rangle}{\langle c_p\rangle}\Lambda_0^s\right)\langle Z''_\beta\mathscr{A}''\rangle - \overline{\mathscr{A}''}\sum_{\beta=1}^{N} \Lambda_\beta^s\overline{n}_\beta. \qquad (4.1.45)$$

Отсюда, с учетом формулы (3.2.66), записанной в виде

$$\overline{\mathscr{A}''} \cong \frac{1}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\langle H''\mathscr{A}''\rangle + \frac{1}{\langle c_p\rangle}\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}{\overline{n}} - c_{p\alpha}\right)\langle Z''_\alpha\mathscr{A}''\rangle,$$

для искомого выражения $\overline{\mathscr{A}''\sigma_\alpha}$ окончательно находим

$$\overline{\mathscr{A}''\sigma_\alpha} = \overline{\mathscr{A}''}\left(\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\xi_s(\langle T\rangle, \overline{n}_\alpha)\right) + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\overline{\xi_s'\mathscr{A}''} = \overline{\rho}L_{0\alpha}^{\mathrm{Ch}}\langle H''\mathscr{A}''\rangle + \overline{\rho}\sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}^{\mathrm{Ch}}\langle Z_\alpha''\mathscr{A}''\rangle. \tag{4.1.46}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\overline{\rho}L_{0\alpha}^{\mathrm{Ch}} \equiv \frac{1}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\left(\xi_s(\langle T\rangle, \overline{n}_\alpha) + \Lambda_0^s\langle T\rangle - \sum_{\beta=1}^{N}\Lambda_\beta^s\overline{n}_\beta\right), \tag{4.1.47}$$

$$\overline{\rho}L_{\alpha\beta}^{\mathrm{Ch}} \equiv \overline{\rho}\sum_{s=1}^{r}\nu_{\alpha s}\left(\Lambda_\beta^s - \frac{\langle T\rangle}{\overline{n}}\Lambda_0^s\right) + \langle T\rangle\left(\frac{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}{\overline{n}} - c_{p\beta}\right)L_{0\alpha}^{\mathrm{Ch}}. \tag{4.1.48}$$

Далее будут рассмотрены случаи различных физических величин $\mathscr{A}$, пульсирующих в турбулизованном потоке.

В заключение заметим следующее. Часто необходимый предварительный анализ влияния турбулизации течения газовой смеси на скорости протекания химических реакций (или наоборот) возможен при сопоставлении между собой различных характеристических времен: характерного времени гидродинамических процессов, t_{hydro}; временного масштаба турбулентности, t_{turb} (например, диссипативного масштаба $t_{\mathrm{turb}} \sim \langle b\rangle/\langle\varepsilon_e\rangle$); временного масштаба химических реакций, t_{chem}. Эти характерные времена могут находиться в различных соотношениях друг с другом (обычно $t_{\mathrm{turb}} \ll t_{\mathrm{hydro}}$, в частности, для течений типа пограничного слоя $t_{\mathrm{turb}}/t_{\mathrm{hydro}} \sim 10^{-2}$).

В астро- и геофизических приложениях, при анализе связи турбулентности и химической кинетики, можно ограничиться анализом следующих возможных случаев:

- $t_{\mathrm{chem}} > t_{\mathrm{hydro}}$ (при этом $t_{\mathrm{chem}} \gg t_{\mathrm{turb}}$) — химические реакции неравновесны по отношению к осредненному движению среды и «заморожены» по отношению к пульсационному движению; в этом случае процессы химического превращения не влияют на газодинамические характеристики потока, но средний состав газа должен определяться из осредненных уравнений неразрывности отдельных химических компонент, в которых источниковые члены рассчитываются с учетом пульсаций температуры и состава (см. *Иевлев*, *1990*);
- $t_{\mathrm{chem}} < t_{\mathrm{hydro}}$ — химические реакции независимы по отношению к осредненному, но существенно взаимовлияние процессов химической кинетики и процессов тепло- и массопереноса в турбулизованном потоке;
- $t_{\mathrm{chem}} \ll t_{\mathrm{hydro}}$ — осредненное течение можно считать химически равновесным, однако сами химические реакции могут быть неравновесными по отношению к турбулентным пульсациям; в этом случае состав смеси определяется из закона действующих масс (4.1.11), но с учетом возможного влияния на характеристики среды пульсаций температуры и состава, а процессы химического превращения влияют на коэффициенты турбулентного обмена (*Иевлев*, *1990*; *Маров*, *Колесниченко*, *1987*).

§ 4.2. Модельные уравнения переноса вторых моментов для многокомпонентной газовой смеси

В этом параграфе на основе общего балансового уравнения для вторых корреляционных моментов $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle$ пульсирующих в турбулизованном потоке термогидродинамических параметров смеси, единообразным способом получены следующие модельные уравнения переноса: уравнения переноса для составляющих тензора турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ij}, уравнение переноса турбулентной энергии $\langle b \rangle$, уравнение переноса для вектора турбулентного потока тепла $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}$, уравнение переноса среднеквадратичной пульсации (дисперсии) полной энтальпии смеси $\langle H''^2 \rangle$, уравнения переноса для векторов турбулентной диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$), уравнения переноса для вторых смешанных моментов пульсаций энтальпии и состава смеси $\langle H'' Z_\alpha'' \rangle$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) и, наконец, уравнения переноса для вторых смешанных моментов пульсаций концентрации для различных пар веществ в смеси $\langle Z_\alpha'' Z_\beta'' \rangle$ (α, $\beta = 1, 2, \ldots, N$). Проведен анализ физического смысла всех статистических корреляций высокого порядка, фигурирующих в указанных уравнениях и предложены их простейшие аппроксимации. Достигнутый значительный прогресс в развитии и применении моделей турбулентности второго порядка для однокомпонентной жидкости с постоянной плотностью (см., например, (*Дональдсон, 1972*; *Дирдорф, 1973*; *Андре и др., 1976*; сб. «*Турбулентность: Принципы и применения*», *1980*) позволяет надеяться на эффективность рассмотренного здесь обобщения некоторых из них на случай течения сжимаемой многокомпонентной среды. Имея в виду, что эффективность любой сконструированной модели турбулентности определяется, в конечном счете, согласованностью полученных с ее помощью результатов с экспериментальными данными, мы использовали далее простейшие аппроксимационные выражения для фигурирующих в указанных уравнениях переноса неизвестных моментов, руководствуясь при этом аналогией с современными полуэмпирическими моделями развитой турбулентности для однокомпонентной среды с постоянной плотностью.

4.2.1. Общий вид уравнения переноса одноточечных вторых моментов для турбулизованной смеси

Статистический подход к описанию процессов турбулентного переноса в однокомпонентной жидкости основан, как известно, на анализе цепочки зацепляющихся прогностических уравнений для корреляционных моментов связи возрастающего порядка (см. *Келлер*, *Фридман*, *1924*). Рассмотрим кратко общую схему составления этих уравнений на примере несжимаемой жидкости с постоянной плотностью.

Разноточечный и разновременный коррелятор пульсаций скорости k-го порядка определяется статистическим осреднением произведения k пульсационных скоростей

$$\mathscr{B}_{A_1 \ldots A_k}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \ldots ; \boldsymbol{r}_k, t_k) = \overline{u'_{A_1}(\boldsymbol{r}_1, t_1) \ldots u'_{A_k}(\boldsymbol{r}_k, t_k)},$$

где $\boldsymbol{r}_k$ — радиус-вектор точки в пространстве, t_k — момент времени, A_k — индекс, пробегающий значения x, y, z. Полное статистическое описание случайного поля скоростей эквивалентно определению всех корреляторов пульсаций скорости произвольного порядка, что практически невыполнимо. Поэтому, реально используют только корреляторы низших порядков, например, парный коррелятор $\mathscr{B}_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, t) = \overline{u_i'(\boldsymbol{r}, t)u_j'(\boldsymbol{r}_1, t)}$ — разноточечный одновременный момент второго порядка пульсаций скорости. При изучении сдвиговой турбулентности несжимаемой однокомпонентной жидкости часто удобно использовать лишь одноточечные парные корреляторы пульсаций скорости $\mathscr{B}_{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \overline{u_i'(\boldsymbol{r}, t)u_j'(\boldsymbol{r}, t)}$ — тензор Рейнольдса.

Производная по времени от коррелятора $\mathscr{B}_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$, в силу коммутативности операций осреднения и дифференцирования (постулат Рейнольдса, [см. (3.1.2)]) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{B}_{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \overline{u_i'(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial u_j'(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}} + \overline{u_j'(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial u_i'(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}}.$$

Для получения эволюционных уравнений для вторых моментов $\mathscr{B}_{ij}(\boldsymbol{r}, t)$, необходимо исключить производные по времени в правой части последнего равенства с помощью соответствующих гидродинамических уравнений для пульсаций скорости. Тогда в полученные уравнения войдут корреляционные функции для пульсаций скорости третьего порядка. Аналогичным образом можно вывести и более сложные эволюционные уравнения, например, для корреляторов третьего порядка, в которые войдут уже корреляционные функции четвертого порядка и т. д. Обрыв этой цепочки на любом шаге приводит к незамкнутой системе уравнений, что и представляет главную проблему метода Келлера—Фридмана.

Дополнительные трудности возникают при обобщении этого подхода на многокомпонентные химически реагирующие сжимаемые среды. В связи с этим отметим, что даже для однокомпонентной жидкости система уравнений для моментов связи записывается настолько сложно, что в цитированной выше классической работе Келлера и Фридмана сами уравнения не выписывались, а лишь была указана основная идея их вывода и перечислено, сколько и каких уравнений при этом получается. По этой причине фактический вывод цепочки уравнений, описывающих динамику корреляционных моментов возрастающего порядка, полученных при весовом осреднении Фавра для турбулизованного потока многокомпонентной смеси с химическими реакциями, имеет по нашему мнению, принципиальное значение как для конструирования полуэмпирических моделей химической турбулентности повышенного уровня сложности, так и для более глубокого понимания процессов взаимодействия кинетики и турбулентного переноса в подобных средах (см. *Маров, Колесниченко, 1987*).

Перейдем теперь к выводу общей формы уравнения переноса вторых моментов для турбулизованной среды. Пусть $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ — удельное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты тензора), субстанциональный баланс которой имеет вид (2.1.1). Тогда, с учетом (3.1.14), можно написать

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\right)+\sigma_{(\mathscr{A})}=\rho\frac{d\mathscr{A}}{dt}\equiv\rho\frac{D\langle\mathscr{A}\rangle}{Dt}+\rho\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial\langle A\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\rho\frac{d\mathscr{A}''}{dt},$$

откуда следует выражение

$$\rho\frac{d\mathscr{A}''}{dt}=-\rho\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{A}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)-\rho\frac{D\langle\mathscr{A}\rangle}{Dt}-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\right)+\sigma_{(\mathscr{A})}. \tag{4.2.1}$$

Умножая (4.2.1) на пульсацию $\mathscr{B}''$ некоторого другого параметра $\mathscr{B}(\boldsymbol{r}, t)$ (для которого также может быть написано балансовое уравнение типа (2.1.1)) и турбулентно осредняя результат, получим в итоге

$$\overline{\rho\mathscr{B}''\frac{d\mathscr{A}''}{dt}}=-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{B})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{A}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\overline{\mathscr{B}''\left\{\sigma_{(\mathscr{A})}-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\right)\right\}}. \tag{4.2.2}$$

Поменяв теперь местами параметры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в этом соотношении, будем иметь

$$\overline{\rho\mathscr{A}''\frac{d\mathscr{B}''}{dt}}=-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{B}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\overline{\mathscr{A}''\left\{\sigma_{(\mathscr{B})}-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{B})}\right)\right\}}. \tag{4.2.3}$$

Наконец, складывая (4.2.2) и (4.2.3), получим, при учете тождества (3.1.12), уравнение баланса в субстанциональной форме для одноточечного второго момента $\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle$

$$\overline{\rho\frac{d(\mathscr{A}''\mathscr{B}'')}{dt}}\equiv\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle+\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\overline{\rho\mathscr{A}''\mathscr{B}''\boldsymbol{u}''}\right)=-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{B}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)-$$

$$-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{B})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{A}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\overline{\mathscr{A}''\left\{\sigma_{(\mathscr{B})}-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{B})}\right)\right\}}+\overline{\mathscr{B}''\left\{\sigma_{(\mathscr{A})}-\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\right)\right\}}, \tag{4.2.4}$$

которое, при использовании обозначений

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\equiv\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}+\overline{\mathscr{A}''(\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{B})}}+\overline{\mathscr{B}''(\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}}, \tag{4.2.5}$$

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\equiv\overline{\rho(\mathscr{A}''\mathscr{B}'')\boldsymbol{u}''}, \tag{4.2.6}$$

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\equiv-\overline{\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})\mathscr{B}''}-\overline{\boldsymbol{J}_{(\mathscr{B})}\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})\mathscr{A}''}, \tag{4.2.7}$$

принимает следующий окончательный вид

$$\bar{\rho}\frac{\partial\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle}{\partial t}+\underbrace{\left(\bar{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)}_{\text{Конвекция}}=\underbrace{-\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\right)}_{\text{Диффузия}}\underbrace{-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{B}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{B})}\cdot\frac{\partial\langle\mathscr{A}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)}_{\text{Воспроизводство}}+$$

$$+\underbrace{\overline{\mathscr{A}''\sigma_{(\mathscr{B})}}+\overline{\mathscr{B}''\sigma_{(\mathscr{A})}}}_{\text{Перераспределение}}\underbrace{-\bar{\rho}\langle\varepsilon_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\rangle}_{\text{Диссипация}}. \tag{4.2.8}$$

Здесь $\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}$, $\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}$ — соответственно турбулентный поток, и полный турбулентный поток смешанной корреляции $\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle$; $\bar{\rho}\langle\varepsilon_{(\mathscr{A}\mathscr{B})}\rangle$ — скорость диссипации корреляции$\langle\mathscr{A}''\mathscr{B}''\rangle$ под действием молекулярных процессов переноса.

В частном случае совпадающих пульсирующих характеристик потока, когда $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \mathcal{B}(\boldsymbol{r}, t)$, уравнение (4.2.7) превращается в уравнение переноса среднеквадратичной пульсации («дисперсии») $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$ термогидродинамического параметра $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$ (*Колесниченко, 1981*):

$$\overline{\rho}\frac{\partial \langle \mathcal{A}''^2/2\rangle}{\partial t} + \left(\overline{\rho}\langle \boldsymbol{u}\rangle \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{A}''^2/2\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\overline{\rho \mathcal{A}''^2 \boldsymbol{u}''/2} + \overline{\mathcal{A}'' \boldsymbol{J}_{(\mathcal{A})}}) - \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathcal{A})} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{A}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} + \overline{\mathcal{A}''\sigma_{(\mathcal{A})}} - \overline{\rho}\langle \varepsilon_{\mathcal{A}}\rangle, \qquad (4.2.9)$$

где

$$\overline{\rho}\langle \varepsilon_{\mathcal{A}}\rangle \equiv \overline{\rho}\langle \varepsilon_{(\mathcal{A}\mathcal{A})}\rangle/2 = -\overline{\boldsymbol{J}_{(\mathcal{A})} \cdot (\partial/\partial \boldsymbol{r})\mathcal{A}''} \qquad (4.2.10)$$

— скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$.

Таким образом, общее балансовое уравнение для смешанных парных корреляций (4.2.8), также как и уравнение для дисперсий (4.2.9), содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение соответствующей статистической характеристики следующих динамических процессов: конвективного переноса, диффузии, образования за счет обмена энергии между осредненным и пульсационным движением, перераспределения турбулентной энергии между пульсационными движениями в различных направлениях и диссипации пульсирующей характеристики потока вследствие молекулярных процессов переноса. Рассмотрим теперь последовательно случаи различных величин $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

4.2.2. Уравнения переноса тензора турбулентных напряжений для многокомпонентной среды с переменной плотностью

Уравнение переноса для тензора Рейнольдса $R_{ki} \equiv -\overline{\rho}\langle u_k'' u_i''\rangle$ получается из (4.2.8), если принять $\mathcal{A} \equiv u_k(\boldsymbol{r}, t)$, $\mathcal{B} \equiv u_i(\boldsymbol{r}, t)$ и использовать выражения (2.1.11) для соответствующих потоков и объемных источников скоростей u_k и u_i:

$$\begin{aligned} J_{(u_i)j} &\equiv -\pi_{ij}, \quad \sigma_{(u_i)} \equiv -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\rho\varepsilon_{kji}u_k\Omega_j + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha i}, && (^1)\\ J_{(u_k)j} &\equiv -\pi_{kj}, \quad \sigma_{(u_k)} \equiv -\frac{\partial p}{\partial x_k} + 2\rho\varepsilon_{jlk}u_j\Omega_l + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha F_{\alpha k}, && (^2)\end{aligned} \qquad (4.2.11)$$

где ε_{ilk} — альтернирующий тензор Леви-Чивита:

$$\varepsilon_{ilk} = \begin{cases} 1, & i, l, k = 1, 2, 3; \quad 3, 1, 2; \quad 2, 3, 1; \\ 0, & i = l \qquad i = k \qquad l = k; \\ -1, & i, l, k = 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1; \quad 1, 3, 2; \end{cases}$$

Ω_j — составляющие вектора угловой скорости вращения системы координат (относительно абсолютной системы координат), в которой записано уравнение движения смеси (2.1.9). В результате получим точное (без отбрасывания каких-либо членов) уравнение переноса

$$-\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{R_{ki}}{\bar{\rho}}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(u_k u_i)}\right)=$$

$$=-\bar{\rho}\left(\langle u_k'' \boldsymbol{u}''\rangle\cdot\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)-\bar{\rho}\left(\langle u_i'' \boldsymbol{u}''\rangle\cdot\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\overline{u_k''\sigma_{(u_i)}+u_i''\sigma_{(u_k)}}-\bar{\rho}\langle\varepsilon_{(u_k u_i)}\rangle. \quad (4.2.12)$$

Здесь

$$\overline{u_k''\sigma_{(u_i)}}\equiv-\overline{u_k''(\partial p/\partial x_i)}-2\varepsilon_{lji}R_{kl}\Omega_j+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha k^{\text{turb}}F_{\alpha i}}, \quad (^1)$$

$$\overline{u_i''\sigma_{(u_k)}}\equiv-\overline{u_i''(\partial p/\partial x_k)}-2\varepsilon_{ljk}R_{il}\Omega_j+\sum_{\alpha=1}^{N}J_{\alpha i}^{\text{turb}}F_{\alpha k}; \quad (^2) \qquad (4.2.13)$$

$$(\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(u_k u_i)})_j\equiv\overline{\rho(u_k''u_i'')u_j''}-\overline{\pi_{ij}u_k''}-\overline{\pi_{kj}u_i''} \qquad (4.2.14)$$

— диффузионный поток (тензор 3-го ранга) тензора турбулентных напряжений;

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_{(u_k u_i)}\rangle\equiv\overline{\pi_{ij}(\partial/\partial x_j)u_k''}+\overline{\pi_{kj}(\partial/\partial x_j)u_i''} \qquad (4.2.15)$$

— скорость (тензор второго ранга) диссипации тензора R_{ki} вследствие молекулярной вязкости;

Используем теперь для слагаемых с давлением в выражении (4.2.13) тот же прием, что и при выводе формулы (3.1.48); тогда для любого пульсирующего в потоке признака $\mathscr{A}$ справедливо преобразование

$$\overline{\mathscr{A}''\frac{\partial p}{\partial x_i}}=\overline{\mathscr{A}''}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}+\overline{\mathscr{A}''\frac{\partial p'}{\partial x_i}}=\overline{\rho(1/\rho)''\mathscr{A}''}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\overline{p'\frac{\partial\mathscr{A}''}{\partial x_i}}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}\overline{p'\mathscr{A}''}), \quad (4.2.16)$$

откуда, в случае $\mathscr{A}\equiv u_k(\boldsymbol{r},t)$ и $\mathscr{A}\equiv u_i(\boldsymbol{r},t)$ будем соответственно иметь

$$\overline{u_k''\frac{\partial p}{\partial x_i}}=J^{\text{turb}}_{(1/\rho)k}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\overline{p'\frac{\partial u_k''}{\partial x_i}}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}\overline{p'u_k''}), \quad (^1)$$

$$\overline{u_i''\frac{\partial p}{\partial x_k}}=J^{\text{turb}}_{(1/\rho)i}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k}-\overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{kj}\overline{p'u_i''}) \quad (^2) \qquad (4.2.17)$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера).

Подставляя теперь соотношения (4.2.13)—(4.2.17) в уравнение переноса тензора турбулентных напряжений (4.2.12), перепишем его в компактном окончательном виде

$$-\frac{\partial R_{ki}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}(R_{ki}\langle u_j\rangle)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{ki})_j=P^*_{ki}+\Phi_{ki}+\bar{\rho}G_{ki}-\bar{\rho}\varepsilon_{ki}, \qquad (4.2.18)$$

где

$$(\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{ki})_j\equiv(\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(u_k u_i)})_j+\overline{p'(\delta_{ij}u_k''+\delta_{kj}u_i'')}=$$

$$=\overline{\rho(u_k''u_i'')u_j''}+\overline{(\delta_{ij}p'-\pi_{ij})u_k''}+\overline{(\delta_{kj}p'-\pi_{kj})u_i''}, \qquad (4.2.19)$$

$$P^*_{ki}\equiv R_{kj}\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-2\varepsilon_{jli}\Omega_l\right)+R_{ij}\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}-2\varepsilon_{jlk}\Omega_l\right), \qquad (4.2.20)$$

$$\Phi_{ki} \equiv \overline{p'(\partial u_k''/\partial x_i + \partial u_i''/\partial x_k)}, \tag{4.2.21}$$

$$\bar{\rho}\varepsilon_{ki} \equiv \bar{\rho}\langle\varepsilon_{(u_k u_i)}\rangle \equiv \overline{\pi_{ij}(\partial/\partial x_j)u_k''} + \overline{\pi_{kj}(\partial/\partial x_j)u_i''}, \tag{4.2.15*}$$

$$\bar{\rho}G_{ki} \equiv -J^{\text{turb}}_{(1/\rho)k}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} - J^{\text{turb}}_{(1/\rho)i}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=1}^{N}(J^{\text{turb}}_{\alpha k}F_{\alpha i} + J^{\text{turb}}_{\alpha i}F_{\alpha k}). \tag{4.2.22}$$

Поясним смысл отдельных слагаемых уравнения (4.2.18):

- J^{Σ}_{ki} — полный «диффузионный поток» тензора рейнольдсовых напряжений R_{ki}, включающий различные механизмы переноса турбулентности в пространстве, а именно, тензор турбулентной диффузии (слагаемое $\overline{\rho(u_k''u_i'')u_j''}$), тензорный перенос под влиянием молекулярной вязкости, когда пульсирующей гидродинамической скоростью вовлекаются в движение соседние, до этого не пульсировавшие, слои газа (слагаемые $-\overline{\pi_{ij}u_k''} - \overline{\pi_{kj}u_i''}$); тензорный перенос, вызванный взаимодействием полей пульсационных скоростей и пульсационных давлений (слагаемые $\overline{\delta_{ij}p'u_k''} + \overline{(\delta_{kj}p'u_i'')}$);
- P^*_{ki} — тензорная величина, связанная с процессами генерации тензора напряжений R_{ki} из-за взаимодействия турбулентных пульсаций скорости с неоднородным полем осредненных скоростей (обусловленным ветровым сдвигом или вращением среды с общей угловой скоростью Ω_j);
- Φ_{ki} — тензор корреляций турбулентных пульсаций скорости и давления, описывающий перераспределение турбулентной энергии между различными составляющими тензора Рейнольдса R_{ki};
- $\bar{\rho}G_{ki}$ — тензор, связанный с возникновением (или исчезновением) турбулентности при движении среды в поле неравномерного гидродинамического давления, либо под воздействием массовых сил;
- $\bar{\rho}\varepsilon_{ki}$ — тензорная величина, связанная со скоростью диссипации тензора турбулентных напряжений R_{ki} вследствие молекулярной вязкости.

Отличие выведенного нами уравнения переноса тензора R_{ki} (4.2.18) для многокомпонентной смеси от хорошо известного аналогичного уравнения для течения с постоянной плотностью (см. *Монин*, *Яглом*, *1992*) касается в основном структуры тензорной величины G_{ki}. С учетом формулы (3.2.67) для потока $J^{\text{turb}}_{(1/\rho)}$ выражение (4.2.22) принимает вид

$$\bar{\rho}G_{ki} = \left(\overline{p'u_k''}\frac{\partial\ln\bar{p}}{\partial x_i} + \overline{p'u_i''}\frac{\partial\ln\bar{p}}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\left(J^{\text{turb}}_{qk}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + J^{\text{turb}}_{qi}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k}\right) - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\left(\frac{1}{\bar{n}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} - F_{\alpha i}\right)J^{\text{turb}}_{\alpha k} + \left(\frac{1}{\bar{n}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k} - F_{\alpha k}\right)J^{\text{turb}}_{\alpha i}\right\}. \tag{4.2.23}$$

Следует иметь в виду, что во многих практически важных случаях, например, для течений с малыми числами Маха, можно пренебречь относительными пульсациями давления по сравнению с пульсациями плотности и температуры; тогда первое слагаемое в (4.2.23) может быть опущено [см. замечание к формуле (3.2.67)]. В этом случае выражение для G_{ki}, записанное для стратифицированного в поле силы тяжести течения, принимает более простой вид

$$\bar{\rho}G_{ki} \cong \frac{g}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}(\delta_{k3}J^T_{qi} + \delta_{i3}J^T_{qk}) + \frac{\bar{\rho}}{\bar{n}}g\sum_{\alpha=1}^{N}(\delta_{i3}J^{\text{turb}}_{\alpha k} + \delta_{k3}J^{\text{turb}}_{\alpha i}). \tag{4.2.24}$$

Формула (4.2.24) представляет собой модифицированный на случай сжимаемой многокомпонентной среды подобный член уравнения переноса тензора R_{ki}, полученный ранее для течений однокомпонентной жидкости (см. сб. «*Турбулентность: Принципы и применения*», *1980*).

Уравнения для тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, записанные в виде (4.2.18) (шесть уравнений для составляющих симметрического тензора R_{ki}), не могут быть непосредственно использованы для замыкания осредненных гидродинамических уравнений смеси, поскольку содержат большое число новых неопределенных величин, представляющих собой статистические корреляции с пульсациями давления, диссипативные члены и моменты третьего порядка. Аппроксимацию этих неопределенных величин для турбулизованной среды с переменной плотностью мы проведем по аналогии с более или менее удовлетворительными и хорошо апробированными гипотезами замыкания, используемыми в «классической» теории турбулентности с постоянной плотностью (см. сб. «*Турбулентные сдвиговые течения*-I», 1982). Заметим по этому поводу, что в настоящее время не выявлено достаточных оснований в проведении существенной модификации подобного рода аппроксимаций для течений смеси с переменной плотностью.

Ограничим далее наше рассмотрение упрощенными схемами замыкания второго порядка, которые используют минимальное количество произвольных эмпирических констант. Более сложные параметрические соотношения для моделируемых корреляционных моментов для случая однокомпонентной жидкости приведены, например, в сборнике (*Турбулентность: Принципы и применения, 1980*), к которой мы и отсылаем заинтересованного читателя.

Итак, будем, по предположению, считать, что аппроксимационные соотношения, используемые в полуэмпирических теориях турбулентности однокомпонентных несжимаемых жидкостей, справедливы и в рассматриваемом здесь случае многокомпонентной сжимаемой среды, когда систематически использовано средневзвешенное осреднение Фавра; тогда справедлива, в частности, следующая упрощенная схема замыкания:

$$\bar{\rho}\varepsilon_{ki} = \frac{2}{3}K_{b1}\delta_{ki}\frac{\bar{\rho}\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}}{L} - K_{b2}\frac{\nu R_{ki}}{L^2}, \tag{4.2.25}$$

$$\Phi_{ki} = K_{p1}\frac{\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}}{L}\left(R_{ki} + \frac{2}{3}\delta_{ki}\bar{\rho}\langle b\rangle\right) - K_{p2}\left(P_{ki} - \frac{2}{3}\delta_{ki}P\right), \tag{4.2.26}$$

$$(J^{\Sigma}_{ki})_j = (c_1 L\langle b\rangle^{\frac{1}{2}} + c_2\nu)\frac{\partial R_{ki}}{\partial x_j}, \tag{4.2.27}$$

где K_e, K_p, c — свободные константы, определяемые на основе экспериментальных данных, причем эмпирические коэффициенты K_{b2} и c_2 существенны только при небольших турбулентных числах Рейнольдса $\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}} \equiv L\langle b\rangle^{1/2}/\nu$, т. е. когда $K_{b1}\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}}/K_{b2} \leqslant 0(1)$ и $c_1\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}}/c_2 \leqslant 0(1)$; ν — молекулярный кинематический коэффициент вязкости смеси; $L(\boldsymbol{r}, t)$ — внешний масштаб турбулентного поля скоростей в точке, который взаимосвязан с интегральным масштабом турбулентности L (или с длиной смешения Λ), обсуждавшимся в предыдущей главе, хотя и не совпадает с ними. В формуле (4.2.26) использованы следующие обозначения: $P_{ki} = P^*_{ki} + \overline{\rho} G_{ki}$ — суммарная скорость возникновения (исчезновения) турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ki};

$$P = \frac{1}{2}\delta_{kj}P_{kj} = R_{kj}\partial\langle u_k\rangle/\partial x_j + \overline{\rho}G \tag{4.2.28}$$

— полная скорость генерации турбулентной энергии $\langle b\rangle$ под воздействием среднего сдвига (первое слагаемое) и эффектов плавучести и взаимных превращений турбулентной и потенциальной энергий в стратифицированной многокомпонентной смеси (второе слагаемое). Выражение для величины $\overline{\rho}G$, в силу (4.2.23), может быть преобразовано к виду

$$\overline{\rho}G \equiv \frac{1}{2}\overline{\rho}\delta_{kj}G_{kj} = -\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{F}_{\alpha} =$$

$$= \frac{\overline{p'\boldsymbol{u}''}}{\overline{p}} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{q}}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\overline{n}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}_{\alpha}\right). \tag{4.2.29}$$

Очевидно, что замыкающие соотношения (4.2.25)—(4.2.27) обеспечивают выполнение минимальных требований, которым должны удовлетворять любые схемы замыкания второго порядка. Выражение (4.2.25) для тензорной величины $\overline{\rho}\varepsilon_{ki}$ описывает влияние вязкой диссипации на структуру тензора Рейнольдса. Основной причиной диссипации турбулентной энергии является наличие мелкомасштабных вихрей. Для течений с большим числом Рейнольдса Re^T эта мелкомасштабная турбулентность является изотропной. Комбинация членов в выражении (4.2.25) при больших числах Рейнольдса обеспечивает изотропию процесса вязкой диссипации (первый член), а при малых числах Рейнольдса учитывает возможность анизотропии процессов диссипации для каждой составляющей тензора R_{kj} (второй член). Так как масштаб крупных вихрей $L(\boldsymbol{r}, t)$ не влияет на процесс диссипации, скорость их разрушения в (4.2.25) не зависит от величины молекулярной вязкости ν.

Первое слагаемое в аппроксимационном соотношении (4.2.26) для корреляций пульсаций давления и скорости описывает перераспределение турбулентной энергии от основного (осредненного) потока между отдельными составляющими пульсационных скоростей и стремление к изотропии пульсирующего течения, что отвечает известной модели Ротта (*1951*). Сумма в скобках $\left(R_{ki} + \frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle\delta_{ki}\right)$ (точнее разность, так как $\overline{\rho}\langle b\rangle = -\frac{1}{2}R_{kj}\delta_{kj}$) характеризует степень анизотропии потока и обладает необходимым свойством тензорной симметрии. Второе слагаемое в (4.2.26), соответствующее соотношению Лаундера (*Лаундер*, *1975*; *Лаундер*, *Морс*, *1982*), уравновешивает в уравнении переноса (4.2.18) генерацию тензора R_{kj} и описывает влияние механизмов образования турбулентной энергии на возникновение турбулентных пульсаций скорости и давления. Заметим, что пропорциональность тензоров Φ_{ki} и $\left(P_{ik} - \frac{2}{3}\delta_{ik}P\right)$ эквивалентна предположению о том, что корреляции пульсаций давления и гидродинамической скорости не только стремятся сделать турбулентность изотропной (со скоростью, линейно зависимой от отклонения от изотропии), но и перераспределяют генерацию турбулентности со скоростью, пропорциональной анизотропии этой генерации (*Турбулентность: Принципы и применения*, *1980*).

Поток J_{ki}^{Σ}, задаваемый выражением (4.2.27), определяет диффузионный перенос напряжений Рейнольдса R_{kj} из одной области течения в другую, без их генерации или затухания. Этот перенос препятствует образованию больших градиентов в пространственном распределении величины R_{kj} (см. сб. «*Турбулентные сдвиговые течения — I*», *1982*). Отметим, что хотя обе части этого градиентного соотношения и являются тензорами третьего ранга, оно, тем не менее, не согласуется по условиям симметрии с тензором $\overline{\rho(u_k'' u_i'') u_j''}$ и, кроме того, нарушает так называемые ограничения реализуемости, состоящие в необходимости удовлетворения неравенству Шварца для момента третьего порядка (см. *Монин*, *Яглом*, *1992*). Несмотря на это, мы ограничимся этой простейшей аппроксимацией диффузионного члена, поскольку далее нами будет использоваться только локально-равновесный вариант этой модели турбулентности.

Успех применения уравнений переноса вторых корреляционных моментов во многом зависит от того, насколько удачно выбраны значения эмпирических констант. Обычный путь их экспериментального определения лежит в изучении специальных турбулентных течений, зависящих только от одного (искомого) коэффициента. В идеальном случае для каждой замкнутой модели турбулентности, после того как выбран способ аппроксимации неизвестных членов в уравнениях переноса, все вводимые свободные константы должны быть постоянными. В соотношениях (4.2.25)—(4.2.27) можно принять следующие численные значения этих констант

$$K_{b1} = 0{,}125; \quad K_{b2} = 6; \quad K_{p1} = 0{,}275; \quad K_{p2} = 0{,}55; \quad c_1 = 0{,}3 \pm 0{,}05, \qquad (4.2.30)$$

приведенные, например, в сборнике «*Турбулентность: Принципы и применения*», (*1980*).

Вместе с тем, как справедливо было отмечено В. М. Иевлевым (*1975*), предположение о постоянстве свободных коэффициентов возможно только при существовании некоторого «равновесного» для рассматриваемых условий течения спектра турбулентности. Для другого режима течения их значения могут сильно изменяться. С учетом этого обстоятельства некоторые авторы считают, что эмпирические коэффициенты являются на самом деле некоторыми однозначными функциями от характерных безразмерных параметров течения (например, чисел Рейнольдса, Ричардсона и т. п.) и возможно каких-либо других безразмерных характеристик турбулентности. Однако в этом случае эффективный метод инвариантного моделирования полностью теряет свое преимущество относительно схем замыкания первого порядка.

Уравнение переноса турбулентной энергии

Свертка уравнения (4.2.12) по индексам k и i $\left(-\frac{1}{2} R_{ki}\delta_{ki} = \overline{\rho}\langle b\rangle\right)$ приводит к точному уравнению для осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций сжимаемой смеси [ср. с (3.3.21)]

$$\overline{\rho}\frac{\partial\langle b\rangle}{\partial t}+\overline{\rho}\left(\langle \boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\langle b\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)=-\operatorname{div}\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{\langle b\rangle}+\left(\boldsymbol{R}:\frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)+\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}+\overline{\rho}G-\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle. \quad (4.2.31)$$

Это уравнение, в отличие от уравнения для тензора Рейнольдса, содержит только два неизвестных корреляционных члена. Первый, диффузионный член

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{\langle b\rangle}\equiv\overline{\rho(b+p'/\rho)\boldsymbol{u}''}-\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''}=\overline{\rho b\boldsymbol{u}''}+\overline{(p'\boldsymbol{U}-\boldsymbol{\Pi}')\cdot\boldsymbol{u}''}-\overline{\boldsymbol{\Pi}}\cdot\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)} \quad (4.2.32)$$

описывает полный субстанциональный поток энергии турбулентности, связанный с различными механизмами переноса в координатном пространстве. В частности, величина $\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(b)}\equiv\overline{\rho b\boldsymbol{u}''}$ часто интерпретируется, как поток кинетической энергии пульсационного (вихревого) движения, так что дивергенция $\operatorname{div}\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(b)}$ описывает среднюю скорость уменьшения вихревой кинетической энергии в единице объема за счет «турбулентной диффузии». В свою очередь, величина $-\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{\Pi}'\boldsymbol{u}''})$ характеризует среднюю скорость увеличения вихревой кинетической энергии за счет работы, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений на границе элементарного объема.

Второй, корреляционный член

$$\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\equiv\overline{\boldsymbol{\Pi}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}''}=\overline{\rho}\varepsilon_b+\overline{\boldsymbol{\Pi}}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}, \quad (4.2.33)$$

где

$$\overline{\rho}\varepsilon_b\equiv\overline{\boldsymbol{\Pi}':(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{u}'}>0, \quad (4.2.34)$$

описывает диссипацию турбулентной кинетической энергии в тепло под действием молекулярной вязкости. Он имеет смысл среднего значения работы, отнесенной к единице времени и единице объема, совершаемой пульсациями тензора вязких напряжений над турбулентными вихрями со сдвигом скорости. Для самоподдерживающегося турбулентного поля скорость диссипации ε_b имеет тот же порядок величины, что и скорость генерации турбулентности сдвиговым потоком $\boldsymbol{R}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\langle\boldsymbol{u}\rangle$.

Предпоследний член в правой части уравнения (4.2.31) — величина $\overline{\rho}G$, определяемая формулой (4.2.29), описывает генерацию турбулентной энергии в поле силы тяжести, обусловленную неоднородностью температуры и/или состава стратифицированной смеси, и взаимные превращения турбулентной и потенциальной энергий среды под действием массовых сил негравитационного происхождения. Член с пульсацией давления в (4.2.29) часто может быть опущен.

В случае развитой турбулентности, когда $\mathrm{Re}\equiv LV/\nu\gg 1$, справедливо неравенство $\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}\geqslant LV/L_{\mathrm{hydro}}$ (см. сб. «*Турбулентность: Принципы и применения*», 1980). Здесь число Рейнольдса определяется по интегральному масштабу турбулентности L, соответствующему характерным размерам крупных вихрей, и характерной скорости течения V; $L_{\mathrm{hydro}}=|\partial\ln\theta/\partial\boldsymbol{r}|^{-1}$ — расстояние, на котором происходят существенные изменения каких-либо осредненных термогидродинамических параметров θ. Легко показать, что при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}\gg 1$) последние слагаемые в соотношениях (4.2.32) и (4.2.33) можно опустить. Действительно, оценивая порядок величины отдельных членов в (4.2.33), будем иметь:

$$\varepsilon_b \propto \langle b\rangle^{\frac{3}{2}}/L, \qquad \overline{\Pi} \propto \overline{\rho}\nu V/L_{\text{hydro}}, \qquad (\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \propto \langle b\rangle^{\frac{1}{2}}/L_{\text{hydro}},$$

поэтому справедливы оценки

$$\frac{\overline{\Pi}:(\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}}{\overline{\rho}\varepsilon_b} \propto \frac{\overline{\rho}\nu V}{L_{\text{hydro}}}\cdot\frac{\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}}{L_{\text{hydro}}}\cdot\frac{L}{\overline{\rho}\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}} = \frac{\nu V L}{\langle b\rangle L^2_{\text{hydro}}} = \frac{\nu}{LV}\cdot\frac{V^2L^2}{\langle b\rangle L^2_{\text{hydro}}} \leqslant \frac{1}{\text{Re}},$$

$$\frac{|\overline{\Pi}\cdot\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}|}{|\overline{\Pi'\cdot\boldsymbol{u}''}|} \propto \frac{\overline{\rho}\nu V}{L_{\text{hydro}}}\cdot\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{L}{\overline{\rho}\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}L_{\text{hydro}}} = \frac{\nu V L}{\langle b\rangle L^2_{\text{hydro}}} \leqslant \frac{1}{\text{Re}}.$$

Таким образом, в предельно развитом турбулентном потоке многокомпонентной смеси уравнение переноса для турбулентной энергии приобретает вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle b\rangle}{Dt} + \operatorname{div}(\overline{\rho b\boldsymbol{u}''} + \overline{(p'\boldsymbol{U} - \Pi')\boldsymbol{u}''}) = \overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + P - \overline{\rho}\varepsilon_b. \tag{4.2.35}$$

Свертка аппроксимирующих соотношений (4.2.25)—(4.2.27) приводит к следующим моделям для неизвестных корреляционных членов уравнения баланса турбулентной энергии (4.2.28)

$$\overline{\rho}\varepsilon_b = \frac{1}{2} < \varepsilon_{ki} > \delta_{ki} = K_{b1}\frac{\overline{\rho}\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}}{L} + K_{b2}\frac{\overline{\rho}\nu\langle b\rangle}{L^2}, \tag{4.2.36}$$

$$\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} = 0, \tag{4.2.37}$$

$$\boldsymbol{J}_{\langle b\rangle} = -(c_1 L\langle b\rangle^{\frac{1}{2}} + c_2\nu)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}(\overline{\rho}\langle b\rangle). \tag{4.2.38}$$

Эти соотношения вытекают, по существу, из соображений теории размерности и являются обобщением известной гипотезы Колмогорова (*1941*, *1942*), состоящей в том, что скорость диссипации энергии ε_b в данной точке развитого турбулентного потока определяется только локальными значениями средней турбулентной энергии единицы массы $\langle b\rangle$ и масштабом турбулентности $L(\boldsymbol{r}, t)$, а турбулентный перенос импульса и пульсационной энергии осуществляется посредством диффузионных членов градиентного типа.

Как уже упоминалось в гл. 3, фундаментальное уравнение переноса турбулентной энергии (4.2.35) лежит в основе многих современных полуэмпирических моделей турбулентности, например, используется в конкретных расчетах турбулентных движений по моделям Колмогорова—Лаундера и других. В частности, привлечение его к рассмотрению, наряду с формулой для масштаба турбулентности L, в случае локально-равновесного состояния поля величины R_{ki} (когда левая часть уравнения (4.2.18) равна нулю) позволяет до некоторой степени учесть наличие (в реальном турбулентном потоке) частичного равновесия турбулентного поля скоростей с осредненным течением (см. *Левеллен*, *1980*).

В заключение этого пункта заметим следующее. Уравнения в частных производных (4.2.18) для величин R_{ki} довольно сложны с вычислительной точки зрения, и по этой причине часто непригодны без дополнительных упрощений для численных расчетов. Вместе с тем, они могут оказаться очень полезными, как средство усовершенствования более простых градиентных моделей турбулентности. В частности, в локально-равновесном случае, когда конвективные и диффузионные члены почти уравновешивают друг друга, дифференциальные уравнения (4.2.18) для определения величин R_{ki} превращаются в алгебраические уравнения, сохраняя при этом некоторые фундаментальные свойства исходных уравнений. Решение этих алгебраических уравнений позволяет вывести, в отдельных случаях, более общее реологическое соотношения для тензора турбулентных напряжений R_{ki}, чем соотношение (3.3.13), поскольку оно будет по существу учитывать анизотропию коэффициентов турбулентной вязкости. Получаемые при этом алгебраические формулы для расчета коэффициентов турбулентной вязкости содержат турбулентную энергию $\langle b \rangle$, масштаб турбулентности L [см. п. 4.3], а также ряд эмпирических констант, входящих в уравнение для R_{ki}.

4.2.3. Уравнения переноса турбулентных потоков диффузии и тепла для многокомпонентной среды с переменной плотностью

С целью обобщения метода инвариантного моделирования турбулентности на многокомпонентные реагирующие смеси газов, необходимо дополнительно привлекать к рассмотрению, помимо уравнений переноса (4.2.18) для пространственных компонентов тензора рейнольдсовых напряжений, еще и целый ряд балансовых уравнений для корреляционных моментов второго порядка, таких как $\langle H''\boldsymbol{u}''\rangle$, $\langle Z''_\alpha \boldsymbol{u}''\rangle$, $\langle H''^2\rangle$, $\langle H'' Z''_\alpha\rangle$ и $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$. Хотя используемый ниже подход к выводу этих модельных уравнений является однотипным, тем не менее, его последовательная реализация для указанных корреляций представляется нам совершенно необходимой при конструировании полуэмпирической модели реагирующей турбулентности, поскольку позволяет не только получить вполне обоснованные и относительно точные уравнения переноса, но и одновременно выявить присущие этим уравнениям ограничения, связанные с их замыканием.

Уравнение переноса турбулентного потока тепла

Отождествим в уравнении переноса общего вида (4.2.8) параметр $\mathscr{A}$ с энтальпией смеси H, а параметр $\mathscr{B}$ с гидродинамической скоростью течения $\boldsymbol{u}$ и используем для потоков и скоростей возникновения этих величин выражения (2.1.11) и (2.1.26)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{J}_{(H)} \equiv \boldsymbol{q}, \quad \sigma_{(H)} \equiv \frac{dp}{dt} + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \boldsymbol{F}_\alpha, \quad (^1) \\ &\boldsymbol{J}_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\boldsymbol{\Pi}, \quad \sigma_{(\boldsymbol{u})} \equiv -\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + 2\rho\boldsymbol{u}\times\Omega + \rho\sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha. \quad (^2) \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

В результате получим следующее точное уравнение переноса турбулентного потока тепла $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho H'' \boldsymbol{u}''} = \overline{\rho}\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$:

$$\overline{\rho}\frac{D(\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}/\overline{\rho})}{Dt} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(H\boldsymbol{u})}\right) = -\left(\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} \cdot \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - 2\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} \times \boldsymbol{\Omega} +$$

$$+ \boldsymbol{R} \cdot \left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\boldsymbol{G}_H + \overline{p' \frac{\partial H''}{\partial \boldsymbol{r}}} + \overline{\boldsymbol{u}''\left(\frac{dp'}{dt} + \boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} - \overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_H, \qquad (4.2.40)$$

описывающее пространственно-временное распределение корреляции $\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$ для турбулентного сдвигового течения. Здесь

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(H\boldsymbol{u})} \equiv \overline{(\rho \boldsymbol{u}'' \boldsymbol{u}'' + p' \boldsymbol{U} - \boldsymbol{\Pi}) H''} + \overline{\boldsymbol{q} \boldsymbol{u}''} \qquad (4.2.41)$$

— диффузионный поток (тензор 2-го ранга) корреляции $\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$;

$$\overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_H \equiv \overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_{(H\boldsymbol{u})} \equiv \overline{\boldsymbol{\Pi} \cdot \frac{\partial H''}{\partial \boldsymbol{r}}} - \overline{\boldsymbol{q} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}} \qquad (4.2.42)$$

— скорость (векторная величина) разрушения корреляции $\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$ под воздействием молекулярных процессов вязкости и температуропроводности;

$$\overline{\rho}\boldsymbol{G}_H \equiv -\overline{H''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} = -\left(\frac{\langle H''^2 \rangle}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle} - \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \frac{\overline{n}_\beta (c_{p\alpha} - c_{p\beta})}{\overline{n}\langle c_p \rangle}\langle Z''_\alpha H'' \rangle\right)\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \qquad (4.2.43)$$

— скорость (векторная величина) образования (исчезновения) турбулентного потока тепла $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}$ под воздействием осредненного градиента давления (корреляция $\overline{H''}$ в этой формуле определяется соотношением (3.2.68)). Используемые в уравнении (4.2.40) тензорные обозначения приведены в приложении. Термин «точное уравнение» употребляется нами в том смысле, что при выводе (4.2.40) не производилось никаких приблизительных преобразований.

По аналогии с уравнением переноса тензора напряжений (4.2.12) можно сказать, что в левой части уравнения переноса (4.2.40) стоят конвективный и «диффузионный» члены, а в правой части — величины, описывающие генерацию турбулентного потока $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}$ под воздействием сил плавучести, градиентов осредненных гидродинамической скорости, энтальпии и давления смеси, величины, связанные с перераспределение $\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$ смешанным моментом пульсаций давления и градиента энтальпии смеси (этот член противодействует генерации $\langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle$, ограничивая ее рост), а также величина, характеризующая диссипацию потока $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}$. В монографии (*Иевлев*, *1975*) была проведена оценка предпоследнего слагаемого в уравнении (4.2.40) для развитой турбулентности, из которой следует, что оно мало по сравнению с диссипативным членом $\overline{\rho}\langle \boldsymbol{\epsilon}_H \rangle$ во всех тех случаях, когда существенен турбулентный перенос тепла; поэтому далее мы будем опускать эту величину.

В уравнение переноса (4.2.40) входит целый ряд неопределенных корреляционных моментов, порождающих проблему замыкания. С учетом оговоренных нами выше соображений, моделирование этих дополнительных корреляций проведем с использованием следующих простых аппроксимаций

(*Колесниченко, Маров, 1984*):

$$\boldsymbol{J}^{\Sigma}_{(H\boldsymbol{u})} = -(c_3 L\langle b\rangle^{\frac{1}{2}} + c_4(\nu+\chi))\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{q}^{\text{turb}}, \tag{4.2.44}$$

$$\overline{p'\partial H''/\partial \boldsymbol{r}} = -K_{s1}\frac{\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}}{L}\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - K_{s2}\boldsymbol{P}_H, \tag{4.2.45}$$

$$\overline{\rho}\varepsilon_H = K_{b2}\frac{\nu+\chi}{2L^2}\boldsymbol{q}^{\text{turb}}, \tag{4.2.46}$$

в которых K_{s1}, K_{s2}, c_3 и c_4 — универсальные эмпирические константы. По поводу этих соотношений можно сказать следующее: Для локально изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса корреляционные моменты $\overline{\boldsymbol{\Pi}\cdot(\partial H''/\partial \boldsymbol{r})}$ и $\overline{\boldsymbol{q}\cdot(\partial \boldsymbol{u}''/\partial \boldsymbol{r}}$, а тем самым и член с вязкой диссипацией $\langle \boldsymbol{\epsilon}_H\rangle$, равны нулю. Диссипативная корреляция $\langle \varepsilon_H\rangle$ будет также пренебрежимо мала в неизотропной турбулентности при условии, что турбулентное число Рейнольдса велико. Следовательно, для практических приложений необходимы модельные аппроксимации величины $\langle \varepsilon_H\rangle$ только при малых числах $\mathrm{Re}^{\text{turb}}$, например, в приповерхностном слое. Корреляции давления с градиентом энтальпии $\overline{p'(\partial H''/\partial \boldsymbol{r})}$ является эквивалентом корреляции давления с деформацией (4.2.21) в уравнении для тензора Рейнольдса. Когда прямая диссипация пренебрежимо мала, этот член обеспечивает механизм, который ограничивает рост потоков. Наиболее часто используемой аппроксимацией для корреляции давления с градиентом энтальпии $\overline{p'(\partial H''/\partial \boldsymbol{r})}$ служит выражение, предложенное Мониным (*1965*) — первый член в (4.2.45). Это выражение представляет собой прямой аналог приближения «тенденции к изотропности», введенного Роттой (*1951*) для корреляционных величин Φ_{ki}, связанных с пульсациями скорости и давления [см. формулу (4.2.26)]. Второй аппроксимирующий член, связанный с величиной

$$\boldsymbol{P}_H \equiv -\left(\boldsymbol{q}^{\text{turb}}\cdot\frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - 2\boldsymbol{q}^{\text{turb}}\times\boldsymbol{\Omega} + \overline{\rho}\boldsymbol{G}_H \tag{4.2.45*}$$

определяет скорость генерации турбулентного теплового потока $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}$ под влиянием средней деформации, а также благодаря действию осредненного градиента давления (см. *Лаундер, Сполдинг, 1972*). И, хотя корреляция $\overline{p'(\partial H''/\partial \boldsymbol{r})}$ в этом случае частично компенсирует член с прямой генерацией величины $\langle H''\boldsymbol{u}''\rangle$ силами плавучести, все же силы плавучести приводят к росту вертикального потока турбулентного тепла при нестабильной стратификации среды и к его уменьшению — при стабильной. Диффузионный член в (4.2.40), являющийся скоростью пространственного переноса корреляции $\langle H''\boldsymbol{u}''\rangle$ под действием пульсаций гидродинамической скорости и давления, моделируются, так же как и в случае уравнения для тензора Рейнольдса $\boldsymbol{R}$, с использованием гипотезы градиентного типа со скалярным коэффициентом диффузии.

Для свободных констант в соотношениях (4.2.44)—(4.2.46) на основе имеющихся в литературе сведений по моделированию плоских слоев смешения можно принять следующие значения:

$$K_{b2} = 6; \quad K_{s1} = 0{,}4; \quad K_{s2} \approx 0{,}5; \quad c_3 = 0{,}8. \tag{4.2.47}$$

Для других типов течений эти константы подлежат дальнейшему уточнению.

Уравнения переноса турбулентных потоков диффузии

Предположим, что в уравнении переноса общего вида (4.2.8) параметр $\mathcal{A} \equiv n_\alpha/\rho$, а параметр $\mathcal{B} \equiv \boldsymbol{u}$. Тогда, используя для соответствующих потоков и скоростей возникновения этих величин выражения (2.1.7) и (2.1.11), получим уравнения переноса турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho}\langle Z_\alpha'' \boldsymbol{u}'' \rangle$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) в виде:

$$\overline{\rho}\frac{D(\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}/\overline{\rho})}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{(Z_\alpha \boldsymbol{u})} = \boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial \langle Z_\alpha \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \left(\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) - 2\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \times \boldsymbol{\Omega} +$$
$$+ \overline{p'\frac{\partial Z_\alpha''}{\partial \boldsymbol{r}}} + \overline{\rho}\boldsymbol{G}_\alpha + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s \boldsymbol{u}''} - \overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, N). \quad (4.2.48)$$

Здесь

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{(Z_\alpha \boldsymbol{u})} \equiv \overline{(\rho \boldsymbol{u}'' \boldsymbol{u}'' + p' \boldsymbol{U} - \boldsymbol{\Pi}) Z_\alpha''} + \overline{\boldsymbol{J}_\alpha \boldsymbol{u}''} \quad (4.2.49)$$

— диффузионный поток (тензор 2-го ранга) корреляции $\langle Z_\alpha'' \boldsymbol{u}'' \rangle$;

$$\overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha \equiv \overline{\rho}\langle \epsilon_{Z_\alpha \boldsymbol{u}} \rangle \equiv \overline{\boldsymbol{\Pi} \cdot \frac{\partial Z_\alpha''}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{J}_\alpha \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}} \quad (4.2.50)$$

— скорость (векторная величина) разрушения корреляции $\langle Z_\alpha'' \boldsymbol{u}'' \rangle$ вследствие молекулярных процессов вязкости и диффузии;

$$\rho \boldsymbol{G}_\alpha \equiv -\overline{Z_\alpha''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} = -\left(\frac{\langle H'' Z_\alpha'' \rangle}{\langle c_p \rangle \langle T \rangle} - \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\overline{n}_\beta (c_{p\alpha} - c_{p\beta})}{\overline{n} \langle c_p \rangle} \langle Z_\alpha'' Z_\beta'' \rangle \right) \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \quad (4.2.51)$$

— скорость генерации потока турбулентной диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$, обусловленная градиентом осредненного давления (корреляция $\overline{Z_\alpha''}$ в этой формуле определяется соотношением (3.2.69)). Члены уравнения (4.2.48), включающие корреляции с пульсациями гидродинамической скорости и химических источников вещества сорта α, согласно формулам (4.1.46), приобретают вид

$$\overline{\sigma_\alpha \boldsymbol{u}''} = \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s \boldsymbol{u}''} = \overline{\boldsymbol{u}''}\left(\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \xi_s (\langle T \rangle, \overline{n}_\alpha) \right) + \sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s} \overline{\xi_s' \boldsymbol{u}''} =$$
$$= \overline{\rho} L_{0\alpha}^{\text{Ch}} \langle H'' \boldsymbol{u}'' \rangle + \overline{\rho} \sum_{\beta=1}^{N} L_{\alpha\beta}^{\text{Ch}} \langle Z_\alpha'' \boldsymbol{u}'' \rangle. \quad (4.2.52)$$

Для аппроксимации диссипативных и диффузионных членов уравнений переноса потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}$ будем использовать следующие простые выражения, аналогичные соотношениям (4.2.43)—(4.2.45) для турбулентного потока тепла

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{(Z_\alpha \boldsymbol{u})} = -(c_{\alpha 1}^L \langle b \rangle^{\frac{1}{2}} + c_{\alpha 2}(\chi + \nu)) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \quad (4.2.53)$$

$$\overline{p'(\partial Z_\alpha''/\partial \boldsymbol{r})} = -K_{\alpha 1} \frac{\langle b \rangle^{\frac{1}{2}}}{L} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} - K_{\alpha 2} \boldsymbol{P}_\alpha, \quad (4.2.54)$$

$$\overline{\rho}\boldsymbol{\epsilon}_\alpha = K_{b2} \frac{\nu + \chi}{2L^2} \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}. \quad (4.2.55)$$

Здесь коэффициенты $K_{\alpha 1}$, $K_{\alpha 2}$, $c_{\alpha 1}$, $c_{\alpha 2}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$) — эмпирические постоянные, величина

$$\boldsymbol{P}_\alpha \equiv -\left(\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} \cdot \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\mathcal{G}}_\alpha \tag{4.2.56}$$

характеризует скорость генерации турбулентного потока диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}$ вследствие средней деформации среды и эффектов плавучести. Для численных значений универсальных констант модели, ввиду полного отсутствия в литературе необходимых сведений, полученных *ad hoc*, воспользуемся значениями, аналогичными (4.2.47)

$$K_{b2} = 6; \quad K_{\alpha 1} = 0{,}4; \quad K_{\alpha 2} = 0{,}5; \quad c_{\alpha 1} = 0{,}8, \tag{4.2.57}$$

что, по-видимому, возможно для пассивной (нереагирующей) смеси. В случае же химически активной смеси для точного определения этих констант необходимы дополнительные специальные эксперименты, позволяющие моделировать частные случаи реагирующей турбулентности.

Следует иметь ввиду, что N уравнений (4.2.48) для турбулентных потоков диффузии не являются независимыми; легко показать, что их суммирование, с предварительным умножением на m_α, приводит к тождеству. Поэтому, в качестве дополнительного соотношения для определения потоков $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}$ необходимо использовать алгебраический интеграл $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} = 0$.

Выше было показано, что корреляции $\langle H''^2 \rangle$, $\langle Z_\alpha'' H'' \rangle$ и $\langle Z_\alpha'' Z_\beta'' \rangle$ прямо входят в уравнения переноса турбулентных потоков диффузии и тепла, а именно в члены, описывающие порождения этих потоков под действием сил плавучести [см. формулы (4.2.43) и (4.2.51)]. Поэтому далее мы рассмотрим уравнения переноса и для этих корреляций, а также вопросы их замыкания.

4.2.4. Уравнения переноса и диссипация скалярных вторых моментов для многокомпонентной среды с переменной плотностью

Уравнение переноса среднеквадратичных пульсаций энтальпии смеси

Отождествим в уравнении переноса среднеквадратичной пульсации общего вида (4.2.9) параметр $\mathscr{A}$ с энтальпией многокомпонентной смеси H и воспользуемся выражением (4.2.39$^{(1)}$) для потока $\boldsymbol{J}_{(H)}$ и скорости возникновения $\sigma_{(H)}$. В результате для развитой турбулентности получим следующее уравнение переноса дисперсии энтальпии

$$\bar{\rho} \frac{D}{Dt} \langle H''^2/2 \rangle + \operatorname{div} \bar{\boldsymbol{J}}_H^{\boldsymbol{\Sigma}} = -\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} \cdot \left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) -$$

$$- \overline{H''(dp'/dt) + \boldsymbol{\Pi} : (\partial \boldsymbol{u}''/\partial \boldsymbol{r})} - \bar{\rho} \varepsilon_H, \tag{4.2.58}$$

Эмпирические постоянные $K_{H\alpha 2}$ и $c_{H\alpha 2}$ существенны только при малых значениях турбулентного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}}$, т. е. когда $K_{H\alpha 1}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{\mathrm{turb}}/K_{H\alpha 2} \leqslant 0(1)$ и $c_{H\alpha 1}\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{T}/c_{H\alpha 2} \leqslant 0(1)$. По аналогии с (4.2.63) можно принять следующие значения эмпирических коэффициентов

$$K_{H\alpha 1} = 0{,}45; \quad K_{H\alpha 2} = 3; \quad c_{H\alpha 1} = 0{,}3 \pm 0{,}05.$$

Поскольку уравнения переноса (4.2.64) линейно зависимы, одно из них должно быть опущено. В этом случае дополнительным соотношением для определения корреляций $\langle H''Z''_\alpha\rangle$ является равенство $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \langle H''Z''_\alpha\rangle = 0$.

Уравнения переноса корреляционных моментов пульсаций состава смеси

Наконец, предполагая, что в уравнении переноса общего вида (4.2.8) $\mathscr{A} \equiv Z_\alpha$, $\mathscr{B} \equiv Z_\beta$, в результате простых выкладок получим $N(N+1)/2$ симметричных по индексам α и β уравнений переноса смешанных парных корреляций $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$

$$\bar{\rho}\frac{D\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle}{Dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_\alpha \cdot \frac{\partial\langle Z_\beta\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_\beta \cdot \frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} + $$
$$= \sum_{s=1}^{r}\left(\nu_{\alpha s}\overline{\xi_s Z''_\beta} + \nu_{\beta s}\overline{\xi_s Z''_\alpha}\right) - \bar{\rho}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N) \tag{4.2.69}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha\beta} \equiv \overline{\rho Z''_\alpha Z''_\beta \boldsymbol{u}''} + \overline{Z''_\alpha \boldsymbol{J}_\beta + Z''_\beta \boldsymbol{J}_\alpha} \tag{4.2.70}$$

— вектор диффузионного потока корреляции $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$;

$$\bar{\rho}\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \bar{\rho}\langle\varepsilon_{(Z_\alpha Z_\beta)}\rangle \equiv -\overline{\boldsymbol{J}}_\beta \cdot (\partial Z''_\alpha/\partial\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_\alpha \cdot (\partial Z''_\beta/\partial\boldsymbol{r}) \tag{4.2.71}$$

— скалярная скорость разрушения корреляции $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$ под воздействием процессов молекулярной диффузии. Слагаемые, содержащие парные корреляционные моменты пульсаций состава и скоростей химических реакций $\sum\limits_{s=1}^{r} \nu_{\beta s}\overline{\xi_s Z''_\alpha}$ и $\sum\limits_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\overline{\xi_s Z''_\beta}$, согласно формулам (4.1.46) принимают вид

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\beta s}\overline{\xi_s Z''_\alpha} = -b^{(\mathrm{Ch})}_{0\beta}\langle H''Z''_\alpha\rangle + \bar{\rho}\sum_{\gamma=1}^{N} L^{(\mathrm{Ch})}_{\gamma\beta}\langle Z''_\gamma Z''_\alpha\rangle, \tag{4.2.72}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \nu_{\alpha s}\overline{\xi_s Z''_\beta} = -b^{(\mathrm{Ch})}_{0\alpha}\langle H''Z''_\beta\rangle + \bar{\rho}\sum_{\gamma=1}^{N} L^{(\mathrm{Ch})}_{\gamma\alpha}\langle Z''_\gamma Z''_\beta\rangle. \tag{4.2.73}$$

Для аппроксимации диффузионных и диссипативных членов уравнения переноса корреляции $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$ также можно использовать простые выражения

$$\bar{\rho}\varepsilon_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta 1}\frac{\bar{\rho}\langle b\rangle^{\frac{1}{2}}}{L}\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle + K_{\alpha\beta 2}\frac{\bar{\rho}\chi}{L^2}\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle, \tag{4.2.74}$$

$$\boldsymbol{J}^{\boldsymbol{\Sigma}}_{\alpha\beta} = -\left(c_{\alpha\beta 1}L\langle b\rangle^{\frac{1}{2}} + c_{\alpha\beta 2}\chi\right)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\bar{\rho}\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle\right). \tag{4.2.75}$$

Заметим, что уравнения (4.2.69) также линейно зависимы. Дополнительными соотношениями для определения корреляций $\langle Z''_\alpha Z''_\beta \rangle$ являются равенства

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \langle Z''_\alpha Z''_\beta \rangle = 0, \qquad \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta \langle Z''_\alpha Z''_\beta \rangle = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N). \tag{4.2.76}$$

Как видим, полученные нами разнообразные уравнения переноса для корреляционных моментов второго порядка замыкают, при каком-либо способе моделирования макромасштаба турбулентности L, систему турбулентно осредненных уравнений гидродинамики сжимаемой многокомпонентной смеси. В совокупности с осредненными гидродинамическими уравнениями они образуют достаточно сложную полуэмпирическую модель многокомпонентной турбулентности второго приближения, в рамках которой могут быть рассчитаны разнообразные, в том числе анизотропные, режимы турбулентного течения реагирующей газовой смеси. Приведенный выше вывод этих уравнений при систематическом использовании средневзвешенного осреднения Фавра дает возможность не только проследить за всеми упрощающими допущениями, которые обычно делаются при их написании, но и позволяет достаточно легко получить их модификации в случае некоторых других турбулизованных течений, в частности, для гетерогенных и электропроводных сред.

§ 4.3. Алгебраические модели замыкания для многокомпонентной химически активной среды

Рассмотренная в предыдущем параграфе усложненная феноменологическая модель многокомпонентной турбулентности, включающая, в качестве замыкающих, модельные уравнения переноса одноточечных корреляционных моментов второго порядка, потенциально превосходит более простые рассмотренные в гл. 3 модели, основанные на использовании градиентных соотношений для турбулентных потоков. Однако эти модельные уравнения довольно сложны с вычислительной точки зрения и потому зачастую не очень удобны для практических приложений. Вместе с тем, они могут быть использованы для совершенствования более простых градиентных моделей. В частности, уравнения переноса для вторых моментов можно упростить до алгебраических соотношений для этих же величин и использовать в дальнейшем при моделировании турбулентных коэффициентов переноса, фигурирующих в градиентных соотношениях.

4.3.1. Локально равновесное приближение (K-теория турбулентности химически реагирующей газовой смеси)

Итак, если предположить, что в структуре турбулентного поля имеется некоторое внутреннее равновесие с полем осредненных термогидродинамических параметров, при котором конвективные и диффузионные члены в уравнениях переноса (4.2.18), (4.2.40), (4.2.48), (4.2.58), (4.2.64) и (4.2.69) уравновешивают друг друга, то корреляционные моменты второго порядка R_{ij}, q_j^{turb}, $\langle H''^2\rangle$, $J_{\alpha j}^{\mathrm{turb}}$, $\langle H''Z_\alpha''\rangle$, $\langle Z_\alpha''Z_\beta''\rangle$ будут находиться в локальном равновесии друг с другом. Другими словами, они не будут изменяться как во времени так и в координатном пространстве. Это приближение (в случае одножидкостной среды) было названо Дональдсоном (*1972*) «сверхравновесным» приближением. Соотношения между корреляционными моментами второго порядка и градиентами характеристик основного течения, определяемые уравнениями (4.2.18), (4.2.40), (4.2.48), (4.2.58), (4.2.64) и (4.2.69), образуют схему замыкания второго порядка, или так называемую K-теорию турбулентности. Она справедлива, если: 1) любые изменения осредненного течения являются очень медленными по сравнению с характерным для турбулентного движения временем $t_{\mathrm{turb}} \sim L/\langle b\rangle$ и 2) пространственное изменение характеристик турбулентности мало на расстояниях порядка масштаба L. В общем случае эти два условия удовлетворяются одновременно очень редко, поскольку масштаб турбулентности L обычно определяется пространственными изменениями течения. Специфической областью, где оба условия удовлетворяются, является область пограничного слоя с постоянным потоком импульса, в которой отношение $L/\langle b\rangle$ близко к нулю.

Таким образом, в случае локально равновесного приближения указанные выше уравнения переноса вырождаются, и мы получаем следующие алгебраические уравнения для определения вторых корреляционных моментов:

1. *уравнения для определения корреляций* $\langle u_k''u_j''\rangle$

$$(1-K_{p2})\left\{-\langle u_k''u_i''\rangle\left(\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}-2\varepsilon_{ilj}\Omega_l\right)-\langle u_j''u_i''\rangle\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_i}-2\varepsilon_{ilk}\Omega_l\right)+G_{kj}\right\}+$$
$$+K_{p1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}\left(-\langle u_k''u_j''\rangle+\frac{2}{3}\delta_{kj}\langle b\rangle\right)+\frac{2}{3}K_{p2}\delta_{kj}\left(-\langle u_l''u_m''\rangle\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_m}+G\right)-$$
$$-\frac{2}{3}K_{b1}\delta_{kj}\frac{\langle b\rangle^{\frac{3}{2}}}{L}-K_{b2}\frac{\nu\langle u_k''u_j''\rangle}{L^2}=0,\qquad (k,\, j=1,\,2,\,3);\qquad(4.3.1)$$

2. *уравнения для определения корреляций* $\langle H''u_j''\rangle$

$$\left(K_{s1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}+K_{b2}\frac{\nu+\chi}{2L^2}\right)\langle H''u_j''\rangle+\langle u_j''u_k''\rangle\left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial x_k}-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}\right)+$$
$$+(1-K_{s2})\left\{\left(\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}+2\varepsilon_{ljk}\Omega_l\right)\langle H''u_k''\rangle-G_{Hj}\right\}=0,\qquad (j=1,\,2,\,3);\qquad(4.3.2)$$

3. *уравнение для определения корреляций* $\langle H''^2\rangle$

$$\left(K_{H1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}+K_{H2}\frac{\chi}{L^2}\right)\langle H''^2\rangle+\langle H''u_j''\rangle\left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial x_j}-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial x_j}\right)=0;\qquad(4.3.3)$$

4. *уравнения для определения корреляций* $\langle Z''_\alpha u''_j\rangle$

$$\left(K_{\alpha 1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}+K_{b2}\frac{\nu+\chi}{2L^2}\right)\langle Z''_\alpha u''_j\rangle+(1-K_{\alpha 2})\left\{\left(\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k}+2\varepsilon_{ljk}\Omega_l\right)\langle Z''_\alpha u''_k\rangle-G_{\alpha j}\right\}-$$
$$-\langle u''_k u''_j\rangle\frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial x_k}-L^{\mathrm{Ch}}_{0\alpha}\langle H''u''_j\rangle-\sum_{\beta=1}^{N}L^{\mathrm{Ch}}_{\alpha\beta}\langle Z''_\alpha u''_j\rangle=0, \quad (4.3.4)$$
$$(j=1,\,2,\,3;\;\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,N);$$

5. *уравнения для определения корреляций* $\langle H''Z''_\alpha\rangle$

$$\left(K_{H\alpha 1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}+K_{H\alpha 2}\frac{\chi}{L^2}\right)\langle H''Z''_\alpha\rangle+\langle H''u''_k\rangle\frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial x_k}+\langle Z''_\alpha u''_k\rangle\left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial x_k}-\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}\right)-$$
$$-L^{\mathrm{Ch}}_{0\alpha}\langle H''^2\rangle-\sum_{\beta-1}^{N}L^{\mathrm{Ch}}_{\alpha\beta}\langle Z''_\alpha H''\rangle=0, \qquad (\alpha=1,2,\ldots,N); \quad (4.3.5)$$

6. *уравнения для определения корреляций* $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$

$$\left(K_{\alpha\beta 1}\frac{\sqrt{\langle b\rangle}}{L}+K_{\alpha\beta 2}\frac{\chi}{L^2}\right)\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle+\langle Z''_\alpha u''_k\rangle\frac{\partial\langle Z_\beta\rangle}{\partial x_k}+\langle Z''_\beta u''_k\rangle\frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial x_k}L^{(\mathrm{Ch})}_{0\beta}\langle H''Z''_\alpha\rangle-$$
$$-L^{(\mathrm{Ch})}_{0\alpha}\langle H''Z''_\beta\rangle-\sum_{\gamma=1}^{N}L^{(\mathrm{Ch})}_{\gamma\beta}\langle Z''_\gamma Z''_\alpha\rangle-\sum_{\gamma=1}^{N}L^{(\mathrm{Ch})}_{\gamma\alpha}\langle Z''_\gamma Z''_\beta\rangle=0, \quad (4.3.6)$$
$$(\alpha,\,\beta=1,\,2,\,\ldots,\,N).$$

Здесь величины G_{ki}, G, G_{Hk} и $G_{\alpha k}$, описывающие обусловленную градиентом осредненного давления скорость генерацию соответствующей корреляции, определены соотношениями

$$\bar\rho G_{ki}=-\frac{1}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\left(\langle H''u''_k\rangle\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}+\langle H''u''_i\rangle\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}\right)-$$
$$-\bar\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\left(\frac{1}{\bar n}\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}-F_{\alpha i}\right)\langle Z''_\alpha u''_k\rangle+\left(\frac{1}{\bar n}\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}-F_{\alpha k}\right)\langle Z''_\alpha u''_i\rangle\right\}, \quad (4.3.7)$$

$$\bar\rho G=-\frac{1}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\langle H''u''_k\rangle\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}+\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\bar n_\beta(c_{p\alpha}-c_{p\beta})}{\bar n}\langle c_p\rangle\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}+F_{\alpha k}\right)\langle Z''_\alpha u''_k\rangle, \quad (4.3.8)$$

$$\bar\rho G_{Hk}\equiv\left(-\frac{\langle H''^2\rangle}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\bar n_\beta(c_p\alpha-c_{p\beta})}{\bar n\langle c_p\rangle}\langle Z''_\alpha H''\rangle\right), \quad (4.3.9)$$

$$\rho G_{\alpha k}=-\left(\frac{\langle H''Z''_\alpha\rangle}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}-\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\frac{\bar n_\beta(c_{p\alpha}-c_{p\beta})}{\bar n\langle c_p\rangle}\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle\right)\frac{\partial\bar p}{\partial x_k}. \quad (4.3.10)$$

Уравнения (4.3.1)—(4.3.10) образуют систему алгебраических уравнений, связывающих корреляционные моменты второго порядка $\langle u''_k u''_j\rangle$, $\langle H''u''_j\rangle$, $\langle Z''_\alpha u''_j\rangle$, $\langle H''^2\rangle$, $\langle H''Z''_\alpha\rangle$, $\langle Z''_\alpha Z''_\beta\rangle$ с параметрами осредненного течения, а также с масштабом турбулентности L и с турбулентной энергией $\langle b\rangle$. При этом величина $\langle b\rangle$ определяется по формуле $\langle b\rangle=\frac{1}{2}\langle u_k''u_i''\rangle\delta_{ki}$. Для замыкания этой системы необходимо использовать уравнение переноса макромасштаба турбулентности (3.3.36) (или какое-либо алгебраическое выражение для L).

Таким образом, определяя корреляции $\langle u_k''u_j''\rangle$, $\langle H''u''j\rangle$, $\langle Z_\alpha''u_j''\rangle$, $\langle H''^2\rangle$, $\langle H''Z_\alpha''\rangle$, $\langle Z_\alpha''Z_\beta''\rangle$ из системы алгебраических уравнений (4.3.1)—(4.3.10) и предполагая справедливыми градиентные соотношения (см. *Монин, Яглом, 1992*)

$$J_{\alpha k}^{\text{turb}}/\overline{\rho}\equiv\langle Z_\alpha''u_k''\rangle=-D_{\alpha kj}^{\text{turb}}\frac{\partial\langle Z_\alpha\rangle}{\partial x_j},\tag{4.3.11}$$

$$q_k^{\text{turb}}/\overline{\rho}\equiv\langle H''u_k''\rangle=-\chi_{kj}^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial x_j}-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j}\right),\tag{4.3.12}$$

$$R_{ij}/\overline{\rho}\equiv-\langle u_i''u_j''\rangle=-\frac{2}{3}\langle b\rangle\delta_{ij}+\frac{1}{2}(\nu_{is}^{\text{turb}}\delta_{jl}+\nu_{js}^{\text{turb}}\delta_{il})\left(\frac{\partial\langle u_s\rangle}{\partial x_l}+\frac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_s}\right),\tag{4.3.13}$$

можно, вообще говоря, найти тензоры турбулентной вязкости ν_{is}^{turb}, температуропроводности χ_{kj}^{turb} и диффузии $D_{\alpha kj}^{\text{turb}}$. Следует особо подчеркнуть, что при таком подходе учитывается влияние химических реакций на интенсивность пульсаций энтальпии и состава, а также на коэффициенты турбулентного переноса импульса, тепла и массы. Например, турбулентный поток тепла определяется не только градиентами температуры и концентраций, но и характером зависимости химического источника от температуры и состава смеси. Конкретный вид формул для коэффициентов турбулентного обмена в случае горизонтального турбулентного течения со сдвигом и при наличии стратификации среды, полученных на основе равновесного приближения, приведен в монографии авторов (*1999*), к которой мы и отсылаем читателя.

Завершая общее описание метода «теоретического» определения коэффициентов (тензоров) турбулентного обмена, заметим, что значения эмпирических констант в различных частных случаях могут существенно изменяться.

4.3.2. Квазиравновесное приближение

В уравнениях (4.3.1)—(4.3.10) и (3.3.36) было бы правильнее пренебречь теми членами, которые описывают эффекты, присущие ламинарному течению, поскольку малые числа Рейнольдса несовместимы с предположением о локально-равновесной турбулентности. Однако ввиду приближенного характера данного подхода их часто оставляют в рассмотрении, но одновременно с этим привлекают к анализу полное уравнение переноса энергии турбулентности (4.2.35), в котором фигурируют как конвективные, так и диффузионные члены. Разумеется, что в этом случае одно из уравнений (4.3.1) должно быть опущено. Такой подход (квазиравновесное приближение), предложенный впервые Левелленом (см. сб. *«Турбулентность, принципы и применения»*, 1980) для случая однокомпонентной жидкости, по-видимому, точнее рассмотренного выше «сверхравновесного приближения» (при котором в уравнениях переноса опускаются все указанные члены), поскольку позволяет до некоторой степени учесть эффекты «неравновесности» турбулентного поля пульсирующих термогидродинамических параметров. В этом случае корреляционные характеристики турбулентности в каждой пространственной точке будут связаны с полем определяющих параметров в различных областях течения. Применение полного уравнения (4.2.35) для определения турбулентной энергии может быть оправдано тем обстоятельством, что время установления «локально равновесной» структуры турбулентного поля много меньше времени, необходимого для достижения полем турбулентных скоростей уровня, соответствующего равенству производства и диссипации турбулентной энергии (см. *Иевлев*, *1975*).

В заключение отметим, что при использовании метода инвариантного моделирования во втором порядке замыкания нельзя точно рассчитать встречающиеся в природе течения, в которых осуществляется перенос какой-либо консервативной характеристики потока в направлении, противоположном ее градиенту (*Меллор*, *Ямада*, *1974*, *1982*). Подобное явление наблюдается, например, в нейтрально стратифицированном по температуре пограничном слое земной атмосферы, когда поток тепла направлен вверх против градиента потенциальной температуры. Это приводит к тому, что коэффициент турбулентной теплопроводности в формуле (4.2.67) оказывается отрицательной величиной — эффект отрицательной теплопроводности. Соответственно, адекватная теория противоградиентного переноса может быть развита, по-видимому, только на основе моделей третьего порядка замыкания (см. *Лыкосов*, *1991*).

Глава 5

Стохастико-термодинамическое моделирование развитой структурированной турбулентности

Целью данной главы является введение читателя в курс быстро развивающейся в настоящее время стохастико-термодинамической теории необратимых процессов на примере моделирования структурированной турбулентности. Здесь рассмотрен синергетический подход к разработке феноменологической модели предельно развитой турбулентности в сжимаемой однородной жидкости с учетом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. До недавнего времени турбулентность, являющаяся без преувеличения самым распространенным видом движения жидкости и газа в природе, традиционно представлялась, в основном, в виде мелкозернистого флуктуирующего континуума в состоянии полного стохастического хаоса. Однако допустима и иная точка зрения на турбулентность, высказанная впервые, по-видимому, Пригожиным (*Пригожин*, *Стенгерс*, *1986*). Согласно этим представлениям, реальное турбулентное течение жидкости является процессом менее случайным и макроскопически более организованным, нежели это кажется с первого взгляда, причем переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации, при котором часть энергии турбулентного хаоса, отвечающего мелкомасштабным флуктуациям термогидродинамических параметров среды, переходит в макроскопически организованное движение вихревых когерентных структур (КС). Это обстоятельство повышает внутреннюю упорядоченность турбулизованной гидродинамической системы по сравнению с молекулярным хаосом (ламинарным движением жидкости). В частности, каскадный процесс дробления вихрей, имеющий место в полностью развитой турбулентности, также может быть интерпретирован как неограниченная последовательность процессов самоорганизации. При этом множество пространственно-временных масштабов, на которых разыгрывается такого рода процесс, отвечает когерентному поведению огромного числа частиц, выражающемуся в образовании относительно устойчивых мезомасштабных супермолекулярных структур (когда молекулы участвуют в коллективных, согласованных, взаимосвязанных движениях, отвечающих разномасштабным вихрям, непрерывно распределенным в реальном потоке жидкости). Такое изменение взгляда на турбулентность отчетливо выражено в высказывании Пригожина (см. *Пригожин*, *Стенгерс*, *1994*) «Кто бы мог предсказать тридцать лет назад, что неравновесность приводит к самоорганизации в том виде, в каком мы наблюдаем ее в гидродинамических неустойчивостях типа ячеек Бенара».

Как теперь стало ясно, наличие относительно крупных когерентных вихревых образований (турбулентных нитей, колец, вихревых спиралей и т. п.), случайно распределенных в пространстве и во времени, является характерной чертой многих, если не всех, развитых турбулентных течений (см. *Crow*, *Champagne*, *1971*; *Brown*, *Roshko*, *1974*; *Рабинович*, *Сущик*, *1990*; *Монин*, *1994*). Согласно этим представлениям (см., например, *Климонтович*, *2002*), гидродинамическая турбулентность, принадлежащая к числу наиболее сложных динамических явлений, связана, в частности, с возникновением и развитием огромного числа организованных диссипативных вихревых структур различного пространственно-временного масштаба при определенных режимах течения жидкости в существенно неравновесной открытой системе. Как показано в гл. 1 (см. также *Marov*, *Kolesnichenko*, *2006*), процессы самоорганизации на фоне хаотического пульсационного движения космического вещества являются, по-видимому, важнейшим механизмом, формирующим специфические черты астро- и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции, включая возникновение галактик и галактических скоплений, рождение звезд из диффузной среды газопылевых облаков, образование протопланетных дисков и последующую аккумуляцию планетных систем, формирование газовых оболочек планет и комет (атмосфер), разномасштабные течения в атмосферах и околопланетной плазме и т. д.

В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными (основательный обзор соответствующих публикаций приведен, например, в монографии (*Хлопков и др.*, *2002*)), когерентная вихревая структура может быть определена как связная, жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т. е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой [см. п. 6.2]. В последнее десятилетие, благодаря прогрессивному развитию техники визуального наблюдения турбулизованных течений жидкости, было открыто большое число разнообразных КС и достоверно установлены их топологические характеристики. В качестве уже упоминавшихся нами ранее примеров могут быть названы такие из них, как «вихревые нити», «вихри Тейлора», «турбулентные пятна», «вихревые клубки», «шпилькообразные вихри», «берстинги», «вихревые спирали», «стрики», «структуры Брауна—Томаса», «грибовидные вихри» и т. п. Частота появления той, или иной структуры зависит от типа течения (пограничный слой, слой смешения, струя и т. п.), геометрии и режима движения турбулизованной жидкости. Подобного типа вихревые образования, как правило, локализованы в пространстве, не перекрываются (поэтому их часто можно рассматривать как сосредоточенные объекты — кластеры) и имеют длины пробега много больше, чем их собственные размеры. По определению, характерным размером КС является наибольший пространственный масштаб l, на котором существует когерентная завихренность; новейшие результаты показывают, что l может быть значительно меньше, чем характерный гидродинамический масштаб течения L, но больше, чем колмогоровский масштаб η, т. е. лежать в инерционном интервале масштабов, $\eta < l \ll L$. Вследствие взаимодействия индивидуальных КС (например, в случае двух простых вихрей — по закону Био—Савара), носящего, в общем случае, существенно нелинейный характер, происходит их объединение или распад, т. е. появление новой одиночной структуры (например, спирального вихря) или смежных подобных структур (колец, клубков и т. п.), которые могут быть связаны посредством жгутов — областей низкой когерентной завихренности. В дальнейшем мы будем исходить из того, что мезомасштабные пространственно-временные КС случайны по всем параметрам, используемым для их описания.

К сожалению, прямое численное моделирование развитых турбулентных движений на основе точных (мгновенных) гидродинамических уравнений сопряжено, как правило, с большими математическими трудностями, а создание завершенной теории структурированной турбулентности вряд ли возможно на данном этапе развития гидромеханики из-за чрезвычайной сложности механизмов возникновения, взаимодействия и эволюции разномасштабных вихревых образований. Собственно, по этой причине требуется разработка новых модельных подходов (в том числе и феноменологических) к описанию полностью развитой турбулентности, введения дополнительных внутренних параметров среды (характеризующих мелкомасштабные структуры течения), установления для их вычисления универсальных закономерностей и особых соотношений, дополняющих уже известные уравнения типа законов сохранения массы, энергии, количества движения и т. п. Разумеется, что такое полуэмпирическое моделирование структурированной турбулентности, несмотря на неизбежную в этом случае идеализацию описания реального течения жидкости, должно, тем не менее, отображать в главных чертах важнейшие гидродинамические эффекты при минимуме необходимых вычислительных усилий. Следовательно, для построения адекватной модели «высокоорганизованного» турбулентного течения необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению наряду с мелкозернистым флуктуирующим полем термогидродинамических параметров течения (подобный подход был рассмотрен в гл. 3), также и относительно крупные диссипативные когерентные образования. Причем они должны приниматься во внимание как на стадии моделирования процесса вовлечения окружающей еще незавихренной жидкости в турбулизованное движение, так и при описании полностью развитых процессов турбулентного переноса массы, импульса и тепла. Другими словами, любая эффективная континуальная модель турбулентности не может быть развита без явного включения в ее состав пространственно-временных когерентных структур и описания их какими-то внутренними параметрами состояния пульсационного течения. Согласно Фришу (*1998*), подобного рода регулярные вихревые образования являются в известном смысле «сухожилиями» турбулентности. Следовательно, только на пути моделирования турбулентности с учетом ее внутренней структуризации открываются подлинные возможности эффективного преодоления тех механических и математических проблем, с которыми связаны перспективные постановки и численные реализации разнообразных турбулентных задач, в частности, в области астрофизики и космогонии (см. *Седов*, *1980*; *Колесниченко*, *Маров*, *1999*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2001*).

В силу сказанного становится понятно, почему феномен структурированной турбулентности предоставляет исследователям богатый материал для разработки новых идей, касающихся соотношения порядка и хаоса в турбулизованных течениях жидкости, простоты и сложности в поведении открытых флуктуирующих гидродинамических систем, которые могут без специфического воздействия извне путем самоорганизации формировать вихревые пространственно-временные структуры, т. е. осуществлять вдали от локального термодинамического равновесия «порядок через флуктуации». К сожалению, нужно отметить, что хотя со времени понимания синергетической природы турбулентности, как процесса самоорганизации, прошло уже более тридцати лет, до настоящего времени представления о возникающих в потоке диссипативных когерентных образованиях не материализовались в разработки таких модельных подходов, которые нацелены на создание практических (инженерных) методов расчета турбулентности, основанных, как правило, на уравнениях гидродинамического типа. Вместе с тем, расширение формализма неравновесной термодинамики на среды с возбужденными внутренними степенями свободы макромолекул (которые возможно описать дополнительными параметрами, характеризующими внутреннюю микроструктуру среды) позволяет, по-видимому, распространить этот подход и на моделирование каскадного процесса переноса кинетической энергии вихрями разного размера, образующихся в результате их последовательного дробления в развитом турбулентном потоке.

Наша задача состоит в том, чтобы при использовании методов расширенной необратимой термодинамики с внутренними переменными (см. *де Грот*, *Мазур*, *1964*; *Жоу и др.*, *2006*) и статистической термодинамики необратимых процессов (*Стратонович*, *1985*; *Кайзер*, *1990*), столь хорошо зарекомендовавших себя в последнее время при изучении широкого класса физических проблем, попытаться построить феноменологически гидродинамическую модель стационарно-неравновесной турбулентности с учетом происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов, которые приводят к образованию всевозможных неравновесных диссипативных вихревых структур вдали от термодинамического равновесия (см., например, *Эбелинг и др.*, *2001*). Другими словами, мы попытаемся феноменологически получить замкнутую систему осредненных гидродинамических уравнений, самосогласованно описывающих как разнообразные процессы турбулентного переноса, так и процессы самоорганизации. При подобном подходе вихревые КС, относящиеся к сильно локализованными областями мелкомасштабного движения подсистемы турбулентного хаоса, следует принимать во внимание, как на стадии турбулизации ламинарного потока, происходящей в результате развития иерархии неустойчивостей какого-либо вида (например, неустойчивости Кельвина—Гельмгольца в свободных сдвиговых течениях — в слоях смешения, в струях, в следе и т. п., или неустойчивости Тейлора—Гертлера в подслое турбулентного пограничного слоя, где возможно появление продольных вихрей в пристеночных слоях), так и на стадии развитой турбулентности при наличии всевозможных резонансных ситуаций, связанных, например, с синхронизацией мелкомасштабной завихренности в потоке сильно турбулизованной жидкости. Под синхронизацией регулярных и хаотических (стохастических) колебаний здесь и далее понимается установление некоторых соотношений между характерными частотами и фазами автоколебательных систем в результате их взаимовлияния [см. п. 6.2].

В п. 5.1 мы обсудим синергетический подход к построению феноменологической модели развитой турбулентности в сжимаемой однородной жидкости при учете происходящих в ней нелинейных кооперативных процессов. Включение в модель набора случайных переменных в качестве внутренних параметров подсистемы турбулентного хаоса, связанных с ее микроструктурой, позволяет в этом случае вывести термодинамическими методами кинетические уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) в конфигурационном пространстве. Эти уравнения, предназначенные для определения временной эволюции плотности распределения условной вероятности случайных структурных параметров хаоса (относящихся, в частности, к каскадному процессу дробления крупномасштабных вихрей или температурных неоднородностей), будут использованы далее также и для анализа марковских стохастических процессов перехода из одного квазинеравновесного состояния турбулентного хаоса в другое в результате последовательной потери устойчивости течения жидкости при изменении соответствующих управляющих параметров. Стабилизация подсистемы хаоса вблизи очередного стационарно-неравновесного состояния в конфигурационном пространстве отвечает переходу турбулизованной системы в новое состояние, адекватное возникновению сложных пространственно-временных КС в турбулизованном потоке.

В п. 5.2 будет рассмотрен альтернативный метод к исследованию механизмов перехода подобного рода, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа, тесно связанных с кинетическими уравнениями ФПК (данная связь прослеживается в этом разделе). Здесь проанализирована кардинальная проблема развиваемого подхода — возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний подсистемы турбулентного хаоса. С этой целью предложен неравновесный термодинамический потенциал для стохастических внутренних координат турбулентного хаоса, обобщающий известное соотношение Больцмана—Планка для равновесных термодинамических состояний на стационарно-неравновесные состояния ансамбля подсистем (представляющего хаос), и показано, что этот потенциал является функцией Ляпунова для таких состояний.

Наконец, последний, третий, параграф данной главы посвящен термодинамическому выводу обобщенных дробных уравнений ФПК, описывающих процессы эволюции внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса на основе дробной динамики, учитывающей структуру и метрику фрактального времени. Подобного рода уравнения предназначены для описания процессов перехода к новым квазиравновесным состояниям, обладающим топологией фрактального множества. Структурная устойчивость КС в этом случае поддерживается за счет многомасштабных корреляций, играющих ключевую роль в режиме сильной нелинейности. Можно думать, что фрактальность фазового пространства и дальнодействующие корреляционные эффекты являются взаимно согласованными характеристиками процесса самоорганизации системы при переходе ее к неравновесному турбулентному состоянию. Введение дробных производных по времени в кинетическое уравнение ФПК позволяет учесть в контексте единого математического формализма эффекты «памяти» (т. е. немарковость процессов эволюции в некоторых областях фазового пространства) и перемежаемости во времени, с которой обычно связывают наличие турбулентных всплесков на фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний мелкозернистой турбулентности.

§ 5.1. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности

Как известно, реализуемая при конечном, но достаточно большом числе Рейнольдса, развитая турбулентность характеризуется заполненными спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), что свидетельствует о существовании многомасштабной структуры поля термогидродинамических параметров. Собственно многомасштабность течения жидкости, когда возбуждено огромное число степеней свободы, и является ключевым признаком развитой турбулентности. Поэтому любой модельный подход к описанию полностью развитой турбулентности, по сути, представляет собой тот или иной способ ограничения степеней свободы.

При феноменологическом конструировании модели структурированной турбулентности (направленной на описание «регулярных» полей гидротермодинамических параметров), движущуюся пульсирующую жидкость мы будем представлять в виде термогидродинамического комплекса, состоящего из двух взаимосвязанных континуумов (подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного пространственно-временного хаоса (*Колесниченко*, *Маров*, *1999*; *Колесниченко*, *2002*; *2004*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2001*; *2006*). Континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений жидкости, предназначен в основном для исследования эволюции осредненных полей термогидродинамических параметров (включая описание крупных вихревых образований). Подсистема турбулентного хаоса (турбулентная «надструктура») состоит, в свою очередь, из двух составляющих (фаз): собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное (мелкозернистое) пульсирующее поле термогидродинамических параметров когерентной составляющей, обладающей в общем случае топологией фрактального множества и связанной с мезомасштабными вихревыми структурами в турбулизованном потоке жидкости. При этом, в термодинамическое описание подсистемы турбулентного хаоса будем включать набор внутренних координат, отвечающих, в конечном счете, возбужденным макроскопическим степеням свободы турбулизованной жидкости. Это дает возможность использовать при моделировании процессов турбулентного переноса и кинетики в полном континууме обобщенную теорию Онзагера [см. гл. 2], описывающую в рассматриваемом случае не только линейную релаксацию осредненных значений экстенсивных термодинамических параметров к их стационарным значениям, но и особенности поведения турбулентных флуктуаций в окрестности стационарно-неравновесных состояний хаоса (см. *Кайзер*, *1990*). Применение известного расширения формализма неравновесной термодинамики на системы с внутренними степенями свободы (см. *Пригожин*, *1960*) позволяет получить кинетические уравнения ФПК для функций распределения характеристических параметров мелкомасштабной турбулентности и на их основе смоделировать каскадный процесс Ричардсона—Колмогорова.

Следует отметить, что принятое нами разделение реального течения пульсирующей жидкости на воображаемые — осредненное и турбулентное, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области, для которой установлены средние значения локальных физических переменных, являющихся непрерывными функциями координат $\boldsymbol{r}$ и времени t, т. е. имеет, до некоторой степени, условный характер. Гидродинамический масштаб осредненного движения Λ (масштаб наблюдения по Обухову (*Obukhov*, *1962*) или шаг разрешения разностной сетки), лежащий в инерционном интервале $\eta < \Lambda \ll L$ и определяемый размером $d\boldsymbol{r} \sim \Lambda^3$ области осреднения G, будем полагать далее таким, чтобы подсистема турбулентного хаоса содержала всю совокупность мезомасштабных КС, размер которых меньше области осреднения, $l < \Lambda$. Здесь $\eta = (\nu^3/\varepsilon_b)^{1/4}$ — колмогоровский масштаб длины, который характеризует влияние вязкой диссипации на структуру мелкомасштабной турбулентности; L — внешний, или интегральный масштаб турбулентности, характеризующий механизм ее возникновения; ε_b — ключевая характеристика каскадного процесса дробления вихрей Ричардсон—Колмогорова, представляющая собой среднюю скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы жидкости в единицу времени и одновременно (в квазиравновесных условиях) равная скорости передачи кинетической энергии пульсационного движения по иерархии вихрей. Согласно существующим оценкам, для того чтобы осредненный поток содержал основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в десять—двадцать раз меньше интегрального масштаба турбулентности L. Заметим, что используемая специфика «двухфазности» турбулентного хаоса проявляется в дополнительном турбулентном переносе импульса и энергии вихревыми когерентными образованиями, что приводит к некоторой модификации известных моделей замыкания (определяющих соотношений), а также к необходимости уточнения эффективных (с учетом присутствия в потоке КС) коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности.

5.1.1. Система гидродинамических уравнений масштаба среднего движения для однокомпонентной сжимаемой жидкости

Мы будем следовать классическому подходу к феноменологии полностью развитой турбулентности, который основывается на идее Рейнольдса об осреднении мгновенных уравнений движения жидкости для пульсирующих термогидродинамических параметров по пространству и/или времени, или посредством другой эквивалентной процедуры, например, посредством принятой в статистической гидродинамике теоретико-вероятностной процедуре осреднения по ансамблю статистически подобных гидродинамических систем, находящихся в одинаковых внешних условиях (см. *Монин*, *Яглом*, *1992*). При учете обычного для статистической физики предположения об эргодичности системы, когда можно отождествить временное (пространственное) среднее значение любой физической переменной с ее теоретико-вероятностным средним значением, указанные осреднения отфильтровывают те моды движения, масштаб которых меньше пространственно-временного интервала осреднения. Эти мелкомасштабные пульсационные движения, исключенные в процессе осреднения, вносят, по предположению, вклад в турбулентное движение среды, определяемое пульсациями гидродинамических параметров по отношению к соответствующим осредненным значениям. Собственно именно это мелкомасштабное турбулентное движение моделируется далее подсистемой турбулентного хаоса.

Вновь подчеркнем, что проблема осреднения является одной из центральных в механике природных сред, а в случае такой сложной системы как структурированная турбулентность нередко именно от способа осреднения зависит само построение ее макроскопической модели. Имея в виду разнообразные приложения разрабатываемой модели турбулентности, в частности, к некоторым астрофизическим явлениям, в которых отношение характерной скорости жидкости к осредненной скорости звука (мера значимости флуктуаций плотности среды) намного больше единицы, будем в этой главе предполагать переменность массовой плотности системы $\rho(\boldsymbol{r}, t)$. Ранее уже отмечалось [см. п. 3.1], что в классических теориях турбулентности с постоянной массовой плотностью для всех без исключения физических параметров среды, осреднения обычно вводятся некоторым одинаковым образом, причем, как правило, без весовых коэффициентов. Вместе с тем, такое идентичное для всех физических параметров осреднение в случае жидкости с переменной массовой плотностью приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям масштаба среднего движения, но и к затруднениям физической интерпретации некоторых отдельных членов в них. Поэтому при построении феноменологической модели структурированной турбулентности в сжимаемой среде будем, как и в двух предыдущих главах этой книги, использовать, наряду с «обычным» средним значением $\overline{f}(\boldsymbol{r}, t)$ некоторых термогидродинамических переменных $f(\boldsymbol{r}, t)$ (например, таких как плотность или давление), среднее по Фавру для некоторых других параметров $g(\boldsymbol{r}, t)$ (например, температуры и гидродинамической скорости), задаваемое соотношением

$$\langle g(\boldsymbol{r}, t)\rangle = \overline{\rho g(\boldsymbol{r}, t)}/\overline{\rho} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{[p]} g^{[p]} \Big/ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{[p]}. \tag{5.1.1}$$

Здесь суммирование ведется по набору возможных реализаций $[p]$ $(1 \leqslant [p] \leqslant M)$ стохастической гидродинамической системы; при этом $g = \langle g\rangle + g''$, где g'' — соответствующая турбулентная пульсация, причем $g'' \neq 0$. Дальше в этой главе, если не оговорено иное, буква в угловых скобках будет обозначать среднемассовое осреднение соответствующей физической величины. Выпишем здесь те свойства средневзвешенного осреднения физических величин, которые часто использованы в этой главе [см. (3.1.7)]

$$\overline{\rho g f} = \overline{\rho}\langle g\rangle\langle f\rangle + \overline{\rho g'' f''}, \qquad \overline{\rho g''} = 0, \qquad \overline{g''} = -\overline{\rho' g''}/\overline{\rho},$$

$$\overline{\rho\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} f\right\}} = \overline{\rho}\left\{\frac{\partial\langle f\rangle}{\partial t} + \langle \boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle f\rangle\right\} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\overline{\rho f'' \boldsymbol{u}''} \equiv \overline{\rho}\frac{D\langle f\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \boldsymbol{J}_f^{\mathrm{turb}},$$

$$D(..)/Dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle \boldsymbol{u}\rangle\cdot\partial(..)/\partial \boldsymbol{r}.$$

Здесь для турбулентного потока признака f введено обозначение

$$\boldsymbol{J}_f^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho f'' \boldsymbol{u}''} = \overline{\rho}\langle f'' \boldsymbol{u}''\rangle.$$

Эти соотношения легко выводятся из определения (5.1.1) и постулатов осреднения Рейнольдса (3.1.2).

Система точных гидродинамических уравнений масштаба среднего движения для однокомпонентной сжимаемой жидкости, полученная путем теоретико-вероятностного осреднения справедливых в микромасштабе соответствующих мгновенных уравнений гидродинамики, имеет вид [ср. с уравнениями (3.1.21), (3.1.28), (3.1.54), (3.1.71)]:

$$\overline{\rho}\frac{D\langle v\rangle}{Dt} = \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle, \qquad (\langle v\rangle \equiv 1/\overline{\rho}), \tag{5.1.2}$$

$$\overline{\rho}\frac{D\langle \boldsymbol{u}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}\right) + \overline{\rho}\boldsymbol{F}, \tag{5.1.3}$$

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} = -\,\mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}) - \overline{p}\,\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \\ - \overline{p'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\langle \varepsilon_b\rangle, \tag{5.1.4}$$

$$\overline{p}(\boldsymbol{r}, t) = \mathscr{R}\overline{\rho}\langle T\rangle. \tag{5.1.5}$$

Здесь $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, $p(\boldsymbol{r}, t)$, $v(\boldsymbol{r}, t)$, $E(\boldsymbol{r}, t)$ — соответственно мгновенные значения гидродинамической скорости, давления, удельного объема ($v = 1/\rho$) и удельной внутренней энергии жидкой частицы; $\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)\rangle \equiv \overline{\rho \boldsymbol{u}}/\overline{\rho}$ — осредненная по Фавру гидродинамическая скорость среды; $D(..)/DT \equiv \partial(..)/\partial t + \langle \boldsymbol{u}\rangle\cdot\partial(..)/\partial \boldsymbol{r}$ — полная производная по времени относительно осредненного поля скоростей; $\overline{p}(\boldsymbol{r}, t)$ — осредненное давление; $\mathscr{R}$ — газовая постоянная; $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ — внешняя сила, действующая на единицу массы (в данном разделе пульсациями массовой силы пренебрегаем); $\boldsymbol{\Pi}^{\Sigma}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t)$ — полный тензор напряжений в турбулентном потоке; $\overline{\boldsymbol{\Pi}}(\boldsymbol{r}, t)$ — осредненный молекулярный тензор вязких напряжений; $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\overline{\rho \boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}''}$ — тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений [см. (3.1.30)]; $\overline{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}, t)$ — осредненный молекулярный поток тепла; $\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho H''\boldsymbol{u}''}$, $\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}} \equiv -\overline{\rho'\boldsymbol{u}''}/\overline{\rho}$ — соответственно турбулентные потоки тепла и удельного объема среды (здесь использовано соотношение $\overline{\rho v''} = -\overline{\rho'}/\overline{\rho}$); $H(\boldsymbol{r}, t) \equiv E(\boldsymbol{r}, t) + p(\boldsymbol{r}, t)/\rho(\boldsymbol{r}, t)$ — мгновенное значение удельной энтальпии жидкости; $\langle \varepsilon_b(\boldsymbol{r}, t)\rangle \overline{\rho\varepsilon_b}/\overline{\rho} \equiv (\overline{\boldsymbol{\Pi} : \partial \boldsymbol{u}''/\partial \boldsymbol{r}})/\overline{\rho}$ — средневзвешенное значение удельной скорости диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости ν см. (3.1.50)].

Из системы уравнений (5.1.2)—(5.1.5) видно, что осредненное движение турбулизованной однородной жидкости характеризуется: во-первых, осредненными молекулярными термодинамическими потоками $\overline{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\overline{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$, для которых необходимы соответствующие определяющие соотношения (их вывод для турбулизованной среды в рамках термодинамического подхода приведен, например, в работе (*Колесниченко, 1998*)); и во-вторых, пока что не определенными смешанными одноточечными одновременными корреляциями (моментами второго порядка) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, представляющими собой так называемые турбулентные потоки характеристик среды, связанные с пульсациями термогидродинамических параметров. Корреляционные члены, включающие пульсации давления $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$ и $\overline{\operatorname{div}(p'\boldsymbol{u}'')}$, а также среднемассовое значение вязкой диссипации турбулентной энергии $\langle \varepsilon_b \rangle$ также необходимо будет определить. При феноменологическом построении модели развитой турбулентности, установление определяющих (конститутивных) соотношений, замыкающих систему (5.1.2)—(5.1.5), может быть проведено теми же методом, как и в ламинарном случае [см. п. 2.1], т. е. в соответствии с термодинамическими правилами континуальной механики методом Онзагера, в основу которого, однако, далее будет положено дополнительное представление о том, что соответствующие термодинамические силы ответственны также и за линейную релаксацию флуктуирующих характеристик турбулизованного хаоса к его устойчивому стационарно-неравновесному состоянию (см., например, *Кайзер, 1990*).

5.1.2. Термодинамика структурированной турбулентности. Внутренние пульсирующие координаты подсистемы турбулентного хаоса

Наша ближайшая задача заключается, таким образом, в том, чтобы предложить концепцию, которая позволила бы выйти за пределы классического формализма необратимой термодинамики, рассмотренного во второй главе. Эта цель может быть достигнута путем расширения пространства независимых базисных переменных путем введения в рассмотрение внутренних координат, определяющих микроструктуру подсистемы турбулентного хаоса. Последующий шаг связан с нахождением эволюционных уравнений для этих дополнительных параметров состояния.

В рамках полной модели структурированной турбулентности система уравнений (5.1.2)—(5.1.5), получающаяся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений однокомпонентной жидкости, предназначена для исследования пространственно-временной эволюции осредненных полей гидродинамических величин, включая также разнообразные крупные вихревые образования. В соответствии с принятой нами точкой зрения Пригожина на гидродинамическую турбулентность как на течение макроскопически высокоорганизованное, подсистему турбулентного (вихревого) хаоса будем рассматривать далее как континуум с определенной внутренней микроструктурой. Более того, будем считать, что вихревой континуум состоит из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой, некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле гидродинамических параметров, когерентной составляющей — ансамбля мезомасштабных вихревых структур (многомолекулярных образований). Их образом в фазовом пространстве эквивалентной динамической системы являются классические аттракторы (например, предельные циклы) или странные аттракторы (с фрактальной структурой). Каждая из двух указанных подсистем в отдельности является термодинамически открытой, т. е. способной обмениваться с сопредельной подсистемой энергией и энтропией (но не веществом). Поля гидродинамических скоростей для подсистем осредненного движения и турбулентного хаоса будем считать совпадающими, поскольку в процессе реального турбулентного движения жидкости не происходит разделения соответствующих лагранжевых объемов (эффекта диффузии) — подсистема турбулентного хаоса не имеет макроскопической гидродинамической скорости относительно подсистемы осредненного движения. Отметим, что в литературе известен и другой подход к моделированию структурированной турбулентности, связанный, в частности, с тройным разложением мгновенного движения жидкости на осредненное движение, когерентные и некогерентные пульсации. Основой такого рода моделей служат уравнения гидродинамики, в которых проведено двойное осреднение — по времени и по специально выбранному ансамблю, определенному какими-либо характерными для КС признаками. Однако подобная процедура не свободна от многих противоречий (см., например, *Хлопков и др.*, *2002*).

Подчеркнем еще раз, что принятое нами искусственное разделение реального турбулизованного течения жидкости на воображаемые осредненное и турбулентное (вихревое, пульсирующее), является лишь удобным способом наглядного описания явления, т. е. носит, в известной степени, модельный характер. Для каждой из двух означенных подсистем для любого элементарного объема $d\boldsymbol{r}$ среды определим локальные (крупнозернистые) термодинамические параметры (являющиеся непрерывными функциями координат $\boldsymbol{r}$ и времени t), такие как плотность, давление, температура, внутренняя энергия, энтропия и т. д.[1] Кроме этого, подсистему турбулентного хаоса будем дополнительно охарактеризовывать еще и некоторым числом внутренних координат, связанных, в конечном счете, с ее микроструктурой [см. ниже]. Сразу подчеркнем, что обобщенная температура и энтропия подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемые в качестве первичных концепций, не имеют точной физической интерпретации и вводятся в рассмотрение только для обеспечения связности теории (см. *Жоу и др.*, *2006*).

Помимо этого будем считать, что обобщенные термодинамические параметры состояния, характеризующие стационарно-неравновесную вихревую структуру турбулентного хаоса, связаны обычными для локально-равновес-

[1] В этой связи уместно напомнить следующее: согласно Онзагеру (*1949*), для описания турбулентного хаоса, в котором разномасштабные вихри хорошо перемешаны, могут быть использованы методы статистической механики, а стало быть, применимы и методы статистической термодинамики необратимых процессов.

ной термодинамики соотношениями типа тождеств Гиббса, Гиббса—Дюгема и т. п., которые служат исключительно в качестве ограничения на форму полученных определяющих (материальных) соотношений. Другими словами, предполагается, что подобного рода тождества остаются справедливыми и вдали от локального термодинамического равновесия подсистемы хаоса, если, хаос находится, однако, в устойчивом стационарно-неравновесном состоянии, которое и будет выбрано нами в качестве состояния отсчета. Данное основополагающее допущение, является своего рода новым постулатом (см. *Пригожин, 1960*), на котором и будет основываться термодинамический подход к модельному описанию полностью развитой турбулентности. В связи с этим следует отметить, что поскольку энергия турбулентных движений благодаря молекулярной вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается локальное статистически равновесное состояние подсистемы турбулентного хаоса, в принципе оказывается невозможной. Вместе с тем, для стационарного течения турбулизованной жидкости, когда вязкая диссипация энергии за большое время в среднем компенсируется энергией от внешнего источника, стационарно-неравновесные процессы переноса в подсистеме турбулентного хаоса вполне допустимы и, по их физической сути, не очень отличаются от локально равновесных процессов в какой-либо диссипативной системе (заметим, что в рассматриваемом здесь случае справедлива так называемая H — теорема, согласно которой по истечении достаточно большого времени всякое начальное состояние турбулентного хаоса приближается к стационарно-неравновесному состоянию [см. гл. 6]).

При построении модели турбулентности мы будем использовать еще одну ключевую концепцию теории Колмогорова (*1941*), согласно которой в пределе очень больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = Lu_0/\nu$ и Пекле $\mathrm{Pe} = L_T u_{T0}/\chi$, отвечающих крупномасштабным движениям в потоке, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей (или макроструктурных неоднородностей температуры) и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что статистический режим турбулентных флуктуаций в границах небольшой пространственно-временной области осреднения G мгновенных значений гидродинамических параметров является почти локально изотропным — однородным, изотропным и квазистационарным, т. е. изменяющимся в зависимости лишь от управляющих параметров, и, прежде всего, от числа Рейнольдса Re. Оно определяет, в конечном счете, число каскадов в иерархии вихрей различных порядков. Важно при этом подчеркнуть, что полной локальной изотропии из-за наличия мезомасштабных вихревых образований, естественно, быть не может. Здесь u_0 и u_{T0} — типичные изменения средней скорости на расстояниях соответственно $\sim L$ и L_T; χ, ν — коэффициенты молекулярной температуропроводности и кинематической вязкости; L_T — расстояние, на котором заметно меняется средняя температура. Далее будем для простоты полагать, что число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ имеет порядок единицы и $L \approx L_T$; в этом случае границы инерционного и конвективного интервалов, в которых существенны эффекты молекулярной вязкости и молекулярной теплопроводности можно считать совпадающими.

Используем теперь методы расширенной необратимой термодинамики (см. *Жоу и др., 2006*) и неравновесной статистической термодинамики (см., например, *Кайзер, 1990*) для получения определяющих (замыкающих) соотношений для термодинамических потоков и сил, которые с достаточной для практических целей эффективностью описывают различные процессы турбулентного переноса в координатном пространстве и процессы самоорганизации в фазовом пространстве.

Термодинамика подсистемы осредненного движения

Начнем с анализа балансовых уравнений для осредненной энтропии $\langle S(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ турбулизованной однородной жидкости. Теоретико-вероятностное осреднение справедливого по предположению для микродвижений тождества Гиббса

$$T\delta S = \delta E = p\delta(1/\rho),$$

где $T(\boldsymbol{r}, t)$, $S(\boldsymbol{r}, t)$ — соответственно мгновенные значения абсолютной температуры и удельной энтропии в жидкой частице, приводит к фундаментальному тождеству Гиббса для подсистемы осредненного движения [см. гл. 3]. Это тождество, записанное вдоль осредненной траектории движения центра масс физически элементарного объема $d\boldsymbol{r}$, принимает вид [ср. с (3.2.3)]

$$\frac{D\langle S\rangle}{Dt} = \frac{1}{\langle T\rangle}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} + \frac{\overline{p}}{\langle T\rangle}\frac{D\langle 1/\rho\rangle}{Dt}. \tag{5.1.6}$$

Тождеству (5.1.6) можно придать форму уравнения локального баланса осредненной энтропии $\langle S\rangle$ системы, если исключить из него субстанциональные производные по времени от параметров $\langle E\rangle$ и $\langle 1/\rho\rangle$ с помощью осредненных гидродинамических уравнений (5.1.2) и (5.1.4); в результате получим [см. соотношения (3.2.14), (3.2.15) и (3.2.26)]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle S\rangle) + \operatorname{div}\left(\overline{\rho}\langle S\rangle\langle \boldsymbol{u}\rangle + \frac{\boldsymbol{q}^{\Sigma}}{\langle T\rangle}\right) = \sigma^{i}_{\langle S\rangle} + \sigma^{e}_{\langle S\rangle}, \tag{5.1.7}$$

где

$$0 \leqslant \sigma^{i}_{\langle S\rangle} \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{-\left(\boldsymbol{q}^{\Sigma}\cdot\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\pi}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\overset{\circ}{\boldsymbol{\Pi}}}{}^{S} : \overline{\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}}\right)\right\}, \tag{5.1.8}$$

$$\sigma^{e}_{\langle S\rangle} \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{-\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{v}\cdot\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right\} \equiv \frac{\Im_{E,b}}{\langle T\rangle}, \tag{5.1.9}$$

где $\overline{\overset{\circ}{\boldsymbol{\Pi}}}{}^{S}$ — тензор (осредненной) скорости сдвига, $\overline{\pi} \equiv \frac{1}{3}(\overline{\boldsymbol{P}:\boldsymbol{U}}) = \frac{1}{3}\overline{\Pi_{kk}}$ — осредненное вязкое давление [см. формулы (2.2.15) и (2.2.16)]. Положительная величина $\sigma^{i}_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$ определяет скорость локального производства осредненной энтропии системы $\langle S\rangle$, обусловленного диссипативными процессами переноса внутри подсистемы осредненного движения жидкости; величина $\sigma^{e}_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \Im_{E,b}/\langle T\rangle$ (сток или приток энтропии) отражает, как это будет видно из дальнейшего, обмен энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения. Важно отметить, что величина $\sigma^e_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$ может быть разной по знаку в зависимости от конкретного режима турбулентного движения среды. Действительно, скорость диссипации турбулентной энергии $\langle\varepsilon_b(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ всегда является положительной величиной. Однако скорость перехода энергии $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$ (представляющая собой работу, совершаемую над турбулентными вихрями за единицу времени в единице объема окружающей средой, как следствие существования пульсаций давления и расширения ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' > 0$), или сжатия ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' < 0$) турбулентных вихрей) может быть разной по знаку. Величина $(\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \cdot (\partial\overline{p}/\partial\boldsymbol{r}))$ является положительной в случае мелкомасштабной турбулентности, однако для крупно- и мезомасштабных вихрей она может быть как положительной, так и отрицательной (см., например, *Колесниченко, Маров, 1999*). Таким образом, из уравнения (5.1.7) следует, что в общем случае осредненная энтропия турбулизованной среды $\langle S\rangle$ может как возрастать, так и уменьшаться. Подобное обстоятельство является характерной чертой любых термодинамически открытых систем.

Это означает, что во внешне замкнутой турбулизованной системе, моделируемой двумя континуумами, имеет место некоторая внутренняя незамкнутость. Она возникает благодаря тому, что осредненное движение турбулизованной жидкости описывается только одним из двух континуумов. В то же время каждый физически бесконечно малый элемент объема $d\boldsymbol{r} \sim \Lambda^3$ (где Λ — масштаб осреднения) среды считается все-таки настолько большим, чтобы в модели можно было учесть дополнительную информацию о характере пульсационного движения (турбулентной надструктуры) на масштабах меньших или равных размеру «математической точки». Отсюда, в частности, следует, что одной только осредненной энтропии $\langle S\rangle$ явно не достаточно для адекватного описания всех особенностей структурированной турбулентности, поскольку эта величина не связана с какими-либо параметрами, характеризующими внутреннюю структуру и термодинамику подсистемы турбулентного хаоса и, в частности, с таким ключевым параметром теории, как энергия турбулентности (осредненная пульсационная кинетическая энергия единицы массы среды)

$$\langle b(\boldsymbol{r}, t)\rangle \equiv \overline{\rho(\boldsymbol{u}'')^2}/2\overline{\rho}. \tag{5.1.10}$$

По этой причине для макроскопического описания структурированной турбулентности и, в частности, каскадного процесса переноса турбулентной энергии вихрями разного масштаба (вниз по интервалу размеров), будем использовать далее известное обобщение формализма термодинамики необратимых процессов на среды с внутренней структурой, вводя для этой цели обобщенные экстенсивные термодинамические параметры (внутреннюю энергию $E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, обобщенные химические потенциалы $\mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$ и т. п.) подсистемы турбулентного хаоса, связанные с пульсационным движением жидкости (*Blackadar, 1955*), а также так называемые внутренние координаты, отвечающие микроструктуре подсистемы. Другими словами, мы поступим аналогично тому, как это давно делается в неравновесной термодинамике, например, с целью учета различного рода превращений во внутренних степенях свободы молекул, в частности, учета ориентации полярных молекул относительно внешнего электрического поля (как известно, это можно сделать, вводя внутреннюю координату θ — угол между направлениями поля и диполем), когда используется формализм обобщенного химического потенциала, равного стандартному химическому потенциалу и полевому члену, зависящему от внутренней координаты θ (см. *Пригожин*, *1960*).

Внутренние координаты подсистемы турбулентного хаоса

При моделировании стохастической системы, отвечающей подсистеме турбулентного хаоса, будем использовать формализм обобщенной статистической термодинамики (*Стратонович*, *1985*; *Кайзер*, *1990*), предполагающий изучение статистического ансамбля макроскопически одинаковых подсистем хаоса с одними и теми же обобщенными экстенсивными параметрами состояния типа осредненного удельного объема $1/\overline{\rho}(\boldsymbol{r}, t)$, внутренней энергии $E_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и энтропии $S_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ хаоса, а также некоторой бесконечной последовательностью внутренних переменных $n(q_k, \boldsymbol{r}, t)$. Внутренние переменные $n(q_k, \boldsymbol{r}, t)$ могут представлять собой концентрации мелкомасштабных вихрей (их число в единице объема) или температурных неоднородностей в состояниях, характеризуемых заданными значениями параметров q_k — внутренних координат, определяющих микроструктуру системы. При этом будем предполагать, что структурные вихревые образования хаоса каким-то образом локализованы как в координатном пространстве $\boldsymbol{r}$, так и в пространстве конфигураций $\boldsymbol{q}$. Внутренние координаты $q_k(\boldsymbol{r}, t)$ $(k = \overline{1, n})$ — некоторые характеристики ансамбля вихревого (или температурного) хаоса, отвечающие мелкомасштабным турбулентным пульсациям, являются, в общем случае, случайными (стохастическими) переменными, флуктуирующими относительно своих средних (стационарных) значений q_k^{st}. Именно они служат мерой различий в любом множестве термодинамически тождественных подсистем вихревого ансамбля. Учет флуктуаций внутренних координат, описывающих состояние хаоса при чисто динамическом моделировании [см. п. 5.2] уточняет его статистическое описание и приводит к более адекватному отражению реальности.

К числу стохастических внутренних координат, описывающих макроскопическое состояние турбулентного хаоса, могут быть отнесены непрерывно изменяющиеся локальные случайные параметры, адекватно характеризующих эволюцию завихренной жидкости, включая и пространственно-временную эволюцию различных мезомасштабных когерентных образований. Таким образом, часть внутренних координат q_k может относиться к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть — охарактеризовывать индивидуальные КС. В частности, в качестве стохастических координат $q_k(\boldsymbol{r}, t)$ могут быть выбраны следующие положительно-определенные величины (или их логарифмы): кинетическая энергия вихрей, $b = |\boldsymbol{u}''|^2/2$; скорость диссипации турбулентной энергии в тепло,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j}(\partial u_i''/\partial x_j + \partial u_j''/\partial x_i)^2;$$

скалярная диссипация температурных неоднородностей, $\varepsilon_T = \chi \sum_j (\partial T''/\partial x_j)^2$;

скорость смешения до молекулярного уровня (не влияющего на динамику течения) вещества с концентрацией $\theta(\boldsymbol{r}, t)$, $\varepsilon_\theta = \chi \sum_j (\partial\theta''/\partial x_j)^2$ (заметим, что величина ε_θ определяет меру неоднородности концентрационного поля, исчезающей в единицу времени за счет молекулярной диффузии $D \approx \chi$); энстрофия системы (в случае двумерной турбулентности); средние завихренности поля пульсаций скорости, относящиеся к мезомасштабным вихревым образованиям k-го типа (фундаментальные величины для характеристики КС), и т. п.

Использование внутренних координат в качестве дополнительных макроскопических параметров турбулентного хаоса, позволяет, как мы увидим далее, термодинамически получить (при учете центрального для данного подхода постулата Пригожина, касающегося направления протекания необратимых процессов в любом локальном объеме пространства внутренних координат (см. *Пригожин, 1960*; гл. 3, п. 11)) эволюционные уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) в пространстве конфигураций q_k. Эти кинетические уравнения, предназначенные для определения временной эволюции функции плотности распределения вероятностей различных стохастических мелкомасштабных характеристик турбулентности, позволяют проанализировать также и условия перехода из одного устойчивого стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса в другое, вызванные, в конечном счете, последовательной потерей устойчивости течения жидкости при изменении параметров, управляющих режимом турбулентного движения в целом.

Отметим, что чисто классический (т. е. без введения внутренних стохастических координат) термодинамический подход к моделированию турбулентности, который был использован нами в гл. 3 для подсистемы турбулентного хаоса, в случае структурированного вихревого континуума представляется не вполне адекватным, поскольку любые две реализации ансамбля (множества подсистем хаоса с одинаковым набором экстенсивных термодинамических параметров состояния) будут при его применении тождественными во всех отношениях, что не отвечает реальному положению вещей. Причиной этому являются турбулентные флуктуации внутренних координат состояния хаоса, которые и служат, в конечном счете, мерой различий в любом ансамбле термодинамически тождественных подсистем хаоса. Собственно эти, не подавляемые в сильно неравновесных условиях, турбулентные флуктуации, а, напротив, усиливающиеся в определенных обстоятельствах внутренними необратимыми процессами внутри вихревой подсистемы в так называемых точках бифуркации (в которых подсистема «может выбирать» между различными состояниями), и приводят к разнообразным механическим проявлениям реального турбулизованного течения. В частности, подсистема турбулентного хаоса, находящаяся в некотором устойчивом стационарном состоянии вдали от локального термодинамического равновесия, при определенных значениях управляющих параметров может сместиться к новому стационарному состоянию с нейтральной устойчивостью (связанному с так называемой критической точкой потери устойчивости), и вслед за тем скачкообразно перейти в некоторое другое асимптотически устойчивое стационарное состояние, отвечающее той или иной форме надмолекулярного когерентного поведения большого числа частиц, например, осцилляциям разномасштабных вихрей. Напомним еще раз, что согласно Пригожину (*Пригожин, Стенгерс, 1994*), подобная способность осуществлять порядок через флуктуации является фундаментальным свойством любых открытых неравновесных термодинамических систем. Таким образом, из-за постоянно происходящих турбулентных пульсаций любое квазистационарное состояние турбулентного хаоса удобно представлять себе, как состояние не одной отдельной подсистемы, а целого физического ансамбля подсистем. Именно по этой причине и возникает необходимость в уточнении термодинамического описания турбулизованного течения с тем, чтобы можно было бы учесть эффекты стохастичности моделирующего его вихревого континуума (*Колесниченко, 2002*).

В соответствии с развиваемым здесь стохастико-термодинамическим подходом будем предполагать, что для полного статистического описания случайного векторного процесса $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$ в турбулизованном континууме (набора структурных мелкомасштабных характеристик хаоса $q_k(\boldsymbol{r}, t)$, где $k = \overline{1, n}$, которые часто удобно собрать в один вектор-столбец $\boldsymbol{q}$ в n-мерном пространстве конфигураций) достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\boldsymbol{q}, t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\boldsymbol{q}_0, t_0; \boldsymbol{q}, t)$. Как известно, случайные процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями распределения, являются марковскими процессами. Можно сказать, что это кардинальное предположение определяет класс случайных процессов (турбулентных флуктуаций), к которому применима анализируемая здесь стохастико-термодинамическая модель развитой турбулентности. Будем также использовать двухточечную плотность условной вероятности, $P_2(\boldsymbol{q}_0, t_0|\boldsymbol{q}, t)$, которая позволяет найти вероятное значение параметра $\boldsymbol{q}$ в момент времени t, если в момент времени t_0, с вероятностью равной единице, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$. Эти плотности вероятности будем употреблять для получения средних значений различных функций $f(\boldsymbol{q}(t))$ от случайного вектора состояния $\boldsymbol{q}(t)$: в частности, формула

$$\overline{f(\boldsymbol{q}(t))} \equiv \int f(\boldsymbol{q}(t)) W_1(\boldsymbol{q}, t) d\boldsymbol{q}$$

определяет безусловное среднее величины $f(\boldsymbol{q}(t))$, а формула

$$\overline{f(\boldsymbol{q}(t))}^0 \equiv \int f(\boldsymbol{q}) P_2(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{q}, t) d\boldsymbol{q}$$

вводит среднее значение $f(\boldsymbol{q}(t))$ в момент времени при условии, что $f(\boldsymbol{q}(t_0)) = f(\boldsymbol{q}_0)$ (условное среднее). Связь между средними значениями по условному подансамблю $\overline{f(\boldsymbol{q}(t))}^0$ и по всему физическому ансамблю $\overline{f(\boldsymbol{q}(t))}$ неявно содержится в соотношении

$$P_2(\boldsymbol{q}_0, t_0|\boldsymbol{q}, t) = W_2(\boldsymbol{q}_0, t_0; \boldsymbol{q}, t)/W_1(\boldsymbol{q}_0, t_0),$$

которое, собственно, и определяет так называемую функцию вероятности перехода P_2.

Кроме этого, ограничим наше рассмотрение, стационарным физическим ансамблем турбулентного хаоса, состоящим из адекватных в указанном выше смысле подсистем, поддерживаемых непрерывно действующими внешними источниками турбулентности в таком состоянии, при котором случайные переменные $\boldsymbol{q}(t)$ являются инвариантными относительно сдвига по оси времени, т. е. $\boldsymbol{q}(t_p+\tau)=\boldsymbol{q}(t_p)$ при всех p и τ. Ясно, что в этом случае одновременная плотность вероятности $W_1(\boldsymbol{q})$ не будет зависеть от времени, а плотности совместных вероятностей будут обусловлены лишь разностью $(t-t_0)$, например $P_2(\boldsymbol{q}_0,\, t_0|\boldsymbol{q},\, t)=P_2(\boldsymbol{q}_0,\, 0|\boldsymbol{q},\, t-t_0)$. Имея это ввиду, будем ниже опускать в выражениях для W_2 и P_2 начальный момент времени и записывать их сокращенно: $P_2(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{q},\, t)$ и т. п. Отметим также, что в рассматриваемом нами случае положительная функция P_2 обладает следующими свойствами (см., например, *Кайзер, 1990*):

$$\int P_2(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{q},\, t)d\boldsymbol{q}=1, \quad \int W_1(\boldsymbol{q}_0)P_2(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{q},\, t)d\boldsymbol{q}_0=W_1(\boldsymbol{q}),$$
$$\lim_{t\to\infty} P_2(\boldsymbol{q}_0|\boldsymbol{q},\, t)=W_1(\boldsymbol{q}), \tag{5.1.11}$$

причем последнее соотношение означает, что для стационарных процессов условная плотность асимптотически со временем перестает зависеть от начального условия.

Основное кинетическое уравнение

Напомним, что ключевое положение теории Колмогорова (*1941*) возникновения мелкомасштабной турбулентности состоит в том, что процессы возбуждения вихревых образований, их нелинейные взаимодействия, а также процессы вязкой диссипации турбулентной энергии строго разнесены в пространстве волновых чисел, когда приток энергии в турбулизованный поток происходит вблизи волнового числа k_L, соответствующего макромасштабу турбулентности L, а диссипация энергии становится эффективной вблизи волнового числа k_η (где η — микромасштаб турбулентности, называемый часто масштабом Колмогорова). Другими словами, присутствие инерционного интервала масштабов ($k_L \ll k \ll k_\eta$) является характерным признаком развитой турбулентности. При этом процесс передачи энергии от крупномасштабных турбулентных вихрей к малым вихрям, может быть наглядно представлен как каскадный процесс их дробления (заметим, что впервые идею каскада энергии выдвинул Л. Ричардсон в 1922 году).

Для дальнейших целей нам понадобится так называемое основное кинетическое уравнение для скорости изменения числа вихревых молей $n(\boldsymbol{q})$ в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба, или для функции $P_2(\boldsymbol{q},\, t)\equiv n(\boldsymbol{q})/n_\Sigma$, которая имеет смысл (условной) плотности вероятности обнаружить систему в интервале $(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{q}+d\boldsymbol{q})$ в момент времени t, если в начальный момент (при $t=0$) она с вероятностью, равной единице, находилась в состоянии $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$. Здесь

$$n_\Sigma(\boldsymbol{r},\, t)=\int n(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{r},\, t)d\boldsymbol{q} \tag{5.1.12}$$

— полное число вихревых образований с признаком $\boldsymbol{q}$ в объеме $d\boldsymbol{r}$.

При выводе уравнения для скорости изменения числа вихревых молей $n(\boldsymbol{q})$ в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба будем считать, что механизм каскадного дробления вихрей, связанный с переходом кинетической энергии от крупных вихрей ко все более мелким, таков, что среда «сохраняет память» только лишь о последнем переходе (марковский процесс). Тогда в случае, если концентрация вихрей $n(\boldsymbol{q}_i)$ в состоянии $\boldsymbol{q}_i$ может быть изменена только в результате перехода их из соседних состояний $\boldsymbol{q}_{i-1}$ (распада больших вихрей с признаками $\boldsymbol{q}_{i-1}$ на меньшие вихри с признаками $\boldsymbol{q}_i$) или в соседние состояния $\boldsymbol{q}_{i+1}$ (принцип локальности взаимодействия), имеем $\partial n/\partial t + (J_i - J_{i-1}) = 0$, где J_i — скорость перехода $i \to (i+1)$, а J_{i-1} — скорость перехода $(i-1) \to i$. Поскольку распределение завихренности в реальном потоке турбулизованной жидкости является непрерывным (в случае развитой турбулентности имеется, как известно, континуум возбужденных степеней свободы (см., например, *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*)), то будем далее считать, что подобный процесс перекачки кинетической энергии осредненного движения по каскаду Ричардсона—Колмогорова вниз может быть адекватно описан в рамках изменения случайных параметров $\boldsymbol{q}$, принимающих непрерывные значения. Это соответствует, в частности, такому каскадному процессу разрушения больших и образования мелких вихрей, при котором в единичном акте взаимодействия происходят только бесконечно малые изменения величин $\boldsymbol{q}$, тогда как конечные изменения возникают благодаря кумулятивному действию большого числа вихревых взаимодействий. На языке химии подобный процесс может рассматриваться как ряд последовательных (консекутивных) химических реакций, выражаемых схемой: $s_1 \to s_2 \to s_3 \to \ldots$. Заметим, что в общем случае принцип детального равновесия может нарушаться для термодинамических систем, далеких от полного теплового равновесия; это справедливо, в частности, и для стационарно-неравновесного каскадного процесса образования вихревых структур. Следовательно, для реального каскадного процесса уравнение для скорости изменения концентрации турбулентных вихрей $n(\boldsymbol{q}, t)$ должно быть переписано в форме стандартного уравнения неразрывности

$$\partial n(\boldsymbol{q}, t)/\partial t + \partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)/\partial \boldsymbol{q} = 0$$

в пространстве конфигураций. Здесь $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ — вихревой поток в инерционном интервале, отвечающий числу «вихревых молей», которые в единицу времени переходят из состояния $\boldsymbol{q}$ в состояние $\boldsymbol{q} + d\boldsymbol{q}$. В более общем случае, когда концентрация турбулентных вихрей зависит и от пространственной координаты $\boldsymbol{r}$, кинетическое уравнение для скорости изменения числа $n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$ может быть записано в форме уравнения неразрывности (как в координатном пространстве $\boldsymbol{r}$, так и в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$)

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)\langle \boldsymbol{u} \rangle) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad (5.1.13)$$

или, с учетом (5.1.2), в виде

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) = 0. \qquad (5.1.13^*)$$

Здесь $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$ — подлежащий определению термодинамический поток в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$.

Термодинамика подсистемы структурированного хаоса

Мы видели, что процесс передачи турбулентной энергии по каскаду вихрей в случае развитой турбулентности можно рассматривать как своего рода химические превращения с соответствующим химическим потенциалом $\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})$ для внутренних степеней свободы $\boldsymbol{q}$ и химическим сродством де Донде

$$A_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}) = -\partial\mu_{\mathrm{turb}}/\partial\boldsymbol{q},$$

которое можно трактовать, как движущую силу каскадного процесса, отвечающую протеканию одного эквивалента $n(\boldsymbol{q}) \to n(\boldsymbol{q}+\partial\boldsymbol{q})$ процесса дробления вихрей. Заметим, что понятие химического потенциала отличает большая общность: оно применимо почти к любой модели сплошной среды, если для нее возможно введение тем или иным способом понятия термодинамической температуры (не являющейся в общем случае абсолютной температурой среды).

Распространяя формализм химического потенциала на стационарно-неравновесный турбулентный хаос, будем определять интенсивные термодинамические параметры, такие как обобщенные температура $T_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и давление $p_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ турбулизации (которые никак не связаны с молекулярной температурой и давлением лежащего в основе течения), а также турбулентный химический потенциал $\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$ для внутренних степеней свободы $\boldsymbol{q}$, из фундаментального соотношения Гиббса для обобщенной энтропии (заданной *a priori* в виде характеристической функции

$$S_{\mathrm{turb}} = S_{\mathrm{turb}}(E_{\mathrm{turb}},\ 1/\overline{\rho},\ n(\boldsymbol{q})/\overline{\rho}) \tag{5.1.14}$$

(см., например, *Мюнстер, 2002*)) с помощью следующих соотношений

$$\frac{1}{T_{\mathrm{turb}}} = \left(\frac{\partial S_{\mathrm{turb}}}{\partial E_{\mathrm{turb}}}\right)_{1/\overline{\rho},n/\overline{\rho}}; \quad \frac{p_{\mathrm{turb}}}{T_{\mathrm{turb}}} = \left(\frac{\partial S_{\mathrm{turb}}}{\partial(1/\overline{\rho})}\right)_{E_{\mathrm{turb}},n/\overline{\rho}}; \quad \frac{\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})}{T_{\mathrm{turb}}} = -\left(\frac{\partial S_{\mathrm{turb}}}{\partial(n(\boldsymbol{q})/\overline{\rho})}\right)_{1/\overline{\rho},\overline{E}_{\mathrm{turb}}}. \tag{5.1.15}$$

Химический потенциал $\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})$ для внутренних степеней свободы определяется в общем случае, как функциональная производная. Используемая здесь энтропия турбулизации S_{turb} содержит по предположению все термодинамические сведения о подсистеме стационарно-неравновесного турбулентного хаоса, т. е. связана с устойчивостью, флуктуациями и динамическими изменениями в квазистационарном состоянии точно так же, как равновесная энтропия какой-либо термодинамической системы в локально равновесном состоянии (*Кайзер, 1990*). Одна из замечательных особенностей энтропии S_{turb} состоит и в том, что многие статистические свойства турбулентного хаоса в квазистационарных состояниях могут быть выведены из этой величины. В частности, различные алгебраические соотношения для интенсивных переменных $E_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$, $T_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, $p_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, которые могут быть получены обычным для термодинамики способом из соотношения (5.1.15), допустимо интерпретировать как специфические «уравнения состояния» для подсистемы турбулентного хаоса.

Важно ясно себе представлять, что применимость понятий температуры и энтропии турбулизации не ограничивается только теми ситуациями, которые возникают вблизи состояния локального термодинамического равновесия подсистемы турбулентного хаоса. Напротив, эти величины вводятся в рассмотрение как раз с целью термодинамического описания хаоса в стационарно-неравновесных состояниях. Еще раз отметим, что обобщенная энтропия турбулентности S_{turb} в этом подходе, в отличие от локальной равновесной энтропии подсистемы осредненного движения $\langle S\rangle$, остается, вообще говоря, неопределенной величиной, относительно которой не существует никаких экспериментальных или теоретических (основанных на знании физики турбулентного хаоса) методов для установления ее подлинной функциональной зависимости от параметров состояния. Эта величина вводится в теорию исключительно с целью обеспечения ее связности, а явный вид функционального уравнения (5.1.14) постулируется в зависимости от целей модели.

Дифференциальная форма фундаментального соотношения Гиббса для энтропии турбулизации S_{turb}, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объема $d\boldsymbol{r}$, принимает следующий вид (см. *Пригожин, Кондепуди, 2002*)

$$\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt}=\frac{1}{T_{\text{turb}}}\frac{DE_{\text{turb}}}{Dt}+\frac{p_{\text{turb}}}{T_{\text{turb}}}\frac{D}{Dt}(1/\overline{\rho})-\frac{1}{T_{\text{turb}}}\int\limits_{\boldsymbol{q}}\mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q})\frac{d(n(\boldsymbol{q})/\overline{\rho})}{dt}d\boldsymbol{q}. \tag{5.1.16}$$

Будем далее отождествлять внутреннюю энергию хаоса E_{turb} с энергией турбулентности (*Колесниченко, 2002*)

$$E_{\text{turb}}\equiv\langle b\rangle+\text{const}=\overline{\rho(\boldsymbol{u}'')^2}/2\overline{\rho}+\text{const}, \tag{5.1.17}$$

и полагать, что подсистема турбулентного хаоса в термодинамическом смысле является идеальным классическим газом (с тремя степенями свободы, по которым энергия распределена равномерно) — это ключевые гипотезы рассматриваемого здесь подхода. Тогда, в частности, можно написать следующие уравнения состояния

$$\overline{\rho}\langle b\rangle=\frac{3}{2}\mathcal{R}\overline{\rho}T_{\text{turb}},\qquad p_{\text{turb}}=\mathcal{R}\overline{\rho}T_{\text{turb}},\qquad \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q},T_{\text{turb}})=k_{\text{B}}T_{\text{turb}}\ln n(\boldsymbol{q})+\Phi(\boldsymbol{q},T_{\text{turb}}), \tag{5.1.18}$$

где $\mathcal{R}(=n_\sigma k_{\text{B}}/\overline{\rho})$ — «газовая постоянная» для вихревого континуума, k_{B} — постоянная Больцмана, $\Phi(\boldsymbol{q},T_{\text{turb}})$ — так называемая потенциальная энергия по внутренней координате $\boldsymbol{q}$, зависящая в общем случае и от температуры турбулизации T_{turb}.

Отметим сразу, что в некоторых случаях можно исключить из выражения (5.1.18) потенциальную энергию $\Phi(\boldsymbol{q})$, используя для этой цели заданное *a priori* равновесное распределение $P_2^{\text{st}}(gq)$ внутренних координат $\boldsymbol{q}$, соответствующее какому-либо асимптотически устойчивому стационарному состоянию турбулентного хаоса. Ранее уже отмечалось, что поскольку энергия турбулентных движений благодаря вязкости непрерывно рассеивается, то ситуация, при которой достигается статистически равновесное состояние, здесь оказывается невозможной. Стационарное же состояние в отличие от равновесного обычно является диссипативным. Действительно, из термодинамики известно (см., например, *Пригожин*, *Кондепуди*, *2002*), что по мере перехода какого-либо химически активного молекулярного континуума к устойчивому стационарному (но достаточно близкому к равновесному) состоянию, характеризуемому минимальным производством энтропии, уменьшается также и величина самой энтропии.

По аналогии с молекулярными химическими реагирующими системами, для случая стационарного состояния подсистемы турбулентного хаоса, когда внутренние координаты $\boldsymbol{q}$ могут флуктуировать около некоторого устойчивого стационарного значения $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ при определенных (для данного элементарного объема $d\boldsymbol{r}$) внутренней энергии и удельном объеме, энтропия турбулизации S_{turb} также должна быть минимальной среди всех других состояний с теми же значениями E_{turb} и $1/\bar{\rho}$. Таким образом, справедливо условие

$$\delta S_{\mathrm{turb}} = -\frac{\delta}{T_{\mathrm{turb}}} \int\limits_{\boldsymbol{q}} \mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}) \frac{D(n(\boldsymbol{q})/\bar{\rho})}{Dt} d\boldsymbol{q} = -\frac{1}{\bar{\rho} T_{\mathrm{turb}}} \int \mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}} \delta n(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} = 0,$$

где $\delta n = n(\boldsymbol{q}) - n(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})$. Поскольку полное число вихревых молей постоянно, имеем также $\int \delta n(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} = 0$. Из этих двух условий следует, что для устойчивого стационарного состояния турбулентного хаоса химический потенциал $\mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})$ по внутренним координатам, не зависит от вектора состояния $\boldsymbol{q}$ ($\mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}} = \mathrm{const}$). С использованием этого факта, можно получить выражение

$$\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t) = k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \ln[n(\boldsymbol{q})/n(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})] + \mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}}, \tag{5.1.19}$$

позволяющее определить химический потенциал по заранее известному стационарному распределению $n(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})$ признака $\boldsymbol{q}$. Соотношение (5.1.19) может быть переписано в виде

$$\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t) = k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \ln\left(\frac{P_2(\boldsymbol{q}_0 | q, t)}{W^{\mathrm{st}}_1(\boldsymbol{q})} \right) + \mu^{\mathrm{st}}_{\mathrm{turb}}, \tag{5.1.19*}$$

являющемся обобщением известной формулы Эйнштейна (для статистически равновесного состояния) на квазистационарные состояния в конфигурационном пространстве $\boldsymbol{q}$; при написании формулы (5.1.19*) использовано следующее выражение

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}}) \equiv -\partial \Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})/\partial \boldsymbol{q} = k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \partial \ln W^{\mathrm{st}}_1(\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q} \tag{5.1.19**}$$

для силы трения (в пространстве конфигураций $\boldsymbol{q}$), порожденной потенциальным полем $\Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})$. Функция

$$W^{\mathrm{st}}_1(\boldsymbol{q}) = \mathrm{const} \cdot \exp\left(-\frac{\Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}}} \right)$$

определяет (максимальную) вероятность устойчивого стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, когда флуктуирующие внутренние координаты $\boldsymbol{q}$ остаются неизменными, а функция $\Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})$ играет роль термодинамического потенциала для стационарного состояния.

Напомним, что в равновесной термодинамике не делается различия между двумя концепциями равновесия — равновесным состоянием, отвечающим максимальной энтропии, и равновесным распределением по возможным состояниям, которые физически почти эквиваленты (см., например, *де Грот, Мазур, 1964*). Аналогичная ситуация справедлива и для стационарных состояний в термодинамике неравновесных процессов (*Кайзер, 2002*). Это связано с тем, что асимптотические плотности распределения вероятности состояний сосредоточены в чрезвычайно узкой области и в термодинамическом пределе эти гауссовские величины [см. далее] переходят в дельта-функции, сосредоточенные в $\boldsymbol{q}^{st}$.

Используя уравнение (5.1.13*), преобразуем тождество Гиббса (5.1.16), путем интегрирования по частям и в предположении, что поток $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$ обращается в нуль на обеих границах $\boldsymbol{q}_1$ и $\boldsymbol{q}_2$ области определения переменной $\boldsymbol{q}$ (следствие условия $\int_{\boldsymbol{q}_1}^{\boldsymbol{q}_2} \delta n(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} = 0$), к виду:

$$\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} = \frac{1}{T_{\text{turb}}} \frac{DE_{\text{turb}}}{Dt} + \frac{p_{\text{turb}}}{T_{\text{turb}}} \frac{D(1/\bar{\rho})}{Dt} + \frac{1}{T_{\text{turb}}} \int_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \frac{\partial \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} d\boldsymbol{q}. \tag{5.1.20}$$

Последний член этого соотношения

$$\frac{D_i S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)}{Dt} \equiv \int_{\boldsymbol{q}} \sigma_{\boldsymbol{q}}(S_{\text{turb}}) d\boldsymbol{q} = -\frac{1}{T_{\text{turb}}} \int_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) \frac{\partial \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} d\boldsymbol{q} \geqslant 0 \tag{5.1.21}$$

описывает суммарный рост энтропии турбулизации S_{turb}, обусловленный необратимыми процессами возникновения разнообразных вихревых структур, характеризуемых полным набором внутренних координат $\boldsymbol{q}$. Из (5.1.21) видно, что локальное производство пульсационной энтропии $\sigma_{\boldsymbol{q}}(S_{\text{turb}})$, отвечающее каждой части пространства внутренней координаты $\boldsymbol{q}$, имеет обычную термодинамическую форму

$$\sigma_{\boldsymbol{q}}(S_{\text{turb}}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}) / T_{\text{turb}},$$

где

$$\boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) \equiv -\frac{\partial \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} = -\frac{k_B T_{\text{turb}}}{n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)} \frac{\partial n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} =$$

$$= \frac{k_B T_{\text{turb}}}{n(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)} \exp\left(\frac{\Phi(\boldsymbol{q})}{k_B T_{\text{turb}}}\right) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \left[\exp\left(\frac{\mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{k_B T_{\text{turb}}}\right)\right] \tag{5.1.22}$$

— обобщенное химическое сродство де-Донде для конфигурации $\boldsymbol{q}$ (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса), записанное здесь с учетом соотношения (5.1.15) для обобщенного химического потенциала $\mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)$.

Уравнение переноса для энтропии турбулизации

Получим теперь уравнение переноса для энтропии турбулизации S_{turb}, применяя тот же образ действий, который привел к уравнению (5.1.7). Исключим для этого из (5.1.20) субстанциональные производные от удельного объема $\langle v \rangle$

и турбулентной энергии $\langle b\rangle$ ($\equiv E_{\text{turb}}$), дифференциальное уравнение для которой имеет вид [см. (3.1.69)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle b\rangle}{Dt}=-\operatorname{div}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}+\left(\boldsymbol{R}:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{v}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle.$$

В результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}S_{\text{turb}})+\operatorname{div}\left(\overline{\rho}S_{\text{turb}}\langle\boldsymbol{u}\rangle+\frac{\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{b}}{T_{\text{turb}}}\right)=\sigma_{S_{\text{turb}}}\equiv\sigma^{i}_{S_{\text{turb}}}+\sigma^{e}_{S_{\text{turb}}},\tag{5.1.23}$$

где

$$\sigma^{e}_{S_{\text{turb}}}\equiv\frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\overline{p}\right)-\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\right\}=-\frac{\mathfrak{J}_{E,b}}{T_{\text{turb}}},\tag{5.1.24}$$

$$0\leqslant\sigma^{i}_{S_{\text{turb}}}\equiv\frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{b}\cdot\frac{\partial\ln T_{\text{turb}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\left(\boldsymbol{R}:\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right)+p_{\text{turb}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle-\overline{\rho}\int\limits_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial\mu_{\text{turb}}}{\partial\boldsymbol{q}}d\boldsymbol{q}\right\}=$$

$$=\frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{b}\cdot\frac{\partial\ln T_{\text{turb}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\left(\overset{0}{\boldsymbol{R}}:\overset{0}{\boldsymbol{D}}\right)-p_{\text{turb}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle+\overline{\rho}\int\limits_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q}\right\}.\tag{5.1.25}$$

Здесь $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{\langle b\rangle}\equiv\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2+p'/\rho)\boldsymbol{u}''-\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}''}$ — диффузионный поток турбулентной энергии; $\overset{0}{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r},t)$ — часть с нулевым следом тензора рейнольдсовых напряжений, определяемая соотношением (3.2.26);

$$P_{\text{turb}}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{R}:\boldsymbol{U})\tag{5.1.26}$$

— давление турбулизации. Величины $\sigma^{i}_{S_{\text{turb}}}(\boldsymbol{r},t)$ и $\sigma^{e}_{S_{\text{turb}}}(\boldsymbol{r},t)$ имеют смысл, соответственно, локального производства и стока энтропии S_{turb} подсистемы турбулентного хаоса. Отметим, что работа турбулентных напряжений $\boldsymbol{R}:(\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})$ приводит к росту энтропии хаоса, в то время как вязкая диссипация $\overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle$ уменьшает энтропию турбулизации S_{turb}.

5.1.3. Балансовое уравнение для суммарной энтропии подсистем осредненного движения и структурированного турбулентного хаоса

Складывая выражения (5.1.7) и (5.1.23), получим уравнение баланса для суммарной (полной) энтропии $S_{\Sigma}=\langle S\rangle+S_{\text{turb}}$ турбулизованной жидкостной системы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho S_{\Sigma}})+\operatorname{div}\left(\overline{\rho}S_{\Sigma}\langle\boldsymbol{u}\rangle+\frac{\boldsymbol{q}^{\Sigma}}{\langle T\rangle}+\frac{\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{b}}{T_{\text{turb}}}\right)=\sigma_{\Sigma},\tag{5.1.27}$$

где

$$0\leqslant\sigma_{\Sigma}=\sigma^{i}_{\langle S\rangle}+\sigma^{e}_{\langle S\rangle}+\sigma^{i}_{S_{\text{turb}}}+\sigma^{e}_{S_{\text{turb}}}=\sigma^{i}_{\langle S\rangle}+\sigma^{i}_{S_{\text{turb}}}+\frac{T_{\text{turb}}-\langle T\rangle}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle}\mathfrak{J}_{E,b}\tag{5.1.28}$$

— локальное производство энтропии, связанное с необратимыми процессами внутри суммарного турбулизованного континуума. Величина σ_{Σ}, записанная с учетом формул (5.1.8), (5.1.9) и (5.1.24), (5.1.25) имеет структуру билинейной формы

$$\sigma_\Sigma = \sum_\alpha \Im_\alpha(\boldsymbol{r},\, t) X_\alpha(\boldsymbol{r},\, t):$$

$$0 \leqslant \sigma_\Sigma \equiv \boldsymbol{q}^\Sigma \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right) + \frac{1}{\langle T\rangle}\pi\, \mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \frac{1}{\langle T\rangle}\left(\overset{\circ}{\overline{\boldsymbol{\Pi}}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}}\right) + \boldsymbol{J}_b^{\mathrm{turb}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{T_{\mathrm{turb}}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{T_{\mathrm{turb}}}\left(\overset{\circ}{\boldsymbol{R}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}}\right) + \frac{\overline{\rho}}{T_{\mathrm{turb}}} \int_q \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} + \frac{T_{\mathrm{tirb}} - \langle T\rangle}{T_{\mathrm{turb}}\langle T\rangle} \Im_{E,b}. \qquad (5.1.29)$$

Согласно основному постулату нелинейной термодинамики неравновесных процессов, в случае пребывания системы вблизи относительно устойчивого квазистационарного состояния, термодинамические потоки можно представить в виде линейных функций от сопряженных макроскопических сил:

$$\Im_{\alpha i}(\boldsymbol{r},\, t) = \sum_\beta \Lambda_{\alpha\beta}^{ij} X_{\beta j}(\boldsymbol{r},\, t) \quad (\alpha,\, \beta = 1,\, 2,\, \ldots) \qquad (5.1.30)$$

(см., например, *Кайзер, 1990*). Важно подчеркнуть, что матрица феноменологических коэффициентов $\Lambda_{\alpha\beta}^{ij}$ для случая турбулизованного жидкостного континуума будет зависеть не только от осредненных параметров состояния системы (т. е. от осредненных температуры $\langle T\rangle$, плотности $\overline{\rho}$ и т. п.), но и от характеристик турбулентной надструктуры, т. е. от параметров типа ε_b, T_{turb}, $\langle b\rangle$ и т. п. Подобная ситуация, когда имеет место функциональная зависимость коэффициентов $\Lambda_{\alpha\beta}^{ij}$ от самих термодинамических потоков $\Im_{\alpha i}$ (например, от скорости диссипации ε_b, которая в стационарном случае представляет собой также и поток энергии по каскаду вихрей), является, как известно, типичной для самоорганизующихся систем (см., например, *Хакен, 1985*; *1991*). Это обстоятельство может привести в общем случае к тому, что отдельные слагаемые $\Im_\alpha(\boldsymbol{r},\, t)X_\alpha(\boldsymbol{r},\, t)$ в сумме σ_Σ не будут положительно определенными, хотя вся сумма всегда больше или равна нулю, $\sigma_\Sigma \geqslant 0$. Тогда суперпозиция различных потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы $\Lambda_{\alpha\beta}$, чем, вероятно, и объясняется эффект отрицательной вязкости, в некоторых турбулентных течениях [см. текст под формулой (5.1.63)].

Как видно из выражения (5.1.29), в общем случае спектр возможных перекрестных эффектов для турбулентного режима течения расширяется по сравнению с ламинарным режимом. Так, например, возникновение суммарного потока тепла $\boldsymbol{q}^\Sigma$ в турбулизованном континууме возможно под влиянием не только сопряженной с ним термодинамической силы $\partial(1/\langle T\rangle)/\partial \boldsymbol{r})$, но и под воздействием силы $\partial(1/T_{\mathrm{turb}})/\partial \boldsymbol{r})$, сопряженной с потоком $\boldsymbol{J}_b^{\mathrm{turb}}$ (описывающим "диффузионный"перенос турбулентной кинетической энергии). Однако в настоящее время отсутствуют надежные экспериментальные данные, количественно описывающие перекрестные эффекты подобного рода. Кроме этого, обычно вклад любых перекрестных эффектов в общую скорость какого-либо процесса на порядок меньше по сравнению с прямыми эффектами (см. *де Грот, Мазур, 1964*). Учитывая это обстоятельство, будем далее пользоваться требованием положительности интенсивностей σ_Σ, $\sigma^i_{\langle S\rangle}$, $\sigma^i_{S_{\text{turb}}}$ независимо друг от друга, а также, без специальных оговорок, будем опускать ряд перекрестных эффектов в линейных конститутивных соотношениях (5.1.30).

В конце данного раздела сделаем следующее замечание. Последнее слагаемое в правой части (5.1.29), описывающее производство энтропии внутри суммарного континуума за счет необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно

$$\sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \Im_{E,b}\left(\frac{1}{\langle T\rangle} - \frac{1}{T_{\text{turb}}}\right) \geqslant 0. \qquad (5.1.31)$$

Поэтому «направление» термодинамического потока $\Im_{E,b}(\boldsymbol{r}, t)$ определяется знаком функции состояния $X_\Im \equiv (1/\langle T\rangle - 1/T_{\text{turb}})$, которую следует рассматривать как сопряженную термодинамическую силу (макроскопическую причину), вызывающую поток $\Im_{E,b}$ энтропии. Известно (см. *Пригожин, Стенгерс, 1994*), что подобный обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием структурированного коллективного поведения, т. е. может быть источником самоорганизации в одной из них.

5.1.4. Стационарно-неравновесное состояние турбулентного поля. Определяющие соотношения для структурированной турбулентности

Покажем теперь, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного режима турбулентности определяется притоком отрицательной энтропии ($\sigma^e_{S_{\text{turb}}} \equiv -\Im_{E,b}/T_{\text{turb}} < 0$) от подсистемы осредненного движения. Действительно, поскольку турбулентность сопровождается диссипацией кинетической энергии, то для поддержания ее квазистационарного режима (когда накачка и диссипация энергии взаимно почти уравновешиваются) необходим постоянно действующий внешний (по отношению к рассматриваемой системе) источник. Этим источником энергии может быть, например, проволочная решетка, установленная перпендикулярно к вынужденному течению жидкости, производящая турбулентность; стационарные граничные условия, вызывающие крупномасштабный сдвиг скорости течения или термоконвективную крупномасштабную неустойчивость и т. п. Мощность подобного источника должна быть такой, чтобы скомпенсировать расход турбулентной энергии, рассеиваемой за счет молекулярной вязкости. Для квазистационарного режима турбулентности практически вся расходуемая энергия без сколько-нибудь существенных (но, вообще говоря, имеющих место быть) потерь будет передаваться через инерционный интервал от энергетического к вязкому интервалу, где и происходит ее диссипация в тепло. При этом, процесс передачи энергии от крупномасштабных к малым вихрям, может быть наглядно представлен как случайный каскадный процесс Ричардсона—Колмогорова дробления турбулентных вихрей.

В развиваемом здесь модельном подходе мы будем предполагать, что подобному квазистационарному режиму турбулентности отвечает непрерывный процесс передачи энергии от подсистемы осредненного движения жидкости к подсистеме турбулентного хаоса. Очевидно, что тогда в вихревом континууме, связанном с мелкомасштабной турбулентностью, устанавливается такой стационарно-неравновесный режим между притоком энергии от «внешнего источника» (обязанного осредненному течению жидкости) и ее диссипацией (из-за необратимых процессов внутри самой подсистемы турбулентного хаоса), при котором $dS_{\text{turb}}/dt \cong 0$ (см. *Пригожин*, *Кондепуди*, *2002*). Заметим попутно, что для открытой подсистемы турбулентного хаоса квазистационарное состояние, для которого производство энтропии минимально, является аттрактором, в то время как для всей турбулизованной системы в целом аттрактором служит состояние, соответствующее максимуму суммарной энтропии. Условие $dS_{\text{turb}}/dt \cong 0$ означает, что производство $\sigma^i_{S_{\text{turb}}}$ энтропии турбулизации S_{turb} в такой степени компенсируется ее оттоком $\sigma^e_{S_{\text{turb}}}$, что суммарное возникновение энтропии S_{turb} почти отсутствует

$$\sigma_{S_{\text{turb}}} \equiv \sigma^e_{S_{\text{turb}}} + \sigma^i_{S_{\text{turb}}} \cong 0.$$

При этом следует также иметь в виду, что величина потока энтропии турбулизации в стационарном случае является постоянной, $\boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} \equiv \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_b / T_{\text{turb}} \cong \text{const}$ ($\operatorname{div} \boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} \approx 0$). Так как $\sigma^i_{S_{\text{turb}}} \geqslant 0$, то справедливо неравенство $0 > \sigma^e_{S_{\text{turb}}} \cong -\sigma^i_{S_{\text{turb}}}$, т. е. подсистема турбулентного хаоса должна экспортировать энтропию во «внешнюю среду» (отдавать ее подсистеме осредненного движения), чтобы скомпенсировать производство энтропии за счет необратимых внутренних процессов внутри себя. Другими словами для поддержания стационарно-неравновесного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды»,

$$\sigma^e_{S_{\text{turb}}} \equiv -\mathfrak{I}_{E,b}/T_{\text{turb}} = -\langle T\rangle \sigma^e_{\langle S\rangle}/T_{\text{turb}} < 0.$$

Как известно, такого рода условие является достаточным для возникновения диссипативных когерентных образований в вихревом континууме (см. *Пригожин*, *Стенгерс*, *1986*, *1994*). Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии хаоса величина оттока энтропии из подсистемы осредненного движения положительна ($0 < \sigma^e_{\langle S\rangle} \equiv \mathfrak{I}_{E,b}/\langle T\rangle$), то скорость $\mathfrak{I}_{E,b}$ обмена энтропией (теплом) между осредненным и турбулентным движениями также положительна, $\mathfrak{I}_{E,b} \geqslant 0$. Но тогда из неравенства (5.1.31) следует, что температура турбулизации T_{turb} выше осредненной температуры турбулизованной жидкости ($T_{\text{turb}} > \langle T\rangle$), что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, возникновение когерентных структур (в нашем случае возникновение разномасштабных когерентных вихревых образований в подсистеме турбулентного хаоса) при отводе тепла из системы, т. е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи (*Эбелинг*, *2004*).

Определяющие соотношения для структурированной турбулентности

Итак, поступающая в подсистему турбулентного хаоса негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование ее внутренней структуры. Но тогда справедливо соотношение $0 \leqslant \sigma^3_{\langle S\rangle} = -T_{\text{turb}}\sigma^e_{S_{\text{turb}}}/\langle T\rangle \cong T_{\text{turb}}\sigma^i_{S_{\text{turb}}}/\langle T\rangle$, и уравнение баланса (5.1.7) осредненной энтропии $\langle S\rangle$ турбулизованной жидкостной системы принимает вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle S\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\left(\frac{\boldsymbol{q}^\Sigma}{\langle T\rangle}\right) = \sigma^i_{\langle S\rangle} + \sigma^e_{\langle S\rangle} \cong \sigma^i_{\langle S\rangle} + \frac{T_{\text{turb}}}{\langle T\rangle}\sigma^i_{S_{\text{turb}}} \cong \sigma_\Sigma, \tag{5.1.32}$$

где для локального рассеяния энергии $\langle T\rangle\sigma_\Sigma$ справедливо выражение

$$\langle T\rangle\sigma_\Sigma \equiv -\left(\boldsymbol{q}^\Sigma\cdot\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\mathring{\boldsymbol{R}}:\mathring{\boldsymbol{D}}\right) + \overline{\rho}\int\limits_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{q} \geqslant 0. \tag{5.1.33}$$

Здесь $\boldsymbol{q}^\Sigma(\boldsymbol{r}, t) \equiv \boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}$ — суммарный поток тепла в подсистеме осредненного движения для режима развитой турбулентности. Исходя из (5.1.33), можно записать в линейном приближении и при использовании принципа Кюри—Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в локально изотропной среде невозможна (см., например, *де Грот*, *Мазур*, *1974*)), следующие определяющие (градиентные) соотношения для турбулентных потоков и сопряженных им термодинамических сил:

$$\boldsymbol{q}^\Sigma(\boldsymbol{r}, t) = -\lambda^{\text{turb}}\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{5.1.34}$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle\boldsymbol{U} + \overline{\rho}\nu^{\text{turb}}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\text{transp}}\right) - \frac{1}{3}(\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle)\boldsymbol{U}\right\}, \tag{5.1.35}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) = \int\limits_{\tilde{\boldsymbol{q}}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r}, t)\cdot\boldsymbol{A}(\tilde{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r}, t)d\tilde{\boldsymbol{q}}, \tag{5.1.36}$$

соответствующие режиму стационарного состояния турбулентного поля. Заметим, что условие линейности не настолько сильно, чтобы лишить рассматриваемый случай практического значения.

Оценивая состояние проблемы замыкания осредненных гидродинамических уравнений в целом, следует признать, что в настоящее время почти все полуэмпирические модели турбулентности в той или иной степени основаны на градиентных соотношениях, о чем подробно говорилось в гл. 3 и 4. Феноменологические коэффициенты (коэффициенты турбулентного обмена) $\lambda^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, $\nu^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, \mathbf{t})$ в этих соотношениях являются скалярными величинами, поскольку сильная турбулентность, является, как было подчеркнуто, локально однородной и изотропной. Эти величины, в отличие от коэффициентов молекулярного обмена, не являются материальными константами. Данное обстоятельство связано с тем, что в турбулизованном континууме разнообразные процессы переноса (вещества, импульса и энергии) из одной области системы в другую, определяются коллективными движениями молекул (вихревыми образованиями), и, следовательно, должны зависеть от параметров интенсивности турбулентности, в частности, от параметров $\langle\varepsilon_r\rangle$ и L (или $\langle b\rangle$). Так, например, в инерциальном интервале масштабов вихрей ($\eta < r < L$), коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, отвечающий эмпирическому «закону четырех третей» Ричардсона—Обухова (этот закон следует, в частности, из соображений теории размерности и подобия) имеет вид: $\nu^{\mathrm{turb}} \approx \langle\varepsilon_r\rangle^{1/3}L^{4/3} \approx \langle b\rangle^2/\langle\varepsilon_r\rangle$.

Таким образом, при моделировании стационарно-неоднородной турбулентности в тех приложениях, когда важны процессы диссипации энергии в системе, необходимо привлекать к рассмотрению уравнение переноса тепла для осредненного движения в виде (5.1.32); это уравнение должно быть дополнено линейными определяющими соотношениями (5.1.34)—(5.1.36).

5.1.5. Принцип Пригожина. Термодинамический вывод уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова

Согласно формуле (5.1.36), феноменологическое соотношение для термодинамического потока $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$ и соответствующего «мгновенного» сродства $\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})$ имеет в общем случае интегральный вид. Вслед за Пригожиным (см. *Пригожин, 1960*; гл. 3, п. 11), будем считать, что в каждой части внутреннего координатного пространства $\boldsymbol{q}$ необратимые процессы идут в таком направлении, что происходит только положительное приращение энтропии. Это означает, что положительным будет не только интеграл (5.1.19), но и величина

$$T_{\mathrm{turb}}\sigma_q(S_{\mathrm{turb}}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) \geqslant 0, \tag{5.1.37}$$

представляющая собой рассеяние энергии на единицу объема конфигурационного пространства $\boldsymbol{q}$. Тогда определяющее соотношение, связывающее поток $\boldsymbol{J}(q)$ и сродство $\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q})$ состояния $\boldsymbol{q}$ (соответствующее протеканию одного эквивалента процесса распада вихрей), есть просто

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\cdot\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}}{n(\boldsymbol{q}, t)}\frac{\partial n(\boldsymbol{q}, t)}{\partial\boldsymbol{q}} + \frac{\partial\Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})}{\partial\boldsymbol{q}}\right) =$$

$$= -\frac{\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})}{n(\boldsymbol{q}, t)}\cdot\left(-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})n(\boldsymbol{q}, t) + k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}\frac{\partial n(\boldsymbol{q}, t)}{\partial\boldsymbol{q}}\right). \tag{5.1.38}$$

Здесь $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})$ — положительно определенная локальная матрица коэффициентов переноса, удовлетворяющая соотношению взаимности Онзагера—Каземира $\boldsymbol{L}^{\mathrm{transp}} = \boldsymbol{L}$; $n(\boldsymbol{q})$ — числа вихревых молей в каскадном процессе взаимодействия турбулентных движений разного масштаба.

Соотношение (5.1.38), рассматриваемое совместно с (5.1.13), позволяет получить следующие эволюционное уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (в кинетической форме (см. *Климонтович, 1995*)) в пространстве стохастической переменной $\boldsymbol{q}$ для функций распределения различных статистических характеристик мелкомасштабной турбулентности

$$\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\langle\boldsymbol{u}\rangle P_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\cdot\left\{-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})P_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t) + \frac{\varepsilon^2}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, t)}{\partial\boldsymbol{q}}\right\}. \tag{5.1.39}$$

Здесь поток вероятности $J = J_{dr} + J_{\text{dif}}$ складывается из дрейфовой J_{dr} и диффузионной J_{dif} составляющих:

$$J_{dr} = KP_2 \quad J_{\text{dif}} = -\frac{\varepsilon^2}{2}Q \cdot \frac{\partial P_2}{\partial q},$$

где введены следующие обозначения для вектора дрейфа K и матрицы обобщенных коэффициентов диффузии D в пространстве стохастической переменной q

$$K(q) \equiv L(q) \cdot f(q), \qquad D = \varepsilon^2 L(q) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q, \qquad Q(q) \equiv 2L(q). \tag{5.1.40}$$

Функция $P_2(q, t) \equiv n(q)/n_\Sigma$ имеет смысл (условной) плотности вероятности обнаружить систему в интервале $(q, q + dq)$ в момент времени t, если в начальный момент (при $t = 0$) она с вероятностью, равной единице, находилась в состоянии qst. Параметр $\varepsilon \equiv \sqrt{k_B T_{\text{turb}}} = \sqrt{\overline{\rho(u'')^2}/3\overline{\rho}}$ характеризует суммарную интенсивность воздействия внутреннего шума подсистемы турбулентного хаоса (порожденного его «тепловой» структурой) на случайный процесс $q(t)$. При написании (5.1.39) параметр подвижности $L(q) \equiv L(q)/n(q)$ по внутренней координате q считался нами не зависящим в первом приближении от плотности $n(q)$. Следует отметить, что в общем случае матрица K не образует, вообще говоря, вектор, если не ограничиваться при моделировании только линейными преобразованиями координат.

Наряду с кинетической формой записи уравнения ФПК в виде (5.1.39), в литературе используются и другие представления этого уравнения. Из них наибольшую популярность имеют представления Ито и Стратоновича. Они основаны на разной трактовке так называемых стохастических интегралов (см., например, *Тихонов, Миронов, 1977*), возникающих при решении соответствующих нелинейных стохастических уравнений Ланжевена. Эти представления, хотя и основываются на одинаковых по форме стохастических уравнениях [см. (5.2.23)], но приводят к отличным по форме уравнениям ФПК:

$$\frac{\partial P_2(q, r, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\langle u \rangle P_2(q, r, t)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial q} \cdot \left\{ -(K(q) + H(q))P_2(q, r, t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial q} \cdot (Q(q)P_2(r, r, t)) \right\}, \tag{5.1.39*}$$

где $H(q) \equiv \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial Q(q)}{\partial q}$ — «фиктивная сила», зависящая от выбора исчисления. При $\lambda = 0,\ 1/2,\ 1$ мы имеем дело соответственно с представлением уравнения ФПК в форме Ито, Стратоновича и Климонтовича.

Отметим, что если реакция подсистемы турбулентного хаоса на воздействие внешней среды (подсистемы осредненного движения) не зависит от ее внутреннего состояния, задаваемого стохастической переменной q, то и величина коэффициента диффузии не меняется с координатой q (т. е. $Q(q) = \text{const} = Q$). Тогда можно считать, что стохастическая система обладает аддитивным шумом, который в нашем случае сводится просто к интенсивности $\varepsilon^2 = k_B T_{\text{turb}}$ внутреннего шума подсистемы турбулентного хаоса. Фиктивная сила $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ для систем подобного типа тождественно равна нулю, т.е. они совершенно нечувствительны к выбору исчисления. Другими словами, все три формы уравнения ФПК принимают для них один и тот же простейший вид (5.1.39). Однако в общем случае возможна обратная связь между внутренними состояниями $\boldsymbol{q}$ стохастической подсистемы хаоса и подсистемой осредненного движения. Оказывается, что не только внешние флуктуации (связанные, например, с теми степенями свободы турбулентного поля, которые не описываются выделенными координатами $\boldsymbol{q}$) влияют на стохастическую подсистему турбулентного хаоса, но и последняя оказывает обратное воздействие на их интенсивность. Применительно к рассматриваемому случаю это означает, что коэффициент диффузии приобретает зависимость от случайной координаты $\boldsymbol{q}$, т. е. внешние флуктуации имеют мультипликативный характер. При наличие мультипликативного шума, когда $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) \neq \mathrm{const}$, простейшая форма уравнения ФПК (5.1.39) имеет место только в представлении Климонтовича ($\lambda = 1$).

Таким образом, для систем с мультипликативным шумом возникает проблема выбора исчисления, поскольку сила, входящая в уравнения ФПК определяется неоднозначным образом. В исчислении Ито она сводится к реальной силе, действующей на выделенную степень свободы. При переходе к исчислению Стратоновича возникает добавка, пропорциональная производной от эффективного коэффициента диффузии. В кинетическом представлении Климонтовича величина этой добавки удваивается. Важно, что она существенным образом влияет на поведение стохастической системы, в результате чего представляется актуальным вопрос о физической природе указанной добавки и выборе исчисления. К этой проблеме мы вернемся в следующей главе.

5.1.6. Примеры уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова, описывающих эволюцию пульсирующих характеристик турбулентного хаоса

Покажем теперь (на простых примерах), что пригожинский принцип (5.1.37) может служить основой для получения эволюционных уравнений в частных производных (уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова) в пространстве стохастической переменной $\boldsymbol{q}$ для функций распределения различных стохастических характеристик мелкомасштабной турбулентности, если относительно последних заранее приняты соответствующие гипотезы распределения в стационарно-неравновесном состоянии. Следует, однако, иметь в виду, что почти всегда подобного рода гипотезы не вполне строги и являются сильной идеализацией, связанной с упрощением реального турбулентного движения в естественных условиях (см. *Монин*, *Яглом*, *1996*).

Эволюция вихрей в пространстве пульсирующих скоростей

Применим сначала предположение (5.1.37) к выводу кинетического уравнения, описывающего изменение во времени функции плотности вероятности распределения вихревых скоростей $P_2(u''\boldsymbol{r}, t)$ ($\equiv n(u'', \boldsymbol{r}, t)/n_\Sigma$; n — числовая плотность турбулентных вихрей; n_Σ — полное число вихревых молей [см. (5.1.12)]). Эта функция рассматривается далее как внутренняя переменная подсистемы турбулентного хаоса, а пульсирующая скорость u'' — как внутренняя координата q. Известно, что функция распределения вероятностей пульсирующей скорости не является универсальной в случае развитой турбулентности, поскольку она зависит от механизма, порождающего турбулентное поле. Тем не менее, следуя Миллионщикову (*1941*), используем далее гипотезу о нормальном распределении пульсирующих скоростей (для локально изотропного турбулентного поля) в стационарном случае

$$W_1(u'') \equiv n^{\text{stat}}(u'')/n_\Sigma = (\beta/\sqrt{\pi}) \cdot \exp(-\beta^2 u''^2). \qquad (5.1.41)$$

Подобное распределение Миллионщиков применил в теории турбулентности для специальных целей, которые здесь мы обсуждать не будем. Заметим только, что есть много примеров, когда функция распределения скорости приближенно оказывается гауссовской, например, в турбулентности, порождаемой решетками в аэродинамических трубах, или для турбулентности в атмосферном пограничном слое (см., например, *Бэтчелор*, *1955*; *Фриш*, *1998*). Для рассматриваемой нами подсистемы турбулентного хаоса постоянную β в (5.1.41) можно связать с температурой турбулизации T_{turb} точно таким же способом, как это делается в кинетической теории газов (см. *Ферцигер*, *Капер*, *1976*). Используя (5.1.17) и (5.1.41), легко найти, что $\beta^2 = (2\mathcal{R}T_{\text{turb}})^{-1}$, откуда для функции $n^{\text{stat}}(u'')$ получим другое эквивалентное выражение

$$n^{\text{stat}}(u'') = n_\Sigma \left(\frac{1}{2\pi\mathcal{R}T_{\text{turb}}} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{u''^2}{2\mathcal{R}T_{\text{turb}}} \right) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{u''^2}{2\mathcal{R}T_{\text{turb}}} \right). \qquad (5.1.41^*)$$

Подставляя это распределение в (5.1.16), получим следующее представление химического потенциала $\mu_{\text{turb}}(u'', \boldsymbol{r}, t)$ для конфигурации u'':

$$\mu_{\text{turb}}(u'', \boldsymbol{r}, t) = \frac{k_B}{\mathcal{R}}(u''^2/2) + k_B T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \ln[n(u'', \boldsymbol{r}, t)] + \text{const}. \qquad (5.1.42)$$

С учетом этой формулы, феноменологическое соотношение (5.1.36)) для потока вероятности $J(u'', \boldsymbol{r}, t)$ принимает вид

$$J(u'') = -\frac{\bar{\rho}}{n_\Sigma} L_{u''} \left(u'' + \frac{\mathcal{R}T_{\text{turb}}}{n(u'')} \frac{\partial(u'')}{\partial u''} \right) = -\alpha \left(u'' n(u'') + \mathcal{R}T_{\text{turb}} \frac{\partial n(u'')}{\partial u''} \right), \qquad (5.1.43)$$

где $\mathcal{R} = n_\Sigma k_B/\bar{\rho}$. Здесь введен коэффициент $\alpha \equiv k_B L_{u''}/\mathcal{R}n(u'')$, который может быть интерпретирован как «подвижность» в пространстве внутренней координаты u'' на единицу объема; в первом приближении этот коэффициент не зависит от $n(u'')$ и по предположению от величины u''. При подстановке (5.1.43) в (5.1.19), получим искомое кинетическое уравнение ФПК для функции плотности условной вероятности пульсационной скорости u'':

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (P_2 \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \rangle) - \alpha \frac{\partial}{\partial u''} \left(u'' P_2 + \mathcal{R}T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \frac{\partial P_2}{\partial u''} \right) = 0. \qquad (5.1.44)$$

Это динамическое уравнение, дополненное начальным условием $P_2 = \delta(u'' - 0)$ (справа стоит δ-функция, сосредоточенная в точке 0), описывает временную эволюцию функции плотности распределения вероятности P пульсирующей скорости u'', в частности, для затухающей (так называемой вырождающейся) турбулентности. Следует отметить, что величина $K = -\alpha u''$ (коэффициент трения в соответствующем уравнении Ланжевена) играет роль коэффициента дрейфа в стандартной записи уравнения ФПК, а величина

$$D \equiv 2L_{u''}k_B T_{\mathrm{turb}}/n(u'') = 2\alpha \mathscr{R} T_{\mathrm{turb}} = \alpha\beta^{-2}$$

имеет смысл коэффициента диффузии.

Нормальное распределение (5.1.41), являющееся стационарным решением одномерного по параметру u'' уравнения ФПК (5.1.44), можно принять за начальное статистическое состояние поля пульсирующих скоростей для целого класса различных движений вырождающейся турбулентности. Тогда нестационарное решение этого уравнения удается построить в аналитически замкнутом виде:

$$P_2(u'', \boldsymbol{r}, t) = \{\pi a(\boldsymbol{r}, t)\}^{-1/2} \exp\{-[u'' - b(\boldsymbol{r}, t)]^2/a(\boldsymbol{r}, t)\}, \tag{5.1.45}$$

где

$$a(\boldsymbol{r}, t) = \frac{D}{\alpha}\{1 - \exp(-2\alpha t)\} + a_0 \exp(-2\alpha t), \qquad b(\boldsymbol{r}, t) = b_0(\boldsymbol{r}) \exp(-\alpha t); \tag{5.1.46}$$

$a_0(\boldsymbol{r})$ и $b_0(\boldsymbol{r})$ — начальные условия. Это решение позволяет рассчитать различные n-точечные моменты (корреляционные функции) m-го порядка, описывающие статистическую связь между случайными скоростями в различных точках пространства-времени. В частности, для величин $\overline{u''}^0(\boldsymbol{r}, t)$ (условная средняя скорость ансамбля вихрей в момент времени t) и $\overline{u''(\boldsymbol{r}, t)u''(\boldsymbol{r}, t_1)}$ (двух временная одноточечная корреляционная функция) имеем:

$$\overline{u''}^0(\boldsymbol{r}, t) = \int u'' P_2(0 \mid u'', t) du'' = b_0(\boldsymbol{r}) \exp(-\alpha t), \tag{5.1.47}$$

откуда $b(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{u''}^0(\boldsymbol{r}, t)$;

$$\overline{u''(\boldsymbol{r}, t)u_1''(\boldsymbol{r}, t_1)} = \int u'' du'' \int u_1'' du'' W_2(u'', t; u_1'', t_1) =$$
$$= \overline{u''^2(\boldsymbol{r}, t)} \exp\{-\alpha|t - t_1|\} = \frac{1}{2}\,\frac{D}{\alpha}\, \exp\{-\alpha|t - t_1|\}, \tag{5.1.48}$$

где среднее берется по стохастическому процессу (см., например, *Хакен, 1985*). Здесь $W_2(u'', t; u_1'', t_1)$ — совместная плотность вероятности, которая в силу марковости процесса зарождения новых мод пульсационного движения (дробления вихревых образований) представляется в виде произведения плотности вероятности в момент t_1, $W_1(u_1'', t_1)$, и условной вероятности $P_2(u'', t \mid u_1'', t_1)$ (сводящейся в момент $t = t_1$ к δ-функции $\delta(u'' - u_1'')$):

$$W_2(u'', t; u_1'', t_1) = W_1(u_1'', t_1) P_2(u'', t \mid u_1'', t_1).$$

Так как $D = 2\alpha \mathscr{R} T_{\mathrm{turb}} = \frac{4}{3}\alpha\langle b\rangle$, то из (5.1.48) следует, во-первых, верное соотношение

$$\overline{u''^2(\boldsymbol{r}, t)} = \frac{2}{3}\langle b\rangle \cong \frac{1}{3}\overline{|\boldsymbol{u}''|^2},$$

согласующееся с предположением о локальной изотропности вихревого поля скоростей в случае развитой турбулентности, и, во-вторых, эффективная формула для одной из наиболее важных корреляционных величин в теории статистической турбулентности

$$\overline{u''(\boldsymbol{r},t)u''(\boldsymbol{r},t_1)} = \frac{2}{3}\langle b\rangle \exp(-\alpha|t-t_1|), \tag{5.1.49}$$

которая определяет быстроту «забывания своего прошлого» пульсационной скоростью (согласно этой формуле это происходит за время порядка $t \cong 1/\alpha$).

Решение (5.1.45) при нулевых значениях параметров a_0 и b_0 принимает следующий вид

$$P_2(u'',t) = \{2\pi\mathcal{R}T_{\text{turb}}[1-\exp(-2\alpha t)]\}^{-1/2} \exp\left\{\frac{u''^2}{2\mathcal{R}T_{\text{turb}}[1-\exp(-2\alpha t)]}\right\}, \tag{5.1.50}$$

позволяющий проследить временную эволюцию функции распределения условной вероятности для пульсирующей скорости, в случае если при стационарном режиме турбулентности распределение по скоростям было гауссовским.

Следует иметь в виду, что выбор пульсирующей скорости u'' в качестве подходящей характеристики турбулентных вихрей (внутренней координаты подсистемы турбулентного хаоса), в общем случае не оправдывает себя, поскольку гауссовское распределение вероятностей пульсирующей скорости u'' не подтвердилась с достаточной степенью надежности ни экспериментально (было установлено, например, что за решеткой отклонение от нормальности значительно возрастет с ростом числа Рейнольдса Re), ни теоретически (как известно, для этого распределения классические законы турбулентности «двух и пяти третей» нарушаются). Ранее мы уже указывали, что наиболее *приемлемыми характеристиками мелкомасштабной турбулентности* на роль внутренней координаты являются неотрицательные макроскопические переменные — четные функции скоростей, типа скорости диссипации турбулентной энергии и т. п. (см., например, *Монин, Яглом, 1996*). Подобные случайные характеристики, согласно гипотезе Колмогорова, асимптотически удовлетворяют логарифмически нормальному распределению вероятностей. Это объясняется тем, что процесс последовательного дробления вихревых образований подобен процессу коагуляции твердых частиц (а последний приводит, как известно, к логнормальному распределению частиц по размерам). Далее в гл. 6 мы проанализируем уравнение ФПК, описывающее временную эволюцию функции распределения вероятностей для скорости диссипации турбулентной энергии в соответствующем конфигурационном пространстве. Но уже здесь отметим, что логнормальное распределение не описывает аккуратно края истинного распределения случайной переменной и поэтому лишь с большой осмотрительностью может быть использовано для вычисления старших моментов.

Каскадный процесс (термодинамическое рассмотрение, соответствующее первоначальным гипотезам подобия Колмогорова)

Применим теперь пригожинский принцип (5.1.37) к выводу кинетического уравнения, описывающего временную эволюцию функции распределения вихрей в пространстве кинетической энергии. Будем описывать каскадный процесс Ричардсона—Колмогорова (крупные вихри $\to$ мелкие вихри $\to$ теплота), используя аналогию с процессом последовательных химических реакций.

В этом случае исходное кинетическое уравнение (5.1.13) для функции распределения $P(0 \mid q; \boldsymbol{r}, t)$ турбулентных вихрей в пространстве пульсирующей энергии ($q = \rho|\boldsymbol{u}''|^2/2$) принимает вид

$$\frac{\partial P_2(0|q; \boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (P_2(0 \mid q; \boldsymbol{r}, t)\langle \boldsymbol{u} \rangle) = \frac{\partial}{\partial q}(P_2(0 \mid q; \boldsymbol{r}, t)\varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t)), \tag{5.1.51}$$

где

$$\varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t) \equiv -J(q, \boldsymbol{r}, t)/n(q, \boldsymbol{r}, t) \tag{5.1.52}$$

— скорость реакции перехода из состояния q в состояние $q + dq$, отвечающая потоку вероятности $J(q)$ в состоянии q; n — концентрации турбулентных вихрей. Другими словами соотношение (5.1.51) определяет параметр $\varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t)$, который в рассматриваемом случае можно интерпретировать, как скорость передачи кинетической энергии $\rho|\boldsymbol{u}''|^2/2$ по иерархии турбулентных вихрей вдоль координаты q; одновременно эта величина определяет и значение диссипации кинетической энергии в вихрях сорта q. Действительно, уравнение для первого момента

$$\int qP_2(0 \mid q; t)dq = \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2/2}^{0} = \overline{\rho}\langle b \rangle,$$

получаемое из (5.1.51) в результате интегрирования по частям (и в предположении, что на границах области интегрирования поток $J(q, \boldsymbol{r}, t)$ равен нулю, принимает классический вид (см., например, *Ландау, Лифшиц, 1988*)

$$\overline{\rho}\frac{D\langle b \rangle}{Dt} \cong -\int \varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t)P_2(0 \mid q; \boldsymbol{r}, t)dq = -\overline{\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)}^{0} \cong -\overline{\rho}\langle \varepsilon(\boldsymbol{r}, t) \rangle \tag{5.1.53}$$

(здесь условное среднее берется по стохастическому процессу q), в котором параметр $\langle \varepsilon \rangle$ определяет среднюю скорость диссипации турбулентной энергии в точке $(\boldsymbol{r}, t)$. Именно по этой причине и возможна интерпретация величины $\varepsilon(q)$, как скорости диссипации энергии в вихрях сорта q (в точке $q = \rho|\boldsymbol{u}''|^2/2$ конфигурационного пространства). Но тогда, для той части энергии рассеяния $\langle T \rangle \sigma_\Sigma$ [см. формулу (5.1.33)], которая обусловлена передачей турбулентной энергии по каскаду, имеем

$$(\langle T \rangle \sigma_\Sigma)^{\mathrm{Ch}} \equiv -\overline{\rho}\int_q \varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t)n(q, \boldsymbol{r}, t)A_{\mathrm{turb}}(q, \boldsymbol{r}, t)dq \geqslant 0. \tag{5.1.54}$$

Отсюда следует локальное феноменологическое уравнение пригожинского типа:

$$\varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t) = L_q A_{\mathrm{turb}}(q, \boldsymbol{r}, t)/n(q, \boldsymbol{r}, t) = -\alpha' A_{\mathrm{turb}}(q, \boldsymbol{r}, t), \tag{5.1.55}$$

в котором

$$A_{\mathrm{turb}}(q) = -k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \frac{\partial \ln n(q)}{\partial q} + f(q) \tag{5.1.56}$$

— химическое сродство процесса дробления вихрей (функция состояния подсистемы турбулентного хаоса); $f(q) = -\partial\Phi/\partial q$ — так называемая сила трения; $\alpha' = -L_q/n(q)$ — коэффициент подвижности, который по предположению не зависит от q.

В том случае, когда в турбулизованной среде устанавливается такой стационарно-неравновесный режим течения, при котором скорость передачи энергии по каскаду постоянна, $\varepsilon(q, \boldsymbol{r}, t) \cong \langle \varepsilon(\boldsymbol{r}, t) \rangle$ (это предположение, принятое в первоначальной формулировке известных гипотез Колмогорова (*1941*)), то неравенство (5.1.54) принимает вид

$$\langle T\rangle\sigma_\Sigma = -\overline{\rho}\langle\varepsilon(\boldsymbol{r},t)\rangle A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r},t) \geqslant 0. \tag{5.1.57}$$

Здесь

$$A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}} \equiv \int\limits_q n(q)A_{\mathrm{turb}}(q)dq = n_\Sigma\overline{A_{\mathrm{turb}}}$$

— так называемое глобальное сродство процесса образования турбулентных структур, которое с учетом (5.1.56) может быть переписано в виде

$$\overline{A_{\mathrm{turb}}}(\boldsymbol{r},t) = -k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}\int\limits_q \frac{\partial P_2(0\mid q;t)}{\partial q}dq + \int\limits_q P_2(0\mid q;t)f(q)dq =$$
$$= -k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}[P_2(q_{L_1}) - P_2(q_\eta)] + \overline{f(\boldsymbol{r},t)} \cong \overline{f(\boldsymbol{r},t)}, \tag{5.1.58}$$

поскольку на границах области интегрирования P_2 обращается в нуль (здесь η — локальное значение колмогоровского микромасштаба; n_Σ — полное число вихревых молей). Таким образом, производство σ_Σ осредненной энтропии в подобном стационарном процессе имеет вид произведения общей скорости передачи энергии по каскаду $\langle\varepsilon\rangle$ и суммарного сродства $A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}}$, относящегося ко всему каскадному процессу дробления крупных вихрей на мелкие в целом. В этом случае справедливо линейное феноменологическое соотношение

$$\langle\varepsilon(\boldsymbol{r},t)\rangle = -\alpha' A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r},t) \tag{5.1.59}$$

в полном соответствии с результатами необратимой термодинамики для последовательных (консекутивных) химических реакций (см., например, *Пригожин, Кондепуди, 2002*).

С другой стороны, можно принять более реальное условие

$$J(q,\boldsymbol{r},t) \cong J(\boldsymbol{r}) \equiv -n_\Sigma(\boldsymbol{r})\langle\varepsilon(\boldsymbol{r})\rangle$$

квазистационарности термодинамического потока кинетической энергии $J(q,\boldsymbol{r},t)$ по каскаду вихрей, т. е. независимости потока J на различных масштабах движения от параметра $q = \rho|\boldsymbol{u}''|^2/2$. Это предположение, рассматриваемое совместно с линейным соотношением (5.1.55), приводит к более общей, чем (5.1.59), нелинейной связи между величиной ε и химическим сродством

$$\widetilde{A}(\boldsymbol{r},t) \equiv \int\limits_q A(q)dq = \mu(q_{L_1},\boldsymbol{r}) - \mu(q_\eta,\boldsymbol{r}) \tag{5.1.60}$$

для каскадного процесса в целом. Нелинейное определяющее соотношение для величины $\langle\varepsilon\rangle$ легко может быть получено при применении второй формулы (5.1.22) для «локального сродства» $A_{\mathrm{turb}}(q,\boldsymbol{r},t)$; в результате будем иметь [ср. с формулой (4.1.4) для скорости химической реакции]:

$$\langle\varepsilon\rangle \cong \gamma\left(1 - \exp\left(-\frac{\widetilde{A}}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}}\right)\right], \tag{5.1.61}$$

где

$$\gamma = \left(\alpha'\frac{k_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{turb}}}{n_\Sigma}\right)\exp\left(\frac{\mu(q_\eta)}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}}\right)\Bigg/\int\limits_{q_\eta}^{q_{L_1}}\exp\left(\frac{\Phi(q)}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}}\right)dq. \tag{5.1.62}$$

Таким образом, глубокая аналогия, существующая между консекутивными химическими реакциями ($A \to B \to C \to$ и т. д.) и каскадным процессом Ричардсона—Колмогорова дробления вихрей с соответствующими химическим потенциалом и химическим сродством, позволяет провести методами расширенной необратимой термодинамики макроскопическое описание структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытой системе. Использование двух интерпретаций параметра Колмогорова ε, как величины, описывающей скорость диссипации энергии в тепло, и одновременно в стационарно-равновесном случае являющейся скоростью передачи турбулентной энергии по каскаду вихрей, позволило получить при термодинамическом моделировании структурированной турбулентности определяющие соотношения для ключевой характеристики турбулентного поля — скорости диссипации турбулентной энергии $\langle\varepsilon\rangle$. Напомним, что в теории Колмогорова (*1941*) эта величина является постоянной и носит название параметр Колмогорова. Соотношения (5.1.59) и (5.1.60), замыкающие систему осредненных гидродинамических уравнений (5.1.2)—(5.1.5), делают термодинамический подход к моделированию развитой турбулентности в известной степени самодостаточным. При последующей конкретизации в задачах численного моделирования разнообразных природных явлений, развитый выше синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности очевидно должен получить свое дальнейшее уточнение и развитие.

Сделаем теперь важное замечание. На первый взгляд, условие возрастания энтропии суммарного континуума (5.1.33) должно было бы, по аналогии с ламинарным движением жидкости, накладывать определенные ограничения на коэффициенты турбулентного переноса в определяющих соотношениях (5.1.34), (5.1.35) и (5.1.59). Известно, что именно из условий подобного рода вытекает положительная определенность прямых коэффициентов молекулярного обмена; при этом перекрестные коэффициенты могут быть разными по знаку (см., например, *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*). Подставляя соотношения (5.1.34), (5.1.35) и (5.1.59) в выражение (5.1.33) для производства суммарной энтропии турбулизованной системы, получим:

$$0 \leqslant \sigma_\Sigma \equiv \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{\lambda^{\mathrm{turb}}\left(\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2 + \bar{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\left(\boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle)\boldsymbol{U}\right)^2 + \bar{\rho}\alpha'(A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}})^2\right\}. \quad (5.1.63)$$

Как уже ранее отмечалось, особенность специфики взаимодействия (связанная с функциональной зависимостью турбулентных коэффициентов переноса от параметров $\langle\varepsilon\rangle$ и $\langle b\rangle$) различных диссипативных процессов в турбулизованном континууме такова, что «отключение» одной из термодинамических сил (например, сродства $A^{\mathrm{gl}}_{\mathrm{turb}}$) может привести к изменению (или даже «отключению») каких-либо других процессов (например, вязких). Это означает, что второй закон термодинамики, требующий положительности всей суммы (5.1.63) в целом, не может, вообще говоря, быть применен к отдельным ее слагаемым. Таким образом, может случиться, что, например, величина

$$\bar{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\left(\boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle)\boldsymbol{U}\right)^2 < 0,$$

при условии что сумма $\sigma_\Sigma \geqslant 0$. А это указывает на возможность существования таких турбулентных режимов течения, для которых коэффициент турбулентной вязкости отрицателен, $\nu^{\mathrm{turb}} < 0$. Приведенные соображения являются термодинамическим обоснованием вероятности появления эффекта отрицательной вязкости в турбулентных течениях жидкости.

С учетом важности развиваемого подхода, представляется полезным суммировать основные результаты настоящего параграфа. В развитие работ (*Kolesnichenko, Marov, 1985*; *Колесниченко, 1998*; *Marov, Kolesnichenko, 2001*) было проведено стохастико-термодинамическое рассмотрение развитой турбулентности в однородной жидкости и сконструирована феноменологическая модель структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытой системе. Представление турбулизованного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух взаимно открытых подсистем — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемого, в свою очередь, как ансамбль вихрей различных пространственно-временных масштабов, позволило получить методами термодинамики с внутренними переменными определяющие соотношения для турбулентных потоков и сил в подсистеме турбулентного хаоса, находящейся в неравновесно-стационарном состоянии. Введение в рассмотрение ряда дополнительных случайных параметров среды, характеризующих возбужденные макроскопические степени свободы сильно турбулизованного континуума, позволило, при использовании постулата Пригожина (касающегося направления необратимых процессов, локализованных в пространстве конфигураций), получить различные кинетические уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова для функций распределения мелкомасштабных характеристик турбулентности и термодинамически описать колмогоровский каскадный процесс. Вместе с тем, наиболее глубокое понимание феноменологии каскада Колмогорова, возможно лишь на пути учета большого числа статистически коррелированных стохастических процессов $\boldsymbol{q}$, всесторонне характеризующих вихревые пространственно-временные образования. Проведенный здесь упрощенный термодинамический анализ квазистационарной турбулентности и построенная на его основе идеализированная макроскопическая модель, позволяют, тем не менее, расширить наши представления о свойствах открытых диссипативных гидродинамических систем, являющихся объектом изучения одного из в ажнейших и быстро развивающихся направлений нелинейной динамики, включающего в себя эволюцию хаотических движений и формирование упорядоченных диссипативных структур.

Интересно, что двойственный характер необратимых процессов, приводящих к беспорядку вблизи равновесия и к упорядоченности вдали от равновесия, наглядно проявляется и при анализе современных проблем турбулентности макромира во всем разнообразии пространственно-временных масштабов, отвечающих, в частности, происхождению и эволюции Вселенной, звездной и планетной космогонии, а также процессам в газовых оболочках небесных тел и формированию экосистем, в которых возможны каскады пространственно-временных конфигураций. С нашей точки зрения, благодаря развиваемому здесь подходу к моделированию структурированного турбулентного хаоса гораздо более емким и глубоким становится и само понятие энтропии. Процитируем в этой связи еще один небольшой фрагмент из книги (*Пригожин*, *Стенгерс*, *1994*): «Ясно, что сказанное — не более чем начало, но оно очень существенно, поскольку иллюстрирует, сколь широкое поле исследований открывает перед нами понятие хаоса, т. е. конструктивной роли необратимости. Мы убеждены, что эти исследования приведут к новому облику науки, в центре которой будет находиться проблема становления. Но каково бы ни было будущее науки, один вывод ясен: без необратимых процессов невозможно описать окружающий нас мир». Мы попытались найти дополнительное подтверждение данному утверждению на пути исследования стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса (при использовании стохастико-термодинамических методов), показав теоретически возможность самоорганизации в такого рода открытых системах.

§ 5.2. Исследование самоорганизации турбулентного хаоса на основе стохастических уравнений Ланжевена

В предыдущем параграфе, в рамках стохастической теории необратимых процессов, была сконструирована макроскопическая модель развитой турбулентности однородной сжимаемой жидкости с учетом наличия в потоке разнообразных временных (или пространственно-временных) диссипативных структур. К ним, в частности, могут относиться совокупности неупорядоченных вихревых нитей, вихревых колец, вихревых трубок и иных компактных мезомасштабных образований в физическом (и, соответственно, в конфигурационном) пространстве. При учете ключевого для данной модели постулата Пригожина, касающегося направления протекания необратимых процессов в каком-либо локальном объеме пространства внутренних координат, используемый нами подход позволил термодинамически вывести кинетическое уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК) в пространстве стохастических координат, характеризующих турбулентный хаос. Это уравнение предназначено для определения временной эволюции плотности распределения условной вероятности для каких-либо статистических характеристик мелкомасштабной турбулентности. Кроме этого, оно позволяет исследовать процессы перехода из одного квазистационарного состояния вихревого хаоса в другое, вызванные последовательной потерей устойчивости гидродинамической системой при изменении параметра, управляющего режимом турбулентного движения в целом, например, глобального числа Рейнольдса.

В настоящем параграфе, развивающем указанную концепцию, проанализирован альтернативный метод к исследованию подобного рода переходов вблизи критических точек самоорганизующейся подсистемы вихревого хаоса. Этот метод, базирующийся на стохастических уравнениях ланжевеновского типа и детерминистских уравнениях переноса для условных средних, тесно связан с подходом, опирающимся на уравнения ФПК. Однако, по сравнению с последним, он имеет некоторое преимущество при изучении стохастических процессов в окрестности квазистационарных состояний, которое проявляется в возможности использования эффективных математических методов теории устойчивости движения, теории нелинейной динамики хаотических и стохастических систем и т. п. В связи с этим уместно напомнить, что в рамках синергетического подхода к моделированию турбулентного (динамического) хаоса произошло сближение таких наук, как гидродинамическая устойчивость, статистическая термодинамика неравновесных процессов, теория бифуркаций нелинейных динамических систем и т. п. Более того, стало ясно, что любая адекватная макротеория развитой турбулентности не может быть построена без явного моделирования когерентных диссипативных структур и описания их какими-то структурными параметрами (*Druden*, *1948*, ; *Crow*, *Champagne*, *1971*; *Brown*, *Roshko*, *1974*), поскольку именно мелкомасштабные пространственно-временные диссипативные структуры являются, в известном смысле, «строительными блоками» такой теории.

В первой главе рассмотрены четыре «сценария» начального этапа зарождения турбулентности в гидродинамических системах, которые практически целиком относятся к анализу неравновесных нестационарных состояний с нелинейными переходными режимами, периодическими траекториями и ограниченными апериодическими движениями. Три из этих сценариев целиком относятся к начальному этапу зарождения турбулентности, когда число возбужденных макроскопических (коллективных) степеней свободы все еще невелико (*Ландау*, *Лифшиц*, *1988*; *Монин и др.*, *1989*). При анализе модели когерентной турбулентности мы будем придерживаться в основном сценария Ландау—Хопфа, согласно которому непрерывный переход к полностью развитой турбулентности осуществляется через каскад бифуркаций, связанный с последовательным возбуждением все новых и новых степеней свободы.

Временн*у*ю эволюцию неравновесных динамических систем принято изучать с помощью нелинейных (стохастических) дифференциальных уравнений — обыкновенных или в частных производных — или уравнений эволюции с дискретными временными интервалами (например, логистического уравнения). Решить подобные динамические уравнения в явном виде в общем случае не представляется возможным. Вместе с тем, их численные реализации обладают гораздо более сложным поведением, в сравнении с особенностями поведения отдельных решений стационарных систем. В частности, здесь могут существовать изолированные замкнутые траектории (являющиеся образами периодических движений в фазовом пространстве) — так называемые предельные циклы, к которым стремятся траектории, начинающиеся в области их притяжения, квазипериодические движения на торах с бифуркациями, траектории, являющиеся хаотическими аттракторами, которые непрерывно плотно заполняют компактное фазовое пространство и соответствуют непериодическим решениям, а также различные переходы между подобными структурами в критических точках со своей локальной бифуркацией, где происходит потеря устойчивости, и т. д. Вся эта огромная совокупность численных решений, с разнообразными типами поведения (от детерминированного к стохастическому), чрезвычайно существенна также и для более глубокого качественного понимания механизмов возникновения турбулентности. Вместе с тем, следует отметить, что теория динамических систем пока еще не оказала, к сожалению, значительного влияния на количественный аспект изучения развитых турбулентных течений при больших числах Рейнольдса.

По этой причине мы не будем касаться здесь всех этих важных проблем, а сосредоточимся преимущественно на макроскопическом описании развитой структурированной турбулентности, включая некоторые аспекты теории марковских флуктуаций применительно к стационарно-неравновесным состояниям подсистемы турбулентного хаоса, используя для данной цели статистические методы в неравновесной термодинамике. В предыдущем параграфе остался открытым следующий важный вопрос: являются ли стационарные состояния турбулентного хаоса действительно устойчивыми, подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? Для ответа на этот ключевой для развиваемого термодинамического подхода вопрос необходимо, прежде всего, иметь принципиальную возможность «приготовить» исходный стационарный статистический ансамбль, отвечающий макроскопической подсистеме турбулентного хаоса. Ясно, что возможность сформировать подобный ансамбль появляется, например, при наличии асимптотически устойчивых стационарных состояний, имеющих конечные области притяжения. В случае среды с молекулярными флуктуациями, когда стационарное состояние является статистически равновесным, асимптотическую устойчивость равновесного состояния обеспечивает существование соответствующей термодинамической функции Ляпунова. В данном разделе будет показано, что аналогичная связь с термодинамикой существует и для стационарных состояний континуума с турбулентными флуктуациями. В частности, будет предложен в явном виде неравновесный термодинамический потенциал, обобщающий известное соотношение Больцмана—Планка для функции распределения равновесного состояния на стационарные состояния ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса, и показано, что он является функцией Ляпунова для асимптотически устойчивых стационарных состояний. Качественно разобрано поведение крупномасштабных флуктуаций в окрестности критических точек перехода, приводящее к появлению простейших типов аттракторов — притягивающих периодических движений (предельных циклов). Рассмотрена связь внутренней перемежаемости в инерционном интервале масштабов с флуктуациями энергии диссипации.

5.2.1. Стохастический подход к изучению эволюции турбулентного хаоса. Гауссовский процесс

В п. 5.1 был применен стохастико-термодинамический формализм, основанный на включении в модель турбулентного хаоса, помимо обобщенных «классических» термодинамических переменных, некоторого числа внутренних координат q_k, отвечающих мелкомасштабным турбулентным пульсациям и описывающих вихревые и температурные структуры. Эти переменные являются, вообще говоря, случайными функциями, флуктуирующими около своих стационарных (средних) значений q_k^{st}. Было подчеркнуто, что в качестве внутренних координат хаоса могут фигурировать положительные величины, являющиеся четными функциями флуктуирующих скоростей, температур или концентраций, или их логарифмы.

Обсудим теперь более детально обоснование ряда постулатов, а также физических и математических предположений, на которых основан развиваемый нами подход к моделированию структурированной турбулентности. Введем в рассмотрение широко используемый далее гауссовский стохастический процесс $\boldsymbol{q}(t)$ в пространстве конфигураций, для которого все совместные и условные плотности вероятности имеют гауссовскую форму. Как будет ясно из дальнейшего, можно считать, что стационарные, гауссовские и марковские процессы (так называемые процессы Орштейна—Уленбека) представляют собой неплохое приближение при описании асимптотически устойчивого стационарного состояния модельной макроскопической подсистемы турбулентного хаоса. В этой связи важно иметь в виду, что статистика сильно нелинейных случайных полей скорости и температуры в реальной турбулизованной жидкости не носит, в общем случае, ни гауссовского, ни марковского характера, особенно на больших масштабах (см., например, *Монин*, *Яглом*, *1996*). Тем не менее нам представляется целесообразным рассмотреть и это имеющее ограниченный характер приближение, преимущество которого состоит, в частности, в том, что мы приобретаем возможность, на уровне хорошо разработанной теории случайных функций, исследовать свойства и поведение тех стационарно-необратимых диссипативных процессов в подсистеме хаоса, которые связаны с флуктуациями, устойчивостью и бифуркационными изменениями отдельных стационарных состояний.

Многомерное обобщение кривой Гаусса

$$G(\boldsymbol{q})((2\pi)^n \det \sigma)^{-1/2} \exp\lfloor -\sigma^{-1}(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})/2)\rfloor \tag{5.2.1}$$

определяется двумя матричными величинами: средним значением $\overline{\boldsymbol{q}} = \int \boldsymbol{q} G(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q}$ и тензорной дисперсией $\sigma = \int (\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}})(\boldsymbol{q}-\overline{\boldsymbol{q}}) G(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q}$ (здесь σ^{-1} — матрица, обратная к положительно определенной матрице n-го порядка y). Отметим, что для стационарного гауссовского процесса только условные средние $\overline{f}(\boldsymbol{q}(t))^0$ и соответствующие дисперсии зависят от времени и, именно, с этими величинами связаны детерминистские уравнения переноса для макровеличин, описывающие линейную релаксацию средних к их стационарным значениям (см. *Кайзер*, *1990*).

Поясним теперь более подробно, почему иногда удобно выбрать в качестве внутренних координат хаоса логарифмы положительных стохастических характеристик турбулентности, типа скорости диссипации турбулентной энергии. Пусть $\varepsilon^*(\boldsymbol{r}, t)$ — некоторая положительная локальная характеристика турбулентного поля, определяемая турбулентными пульсациями (например, скорость диссипации турбулентной энергии $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$, или скорость вырождения дисперсии температуры $\varepsilon_T(\boldsymbol{r}, t)$ и т. п.). Тогда в случае полностью развитой турбулентности, согласно уточненным гипотезам подобия Колмогорова (*Колмогоров*, *1962*), диссипация $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ (или родственные ей величины) асимптотически удовлетворяет логарифмически нормальному распределению вероятностей, т. е. случайная переменная $\ln \varepsilon^*$ распределена по гауссовскому закону

$$W_1(\ln\varepsilon^*) = (\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln\varepsilon^*})^{-1}\exp[-(\ln\varepsilon^* - m^*)^2/2\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}]. \tag{5.2.2}$$

Кроме этого, в теории Колмогорова предполагается линейная зависимость дисперсии $\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}$ от $\ln(L/\eta)$ [см. п. 6.1]

$$\sigma^2_{\ln\varepsilon^*} = \mu^*\ln\frac{L}{\eta} + B(\boldsymbol{r}, t), \qquad m^* \equiv \overline{\ln\varepsilon^*} = -\sigma^2_{\ln\varepsilon^*}/2 + \ln\overline{\varepsilon^*}, \tag{5.2.3}$$

где $\sigma\ln\varepsilon^{*2}$ и m^* — суть дисперсия и среднее (стационарное) значение случайной переменной $\ln\varepsilon^*$; $B(\boldsymbol{r}, t)$ — слагаемое, зависящее от характеристик крупномасштабного движения; μ^* — универсальная постоянная, имеющая различные значения для разных переменных ε^*; $L/\eta \approx \mathrm{Re}^{3/4}$.

Распределение (5.2.2), принятое в уточненной теории Колмогорова (*1961*), может быть оправдано тем обстоятельством, что модель случайного каскада подобна процессу дробления пылевых частиц, которому, как известно, асимптотически отвечает логарифмически нормальное распределение по размерам. Помимо этого, имеются многочисленные экспериментальные подтверждения логнормального распределения вероятностей диссипации турбулентной энергии и связанных с ней положительных мелкомасштабных характеристик турбулентности в широком интервале умеренных значений аргумента. Основательный обзор соответствующих работ приведен, например, в книге (*Монин*, *Яглом*, *1996*), к которому мы и отсылаем заинтересованного читателя. Следует, однако, заметить, что во всех случаях было обнаружено, что на «хвостах», т. е. при очень малых или очень больших значениях аргумента, эмпирическое распределение вероятностей все же отклоняется от логарифмически нормального. С этим фактом связано, в частности, то обстоятельство, что высшие моменты ε^* уже не могут быть аккуратно вычислены с помощью логнормального распределения. Кроме того, в ряде публикаций правильность логнормального распределения для подобных величин была подвергнута сомнению, поскольку оно неявно предполагает появление сверхзвуковых скоростей при очень больших числах Рейнольдса (см., например, *Фриш*, *1998*).

Второй аргумент в пользу использования переменных $q^* \equiv \ln\varepsilon^*$ состоит в том, что величина $\ln\varepsilon^*$ флуктуирует гораздо слабее, чем ε^*, и потому ее среднее значение имеет более значимый физический смысл: сильные флуктуации случайной переменной ε^*, возникающие, например, в критической точке, искажают статистику величины $\ln\varepsilon^*$ гораздо меньше, чем статистику величины ε^*. Кроме этого, в случае больших флуктуаций ε^* экспонента от среднего значения $\ln\varepsilon^*$ дает наиболее вероятное значение самой величины ε^*.

При подстановке многомерного гауссовского распределения $W_1^{ss}(\boldsymbol{q}^*)$ для подобных мелкомасштабных характеристик $\boldsymbol{q}^* = \{\ln\varepsilon_1^*, \ln\varepsilon_2^*, \ldots\}$ в выражение (5.1.19**) для силы трения

$$f(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}}) \equiv -\partial\Phi(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})/\partial\boldsymbol{q} = k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}\partial\ln W_1^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{q})/\partial\boldsymbol{q}, \tag{5.2.4}$$

получим:

$$f(\boldsymbol{q}^*, T_{\mathrm{turb}}) = -k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}(\sigma^*)^{-1}\cdot(\boldsymbol{q}^* - \boldsymbol{q}^{*ss}), \tag{5.2.5}$$

где дисперсия процесса определяется соотношением

$$\sigma^* \cong k_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}) + \frac{3}{4}\mu^* \ln \text{Re}.$$

Таким образом, фигурирующая в уравнении ФПК (5.1.39) «сила трения» в пространстве внутренних переменных турбулентного хаоса зависит, например, от глобального числа Рейнольдса Re, управляющего режимом турбулентного движения в целом, что и определяет, в конечном счете, возможность перестройки вихревой структуры ансамбля гидродинамических систем, ассоциированного с турбулентным хаосом, позволяя выявить те критические значения Re_{cr}, при которых происходит, например, его скачкообразный переход из некоторого квазиустойчивого стационарного состояния к новому стабильному состоянию.

Фундаментальное решение уравнения Фоккера—Планка

Мы показали, что функция плотности условной вероятности $P_2 \equiv P_2(\boldsymbol{q}_0 \,|\, \boldsymbol{q}, t)$ для непрерывного марковского стационарно-неравновесного стохастического процесса $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$, описывающего эволюцию стохастических внутренних параметров турбулентного хаоса (включая, в частности, временную эволюцию стохастических характеристик вихревых структур в случайном каскаде Ричардсона—Колмогорова) удовлетворяет кинетическому уравнению ФПК (5.1.39). Далее будем использовать уравнение ФПК в форме Ито (5.1.39*), которая особенно легко позволяет проследить связь между детерминистическим и стохастическим описанием процесса перехода. В матричных обозначениях уравнение (5.1.39*) в пространственно однородном случае может быть переписано в виде

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} \cdot [\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, T_{\text{turb}})P_2] + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{q} \partial \boldsymbol{q}} : [\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})P_2]. \tag{5.2.6}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, T_{\text{turb}})$ и тензор второго ранга $\frac{1}{2}\varepsilon^2\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})$ в правой части определяют соответственно дрейфовую и диффузионную части потока вероятности, причем P_2 — положительная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{gathered}\int P_2(\boldsymbol{q}_0 \,|\, \boldsymbol{q}, t)d\boldsymbol{q} = 1, \qquad \int W_1(\boldsymbol{q}_0)P_2(\boldsymbol{q}_0 \,|\, \boldsymbol{q}, t)d\boldsymbol{q}_0 = W_1(\boldsymbol{q}, t), \\ \lim_{t\to\infty} P_2(\boldsymbol{q}_0 \,|\, \boldsymbol{q}, t) = W_1(\boldsymbol{q}).\end{gathered} \tag{5.2.7}$$

Последнее соотношение означает, что для стационарных процессов условная плотность асимптотически со временем перестает зависеть от начального условия. Параметр $\varepsilon^2 \equiv k_{\text{B}}T_{\text{turb}}$ отражает интенсивность естественного (внутреннего) источника флуктуаций переменных $\boldsymbol{q}$, связанного с собственным нелинейным возмущающим механизмом подсистемы турбулентного хаоса — с его «тепловой» структурой. Предельному случаю $\varepsilon \to 0$ отвечает детерминированное поведение вектора состояния $\boldsymbol{q}(t)$, удовлетворяющего детерминистскому дифференциальному уравнению

$$\partial \boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0). \tag{5.2.8}$$

Уравнение (5.2.6) удобно для изучения стохастических процессов, связанных с начальными условиями вида $P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, 0) = \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_0)$, которые соответствуют дельтаобразной плотности вероятности, сосредоточенной в точке $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$. Другими словами, предполагается, что в момент $t = 0$ из точки $\boldsymbol{q}_0$ конфигурационного пространства выходит большое число (ансамбль) траекторий, движущихся независимо друг от друга, и при этом ищется плотность их распределения в какой-либо области $\boldsymbol{q}$-пространства в момент времени t. Сверх этого, на функцию $P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t)$ могут быть наложены те или иные граничные условия по q, которые должны быть специально сформулированы для анализа конкретных задач. Если в начальный момент времени $t = 0$ задано не начальное состояние $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$, а начальное распределение $W_1(\boldsymbol{q}_0)$, то, умножая (5.2.6) на $W_1(\boldsymbol{q}_0)$ и интегрируя по $\boldsymbol{q}_0$, получим (используя второе соотношение (5.2.7)) так называемое прямое уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для одноточечной плотности вероятности $W_1(\boldsymbol{q}, t)$, для которого распределение $W_1(\boldsymbol{q})$ является стационарным решением.

Хорошо известно, что найти аналитическое решение уравнения (5.2.6) в явном виде удается лишь в исключительных случаях, например, когда дрейфовая матрица $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ линейна по переменным $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{q}, \tag{5.2.9}$$

а матрица коэффициентов диффузии $\boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{L}$ не зависит от $\boldsymbol{q}$ (аддитивный шум). Именно этот случай, представляющий наибольший интерес для термодинамических ансамблей (см., например, *Хакен, 1985*), мы и рассмотрим в данном разделе. При этом, стохастический процесс $\boldsymbol{q}(t)$ будет заведомо ограничен, если дополнительно принять (что и предполагается далее), что квадратичная матрица n-го порядка (по числу внутренних координат хаоса) $\boldsymbol{H}$ является сильно связанной. Напомним, что сильная связанность означает, что матрица $\boldsymbol{H}$ имеет одно нулевое собственное значение, а действительные части всех остальных собственных значений $\lambda_p(\boldsymbol{H})$ $(p = 1, \ldots, n-1)$ отрицательны, $\mathrm{Re}\lambda_p(\boldsymbol{H}) < 0$.

Удовлетворяющее начальному условию $P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, 0) = \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_0)$ фундаментальное решение кинетического уравнения (5.2.6), переписанного с учетом сделанных выше предположений в виде

$$\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t)}{\partial t} = -\boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q} P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t)) + k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \frac{\boldsymbol{Q}}{2} : \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{q} \partial \boldsymbol{q}} P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t), \tag{5.2.10}$$

будет представлять собой гауссовское распределение

$$P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t) = ((2\pi)^n \det y(t))^{-1/2} \exp[-\sigma^{-1}(t)(\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t))(\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t))/2], \tag{5.2.11}$$

в чем нетрудно убедиться прямой подстановкой. Здесь

$$\bar{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t) \equiv \int \boldsymbol{q}(t) P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t) d\boldsymbol{q} \tag{5.2.12}$$

— условное среднее для стохастического процесса $\boldsymbol{q}(t)$ (где $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$), которое может быть записано в виде

$$\bar{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t) = \exp(\boldsymbol{H}t) \cdot \boldsymbol{q}_0.$$

Здесь под экспоненциалом $\exp(\boldsymbol{H}t)$ квадратной матрицы $\boldsymbol{H}$ понимается абсолютно сходящийся матричный ряд

$$\exp(\boldsymbol{H}t) \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(\boldsymbol{H}t)^p;$$

$$\sigma(t) \equiv \overline{\delta\boldsymbol{q}(t)\delta\boldsymbol{q}^{\text{transp}}(t)}^{0} = k_{\text{B}} T_{\text{turb}} \int_0^t \exp(\boldsymbol{H}s) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \exp(\boldsymbol{H}^{\text{transp}}s) ds \qquad (5.2.13)$$

— матричная дисперсия условной флуктуации $\delta\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{q}(t) - \overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\partial\sigma(t)/\partial t = \boldsymbol{H} \cdot \sigma(t) + \sigma(t) \cdot \boldsymbol{H}^{\text{transp}} + k_{\text{B}} T_{\text{turb}} \boldsymbol{Q} \qquad (5.2.14)$$

с начальным условием $\sigma(0) = 0$ (см., например, *де Грот*, *Мазур*, *1964*).

Покажем теперь, что асимптотически устойчивому стационарному состоянию $\boldsymbol{q}^{\text{st}}$ — состоянию-аттрактору, для которого

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t) = \boldsymbol{q}^{\text{st}} \qquad (5.2.15)$$

в случае если представленные физическим ансамблем начальные значения вектора $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$ сосредоточены в области его притяжения, отвечает стационарный гауссовский марковский процесс. Действительно, если воспользоваться третьим соотношением (5.2.7), устанавливающим асимптотическое равенство P_2 и W_1, то выражение (5.2.11) при $t \to \infty$ переходит в гауссовское распределение для одновременной функции распределения

$$\lim_{t\to\infty} P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t) = W_1(\boldsymbol{q}) = ((2\pi)^n \det \sigma(\boldsymbol{q}^{\text{st}}))^{-1/2} \exp[-\sigma^{-1}(\boldsymbol{q}^{\text{st}}) : (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^{\text{st}})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^{\text{st}})/2], \qquad (5.2.16)$$

характеризующей одновременные средние в стационарном ансамбле. При этом стационарная дисперсионная матрица

$$\sigma(\boldsymbol{q}^{\text{st}}) \equiv \overline{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^{\text{st}})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^{\text{st}})^{\text{transp}}}^{0},$$

в силу того, что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma(t) = \sigma$, а значит и предел $\lim\limits_{t\to\infty} d\sigma/dt = 0$, удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\text{st}}) \cdot \sigma(\boldsymbol{q}^{\text{st}}) \cdot \boldsymbol{H}^{\text{transp}}(\boldsymbol{q}^{\text{st}}) = -k_{\text{B}} T_{\text{turb}} \boldsymbol{Q}, \qquad (5.2.17)$$

выражающему обобщенную флуктуационно-диссипационную теорему для стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\text{st}}$ (напомним, что по предположению $\text{Re}\lambda_p(\boldsymbol{H}) < 0$). Это уравнение обобщает известную зависимость между случайной силой и коэффициентом трения в уравнении ФПК (см. *Климонтович*, *2002*).

При заданных $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{H}$ уравнение (5.2.17) можно рассматривать как линейное уравнение, решением которого служит искомая стационарная дисперсия $\sigma(\boldsymbol{q}^{\text{st}})$. Так как матрица σ^{st} симметрична, то можно найти $n(n+1)/2$ ее независимых элементов σ_{ij}^{st} $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$. Например, в случае двух переменных независимыми элементами матрицы σ_{ij}^{st} являются величины σ_{11}^{st}, σ_{12}^{st} и σ_{22}^{st}. Как следует из соотношения (5.2.17), они удовлетворяют линейным уравнениям

$$2H_{11}\sigma_{11}^{st} + 2H_{12}\sigma_{12}^{st} = -k_B T_{turb} Q_{11}, \quad 2H_{21}\sigma_{12}^{st} + 2H_{22}\sigma_{22}^{st} = -k_B T_{turb} Q_{22},$$
$$H_{21}\sigma_{12}^{ss} + (H_{11} + H_{22})\sigma_{12}^{st} + H_{12}\sigma_{22}^{st} = -k_B T_{turb} Q_{12}, \tag{5.2.18}$$

имеющим единственное решение, когда матрица $\boldsymbol{H}$ имеет собственные значения с отрицательными действительными частями.

Важен и противоположный вариант, когда из (5.2.17) определяется явный вид диффузионной матрицы $\boldsymbol{Q}$ (интенсивности случайных сил Ланжевена, [см. (5.2.22)] по известным дисперсионной $\sigma(\boldsymbol{q}^{st})$ и релаксационной $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{st})$ матрицам. Эта процедура используется в тех случаях, когда явный вид матрицы $\sigma(\boldsymbol{q}^{st})$ для стационарного состояния известен, например, выражен через надлежащий термодинамический потенциал.

5.2.2. Стохастические уравнения Ланжевена в пространстве внутренних координат

Если умножить (5.2.10) на $\boldsymbol{q}^p$ и проинтегрировать по $\boldsymbol{q}$ от $-\infty$ до $+\infty$, то в предположении, что проинтегрированные по частям выражения с $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{Q}$ исчезают на границах, легко получить следующую бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{q}^p}^0}{\partial t} = p\boldsymbol{H} \cdot \overline{\boldsymbol{q}^p}^0 + \frac{p(p-1)}{2} k_B T_{turb} \boldsymbol{Q} \cdot \overline{\boldsymbol{q}^{p-2}}^0, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{5.2.19}$$

содержащую условные моменты разных порядков. Исключением является только первое детерминистское уравнение системы (получаемое при $p=1$), которое отщепляется и является замкнутым:

$$\partial \overline{\boldsymbol{q}}^0 / \partial t = \boldsymbol{H} \cdot \overline{\boldsymbol{q}}^0. \tag{5.2.20}$$

Здесь $\boldsymbol{H}(\alpha)$ — постоянная матрица релаксации, обусловливающая возвращение вектора условных средних значений внутренних переменных $\overline{\boldsymbol{q}}^0$ к некоторому стационарному значению и зависящая в общем случае параметрически от внешних управляющих параметров задачи $\alpha = \{\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \ldots\}$. Решение $\overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, \alpha, t)$ уравнения (5.2.20) зависит также от начального условия $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$.

Уравнение (5.2.20) описывает идеализированное детерминированное поведение подсистемы турбулентного хаоса. Простейший способ учета турбулентных флуктуаций состоит во введении в детерминистическую модель (5.2.20) некоторого случайного источника. Следуя формальной структуре теории Онзагера относительно статистических флуктуаций (см. *Кайзер*, *1990*), будем считать, что условные турбулентные флуктуации $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) - \overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, \alpha, t)$ стохастического векторного процесса $\boldsymbol{q}(t)$ удовлетворяют динамическому уравнению, аналогичному уравнению (5.2.20) для условного среднего, но дополненному членом, описывающим влияние слабого «естественного шума» подсистемы турбулентного хаоса:

$$\partial \delta\boldsymbol{q} / \partial t = \boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)$$

(аналог регрессионной гипотезы Онзагера для молекулярных флуктуаций). Отсюда следует, что $\partial\boldsymbol{q}/\partial t$ и $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{q}$ также могут различаться только некоторым случайным (ланжевеновским) членом $\widetilde{F}(\boldsymbol{q}, t)$, условное среднее которого равно нулю:

$$\partial \boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{q} + \widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t), \quad \overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)}^{0} = 0. \tag{5.2.21}$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (5.2.21) является уравнением Ланжевена, отвечающим уравнению ФПК вида (5.2.10). Отметим, что условие $\overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)}^{0} = 0$ лишь частично задает свойства так называемой случайной силы (источника) Ланжевена $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)$, действующей в пространстве конфигураций $\boldsymbol{q}$. Однако, статистические свойства стохастического процесса $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)$ будут полностью определены, если задать вид корреляционного тензора $\overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}_1, t_1)\widetilde{\boldsymbol{F}}^{\text{transp}}(\boldsymbol{q}, t)}^{0}$. Обычно, при решении практических задач, дополнительно предполагают, что случайная величина $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)$ есть стационарный δ-коррелированный во времени гауссовский процесс (многомерный белый шум)

$$\overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t_1)\widetilde{\boldsymbol{F}}^{\text{transp}}(\boldsymbol{q}, t)}^{0} = k_B T_{\text{turb}} \boldsymbol{Q} \delta(t - t_1), \tag{5.2.22}$$

причем матрица интенсивностей случайной силы $\boldsymbol{Q}$ совпадает с тензором коэффициентов диффузии $\boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{L}$ в кинетическом уравнении ФПК (5.2.10).

Как известно, с учетом ключевого предположения (5.2.22) оба подхода — основанный на уравнении ФПК (5.2.10) и основанный на системе обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений первого порядка (5.2.21) для случайной функции $\boldsymbol{q}(t)$ — оказываются полностью равнозначными (см., например, *Тихонов*, *Миронов*, *1977*). Важно при этом иметь в виду, что процесс Орштейна—Уленбека определяется именно линейным стохастическим дифференциальным уравнением с белым шумом в качестве случайного источника. В частности, решая уравнения (5.2.21) и (5.2.22) можно получить соотношения (5.2.11) для условной плотности вероятности и (5.2.14) для дисперсии условной флуктуации, а также соответствующие асимптотические (при $t \to \infty$) выражения (5.2.16) и (5.2.17)). Для наших целей это означает, что анализ эволюционных процессов в подсистеме турбулентного хаоса (к ним относятся, например, релаксационные процессы в окрестности отдельных устойчивых стационарных состояний — простейших пространственно-временных структур) можно проводить и на основе подобного рода стохастических уравнений или их следствий, с привлечением мощных методов качественной теории дифференциальных уравнений и линейного анализа устойчивости. Одновременно заметим, что доказательство эквивалентности уравнения ФПК общего вида (5.2.6) и соответствующего ему нелинейного уравнения Ланжевена

$$\begin{gathered} \partial \boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, T_{\text{turb}}) + \widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t), \\ \overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t_1)\widetilde{\boldsymbol{F}}^{\text{transp}}(\boldsymbol{q}, t)}^{0} = k_B T_{\text{turb}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) \delta(t - t_1) \end{gathered} \tag{5.2.23}$$

для случайного векторного процесса $\boldsymbol{q}(t)$ (где $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)$ — распределенная нормально в пространстве параметров $(\boldsymbol{q}, t)$ случайная величина), требующее привлечения весьма тонких математических методов, приведено, например, в работе (*Кляцкин*, *Татарский*, *1973*).

5.2.3. Неравновесные стационарные состояния турбулентного хаоса

Проанализируем теперь, с использованием уравнения (5.2.23), кардинальную проблему развиваемого термодинамического подхода к моделированию стационарного каскадного процесса — возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ и предельных циклов в подсистеме турбулентного хаоса. Рассмотрим сначала детерминированное поведение подсистемы турбулентного хаоса, при котором внутренние параметры состояния $\boldsymbol{q}(t)$ удовлетворяют детерминистскому дифференциальному уравнению (5.2.8)

$$\partial \boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0),$$

отвечающему предельному случаю $\varepsilon \to 0$ отсутствия влияния на движение «внутреннего шума», связанного с «тепловой» структурой хаоса. По поводу этого уравнения следует заметить, что, хотя движение отдельных вихревых молей по траекториям детерминировано, движение отдельных областей конфигурационного пространства, т. е. пучков траекторий, приобретает стохастические свойства. Другими словами, в эволюции подобной динамической системы внутренняя стохастичность сосуществует с полностью детерминистическими законами динамики. Отметим также, что аналогичное (совпадающее буквально до деталей при замене $\boldsymbol{q}$ на $\overline{\boldsymbol{q}}^0$) рассмотрение можно провести на основе осредненного уравнения (5.2.20), справедливого и при учете «тепловых» флуктуаций. Внутренний шум подсистемы турбулентного хаоса, вносящий некоторое усложнение в проводимый анализ, можно учесть уже после того, как поведение детерминированной системы (5.2.8) исследовано полностью (см. *Кайзер*, *1990*). Динамическое уравнение (5.2.8) является автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка по времени, решения которого параметрически зависят от начальных условий $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$, а также от некоторого набора управляющих параметров $\alpha = \{\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}, \ldots\}$ (воспроизводящих воздействие на подсистему хаоса «внешнего мира»), изменение которых приводит, в общем случае, к изменению самого характера движения, а значит и хода эволюции вихревой подсистемы.

Проблема установления в подсистеме турбулентного хаоса некоторого упорядоченного режима может быть исследована следующим образом. Поскольку «среда» по предположению постоянна, то можно предположить, что существует, по крайней мере, одно стационарное решение $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ уравнения (5.2.8), т. е. решение не зависящие от времени, для которого

$$\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) = 0.$$

Это решение соответствует тривиальному неорганизованному состоянию турбулентного хаоса (для дальнейших целей мы примем его за опорное состояние). Заметим, что образом стационарного состояния в $\boldsymbol{q}$-пространстве служит особая (предельная) точка определенного типа (центр, устойчивый фокус, седло, неустойчивый узел и т. п.); в случае конфигурационного пространства большой размерности n число типов особых точек возрастает. Переход к упорядоченному вихревому режиму хаоса связан с идеей неустойчивости и нарушения его первоначальной симметрии: самоорганизация возникает, когда тривиальное решение $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ становится неустойчивым и сменяется новым решением уравнения (5.2.8), обладающим более низкой симметрией. Простейший способ исследования такой возможности состоит прежде всего в проверке устойчивости стационарного состояния относительно малых возмущений.

Устойчивость предельной точки означает, что траектории в ее окрестности, описывающие процесс релаксации, стремятся к ней при $t \to \infty$. Другими словами, предельная точка, имеющая в пространстве конфигураций определенную область притяжения, является аттрактором. Как уже упоминалось выше, при некоторых значениях управляющих параметров аттрактор может быть не единственным. Возможны ситуации, когда в пространстве внутренних координат существует несколько аттракторов, каждый из которых имеет свою область притяжения. Это связано с тем, что система уравнений $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) = 0$ может иметь более одного решения, даже если $\boldsymbol{K}$ — линейная вектор-функция:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0) = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{q};$$

в этом частном случае $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}} = 0$, т. е. состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ являются собственными векторами (модами) матрицы $\boldsymbol{H}$ с нулевыми собственными значениями.

При изучении вероятностных аспектов возможных сценариев эволюции начальных стационарных состояний, требуется иметь исходный физический ансамбль, соответствующий подсистеме турбулентного хаоса. Если исследуется вполне конкретное стационарное состояние $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, то необходимо, чтобы представленные ансамблем начальные условия $\boldsymbol{q}_0$ были сосредоточены в области именно его притяжения. Возникает вопрос: является ли данное стационарное состояние $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ действительно устойчивым по Ляпунову при начальном условии $\boldsymbol{q}_)$ (или орбитально устойчивым по Пуанкаре), подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? В противном случае траектории $\boldsymbol{q}(t)$, которые начинаются вблизи $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, не выйдут на нужное стационарное состояние. А это с высокой вероятностью означает, что неустойчивые стационарные состояния, не имеющие области притяжения, не могут быть описаны квазистационарным статистическим ансамблем, поскольку его невозможно даже организовать подобающим образом.

Однако такую возможность, несомненно, гарантирует асимптотическая устойчивость, являющаяся частным случаем устойчивости по Ляпунову, при которой существует некоторая окрестность стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, такая, что все выходящие из нее траектории остаются близкими к этому состоянию-аттрактору, и со временем асимптотически стремятся к нему. Другими словами, когда состояние $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ устойчиво по Ляпунову и, кроме этого, всегда можно найти $\eta > 0$, такое, что при $|\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}} - \boldsymbol{q}_0| < \eta$,

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}_0, t) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}} \quad (\text{или} \quad \lim_{t\to\infty} \overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}). \tag{5.2.24}$$

Асимптотическая устойчивость по Ляпунову (в общем случае и асимптотическая орбитальная устойчивость) характерна для любых систем с диссипацией, в частности, она присуща и подсистеме турбулентного хаоса. В случае статистических флуктуаций, связанных с атомарной структурой среды, из второго начала термодинамики следует, что все состояния термодинамического равновесия, не являющиеся критическими точками (см. ниже), асимптотически устойчивы. Задача этого раздела показать, что аналогичная ситуация возможна для стационарно-неравновесных состояний турбулентного хаоса. Далее мы обсудим возможные критерии, гарантирующие асимптотическую устойчивость отдельных стационарных состояний флуктуирующего хаоса. Один из них основан на анализе устойчивости решения уравнения (5.2.8) по первому (линейному) приближению, другой — на существовании «функции Ляпунова».

Критерии асимптотической устойчивости стационарных состояний

Рассмотрим сначала простой случай, когда подсистема турбулентного хаоса имеет единственное стационарное состояние $\boldsymbol{q}^{\rm st}$

$$\partial \boldsymbol{q}^{\rm st}/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\rm st}) = 0, \qquad \left(\boldsymbol{K} \equiv -\boldsymbol{L} \cdot \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{q}, \mathrm{Re})}{\partial \boldsymbol{q}}\bigg|^{\rm st}\right), \tag{5.2.25}$$

отвечающее текущему значению числа Рейнольдса Re. Проведем анализ по первому приближению на асимптотическую устойчивость этого изолированного стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\rm st}$, который, как известно, заключается в проверке на асимптотическую устойчивость линейной системы

$$\partial \delta \boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{q}, \tag{5.2.26}$$

полученной путем отбрасывания нелинейных членов разложения в ряд Тейлора правой части уравнения (5.2.8):

$$\partial(\boldsymbol{q}^{\rm st} + \delta \boldsymbol{q})/\partial t = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\rm st} + \delta \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\rm st}) + \partial \boldsymbol{K}/\partial \boldsymbol{q}|^{\rm st} \cdot \delta \boldsymbol{q} + \mathcal{O}(\delta \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}^{\rm st}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\rm st}) \cdot \delta \boldsymbol{q} + \mathcal{O}(\delta \boldsymbol{q}).$$

Здесь $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\rm st}) \equiv \partial \boldsymbol{K}/\partial \boldsymbol{q}|^{\rm st}$ — матрица Якоби. Используя теперь формальное решение $\delta \boldsymbol{q}(t) = \exp(\boldsymbol{H} t)\delta \boldsymbol{q}(0)$ уравнения (5.2.26), выясним, в каких случаях имеет место асимптотическая устойчивость его решений. Запишем для этого нормальную форму экспоненциала матрицы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\rm st})$ в виде

$$\exp(\boldsymbol{H} t) = \boldsymbol{S}^{-1}\ \mathrm{diag}[\exp(t\boldsymbol{J}_1(\lambda_1)), \ldots, \exp(t\boldsymbol{J}_m(\lambda_m))]\boldsymbol{S}, \tag{5.2.27}$$

где

$$\exp(t\boldsymbol{J}_p(\lambda_p)) = \exp(\lambda_p t) \sum_{k=0}^{m_p - 1} \frac{t^k}{k!} \boldsymbol{I}_k^{(p)}, \qquad (p = 1, \ldots, m).$$

Здесь $\boldsymbol{S}$ — некоторая неособенная матрица, приводящая матрицу $\boldsymbol{H}$ к жордановой форме, ($\det \boldsymbol{S} \neq 0$); $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — это m ($m \leqslant n$) собственных значений матрицы $\boldsymbol{H}$, отвечающих различным клеткам $\boldsymbol{J}_p(\lambda_p)$ ($\equiv \lambda_p \boldsymbol{I}_p + \boldsymbol{I}_1^{(p)}$) ее канонической формы Жордана, а m_p — соответствующие им порядки этих клеток $\left(\sum_{p=1}^{m} m_p = n\right)$; $\boldsymbol{I}_p$ — единичная матрица порядка p и $\boldsymbol{I}_1^{(p)}$ — ее первый единичный косой ряд; $\boldsymbol{I}_k^{(p)} = [\boldsymbol{I}_1^{(p)}]^k$ ($k = 1, \ldots, m_p - 1$) — соответствующие единичные косые ряды, $\boldsymbol{I}_0^{(p)} = \boldsymbol{I}_p$.

Из общего решения (5.2.27) линейного уравнения (5.2.26) непосредственно вытекают известные теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, которые, применительно к рассматриваемому здесь флуктуационному движению турбулентного хаоса в пространстве конфигураций, могут быть переформулированы следующим образом:

• Стационарное состояние турбулентного хаоса асимптотически устойчиво, тогда и только тогда, когда все характеристические корни $\lambda_p(\boldsymbol{H})$ $(p=1, \ldots, n)$ релаксационной матрицы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})$ (при текущем числе Рейнольдса) имеют отрицательные действительные части, т. е. все λ_p располагаются в левой полуплоскости;

• Если среди корней векового уравнения $\det(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$ имеется хотя бы один, вещественная часть которого положительна, то стационарное состояние $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ неустойчиво;

• Если некоторые корни векового уравнения имеют нулевые действительные части, а остальные корни имеют отрицательные действительные части, то стационарное состояние турбулентного хаоса (называемое в этом случае критическим состоянием)

а) будет устойчивым (по Ляпунову), если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители (т. е. соответствующие $m_p = 1$);

б) будет неустойчивым, если хотя бы один корень с нулевой вещественной частью является кратным корнем соответствующего элементарного делителя $(m_p > 1)$.

Значение $\mathrm{Re}\lambda_p(\boldsymbol{H})$ определяет скорость, с которой эволюционируют возмущения внутренних параметров состояния $\boldsymbol{q}$ хаоса. Как правило, время жизни возмущений в системе определяется величиной порядка $\tau_{\text{макро}} = |1/\mathrm{Re}\lambda_p|$. Это означает, что $\tau_{\text{макро}}$ является макроскопическим масштабом времени эволюции турбулентного хаоса. Таким образом, возникновение перехода к некоторому упорядоченному режиму в эволюционирующей подсистеме турбулентного хаоса можно определить просто, исследуя поведение характеристических корней $\lambda_p(\boldsymbol{H})$ $(p=1, \ldots, n)$ релаксационной матрицы $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})$ в зависимости от текущего значения числа Рейнольдса. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$ существует единственное устойчивое асимптотическое решение $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, соответствующее тому состоянию подсистемы турбулентного хаоса, которое обладает самой высокой симметрией, какая только совместима с наложенными на систему граничными условиями. При $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$, когда, по крайней мере, одна из величин $\mathrm{Re}\lambda_p$ перестает быть отрицательной и становится положительной, это решение становится неустойчивым, и в закритической области одновременно возникают новые ветви решения с более низкой симметрией. В случае критического значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$ числа Рейнольдса (являющегося точкой бифуркации), когда время релаксации флуктуаций в первом приближении стремится к бесконечности, появляются одно или несколько новых асимптотических решений (устойчивых или неустойчивых) векторного уравнения (5.2.8). Именно такого рода бифуркация появляется в классической задаче Бенара, когда наложенный на систему градиент температуры достигает некоторого порогового значения. Она соответствует возникновению когерентной пространственной структуры конвективных ячеек в первоначально неупорядоченной жидкой фазе.

Заметим, что анализ устойчивости линеаризованной задачи (5.2.26) в окрестности стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ позволяет также получить информацию относительно устойчивости исходного нелинейного детерминистского уравнения (5.2.8): из асимптотической устойчивости, устойчивости по Ляпунову или неустойчивости решений линейной системы (5.2.26) вытекает соответственно асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову либо неустойчивость решений исходной системы (5.2.8). Вместе с тем, анализ устойчивости по первому приближению системы, находящейся в окрестности стационарного состояния, дает весьма ограниченную информацию относительно характера решений нелинейного уравнения (5.2.8), поскольку в общем случае необходимо рассмотреть влияние нелинейных членов. Другими словами проведенный выше анализ позволяет выявить лишь простейший механизм самоорганизации вихревого хаоса, когда бифуркация происходит при потери устойчивости тривиального опорного состояние $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$. Для описания множества более сложных сценариев поведения турбулентного хаоса (в пространстве управляющих параметров (Re, Pe)), связанных с каскадами неустойчивостей, необходимо использовать сильно нелинейные стохастические уравнения (5.2.23).

Доказательство асимптотической устойчивости стационарных состояний. Функция Ляпунова

Ответим теперь на поставленный в начале этого параграфа вопрос, являются ли стационарные состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ турбулентного хаоса действительно асимптотически устойчивыми, подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? Из классической теории устойчивости движения известно, что достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ является существование функции Ляпунова для дифференциального уравнения возмущенного движения (5.2.26)

$$\mathscr{V}(\delta\boldsymbol{q}) \equiv \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \delta\boldsymbol{q} \geqslant 0 \tag{5.2.28}$$

— вещественнозначной положительно определенной квадратичной формы, заданной на пространстве состояний $\boldsymbol{q}$ и удовлетворяющей условию $\partial\mathscr{V}(\delta\boldsymbol{q})/\partial t \geqslant 0$; при этом временная производная берется вдоль траектории, определяемой уравнением (5.2.26). В соотношении (5.2.28) равенство достигается только при $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$; $\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ — отклонение вектора состояния $\boldsymbol{q}(t)$ от стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, $\boldsymbol{V}$ — некоторая действительная, симметричная и положительно определенная матрица. Заметим, что для статистической термодинамики неравновесных процессов особый интерес представляет случай, когда функция Ляпунова имеет квадратичную форму. Кроме этого, из известной теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости вытекает существование положительно определенной квадратичной формы с отрицательно определенной производной по времени. Из этих двух результатов следует, что существование функции Ляпунова (5.2.28) является необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного решения уравнения (5.2.8) (см., например, *Демидович, 1998*).

Приведем здесь одну из возможных версий доказательства существования функции Ляпунова для асимптотически устойчивого стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ турбулентного хаоса, которому соответствует стационарный гауссовский марковский процесс (5.2.16). Но сначала найдем необходимое условие, при котором положительно определенная квадратичная форма

$$\mathscr{V}(\Delta\boldsymbol{q}) \equiv \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \delta\boldsymbol{q} \geqslant 0$$

имеет отрицательно определенную производную по времени. Пусть $\mathscr{V}(\delta\boldsymbol{q})$ — функция Ляпунова. Тогда для временной производной вдоль траектории, определяемой уравнением (5.2.26), имеем

$$d\mathscr{V}(\delta\boldsymbol{q})/dt \equiv (d\delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}}/dt) \cdot \boldsymbol{V} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{tranps}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot (d\delta\boldsymbol{q}/dt) =$$
$$= \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \delta\boldsymbol{q} + \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \delta\boldsymbol{q} = \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \delta\boldsymbol{q} \leqslant 0,$$

где $\boldsymbol{H}$ — устойчивая матрица (напомним еще раз, что по согласно принятому нами предположению $\mathrm{Re}\lambda_p(\boldsymbol{H}) < 0$), а $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}} \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{H}$ — отрицательно определенная матрица. Так как $\boldsymbol{V}$ — симметричная положительно определенная матрица, у нее есть обратная матрица $\boldsymbol{V}^{-1}$, которая также является симметричной и положительно определенной, поэтому $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1\mathrm{transp}}$. Следовательно, выполнив над матрицей $\boldsymbol{B}$ ортогональное преобразование $\boldsymbol{V}^{-1}$, мы получим также симметричную отрицательно определенную матрицу

$$\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{V}^{-1})^{\mathrm{transp}} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{V}^{-1} + \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}} \leqslant 0, \tag{5.2.29}$$

поскольку этим свойством обладает матрица $\boldsymbol{B}$. Отметим, что искомое необходимое условие (5.2.29), по форме тождественно уравнению (5.2.17), выражающему обобщенную флуктуационно-диссипационную теорему. Последнее обстоятельство является, очевидно, проявлением глубокой связи, имеющейся между динамическими свойствами флуктуаций в стационарных состояниях и их устойчивостью.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству существования функции Ляпунова — положительно определенной квадратичной формы с отрицательно определенной производной по времени, для асимптотически устойчивого стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{st}$ (5.2.16). Это доказательство основано на том, что, поскольку матрица $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ является устойчивой, то уравнение (5.2.17)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \cdot \sigma(\boldsymbol{q}) + \sigma(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}}(\boldsymbol{q}) = -k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \boldsymbol{Q},$$

предназначенное для нахождения дисперсии (в котором $\boldsymbol{Q}$ — положительно определенная матрица, соответствующая постоянному тензору коэффициентов диффузии) имеет единственное положительно определенное решение

$$\sigma(\boldsymbol{q}) = k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \int\limits_0^\infty \exp(\boldsymbol{H}s) \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \exp(\boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}} s) ds.$$

С другой стороны, уравнение (5.2.17) эквивалентно соотношению (5.2.29) при

$$\boldsymbol{G} \equiv -k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \boldsymbol{Q}, \qquad \boldsymbol{V}^{-1} \equiv \sigma,$$

в силу чего матрица σ^{-1} (обратная дисперсионной матрице σ), порождает функцию $\mathscr{V}(\delta\boldsymbol{q}) \equiv \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot \sigma^{-1} \cdot \delta\boldsymbol{q}$, имеющую отрицательно определенную производную по времени. Таким образом, для всех стационарных состояний турбулентного хаоса, характеризующихся стационарной гауссовской одновременной плотностью вероятности вида (5.2.16), существует функция Ляпунова, т. е. эти состояния асимптотически устойчивы.

В заключение напомним, что асимптотическую устойчивость стационарных состояний подсистемы турбулентного хаоса можно определить, используя утилитарный критерий Рауса-Гурвица, дающий необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарного решения системы (5.2.23) (см., например, *Демидович*, *1998*). Если записать вековое уравнение для постоянной матрицы Якоби

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) = \partial \boldsymbol{K}/\partial \boldsymbol{q}\,|^{\,\mathrm{st}} = [h_{jk}]$$

в раскрытом виде

$$\lambda^n - H_1\lambda^{n-1} + H_2\lambda^{-2} + \ldots + (-1)^n H_n = 0, \tag{5.2.30}$$

где $H_1 = Sp\boldsymbol{H}$, $H_2 = \sum\limits_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} h_{\alpha\alpha} & h_{\alpha\beta} \\ h_{\beta\alpha} & h_{\beta\beta} \end{vmatrix}$, ..., $H_n = \det \boldsymbol{H}$ — действительные коэффициенты, то выполнение неравенств

$$\Delta_1 = -H_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -H_1 & 1 \\ -H_3 & H_2 \end{vmatrix} = -H_1H_2 + H_3 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = (-1)^n H_n \Delta_{n-1} > 0, \tag{5.2.31}$$

является необходимым и достаточным условиями, при которых алгебраическое уравнение имеет корни лишь с отрицательными вещественными частями. Этот критерий удобно использовать для исследования потери устойчивости стационарными состояниями подсистемы турбулентного хаоса (в зависимости от текущего значения числа Рейнольдса) при $n \leqslant 3$; однако для больших n целесообразно все же перейти к численным методам решения векового уравнения, поскольку раскрытие определителя $\det(\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$ в этом случае представляет трудоемкую задачу.

5.2.4. Термодинамическая устойчивость стационарных состояний и критические стационарные состояния

Выше была установлена связь, имеющаяся между динамическими свойствами флуктуаций в стационарных состояниях и их устойчивостью, и было показано, что матрица σ^{-1} (обратная одновременной дисперсионной матрице) в случае асимптотически устойчивого стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса порождает функцию Ляпунова. С другой стороны, наличие функции Ляпунова является достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$. Как известно, в случае молекулярных флуктуаций, когда стационарное состояние является термодинамически равновесным, существует еще одна немаловажная взаимозависимость между устойчивостью и флуктуациями параметров системы, которая устанавливается вторым началом термодинамики и приводит к квадратичной функции Ляпунова

$$\mathscr{V}^e(\delta\boldsymbol{q}) \equiv \delta\boldsymbol{q}^{\mathrm{transp}} \cdot (\sigma^e)^{-1} \cdot \delta\boldsymbol{q}$$

для релаксационных процессов вблизи равновесия. В частности, для замкнутых систем с молекулярными флуктуациями второй дифференциал энтропии есть отрицательно определенная функция Ляпунова, а обратная дисперсионная матрица $(\sigma^e)^{-1}$ в соотношении (5.2.16) для стационарной гауссовской одновременной плотности вероятности $W_1^e(\boldsymbol{q})$, связана с матрицей вторых производных энтропии формулой Эйнштейна $(\sigma^e)^{-1} = -(1/k_B)\partial^2 S/\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{q}|^e$ (см., например, *де Грот, Мазур, 1964*). Покажем, что аналогичная связь с термодинамикой существует и для физического ансамбля, отвечающего стационарно-неравновесному состоянию турбулентного хаоса — среды, испытывающей постоянное воздействие со стороны подсистемы осредненного движения, и потому лишенной возможности приблизиться к состоянию полного термодинамического равновесия.

Естественный подход к обобщению идей, объясняющих образование равновесных структур, на неравновесные ситуации состоит в расширении понятия потенциальной функции, описывающей динамические свойства макроскопических систем, находящихся на конечном расстоянии от термодинамического равновесия. С этой целью сделаем следующее обобщающее предположение относительно вида одновременной плотности вероятности $W_1(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})$ для стационарно-неравновесных состояний ансамбля, относящегося к подсистеме турбулентного хаоса: по предположению будем считать, что формула

$$W_1(\boldsymbol{q}, \varepsilon) \sim \exp\left\{-\frac{\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\varepsilon} + \ldots\right\}, \qquad \Phi(\boldsymbol{q}) = \Phi_0(\boldsymbol{q}) + \varepsilon\Phi_1(\boldsymbol{q}) + \ldots \tag{5.2.32}$$

задает вероятность $W_1(\boldsymbol{q}, t_{\mathrm{turb}})$, как функцию неравновесного термодинамического глобального потенциала $\Phi(\boldsymbol{q})$ для стационарно-неравновесных состояний системы (*Graham, 1981*). В показателе экспоненты (5.2.32) указана лишь главная часть функции $W_1(\boldsymbol{q}, T_{\mathrm{turb}})$, отвечающая предельному случаю слабого шума $\varepsilon \to 0$, т. е. когда переменные $\boldsymbol{q}$ удовлетворяют детерминистскому варианту стохастического уравнения (5.2.21) — уравнению (5.2.8). Таким образом, потенциал

$$\Phi_0(\boldsymbol{q}) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln W_1(\boldsymbol{q}, \varepsilon) \tag{5.2.33}$$

определяет асимптотическое выражение для стационарно-неравновесной функции распределения. Также по предположению будем считать, что функция $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ однозначна, непрерывна и, по крайней мере, обладает кусочной дифференцируемостью первого порядка. Соотношение (5.2.32) является в некоторой степени обобщением постулата Больцмана—Планка (для равновесного распределения флуктуаций термодинамических параметров замкнутой системы, когда $\Phi = -S$) на случай стационарно-неравновесных состояний ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Если подставить (5.2.32) в уравнение (5.2.6) и перейти к детерминистскому пределу $\omega \to 0$, то в результате получим уравнение

$$0 = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0) \cdot \frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) : \frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}\,\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}, \tag{5.2.34}$$

которое связывает потенциал $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ с $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0)$ и $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})$. Функция $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ определяется как решение уравнения (5.2.34), если граничные условия соответствуют бесконечно большим значениям $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ при $\boldsymbol{q} \to \infty$ (для устойчивой системы).

Отметим теперь три важнейших свойства глобального потенциала $\Phi_0(\boldsymbol{q})$.

• Функция $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ убывает со временем вдоль траектории, определяемой детерминистским уравнением (5.2.8), так как

$$\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial t} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}, 0)\cdot\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}):\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} \leqslant 0 \qquad (5.2.35)$$

(напомним, что матрица $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})$ является положительно определенной); следовательно, $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ представляет собой функцию Ляпунова для детерминистского уравнения (3);

• Из свойства (5.2.35) следует, что $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ имеет локальный минимум для любого устойчивого аттрактора уравнения (5.2.33) в пространстве конфигураций. На любом связном подмножестве аттрактора потенциал $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ постоянен. Неустойчивые стационарные решения уравнения (5.2.33) соответствуют максимума или седловым точкам функции $\Phi_0(\boldsymbol{q})$;

• Потенциал $\Phi_0(\boldsymbol{q})$, когда он найден, содержит богатейшую информацию относительно функции распределения вероятностей в стационарных состояниях и аттракторов детерминистских уравнений.

Рассмотрим здесь частный случай моностабильного стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$, когда формула (5.2.32) существенно упрощается: процесс релаксации подсистемы флуктуирующего хаоса оказывается гауссовским. Действительно, разлагая вблизи этого состояния функцию $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ в ряд Тейлора, будем иметь

$$\Phi_0(\boldsymbol{q}) = \Phi_0(\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}) + \frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}\bigg|^{\mathrm{st}}\cdot\delta\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_q}{\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{q}}\bigg|^{\mathrm{st}}:\delta\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{q} + \ldots \cong$$

$$\cong \Phi_0(\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{q}}\bigg|^{\mathrm{st}}:\delta\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{q} \equiv \Phi_0(\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}) + \frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}}{2}(\sigma^*)^{-1}:\delta\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{q}, \qquad (5.2.36)$$

где $(\sigma^*)^{-1}_{ij} = (\sigma^*)^{-1}_{ij} \equiv (k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}})^{-1}\partial^2\Phi_0/\partial q_i\partial q_j|^{\mathrm{st}}$ — симметричная положительно определенная матрица. Одновременно, детерминистское уравнение (5.2.8) в окрестности $\boldsymbol{q}^{ss}$ можно переписать в виде

$$\partial\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}} + \delta\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}) + \partial\boldsymbol{K}/\partial\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}\cdot\delta\boldsymbol{q} + \ldots \cong \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{q},$$

где $\boldsymbol{H} \equiv \partial\boldsymbol{K}/\partial\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}$; тогда уравнение (5.2.34) приобретает следующую форму:

$$0 = (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}):\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}\frac{\partial\Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial\boldsymbol{q}}. \qquad (5.2.37)$$

Подставляя (5.2.36) в (5.2.37), получаем уже известное нам алгебраическое уравнение (5.2.17)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})\cdot\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) + \boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})\cdot\boldsymbol{H}^{\mathrm{transp}}(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}) = -k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{turb}}\boldsymbol{Q} \qquad (5.2.17^*)$$

для определения $\boldsymbol{\sigma}^*(\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}})$. Отсюда, независимо от глобального условия (5.2.35), при использовании флуктуационно-диссипационной теоремы (5.2.17), можно сделать вывод, что термодинамический потенциал (5.2.36) для внутренних степеней свободы $\boldsymbol{q}$ является функцией Ляпунова для неравновесных стационарных состояний флуктуирующего хаоса. Поскольку линеаризация уравнения переноса проводилась вблизи стационарного состояния, то потенциал $\Phi_0(\boldsymbol{q})$ вида (5.2.36) можно назвать локальным потенциалом; пользоваться им можно только в локальной окрестности стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$. Из (5.2.17*) следует, что σ^* будет положительно определенной матрицей, если действительные части всех собственных значений матрицы $\boldsymbol{H}$ отрицательны, т. е. если стационарное состояние, как и предполагалось, устойчиво.

С другой стороны, независимо от условия (5.2.17*) имеем

$$\frac{\partial \Phi_0(\boldsymbol{q})}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^*)^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^*)^{-1} : \delta\boldsymbol{q}\delta\boldsymbol{q} < 0, \tag{5.2.38}$$

т. е. в любом случае система движется в направлении убывания потенциала $\Phi_0(\boldsymbol{q})$. При этом она стремится к стационарному состоянию, если последнее устойчиво, и к бесконечности, если оно не устойчиво. Критические точки возникают в тех случаях, когда члены второго порядка обращаются в нуль при малых ненулевых значениях $\delta\boldsymbol{q}$. Вместе с тем, принцип минимума потенциала гарантирует, что в окрестности устойчивого стационарного состояния, которое не является критической точкой, матрица $(\sigma^*)^{-1} = (k_B T_{\mathrm{turb}})^{-1} \partial^2 \Phi_0 / \partial\boldsymbol{q}\partial\boldsymbol{q}|^{\mathrm{st}}$ строго положительна. Таким образом, для устойчивого стационарного состояния $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}0}$, не слишком близкого к критическим точкам, из постулата (30) имеем следующее гауссовское распределение вероятностей

$$W_1^{\mathrm{st}}(\boldsymbol{q}) = \sqrt{1/(2\pi)^n \det \sigma^*} \exp\{-(\sigma^*)^{-1} : \Delta\boldsymbol{q}\Delta\boldsymbol{q}/2\}, \tag{5.2.39}$$

где значение нормировочного коэффициента следует из условия нормировки (5.2.7).

Множественные стационарные состояния турбулентного хаоса

В описанные нами механизмы самоорганизации хаоса не были включены флуктуации. Рассмотрение было вполне детерминистическим: турбулентные флуктуации не принимались во внимание. Между тем, турбулентные флуктуации (внутренний шум) составляют неотъемлемую часть кинетических процессов, посредством которых подсистема турбулентного хаоса эволюционирует. Будучи под влиянием внутренних флуктуаций, система перестает пребывать в каком-то определенном состоянии. Она начинает совершать случайные блуждания в пространстве состояний, порождающие некоторое распределение значений параметров состояния, т. е. для описания системы необходимо привлекать уравнение ФПК для функции распределения плотности вероятности $W_1(\boldsymbol{q})$ или соответствующие стохастические уравнения Ланжевена. Вместе с тем, оказывается, что экстремумы плотности вероятности, имеющей четко выраженные пики, в общем случае располагаются в непосредственной близости от решения детерминированной системы и совпадают с ним в пределе большой системы. Следовательно, получаемые в рамках детерминистического описания представления о характере бифуркационных переходов остаются в силе в том смысле, что они соответствуют в основном поведению экстремумов плотности вероятности, отвечающих стационарно-неравновесным состояниям системы.

Проанализируем некоторые статистические аспекты конечного числа асимптотически устойчивых стационарных состояний подсистемы турбулентного хаоса, области притяжения которых заполняют практически все пространство внутренних координат. Исключая на время из рассмотрения состояния вблизи критических точек (см. ниже), будем считать, что динамические уравнения (5.2.23) для условных средних ансамбля имеют p аттракторов $\boldsymbol{q}_1^{st}$, $\boldsymbol{q}_2^{st}$, ..., $\boldsymbol{q}_p^{st}$, а остальные стационарные состояния неустойчивы. Найдем сначала вид одновременной стационарной плотности вероятности $W_1^{st}(\boldsymbol{q})$, связанной с каким-либо из этих аттракторов. Пусть $\boldsymbol{q}_0$ принадлежит области притяжения вполне определенного состояния $\boldsymbol{q}_j^{st}$, тогда $\lim\limits_{t\to\infty} \overline{\boldsymbol{q}}^0(\boldsymbol{q}_0, t) = \boldsymbol{q}_j^{st}$. Условные флуктуации $\delta\boldsymbol{q} = \overline{\boldsymbol{q}}^0(t) - \boldsymbol{q}^{st}$, согласно регрессионной гипотезе Онзагера, определяются стохастическим дифференциальным уравнением

$$\partial\delta\boldsymbol{q}/\partial t = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}_0, t)\cdot\delta\boldsymbol{q} + \widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t),$$

$$\overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t)}^0 = 0, \quad \overline{\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{q}, t_1)\widetilde{\boldsymbol{F}}^T(\boldsymbol{q}, t)}^0 = k_B T_{turb}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})\delta(t - t_1), \tag{5.2.40}$$

в котором

$$\boldsymbol{H} = \partial\boldsymbol{K}/\partial\boldsymbol{q}|^{st}, \qquad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}) = 2\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}). \tag{5.2.41}$$

Уравнения (5.2.40) описывают стационарный ансамбль локально, т. е. в окрестности асимптотически устойчивого стационарного состояния. На основании указанной выше эквивалентности уравнения (5.2.40) уравнению ФПК (5.2.10), можно заключить, что с состоянием $\boldsymbol{q}_j^{st}$ связана гауссовская плотность вероятности следующего вида

$$\lim_{t\to\infty} P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t) = W_1^{(j)}(\boldsymbol{q}) = ((2\pi)^n \det \sigma(\boldsymbol{q}_j^{ss}))^{-1/2} \exp[-\sigma^{-1}(\boldsymbol{q}_j^{st}) : (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_j^{st})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_j^{st})/2], \tag{5.2.42}$$

где стационарная дисперсионная матрица $\sigma(\boldsymbol{q}_j^{st})$ удовлетворяет соотношению (5.2.17). Таким образом, с каждым из асимптотически устойчивых стационарных состояний $\boldsymbol{q}_j^{st}$ связана одновременная стационарная плотность распределения вероятности $W_1^{(j)}(\boldsymbol{q})$, к которой асимптотически стремятся все условные плотности вероятности, находящиеся в области притяжения данного стационарного состояния. Поскольку функция $W_1^{(j)}(\boldsymbol{q})$ сконцентрирована в весьма узкой области вокруг аттрактора $\boldsymbol{q}_j^{st}$, то каждому подобному состоянию отвечает некоторый единственный процесс Орштейна—Уленбека. Отсюда следует, что если распределение $W_1^{(j)}(\boldsymbol{q})$ описывает начальный ансамбль, то вероятность того, что решение $\boldsymbol{q}(t)$ существенно отличается от решения $\boldsymbol{q}_j^{st}$, или лежит вне области его притяжения, пренебрежимо мала. Следовательно, $W_1^{(j)}(\boldsymbol{q})$ является и одновременной плотностью вероятности для всего ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Это утверждение допускает следующее обобщение: временная эволюция ансамбля с произвольно «приготовленным» (т. е. отличным от своей стационарной формы) начальным распределением $W_1(\boldsymbol{q}_0, t_0)$ и сосредоточенным в начальный момент времени внутри области притяжения p аттракторов $\boldsymbol{q}_1^{st}$, $\boldsymbol{q}_2^{st}$, ..., $\boldsymbol{q}_p^{st}$, приводит к некоторой суперпозиции локальных стационарных ансамблей. Действительно, из соотношения (5.2.42) следует, что

$$W_q(\boldsymbol{q}) \equiv \lim_{t\to\infty} W_q(\boldsymbol{q}, t) = \lim_{t\to\infty} \int W_1(\boldsymbol{q}_0, t_0)P_2(\boldsymbol{q}_0, t_0 \mid \boldsymbol{q}, t)d\boldsymbol{q}_0 = \sum_{j=1}^{p} f_j^0 W_1^{(j)}(\boldsymbol{q}), \tag{5.2.43}$$

где $f_j^0 \equiv \int\limits_{D_j} W_1(\boldsymbol{q}_0, t_0)d\boldsymbol{q}_0$ — доля первоначального ансамбля, приходящаяся на область притяжения D_j аттрактора $\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{st}}$. Таким образом, со временем одновременная плотность вероятности распадается на сумму гауссовских величин, сконцентрированных в устойчивых стационарных состояниях, с весами, равными доле начальной плотности вероятности, приходящейся на каждую область притяжения.

Критические состояния с нейтральной устойчивостью

Причина, по которой локальные стационарные подансамбли ведут себя автономным образом, состоит в том, что флуктуации в окрестности асимптотически устойчивого стационарного состояния $\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{st}}$ относительно малы. Вместе с тем, обращение в нуль действительной части одного или нескольких собственных значений релаксационной матрицы $\boldsymbol{H}$ (соответствующее вековое уравнение имеет n корней, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные; последние появляются комплексно сопряженными парами, поскольку все коэффициенты векового уравнения — действительные), когда действительные части остальных корней отрицательны, приводит к так называемому критическому стационарному состоянию $(\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{st}})_{\mathrm{cr}}$ с нейтральной устойчивостью (критическая точка) рассматриваемой системы. Подобное критическое состояние макроскопической подсистемы турбулентного хаоса может быть связано с ростом числа Рейнольдса. Согласно третьей из приведенных выше теорем об устойчивости, критическое состояние не является асимптотически устойчивым (хотя и может быть устойчивым по Ляпунову). В критической точке существует, по крайней мере, одна релаксационная мода, представляющая собой решение, являющееся собственным вектором матрицы $\boldsymbol{H}$, которая либо постоянна, либо осциллирует с частотой, равной мнимой части собственного значения этой моды. В другом возможном случае, когда мнимую ось пересекает (с нулевой скоростью) пара комплексно-сопряженных собственных значений и тем самым приобретает положительную действительную часть, то одной из двух типичных ситуаций в критической точке является нормальная бифуркации Андронова—Хопфа, при которой стационарное состояние в момент потери устойчивости переходит в устойчивую периодическую траекторию (с частотой периодических колебаний ω_1), к которой начинают притягиваться все соседние траектории. В результате появляется предельный цикл, сначала очень маленький, но постепенно увеличивающийся в размерах, по мере превышения управляющими па раметрами бифуркационных значений (см., например, *Берже*, *Помо*, *Видаль*, *2000*). Возможна и другая ситуация (известная как обратная бифуркация Андронова—Хопфа), при которой возникает неустойчивая предельная точка. Таким образом, в окрестности критических точек флуктуирующего хаоса статистический закон изменения турбулентных флуктуаций (в $\boldsymbol{q}$-пространстве) не может обеспечить их малости и потому формула (5.2.43) неприменима для подобных стационарных состояний. С ними, по всей вероятности, связана негауссовская функция распределения. Для выяснения того, как действительно выглядит плотность вероятности в этой области нестабильности, необходимо, в общем случае, численно решать уравнение Фоккера—Планка (5.2.6) или попытаться определить неравновесный термодинамический потенциал $\Phi_0(\boldsymbol{q})$, решая уравнение (5.2.34).

Следует также иметь в виду, что флуктуации, происходящие вблизи критической точки $(\boldsymbol{q}^{\mathrm{s\,t}}_{j})_{\mathrm{st}}$, непредсказуемым образом влияют на «выбор» системой дальнейшего пути эволюции (критическая точка не обязательно должна быть точкой бифуркации). В принципе можно исследовать в рамках уравнения (5.2.23) потерю устойчивости и для периодических движений, подобно стационарным состояниям и найти соответствующие бифуркации. Строгие результаты такого анализа относятся в основном к случаю бифуркаций одних стационарных решений в другие стационарные или периодические решения (см., например, *Marsden, McCracren, 1976*; *Йорк Дж., Йорк Э., 1984*). В одной из типичных ситуаций, аналогичной нормальной бифуркации Андронова—Хопфа, когда при некоторых бифуркационных значениях управляющих параметров предельный цикл перестает быть притягивающим, вместо одной возбуждаются две новые моды с частотами колебаний ω_1 и ω_2, рождается квазипериодический аттрактор — притягивающий двумерный гладкий тор T^2, на котором располагаются все траектории. Таким образом, можно придти к последовательности нормальных бифуркаций Андронова—Хопфа, т. е. к движению на поверхности некоторого тора T^k возрастающей размерности k. Движение выглядит все более и более сложным и при бесконечном числе бифуркаций — не отличается от хаотического (детерминированный хаос).

Именно подобным образом, согласно гипотезе Ландау (см. *Ландау, Лифшиц, 1988*; *Монин и др., 1989*), происходит возникновение и самой турбулентности, когда после каждой нормальной бифуркации Андронова—Хопфа набор основных частот колебаний скорости течения жидкости пополняется новой несоизмеримой частотой, решение переходит на новый тор (топологическая размерность которого совпадает с числом независимых частот), поток становится еще более нерегулярным, а при возбуждении множества мод ($\sim \mathrm{Re}^{9/4}$) — турбулентным. Указанная завышенная оценка числа мод следует из теории Колмогорова (*1941*), не учитывающей наличие когерентных структур в инерционном интервале. Как уже неоднократно отмечалось выше, новейшие исследования показывают, что на малых масштабах в турбулентном течении присутствуют пучки тонких и весьма интенсивных вихревых нитей и других КС. Поэтому число степеней свободы может быть гораздо меньше, чем фактически этот сценарий предполагает, что соответствует движению по бесконечномерному тору (квазипериодическому аттрактору). Вместе с тем, следует отметить, что сценарий Ландау—Хопфа не приводит к возникновению режима истинно хаотических движений, т. е. движений, обладающих статистическими свойствами случайного процесса, например, чувствительной зависимостью временно́й эволюции системы от начальных условий (модель возникновения разномасштабных вихревых структур, не опирающаяся на сценарий Ландау—Хопфа, будет рассмотрена в п. 6.2). Кроме этого, для любых диссипативных динамических систем сценарий Ландау—Хопфа структурно неустойчив[1], т. е.

[1] Структурно устойчивыми называются такие динамические системы, для которых малые возмущения эволюционного оператора приводят к топологически эквивалентным динамическим системам.

нетипичен: как правило, цепочка нормальных бифуркаций обрывается уже после первых трех шагов — либо незамкнутая намотка на трехмерном торе замыкается, превращаясь в предельный цикл (эффект взаимной синхронизации мод), либо тор разрушается и в результате такого разрушения возникает так называемый странный аттрактор. На таком многообразии, которое уже не является гладким тором, а имеет сложную топологию, реализуется настоящий динамический хаос с континуумом частот, чувствительной зависимостью от начальных условий, перемешиванием и т. д. С геометрической точки зрения странный аттрактор представляет собой, как правило, фрактальное множество, характеризуемое нецелой размерностью Хаусдорфа—Безиковича (*Мандельброт*, *2002*).

5.2.5. Эффекты перемежаемости

Обратимся теперь еще к одной причине, по которой при феноменологическом построении модели развитой турбулентности важно исследовать поведение флуктуаций скорости диссипации турбулентной энергии [см. п. 6.1] или некоторых других положительно определенных мелкомасштабных характеристик, — к проблеме перемежаемости. Заметим, что режим временнóй перемежаемости, связанный с резкими флуктуациями большой амплитуды, свойственен любым динамическим диссипативным системам при переходе их от квазипериодического движения к хаосу (см., например, *Берже*, *Помо*, *Видаль*, *1991*).

В основе гидродинамической перемежаемости лежит неустойчивость упорядоченных пространственно-временных структур турбулентного поля (интенсивных флуктуаций скорости и температуры, локализованных в координатном (фазовом) пространстве (см. *Crow*, *Champagne*, *1971*; *Brown*, *Roshko*, *1974*)) и связанный с этим случайный каскадный процесс порождения все меньших вихрей скорости и микроструктурных неоднородностей температуры.

В теории развитой турбулентности фундаментальную роль играет экспериментальный закон конечной диссипации энергии, утверждающий, что в пределе бесконечно большого числа Рейнольдса ($\nu \to 0$) средние значения скорости диссипации турбулентной энергии $\bar{\varepsilon}$ и скалярной диссипации $\bar{\varepsilon}_T$ стремятся к конечным и положительным пределам, $\lim\limits_{\nu\to 0} \bar{\varepsilon}(\nu) = \overline{\varepsilon > 0}$, $\lim\limits_{\chi\to 0} \bar{\varepsilon}_T(\nu) = \bar{\varepsilon}_T > 0$. Именно это обстоятельство было положено в основу исходных гипотез теории Колмогорова (*1941*) для локально однородной и изотропной турбулентности. Вместе с тем, результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что в турбулентном потоке существуют крайне нерегулярные распределения градиентов скорости и температуры, когда области с чрезвычайно малыми значениями градиентов (не турбулентная жидкость, для которой $\varepsilon \approx 0$, $\varepsilon_T \approx 0$) нерегулярным образом перемежаются с областями, в которых значения градиентов очень велики ($\varepsilon > 0$, $\varepsilon_T > 0$). Этот феномен, получивший название внутренняя перемежаемость, был впервые исследован в работе (*Batchelor*, *Townsend*, *1949*; см., также *Бэтчелор*, *1955*). Особенно броско внутренняя перемежаемость обнаруживается в течениях при очень больших числах Рейнольдса, т. е. когда внешний масштаб турбулентности L достаточно велик по отношению к ее внутреннему масштабу η (например, в звездах, океане, атмосфере).

Своеобразие турбулентного течения проявляется еще и в том, что эти области хаотически перемещаются в пространстве, а значения $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ и $\varepsilon_T(\boldsymbol{r}, t)$ в них зависят, вообще говоря, от числа Re. Кроме этого, имеет место еще одно характерное свойство асимптотического поведения величин ε и ε_T. Поскольку осредненные величины $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}_T$ не зависят от числа Рейнольдса, а коэффициенты эксцесса этих величин по данным р азных авторов (см. *Монин, Яглом, 1996*), по-видимому, неограниченно растут с увеличением Re, то отсюда вытекает следующая аномальная особенность: скалярная диссипация и диссипация энергии происходит в объеме, который стремится к нулю при неограниченном росте числа Рейнольдса, $\mathrm{Re} \to \infty$. Возникает вопрос — каким образом можно интерпретировать этот результат? В качественной глобальной теории трехмерной турбулентности обычно предполагается (см., например, *Mandelbrot, 1974*), что движение жидкости заставляет вихревые трубки растягиваться, а растягиваемый вихрь сплющивается, превращаясь в вихревой лист, чтобы сохранить фиксированный объем при увеличивающейся длине. Вслед за тем вихревые листы свертываются в бесконечно сложные фрактальные структуры. Таким образом, при $\mathrm{Re} \to \infty$ диссипация энергии сосредоточена на множестве точек, которое с топологической точки зрения является поверхностью. Эта поверхность имеет бесконечную площадь и является столь «запутанной», что ее можно рассматривать как фрактал, для которого размерность Хаусдорфа—Безиковича лежат где-то в районе 2,5—2,6, но, вероятно, не превышает 2,66. (*Mandelbrot, 1974*).

Имея в виду макромоделирование структурированной турбулентности, удобно различать два вида перемежаемости — внешнюю перемежаемость, относящуюся к подсистеме осредненного движения, и внутреннюю, относящуюся к подсистеме турбулентного хаоса. В случае внешней перемежаемости пространственно-временное распределение параметра $\langle\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ оказывается очень неравномерным — «турбулентные пятна», в которых $\langle\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)\rangle > 0$ чередуются с ламинарными областями, в которых $\langle\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)\rangle = 0$ (аналогично ведет себя и параметр $\langle\varepsilon_T(\boldsymbol{r}, t)\rangle$). В частности, колебания границ турбулентных следов, турбулентных струй, турбулентных пограничных слоев связаны с проявлением внешней перемежаемости турбулентного течения. Эту перемежаемость удобно моделировать в рамках инвариантной теории турбулентности с привлечением эволюционного уравнения для осредненной скорости диссипации (см., например, *Маров, Колесниченко, 2002*). С другой стороны, элементарный объем $d\boldsymbol{r}$ подсистемы турбулентного хаоса также характеризуется весьма неравномерным пространственно-временным распределением диссипации турбулентной энергии ε или скалярной диссипации ε_T: одним подобластям объема $d\boldsymbol{r}$ свойственна высокая степень диссипации энергии и температурных неоднородностей, тогда как в других диссипация практически отсутствует. Кроме того, существуют подобласти, в которых диссипация энергии и скалярная диссипация намного превышают их средние значения.

В силу всего сказанного, именно диссипация турбулентной энергии ε или родственные ей величины (квадратичные по градиентам скорости и температуры) могут служить индикатором перемежаемости (*Obukhov*, *1962*). Следует отметить, что статистические модели случайного каскада, в которых перемежаемость турбулентности в инерционном интервале описывается в терминах пульсаций ε, в настоящее время развиты во многих работах отечественных и зарубежных авторов (см., например, *Новиков*, *Стюарт*, *1964*; *Frisch*, *Sulem*, *Nelkin*, *1978*; *Фриш*, *1998*; *Монин*, *Яглом*, *1996*). Разработаны и другие подходы к моделированию гидродинамической перемежаемости, основанные, в частности, на понятии о странных аттракторах (см., например, сб. пер. *«Странные аттракторы»*, *1981*). Существуют даже теории, в которых предпринята попытка объяснить наблюдаемую взаимосвязь перемежаемости турбулентности «космической жидкости» и распределение (происхождение) галактик или звездную перемежаемость.

Флуктуации величин ε и ε_T, вызванные изменениями гидродинамических характеристик осредненного движения, в частности, изменением чисел Re и Pe, оказывают, очевидно, влияние на статистические свойства структурных функций произвольного порядка для пространственных разностей скоростей или температур (и на их спектры), являющиеся, как известно, основным математическим средством количественного изучения случайного каскада [см. гл. 1]. По этой причине явные выражения для них, полученные в рамках первоначальной теории Колмогорова (*1941*), не могут быть вполне универсальными. Знаменитое «казанское замечание» Ландау (*Ландау*, *Лифшиц*, *1988*) относительно гипотез этой теории касалось именно подобного влияния. Собственно, в связи с этой критикой, первоначальная концепция Колмогорова о случайном каскаде была уточнена в работе Обухова (*Obukhov*, *1962*), который предложил отказаться от условия $\bar{\varepsilon} = \mathrm{const}$ в области G (с центром в точке $\boldsymbol{r}$ и характерным масштабом $\Lambda \ll L$) и исходить из того, что статистические свойства турбулентности определяются не теоретико-вероятностным средним значением $\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t)$ случайной величины ε, а зависят от значений диссипации $\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, t)$, осредненной по некоторому объему V_r с характерным размером r (получаемые результаты слабо зависят от формы области осреднения), малым по сравнению с типичным масштабом неоднородности осредненного течения, $r \ll \Lambda$ [см. гл. 6].

Теория Колмогорова—Обухова позволяет, вообще говоря, усовершенствовать полуэмпирические подходы к описанию развитой турбулентности, например, градиентные методы, используемые для замыкания осредненных уравнений гидродинамики на уровне моментов первого порядка (см., например, *Колесниченко*, *1998*; *Колесниченко*, *Маров*, *1999*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*). До последнего времени, в полуэмпирических моделях подобного рода определяющие соотношения носили исключительно локальный характер. В частности, в градиентных соотношениях для тензора напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t)$ компоненты тензора турбулентной вязкости обычно задаются выражениями, включающими величины диссипации и кинетической энергии (или локальный внешний масштаб) турбулентности, которые определяются в той же самой пространственно-временной точке $(\boldsymbol{r}, t)$, т. е. без учета влияния глобального числа Рейнольдса Re или других характеристик осредненного движения на характер этой функциональной связи (*Монин*, *Яглом*, *1992*). При этом, для эффективного описания турбулентных течений различного типа значения эмпирических констант в соотношениях для коэффициентов турбулентного обмена обычно сильно варьируют; именно по этой причине подобные теории не нуждаются в подключении характеристик перемежаемости. В то же время, перемежаемость, как это ясно из сказанного, является характерным признаком нелокального крупно-мелкомасштабного взаимодействия турбулентных вихрей, которое не учитывается в типичных полуэмпирических теориях для одноточечных моментов.

Суммируем важнейшие результаты настоящего раздела. Исходя из кинетических уравнений ФПК, предложен альтернативный метод к описанию процессов перехода из одного квазистационарного состояния турбулентного хаоса в другое, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа. С использованием детерминистских динамических уравнений проанализирована фундаментальная проблема разрабатываемого подхода — возможность существования асимптотически устойчивых стационарно-неравновесных состояний турбулентного хаоса и предложен обобщенный неравновесный термодинамический потенциал для внутренних переменных. Показано, что он является функцией Ляпунова для неравновесно-стационарных состояний ансамбля, отвечающего подсистеме турбулентного хаоса.

Хотя проблема гидродинамической турбулентности с формальной точки зрения относится к теории диссипативных динамических систем — одного из быстро развивающихся направлений нелинейной динамики, включающего в себя эволюцию хаотических движений и формирование упорядоченных диссипативных структур — к сожалению, потенциальные возможности этой теории (бифуркации, показатели Ляпунова, странные аттракторы, фрактальная размерность аттракторов и т. д.), разрабатываемые в основном для систем с малым числом степеней свободы, все еще остаются практически не использованными при полуэмпирическом моделировании развитой турбулентности, характеризуемой очень большим числом возбужденных степеней свободы. Чтобы в какой-то мере продвинуться в этом направлении, нами был рассмотрен стохастико-термодинамический подход к моделированию структурированной турбулентности, когда фазовым пространством физического ансамбля служит не бесконечномерное пространство состояний турбулизованной жидкости, каждая точка которого отвечает определенному пространственно-временному распределению случайных полей скорости и температуры, а пространство конфигураций нескольких измерений, соответствующее внутреннему строению подсистемы турбулентного хаоса. Такой подход в некоторых случаях отвечает более продуктивному применению методов исследования динамических систем. Вместе с тем, следует признать, что сконструировать предложенным способом эффективную количественную математическую модель развитой турбулентности с учетом когерентных образований будет не реально до тех пор, пока не будут учтены и количественно описаны динамические и топологические свойства КС (которые, разумеется, разные, например, для вихревой трубки или волнистой слоистой поверхности — вихревого листа, вихря Бюргерса и т. п.). Собственно такого рода характеристики и должны быть описаны адекватным набором внутренних параметров турбулентного хаоса.

Отметим также, что теория Колмогорова (*1961*) в полуэмпирических моделях турбулентности до настоящего времени никак не применялась. Предложенный в настоящем разделе стохастико-термодинамический подход, позволяющий использовать диссипацию турбулентной энергии в осредненных гидродинамических уравнениях движения в качестве индикатора перемежаемости, является хорошей основой для разработки адекватной модели гидродинамической турбулентности с перемежаемостью (связанной с интенсивными флуктуациями скорости и температуры). Однако детальный анализ феноменологического моделирования перемежаемости в инерционном интервале и тем самым разработка методики определения коэффициентов турбулентного переноса в зависимости от параметров, управляющих режимом течения жидкости в целом, лежит вне рамок данного анализа и требует еще специального рассмотрения.

Дополнительно заметим, что в силу распространенности турбулентного движения в природе, можно ожидать, что предложенный здесь синергетический подход к вопросам моделирования развитой турбулентности найдет применение в различных астро- и геофизических приложениях. Двойственный характер необратимых процессов, приводящий к отсутствию порядка вблизи равновесия и к упорядоченности вдали от равновесия, наглядно проявляется при анализе современных проблем турбулентности макромира во всем многообразии пространственно-временных масштабов, от вопросов происхождения и эволюции Вселенной, звездной и планетной космогонии, до процессов в газовых оболочках небесных тел и формирования экосистем, в которых возможны случайные каскадные процессы образования разномасштабных турбулентных вихрей. В связи с последними многочисленными достижениями в области экспериментальных исследований ближнего и дальнего космоса [см. п. 1.3] , можно утверждать, что наступило время конструирования более изощренных (чем классические) моделей турбулентности, отвечающих реальным динамическим процессам в природных объектах. Именно этой цели и служит рассмотренный в данной главе стохастико-термодинамический подход к моделированию структурированной турбулентности.

§ 5.3. Уравнение ФПК дробного порядка для описания турбулентного хаоса, обладающего памятью

Стохастический диффузионный процесс $\boldsymbol{q}(t)$ (отвечающий выделенным возбужденным макроскопическим степеням свободы пульсирующего потока), описываемый диффузионным уравнением ФПК (5.1.39), «не помнит» своего прошлого, т. е. не обладает памятью. Вместе с тем, как уже отмечалось выше, статистика сильно нелинейных случайных полей гидротермодинамических величин в реальной турбулизованной жидкости не носит в общем случае марковского характера, особенно на больших масштабах (см. *Монин*, *Яглом*, *1996*).

Немарковость процесса турбулизации течения, которая возможна в некоторых областях фазового пространства за счет многомасштабных пространственно-временных корреляций пульсирующих параметров (не убывающих в общем случае экспоненциально) на физическом языке как раз и означает наличие памяти. По этой причине, необходимо обобщение рассмотренной выше приближенной модели эволюции мелкомасштабных характеристик турбулентного поля, основанной на уравнении (5.1.39), на более реалистичный случай турбулентности, обладающей памятью.

В связи с разработкой методов описания структурированного поля течения турбулизованной жидкости нас интересуют в основном такие состояния турбулентного хаоса, которые при нарастании интенсивности внешних гидродинамических флуктуаций (связанных, в частности, с динамическим проявлением не учтенных в модели степеней свободы) могут возбудить каскад инициированных мультипликативным шумом фазовых переходов к новым (квази)стационарным состояниям вихревой подсистемы. Подобные переходы, которым в пульсирующем потоке жидкости отвечает множество разномасштабных устойчивых когерентных образований, возможны, как было показано в п. 5.1, при условии обмена энтропией и энергией с подсистемой осредненного движения. Известно, что если моделировать мультипликативный шум в системе степенной функцией (что, как правило, и делается), то область определения стохастической среды в конфигурационном пространстве $\boldsymbol{q}$ приобретает, в общем случае, фрактальный характер (см., например, *Олемский, 1998*; *Олемской, Харченко, 2007*). Фрактальная среда является, как правило, средой с памятью. Диффузионные процессы на фрактальных структурах существенно не гауссовы (в классическом понимании гауссовского процесса) и определяются сложным взаимодействием корреляций, действующих на сколь угодно больших пространственно-временных масштабах. Последовательный учет этих корреляций в адекватной теории структурированной турбулетности требует, вообще говоря, отказа от гауссова кинетического уравнения (5.2.6) (описывающего движение «идеального» хаоса в непрерывном конфигурационном пространстве) и от традиционного представления о диффузионном переносе плотности вероятности $P_2(\boldsymbol{q}, t)$ как о классическом броуновском движении вихревых частиц в монотонной среде. Это связано с тем, что в общем случае хаоса фрактальных структур имеет место фрактальное броуновское движение (случайный процесс, обладающий памятью (см. *Мандельброт, Ван Несом, 1968*)) и нелинейная зависимость потока вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ от топологии фрактала.

Отметим, что в то время как ламинарное и идеальное хаотическое движение жидкости обладают определенной степенью монотонности, реальное турбулентное движение является перемежающимся, поскольку обнаруживает промежуточные свойства между свойствами регулярного и хаотического движения. Одним из характерных свойств фазового пространства, отвечающего реальному турбулентному движению жидкости, является его неполнота, проявляющаяся в наличие многочисленных «островков» в фазовом объеме стохастического «моря», куда не могут проникнуть хаотические траектории (см. *Заславский, 2004*). В геометрическом пространстве такому состоянию подсистемы вихревого хаоса отвечает наличие ламинарных пятен, вспышек (всплесков) и перемежаемости. Ламинарные пятна проявляются в виде локализованных пространственных образований регулярного движения жидкости на фоне турбулентного течения; турбулентные всплески связаны с интенсивными пульсациями широкого спектра на мелкозернистом фоне менее интенсивных низкочастотных колебаний гидротермодинамических параметров регулярного течения; перемежаемость во времени (в пространстве) — это чередование ламинарных и турбулентных областей во времени или в пространстве. Таким образом, сама специфика структурированной турбулентности обеспечивает физическую основу для замены однородного пространства-времени на фрактальное пространство-время. В связи со сказанным, кинетическое описание фрактальных свойств эволюции подсистемы турбулентного хаоса требует некоторого обобщения.

Необходимые обобщения могут быть получены за счет привлечения методов дробного интегро-дифференциального исчисления (см., например, *Самко и др.*, *1987*; *Нахушев*, *2003*), адекватного сложным нелинейным системам с многомасштабными корреляциями в пространстве и во времени. Уравнения в дробных производных учитывают эффекты памяти, пространственно-временной перемежаемости и нелокальности, выходящие далеко за границы традиционной гауссовой статистики. В настоящем разделе предложен термодинамический подход к получению обобщенных дробных уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова (ДФПК), описывающих процессы турбулентного переноса в подсистеме турбулентного хаоса на основе дробной динамики, учитывающей структуру и метрику фрактального времени. Введение дробных производных по времени $\partial^{\omega}/\partial t^{\omega}$ (параметр ω связан с фрактальной размерностью активного времени) в кинетическое уравнение ФПК позволяет учесть эффекты памяти и перемежаемости во времени (наличие турбулентных всплесков) в контексте единого математического формализма. Далее для простоты мы ограничимся рассмотрением пространственно однородного случая стохастической подсистемы турбулентного хаоса, описываемой набором внутренних координат $\boldsymbol{q}(t)$, которые случайным образом изменяются со временем t.

5.3.1. Принцип причинности для немарковских процессов в подсистеме турбулентного хаоса

Пусть случайный процесс $\boldsymbol{q}(t)$ протекает в N-мерном конфигурационном пространстве $0 \leqslant q_k < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ и во времени t от начального $t = 0$ до расчетного. Далее будем предполагать, что временная область определения стохастической подсистемы турбулентного хаоса является самоподобным фрактальным множеством. Вполне допустимо, что в средах с фрактальной геометрией нарушается и линейный неэредитарный закон (5.1.36). Наличие памяти у подсистемы турбулентного хаоса означает, что если в момент времени t' на подсистему хаоса действует сила (5.1.22)

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t') = -\partial \mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t')/\partial \boldsymbol{q} \tag{5.3.1}$$

каскадного процесса, отвечающая протеканию одного эквивалента $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}) \to \to \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q} + \partial\boldsymbol{q})$ процесса дробления вихрей (обобщенное химическое сродство де Донде для состояния $\boldsymbol{q}$), то возникает поток вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$, величина которого в последующий момент $t > t'$ задается эредитарным интегральным уравнением (линейная эредитарность)

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t) = \int\limits_0^t \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, t - t') \cdot \boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t')dt' = \int\limits_0^t \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \tau) \cdot \boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t - \tau)d\tau, \qquad (5.3.2)$$

(ср. с феноменологическим соотношением (5.1.36), справедливым для марковской турбулизованной среды). Здесь ядро интегрального оператора $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, t - t')$ отражает свойство эредитарности, т. е. влияние предыстории процесса на его состояние в данный момент времени t. Мы рассматриваем далее только положительные времена, считая, что при $t < 0$ $P_2(\boldsymbol{q}, t) = 0$. Заметим, что термин эредитарность (по терминологии Вито Вольтерра) эквивалентен понятиям память, последствие, наследственность, запаздывание и т. п.

Поскольку реакция подсистемы не может предшествовать во времени вызывающему ее эффекту, то для матрицы $\boldsymbol{L}$ мы имеем следующие условия

$$\boldsymbol{L}(t - t') = 0 \quad \text{для} \quad t < t', \qquad (5.3.3)$$

или

$$\boldsymbol{L}(\tau) = 0 \quad \text{для} \quad \tau < 0. \qquad (5.3.4)$$

Эти соотношения выражают принцип причинности для рассматриваемого случая. Потребуем также, чтобы постоянная конечная движущая сила вызывала конечную реакцию системы; это означает, что

$$\int\limits_0^\infty \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, \tau)d\tau < \infty, \qquad (5.3.5)$$

т. е. указанные интегралы должны существовать и быть конечными.

Для подсистемы турбулентного хаоса, не обладающей памятью, временная зависимость функции памяти имеет вид

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}, t - t') = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\delta(t - t'), \qquad (5.3.6)$$

где $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})$ — матрица положительных коэффициентов, $\delta(t - t')$ — дельта-функция Дирака. Подставляя (5.3.6) в (5.3.2), получаем используемую в п. 5.1 связь

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t) = \int\limits_0^t \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t')\delta(t - t')dt' = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t) = -\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}) \cdot \partial\mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)/\partial t, \qquad (5.3.7)$$

согласно которой, в случае отсутствия памяти, поток вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ в момент времени t зависит только от значения химического сродства $\boldsymbol{A}_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)$ для состояния $\boldsymbol{q}$ вихревого континуума, взятого в тот же момент времени t. При наличии памяти, дельта-функция в (5.3.6) размывается в колоколообразную зависимость, ширина которой определяет интервал времени T, в течение которого действие химического сродства сказывается на величине потока. Для систем с так называемой идеальной памятью имеем $T \to \infty$, т. е. поток $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$

формируется на всем протяжении действия сродства $A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)$ до момента t. Формально это выражается заданием ядра интегральной связи (5.3.2) в виде

$$L(\boldsymbol{q}, t-t') = L(\boldsymbol{q})/t. \tag{5.3.8}$$

Здесь отсутствует зависимость от момента t' действия сродства $A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)$, а зависимость функции памяти от времени измерения t потока $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ взята в таком виде, чтобы удовлетворить условию нормировки

$$\int_0^t L(\boldsymbol{q}, t-t')dt' = L(\boldsymbol{q}). \tag{5.3.9}$$

Таким образом, включение памяти приводит к модификации постоянного ядра (5.3.6) в гиперболическую зависимость (5.3.8).

Феноменологическая эредитарная связь (5.3.2), записанная во временном представлении, неудобна из-за наличия свертки (т. е. интегрирования по t'). От нее можно избавиться, используя для функций $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$, $A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)$ и $L(\boldsymbol{q}, t)$ интегральное преобразование Лапласа

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, p)\exp(pt)dp, \tag{5.3.10}$$

$$A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, p)\exp(pt)dp, \tag{5.3.11}$$

$$L(\boldsymbol{q}, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+\infty} L(\boldsymbol{q}, p)\exp(pt)dp, \tag{5.3.12}$$

где их лаплас-образы (трансформанты Лапласа) $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, p)$, $A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, p)$ и $L(\boldsymbol{q}, p)$ определяются формулами

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, p) = \int_0^\infty \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)\exp(-pt)dt, \tag{5.3.13}$$

$$A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, p) = \int_0^\infty A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)\exp(-pt)dt, \tag{5.3.14}$$

$$L(\boldsymbol{q}, p) = \int_0^\infty L(\boldsymbol{q}, t)\exp(-pt)dt. \tag{5.3.15}$$

С учетом этих соотношений, (5.3.2) записывается в виде

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, p) = L(\boldsymbol{q}, p)\cdot A_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, p). \tag{5.3.16}$$

Нетрудно видеть, что лапласовский образ ядра (5.3.6), отвечающего отсутствию памяти (эквивалент «одной точки», $t=t'$), сводится к функции не зависящей от времени

$$L(\boldsymbol{q}, p) = L(\boldsymbol{q}).$$

При идеальной полной памяти (эквивалент «прямой линии», $0<t'<t$) в пределе $|p|t \gg 1$ из (5.3.8) легко получить

$$L(\boldsymbol{q}, p) = L(\boldsymbol{q})/pt.$$

Можно поставить следующий вопрос: возможно ли существование геометрического объекта, который занимает промежуточное положение между «прямой» и «точкой»? Фрактальная геометрия отвечает на этот вопрос утвердительно, поскольку такой объект существует и является канторовым множеством или так называемой канторовой пылью. Будем далее предполагать, что память у системы сохраняется только в точках множества Кантора (в общем случае несимметричного), фрактальная размерность которого определяемая формулой (1.1.1), равна

$$D = \ln j / \ln(1/\xi).$$

Здесь j — число блоков, участвующих в построении элементарной фигуры фрактала (для триадного множества Кантора $j = 2$); ξ — показатель самоподобия, определяющий, насколько уменьшается величина блока, на каждом шаге построения множества (для симметричного триадного канторового множества, для которого на k-ом шаге построения производится удаление срединного звена, $l_k/3$, $\xi = 1/3$ [см. формулу (1.1.2)]). Поскольку для канторового множества размер получающегося фрагмента не должен превышать величину исходного блока, то значение параметра подобия ограничено условием $\xi j \leqslant 1$, которое в свою очередь приводит к результату $D \leqslant 1$ (для триадной канторовой пыли, $D = \ln 2/\ln 3)$ $\cong 0{,}6309$. Заметим, что алгоритм построения канторова множества можно найти почти во всех книгах по теории фракталов (см., например, *Кроновер*, *2000*)).

Итак, можно ожидать, что фрактальная размерность временного канторова множества D будет связана с мерой сохранения памяти (см., например, *Олемский*, *Флат*, *1993*). Возникает вопрос: как будет выглядеть трансформант $L(\boldsymbol{q}, p)$ для памяти, действующей в точках множества Кантора? Если нахождение лапласовских образов простейших временных зависимостей (5.3.6) и (5.3.8) представляет тривиальную задачу, то для памяти, действующей в точках канторовского множества, выкладки носят более громоздкий характер. Соответствующие вычисления, проведенные Нигматуллиным (*1986*; *1992*), приводят к следующему результату

$$L(\boldsymbol{q}, p) \propto 2^{-D/2}(1-\xi)^{-D}(pt)^{-D}. \tag{5.3.17}$$

Таким образом, физические системы, обладающие остаточной памятью в точках из множества Кантора, описываются лапласовским образом (5.3.17), где величина показателя $0 \leqslant D \leqslant 1$ определяет меру остаточной памяти системы. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа (5.3.12), для временной зависимости функции памяти находим

$$L(\boldsymbol{q}, \tau) = L(\boldsymbol{q}) \frac{1}{\Gamma(D)} [\sqrt{2}(1-\xi)t]^{-D} \tau^{D-1}, \quad \tau \equiv t - t' > 0, \tag{5.3.18}$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty \exp(-\eta)\eta^{z-1} d\eta$ — гамма-функция Эйлера, $\Re z > 0$ (заметим, что справедливы соотношения: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, $\Gamma(n-1) = n!$ $(n \in \mathbb{N})$; функция $1/\Gamma(z)$ является целой и имеет нули первого порядка в точках $z = k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). С математической точки зрения, равенство (5.3.18) означает, что эредитарное ядро, являющееся степенной функцией, удовлетворяет условию однородности: $L(\boldsymbol{q}, m\tau) = m^{D-1}L(\boldsymbol{q}, \tau)$. Свойство однородности выражения (5.3.18) как раз и отражает самоподобие фазового пространства стохастической подсистемы турбулентного хаоса. Как уже говорилось, указанным свойством обладают фрактальные объекты.

Соотношению (5.3.17) соответствует представление потока $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ в форме дробного интеграла

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t)=\int_0^t \boldsymbol{L}(\boldsymbol{q},\tau)\cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q},t-\tau)d\tau=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\cdot[\sqrt{2}(1-\xi)t]^{-D}\left(\frac{1}{\Gamma(D)}\int_0^t \tau^{D-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q},t-\tau)d\tau\right)=$$

$$=[\sqrt{2}(1-\xi)]^{-D}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q})\cdot D_{0t}^{-D}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t)), \qquad (5.3.19)$$

где соотношением

$$D_{0t}^{\alpha}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t)) \equiv \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \tau^{-\alpha-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t-\tau)d\tau = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \frac{\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t')}{(t-t')^{1+\alpha}}dt' =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{-\alpha-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, ut)du = -\frac{1}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 \boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, (1-u)t)du^{-\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(-\alpha)}\int_0^1 \frac{\partial\mu_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, (1-u)t)}{\partial\boldsymbol{q}}du^{-\alpha}, \qquad \alpha<0, \qquad (5.3.20)$$

введен интеграл дробной кратности (или просто дробный интеграл) от функции $\boldsymbol{A}_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{q}, t)$. Здесь $u = t'/t$ — безразмерное время, ограниченное условием $u \leqslant 1$. Дробный характер этого интеграла отражается наличием показателя $-\alpha$ в дифференциале аргумента u. Отрицательный показатель $\alpha = -D$ дробного интеграла совпадает с фрактальной размерностью множества Кантора и указывает на долю «каналов», входящих в состав некоторой ветвящейся фрактальной структуры временного кластера, открытых для эволюции физической системы (*Нигматуллин, 1986*).

5.3.2. Дробный интеграл и дробная производная (вводные сведения)

Приведем здесь некоторые общие сведения из теории дробного интегрирования и дифференцирования (см., например, *Нахушев, 2003*; *Учайкин, 2008*). Пусть α, c, d и $a \in [c, d]$ — действительные числа; $[\alpha]$ — целая часть числа α (антье), удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \leqslant \alpha < [\alpha]+1$; $L[c, d]$ — пространство действительных функций $\varphi(t)$ с конечной нормой $\|\varphi\| = \int_c^d \varphi(t)dt$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда оператор

$$D_{at}^{\alpha}(\varphi(t)) = \frac{\mathrm{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha+1}}d\xi, \qquad \alpha \neq 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5.3.21)$$

(здесь интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару), действующий на функцию $\varphi(t)$ из области своего определения $D(D^{\alpha}_{at}) \subset L[c, d]$, называют оператором дробного интегро-дифференцирования порядка α, с началом в точке a и концом в точке t. Нижний предел интегрирования $t = a$ в (5.3.21) фиксирует момент времени t, с которого начинается отсчет динамических явлений в среде (подобный выбор во многом носит условный характер). По определению

$$D^{0}_{at}(\varphi(t)) = \varphi(t); \quad D^{n}_{at}(\varphi(t)) = \partial^{n}\varphi(t)/\partial t^{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.3.22}$$

При $\alpha < 0$ оператор D^{α}_{at} совпадает с оператором дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегрирования порядка α. При $\alpha > 0$ и определенных предположениях относительно гладкости функции $\varphi(t) \in D(D^{\alpha}_{at})$ можно положить, что оператор дробного дифференцирования

$$D^{\alpha}_{at}(\varphi(t)) = \mathrm{sign}^{[\alpha]+1}(t-a)\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D^{\alpha-[\alpha]-1}_{at}(\varphi(t)), \tag{5.3.23}$$

или

$$D^{\alpha}_{at}(\varphi(t)) = \frac{1}{\Gamma(1+[\alpha]-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} \int\limits_{a}^{t_\varepsilon} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha-[\alpha]}}, \tag{5.3.23*}$$

где $t_\varepsilon = t + \varepsilon\,\mathrm{sign}(a-t)$.

Чтобы пояснить структуру оператора дробного интегрирования (формула (5.3.21) при $\alpha < 0$), напомним, что методом математической индукции легко доказывается формула для n-кратного интеграла вида (формула Коши)

$$\int\limits_{a}^{t} dt_n \int\limits_{a}^{t_n} dt_{n-1} \ldots \int\limits_{a}^{t_2} \varphi(t_1)\, dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{a}^{t} \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{1-n}} d\xi. \tag{5.3.24}$$

Поскольку $(n-1)! = \Gamma(n)$, то правой части (5.3.24) можно придать смысл и при нецелых значениях n, т. е. замена факториала гамма-функцией Эйлера позволяет продолжить это выражение в область нецелых (и даже комплексных) показателей n и получить тем самым правую часть выражения (5.3.21). Для любой функции $\varphi(t) \in L[c, d]$) справедлив закон композиции операторов дробного интегрирования с одинаковыми началами

$$D^{\alpha}_{at}(D^{-\beta}_{at}(\varphi)) = D^{\alpha-\beta}_{at}(\varphi), \quad \forall\alpha < 0. \tag{5.3.25}$$

В определенном смысле операции дробного дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными, $D^{\alpha}_{at}(D^{-\alpha}_{at}(\varphi(t))) = D^{0}_{at}(\varphi(t)) = \varphi(t)$.

Заметим, что применение дифференциального оператора $\partial/\partial t$ к интегралу (5.3.23) понижает его кратность на единицу, применение его n раз дает подынтегральную функцию $\varphi(t)$, а $m > n$ раз — ее $(m-n)$-производную $\partial^{(m-n)}\varphi(t)/\partial t^{(m-n)}$. Распространяя это правило и на дробный интеграл (т. е. просто заменив n на $\alpha > 0$), получаем выражение.

$$\frac{\partial^{(m-\alpha)}}{\partial t^{(m-\alpha)}}\varphi(t) \equiv D^{m-\alpha}_{at}(\varphi(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial^{m}}{\partial t^{m}} \int\limits_{a}^{t} \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.3.26}$$

представляющее собой дробную производную Римана—Лиувиля порядка $m-\alpha$. Чтобы интеграл сходился на верхнем пределе, ограничим значение α интервалом $0<\alpha\leqslant 1$. В частном случае $m=1$ формула (5.3.23) переходит в

$$D_{at}^{1-\alpha}(\varphi(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}}d\xi \tag{5.3.26*}$$

в силу известного тождества Абеля дробная производная (5.3.26*) переходит в обычную «целую» производную $\partial\varphi/\partial t$ при $\alpha\to 0$.

Дробные производные (5.3.23) сохраняют ряд свойств обычных производных: в частности, они являются левыми обратными операциями по отношению к дробному интегрированию (5.3.21), обладают свойствами линейности и α-однородности

$$D_{at}^{\alpha}(D_{at}^{-\alpha}\varphi(t)) = \varphi(t), \tag{5.3.27}$$

$$D_{at}^{\alpha}(c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)) = c_1 D_{at}^{\alpha}(\varphi_1(t)) + c_2 D_{at}^{\alpha}(\varphi_2(t)), \tag{5.3.28}$$

$$D_{at}^{\alpha}(\varphi(kt+l)) = k^{-\alpha}D_{ak+l,t}^{\alpha}(\varphi(t)), \quad (k>0). \tag{5.3.29}$$

В то же время у них появляется специфические свойства, например, зависимость от предела a (нелокальность). Приведем в качестве иллюстрации несколько примеров дробных производных Римана—Лиувилля от простых функций

$$D_{at}^{\alpha}((t-a)^{\lambda}) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\nu)}(t-a)^{\lambda-\alpha}, \qquad D_{at}^{\alpha}(t^{\lambda}) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\nu+1)}t^{\lambda-\alpha}$$

$$D_{at}^{\alpha}(C) = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\nu)}, \qquad D_{at}^{\alpha}(\exp(at)) = \frac{\exp(at)\gamma(\alpha, at)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Из этих соотношений видно, что формула дифференцирования степенной функции остается той же самой, только целое n заменяется дробным α, дробная производная порядка α от постоянной C не равна нулю.

Теоретическим и прикладным аспектам дифференцирования и интегрирования произвольного порядка посвящена работа (*Олдхэм*, *Спанир*, *1974*). В ней анализируются алгоритмы численного дробного дифференцирования. В частности, считается возможной следующая приближенная формула:

$$D_{at}^{\alpha}(\varphi(t)) \approx \frac{t^{-\alpha}n^{\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{k!}\varphi_k(t), \qquad t>0, \tag{5.3.30}$$

где

$$\varphi_n(t)=\varphi(0), \quad \varphi_{n-1}(t)=\varphi(t/n), \quad \ldots, \quad \varphi_k(t)=\varphi_n(t-kt/n), \quad \ldots, \quad \varphi_0(t)=\varphi(t).$$

Если $0<\alpha<1$, то можно воспользоваться следующим приближенным равенством

$$D_{at}^{\alpha}(\varphi(t)) \approx \frac{t^{-\alpha}n^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{\frac{(1-\alpha)\varphi_n(t)}{n^{\alpha}} + \sum_{k=0}^{n-1}[\varphi_k(t)-\varphi_{k+1}(t)][(k+1)^{1-\alpha}-k^{1-\alpha}]\right\}. \tag{5.3.31}$$

Итак, производная дробного порядка — это нелокальная характеристика функции $\varphi(t)$, поскольку она зависит не только от ее значений в окрестности рассматриваемой точки (как это имеет место в случае целочисленной производной), но и от принимаемых ею значений на всем интервале $(a, 0)$. Алгоритмам аппроксимации дробной производной и разностным методам решения разных уравнений переноса посвящены работы (*Шхануков, 1996*; *Шхануков—Лафишев, Нахушева, 1998*). Различные аспекты, связанные с применением уравнений в дробных производных, рассмотрены в работах (*Самко и др., 1987*; *Нахушев, 2003*; *Учайкин, 2008*) и др.

5.3.3. Уравнение ДФПК для описания эволюционных процессов во фрактальном времени

Обратимся теперь к пространственно-однородному уравнению неразрывности (5.1.13) (в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$)

$$\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} = 0, \tag{5.3.32}$$

в котором выражение (5.3.19) для потока вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ может быть записано, с учетом формул (5.1.38) и (5.1.40), в виде

$$\boldsymbol{J} = -A_\xi D_{0t}^{-D}\left(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{q}) \cdot \frac{\partial \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = -A_\xi D_{0t}^{-D}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})P_2(\boldsymbol{q}, t)\right), \tag{5.3.33}$$

где $A_\xi \equiv [\sqrt{2}(1-\xi)]^{-D}$. Наличие в правой части этого уравнения дробного интеграла по времени отражает влияния памяти процесса на распределение плотности вероятности $P_2(\boldsymbol{q}, t)$: плотность потока вероятности $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ в данный момент времени t определяется не локальным градиентом плотности в тот же самый момент t, а ее эволюцией в течение всего предшествующего периода $0 < t' < t$ диффузии. Заметим, что случай пустого множества Кантора ($\xi \to 0$, $D \to 0$) соответствует линейной комбинации двух дельта-функций половинной интенсивности, локализованных на концах выбранного интервала $[0, t]$, т. е. имеет место процесс с полным отсутствием памяти (марковский процесс). С увеличением параметра подобия ξ показатель в формуле (1.1.2) возрастает, и трансформант Лапласа для функции памяти становится все более быстро изменяющейся функцией. Предельное значение для параметра подобия равно $\xi = 1/j$; в этом случае из формулы (1.1.2) следует, что хаусдорфова размерность канторова множества равна $D = 1$. При этом, на основании (5.3.20), величина $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}, t)$ связана с $\partial \mu_{\text{turb}}(\boldsymbol{q}, t)/\partial \boldsymbol{q}$ через полный интеграл, что отвечает случаю идеальной памяти. Анализ интегро-дифференциального уравнения (5.3.32), имеющего дробный порядок, представляет весьма трудную задачу.

Для перехода к дробно-дифференциальному уравнению применим к обеим частям уравнения (5.3.32) дифференциальный оператор D_{0t}^{D} с показателем $D \in (0, 1]$; в результате получим следующее уравнение в частных производных дробного порядка

$$\frac{\partial^\omega P_2(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t^\omega} + A_\xi \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{q})P_2(\boldsymbol{q}, t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})\frac{\partial P_2(\boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}}\right) = 0, \tag{5.3.34}$$

где параметр ω связан с фрактальной размерностью активного времени, $\omega \equiv 1 - D$. Это уравнение можно назвать уравнением аномальной диффузии в пространстве внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса. Уравнение (5.3.34) принимает обычный диффузионный вид (5.1.39) при $\omega = 1$ ($D = 0$). Введение дробной производной $\partial^\omega / \partial t^\omega$ в кинетическое уравнение (5.3.31) позволяет учесть временной элемент «странных» кинетических процессов в хаотической фрактальной вихревой подсистеме (случайные блуждания подсистемы во фрактальном времени (СБФВ)), которые проявляются как эффекты памяти в турбулентной жидкой среде. Моделирование при $0 \leqslant D < 1$ эволюции турбулентного хаоса на основании уравнения (5.3.34) вскрывает еще одно свойство турбулентности — наличие турбулентных вспышек (всплесков пульсаций), связанных с временной перемежаемостью (см. *Бойко и др., 2006*). В каком бы масштабе мы не наблюдали распределение точек на временной оси, оно выглядит прерывистым. Области сгущения чередуются (перемежаются) с пустотами. Среднее число точек на интервале $(0, t)$ растет пропорционально t^D, т. е. здесь мы имеем дело со стохастическим фракталом (см. *Кроновер, 2000*) с фрактальной размерностью D.

Глава 6

Самоорганизация развитой турбулентности и механизмы формирования когерентных структур

Конечной целью феноменологического моделирования гидродинамической турбулентности является создание такой полуэмпирической модели, которая максимально приближена к реальности и отвечает различным динамическим состояниям природных сред. На этом пути предстоит преодолеть еще немало трудностей, поскольку разработка универсальной модели турбулентности в настоящее время представляется проблематичной.

Нами были учтены соображения подобного рода при конструировании синергетической модели развитой турбулентности в жидкости. Мы видели, что использование концепции двухуровневого описания структурированной турбулентности позволяет построить модель турбулентности как процесса самоорганизации в открытых системах (см. гл. 5) . При этом подсистема турбулентного хаоса (вихревой континуум с внутренней структурой) предназначена для моделирования как стохастического мелкомасштабного пульсационного движения завихренной жидкости, так и для описания возникающего в процессе ее эволюции ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур. Наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулизованной природной среде, которые появляются на фоне мелкомасштабного пульсационного движения, может служить образование гранул в солнечной фотосфере.

Как было показано в предыдущей главе, введение в термодинамическое описание турбулентного хаоса набора стохастических внутренних параметров $\boldsymbol{q}$, характеризующих, в известной степени, микроструктуру турбулизованной жидкости, дает возможность получить стохастико-термодинамическими методами уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (5.2.6) для функций распределения вероятностей $P_2 \equiv P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t)$ различных статистических характеристик вихревых образований в пространстве внутренних координат. Эти кинетические уравнения, описывающие эволюцию функции распределения плотности вероятности для однородных по времени случайных процессов $\boldsymbol{q}(t)$, могут быть использованы, в частности, для анализа различных механизмов перехода (происходящих в результате потери устойчивости течения при некотором изменении управляющих параметров) из одного стационарно-неравновесного состояния турбулентного хаоса в другое. При этом в окрестностях точек бифуркации возможны различные сценарии эволюции стохастических координат $\boldsymbol{q}(t)$ турбулентного хаоса: в зависимости от интенсивности случайных флуктуаций в каждый момент времени соответственная динамическая система может посетить одни аттракторы (отвечающие неким вихревым структурам в координатном пространстве) и обойти стороной другие.

В п. 6.1 настоящей главы показано, что когерентное поведение турбулентного хаоса, приводящее к возникновению мезомасштабных вихревых структур, также может быть промоделировано в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$ марковскими диффузионными процессами, являющимися решениями уравнений ФПК. Тем самым продемонстрирована принципиальная возможность реализации процесса самоорганизации (возникновения упорядоченных мезомасштабных образований, обладающих более низкой симметрией, чем исходное состояние) в термодинамически открытой квазиравновесной вихревой подсистеме, когда в ходе ее эволюции вероятно генерирование новых временны́х когерентных структур (КС). Подобное порождение КС отвечает, в частности, процессу индуцированных мультипликативным шумом неравновесных «фазовых переходов», возникающих в структурированном турбулентном потоке (см. *Horsthemke*, *Lefever*, *1984*). Мультипликативный шум, проистекающий в данном случае от «взаимодействия» подсистем осредненного движения и флуктуирующего турбулентного хаоса, зависит, по определению, от самого случайного процесса $\boldsymbol{q}(t)$.

В дальнейшем при анализе эволюции вихревого хаоса мы будем исходить из того, что допустима замена реального шума турбулентного течения (пульсации которого обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояние турбулизованной среды и не могут быть приписаны какой-нибудь одной вполне определенной причине) гауссовским белым шумом. Подобный шум используется нами в качестве простейшей модели полного шумового воздействия на $\boldsymbol{q}(t)$, проистекающего как от подсистемы осредненного движения, так и от внутреннего шума подсистемы турбулентного хаоса, порожденного его «тепловой» структурой. Аргументом в пользу такого выбора случайной силы в СДУ (5.2.23) является то обстоятельство, что только для модели белого шума результирующий стохастический процесс $\boldsymbol{q}(t)$ будет марковским и только такой выбор приводит к полной эквивалентности метода СДУ методу уравнения ФПК для вероятности перехода. Отметим также, что белый шум, представляющий собой удобную математическую идеализацию реального шума, является обобщенным случайным процессом — он не дифференцируем и имеет бесконечную дисперсию.

В этих предположениях показано, что если интенсивность мультипликативного шума турбулентного хаоса достаточно велика, то экстремумы функции плотности вероятности, описывающей стационарное поведение стохастической вихревой подсистемы, и по числу и по положению существенно отличаются от стационарных состояний, отвечающих детерминированному хаосу. Более того, мультипликативный шум может приводить к возникновению новых стационарных состояний и тем самым изменять и сами свойства (в частности, бифуркационные диаграммы) локальной устойчивости детерминированного хаоса — точки перехода могут перемещаться в пространстве $\boldsymbol{q}$ под влиянием интенсивного шума в турбулентной жидкости. Это качественное изменение наиболее отчетливо отражается в экстремумах стационарной плотности вероятности P_2^{st}, которые, согласно Хорстхемке и Лефевру (*Horsthemke*, *Lefever*, *1984*), являются наиболее подходящими индикаторами перехода: экстремумы стационарной плотности вероятности соответствуют макроскопическим «фазам» системы и служат параметром порядка перехода. Таким образом, мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему определяющих внутренних параметров $\boldsymbol{q}$ турбулентного хаоса, но наряду с этим может как стабилизировать неустойчивые макроскопические состояния, так и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках теории детерминированного хаоса.

В п. 6.2 рассмотрен один из конкретных механизмов формирования и эволюции больших концентрированных вихревых структур, который интерпретирован с точки зрения теории динамических систем. Здесь сформулирована общая концепция синергетического рождения КС (мезомасштабных кластеров) из турбулентного хаоса, связанная с явлением фазово-частотной синхронизации целого ряда мелкомасштабных вихревых образований основной некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а также рассмотрены сценарии динамического воздействия мелкозернистого флуктуационного поля хаоса на эволюцию подобных КС. Показана взаимосвязь неравновесных фазовых переходов с процессом самоорганизации вихревых кластеров, обладающих более низкой симметрией, чем исходное состояние. Дано объяснение возникновения некоторого эффективного силового поля хаоса как самосогласованного процесса, при котором ненулевое начальное поле захватывает отдельные мелкомасштабные кластеры синхронизированных осцилляторов (моделирующих мелкомасштабные вихри некогерентной составляющей турбулентного хаоса), так что в результате воздействие этих захваченных объектов будут суммироваться когерентно, и эта когерентная группа будет генерировать ненулевой вклад в действующее на систему эффективное силовое поле. Наконец, сделан важный вывод о том, что в то время как в хаотической турбулентности рост размеров твердых частиц при столкновениях затруднен, внутри когерентных вихревых образований может, наоборот, происходить их объединение и укрупнение. Возникновение мезомасштабных вихревых кластеров облегчает, в частности, решение проблемы укрупнения твердых частиц в турбулизованной газовзвеси за счет механизма соударений даже при относительно небольших относительных скоростях, что, как правило, встречает затруднения при попытках воспроизведения аналогичных процессов в лабораторных экспериментах.

§ 6.1. Роль неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности

Следует отличать крупномасштабные флуктуации собственно турбулентного хаоса от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой среды: в отличие от молекулярных флуктуаций (пренебрежимо малых для любых макроскопических систем) стохастичность подсистемы вихревого хаоса имеет не микроскопическое происхождение, а является проявлением его турбулентной природы и отражает кумулятивное воздействие большого числа взаимосвязанных факторов турбулизации жидкости. В частности, в окрестности некоторого устойчивого макроскопического состояния амплитуды молекулярных флуктуаций какой-либо пассивной добавки течения (если принять их за дополнительные переменные) ведут себя как V^{-1}, где V — объем системы. Известно, что в критической точке эти флуктуации нарастают как величины порядка $V^{-1/2}$ и, следовательно, в термодинамическом пределе $V \to \infty$ они становятся пренебрежимо малыми (*Леонтович*, *1952*). В то же время турбулентные флуктуации хаоса ведут себя не как обратные степени характерного размера системы V^{-1}, а могут достигать величины порядка V^0 и потому не исчезают на макроскопическом уровне описания системы. Таким образом, масштабы молекулярных и турбулентных флуктуаций весьма различны и не пересекаются друг с другом. Именно по этой причине и возникает необходимость уточнения стохастико-термодинамического описания подсистемы турбулентного хаоса с тем, чтобы можно было включить в модель структурированной турбулентности эффекты ее стохастичности (*Колесниченко*, *2002*). С влиянием случайных свойств вихревого хаоса (обусловленных, в частности, его естественным шумом) связаны варианты динамического поведения различных неотрицательных характеристик мелкомасштабной турбулентности при увеличении надкритичности. Следующий важный шаг в процедуре моделирования структурированной турбулентности состоит в явной привязке вероятностных характеристик пульсаций ее мелкомасштабных характеристик к «физическим свойствам» квазистационарной подсистемы вихревого хаоса.

При феноменологическом описании хаоса мы будем использовать формализм обобщенной статистической термодинамики, требующий вероятностного подхода (*Стратонович*, *1985*) и предполагающий исследование статистического ансамбля макроскопически одинаковых систем (т. е. систем с одними и теми же обобщенными экстенсивными параметрами состояния типа внутренней энергии $E_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, энтропии $S_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, удельного объема $q/\bar{\rho}(\boldsymbol{r}, t)$ и некоторым числом внутренних переменных). Причиной стохастичности являются турбулентные флуктуации (относительно средних значений) внутренних координат $q_k(\boldsymbol{r}, t)$ $(k = \overline{1, n})$ состояния хаоса, которые, собственно, и служат мерой различий в любом множестве подобных термодинамически тождественных систем. К числу внутренних координат, описывающих макроскопическое состояние хаоса, будем относить непрерывно изменяющиеся локальные случайные параметры, адекватно характеризующие завихренную жидкость внутри физически бесконечно малого объема $d\boldsymbol{r}$. Однако при этом будем считать, что некоторая часть внутренних координат $q_k(\boldsymbol{r}, t)$ может иметь отношение к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть — охарактеризовывать индивидуальные мезомасштабные КС.

В соответствии с развиваемым здесь подходом будем предполагать, что для полного статистического описания совокупного (векторного) случайного процесса

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t) = \{q_k(\boldsymbol{r}, t),\ k = \overline{1, n}\}$$

(набора из n параметров состояния q_k) в вихревом континууме достаточно знать одноточечную плотность вероятности $W_1(\boldsymbol{q}, t)$ и совместную двухточечную плотность распределения вероятности $W_2(\boldsymbol{q}_0, t_0; \boldsymbol{q}, t)$. Как известно, стохастические процессы, полностью описываемые только этими двумя функциями, являются марковскими процессами. Кроме этого, используем двухточечную плотность условной вероятности, $P_2(\boldsymbol{q}_0, t_0 \mid \boldsymbol{q}, t) = W_2(\boldsymbol{q}_0, t_0; \boldsymbol{q}, t)/W_1(\boldsymbol{q}_0, t_0)$, которая устанавливает вероятное значение стохастических характеристик вихревых образований $\boldsymbol{q}$ в пространстве внутренних координат в момент времени t, если в момент времени t_0, с вероятностью равной единице, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0$. Тогда когерентное поведение подсистемы турбулентного хаоса, приводящее к появлению диссипативных структур, в соответствии с методами статистической неравновесной термодинамики можно будет моделировать в пространстве внутренних координат $\boldsymbol{q}$ марковскими диффузионными процессами, которые являются решениями уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова (5.1.39), определяющих эволюцию плотности вероятности перехода $P_2 \equiv P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t)$ для стационарных случайных процессов (т. е. процессов, для которых все статистические характеристики не изменяются при сдвиге времени,

$$P_2(\boldsymbol{q}_0, t_0 \mid \boldsymbol{q}, t') \equiv P_2(\boldsymbol{q}_0, 0 \mid \boldsymbol{q}, t' - t_0) \equiv P_2(\boldsymbol{q}_0 \mid \boldsymbol{q}, t).$$

Эти уравнения позволяют проанализировать, в частности, процессы перехода из одного стационарно-неравновесного состояния хаоса $\boldsymbol{q}^{\mathrm{st}}$ в другое, происходящие в результате последовательной потери устойчивости при некотором изменении управляющих параметров (например, числа Рейнольдса Re), и рассчитать плотность вероятности в окрестностях точек бифуркации. Переход к упорядоченному состоянию связан с неустойчивостью турбулизованной системы и нарушением ее симметрии: самоорганизация возникает в тех случаях, когда стационарное состояние становится неустойчивым и сменяется новым состоянием, обладающим более низкой симметрией, чем исходное состояние. В соответствии с этим можно сказать, что за термодинамическим порогом самоорганизации система вступает в область синергетики (*Horsthemke*, *Lefever*, *1984*).

В гл. 5. было показано, что самоорганизующаяся подсистема турбулентного хаоса может обладать и гораздо более сложным поведением, чем множественные стационарно-неравновесные состояния $\boldsymbol{q}_k^{\mathrm{st}}$. В частности, в так называемой критической точке существует, по крайней мере, одна релаксационная мода, которая либо постоянна, либо осциллирует с частотой, равной мнимой части собственного значения этой моды. В другом потенциально возможном случае, когда мнимую ось пересекает пара комплексно-сопряженных собственных значений, одной из двух типичных ситуаций в критической точке является упомянутая ранее нормальная бифуркации Андронова—Хопфа (бифуркация рождения цикла), при которой соответствующее детерминированное уравнение имеет изолированное устойчивое периодическое решение $\boldsymbol{q}^c(t) = \boldsymbol{q}^c(t + \tau^c)$ с периодом τ^c. Это означает, что фазовая точка равновесия из устойчивого фокуса (стационарное состояние) в момент потери устойчивости скачком переходит на асимптотически устойчивый предельный цикл (аттрактор), к которому при $t \to \infty$ стремятся все траектории из его окрестности. Таким образом, в критических точках динамика хаоса определяется существующими в системе нелинейностями (см. *Колесниченко*, *2004*). При этом огромное число макроскопических степеней свободы реального турбулентного течения резко сокращается, миллиарды и более возбуждений системы оказываются подчиненными небольшому числу мод, т. е. турбулентность определяется конечным числом коллективных возбуждений (связанных, например, с предельным циклом), в то время как остальные возбуждения просто подстраиваются под них, выполняя роль более интенсивной диссипации. В процессе дальнейшей временной эволюции подсистемы турбулентного хаоса возможны различные бифуркации этих периодических состояний, типа бифуркации удвоения периода, возникновения инвариантного тора, бифуркации с потерей симметрии и т. д. Следовательно, при выходе подсистемы флуктуирующего хаоса из некоторого аттрактора в результате воздействия достаточно сильных турбулентных пульсаций она может эволюционировать к одному из возможных аттракторов (зона притяжения которого покрывает точку начального состояния системы), включая и странные аттракторы.

Таким образом, при изменении управляющих параметров в системе могут развертываться различные сценарии эволюции (связанные с возникновением различного рода аттракторов, относящихся с неким вихревым структурам) в пространстве внутренних координат, описывающих макроскопические состояния флуктуирующего хаоса. При этом переходы от одной диссипативной структуры к другой по своим математическим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам, если понятие фазового перехода распространить на новый класс неравновесных явлений (см., например, *Кадомцев*, *Рязанов*, *1983*). Более того, как уже говорилось выше, турбулентный шум может приводить к возникновению новых состояний системы и тем самым изменять и сами свойства локальной устойчивости турбулентного хаоса — критические точки перехода могут сдвигаться под влиянием мультипликативного шума. Заметим, что подобные переходы, которые обычно называют индуцированными шумом неравновесными фазовыми переходами, несут на себе характерные черты своего турбулентного происхождения.

В данном параграфе проанализированы связи неустойчивостей, вызванных изменением управляющих параметров, с процессами самоорганизации (фазовыми переходами) в развитом турбулизованном потоке, отражением которых в $\boldsymbol{q}$-пространстве является возникновение когерентных образований. При этом свойства фазовых переходов исследуются для случайной среды с гауссовским белым шумом, используемым в качестве модели случайного силового воздействия подсистемы осредненного движения и самого вихревого хаоса на эволюцию флуктуирующих мелкомасштабных характеристик турбулентности $\boldsymbol{q}(t)$. Далее мы будем также предполагать, что внутренние координаты $\boldsymbol{q}$ турбулентного хаоса, характеризующие в известной степени структуру завихренной жидкости, распределены в стационарном состоянии по логнормальному закону (см. *Монин*, *Яглом*, *1996*).

6.1.1. Основной математический аппарат

Кратко сформулируем теперь наиболее существенные особенности математического аппарата, на котором основан используемый далее подход. Во избежание ненужных осложнений в описании индуцированных шумом видоизменений макроскопических свойств подсистемы флуктуирующего турбулентного хаоса, мы ограничимся здесь рассмотрением только временно́й эволюции хаоса, т. е. будем предполагать полную идентичность вихревых движений во всех точках пространства. Кроме этого, будем считать, что удовлетворительное описание стохастически изменяющихся свойств вихревого хаоса возможно с помощью лишь одной непрерывно изменяющейся интенсивной переменной, например скорости диссипации турбулентной энергии в вихрях $q=\varepsilon_r$, или любой другой родственной ей величины (*Монин*, *Яглом*, *1996*). Подобное предположение связано, в частности, с тем, что при исследовании индуцированных шумом переходов нежелательно использование приближенных методов, поскольку даже малые погрешности численного метода могут приводить к мнимой качественной перестройке поведения системы. С другой стороны, точные аналитические решения уравнений ФПК удается получить, как известно, в основном для одномерных систем (см., например, *Гардинер*, *1986*).

Закономерности, устанавливаемые в процессе исследовании марковских флуктуаций диссипации энергии и родственных ей положительных характеристик, важны, на наш взгляд, также и для понимания эволюции произвольных случайных полей скорости и температуры в условиях реального турбулентного движения жидкости. Более того, они могут оказаться весьма полезными при создании так называемых подсеточных моделей турбулентности с учетом перемежаемости. Далее будем также отличать внутренние флуктуации случайной переменной q, порожденные «тепловой» структурой подсистемы вихревого хаоса, от внешних (по отношению к переменной q) флуктуаций, обусловленных воздействием подсистемы осредненного движения и имитирующих в рассматриваемой модели не учитываемые явным образом многочисленные возбужденные степени свободы турбулизованной жидкости в целом (*Колесниченко*, *2002*). Именно с влиянием интенсивных внешних флуктуаций на стохастическую подсистему вихревого хаоса и связаны качественные изменения (т. е. индуцированные шумом «фазовые переходы») в динамическом поведении различных неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности.

При сделанных выше допущениях в основу динамического описания стохастических свойств подсистемы турбулентного хаоса, флуктуирующего вблизи некоторого стационарно-неравновесного состояния q^{st}, может быть положено следующее стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) для однородного по времени одномерного марковского процесса $q(t)$ (*Колесниченко*, *2006*)

$$\frac{dq(t)}{dt}=K_\alpha(q)+\varepsilon\sqrt{Q(q)}\cdot\xi(t),\qquad q>0 \tag{6.1.1}$$

либо эквивалентное ему прямое уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial P_2(q_0\mid q,t)}{\partial t}+\frac{\partial J(q_0\mid q,t)}{\partial t}=0, \tag{6.1.2}$$

определяющее эволюцию плотности вероятности перехода $P_2\equiv P_2(q_0\mid q,t)$ для случайного стационарного процесса $q(t)$. Напомним, что в зависимости от того, в каком смысле понимаются соответствующие стохастические интегральные соотношения (в смысле Ито или Стратоновича), отвечающие СДУ, зависит вид коэффициента сноса $K(q, \varepsilon)$ в уравнении ФПК (6.1.2), а также вид регулярной силы $K_\alpha(q)$ в уравнении Ланжевена (6.1.1) [см. гл. 5]. Здесь

$$J(q_0 \mid q, t) \equiv [K(q, \varepsilon)P_2(q_0 \mid q, t)] - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial q}[Q(q)P_2(q_0 \mid q, t)] \tag{6.1.3}$$

— поток условной вероятности для процесса $q(t)$, принимающего в начальный момент времени $t_0 = 0$ значение $q(0) = q_0$; $\varepsilon^2(Q)(q)$ и

$$K(q, \varepsilon) \equiv \begin{cases} K_\alpha(q) & \text{— в случае Ито,} \\ K_\alpha(q) + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \partial Q(q)/\partial q & \text{— в случае Стратоновича} \end{cases} \tag{6.1.4}$$

— соответственно, не зависящие от времени коэффициенты диффузии и сноса в пространстве конфигураций; $\varepsilon^2 \equiv \gamma k_B T_{\text{turb}}$ — параметр, характеризующий интенсивность воздействия шума подсистемы турбулентного хаоса, порожденного его «тепловой» структурой, на случайный процесс $q(t)$; T_{turb} — термодинамическая температура хаоса, связанная с осредненной по Фавру пульсационной кинетической энергией течения турбулизованной жидкости $\langle b \rangle \equiv \overline{\rho(\boldsymbol{u}'')^2}/2\overline{\rho}$ соотношением $\frac{3}{2}\gamma k_B T_{\text{turb}} = \langle b \rangle$ (энергия турбулентности $\langle b \rangle$ по предположению совпадает с термодинамической внутренней энергией хаоса, $E_{\text{turb}} \equiv \langle b \rangle$ (см. *Колесниченко, Маров, 1999*); $K_\alpha(q) \equiv K(q) + \alpha g(q)$ — регулярная сила в пространстве стохастической переменной q, причем сила $K_\alpha(q)$ в (6.1.4) зависит не только от переменной q, но и от некоторого управляющего параметра α, описывающего кумулятивное воздействие осредненного турбулентного течения на стохастический процесс $q(t)$ в вихревом континууме (роль параметра порядка α может играть, например, число Рейнольдса, отвечающее крупномасштабным движениям в турбулизованном потоке, или число, связанное с Re, — например, показатель надкритичности);

$$K_\alpha(q) = -\partial V(q)/\partial q$$

— регулярная сила («сила трения», противодействующая флуктуациям хаоса), порожденная так называемым локальным синергетическим (детерминированным) потенциалом $V(q) = -\left[\int^q K_\alpha(x)\,dx\right]$ подсистемы вихревого хаоса в предельном случае $\varepsilon^2 \to 0$ слабого шума; $\xi(t)$ — стохастический сомножитель в выражении для случайной силы $\tilde{f}(q) \equiv \varepsilon\sqrt{Q(q)} \cdot \xi(t)$ (учитывающий как присутствие внутреннего аддитивного ($\sqrt{Q(q)} = \text{const}$) шума в подсистеме хаоса, обусловленного мелкомасштабными флуктуациями параметра $q(t)$ относительно квазистационарного состояния вихревого континуума, так и источник внешнего мультипликативного ($\sqrt{Q(q)} \neq \text{const}$) шума, имитирующего не учитываемые явным образом всевозможные возбужденные степени свободы турбулизованной гидродинамической системы и связанного с воздействием подсистемы осредненного движения на процесс $q(t)$). Его мы далее будем аппроксимировать гауссовским белым шумом с нулевым средним значением и дельтаобразной по времени корреляционной функцией

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \qquad \langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle = \delta(t - t_1)$$

(здесь среднее берется по стохастическому процессу $\xi(t)$). Коэффициент сноса $K_\alpha(q)$ в соотношении (6.1.4) соответствует вырожденному (в детерминистском пределе $\varepsilon^2 \to 0$) случайному процессу $q(t)$, описываемому детерминированным динамическим уравнением регрессии Ландау—Халатникова (автономным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка по времени)

$$dq(t)/dt = K_\alpha(q), \tag{6.1.5}$$

с начальным условием $q(0) = q_0$, а слагаемое $\frac{1}{4}\varepsilon^2 \partial Q(q)/\partial q$ учитывает индуцированный мультипликативным ($Q(q) \neq \text{const}$) шумом снос, когда влияние случайной силы $\tilde{f}(q)$ зависит от состояния процесса $q(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что детерминированное уравнение (6.1.5) устойчиво, понимая под устойчивостью ограниченность решения $q(t)$.

Уравнение ФПК (6.1.2) предназначено для анализа временнóй эволюции марковских диффузионных процессов, связанных с начальными условиями типа $P_2(q_0 \mid q, 0) = \delta(q - q_0)$, которые соответствуют дельтаобразной плотности вероятности, сосредоточенной в точке $q = q_0$. Сверх этого, на функцию $P_2(q_0 \mid q, t)$ должны быть наложены те или иные граничные условия по q, которые определяются, как правило, существом физической задачи. Ниже будем предполагать, что пространством состояний диффузионного процесса $q(t)$ служит интервал $[q_1, q_2]$, причем верхняя граница может обращаться в бесконечность, $q_2 = \infty$. Если в начальный момент времени $t = 0$ задано не начальное состояние $q(0) = q_0$, а начальное распределение $W(q)$, то удобно искать решение уравнения ФПК для одноточечной плотности вероятности $W_1(q, t)$. При использовании соотношения

$$\int W_1(q_0, t_0) P_2(q_0, t_0 \mid q, t) dq_0 = W_1(q, t),$$

легко можно убедиться в том, что одноточечная плотность вероятности $W_1(q, t)$ марковского диффузионного процесса также удовлетворяет уравнению ФПК в форме (6.1.2)—(6.1.3).

Мы ограничимся рассмотрением процессов $q(t)$, которые никогда не достигают границ своего пространства состояний, и, следовательно, на функцию $P_2(q_0 \mid q, t)$ граничные условия можно не накладывать. Как известно, в этом случае гарантируется существование и единственность решения СДУ (6.1.1) на $[q_1, q_2]$ при $\forall t$ (см., например, *Гардинер*, *1983*). К числу недостижимых границ относятся естественные границы (достижимые лишь при $t \to \infty$ с нулевой вероятностью, $\lim\limits_{t\to\infty, q\to q_i} P_2(q, t) = 0$) и притягивающие границы, когда $q(t) \to q_i$ при $t \to \infty$. Согласно классификации Гихмана—Скорохода (*1968*), например, нижняя граница q_1 будет естественной, если $L_1(q_1) = +\infty$, и притягивающей, если $L_1(q_1) < +\infty$ и $L_2(q_1) = +\infty$. Здесь постоянные L_1 и L_2 определяются соотношениями

$$L_1(q_1) = \int\limits_{q_1}^{\beta} \varphi(x) dx, \quad L_2(q_1) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{q_1}^{\beta} \frac{1}{Q(y)\varphi(y)} \left\{ \int\limits_{q_1}^{y} \varphi(x) dx \right\} dy, \tag{6.1.6}$$

в которых β — точка вблизи границы q_1, а

$$\varphi(x) = \exp\left\{ -\int\limits_{\beta}^{x} \frac{2K_\alpha(z)}{\varepsilon^2 Q(z)} dz \right\}, \quad \beta \in (q_1, q_2). \tag{6.1.7}$$

— неинтегрируемая в окрестности границы q_1 функция.

Напомним еще раз, что вид коэффициента сноса в уравнении (ФПК) зависит от того, в каком смысле понимаются соответствующие стохастические интегральные соотношения (в смысле Ито или Стратоновича), выписанные для СДУ (см., например, *Гардинер*, *1986*). Для определения наиболее подходящего в рамках рассматриваемой конкретной задачи коэффициента сноса и диффузии случайного процесса $q(t)$ необходимо привлекать дополнительные физические соображения. В дальнейшем мы будем оперировать СДУ (6.1.1), записанными в симметризованной форме Стратоновича (*Стратонович*, *1961*), когда определение соответствующих стохастических интегралов согласуется с привычными правилами математического анализа. Известно, что от интерпретации СДУ по Стратоновичу к интерпретации СДУ по Ито всегда можно перейти, прибавляя $\frac{1}{4}\varepsilon^2 \partial Q(q)/\partial q$ к $K_\alpha(q)$ [см. гл. 5]. Отметим также, что в случае аддитивного шума (т. е. при $Q(q) = \mathrm{const}$) не существует различия между интегралом Ито и интегралом Стратоновича (см., например, *Тихонов*, *Миронов*, *1977*).

По поводу удобства использования в нашей модели структурированной турбулентности интерпретации СДУ по Стратоновичу надо сказать следующее. В общем случае сильно нелинейных флуктуирующих полей скорости или других термогидродинамических параметров в реальной турбулизованной жидкости статистика подсистемы турбулентного хаоса не носит ни гауссовского, ни марковского характера, особенно на больших масштабах (см. *Монин*, *Яглом*, *1996*). Тем не менее в принятом далее подходе мы исходили из того, что гауссовский белый шум, используемый в качестве модели интенсивности случайного силового воздействия $\tilde{f}(q)$ шума турбулентного хаоса, представляет все же приемлемое приближение при моделировании корреляций между случайными процессами $q(t)$ и $\xi(t)$. Другими словами, мы допускали, что возможна замена реального шума с короткой памятью белом шумом с нулевой памятью. Как известно (*Стратонович*, *1961*), подобное замещение возможно, если время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ (время памяти шума) случайного процесса $\xi(t)$ много меньше временно́го масштаба макроскопической эволюции хаоса $\tau_{\text{макро}}$, который обычно отождествляется со временем релаксации подсистемы вихревого хаоса к опорному стационарному состоянию, $\tau_{\text{корр}} \ll \tau_{\text{макро}}$. Таким образом, в случае принятой нами идеализации белого шума (для которого $\tau_{\text{корр}} \to 0$), понимаемые в смысле Стратоновича стохастические дифференциальные уравнения (6.1.1) могут быть интерпретированы как пределы неких виртуальных уравнений, записанных для немарковских (но близких к марковским) случайных процессов $q(t)$ в реальном турбулизованном потоке. В заключение заметим, что интерпретацию СДУ по Стратоновичу следует применять всякий раз, когда дельта-коррелированный гауссовский белый шум в СДУ является идеализацией реального случайного процесса $\xi(t)$ с очень малым, но все же конечным временем корреляции (*Тихонов*, *Миронов*, *1977*). Это позволяет использовать мощный аппарат теории марковских диффузионных процессов и получить благодаря этому точные аналитические результаты, описывающие поведение систем, находящихся под действием шума.

Стационарное решение уравнения ФПК

Применительно к рассматриваемым одномерным процессам весьма просто найти стационарную плотность вероятности $P^{\mathrm{st}}(q) = \lim\limits_{t\to\infty} P_2(q, t)$, характеризующую стационарное поведение системы, находящейся под воздействием белого шума, по истечении достаточно большого интервала времени. Одномерная стационарная плотность вероятности $P^{\mathrm{st}}(q)$, если она существует, по определению не зависит от времени t и от начальных условий $q(0) = q_0$. Поэтому в стационарном состоянии уравнение ФПК (6.1.2) вырождается в уравнение $\partial P^{\mathrm{st}}(q)/\partial t = 0$, из которого следует, что стационарный поток вероятности $J^{\mathrm{st}}(q)$ постоянен при любых состояний $q \in [q_1, q_2]$, т. е. $J^{\mathrm{st}}(q) \equiv J^{\mathrm{st}} = \mathrm{const}$. Таким образом, в стационарном случае уравнение ФПК переходит в уравнение первого порядка для $P^{\mathrm{st}}(q)$:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial q}[Q(q)P^{\mathrm{st}}(q)] - 2[K(q, \varepsilon)P^{\mathrm{st}}(q)] = -2J^{\mathrm{st}}, \tag{6.1.8}$$

причем поток вероятности внутри пространства состояний равен потоку через границы: $J^{\mathrm{st}} = J(q_1) = J(q_2)$. Далее будем рассматривать ситуацию, когда не существует потока вероятности из пространства состояний, и поэтому $J^{\mathrm{st}} = 0$. Напомним, что при выводе уравнения ФПК в гл. 5 для описания эволюции функций распределения неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности предполагались нулевые граничные условия: $J(q_1) = J(q_2) = 0$. Тогда стационарная плотность вероятности — решение уравнения (6.1.8), имеет вид

$$P^{\mathrm{st}}(q) = \frac{N}{Q(q)} \exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_{q_1}^{q} dx \frac{K(x, \varepsilon)}{Q(x)}\right] = \frac{N}{\sqrt{Q(q)}} \exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_{q_1}^{q} dx \frac{K_a(x)}{Q(x)}\right], \tag{6.1.9}$$

где постоянная интегрирования N определяется из условия нормировки

$$N^{-1} = \int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{1}{Q(q)} \exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_{q_1}^{q} dx \frac{K(x, \varepsilon)}{Q(x)}\right] dq < \infty. \tag{6.1.10}$$

Выражение для $P^{\mathrm{st}}(q)$ может быть преобразовано, с учетом формулы (6.1.9), к виду

$$P^{\mathrm{st}}(q) = N \exp\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_{q_1}^{q} dx\left(\frac{K_a(x)}{Q(x)}\right) - \ln\sqrt{Q(z)}\right] = N \exp(-2\Phi(q)/\varepsilon^2) =$$

$$= N \exp(-2\Phi(q)/\gamma k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}}), \tag{6.1.11}$$

где

$$\Phi(q) = -\left(\int\limits_{q_1}^{q} \frac{K_a(x)}{Q(x)} dx - \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\sqrt{Q(q)}\right) \tag{6.1.12}$$

— так называемый вероятностный потенциал.

Важно отметить, что распределение (6.1.11) распространяет обычную формулу Больцмана—Планка (для равновесного состояния термодинамических параметров замкнутой системы, когда $\Phi = -S$) на стационарные состояния ансамбля, отвечающего открытой подсистеме турбулентного хаоса. При этом инвертированная формула

$$2\Phi(q) = -\varepsilon^2 \ln(P^{st}(q)/N) \tag{6.1.13}$$

позволяет, в частности, конкретизировать уравнения (6.1.1) и (6.1.2) для выбранных стохастических характеристик мелкомасштабной турбулентности, если относительно последних приняты какие-либо гипотезы распределения в стационарном состоянии. Стационарными состояниями здесь и далее мы будем считать не зависящие от времени решения q^{st} детерминированного уравнения (6.1.5). Вместе с тем, слова «стационарное состояние» можно употреблять и по отношению к распределению по возможным состояниям. Так, распределение (6.1.9) можно назвать стационарным распределением состояний. В случае аддитивного шума хаоса не существует различия между детерминированным стационарным состоянием q^{st} и экстремумами стационарного распределения P^{st}, хотя и надо иметь в виду, что система в стационарном состоянии на самом деле флуктуирует около некоторого среднего состояния. Это связано с тем, что в этом случае распределение состояний (6.1.9) имеет столь острый максимум, что, по существу, только стационарное состояние q^{st} дает основной вклад в это распределение. В случае мультипликативного шума хаоса случайная величина, определяющая стационарное состояние системы, качественно весьма отличается от вырожденной случайной величины, соответствующей детерминированному хаосу.

6.1.2. H-теорема для стационарных состояний

При изучении вероятностных аспектов макроскопических стационарных состояний рассматриваемой вихревой системы требуется иметь исходный физический ансамбль, соответствующий подсистеме турбулентного хаоса. Если исследуется вполне конкретное стационарное состояние q^{st}, то необходимо, чтобы представленные ансамблем начальные условия q_0 были сосредоточены в области именно его притяжения. Возникает вопрос: является ли данное стационарное состояние q^{st} действительно устойчивым по Ляпунову при начальном условии q_0 (или орбитально устойчивым по Пуанкаре), подобно термодинамически равновесным состояниям в классической термодинамике? В противном случае фазовые траектории $q(t)$, которые начинаются вблизи q^{st}, не выйдут на нужное стационарное состояние. А это с высокой вероятностью означает, что неустойчивые стационарные состояния вихревого континуума, не имеющие области притяжения, не могут быть описаны стационарным статистическим ансамблем, поскольку его невозможно даже организовать подобающим образом.

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим следующий функционал от $P_2(q, t)$

$$H(t) = \gamma k_b T_{turb} \int_{q_1}^{q_2} dq P_2(q, t) \ln[P_2(q, t)/P^{st}(q)]. \tag{6.1.14}$$

Величины подобного рода впервые были введены Кульбаком (*1967*). Поэтому $H(t)$ часто называют энтропией Кульбака, которая, однако, в отличие от обычной энтропии, не является мерой неопределенности параметров q (характеризующей их статистический разброс), а является мерой близости распределений P_2 и P^{st}. Действительно, легко показать, что функционал H является функционалом Ляпунова, поскольку он обладает следующими двумя свойствами: $H(t) \geqslant 0$ и $\partial H(t)/\partial t \leqslant 0$ при $\forall t$, причем знак равенства имеет место только при $P_2(q, t) \equiv P^{\mathrm{st}}(q)$).

В самом деле, вследствие неравенства $\ln(1/x) \geqslant 1 - x$, справедливого при $x > 0$, и условия нормировки функций $P_2(q, t)$ и $P^{\mathrm{st}}(q)$, имеем

$$H(t) = \gamma k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{turb}} \int\limits_{q_1}^{q_2} dq P_2(q, t) \left\{ \ln\left[\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} + \frac{P^{\mathrm{st}}(q)}{P_2(q, t)} - q \right] \right\} \geqslant 0, \tag{6.1.15}$$

причем неравенство (6.1.15) переходит в равенство только при $P_2(q, t) \equiv P^{\mathrm{st}}(q)$.

Покажем теперь, что $H(t)$ монотонно убывает. Продифференцируем для этого соотношение (6.1.14) по времени и воспользуемся уравнением ФПК (6.1.2) и соотношением (6.1.3) для потока вероятности, который по предположению равен нулю на границе. Тогда, интегрируя по частям, в результате будем иметь

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \varepsilon^2 \int\limits_{q_1}^{q_2} \ln\left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) \frac{\partial P_2(q, t)}{\partial t} dq = -\varepsilon^2 \int\limits_{q_1}^{q_2} \ln\left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) \frac{\partial J(q, t)}{\partial q} dq =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_{q_1}^{q_2} J(q, t) \frac{\partial}{\partial q} \ln\left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) dq = \varepsilon^2 \int\limits_{q_1}^{q_2} J(q, t) \frac{P^{\mathrm{st}}(q)}{P_2(q, t)} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) dq =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_{q_1}^{q_2} J^{\mathrm{st}}(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) dq - \frac{\varepsilon^4}{2} \int\limits_{q_1}^{q_2} Q(q) \frac{[P^{\mathrm{st}}(q)]^2}{P_2(q, t)} \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) \right]^2 dq \leqslant 0, \tag{6.1.16}$$

поскольку первый интеграл равен нулю, в чем нетрудно убедиться, используя условие $J^{\mathrm{st}} = 0$ и выполнив интегрирование по частям:

$$\int\limits_{q_1}^{q_2} J^{\mathrm{st}}(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) dq = -\int\limits_{q_1}^{q_2} dq \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) \frac{\partial J^{\mathrm{st}}(q)}{\partial q} = \int\limits_{q_1}^{q_2} dq \left(\frac{P_2(q, t)}{P^{\mathrm{st}}(q)} \right) \frac{\partial P^{\mathrm{st}}(q)}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, если внутри пространства состояний флуктуации нигде не обращаются в нуль, т. е. при $\forall q \in [q_1, q_2]$ выполняется неравенство $Q(q) > 0$, то $\partial H(t)/\partial t \leqslant 0$.

Итак, функционал $H(t)$ строго положителен и убывает со временем. Отсюда вытекает, что $H(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а так как $H(t) = 0$ в том и только в том случае, если $P_2(q, t) = P^{\mathrm{st}}(q)$, мы приходим к равенству $P^{\mathrm{st}}(q) = \lim\limits_{t \to \infty} P_2(q, t)$. Другими словами, из факта существования функционала Ляпунова следует глобальная асимптотическая устойчивость стационарного состояния q^{st}. Кроме того, можно показать (см., например, *Стратонович*, *1961*), что если стационарная плотность вероятности $P^{st}(q)$ существует и диффузионный процесс при $t=0$ начинается с нее, то $q(t)$ является эргодическим процессом. Это означает, что математическое ожидание $E\{\varphi(q)\}$ стационарного диффузионного процесса $q(t)$ может быть определено по наблюдению лишь одной произвольной траектории процесса — взятием средней по времени,

$$E\{\varphi(q)\} \equiv \int \varphi(q)P^{st}(q)dq = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int \varphi\{q(t)\}dt.$$

В этом случае произведение $P^{st}(q)dq$ равно доле времени, которое произвольная траектория диффузионного процесса проводит в бесконечно малой окрестности состояния q (*Horsthemke*, *Lefever*, *1984*).

Аддитивный шум турбулентного хаоса

Если шум хаоса аддитивный, т. е. $Q(q)=\mathrm{const}$, то вероятностный потенциал $\Phi(q)$ и детерминированный потенциал $V(q)$ совпадают с точностью до несущественной постоянной. В этом случае из уравнения (6.1.8)

$$\varepsilon^2 Q \cdot \partial P^{st}(q)/\partial q - 2K_\alpha(q)P^{st}(q) = 0$$

следует, что экстремумы q_{ext} стационарной плотности вероятности, определяемые из условия

$$\partial P^{st}(q)/\partial q = 0, \tag{6.1.17}$$

совпадают со стационарными решениями

$$\frac{\partial q^{st}}{\partial t} = K_\alpha(q^{st}) = 0 \tag{6.1.18}$$

детерминированного уравнения (6.1.5), отвечающего вырожденному случаю ($\varepsilon^2 \to 0$) отсутствия влияния на стохастический процесс $q(t)$ естественного шума турбулентного хаоса. Таким образом, детерминированные стационарные состояния q^{st} (напомним, что образом стационарного состояния в пространстве конфигураций служит особая точка определенного типа — центр, устойчивый фокус, седло, неустойчивый узел и т. п.) определяются либо нулями функции $K_\alpha(q^{st})$ (соответственно экстремумами детерминированного потенциала $V(q)$), либо экстремумами q_{ext} стационарной плотности вероятности $P^{st}(q)$.

В детерминированном случае (т. е. для вырожденной турбулентности, $\varepsilon^2=0$) неравновесный фазовый переход происходит в точке, в которой претерпевает качественные изменения потенциал $V(q)$, например изменяется число локальных экстремумов. Простейший способ исследования такой возможности состоит в проверке устойчивости состояния q_k^{st} относительно малых возмущений δq_k. При анализе по первому приближению на асимптотическую устойчивость ($\lim_{t\to\infty} q(q_0, t) = q_k^{st}$) изолированного стационарного состояния q_k^{st}, временная эволюция возмущения δq_k задается решением уравнения

$$\partial \delta q_k/\partial t = -\partial^2 V(q)/\partial q \partial q|_{q=q_k^{st}} \delta q_k,$$

полученного путем отбрасывания нелинейных членов разложения в ряд Тейлора правой части уравнения (6.1.5). Решения этого уравнения $\delta q_k(t) = A_k \exp(\omega_k t)$ (где

$\omega_k = -\partial^2 V(q)/\partial q \partial q|_{q=k_k^{st}}$ — нормальная мода) могут обладать более низкой симметрией, чем исходное стационарное состояние q_k^{st}, причем устойчивые стационарные состояния, для которых $\partial^2 V(q)/\partial q \partial q|_{q=q_k^{st}} > 0$, соответствуют максимумам функции $P^{st}(q)$, а неустойчивые стационарные состояния $(\partial^2 V(q)/\partial q \partial q|_{q=q_k^{st}} < 0)$ — минимумам $P^{st}(q)$. Следовательно, качественное изменение стационарного состояния однозначно отражается на экстремумах плотности вероятности. Как уже отмечалось выше, в детерминированном случае стационарная плотность вероятности $P^{st}(q)$ состоит из дельтообразных пиков, сосредоточенных на стационарных состояниях. В стохастическом случае аддитивный шум хаоса, по аналогии с молекулярными флуктуациями, также приводит к некоторому (в зависимости от интенсивности ε^2) размыванию функции распределения плотности вероятности $P^{st}(q)$ в окрестности точки $q_{\min}^{st}$, соответствующей минимуму потенциала $V(q)$. Тем не менее можно ожидать, что плотность вероятности перехода достигает максимума именно в этой точке, $P^{st}(q_{\min}^{st}) > P^{st}(q)$. Если существует более чем один минимум потенциала $V(q)$, то имеется многомодовая плотность вероятности $P^{st}(q)$ с вершинами, соответствующими различным локальным минимумам детерминированного потенциала; при этом наибольший максимум функции и положение самой глубокой ямы потенциала $V(q)$ не смещены относительно друг друга. При $t \to \infty$ система посетит все минимумы потенциала $V(q)$, причем бесконечное число раз. Таким образом, число и положение экстремумов плотности вероятности $P^{st}(q)$ в стохастическом случае и потенциала $V(q)$ в детерминированном случае являются наиболее характерными отличительными особенностями стационарного поведения системы, т. е. экстремумы, соответствующие макроскопическим фазам системы, являются до известной степени индикаторами перехода — параметрами порядка.

Подчеркнем еще раз, что аддитивный шум не изменяет качественно стационарное поведение системы. Экстремумы плотности вероятности всегда совпадают с детерминированными стационарными состояниями независимо от интенсивности белого шума. Поэтому в случае аддитивного шума, для того чтобы решить, например, для какого из локально устойчивых состояний неравенство $P^{st}(q_{\min}^{st}) > P^{st}(q)$ выполняется при $\forall q \neq q_{\min}^{st}$, вполне достаточно анализа на основе лишь детерминированного описания хаоса. Воздействие естественного шума турбулентного хаоса на эволюцию многомерного диффузионного марковского процесса $\boldsymbol{q}(t)$ проанализировано в работе (*Колесниченко, 2004*).

Мультипликативный шум

Для менее идеализированного (более приближенного к реальности) мультипликативного шума турбулентного хаоса, флуктуации которого зависят от эволюции случайного процесса $q(t)$ (т. е. $Q(q) \neq \text{const}$), требуется уже некоторая модификация соответствия между макроскопическими стационарными состояниями q^{st} и экстремумами q_{ext} стационарной плотности вероятности $P^{st}(q)$. Экстремумы функции $P^{st}(q)$ могут быть найдены в этом случае из условия [см. (6.1.11)]

$$h(q_{ext}, \varepsilon) = K(q_{ext}) - \frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{Q(q_{ext})}\frac{\partial\sqrt{Q(q)}}{\partial q}\bigg|_{q=q_{ext}} = 0. \qquad (6.1.19)$$

Уравнение (6.1.19) является основным для анализа влияния мультипликативного шума хаоса на стационарное поведение рассматриваемой стохастической системы (6.1.1). Первый член этого уравнения, если его положить равным нулю, соответствует уравнению (6.1.18) для детерминированных стационарных состояний, а второй член — описывает воздействие мультипликативного шума. Таким образом, величина интенсивности ε^2 естественного шума турбулентного хаоса оказывается важным параметром системы.

Стационарная плотность вероятности имеет максимум при $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{\text{ext}}} < 0$ и минимум при $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{\text{ext}}} > 0$. Множество точек в пространстве конфигураций, для которых $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{\text{ext}}} = 0$, соответствует структурно-неустойчивым ситуациям (которые называют P-бифуркациями). Благодаря P-бифуркациям нарушается соответствие между аттракторами детерминированной системы и максимумами стационарной плотности вероятности. Если величина ε^2 мала, то корни уравнения (6.1.19) ни по числу, ни по положению не отличаются от детерминированных стационарных состояний. Но если интенсивность ε^2 шума достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности $P^{\text{st}}(q)$ и по числу, и по положению могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния. А это означает, что (в отличие от аддитивного шума) мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему, но может стабилизировать новые макроскопические состояния и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного хаоса.

6.1.3. Феноменология мелкомасштабной турбулентности

Проанализируем специфические особенности переходов, индуцированных мультипликативным шумом турбулентного хаоса, в случае распределения флуктуирующих параметров q в стационарном состоянии хаоса по логнормальному закону.

В основу макроскопической модели собственно турбулентного хаоса, связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, могут быть положены основные идеи каскадной теории Колмогорова (*1941*) мелкомасштабной вихревой турбулентности, которая по этой причине заслуживает здесь краткого обзора. В случае турбулизованной жидкости, рассматриваемой как сплошная среда, мелкомасштабная структура турбулентности определяется, согласно этой теории, каскадным характером передачи энергии по спектру вихрей различных пространственно-временных масштабов через инерционный интервал от энергетического к вязкому интервалу, где и происходит ее диссипация в тепло. Мелкие вихри получают энергию в результате последовательного дробления крупных вихрей при росте управляющего параметра — числа Рейнольдса $\text{Re} = Lu_0/\nu$, соответствующего крупномасштабным движениям в потоке (L — интегральный масштаб турбулентности, u_0 — характерная скорость течения, ν — кинематическая молекулярная вязкость). При этом, происходит непрерывное перераспределение удельной кинетической энергии несущего потока ($\sim u_0^3/L$) от крупномасштабных вихрей к более мелким вплоть до самых мелких с характерным размером порядка внутреннего масштаба турбулентности $\eta \sim (\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$, который характеризует влияние вязких эффектов на структуру мелкомасштабной турбулентности. Важно ясно себе представлять, что в пределе больших чисел Рейнольдса Re, несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что стохастический режим турбулентных флуктуаций в границах пространственно-временной области осреднения мгновенных гидродинамических уравнений является почти локально изотропным — однородным, изотропным и квазистационарным. Другими словами, он изменяется в зависимости лишь от числа Re, определяющего, в конечном счете, и само число каскадов в иерархии вихрей различных порядков. Заметим, что полной локальной изотропии из-за наличия мезомасштабных когерентных структур, естественно, быть не может.

Некоторые результаты теории Колмогорова

Теория Колмогорова 1941 года (*K41*) касается статистических свойств однородной и изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса. Согласно первой гипотезе подобия, статистический режим мелкомасштабной локально изотропной турбулентности на масштабах $r \ll L$ однозначно определяется тремя размерными параметрами: средней по ансамблю возможных реализаций течения среды скоростью диссипации энергии $\bar{\varepsilon}$ (ключевой характеристики локально изотропной турбулентности), вязкостью ν и самим масштабом r. Приведенная выше оценка для диссипационного масштаба длины η является следствием как раз этой гипотезы. В то же время в инерционном интервале ($\eta < r \ll L$) не происходит заметного продуцирования и диссипации кинетической энергии, здесь устанавливается квазистационарный режим турбулентности, который универсален и зависит только от величин $\bar{\varepsilon}$ и r (вторая гипотеза подобия Колмогорова).

Количественное описание мелкомасштабной локально изотропной турбулентности в инерционном интервале основано на использовании структурных функций

$$S_p(\boldsymbol{r}) = \overline{[u_r''(\boldsymbol{x}) - u_r''(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})]^p} \tag{6.1.20}$$

и их спектров (в силу изотропии течения структурные функции не зависят от направления отрезка $\boldsymbol{r}$). Из второй гипотезы подобия и предположения о том, что параметры турбулентности слабо меняются на расстояниях порядка $r = |\boldsymbol{r}|$, если $r < \Lambda \ll L$, вытекает один из важнейших законов мелкомасштабных турбулентных движений (закон двух третей): в любом турбулентном течении с достаточно большим числом Рейнольдса Re средний квадрат разности скоростей в двух точках на расстоянии r друг от друга при не слишком малых, но и не слишком больших значениях r (сравнимых с гидродинамическим масштабом длины Λ соответствующего осредненного течения), должен быть пропорционален $r^{2/3}$: $S_2(r) \sim (\bar{\varepsilon} r)^{2/3}$. Этот закон в настоящее время хорошо подтвержден экспериментально для самых разнообразных турбулентных течений (см. *Монин*, *Яглом*, *1996*).

Что касается структурных функций p-го порядка, то теория подобия Колмогорова (*1941*) приводит к соотношению

$$S_p(r) \sim (\bar{\varepsilon} r)^{p/3}, \tag{6.1.21}$$

которое, вообще говоря, не подтверждается экспериментально, в особенности для $p \gg 1$, и является в лучшем случае их слабой оценкой. Недостаток гипотез подобия для локально изотропной турбулентности в их первоначальной форме связан с существенным предположением о постоянстве притока энергии к мелкомасштабным возмущениям, лежащим в инерционном интервале, когда считалось, что параметр Колмогорова $\bar{\varepsilon}$, точное определение которого

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\frac{\nu}{2}(\partial u_t''/\partial r_j + \partial u_j''/\partial r_i)^2},$$

является универсальной константой для заданного течения и характеризует поток энергии, прокачиваемый вдоль всего инерционного интервала до диссипативных масштабов. Однако в действительности $\bar{\varepsilon}$ не является постоянной, а представляет собой случайную величину, характеризуемую собственной функцией распределения. Таким образом, экспериментальные измерения структурных функций относительно невысоких порядков подтвердили справедливость уже упоминавшегося нами ранее «казанского» замечания Ландау — локальные вариации скорости диссипации энергии нарушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности (см., например, *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*; *Frisch*, *1995*). Это нарушение однородной турбулентности связано, в частности, с перемежаемостью потока, когда при сколь угодно больших числах Рейнольдса турбулизованные области сосуществуют с квазиламинарными.

Логнормальная модель

В связи с отмеченными выше затруднениями, представления Колмогорова (*1941*) о случайном вихревом каскаде были уточнены Обуховым (*1962*), который предложил отказаться от условия $\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t) = \text{const}$ в области $d\boldsymbol{r}$ (с центром в точке $\boldsymbol{r}$ и характерным масштабом $\Lambda \ll L$) и для учета структуры поля диссипации энергии исходить из того, что статистические характеристики мелкомасштабных движений (например, структурные функции) определяются не теоретико-вероятностным средним значением $\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, t)$ случайной величины ε, а зависят от значений локальной диссипации $\bar{\varepsilon}_r(\boldsymbol{r}, t)$, осредненной по некоторому объему V_γ с характерным размером r, малым по сравнению с типичным масштабом неоднородности осредненного течения, $r \ll \Lambda$. Соответствующая такому подходу турбулентность получила название локально-однородной. Если в качестве области осреднения, лежащей в пределах $d\boldsymbol{r}$, выбрать шар радиуса r (получаемые результаты слабо зависят от формы области осреднения), то

$$\varepsilon_r(\boldsymbol{r}, t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int\limits_{|\boldsymbol{r}^*| \leqslant r} d\boldsymbol{r} \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} (\partial u_i''(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^*)/\partial r_j + \partial u_j''(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}^*)/\partial r_i)^2. \tag{6.1.22}$$

Используя параметр ε_r, Колмогоров (*1962*) переформулировал первую и вторую гипотезы подобия (установив уточненные гипотезы, в которых постоянная величина $\bar{\varepsilon}$ заменена на случайную величину ε_r) и, кроме этого, дополнил их еще и третьей гипотезой, постулирующей (при большом отношении масштабов $L:r$) логарифмически нормальное распределение плотности вероятности величины ε_r и линейность зависимости дисперсии $\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}$ от $\ln(L/r)$:

$$W_1(\varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_r \sigma_{\ln \varepsilon_r}} \exp\left(-\frac{\ln(\varepsilon_r/m_{\ln \varepsilon_r})}{2\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}}\right), \tag{6.1.23}$$

$$\ln m_{\ln \varepsilon_r} = -\sigma^2_{\ln \varepsilon}/2 + \ln \overline{\varepsilon r}, \quad \sigma^2_{\ln \varepsilon_r} = \mu \ln\left(\frac{L}{r}\right) + B(\boldsymbol{r}, t), \tag{6.1.24}$$

где $\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}$ — дисперсия случайной величины $\ln \varepsilon_r$; $m_{\ln \varepsilon_r} = \exp(\overline{\ln \varepsilon_r})$ — медиана распределения случайной переменной $\ln \varepsilon_r$; $\overline{\varepsilon_\gamma} = \overline{\varepsilon}$; μ — универсальный параметр (перемежаемости); $B(\boldsymbol{r}, t)$ — слагаемое, зависящее от характеристик осредненного (крупномасштабного) движения жидкости. В логнормальной модели коэффициент μ является подгоночным параметром, первоначальная оценка которого была $\mu \approx 0{,}5$, а затем эта оценка понизилась до $\mu \approx 0{,}2$ (см. *Anselmet et al, 1984*; *Монин, Яглом, 1996*). Подобное стационарное распределение плотности вероятности $W_1^{\mathrm{st}}(\varepsilon_r)$ в уточненной теории Колмогорова (*K62*) может быть дополнительно оправдано тем обстоятельством, что модель каскадного процесса последовательных дроблений турбулентных вихрей родственна процессу дробления пылевых частиц, которому асимптотически отвечает логарифмически нормальное распределение по размерам. Кроме этого, имеются многочисленные экспериментальные подтверждения логнормального распределения вероятностей диссипации энергии или связанных с ней неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности в широком интервале умеренных значений аргумента.

В ряде публикаций справедливость логнормального распределения для неотрицательных мелкомасштабных характеристик турбулентности подвергнута сомнению, поскольку она предполагает, в частности, появление сверхзвуковых скоростей при очень больших числах Рейнольдса (*Frisch, 1995*). В последние годы были сделаны попытки описать случайные турбулентные поля с помощью других функций распределения, например логпуассоновских, логлеви и т. п. (см., например, *She, Leveque, 1994*; *Dubrulle, 1994*). Однако вполне окончательного ответа на вопрос о истинных законах распределения вероятности величин типа ε_r в турбулентных потоках все еще не получено. В связи с этим представляется естественным использовать в данном подходе в качестве первоначального шага предположение Колмогорова о логнормальности распределения для ε_r. Основательный обзор соответствующих работ приведен, например, в монографии (*Монин, Яглом, 1996*), к которой и отсылаем интересующегося читателя.

Часто предполагают, что формула (6.1.23) дает плотность распределения вероятностей осредненной диссипации и в случае, если $r \approx \eta$ (*Frenkiel, Klebanoff, 1975*). Это допущение позволяет, при использовании известной формулы $\eta = L\mathrm{Re}^{-3/4}$, выражающей диссипативный масштаб турбулентности через макропараметры турбулентности (см. *Монин, Яглом, 1996*), связать дисперсию $\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}$ с логарифмом числа Рейнольдса:

$$\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \cong 0{,}75\mu \ln \mathrm{Re} + B(\boldsymbol{r}, t). \tag{6.1.24*}$$

Распределение (6.1.23) позволяет рассчитать важные статистические характеристики стационарной мелкомасштабной турбулентности, в частности, моменты скорости диссипации $\overline{\varepsilon_r^p}$:

$$\overline{\varepsilon_r^p} = \int_0^\infty \varepsilon_r^n W_1(\varepsilon_r) d\varepsilon_r = (\overline{\varepsilon_r})^p \exp\left[\frac{1}{2} p(p-a1)\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}\right] = F_p(\boldsymbol{r}, t)(\bar{\varepsilon})^p (r/L)^{-\mu p(p-1)/2} \quad (6.1.25)$$

(коэффициенты $F_p(\boldsymbol{r}, t)$ зависят от макроструктуры турбулентного течения). Отсюда следует простой физический смысл коэффициента перемежаемости μ — с точностью до знака это показатель степени r для момента второго порядка поля диссипации энергии. Используя (6.1.25), можно получить уточненное выражение для структурной функции $S_p(r) \sim \overline{\varepsilon^{p/3}} \cdot r^{p/3}$ p-го порядка:

$$S_p(r) \sim F_p(\boldsymbol{r}, t)(\bar{\varepsilon})^{p/3} (r/L)^{\mu p(3-p)/18} (r)^{p/3}, \quad (6.1.26)$$

которое, например в случае $p=2$, оказывается близким к пределам точности имеющихся экспериментальных данных, а в применении к структурным функциям высших порядков сильно отличается от зависимости, предсказываемой первоначальной теорией Колмогорова для локально изотропной турбулентности (но в то же время неплохо согласуется с имеющимися экспериментальными данными). Формула $S_p(r) \sim \overline{\varepsilon^{p/3}} \cdot r^{p/3}$ обобщает формулу (6.1.21) в том смысле, что теперь в правой части стоит не постоянная величина ε в степени $p/3$, а статистический момент порядка $p/3$, характеризующий структуру случайного поля диссипации энергии на соответствующих масштабах r. Аналогичным образом была поправлена теория локальной структуры пульсационных полей температуры, плотности и концентрации химически активной примеси, перемешиваемых турбулентностью (см., например, *Монин*, *Яглом*, *1996*).

Есть еще одна немаловажная причина, по которой удобно использовать (в качестве внутреннего параметра) флуктуирующую локально осредненную диссипацию ε_r при феноменологическом описании турбулентного хаоса в рамках двухуровневой макроскопической модели структурированной турбулентности, учитывающей процессы самоорганизации. Она связана, в частности, с тем, что первоначальная теория каскада (*K41*), подразумевающая равномерное заполнение физического пространства вихрями каждого масштаба, не пригодна для этой цели, поскольку не рассматривает в явном виде какие-либо когерентные образования (например, такие как вихревые спирали, вихревые нити, стрики, берстинги и т. п.), в которых и происходит наиболее интенсивная вязкая диссипация энергии (параметр Колмогорова $\bar{\varepsilon}$ в этой теории является постоянной величиной). Между тем, любая адекватная теория турбулентности, как показали эксперименты (см., например, *Crow*, *Champagne*, *1971*; *Brown*, *Roshko*, *1974*; *Хлопков*, *Жаров*, *Горелов*, *2002*), обязана принимать во внимание существование вихревых диссипативных КС, а также неравномерность их пространственно-временного распределения в пульсирующем потоке. Кроме этого, с хаотическим характером передачи кинетической энергии по каскаду вихрей связано присущее турбулентному течению явление гидродинамической перемежаемости, при которой области, занятые так называемыми турбулентными пятнами (где наблюдаются интенсивные пульсации градиентов скорости, $\overline{\varepsilon_r} > 0$), тесно переплетаются с областями со слабо турбулизованной или полностью безвихревой жидкостью (в которых такие пульсации практически отсутствуют, $\overline{\varepsilon_r} = cong0$). Другими словами, в развитых турбулентных полях образуется многомасштабная система (фрактальное множество) взаимодействующих активных и пассивных областей с различными законами масштабного подобия (скейлинга). Как известно, мультифрактальность может быть определена и измерена в терминах флуктуаций локальной диссипации (см. *Frisch, 1995*). Таким образом, диссипация энергии ε_r, или родственные ей величины (квадратичные по градиентам скорости), могут служить как важной характеристикой структурирования турбулентного потока, так и индикатором перемежаемости.

6.1.4. Модельные стохастические дифференциальные уравнения и уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для скорости диссипации турбулентной энергии

В связи со сказанным представляется достаточно рациональным использовать в качестве единой флуктуирующей координаты турбулентного хаоса локально осредненную скорость диссипации турбулентной энергии, $q \equiv \varepsilon_r > 0$, что далее и предполагается. В этом случае, используя формулу (6.1.23) для стационарного распределения величины ε_r и вводя обозначение $\alpha \equiv N\sqrt{\pi}\sigma_{\ln q}$, можно конкретизировать выражения для вероятностного потенциала (6.1.12) и коэффициентов диффузии и сноса в уравнении (6.1.2). В результате будем иметь:

$$\Phi(q) = \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\sqrt{Q(q)} - \int^q \frac{K_a(x)}{Q(x)}dx = -\frac{\varepsilon^2}{2}\ln(P^{\rm st}(q)/N) =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{2}\ln(\alpha q) + \frac{1}{2\alpha}\ln^2\left(\frac{q}{m_{\ln q}}\right), \tag{6.1.27}$$

$$Q(q) = \alpha^2 q^2, \quad K(q) = -\alpha q \ln\left(\frac{q}{m_{\ln q}}\right), \quad K(q, \varepsilon) = -\alpha q\left[\ln\left(\frac{q}{m_{\ln q}}\right) - \sigma^2_{\ln q}\right], \tag{6.1.28}$$

где

$$\sigma^2_{\ln q} = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2. \tag{6.1.29}$$

Следовательно, в основу эволюционного описания марковского диффузионного процесса $q(t) \equiv \varepsilon_r(t)$, моделирующего стохастическое поведение подсистемы турбулентного хаоса с мультипликативным шумом ($Q(q) = \alpha^2 q^2$), могут быть положены СДУ

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = -\alpha q(t)\ln\left(\frac{q(t)}{m_{\ln q}}\right) + \varepsilon\alpha q(t)\cdot\xi(t), \tag{6.1.30}$$

которые мы будем интерпретировать в смысле Стратоновича, и соответствующее ему уравнение ФПК для плотности вероятности перехода $P_2 \equiv P_2(q_0 \mid q, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(q, t) = -\alpha\frac{\partial}{\partial q}\left\{\left[\ln\left(\frac{q}{m_{\ln q}}\right) - \frac{\alpha}{2}\varepsilon^2\right]qP_2(q, t)\right\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial q_2}[q^2P_2(q, t)]. \tag{6.1.31}$$

Описание в единых терминах моделей K41 и K62

Вернемся теперь к нашей основной задаче — исследованию механизма синергетического рождения КС в пространстве внутренних координат (в результате существенного изменения числа Рейнольдса), связанного с явлением неравновесных фазовых переходов, индуцированных шумом турбулентного хаоса. Как уже отмечалось, некогерентная (мелкозернистая) составляющая хаоса, возникающая в результате последовательного каскада большого числа пространственных и временных бифуркаций в конце концов оказывается устроенной настолько сложным образом, что для характеристики ее статистических свойств (в инерционном и диссипативном интервалах) можно использовать концепцию теории (*K41*) об однородной и изотропной турбулентности при постоянстве параметра Колмогорова $\bar{\varepsilon}$. Вместе с тем, с целью исследования возможных процессов самоорганизации в системе (т. е. возникновения мезомасштабных вихревых КС в реальном турбулизованном течении) необходимо, как было показано, отступить от подобной высокой симметрии и ввести в рассмотрение случайную скорость диссипации ε_r, флуктуации которой нарушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности.

Для того чтобы мы имели возможность описывать локально изотропное состояние (фоновое детерминированное состояние) турбулентного хаоса и механизмы его структурирования в единых терминах, условимся считать далее, что в детерминированном случае состояние хаоса описывается вырожденной случайной величиной $\bar{\varepsilon}_r = \text{const}$, которая характеризуется своим распределением вероятности. Казалось бы, о каком «распределении» может идти речь, если допустимых значений всего одно, т. е. исследуемая переменная — константа. Тем не менее подобное распределение можно интерпретировать как предел непрерывного распределения, когда область существования функции плотности $P(\varepsilon_r)$ стягивается в единственную точку $\bar{\varepsilon}_r$, т. е.

$$P(\varepsilon_r) = \delta(\varepsilon_r - \bar{\varepsilon}_r) = \begin{cases} \infty & \text{при } \varepsilon_r = \bar{\varepsilon}_r \\ 0 & \text{при } \varepsilon_r \neq \bar{\varepsilon}_r, \end{cases} \tag{6.1.32}$$

и при этом под случайной переменной понимается такая величина, которая почти всегда равна значению $\bar{\varepsilon}_r$. Для вырожденного распределения (6.1.32) имеют место соотношения $M(\varepsilon_r) = \bar{\varepsilon}_r$, $D(\varepsilon_r) = 0$ (*Бостанджиян*, *2000*). Справедливо и обратное: если дисперсия какого-либо распределения с конечным средним равна нулю, то оно может быть только вырожденным. Таким образом, в детерминированном случае стационарная «плотность вероятности» состоит из дельтообразных пиков, сосредоточенных на стационарном состоянии $\bar{\varepsilon}_r$. Заметим, что логарифмически нормальное распределение (6.1.23) стремится при $\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \to 0$ к вырожденному распределению (6.1.32) с дисперсией $D(\varepsilon_r) = 0$ и средним $M(\varepsilon_r) = \exp(\ln m_{\ln \varepsilon_r}) = \overline{\ln \varepsilon_r}$.

Определим теперь коэффициент α в уравнениях (6.1.30) и (6.1.31). Используя формулы (6.1.24*) и (6.1.29), получим соотношение

$$\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2 = \frac{3}{4}\mu \ln \mathrm{Re} + B,$$

которое в частном случае вырожденной турбулентности ($\sigma^2_{\ln \varepsilon_r} \to 0$, $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\det}$)

позволяет записать универсальное слагаемое B (зависящее от характеристик крупномасштабного движения) в виде $B=-\frac{3}{4}\mu \ln \mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$. Здесь $\mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$ — некоторое предельное значение числа Рейнольдса, при котором возможен не структурированный турбулентный хаос (фоновое состояние). Тогда для внешнего параметра α будем иметь

$$\alpha=\frac{3}{2\varepsilon^2}\mu \ln(1+\gamma), \tag{6.1.33}$$

где $\gamma=(\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{\mathrm{det}})/\mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$ — показатель надкритичности. Таким образом, коэффициент α является управляющим параметром для уравнений (6.1.30) и (6.1.31). Специфика этих уравнений такова, что при некотором режиме осредненного движения ($\alpha \geqslant \alpha_{\mathrm{crit}}$) крупномасштабные флуктуации турбулентного хаоса могут достигать таких критических значений, при которых фазовые траектории случайного процесса $q(t)$ скачком переходят на другой аттрактор. В результате происходит и определенная перестройка состояния подсистемы турбулентного хаоса, связанная, в частности, с образованием новых относительно устойчивых коллективных движений (мезомасштабных вихревых структур), которая, в свою очередь, изменяет макроскопическое поведение турбулизованной жидкости в целом.

6.1.5. Фазовые переходы, индуцированные мультипликативным шумом турбулентного хаоса

Вырожденная турбулентность

Проанализируем сначала вырожденный случай ($\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}\to 0$), когда интенсивность белого шума турбулентного хаоса чрезвычайно мала, т. е. $\varepsilon^2\to 0$. В этом случае СДУ (6.1.30) сводится к следующему детерминированному уравнению

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t}=-\alpha q(t)\left[\ln\left(\frac{q(t)}{\overline{q}}\right)+\frac{\sigma^2_{\ln \varepsilon_r}}{2}\right]\cong -\alpha q(t)\cdot \ln\left(\frac{q(t)}{\overline{q}}\right),\quad q(0)=\overline{q}. \tag{6.1.34}$$

Как было отмечено выше, изменения, происходящие в режиме осредненного движения жидкости, воздействуют на «случайный» процесс $q(t)$ через внешний (управляющий) параметр α. Зависящее от времени решение детерминированного уравнения (6.1.34) можно найти в явном виде: $q=\overline{q}\exp[\exp(-\alpha t)]$. Отсюда следует, что макроскопический временной масштаб эволюции системы к опорному состоянию (время жизни возможных возмущений) есть величина порядка $\tau_{\mathrm{turbo}}=1/\alpha$. При $\alpha<0$ (т. е. при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$) уравнение (6.1.34) допускает единственное асимптотическое устойчивое стационарное решение $q_1^{\mathrm{st}}=0$ (об условиях устойчивости/неустойчивости стационарных состояний смотри текст ниже формулы (6.1.18)), которое соответствует ламинарному режиму течения, обладающему наиболее высокой симметрией. В точке $\alpha=0$ ($\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$) время жизни флуктуаций в первом приближении стремится к бесконечности, решение $q_1^{\mathrm{st}}=0$ становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию, т. е. происходит фазовый переход, поскольку при $\alpha>0$ ($\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$) стационарная точка $q_1^{\mathrm{st}}=0$ становится неустойчивой, но возникает новое устойчивое стационарное состояние $q_2^{\mathrm{st}}=\overline{q}$). Следовательно, значение $\alpha=0$ является бифуркационным значением параметра: величина q скачком переходит с нижней ветви стационарных состояний на верхнюю ветвь стационарных состояний $q_2^{st} = \bar{q}$. Таким образом, детерминированная система (6.1.34) претерпевает равновесный фазовый переход первого рода, что соответствует спонтанному возникновению (при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{det}}$) некогерентной фоновой (однородной изотропной) турбулентности — течению, в котором с ростом числа Рейнольдса вдали от границ появляется тенденция к восстановлению в статистическом смысле всех симметрий.

Критические точки, индуцированные шумом

Приступим теперь к исследованию стационарного поведения стохастической системы при шуме хаоса произвольной интенсивности ε^2. Будем предполагать, что флуктуации реального турбулентного хаоса, воздействующие на систему, протекают быстро по сравнению с величиной $\tau_{\text{макро}} = 1/\alpha$. Это позволяет перейти к пределу белого шума и моделировать истинно случайный процесс $q(t)$ с помощью СДУ (6.1.30) и соответствующего ему уравнения ФПК (6.1.31). Отметим, что стационарное решение (6.1.23) уравнения (6.1.31) существует в том и только том случае, если $\alpha > 0$. Пространство состояний, которым должен быть ограничен процесс $q(t)$, представляет собой неотрицательную вещественную полупрямую. С физической точки зрения уравнения (6.1.30) и (6.1.31) вряд ли справедливы при произвольно больших значениях q. Поэтому правильней было бы ограничить пространство состояний q интервалом $[0, q_{\max}]$, где $q_{\max}$ — наибольшая локальная диссипация, которая физически возможна в системе. Однако подобная процедура не нужна, поскольку стационарная плотность вероятности экспоненциально уменьшается при $q \to \infty$, т. е. переход к большим значениям q с физической точки зрения совершенно безопасен.

Из выражения (6.1.6) видно, что границы процесса ($q_1 = 0$ и $q_2 = \infty$) будут естественны, если при $\beta > 0$ (β — точка вблизи границы, нижней или верхней)

$$L_1(0) = \int_0^\beta \varphi(x)dx = C\int_0^\beta x^{\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln\bar{\varepsilon}_r}{\varepsilon^2\alpha}\right)} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2\alpha}\ln^2 x\right]dx = \infty, \quad \beta \in (0, \infty) \tag{6.1.35}$$

и

$$L_1(\infty) = \int_0^\infty \varphi(x)dx = C\int_0^\infty x^{\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln\bar{\varepsilon}_r}{\varepsilon^2\alpha}\right)} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2\alpha}\ln^2 x\right]dx = \infty. \tag{6.1.36}$$

Условие (6.1.36) всегда выполняется, т. е. бесконечность является естественной границей при всех значениях α и ε. Из соотношения (6.1.35) следует, что нуль — естественная граница, если только $\alpha > 0$, что совпадает с условием существования стационарной плотности вероятности (6.1.23) (при $\alpha > 0$ и $\sigma_{\ln q}^2 > 0$). С другой стороны, при $\alpha < 0$ из (6.1.7) и (6.1.35) следует, что $L_1(0) < \infty$ и $L_2(0) = \infty$, т. е. нуль — притягивающая граница. Кроме того, следует иметь в виду, что нуль является не только граничной, но и стационарной точкой случайного процесса $q(t)$: при $q=0$ снос и диффузия одновременно обращаются в нуль. Так как нуль притягивающая точка, то вся стационарная «масса» вероятности должна быть сосредоточена в нуле. В терминах плотности вероятности это означает, что $P^{st}(q)=\delta(q)$, при $\alpha<0$ [см. формулу (6.1.32)].

Как было отмечено ранее, число и положение экстремумов стационарной плотности вероятности $P^{st}(q)$ в стохастическом случае являются наиболее характерными отличительными особенностями стационарного поведения системы, т. е. могут являться параметрами порядка для неравновесных фазовых переходов. В нашей модели экстремумы плотности вероятности $P^{st}(q)$ совпадают с нулями уравнения (6.1.19)

$$h(q,\varepsilon)\equiv-\alpha q(t)\ln\left(\frac{q(t)}{\bar{q}}\right)-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha^2 q(t)=0, \tag{6.1.37}$$

т. е. с

$$(q_{\rm ext})_1=0 \tag{6.1.38}$$

и

$$(q_{\rm ext})_2=\bar{q}\exp\left[-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha\right]=\bar{q}\exp\left[-\frac{9}{8}\mu\ln(1+\gamma)\right] \tag{6.1.39}$$

(второй корень существует при условии $\alpha>0$). Точки в пространстве конфигураций, для которых

$$\partial h(q,\varepsilon)/\partial q|_{q=q_{\rm ext}}=-\alpha\ln(q_{\rm ext}/\bar{q})-\alpha-(3/4)\varepsilon^2\alpha^2=0,$$

соответствуют структурно-неустойчивым ситуациям, когда возможны фазовые переходы. Так как $\partial h(q,\varepsilon)/\partial q|_{q=(q_{\rm ext})_2}=-\alpha$ всегда меньше нуля, то в точке $(q_{\rm ext})_2$ стационарная плотность вероятности достигает своего максимума,

$$P^{st}(q)=(1/\sqrt{2\pi}\bar{q}\sigma_{\ln q})\exp(\alpha\varepsilon^2/2);$$

производная

$$\partial h(q,\varphi)/\partial q|_{q=(q_{\rm ext})_1}\equiv-\alpha\ln[(q_{\rm ext})_1/\bar{q}]-\alpha-(3/4)\varepsilon^2\alpha^2$$

и, следовательно, корень $(q_{\rm ext})_1$ будет максимумом только при $\alpha<0$ (когда $\partial h(q)/\partial q|_{q=(q_{\rm ext})_1}<0$). Отсюда следует, что при переходе параметра α через нуль слева направо устойчивый фокус $(q_{\rm ext})_1$ становится неустойчивым, и система переходит на новый стационарный режим $(q_{\rm ext})_2$, т. е. во флуктуирующем турбулентном хаосе в отличие от детерминированного случая имеется две точки перехода. Переход при $\alpha=0$ ($\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{\rm det}$) обусловлен природой границы в нуле.

Суммируя вышесказанное можно утверждать, что плотность вероятности характеризуется следующими особенностями:

• Если $\alpha<0$ ($\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_{\rm det}$), то стационарная точка $(q_{\rm ext})_1=0$ (соответствующая ламинарному режиму течения) устойчива.

• В точке $\alpha=0$ ($\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{\rm det}$) стационарная точка $(q_{\rm ext})_1=0$ становится неустойчивой, происходит фазовый переход, обусловленный природой границы в нуле.

• При $\alpha=0$ возникает новое устойчивое стационарное решение $q_2^{st}=\bar{q}$, соответствующее некогерентной (фоновой) турбулентности, параметр q скачком переходит с нижней ветви стационарных состояний $q_1^{st}=0$ на верхнюю ветвь стационарных состояний $q_2^{st}=\overline{q}$. Логарифмически нормальное распределение (6.1.23) обращается при этом в вырожденное распределение (6.1.32) с дисперсией $D(q)=0$ и средним $M(q)=\overline{q}$. Хотя стационарное состояние $q_2^{st}=\overline{q}$ не является в присутствии шума устойчивым состоянием, оно все же остается наиболее вероятным значением. В некотором смысле δ-функция (6.1.32) начинает расплываться вправо, когда α минует эту точку перехода.

• Если параметр α становится больше нуля (т. е. при $\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{det}$), то характер распределения (6.1.32) резко изменяется, возникает новая ветвь стационарных состояний

$$(q_{ext})_2=\overline{q}\exp\left(-\frac{3}{4}\varepsilon^2\alpha\right)=\overline{q}\exp\left(-\frac{9}{8}\mu\ln(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{det})\right),$$

смещенная относительно детерминированного случая $(q_{ext})_2=\overline{q}$.

Как видим, мультипликативный шум хаоса, индуцируя неравновесный фазовый переход, приводит к сдвигу детерминированной точки перехода к турбулентности. Этот переход соответствует ситуациям, в которых система более не приспосабливает свое макроскопическое поведение к средним свойствам среды (как это имеет место в детерминированном случае), а реагирует на изменение параметра Re более определенным и активным образом. Случайная величина (6.1.39), определяющая стационарное состояние системы в стохастическом случае, качественно отличается от вырожденной случайной величины $(q_{ext})_2=\overline{q}$, соответствующей фоновой турбулентности. Таким образом, здесь мы имеем нетривиальный истинно шумовой эффект: шум, когда его интенсивность возрастает, понижает порог перехода стохастической системы в истинно стационарное состояние.

6.1.6. Анализ математической модели Ферхюльста для диссипации турбулентной энергии

С целью более детального рассмотрения индуцированных шумом переходов в окрестности среднего состояния $\overline{q}$, обратимся теперь к известной модели Ферхюльста, детерминированный (вырожденный) вариант которой имеет вид

$$\partial q(t)/\partial t=\lambda q(t)-q^2(t) \qquad (6.1.40)$$

(здесь $\forall t\; q(t)\in[0;\infty)$; λ — управляющий параметр) (см. *Horsthemke*, *Malek Mansour*, *1976*). Эта модель предназначалась первоначально для описания роста биологической популяции, но со временем нашла применение во многих весьма различных областях науки. При $\lambda<0$ уравнение (6.1.40) допускает единственное асимптотическое устойчивое решение $q^{st}=0$, которое соответствует режиму, обладающему самой высокой, совместимой с наложенными на систему связями симметрией. В точке $\lambda=0$ решение $q^{st}=0$ становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию: от него непрерывным (но не дифференцируемым) образом отделяется новая ветвь стационарных состояний $q^{st}=\lambda$. Таким образом, детерминированная система претерпевает равновесный фазовый переход второго рода, что соответствует возникновению равновесной когерентной структуры с более низкой симметрией.

Покажем, как эту модель можно использовать в нашем случае, когда флуктуации скорости диссипации энергии $\delta\varepsilon_r = \varepsilon_r - \bar{\varepsilon}_r$ малы по сравнению с ее средним значением, $\delta\varepsilon_r/\bar{\varepsilon}_r \ll 1$. Применяя формулы (6.1.23) и (6.1.29), преобразуем выражения (6.1.28) для коэффициентов сноса следующим образом:

$$K(q) = -\alpha q\left(\ln\frac{q}{\bar{q}} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{4}\right) \approx \frac{\alpha}{\bar{q}}\left[\bar{q}\left(1 - \frac{\alpha\varepsilon^2}{4}\right)q - q^2\right] = \frac{\alpha}{\bar{q}}(\lambda q - q^2) \tag{6.1.41}$$

и

$$K(q, \varepsilon) = K(q) + \frac{1}{2}\alpha^2\varepsilon^2 q \approx \frac{\alpha}{\bar{q}}\left(\lambda q - q^2 + \frac{1}{2}\alpha\varepsilon^2\bar{q}q\right). \tag{6.1.42}$$

Здесь использовано разложение в ряд логарифмической функции $\ln(q/\bar{q})$ в окрестности среднего значения $\bar{q}$: $\ln(q/\bar{q}) \approx \Delta q/\bar{q} = -1 + q/\bar{q}$ и введен следующий (внешний) параметр

$$\lambda \equiv \bar{q}(1 - \alpha\varepsilon^2/4) = \bar{q}\left[1 - \frac{3}{8}\mu\ln(\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_{\mathrm{det}})\right], \tag{6.1.43}$$

описывающий воздействие подсистемы осредненного движения на случайный процесс $q(t)$. Тогда, с помощью преобразования подобия по времени $t' = t\alpha/\bar{q}$ и применения обозначений $\varepsilon' = \sqrt{\alpha\bar{q}}\varepsilon$ и $\xi'(t) = \sqrt{\bar{q}/\alpha}\,\xi(t)$, уравнения (6.1.30) и (6.1.31) приводятся к следующему стандартному виду стохастической системы Ферхюльста

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \lambda q(t) - q^2(t) + \varepsilon' q(t)\cdot\xi'(t), \tag{6.1.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q}\left\{\left[\lambda q - q^2 + \frac{\varepsilon'^2}{2}q\right]P_2(q, t)\right\} + \frac{\varepsilon'^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}[q^2 P_2(q, t)]. \tag{6.1.45}$$

Стационарное решение $P^{\mathrm{st}}(q)$ уравнения (6.1.45) определяется выражением

$$P^{\mathrm{st}}(q) = \begin{cases} Nq^{2(\lambda/\varepsilon'^2)-1}\exp(-2q/\varepsilon'^2), & \lambda > 0, \\ \delta(q), & \lambda < 0 \end{cases} \tag{6.1.46}$$

где

$$N^{-1} = (2/\varepsilon'^2)^{-2(\lambda/\varepsilon^2)}\Gamma(2\lambda/\varepsilon'^2),$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Отсюда видно, что стационарное решение существует (т. е. величина $P^{\mathrm{st}}(q)$ интегрируема на интервале $[0, \infty)$) в том и только том случае, если $2\lambda/\varepsilon'^2 > 0$, т. е. если $\lambda > 0$. Кроме этого, следует иметь в виду, что нуль ($q = 0$) является не только граничной, но и стационарной точкой, поэтому вся стационарная «масса» вероятности должна быть сосредоточена в нуле.

В модели Ферхюльста экстремумы плотности вероятности $P^{\mathrm{st}}(q)$ совпадают с нулями уравнения

$$h(q, \varepsilon') \equiv \lambda q - q^2 - \frac{\varepsilon'^2}{2}q = 0, \tag{6.1.47}$$

т. е. с

$$(q_{\mathrm{ext}})_1 = 0 \quad \text{и} \quad (q_{\mathrm{ext}})_2 = \lambda - \varepsilon'^2/2 \tag{6.1.48}$$

(второй корень существует при условии $\lambda > \varepsilon'^2/2$). Точки в пространстве конфигураций, для которых

$$\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{\mathrm{ext}}} = \lambda - 2q_{\mathrm{ext}} - \varepsilon'^2/2 = 0,$$

соответствуют структурно-неустойчивым ситуациям, когда возможны фазовые переходы. Так как $\partial h(q)/\partial q|_{q=(q_{\mathrm{ext}})_2} \equiv -\lambda + \varepsilon'^2/2$ всегда меньше нуля, то корень $(q_{\mathrm{ext}})_2$ есть максимум стационарной плотности вероятности $P^{\mathrm{st}}(q)$; производная $\partial h(q)/\partial q|_{q=(q_{\mathrm{ext}})_1} \equiv \lambda\varepsilon'^2/2$ и, следовательно, корень $(q_{\mathrm{ext}})_1$ будет максимумом только при $0 < \lambda < \varepsilon'^2/2$ (когда $\partial h(q)/\partial q|_{q=(q_{\mathrm{ext}})_1} < 0$). Отсюда следует, что во флуктуирующем турбулентном хаосе (в рамках модели Ферхюльста) в отличие от детерминированного случая имеется две точки перехода. Можно утверждать следующее:

1) если $\lambda < 0$ (при этом $\alpha > 4/\varepsilon^2$), то стационарная точка нуль устойчива;

2) в точке $\lambda = 0$ (когда $\alpha = 4/\varepsilon^2$) происходит переход, так как при $\lambda > 0$ стационарная точка $(q_{\mathrm{ext}})_1 = 0$ становится неустойчивой и возникает новая подлино стационарная плотность вероятности;

3) в нуле стационарная плотность вероятности обращается в бесконечность, если $0 < \lambda < \varepsilon'^2/2$ (или $4/\varepsilon^2 > \alpha 4/3\varepsilon^2$), т. е. сохраняет часть свойств δ-функции;

4) если параметр λ становится больше, чем $\varepsilon'^2/2$ ($\alpha < 4/3\varepsilon^2$), то характер распределения плотности снова резко меняется, т. е. $\lambda = \varepsilon'^2/2$ ($\alpha = 4/3\varepsilon^2$) вторая точка перехода.

Таким образом, переход в системе можно вызвать, поддерживая среднее состояние флуктуирующего хаоса, но увеличивая или уменьшая интенсивность шума в нем.

Кратко суммируем основные результаты данного раздела. Введение в термодинамическое описание подсистемы турбулентного хаоса набора стохастических внутренних параметров, адекватно характеризующих внутреннюю структуру и временную эволюцию завихренной жидкости (включая ансамбль мезомасштабных КС) внутри физически бесконечно малого объема, дало возможность получить методами стохастической неравновесной термодинамики уравнения ФПК для функций распределения плотности вероятностей статистических характеристик вихревых образований в пространстве внутренних координат. Эти уравнения предназначены для анализа марковских диффузионных процессов перехода из одного стационарно-неравновесного состояния в пространстве внутренних координат в другое в результате последовательной потери устойчивости при некотором росте параметра надкритичности и выяснения того, как действительно выглядит плотность вероятности в окрестностях критических точек.

Одновременно возможен альтернативный подход к исследованию бифуркационных переходов подобного рода, основанный на стохастических уравнениях ланжевеновского типа, статистически эквивалентных кинетическим уравнениям ФПК. На основе этого подхода продемонстрирована принципиальная возможность самоорганизации потока, когда в процессе временной эволюции квазиравновесной вихревой подсистемы, вероятно генерирование когерентных образований, связанное с эффектом «фазовых переходов» второго рода, индуцированных естественным шумом флуктуирующего турбулентного хаоса. Показано, что если шум хаоса мультипликативен и его интенсивность достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности, характеризующей стационарное поведение стохастической системы, и по числу, и по положению существенно отличаются от стационарных состояний, отвечающих детерминированному хаосу. Это означает, что мультипликативный шум турбулентного хаоса не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему определяющих внутренних параметров, но может также стабилизировать неустойчивые макроскопические состояния и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного подхода.

§ 6.2. Возникновение структурированной турбулентности за счет механизма фазовой синхронизации

Проанализируем теперь имеющуюся тенденцию к усложнению вихревой структуры реального турбулизованного течения и постараемся описать некоторые механизмы, лежащие в ее основе. В п. 5.1 термодинамически было показано, что самоорганизация, как возникновение и усложнение пространственно-временных вихревых образований в первоначально симметричной диссипативной среде, свойственна также и нелинейной открытой подсистеме турбулентного хаоса. Устойчивые когерентные структуры в подсистеме хаоса могут возникать, в частности, в результате непрерывного перераспределения турбулентной энергии, поступающей в нее извне (т. е. от подсистемы осредненного движения), как за счет процессов диссипации и турбулентно-диффузионного потока осредненной кинетической энергии турбулентных пульсаций, так и в результате порождения энергии мелкомасштабной турбулентности под воздействием сил плавучести и нелинейного взаимодействия различных мелкомасштабных вихревых образований внутри самой этой подсистемы.

Вместе с тем, термодинамический подход, к сожалению, не позволяет отыскать и количественно описать какие-либо физические механизмы укрупнения диссипативных КС в вихревом континууме. Для нахождения подобного рода механизмов требуется привлекать к рассмотрению дополнительные соображения, используя, например, так называемые базовые математические модели теории самоорганизации (см. *Климонтович*, *1990*). Простейшую модель такого рода можно получить, рассматривая турбулентный хаос как активную (возбудимую) среду, моделируемую, в свою очередь, распределенной системой взаимодействующих обобщенных генераторов Ван-дер-Поля, в которой вслед за вынужденным выходом из состояния покоя, после некоторого цикла превращений, может скачком возбудиться сразу громадное число колебательных мод, что типично для развитой турбулентности.

Из четырех известных сценариев турбулизации потока несжимаемой жидкости, рассмотренных в гл. 1, три из которых целиком относятся к начальному этапу возникновения турбулентности, когда число возбужденных макроскопических (коллективных) степеней свободы все еще невелико, в предыдущей главе мы придерживались в основном не устаревшего положения теории Ландау—Хопфа. Согласно этому сценарию, развитому более пяти десятилетий назад, генерирование турбулентности определяется возникновением цепочки последовательных неустойчивостей, каждая из которых сопровождается появлением новой частоты колебаний скорости потока. Становление режима развитой турбулентности при таком подходе можно истолковать как возбуждение чрезвычайно большого числа коллективных степеней свободы, причем после каждой нормальной бифуркации Андронова—Хопфа набор основных частот колебаний пополняется вновь образованной несоизмеримой частотой. Соответственно этому, решение уравнений Навье—Стокса переходит (в фазовом пространстве) на новый тор, топологическая размерность которого совпадает с числом независимых частот, поток жидкости становится еще более нерегулярным, а при возбуждении огромного множества мод — турбулентным (что отвечает движению фазовой точки по многомерному тору — квазипериодическому аттрактору). Таким образом, согласно теории Ландау—Хопфа, переход к режиму полностью развитой турбулентности осуществляется через чрезвычайно большой каскад бифуркаций, связанных с последовательным возбуждением иррационально связанных частот колебаний термогидродинамических параметров, т. е., при таком сценарии турбулентное движение имеет квазипериодический характер и характеризуется, вообще говоря, дискретным спектром частот колебаний.

Важно, однако, ясно представлять, что теория формирования гидродинамической турбулентности Ландау—Хопфа оказывается верной лишь отчасти, поскольку в реальности развитая турбулентность обладает непрерывным спектром колебаний, причем переход от дискретного спектра к непрерывному происходит скачкообразно. Кроме этого, подобного рода многочастотные колебания, даже в присутствии флуктуаций, все же не являются хаотическими, поскольку сценарий Ландау—Хопфа не предполагает развития неустойчивости и перемешивания в системе. Собственно, в связи с этим несоответствием истинному положению дел в ряде публикаций (собранных, например, в сб. «*Странные аттракторы*», *1981*) было показано, что для динамических диссипативных систем любой природы аттрактор в виде незамкнутой намотки на многомерном торе (являющийся в рамках модели Ландау—Хопфа образом турбулентности) структурно неустойчив, т. е. он разрушается при малых изменениях параметров системы. Как правило, цепочка нормальных бифуркаций Андронова—Хопфа обрывается уже после первых трех шагов. При этом либо незамкнутая намотка на трехмерном торе замыкается, превращаясь в предельный цикл (эффект взаимной синхронизации мод), либо тор разрушается, и в результате такого разрушения скачкообразно возникает странный аттрактор — многообразие со сложной топологией, на котором реализуется настоящий динамический хаос с континуумом частот, чувствительной зависимостью от начальных условий, перемешиванием и т. п. (см. *Ruelle*, *Takkens*, *1971*).

Вместе с тем, для объяснения скачкообразного возникновения структурированной турбулентности не обязательно привлекать теорию странных аттракторов (*Рабинович*, *1978*; *Ланда*, *1983*; *Рабинович*, *Трубецков*, *1984*). Дело в том, что взаимодействие возбужденных колебательных мод в случае турбулентности аналогично взаимодействию осцилляторов с жестким возбуждением, имеющих первоначально различные собственные частоты колебаний (или вращений). Из теории колебаний известно (см., например, *Боголюбов, Митропольский, 1963*; *Пиковский и др., 2003*), что возбужденный осциллятор, воздействуя на остальные недовозбужденные моды, может возбудить в них автоколебания на собственных частотах (аналогично явлению «асинхронного возбуждения»). Именно таким путем в стохастическом ансамбле взаимно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля может скачком возбудится сразу много колебательных мод, что свойственно развитой турбулентности («газу» автоколебательных мод).

В данном параграфе соображения подобного рода будут использованы нами при синергетическом истолковании возможных механизмов, приводящих к структурированию турбулентности. В рамках разрабатываемой модели это означает, что в процессе временно́й эволюции (здесь мы также ограничимся для простоты рассмотрением только временно́го хаоса, т. е. будем предполагать полную идентичность вихревых движений во всех точках пространства) квазиравновесной подсистемы турбулентного хаоса, существует некий механизм укрупнения мелкомасштабных вихревых образований. Имеется в виду механизм, связанный с эффектом взаимной фазовой синхронизации (когерентности) некоторой совокупности мелкомасштабных колебательных мод с близкими частотами (стохастических автоколебаний внутренних координат), т. е. с тенденцией образования частотных кластеров (точнее, промежуточных кластерных структур), для которых распределение индивидуальных частот колебаний может иметь несколько максимумов.

Образование частотных кластеров характерно для активных сред, состоящих из осцилляторов не только с периодическим, но также и с хаотическим поведением, о чем свидетельствуют результаты работ (*Kuramoto, 1984*; *Pikovsky и др., 1996*; *Osipov и др., 1997*). Возникший подобным образом ансамбль промежуточных кластерных структур вносит ненулевой вклад в так называемое эффективное (амплитудно-фазовое) среднее поле хаоса, осциллирующее на некоторой характерной частоте. Среднее поле возникает из-за взаимодействия в ансамбле глобально связанных осцилляторов (см. *Kuramoto, 1984*). В свою очередь, это эффективное поле, воздействующее на каждый вихревой кластер ансамбля, как некая внешняя сила (которая в зависимости от параметров модели может в общем случае захватить его частоту), приводит к росту отдельного синхронного кластера и дальнейшему росту компоненты среднего поля на определенной частоте. В результате такого сценария (известного как переход Курамото) увеличившаяся компонента вынуждающей силы индуцирует последующую (дополнительную) синхронизацию в ансамбле и тем самым способствует образованию нескольких мезомасштабных вихревых кластеров (отвечающих когерентной составляющей турбулентного хаоса), которые, в конечном счете, могут как слиться, так и сосуществовать вместе. Подчеркнем, что специфика подобной синхронизации автоколебаний состоит еще и в том, что она происходит в присутствии естественного пульсационного шума (связанного, в частности, с «тепловой» структурой некогерентной составляющей турбулентного хаоса), который стремится равномерно распределить фазы колебаний в ансамбле и тем самым уменьшить эффективность амплитудно-фазового среднего поля хаоса. Вполне допустимо, что для реального турбулизованного течения столкновение этих противоположных тенденций может привести при определенных условиях (зависящих, естественно, от характеристик среды и критических значений управляющих параметров) к возникновению мезомасштабных когерентных вихревых образований. Таким образом, процесс взаимной фазовой синхронизации некоторой совокупности хаотических автоколебаний, может рассматриваться как один из возможных механизмов самоорганизации взаимодействующих вихревых образований в открытой подсистеме турбулентного хаоса.

В п. 6.1 основное внимание было уделено анализу механизмов перехода из одного устойчивого стационарно-неравновесного состояния в другое, связанных с последовательной потерей устойчивости подсистемой турбулентного хаоса, далекого от полного хаоса термодинамического равновесия. Подобные переходы были описаны там как неравновесные фазовые переходы второго рода в вихревом континууме, в результате чего внутренние координаты в бифуркационных точках изменяются скачкообразно. Вместе с тем, в общем случае стационарные состояния при росте надкритичности могут сменяться не только стационарными, но и периодическими, квазипериодическими или непериодическими по времени движениями, с которыми, в конечном счете, и связано большое разнообразие пространственно-временных структур течения жидкости. В настоящем параграфе обсуждается общая концепция синергетического рождения мезомасштабных КС из турбулентного хаоса, связанная с явлением фазово-частотной синхронизации автоколебаний той части внутренних координат, которая относится к когерентной составляющей хаоса, а также рассмотрены некоторые сценарии динамического влияния некогерентной составляющей (мелкозернистого флуктуационного поля) турбулентного хаоса на эволюцию мезомасштабных вихревых структур.

Отрицательная вязкость

Совершенно очевидно, что генерирование мезомасштабных КС из турбулентного хаоса связано, в конечном счете, с отрицательностью коэффициента турбулентной вязкости (см. *Старр, 1971*), характеризующего не физические свойства природных сред, а статистические свойства их турбулентных движений. Если положительная турбулентная вязкость обычно сопровождается преобразованием кинетической энергии крупномасштабного движения в энергию мелкомасштабных турбулентных пульсаций, то при наличии отрицательной вязкости направление переноса энергии меняется: в этом случае более крупные вихревые образования турбулентного течения (например, ансамбль мезомасштабных КС) получают кинетическую энергию от мелкомасштабных нерегулярных возмущений. При этом гаснущая мелкомасштабная турбулентность (если она только не связана с мелкомасштабными вихрями набегающего потока) должна поддерживается какими-либо внутренними процессами, например систематическим преобразованием тепла в кинетическую энергию в рамках отдельных мелкомасштабных вихрей (подобно тому, как это имеет место, например, для циклонов в земной атмосфере, получающих энергию за счет локальных притоков тепла). Кроме того, на обратный каскад передачи энергии может влиять анизотропия и спиральность мелкомасштабной турбулентности, а также слабая сжимаемость среды (см., например, *Рабинович*, *Сущик*, *1990*). В рамках развиваемого нами подхода к моделированию структурированной турбулентности в термодинамически активных средах, возможность реализации квазистационарных режимов течения с эффектом отрицательной вязкости была показана в работе (*Колесниченко*, *2002*; см., также гл. 8). Реальными природными средами, в которых имеет место эффект отрицательной вязкости, являются, например, дифференциальные вращения дисков спиральных галактик и околозвездных дисков (в частности, вращение солнечного протопланетного облака), дифференциальное вращение солнечной фотосферы и дифференциальное вращение атмосферы планеты (в частности, Юпитера). Последнее является весьма существенным, в частности, для количественного объяснения некоторых особенностей общей циркуляции атмосферы Земли (например, поддержания глобальных струйных течений), а также для объяснения струйного характера океанологических течений типа Гольфстрима и Куросио.

6.2.1. Устойчивые предельные циклы и связанная с ними синхронизация периодических автоколебаний (приближение фазовой динамики)

Напомним теперь некоторые характерные свойства явления синхронизации, которые будут полезны нам в дальнейшем. Полагая, что некоторая активная среда из большого числа глобально связанных идентичных осцилляторов типа Ван-дер-Поля моделирует состояние когерентной составляющей вихревого хаоса, рассмотрим процессы вынужденной и взаимной синхронизации этих осцилляторов, включая влияние шума на эффект синхронизации. Синхронизатор Ван-дер-Поля служит, как правило, базовой моделью для исследования эффектов синхронизации, наблюдающихся как при действии внешней периодической силы (вынужденная синхронизация), так и при взаимодействии двух связанных осцилляторов (взаимная синхронизация).

Рассмотрим сначала простейший случай вынужденной синхронизации устойчивых периодических автоколебаний $\boldsymbol{q}^c(t) = \boldsymbol{q}^c(t+\tau)$ осциллятора периодическим силовым воздействием $\alpha \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{q}, t) = \alpha \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{q}, t+\tau^{\text{в}})$, в результате чего автономная частота осциллятора ω^c может подстроиться под частоту $\omega^{\text{в}} = 2\pi/\tau^{\text{в}}$ внешней силы (эффект захвата фазы колебаний). В нашем описании структурированной турбулентности данный случай может иметь отношение, например, к процессу генерирования вихревой КС под воздействием внешнего периодического поля (например, внешней синусоидальной волной). Математическим образом подобных вихревых образований в пространстве конфигураций являются, как уже неоднократно подчеркивалось, орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы — изолированные траектории, имеющие конечную длину, и при движении по которым система возвращается в одну и ту же точку за конечное время.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением слабой возмущающей силы [см. (5.2.8)]

$$\alpha \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{q}, t) \equiv -L(\boldsymbol{q}) \cdot \partial U(\boldsymbol{q}, t)/\partial \boldsymbol{q},$$

пропорциональной малому параметру α, который далее интерпретируется как амплитуда силы. Общий подход к изучению воздействия внешних периодических сил на нелинейные динамические системы с медленно меняющимися параметрами изложен, например, в монографии (*Боголюбов*, *Митропольский*, *1963*). Под влиянием малой силы $\alpha \boldsymbol{K}_1$ траектория движения $\boldsymbol{q}(t)$ выталкивается с предельного цикла $\boldsymbol{q}^c(t)$, но из-за устойчивости цикла эта траектория все же остается в его малой окрестности. Другими словами, возмущения в поперечном к циклу направлении (возмущения амплитуды колебаний) остаются малыми, в то время как возмущения фазы могут быть большими. Именно по этой причине можно в данном случае свести описание только к фазовой динамике.

Предположим сначала, что эволюция внутренней координаты $\boldsymbol{q}(t)$ турбулентного хаоса описывается детерминированным уравнением (5.2.8), которое перепишем здесь в виде

$$\partial q_m/\partial t = K_m(\boldsymbol{q}, 0) + \alpha K_{m1}(\boldsymbol{q}, t), \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{6.2.1}$$

Пусть невозмущенное ($\alpha = 0$) уравнение (6.2.1) имеет периодическую траекторию $\boldsymbol{q}^c(t)$ с периодом τ^c. Хорошо известно (см., например, *Боголюбов*, *Митропольский*, *1963*; *Пиковский и др.*, *2003*), что обычное определение $\partial\varphi(t)/\partial t = \omega^c$ фазы на предельном цикле $\boldsymbol{q}^c$ можно обобщить и на траектории, близкие к данному предельному циклу (здесь $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^c(\varphi)$ — параметрически заданная орбита предельного цикла; φ — координата вдоль цикла, возрастающая на 2π при каждом обороте). Обыкновенно, для этого в его окрестности выбирается тонкая трубка Σ и в ней определяется скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{q})$ такое, что

$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{q})}{\partial t} = \sum_m \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial \boldsymbol{q}_m}{\partial t} \cong \sum_m \frac{\partial\varphi}{\partial q_m} K_m(\boldsymbol{q}, 0) = \omega^c. \tag{6.2.2}$$

Рассмотрим теперь возмущенную ($\alpha \neq 0$) систему (6.2.1) и, используя невозмущенное определение фазы, подставим (6.2.1) в (6.2.2). В результате с точностью до слагаемых, пропорциональных α^2, получим следующее базовое уравнение для описания динамики фазы автоколебаний в присутствии малой периодической внешней силы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_m \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t} = \sum_m \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}(K_m(\boldsymbol{q}, 0) + \alpha K_{1m}(\boldsymbol{q}, t)) \cong \omega^c + \alpha f(\varphi, t), \tag{6.2.3}$$

где функция

$$f(\varphi, t) \equiv \sum_m \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{q}^c(\varphi))}{\partial q_m} K_{1m}(\boldsymbol{q}^c(\varphi), t),$$

вычисляемая на предельном цикле, однозначно связана с фазой φ.

Медленная динамика фазы

Так как функция $f(\varphi, t)$ является 2π-периодической функцией φ и периодической функцией по отношению к t с периодом $\tau^{\text{в}}$, то ее можно разложить в двойной ряд Фурье $f(\varphi, t) = \sum\limits_{l,k} p_{l,k} \exp(ik\varphi + il\omega^{\text{в}}t)$. При отсутствии возмущения (при $\alpha = 0$) решение (6.2.3) имеет вид $\varphi(t) = \omega^c t + \varphi^c$, т. е. фаза вращается равномерно с автономной невозмущенной частотой ω^c; тогда разложение функции $f(\varphi, t)$ в ряд в первом приближении по α

$$f(\varphi, t) = \sum_{l,k} p_{l,k} \exp(ik\varphi^c) \exp i(k\omega^c + l\omega^{\text{в}})t, \tag{6.2.4}$$

содержит быстро осциллирующие (по сравнению с временным масштабом $1/\alpha$) члены, за исключением членов, удовлетворяющих резонансному условию $k\omega^c + l\omega^{\text{в}} \approx 0$. Быстро осциллирующие члены приводят к отклонениям величины фазы порядка $O(\alpha)$, в то время как резонансные члены в ряде (6.2.4) могут приводить к большим (хотя и медленным в силу малости параметра α) изменениям фазы и по этой причине оказывают наиболее существенное влияние на окончательный характер колебания.

Можно показать (см. *Боголюбов*, *Митропольский*, *1963*), что в первом приближении проявляются только такие резонансы, для которых частоты связаны соотношением $\omega^{\text{в}} \approx (m/n)\omega^c$, где m и n целые взаимно простые числа (обычно небольшие). Различают следующие случаи резонанса: 1) $m = n = 1$, т. е. $\omega^c \approx \omega^{\text{в}}$; этот случай отвечает обыкновенному (главному) резонансу; 2) $n = 1$, т. е. $\omega^c \approx \omega^{\text{в}}/m$; такой случай соответствует резонансу на обертоне собственной частоты (параметрический резонанс); 3) $m = 1$, т. е. $\omega^c \approx \omega^{\text{в}} n$; в этом случае имеет место резонанс на обертоне внешней частоты. Таким образом, все члены суммы (6.2.4) с индексами $k = mj$ и $l = -nj$ являются резонансными, и, при усреднении этой суммы за достаточно большой промежуток времени, именно они будут вносить заметный вклад в усредненную силу. В результате можно получить следующую форму усредненного уравнения для фазы

$$\partial\varphi/\partial t = \omega^c - \alpha q(m\varphi - n\omega^{\text{в}}t), \tag{6.2.5}$$

где

$$f(\varphi, t) = \sum_{l=-nj,k=mj} p_{l,k} \exp(ik\varphi + il\omega^{\text{в}}t) = \sum_j p_{-nj,mj} \exp\{ij(m\varphi - n\omega^{\text{в}}t)\} \equiv -q(m\varphi - n\omega^{\text{в}}t)$$

— усредненная сила, являющаяся 2π-периодической функцией аргумента. Эта функция учитывает все особенности предельного цикла в автономной системе (5.2.8) и все особенности внешней силы.

Наконец, вводя разность фаз как $\psi(t) = m\varphi(t) - n\omega^{\text{в}}t$ (параметр ψ можно трактовать как медленную фазу во вращающейся системе отсчета), из (6.2.5) получим так называемое укороченное уравнение

$$\partial\psi/\partial t = \Delta - \alpha\, q(\psi), \tag{6.2.6}$$

где сила $q(\psi) \equiv mq(\psi)$ есть 2π-периодическая функция ψ;

$$\Delta \equiv m\omega^c - n\omega^{\text{в}}$$

— так называемая расстройка между частотой автономного осциллятора и частотой внешнего сигнала. Отметим, что при выводе уравнения (6.2.5) расстройка предполагалась малой — порядка α. Далее в качестве функции $q(\psi)$ (опять же для простоты) рассматривается $\sin\psi$ — наиболее простая 2π-периодическая функция; в этом случае (6.2.6) приобретает простейшую форму усредненного фазового уравнения, которое совпадает с известным уравнением Адлера,

$$\partial\psi/\partial t = \Delta - \alpha \sin \psi.$$

Заметим, что случай $q(\psi) = \sin\psi$ справедлив, в частности, для связанных уравнений Ван-дер-Поля.

Уравнение (6.2.6) может быть переписано в следующей потенциальной форме:

$$\partial\psi/\partial t = -\partial\Phi(\psi)/\partial\psi,$$

где

$$\Phi(\psi) = -\Delta\psi + \alpha \int^{\psi} q(x)dx$$

— потенциальная функция. Таким образом, динамика разности фаз ψ может рассматриваться как движение передемпфированной частицы в заданном потенциале. Параметр расстройки Δ определяет наклон потенциала, а параметр α задает высоту потенциальных барьеров. Пусть $q_{\min}$ и $q_{\max}$ — соответственно минимум и максимум функции $q(\psi)$ на интервале $[0, 2\pi)$. Тогда при $-\gamma q_{\min} < \Delta < \gamma q_{\max}$ (область синхронизации) существует по крайней мере одна пара неподвижных точек (6.2.6), т. е. имеет место пара стационарных состояний фазы ψ. Легко видеть, что одна из этих точек устойчива (асимптотически), а другая неустойчива (в общем случае, когда функция $q(\psi)$ на интервале $[0, 2\pi)$ имеет более двух экстремумов, может быть несколько пар устойчивых и неустойчивых точек). Поэтому со временем система эволюционирует к устойчивой неподвижной точке и остается в ней, так что вращающаяся фаза постоянна, $\psi = \psi^c$. Для исходной фазы φ это означает вращение с частотой внешней силы $\varphi = \omega^{\text{в}}t + \psi^c$, а это как раз и есть режим синхронизации (фаза автоколебаний φ следит за внешней силой $\omega^{\text{в}}t$). В частности, в случае главного резонанса, когда в вышеприведенных формулах $m = n = 1$, и при нулевой расстройке Δ (когда $\omega^c \approx \omega^{\text{в}}$) устойчивое значение разности фаз равно нулю, $\varphi = \omega^{\text{в}}t$. Можно сказать, что фазы в некоторой конечной области значений параметров системы притягиваются друг к другу (режим захвата частоты и фазы колебаний). В более общем случае захват частоты означает рациональное отношение двух исходно независимых частот $\omega_1 : \omega_2 = m : n$ всюду в области синхронизации. В пространстве конфигураций турбулентного хаоса этому соответствует индуцированная КС $\boldsymbol{q}(t)$ с периодом внешнего воздействия $2\pi/\omega^{\text{в}}$.

Следует подчеркнуть, что точно такой же вид, как уравнение (6.2.6), имеет усредненное уравнение для разности фаз $\psi = m\varphi_1 - n\varphi_2$, описывающее взаимную синхронизацию двух взаимодействующих автоколебательных кластеров с различными собственными частотами в случае малого параметра связи α между ними. Для нашей проблемы подобным образом может быть описан процесс объединения двух локализованных КС (взаимодействующих, например, согласно закону

Био—Савара) в полностью развитом турбулентном течении сдвига в единую более энергоемкую КС благодаря взаимной синхронизации колебаний.

Приближение фазовой динамики в присутствии шума

Наличие шума приводит к диффузии разности фаз ψ в потенциале $\Phi(\psi)$ и тем самым к разрушению периодичности: фаза $\psi(t)$ флуктуирует вблизи минимумов потенциала $\psi_{\min,k}$ и совершает случайные переходы из одной потенциальной ямы в другую, скачком меняясь на 2π. Чем больше расстройка, чем меньше амплитуда синхронизирующего воздействия (чем мельче ямы) и чем больше интенсивность шума, тем меньше время, в течение которого фазы осциллятора и воздействия остаются захваченными. Тем не менее можно ожидать, что при некотором критическом значении амплитуды внешней силы a_{crit} тенденции к синхронизации возобладает, т. е. также будет иметь место захват фазы. Важно отметить, что приближение фазовой динамики может быть использовано и в этом случае, поскольку выше при выводе уравнения (6.2.3) никакой регулярности силы не предполагалось.

Для количественного описания синхронизации в присутствии флуктуаций на предельных циклах необходимо исходить из стохастического уравнения Ланжевена (6.1.1), в котором случайная сила имеет вид $\tilde{f}_k(\boldsymbol{q}, t) \equiv \sqrt{k_{\text{B}} T_{\text{turb}} Q}\xi_k(t)$ $(k = \overline{1, n})$ — нормальные белые шумы с нулевыми средними значениями и δ-образными корреляционными функциями. Будем для простоты считать компоненты случайной силы пространственно однородными $(Q_{km}(\boldsymbol{q}) = Q\delta_{km})$ и независимыми для различных осцилляторов; тогда $\overline{\xi_k}^0 = 0$, $\overline{\xi_k(t)\xi_m(t_1)}^0 = \delta(t - t_1)\delta_{km}$. Повторяя процедуру вывода уравнений (6.2.3) и (6.2.6), исходя из (6.1.1), в результате получим следующее фазовое уравнение в форме уравнения Ланжевена

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_m \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}(K_m(\boldsymbol{q}, 0) + aK_{1m}(\boldsymbol{q}, t) + \tilde{f}_m(\boldsymbol{q}, t)) \cong \omega^c + af(\varphi, t) + \sqrt{k_{\text{B}} T_{\text{turb}} Q}\xi(\varphi, t), \tag{6.2.7}$$

где функция $\xi(\varphi, t) \equiv \sum_m \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{q}^c(\varphi))}{\partial q_m}\xi_k(t)$ — случайная функция времени. В простейшем случае стохастический член в (6.2.7) вообще не зависит от фазы, так что $\xi(t)$ есть стационарный случайный процесс. Тогда основные свойства динамики фазы в присутствии шума могут быть описаны либо стохастическим уравнением для фазы

$$\partial\psi/\partial t = \Delta - aq(\psi) + \sqrt{k_{\text{B}} T_{\text{turb}} Q}\xi(t), \tag{6.2.8}$$

либо соответствующим уравнением ФПК для плотности распределения вероятности фазы $P_1(\psi, t)$:

$$\frac{\partial P_1(\psi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\psi}[(\Delta - aq(\psi))P_1(\psi, t)] + k_{\text{B}} T_{\text{turb}} \frac{Q}{2}\frac{\partial^2 P_1(\psi, t)}{\partial\psi^2}. \tag{6.2.9}$$

Следует отметить, что явление синхронизации разнообразных автоколебательных систем принадлежит к числу хорошо изученных. Синхронизация автоколебательных мод периодическим сигналом относится к классическим задачам теории нелинейных колебаний. Слабонелинейные системы (в смысле близости автоколебаний к линейным колебаниям) подробно описаны в литературе (см., например, *Боголюбов*, *Митропольский*, *1963*; *Рабинович*, *Трубецков*, *1984*). Рассмотренное выше приближение фазовой динамики основано на предположении о малости амплитуды внешней силы. Для малой амплитуды колебаний свойства синхронизации также могут быть в значительной степени исследованы аналитически. Существование малого параметра (отношения периода колебаний к характерному времени изменения амплитуды) позволяет в этом случае описать явление с помощью укороченной системы уравнений, в которую помимо (6.2.5) входят и усредненные по периоду колебаний амплитудные уравнения. В рамках этого более общего подхода хорошо изучен механизм синхронизации как при малой, так и при большой амплитудах внешней силы, который имеет более сложный характер (*Боголюбов*, *Митропольский*, *1963*; *Пиковский и др.*, *2003*). В последнее время стал проявляться повышенный интерес к изучению влияния различных шумов на процессы синхронизации, т. е. к статистической динамике процесса синхронизации (см. *Pikovsky и др.*, *1996*; *Анищенко и др.*, *2003*).

6.2.2. Механизм образования мезомасштабных когерентных структур (кластеров) в подсистеме турбулентного хаоса

Проанализируем теперь принципиальную возможность образования ансамбля мезомасштабных КС за счет взаимной синхронизации некоторой совокупности промежуточных кластерных структур в подсистеме турбулентного хаоса и исследуем влияние внутреннего шума хаоса на режим фазовой синхронизации. Согласно теории Ландау—Хопфа, в развитом турбулентном потоке возбуждается громадное число колебательных мод N_{turb} (макроскопических степеней свободы), причем их количество зависит от числа Рейнольдса Re, как $N_{\mathrm{turb}} \sim \mathrm{Re}^{9/4}$ (см. *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*). Однако в действительности хаотическая динамика течения определяется лишь небольшим числом независимых мелкомасштабных возбуждений, остальные связаны с ними жестко, так что в результате взаимодействия колебательных мод образуются мелкомасштабные вихревые кластеры $\boldsymbol{q}^c(t)$ (промежуточные кластерные структуры синхронизированных мод), состоящие из групп элементов со строго одинаковыми или близкими средними частотами $\omega^c = 2\pi/\tau^c$. Другими словами, размерность турбулентного хаоса коррелирует с числом мелкомасштабных кластерных структур, взаимодействующих друг с другом. Подобные вихревые кластеры при взаимодействии в большом ансамбле могут вызывать множество сложных нелинейных эффектов — таких, например, как образование мезомасштабных КС (для рассматриваемой двухуровневой модели эти вихревые образования будут иметь характерные размеры l, порядка или меньше масштаба осреднения, $l \leqslant \Lambda$, $d\boldsymbol{r} \sim \Lambda^3$), подавление колебаний (так называемая «осцилляторная смерть»), возникновение режимов замороженных состояний и т. п. (*Анищенко и др.*, *2003*). Все эти эффекты непосредственно связаны с проявлением свойств фазовой синхронизации ансамбля колебательных автоструктур.

Для построения модельной теории подобного режима в вихревом континууме будем исходить из того экспериментального факта, что интенсивности мелкомасштабных пульсаций термогидродинамических параметров турбулизованного течения имеют максимумы внутри некоторого спектрального интервала энергии (*Монин, Яглом, 1966*). Тогда, среди появляющихся в результате действия гидродинамической нелинейности диссипативных вихревых структур малого масштаба наибольшей энергией должны обладать относительно крупные автоструктуры. Такие автоструктуры наиболее интенсивно должны подпитываться за счет биений мелкомасштабных пульсаций. Именно с этими наиболее энергосодержащими вихревыми образованиями в $\boldsymbol{q}$-пространстве мы и будем связывать исходное состояние когерентной составляющей подсистемы турбулентного пространственно-временного хаоса.

Будем далее предполагать, что при некотором росте надкритичности система динамических уравнений (6.2.1) имеет M устойчивых предельных циклов $\boldsymbol{q}_k^c(t)$ $(k=\overline{1, M})$, с которыми связаны M мелкомасштабных КС (промежуточных кластерных структур), находящихся в объеме $d\boldsymbol{r}$ подсистемы турбулентного хаоса. Очевидно, что в подобном ансамбле мелкомасштабных кластеров, сформированном в результате последовательного каскада большого числа пространственных и временных бифуркаций и находящемся под постоянным воздействием квазиоднородного фонового шума некогерентной составляющей турбулизованного хаоса, отдельные автоструктуры на первоначальном этапе могут иметь совершенно разные парциальные частоты ω_k^c собственных колебаний (вращений).

Анализ решений детерминированной задачи (6.2.1) в малой окрестности периодической траектории $\boldsymbol{q}_k^c(t)$ будем проводить в так называемых нормальных координатах (см., например, *Шильников Л. П. и др., 2004*), когда система (6.2.1) сводится к системе укороченных уравнений для амплитуд и фаз. Хотя бифуркационный сценарий зависит в общем случае от поведения мгновенной амплитуды колебаний, эффект фазовой синхронизации в присутствии флуктуаций во многих случаях достаточно хорошо описывается в рамках фазовой динамики, которой мы далее и ограничимся. Такой подход позволяет качественно описать явления, связанные с частотно-фазовым захватом, и в ряде случаев делает возможным аналитическое решение задачи (см. *Боголюбов, Митропольский, 1963*; *Тихонов, 1986*; *Анищенко и др., 2003*; *Пиковский и др., 2003*).

Среда из глобально связанных осцилляторов

Рассмотрим следующую базовую математическую модель генерации мезомасштабных КС в физически малом объеме $d\boldsymbol{r}$ вихревого континуума. Предположим, что некоторая активная среда из большого числа взаимодействующих друг с другом колебательных элементов, например из M глобально связанных идентичных осцилляторов Ван-дер-Поля, моделирует состояние когерентной составляющей хаоса в объеме $d\boldsymbol{r}$. Заметим, что наиболее полное статистическое описание этой среды может быть проведено на основе кинетического уравнения для M-частичной функции распределения f_M $(X_1, \ldots, X_M, t)$, где

X_k — набор переменных, характеризующих внутреннее движение k-го осциллятора и его движение как целого (*Климонтович, 1995*). Для простоты рассмотрения будем также предполагать, что взаимодействие осцилляторов (имеющих общий источник питания и общую обратную связь) однородно, т. е. все пары осцилляторов связаны одинаково. В случае когда взаимодействие полностью отсутствует, в ансамбле из M осцилляторов наблюдается многочастотный квазипериодический режим. В другом предельном случае, когда связь между осцилляторами сильна, различием автономных частот можно пренебречь, так как все осцилляторы синхронизируются. Между этими крайними (идеализированными) случаями потенциально допустимо появление частично синхронизированных режимов, поскольку связи стремятся синхронизировать ближайших соседей (N осцилляторов). В результате образуются мезомасштабные кластеры синхронизированных осцилляторов, которым и соответствуют мезомасштабные КС в подсистеме турбулентного хаоса. Отметим, что переход от независимых мелкомасштабных колебаний к частично синхронизированному режиму существенно зависит от первоначального распределения частот ω_k. Далее будем предполагать, что собственные частоты осцилляторов ω_k (при $M \to \infty$) задаются с помощью функции распределения $p(\omega)$, которая при отсутствии взаимодействия симметрична по отношению к единственному максимуму на частоте ω_0 (например, с помощью распределения Лоренца

$$p(\omega) = d/\pi[(\omega - \omega_0)^2 + d^2]).$$

Силовое взаимодействие подобных мезомасштабных кластеров синхронизированных осцилляторов, в свою очередь, может привести к последующей фазовой синхронизации, и тем самым к образованию еще более энергоемких мезомасштабных фазовых кластеров (соответствующих относительно крупным мезомасштабным КС в подсистеме турбулентного хаоса), а вместе с ними — к усилению некоторого среднего поля (см. ниже) с амплитудой A и фазой Θ. Такое поле действует на каждый осциллирующий кластер как некая периодическая внешняя сила, которая, в зависимости от параметров ансамбля (в частности, от величины связи α между автоструктурами), сможет или не сможет захватить его частоту. С другой стороны, под влиянием шума (соответствующего внутреннему шуму некогерентной составляющей турбулентного хаоса) распределение фаз в ансамбле мелкомасштабных кластеров стремится к равномерному, что может привести к полному исчезновению среднего поля. Ясно, что тенденция к отсутствию когерентности победит в случае сильного шума. Можно, однако, ожидать, что при некотором критическом значении α_{crit} силы связи, силовое взаимодействие и шум сбалансируют друг друга таким образом, что синхронизация мелкомасштабных кластеров все-таки возникнет — явление, с которым мы и будем связывать механизм генерации мезомасштабных КС (когерентной составляющей турбулентного хаоса).

Подтвердим теперь эту качественную картину аналитически для простейшего случая модели, основанной на фазовом приближении. Следует отметить, что фазовое описание слабосвязанных осцилляторов хорошо известно (см., например, *Kuramoto, 1984*) и используется для построения самых разнообразных моделей. Наша задача заключается в том, чтобы применить этот подход к объяснению образования мезомасштабных когерентных структур в развитых турбулизованных течениях жидкости.

6.2.3. Уравнения фазовой динамики

Проанализируем сначала фазовую синхронизацию промежуточных мелкомасштабных кластеров (синхронизированных вихрей) в случае отсутствия флуктуационных воздействий внутреннего шума (т. е. при некоторой идеализации «реальных процессов»), при котором внутренние координаты $\boldsymbol{q}(t)$ (связанные, например, с когерентной завихренностью) удовлетворяют системе автономных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени (6.2.1). Будем считать, что при некотором значении числа Рейнольдса в физически бесконечно малом объеме $d\boldsymbol{r}$ вихревого континуума содержится некий ансамбль из N $(N \ll M)$ когерентных мелкомасштабных вихревых образований $\boldsymbol{q}_k^c(t)$ $(k=\overline{1, N})$ с N различными усредненными парциальными частотами ω_k^c, в результате синхронизации которых образуются мезомасштабные КС. Этому ансамблю из N близких по свойствам слабосвязанных вихревых кластеров в модельном подходе соответствует ансамбль из N осцилляторов, способных к синхронизации. Предполагая, что все пары осцилляторов взаимодействуют одинаковом образом, запишем динамические уравнения в фазовом приближении, используя аналогию с формулой (6.2.5). В результате получим следующую систему укороченных уравнений

$$\partial\varphi_k/\partial t = \omega_k^c + \frac{\alpha}{N}\sum_{j=1}^{N} q(\varphi_j - \varphi_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.2.10}$$

где φ_k, ω_k^c — соответственно фаза и средняя частота колебаний осциллятора k. Параметр α характеризует силу связи $q(\varphi_j - \varphi_k)$ между каждой парой осцилляторов, которая здесь выбрана пропорциональной N^{-1}. Только в этом случае получаются независимые от N результаты в термодинамическом пределе $N \to \infty$, который будем далее использовать для математической простоты окончательных формул

Функция связи $q(\varphi_j - \varphi_k)$, зависящая в общем случае от топологии КС, может быть представлена рядом Фурье

$$q(\varphi_j - \varphi_k) = \sum_l q_l \exp\{i2\pi l(\varphi_j - \varphi_k)\}.$$

Предполагая, что фазы всех синхронных осцилляторов будут вращаться, в конечном счете, с частотой ω_0, введем так называемый параметр порядка

$$Z_l = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \exp\{i2\pi l(\varphi_j - \omega_0 t)\}$$

и перепишем уравнение (6.2.10) в виде

$$\partial\varphi_k/\partial t = \omega_k^c - \alpha H(\varphi_k - \omega_0 t), \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.2.11}$$

где

$$H(\varphi_k - \omega_0 t) = -\sum_l q_l Z_l \exp\{-i2\pi l(\varphi_k - \omega_0 t)\}$$

— так называемое среднее поле (сила), действующее на каждый осциллятор (функция порядка). Ненулевое среднее поле указывает на возможность синхронизации в ансамбле осцилляторов.

Уравнения (6.2.11) могут быть конкретизированы, если задать силу взаимодействия между осцилляторами (соответствующую взаимодействию возбуждений на соседних вихревых структурах). Далее будем рассматривать только простейшую силу q, пропорциональную синусу от разности фаз, $q(\varphi_j - \varphi_k) = \sin(\varphi_j - \varphi_k)$. Хотя это предположение носит до некоторой степени искусственный характер, оно достаточно точно передает типичные особенности тех реальных зависимостей, которые возникают между свойствами активных систем с множественными предельными циклами (в частности, для связанных осцилляторов Ван-дер-Поля). В этом случае уравнения движения (6.2.11) могут быть переписаны в виде системы уравнений для фаз осцилляторов, находящихся под воздействием некоторого комплексного среднего поля

$$Z = A\exp(i\Theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\exp(i\varphi_k)$$

(с амплитудой A и фазой $\Theta = \omega_0 t$) в следующем виде (модель *Kuramoto, 1984*)

$$\partial\varphi_k/\partial t = \omega_k^c - \alpha A\sin(\varphi_k - \Theta), \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{6.2.12}$$

Из-за симметрии начального распределения собственных частот кластеров $p(\omega)$, среднее поле будет осциллировать на центральной частоте ω_0; далее мы убедимся в том, что эта частота действительно является решением.

Из уравнения (6.2.12) следует, что среднее поле определяет динамику автоструктур, действуя на k-й осциллятор как некоторая внешняя сила, которая, в зависимости от параметров системы сможет, или не сможет захватить его частоту. Когда все автоколебания независимы ($\alpha = 0$), то пространство состояний системы (6.2.12) распадается на N плоскостей, на каждой из которых имеется единственный устойчивый предельный цикл и периодом $2\pi/\omega_k^c$. В исходном N-мерном конфигурационном пространстве подобным независимым автоколебаниям осцилляторов соответствует притяжение фазовых траекторий к N-мерному тору — произведению независимых циклов. Причем если все ω_k^c несоизмеримы, то фазовые траектории на торе представляют собой плотную, нигде не замыкающуюся обмотку — квазипериодическое движение. Когда же между автоструктурами появляется связь ($\alpha \neq 0$), то такое простое квазипериодическое движение, вообще говоря, может разрушаться: в частности, возможно появление режима многомодовой генерации. К такому упорядочению спектра колебаний приводит, в частности, эффект синхронизации, при которой осцилляторы взаимно сдвигают частоты таким образом, что они либо станут соизмеримыми, либо совпадут (с учетом нелинейных поправок). Взаимная синхронизация мод возможна также и по волновым числам. С синхронизацией мод по волновым числам связано возникновение сложных пространственно упорядоченных структур в не одномерных автоколебательных системах, которые мы здесь не рассматриваем. На торе вместо квазипериодической обмотки появляются предельные циклы.

При синхронизации осцилляторов на некоторой частоте их колебания складываются когерентным образом и возникает ненулевое среднее поле. Если оно периодично ($A \cong \text{const}$, $\Theta = \omega_0 t$), то каждое из уравнений (6.2.12) эквивалентно фазовому уравнению осциллятора под воздействием периодической силы. Подставляя в (6.2.12) $\Theta = \omega_0 t$, $A = \text{const}$, $\psi_k = \varphi_k - \omega_0 t$, в результате получим

$$\partial\psi_k/\partial t = \Delta_{k0} - \Delta \cdot \sin\psi_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{6.2.13}$$

где $\Delta_{k0} = \omega_k^c - \omega_0$, $\psi_k(t)$ — соответственно начальная расстройка по частоте и разность фазы колебаний синхронизируемого осциллятора и периодической «внешней силы» Z; $\Delta \equiv \alpha A$ — полоса синхронизации (удержания).

Уравнение (6.2.13) совпадает с уравнением Адлера и может иметь как синхронное, так и асинхронное решение. В частности, в стационарном состоянии из (6.2.13) имеем $\Delta \cdot \sin\psi_k = \Delta_{k0}$. Следовательно, синхронное решение существует при условии, что собственная частота k-го осциллятора близка к ω_0: $|\Delta_{k0}| \leqslant \Delta$; тогда соответствующие осцилляторы могут быть захвачены средним полем. Если $|\Delta_{k0}| > \Delta$, то имеет место асинхронное решение уравнения (6.2.13), при котором фазы осцилляторов распределены неравномерно. Так как синус — периодическая функция, то характерной особенностью системы (6.2.13) является то, что она при $|\Delta_{k0}| \leqslant \Delta$ имеет счетное число состояний равновесия, из которых устойчивым состояниям соответствуют значения

$$(\psi_k)^*_{\pm j} = \arcsin(\Delta_{k0}/\Delta) \pm 2j\pi \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.2.14}$$

и неустойчивым

$$(\psi_k)^{**}_{\pm j} = \pi - \arcsin(\Delta_{k0}/\Delta) \pm 2j\pi. \tag{6.2.14*}$$

Комплексное среднее поле $Z = A\exp(i\Theta) = N^{-1}\sum\limits_{k=1}^{N}\exp(i\varphi_k)$ в уравнении (6.2.12) может быть вычислено (в пределе $N \to \infty$) просто по плотности распределения вероятности разности фаз $W(\psi)$ от групп синхронизированных и не синхронизированных кластеров

$$Z = A\exp(i\Theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(i\psi + i\omega_0 t)W(\psi)d\psi, \tag{6.2.15}$$

где $W(\psi, t) = W_s(\psi) + W_{as}(\psi)$ — сумма синхронной $W_s(\psi)$ и асинхронной $W_{as}(\psi)$ компонент. Для синхронизированных осцилляторов, разность фаз не зависит от времени, так что распределение $W_s(\psi)$ может быть получено из начальной плотности распределения вероятности собственных частот $p(\omega)$ по формуле:

$$W_s(\psi) = p(\omega)\cdot\left|\frac{d\omega}{d\psi}\right| = \Delta\cos\psi\cdot p(\omega_0 + \Delta\sin\psi),$$

где $-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$ (*Хан, Шапиро, 1969*). Можно показать (см., например, *Пиковский и др., 2003*), что для незахваченных средним полем осцилляторов распределение разности фаз $W_{as}(\psi)$ (которое для каждого ω^c следует непосредственно из уравнения (6.2.13)) имеет период π по ψ и потому не вносит вклада в интеграл (6.2.15). Таким образом, для определения амплитуды A и частоты ω_0 среднего поля получаются два действительных уравнения (действительная и мнимая части (6.2.15))

$$A = \Delta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \psi \cdot p(\omega_0 + \Delta \sin \psi) d\psi, \qquad (6.2.16)$$

$$0 = \Delta \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot p(\omega_0 + \Delta \sin \psi) d\psi, \qquad (6.2.17)$$

которые могут быть решены аналитически лишь для некоторых конкретных видов функции распределения $p(\omega)$. В частности, для ансамбля связанных осцилляторов с лоренцевским распределением по частотам уравнение (6.2.17), благодаря симметрии по частоте этого распределения (что отмечалось выше), удовлетворяется автоматически, а уравнение (6.2.16) приводит к следующему выражению для амплитуды среднего поля $A = (1 - 2d/\alpha)^{1/2}$. Таким образом, нетривиальное среднее поле для активной среды из глобально связанных осцилляторов существует, если сила связи превышает критическое значение $\alpha_{\text{crit}} = 2d$, а переход к синхронизации аналогичен фазовому переходу второго рода с критическим индексом 1/2: $A \sim (\alpha - \alpha_{\text{crit}})^{1/2}$.

Синхронизация в присутствии шума

Выше была продемонстрирована возможность образования мезомасштабных кластеров когерентных осцилляторов в некоторой абстрактной системе без шума. Однако подобное детерминистическое описание динамики стохастического вихревого континуума является приближенным, поскольку внутренние координаты $\boldsymbol{q}(t)$ (а вместе с ними и фазы $\varphi(t)$ на циклах и в их окрестностях) в общем случае являются случайными величинами, т. е. постоянно испытывают турбулентные флуктуации. Внутренний и внешний шум неотъемлемо присутствует в «реальной» подсистеме турбулентного хаоса (находящейся в стационарно-неравновесном состоянии), которая характеризуется термодинамической температурой $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (*Колесниченко*, *2002*).

Посмотрим, что произойдет с теорией, развитой в этом разделе, когда система осцилляторов подвержена влиянию шума. В этом случае для разности ψ_k фаз колебаний синхронизируемого кластера сорта k и периодической «внешней силы» Z можно получить следующее стохастическое уравнение первого порядка [(см. формулу (6.2.8))]

$$\partial\psi_k/\partial t = \Delta_{k0} - \Delta \cdot \sin \psi_k + \sqrt{k_{\text{B}} T_{\text{turb}} Q}\, \xi_k(t), \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \qquad (6.2.18)$$

которое описывает автоколебания в присутствии двух сил — периодической Z и стохастической $\tilde{f}_k(t) \equiv \sqrt{k_{\text{B}} T_{\text{turb}} Q}\, \xi_k(t)$. Схему фазовой автоподстройки частоты ω_k^c, описываемую этим уравнением, обычно называют схемой первого порядка.

Плотность распределения для одного осциллятора зависит теперь также и от частоты ω: $P_2(\psi, \omega, t)$. Поэтому среднее поле может быть определено путем осреднения по распределениям фаз и частот; в термодинамическом пределе будем иметь:

$$Z = A \exp(i\Theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp i(\psi + \omega_0 t) P_2(\psi, \omega, t). \qquad (6.2.19)$$

Здесь (и иногда далее) опущен нижний индекс k у параметров, характеризующих один из взаимодействующих осцилляторов. Применительно к стохастическому уравнению (6.2.18), уравнение ФПК для плотности вероятности полной разности фаз ψ имеет вид (6.2.9)

$$\frac{\partial P(\psi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial \psi}, \quad J = (\Delta_0 - \Delta \cdot \sin \psi) P(\psi, t) + k_B T_{\text{turb}} \frac{Q}{2} \frac{\partial P(\psi, t)}{\partial \psi}, \qquad (6.2.20)$$

где J — поток вероятности в пространстве ψ. Значение фазовой переменной ψ в общем случае не ограничены, поэтому случайный процесс, описываемый уравнением (6.2.20), является нестационарным. Уравнения (6.2.19) и (6.2.20) представляют собой самосогласованную окончательную систему уравнений для неизвестной функции распределения и среднего поля.

6.2.4. Решение стохастических уравнений для разности фаз колебаний синхронизируемого кластера в стационарном состоянии

Проанализируем сначала качественное поведение системы (6.2.18) в стационарном состоянии ($\partial\psi/\partial t = 0$). Воздействующий шум влияет на поведение ансамбля осцилляторов двояким образом. Во-первых, из-за слабых шумовых воздействий значения разности фаз $\psi(t)$с течением времени окажутся разбросанными в окрестности начального ($t = 0$) устойчивого равновесия $\psi_0^* = \arcsin(\Delta_0/\Delta)$ [см. формулу (6.2.14)]. Во-вторых, достаточно интенсивные шумовые воздействия могут вывести систему из области притяжения к устойчивому состоянию равновесия ψ_0^*, в результате чего система перейдет в окрестности соседних состояний равновесия $\psi_{\pm 1}^*$, $\psi_{\pm 2}^*$ и т. д. С течением времени вероятности подобных переходов (которые принято условно называть перескоками фазы) возрастают, причем система из состояния равновесия $\psi_{\pm j}^*$, в свою очередь, будет переходить в соседние состояния $\psi_{\pm(j+1)}^*$, $\psi_{\pm(j-1)}^*$ и т. д. подобные уходы (перескоки) фазы на целое число периодов (2π) от исходного, первоначального положения равновесия возможны в обе стороны.

Таким образом, динамику фазы можно представить как последовательность независимых скачков. Число таких перескоков за конечный интервал времени в разных направлениях всегда различно. Поэтому «средняя» частота осциллятора $\langle\omega\rangle$, определенная за конечный интервал времени,

$$\langle\omega\rangle = \int d\varphi P(\varphi) \partial\varphi(t)/\partial t$$

не будет совпадать с частотой ω_0 синхронизирующего комплексного среднего поля Z, причем увеличение начальной расстройки и уменьшение отношение сигнал/шум приводит все к большему проявлению этого эффекта. Заметим, что в системах с шумом условие стохастической синхронизации определяют, используя среднюю угловую частоту (см., например, *Анищенко и др.*, *2003*). Поскольку предыдущий скачок быстро забывается, весь процесс обычно аппроксимируют пуассоновским и характеризуют единственным параметром — частотой скачков (см. *Стратонович*, *1961*). Пусть N^+ — среднее число скачков разности фаз на 2π в единицу времени в сторону ее увеличения, а N^- — аналогичное число скачков на 2π в сторону уменьшения. Тогда разность средней частоты синхронизированного осциллятора и частоты воздействующего среднего поля выражается через частоты скачков как средняя скорость дрейфа фазы

$$\langle\omega\rangle - \omega_0 = 2\pi(N^+ - N^-) = 2\pi J_1. \tag{6.2.21}$$

Рассмотрим теперь количественное описание динамики фазы. Согласно формуле $\psi(t) = \varphi(t) - \omega_0 t$, среднюю частоту колебаний синхронизируемого осциллятора можно определить соотношением

$$\langle\omega\rangle \equiv \langle\partial\varphi/\partial t\rangle = \omega_0 + \langle\partial\psi/\partial t\rangle. \tag{6.2.22}$$

До сих пор везде говорилось о полной разности фаз ψ. Вместе с тем, в данной задаче вследствие периодичности коэффициентов уравнения ФПК (6.2.20) по ψ можно оперировать с приведенной разностью фаз $\widetilde{\psi}(t)$, ограниченной в интервале $[-\pi, \pi]$, и искать плотность вероятности для приведенной фазы $\widetilde{P}(\widetilde{\psi}, t)$, поскольку такая замена не скажется на поведении периодических функций с периодом 2π (см. *Стратонович, 1961*). Действительно, если $P(\psi, t)$ есть решение (6.2.20) при начальном условии $\psi = \psi_0$, то функция $P(\psi + 2\pi n, t)$ также является решением при начальном условии $\psi = \psi_0 + 2\pi n$, где n — произвольное целое число (далее символ «тильда» над ψ будем опускать). Введем плотность вероятности

$$\widetilde{P}(\psi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P(\psi + 2\pi n, t) \tag{6.2.23}$$

разности фаз ψ, приведенной к интервалу $[-\pi, \pi]$. Тогда функция $\widetilde{P}(\psi, t)$ является периодической функцией с периодом 2π, уравнение ФПК для нее имеет тот же самый вид, что и (6.2.20), но теперь его можно решать в интервале $[-\pi, \pi]$ при начальном условии $\widetilde{P}(\psi, 0) = \delta(\psi - \psi_0)$, где $-\pi \leqslant \psi_0 \leqslant \pi$, при граничном условии $\widetilde{P}(-\pi, t) = \widetilde{P}(\pi, t)$ и условии нормировки $\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{P}(\psi, t)d\psi$. Это означает, что плотность вероятности приведенной разности фаз получается путем «наматывания» прямой ψ на окружность.

Для нахождения величины $\langle\partial\psi/\partial t\rangle$ обратимся к стационарному решению уравнения (6.2.20), которое, если оно вообще существует, возможно только в пределе при $t \to \infty$. Стационарная плотность вероятности $W(\psi) = \lim_{t\to\infty} \widetilde{P}(\psi, t)$, согласно (6.2.20), определяется следующим обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\begin{aligned} J &= (\Delta_0 - \Delta \cdot \sin\psi)W(\psi) + k_B T_{\text{turb}} \frac{Q}{2} \frac{\partial W(\psi)}{\partial\psi} = \\ &= (\Delta/D)[(D_0 - D \cdot \sin\psi)W(\psi) + \partial W(\psi)/\partial\psi] = \text{const}. \end{aligned} \tag{6.2.24}$$

Здесь $D_0/D = (\Delta_0/\Delta)$; параметры D $(= 2\Delta/k_B T_{\text{turb}} Q)$ и D_0 характеризуют соответственно величину отношения сигнал/шум в полосе синхронизации и величину относительной начальной расстройки. Решение уравнения (6.2.24) (при использовании граничного условия $W(-\pi) = W(\pi)$) может быть записано в виде (*Стратонович, 1961*)

$$W(\psi) = \frac{\exp(D_0\psi + D\cos\psi)}{4\pi^2 \exp(-\pi D_0)|I_{iD_0}(D)|^2} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} \exp(-D_0\varphi - D\cos\varphi)d\varphi, \tag{6.2.25}$$

где $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$; $I_{\pm i\mu}(x)$ — табулированная функция Бесселя мнимого аргумента и мнимого индекса (см. *Янке*, *Эмде*, *Лёш*, *1977*).

Зная стационарную плотность вероятности $W(\psi)$ разности фаз, можно найти среднюю частоту колебаний парциального осциллятора $\langle\omega\rangle = \omega_0 + \langle\partial\psi/\partial t\rangle$. Для нахождения величины $\langle\partial\psi/\partial t\rangle$ в стационарном состоянии воспользуемся уравнением Ланжевена (23). Поскольку среднее значение шума равно нулю, то

$$\langle\partial\psi/\partial t\rangle = \langle\Delta_0 - \Delta\cdot\sin\psi\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(\Delta_0 - \Delta\cdot\sin\psi)W(\psi)d\psi. \tag{6.2.26}$$

Подынтегральное выражение в (6.2.26) определим через постоянный поток вероятности J (в стационарном состоянии поток вероятности не зависит от ψ), который равен введенной выше величине J_1: $J = J_1 = N^+ - N^-$ (*Стратонович*, *1961*). Согласно (6.2.24), для потока вероятности имеем

$$J = (\Delta_0 - \Delta\cdot\sin\psi)W(\psi) + RT_{\mathrm{turb}}\frac{Q}{2}\frac{\partial W(\psi)}{\partial\psi}, \tag{6.2.27}$$

откуда следует

$$(\Delta_0 - \Delta\cdot\sin\psi)W(\psi) = J_1 - RT_{\mathrm{turb}}\frac{Q}{2}\frac{\partial W(\psi)}{\partial\psi}.$$

Подставляя это выражение в (6.2.26) и выполнив интегрирование с учетом условия $W(-\pi) = W(\pi)$, окончательно получим

$$\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle = 2\pi J_1. \tag{6.2.28}$$

Разность среднего числа перескоков в противоположных направлениях J_1 (стационарный поток вероятности) можно найти путем подстановки выражения для плотности вероятности (6.2.25) в формулу (6.2.24); в результате получим

$$J_1 = J = N^+ - N^- = \frac{\Delta\,\mathrm{sh}(\pi D_0)}{|I_{iD_0}(D)|^2 2\pi^2 D} = \frac{\Delta_0\,\mathrm{sh}(\pi D_0)}{|I_{iD_0}(D)|^2 2\pi^2 D_0}. \tag{6.2.29}$$

Таким образом, для средней частоты колебаний осциллятора имеем

$$\langle\omega\rangle = \omega_0 + 2\pi J = \omega_0 + \Delta_0\,\mathrm{sh}(\pi D_0)|I_{iD_0}(D)|^{-2}/\pi D_0. \tag{6.2.30}$$

Эта формула позволяет получить наиболее полные и содержательные результаты по эволюции характеристик приведенной фазы. Рассмотрим здесь три предельных случая этой формулы.

В частном случае, когда начальная расстройка отсутствует ($\Delta_0 = D_0 = 0$), независимо от величины D имеем $\langle\omega\rangle - \omega_0 = 0$, т. е. при совпадении частоты синхронизирующего сигнала с частотой колебаний синхронизируемого осциллятора шум не изменяет среднюю частоту колебаний, т. е. в данном случае, несмотря на наличие скачков фазы, ввиду полной симметрии средние значения чисел перескоков фазы вперед и назад равны ($N^+ = N^-$) и поэтому систематический поток вероятности отсутствует ($J_1 = 0$). В этом случае имеет место возникновение кластера синхронизированных осцилляторов. При очень большом шуме: $D \to 0$ и $D_0 \to 0$ (напомним, что параметр D характеризует величину отношения сигнал/шум в полосе синхронизации). Используя равенство $I_0(D) \approx 1$, из формулы (6.2.30) получим $\langle\omega\rangle = \omega_0 + \Delta_0 = \omega^c$. Таким образом, в случае очень интенсивного шума отсутствует эффект синхронизации и средняя частота колебаний осциллятора остается равной ее начальному значению. Если воспользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя мнимого индекса, то можно показать, что в противоположном крайнем случае, при очень малых шумах ($D \to \infty$), справедлива формула (*Стратонович*, *1961*)

$$\langle\omega\rangle - \omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{при } |\Delta_0| \leqslant |\Delta| \\ \sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2} & \text{при } |\Delta_0| > |\Delta|, \end{cases} \tag{6.2.31}$$

описывающая эффект синхронизации в отсутствие шума.

Из этой формулы видно, что если начальная расстройка находится внутри полосы синхронизации, то возникает когерентность осцилляторов за счет синхронизации в ансамбле; когда же начальная расстройка выходит за пределы полосы синхронизации, происходит частичное увеличение частоты колебаний осциллятора. Кроме этого, отметим, что, когда отношение сигнал/шум велико ($D \gg 1$) и, следовательно, обеспечивается точное слежение за фазой среднего поля ($\psi \ll 1$), справедливы приближенные соотношения $\cos\psi \approx \approx 1 - \psi^2/2$, $I_0(D) \approx \sqrt{2\pi D}\exp(D)$. В этом случае стационарная плотность вероятности (6.2.26) принимает гауссовскую форму

$$W(\psi) = \sqrt{2\pi\sigma_\psi^2}\exp(-\psi^2/2\sigma_\psi^2)$$

с центром в $\psi_0 = -\pi/2$ (здесь $\sigma_\psi^2 = 1/D$ — дисперсия разности фаз). В пределе при $D \to \infty$ эта плотность вероятности превращается в δ-функцию, $\lim\limits_{D\to\infty} W(\psi) = \delta(\psi)$. Четкий максимум гауссовского распределения вероятностей разности фаз еще раз свидетельствует о захвате фазы осциллятора.

При нестационарном характере эволюции модельной системы слабо взаимодействующих осцилляторов характеристики процесса установления разности фаз могут быть определены с учетом результатов численного решения уравнения ФПК (6.2.20). Численному исследованию нестационарного уравнения (6.2.20) посвящено несколько работ (см., например, *Акопян*, *1966*; *La Frieda*, *Lindsey*, *1973*).

В заключение отметим следующее. Хотя проблема развитой турбулентности с формальной точки зрения относится к теории диссипативных динамических систем, потенциальные возможности этой теории (разрабатываемые в основном для систем с малым числом степенй свободы) оставались до последнего времени практически не использованными для целей моделирования структурированной турбулентности. Однако, как теперь стало понятно, развитая турулентность определяется не очень большим числом коллективных возбуждений (макроскопических степенй свободы), поскольку остальная масса возбуждений просто подстраиваются под них, играя роль более интенсивной диссипации. Эти коллективные степени свободы могут характеризоваться некоторыми стохастическими параметрами $\boldsymbol{q}$, которые играют роль внутренних координат подсистемы турбулентного хаоса. При этом параметры $\boldsymbol{q}$ описывают как мелкомасштабные вихревые образования, так и мезомасштабные КС. Определенная устойчивость ансамбля индивидуальных КС, а в некоторых случаях автономность их динамики, позволяют (при описании эволюции вихревых образований) перейти от гидродинамических уравнений в частных производных к стохастическим уравнениям в обыкновенных производных для параметров структур. Таким образом, предложенный здесь комбинированный стохастико-термодинамический подход к моделированию структурированной турбулентности жидкости, когда движение КС рассматривается не в координатном пространстве, а в функциональном $\boldsymbol{q}$-пространстве соответствующей динамической системы (отвечающей внутренней структуре подсистемы турбулентного хаоса), позволяет, до известной степени, свести проблему описания случайных гидродинамирческих полей в теории турбулентности к статистической динамике локализованных образований.

Этот подход хорошо соотносится с подходом Мигдала (*1987*), который, используя аналогию с глюонными калибровочными полями в теории движения кварков, вывел стохастические уравнения движения вихревых нитей (рассматриваемых как элементарные возбуждения турбулентного потока) и соответствующие уравнения Фоккера—Планка в петлевом пространстве (в пространстве вихревых нитей) для распределения вероятностей $W(C_1, \ldots, C_N)$ ансамбля флуктуирующих вихревых нитей $(C_1, \ldots, C_N)$ с интенсивностями $\Gamma_k = \int\limits_{C_k} \omega_k(\rho) d\boldsymbol{\rho}$ ($k = 1, \ldots, N$; $\omega_k(\boldsymbol{c})$ — распределение завихренности), и тем самым показал, как можно разработать для гидродинамической турбулентности формализм, основанный на функциях распределения вероятности формы всевозможных замкнутых контуров. К сожалению, достаточно абстрактная теория Мигдала пока не получила заслуженного признания и дальнейшего развития.

Вместе с тем, авторы хорошо осознают, что механизм возникновения мезомасштабных КС проанализирован в данном разделе при довольно ограниченных предположениях. Можно надеяться, что дальнейшее изучение этой проблемы позволит, в частности, выяснить, в каких ситуациях мелкомасштабная турбулентность принципиальна для образования и поддержания мезомасштабных КС, а в каких она не сказывается на качественной картине явлений. Отметим также, что построить эффективную гидродинамическую модели структурированной турбулентности (пригодную для различных приложений и инженерных расчетов) будет затруднительно до тех пор, пока кинематические, термогидродинамические и топологические характеристики мезомасштабных КС не конкретизированы и не описаны наиболее адекватным образом через набор внутренних координат. Кроме этого, необходим, разумеется, учет динамики взаимодействия КС и в координатном пространстве, который не нашел отражения в развитом подходе. Все это темы будущих исследований.

Глава 7

Основы механики гетерогенных сред для аккреционных дисков

В третьей и четвертой главах книги мы рассмотрели некоторые подходы к полуэмпирическому моделированию развитой турбулентности в многокомпонентных природных средах. В данной главе применительно, в основном, к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, разработана модель турбулизованной гетерогенной среды с использованием развитых ранее методов и подходов к описанию многокомпонентной смеси и построению на этой основе нового класса математических моделей природных сред, учитывающих влияние на характер и развитие турбулентности инерционных свойств пылевых частиц, процессов тепло-, массопереноса, коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Это позволяет значительно расширить возможности численного моделирования разнообразных физических явлений в таких сложных космических средах, какими являются газопылевые аккреционные диски, образующиеся у звезд различных классов при их дифференциальном вращении вокруг центра тяжести, исследовать их структуру, физико-химические и гидродинамические свойства и временн*у́*ю эволюцию.

Особое внимание уделено детальному рассмотрению механизма взаимодействия турбулизованного газа и пыли во вращающемся аккреционном диске, окружавшем прото-Солнце на ранней стадии его существования. Сформулирована полная система дифференциальных уравнений двухфазной многокомпонентной механики с учетом относительного движения фаз, процессов коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения, которая предназначены для схематизированных постановок и численного решения специальных модельных задач по взаимосогласованному моделированию структуры, динамики, теплового режима и химического состава околосолнечного диска на разных этапах его эволюции, в частности, в режиме развитого турбулентного движения коагулирующей газовзвеси, приводящего, в конечном счете, к формированию пылевого субдиска, его гравитационной неустойчивости и последующему образованию и росту планетезималей.

С целью наиболее адекватного феноменологического описания сжимаемых турбулентных течений дискового вещества проведено теоретико-вероятностное осреднение по Фавру стохастических уравнений гетерогенной механики, получены определяющие градиентные соотношения для турбулентных потоков межфазной диффузии и тепла, а также для тензоров «относительных» и рейнольдсовых напряжений, необходимые для замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения. Детально исследовано влияние инерционных эффектов пылевых частиц на характеристики турбулентности в диске, в частности, на дополнительную генерацию турбулентной энергии крупными частицами в окрестности экваториальной плоскости прото-Солнца. Разработан полуэмпирический способ моделирования коэффициентов турбулентной вязкости в двухфазной дифференциально вращающейся среде с учетом обратных эффектов переноса диспергированной фазы и тепла на развитие турбулентности в температурно (концентрационно) стратифицированном веществе субдиска и его атмосфере.

Для установившегося режима движения при осаждении твердых частиц к центральной плоскости диска под воздействием ускорения тяготения исследован параметрический метод моментов решения интегро-дифференциального уравнения коагуляции Смолуховского для функции распределения частиц по размерам, который базируется на априорной принадлежности искомой функции распределения к определенному параметрическому классу распределений. Проанализирован также возможный «режим предельного насыщения» атмосферы субдиска мелкодисперсными частицами пыли, когда поток захватывает максимально возможное число частиц. В этом случае не требуется заданий граничного условия для концентрации частиц на центральной плоскости диска. В условиях такого режима течения интенсифицируются различные механизмы коагуляции в турбулизованной среде. Полученные результаты открывают возможности создания более приближенных к реальности моделей звездно-планетной космогонии и в первую очередь решения фундаментальной проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы.

§ 7.1. Теоретические предпосылки к моделированию эволюции аккреционных турбулизованных дисков

7.1.1. Предварительные замечания

Вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации. Это вещество, являющееся в общем случае пылевой плазмой, замагничено и находится в состоянии сильной турбулизации. Понимание эволюции протопланетного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании Земли и планет. Первые серьезные попытки получить ответ на вопрос о происхождении Солнечной системы восходят к средним векам и связаны с именами И. Канта и П. С. Лапласа, гипотезы которых об изначальном газопылевом протопланетном облаке и формирующемся из него вращающемся диске, распадающемся в дальнейшем на отдельные сгущения, сохранили свою актуальность до настоящего времени. В нашей стране эта концепция получила наиболее полное развитие в работах

О. Ю. Шмидта и его школы (см. *Шмидт*, *1957*; *Сафронов*, *1969*; *1982*), что позволило сформулировать модель образования зародышей планет из холодного вещества протосолнечной туманности, приобретающей форму диска вблизи экваториальной плоскости Солнца, и получить в рамках такой модели ряд количественных оценок.

К сожалению, как в этой, так и в ряде других более или менее аналогичных моделях зарубежных исследователей некоторые существенные физические процессы, сопровождающие эволюцию аккреционного диска, учитывались весьма приближенно или не учитывались вовсе. Это относится в первую очередь к гидродинамической турбулентности, являющейся одним из важнейших физических процессов, определяющих структуру и динамику диска. Острота этой проблемы становится еще более очевидной, если принять во внимание, что турбулизованное вещество диска представляет собой неоднородную дисперсную среду, состоящую из газа (в общем случае многокомпонентного) и пылевых частиц различных размеров. При этом роль пылевых частиц в турбулизации дисковой среды, включая динамику их дрейфа в направлениях, радиальном и ортогональном к экваториальной плоскости Солнца, а также фазовых переходов при испарении и/или конденсации частиц с учетом температурной стратификации в диске, оказывается, нередко, определяющей. По-видимому, именно этим объясняется довольно неоднородная структура дисков, о чем свидетельствуют имеющиеся (хотя и ограниченные) наблюдательные данные, примеры которых приведены в гл. 1, где обсуждается природа газопылевых дисков, и показаны дополнительно на рис. Ц.42.

При моделировании эволюции допланетного облака, окружавшего Солнце на ранней стадии его эволюции, необходимо, в общем случае, учитывать динамические процессы взаимодействия турбулизованного газа и пыли (в общем случае пылевой плазмы). В частности, нужно учитывать модификацию твердыми частицами энергии турбулентности несущей фазы (т. е. обратное влияние пылевой компоненты на турбулентный и тепловой режимы газовой составляющей диска), влияние турбулентности на скорости фазовых переходов (испарение, конденсацию), на скачкообразные процессы аккумуляции дисперсных частиц (коагуляцию и дробление при взаимном соударении частиц друг с другом в потоке вещества) и, наконец, на осаждение сквозь газ твердых частиц к центральной плоскости диска, где они образуют уплощенный пылевой слой (субдиск). Модель, учитывающая продолжающуюся аккрецию вещества из протосолнечной туманности на прото-Солнце и окружающий его диск, формирующийся субдиск с частичным выносом наружу твердых частиц, состоящих в основном из тугоплавких соединений (CAIs), и образование биполярных потоков плазмы у полюсов под влиянием магнтного поля, схематично показана на рис. Ц.43. При увеличивающейся массе протозвезды и росте плотности вещества диска важную роль начинают играть приливные взаимодействия, оказывающие, в частности, влияние на формирование концентрических газопылевых слоев (*Bryden и др.*, *1999*).

Существует обширная литература по моделированию эволюции околосолнечного допланетного облака без пылевой составляющей (см., например, пространную библиографию к обзору (*Bisnovatyi—Kogan*, *Lovelace*, *2001*)). Вместе с тем, немногочисленные публикации по запыленным дисковым системам охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к данной проблеме, а полученные в них результаты носят ограниченный характер, поскольку используемые модели турбулентности двухфазных сред «газ-твердые частицы» не могут быть признаны вполне удовлетворительными (см., например, *Weidenschilling*, *1977*, *1980*; *Sekiya*, *Nakagawa*, *1988*; *Cuzzi и др.*, *1993*; *Dubrulle*, *1993*, *1995*; *Stepinski*, *Valageas*, *1996*, *1997*; *Goodmann*, *Pindor*, *2000*; *Takeuchi*, *Lin*, *2002*, *2003*; *Youdin*, *Goodman*, *2004*). Эта обстоятельство обусловлено, в частности, тем, что существующая в настоящее время теория турбулентности гетерогенных жидкостей несовершенна, что связано как с незавершенностью «классической» теории гидродинамической турбулентности, так и с возникновением ряда новых механизмов турбулизации в диске, реализуемых при варьировании объемного содержания и размеров твердых частиц в потоке газовзвеси.

Мелкодисперсные твердые частицы (относительно малоинерционная составляющая газовзвеси) оказывают, как правило, ламинаризующее влияние на двухфазное турбулентное течение за счет роста дополнительной диссипации, в то время как крупные частицы усиливают генерацию пульсационной энергии за счет формирования вихревого следа. Следует отметить, что пылевая фаза может не приниматься во внимание при моделировании диска только лишь самой начальной стадии эволюции этого космического объекта, когда почти все первичные (межзвездные) пылевые частицы, войдя в состав допланетного диска и попав в его внутреннюю высокотемпературную область, уже либо испарились, либо сохранились частично (или полностью) в более удаленных от Солнца и потому более холодных областях. На более поздних стадиях эволюции допланетного облака, по мере охлаждения диска, конденсации твердых частиц и увеличения их в размерах (в основном в результате процессов коагуляции), а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой составляющей существенно возрастает.

В этом случае при моделировании дисковой среды важно учитывать влияние пыли на турбулентность потока, которое не является, вообще говоря, однозначным, и сильно зависит от величины объемного содержания (концентрации) и инерционности твердых частиц. В частности, на определенных этапах эволюции подобной гетерогенной смеси становятся существенными такие механизмы воздействия пылевой компоненты на турбулентность в диске, как турбулентный «диффузионный» перенос дисперсной составляющей, обусловленный пространственной неравномерностью распределения пылевых частиц в диске, генерирование дополнительных турбулентных возмущений за счет коллективных эффектов, связанных с межчастичными столкновениями твердых частиц (*Шрайбер и др.*, *1980*), образование вихревых структур за обтекаемыми крупными частицами при отрыве несущего газового потока (*Fessler*, *Eaton*, *1999*), а также совместное влияние этих двух механизмов турбулизации течения. Кроме этого, само присутствие в турбулизованной среде полидисперсной примеси существенно усложняет гидродинамику диска, способствуя реализации дополнительных режимов течения космического вещества. Так, например, увеличение концентрации твердых частиц в гетерогенном потоке, связанное с процессом оседания пыли к центральной плоскости диска под действием вертикальной компоненты тяготения прото-Солнца, приводит к локальному дополнительному усилению генерации турбулентной энергии потока, обусловленной ростом поперечного градиента относительной скорости фаз в окрестности экваториальной плоскости, т. е. к ретурбулизации течения (см. *Goldrich*, *Ward*, *1973*).

Помимо этого, эффективность механизмов аккрецирования вещества в допланетном облаке, особенно на стадии формирования субдиска, также в значительной степени зависит от интенсивности его турбулизации. Причем, влияние турбулентности на процесс коагуляции частиц в различных ситуациях может сказываться совершенно неожиданным образом, однако, по-видимому, турбулентность всегда способствует коагуляции (*Волощук*, *Седунов*, *1975*). Так, если внутренний колмогоровский масштаб турбулентности λ_K меньше или сравним с размером дисперсных частиц, то имеет место турбулентное блуждание частиц (аналогичное броуновскому), приводящее к их взаимному столкновению, т. е. к турбулентной коагуляции, дополняющей эффективную в спокойном газе гравитационную коагуляцию. В то же время для частиц, размеры которых значительно меньше λ_K, влияние турбулентности на эволюцию тонкодисперсной пылевой компоненты происходит по иным каналам. В этом случае усиление различных коагуляционных процессов (вызванных другими, нежели турбулентность, причинами) будет проистекать в результате интенсивного турбулентного перемешивания частиц на расстояниях, больших колмогоровского масштаба, когда за счет хаотических турбулентных пульсаций число взаимных столкновений твердых частиц в единицу времени существенно увеличивается по сравнению с ламинарным течением. Турбулентные пульсации могут способствовать втягиванию мелкодисперсных частиц в гидродинамический след или в зону действия индукционных сил в случае одноименно заряженных частиц, а также могут содействовать электростатической коагуляции путем разрушения экранировки (см. *Волощук*, *Седунов*, *1975*).

Основываясь на доступных результатах лабораторных и модельных исследований (см., например, *Dominik и др.*, *2007*), можно в первом приближении считать, что столкновения сравнительно мелких (примерно миллиметровых) частиц при скоростях < 1 м/с приводит к их объединению. Этому может способствовать так называемая быстрая коагуляция, не учитывающая вандерваальсовских сил отталкивания (хотя более подробного рассмотрения заслуживает при этом сам механизм прилипания — адгезии), либо рыхлая (*fluffy*) структура сталкивающихся частиц. По-видимому, на подобных структурах возможно преобладание процессов интеграционных над деструктивными даже при скоростях > 10 м/с. Эффективным механизмом аккумуляции твердых частиц может быть также, наряду с гравитационной, негравитационная аккреция, связанная с броуновской коагуляцией, электрической коагуляцией, турбулентно-броуновской коагуляцией заряженных и нейтральных частиц и т. п. (подробнее см. *Marov*, *Kolesnichenko*, *2001*). В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газовзвеси, что приводит, в конечном итоге, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости протозвезды и агломерации. Таким образом, вопреки распространенному мнению, что турбулентность в газопылевой среде субдиска не способствует укрупнению частиц (см. напр., *Макалкин, 2003*), ситуация может быть обратной, что подтверждают и полученные недавно результаты наблюдений (*Natta и др., 2007*).

Данный вывод дополнительно подкрепляют развиваемые нами представления о том, что в охваченном турбулентными движениями аккреционном диске и субдиске должна быть велика вероятность процессов самоорганизации на фоне хаотического движения газопылевой среды. Это позволяет предполагать существенную роль этих процессов в образовании пылевых кластеров внутри упорядоченных (вихревых) структур за счет более тесного взаимодействия (при относительно малых скоростях) частиц, способствующего их объединению. Таким образом, открывается реальная возможность преодолеть известные трудности механизма простого объединения частиц в турбулизованной дисковой среде, если принять во внимание возникновение областей самоорганизации в динамической системе вдали от состояния равновесия. Тем не менее пока остается открытым вопрос о том, как и за какие времена происходит рост в турбулентной среде диска зародышей планетезималей начиная примерно с метровых размеров (*Dullemond, Dominik, 2005*; *Cuzzi, 2004*; *Cuzzi и др., 2003*; *2005*; *Cuzzi, Weidenschilling, 2006*; *Russell и др., 2006*; *Wadhwa и др., 2007*).

Наконец, коснемся еще одного важного механизма, с которым связано создание космогонических моделей. Несомненно, что при образовании и в процессе эволюции околосолнечного допланетного диска существенную роль играли электродинамические (плазменные) эффекты. Космическая плазма в общем случае является пылевой, т. е. содержит мельчайшие частицы пыли (см. *Фортов и др., 2004*). Так как любой аккреционный диск содержит твердые частицы различных размеров, то существует, по-видимому, некоторый граничный линейный масштаб (обычно он бывает порядка 10^{-5}—10^{-7} м), зависящий от величины электромагнитного и гравитационного полей, заряда и плотности частиц, который разделяет достаточно малые частицы, являющиеся частью пылевой плазмы, и достаточно большие частицы, движение которых определяется воздействием неэлектромагнитных сил. Известно, что основными физическими процессами, определяющими поверхностный заряд пылинок, являются фотоэлектронная эмиссия и столкновения с плазменными электронами и положительными ионами (см., например, *Альвен, Аррениус, 1979*). Вместе с тем, твердая частица в космической плазме чаще заряжается отрицательно до потенциала порядка нескольких вольт в результате столкновений с электронами. В тех случаях, когда частица попадает в область плазмы с большим количеством надтепловых электронов, ее отрицательный потенциал может достигнуть значений порядка нескольких тысяч вольт, в результате чего она окажется захваченной плазмой.

В совокупности процессов формирования диска и его эволюции чрезвычайно важную роль играет электризация пылевых частиц при их оседании и взаимодействии с магнитным полем звезды, что требует учета влияния соответствующих электродинамических эффектов в дифференциально-вращающейся среде. Это дает возможность получить необходимые количественные оценки коэффициентов турбулентного обмена, отличных от упрощенных коэффициентов, получаемых из соотношений размерности и широко используемых в градиентных моделях турбулентности. В частности, при движении электропроводной двухфазной среды в электромагнитном поле на заряженные частицы действует пондеромоторная сила Лоренца, что приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, особенно при турбулизации течения (*Верещагин и др.*, *1974*; *Бусройд*, *1975*). Нами применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного облака предпринята попытка разработки континуальной модели дисковой среды, учитывающей совместное влияние магнитно-гидродинамических эффектов [см. гл. 9] и эффектов турбулентности на динамику и процессы тепло-, массопереноса в дифференциально вращающемся космическом газопылевом веществе.

Вместе с тем, трудности моделирования турбулентности в диске не сводятся только лишь к получению достаточно надежных значений коэффициентов турбулентного обмена в электропроводной многофазной системе. Не менее существенную роль играет изучение крупномасштабных турбулентных структур, отвечающих представлениям о возникновении когерентных упорядоченностей на фоне хаотических турбулентных движений. В то время как в хаотической турбулентности рост размеров частиц при столкновениях затруднен, внутри вихревых когерентных структур, наоборот, может происходить их объединение и укрупнение. Как уже отмечалось, возникновение подобных вихревых кластеров облегчает решение проблемы укрупнения пылевых частиц за счет соударений даже при относительно небольших скоростях, что встречает известные затруднения при попытках воспроизведения подобного рода процессов в лабораторных экспериментах, о чем говорилось в гл. 1. Мы приходим, таким образом, к выводу, что синергетические процессы самоорганизации в термодинамически открытой системе допланетного облака на фоне крупномасштабного сдвигового течения космического вещества, связанного с его дифференциальным вращением, также являются важнейшим механизмом, формирующим свойства облака на разных стадиях его эволюции, включая формирование вязкого аккреционного диска вокруг молодого Солнца, проходившего стадию Т Тельца, формирование пылегазового субдиска, разрушение последнего в результате гравитационной неустойчивости и возникновение дискретных центров уплотнения с последующим образованием и ростом планетезималей. Подчеркнем еще раз, что мы говорим о возникновении гравитационной неустойчивости именно в пылевом субдиске, а не в самом диске, масса которого на стадии Т-Тельца слишком мала, чтобы поддержать гравитационную неустойчивость. Сохраняется, однако, возможность магнитных неустойчивостей типа упоминавшейся в гл. 1 неустойчивости Балбуса—Хаули.

Как видим, развитая турбулентность способна приводить к формированию в диске мезомасштабных, относительно устойчивых, газопылевых когерентных структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. *Barge*, *Sommeria*, *1995*; *Tanga и др.*, *1996*; *Chavanis*, *1999*; *Колесниченко*, *2004*). В результате происходит самопроизвольное образование и рост конденсированной пылевой компоненты (пылевых кластеров), интенсификация фазовых переходов и тепломассопереноса при различных значениях термогидродинамических параметров несущей и дисперсной фаз, существенная модификация спектра колебаний в сильно запыленной среде и т. п. Один из возможных сценариев образования и роста пылевых частиц в частично ионизованном протопланетном диске состоит из следующих этапов: сначала образуются первичные кластеры; после прохождения критического размера начинается этап гетерогенной конденсации; на следующем этапе на первый план выходят процессы коагуляции и агломерации (слипания); наконец, на последнем этапе становится наиболее важной поверхностная рекомбинация ионов, приводящая к постоянному осаждению материала на поверхности изолированных многозарядных частиц. На всех этих этапах существенный вклад вносят коллективные процессы самоорганизации. Дальнейшее развитие данного сценария с образованием более крупных тел в газопылевом диске схематически показано на рис. Ц.44.

Здесь мы не будем касаться плазменных эффектов, а остановимся, в основном, на следующих четырех аспектах проблемы построения модели дисковой среды:

— формулировании базовой системы уравнений сохранения массы, импульса и энергии для мгновенных (актуальных) параметров течения газопылевой смеси и излучения, предназначенных для численного моделирования околосолнечного допланетного диска на разных стадиях его эволюции (в частности, ламинарной стадии образования субдиска) и в пространственных зонах, расположенных на различных расстояниях от протозвезды;

— весовом осреднении (по Фавру) стохастических уравнений движения двухфазной механики с целью феноменологического описания осредненного течения газовзвеси и процессов турбулентного тепло- и массопереноса в газопылевом диске;

— выводе определяющих соотношений для корреляционных характеристик турбулентного двухфазного течения, необходимых для замыкания гидродинамических уравнений масштаба среднего движения;

— моделировании коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом диске с учетом обратного влияния полидисперсной составляющей на интенсивность турбулентности несущего газа.

7.1.2. Основные допущения модели

Как уже говорилось, наиболее адекватное моделирование движения газовзвеси в газопылевом аккреционном диске можно провести, по-видимому, в рамках механики гетерогенных турбулизованных сред, с учетом специфики физико-химических свойств фаз, процессов тепло- массопереноса и излучения, химических реакций, фазовых переходов, процессов коагуляции, дробления и т. д. Такой подход был разработан авторами (*Колесниченко*, *Маров*, *2006*). Изучение эволюции подобных сред связано с привлечением новых термогидродинамических параметров и решением уравнений более сложных, чем те, с которыми приходится иметь дело в «обычной» гидродинамике. При этом детальное описание внутрифазных и межфазных взаимодействий в гетерогенных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения достоверных результатов и их понимания здесь особенно необходимы рациональные схематизации, приводящие к обозримым и решаемым уравнениям.

Как правило, в перечисленных выше и некоторых других известных работах по континуальному моделированию турбулизованных аккреционных дисков с учетом пылевой составляющей, исходными служат уравнения неразрывности, движения и энергии для каждой фазы в отдельности (*Nakagawa и др.*, *1981*; *Weidenschilling*, *1984*; *Hayashi и др.*, *1985*; *Nakagawa*, *Sekiya*, *1986*; *Schmitt и др.*, *1997*; *Balbus*, *Hawley*, *1998*). При этом приходится эвристически задавать законы межфазных взаимодействий, в частности, интенсивности обмена импульсом и энергией между фазами. Такой подход является аналогом тринадцатимоментного метода Грэда (*Grad*, *1949*), получившего широкое распространение, например, в кинетической теории многокомпонентной плазмы. Последующее осреднение взаимосвязанных гидродинамических уравнений для отдельных фаз (с целью описания турбулизованных движений) приводит не только к громоздким уравнениям масштаба среднего движения, что связано с необходимостью удержания в их структуре большого количества корреляционных моментов пульсирующих параметров (таких, например, как $\overline{\rho'_g \mathbf{u}'_g}$, $\overline{\rho'_d \mathbf{u}'_d \mathbf{u}'_d}$, $\overline{T' \mathbf{u}'_d}$, $\overline{\rho'_g T'}$ и т. п.), но и к затруднениям физической интерпретации каждого отдельного члена в осредненных уравнениях. Для преодоления указанных трудностей и с целью упрощения задачи некоторые авторы часто прибегают к необоснованному отбрасыванию ряда корреляционных слагаемых, что, конечно, сужает область применения подобного подхода.

Вместе с тем, моделирование эволюции турбулизованного газопылевого облака возможно провести в рамках односкоростного приближения гетерогенной механики, аналогичного моментному методу Чепмена—Энскога решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентных газовых смесей (см., например, *Чепмен*, *Каулинг*, *1960*; *Маров*, *Колесниченко*, *1987*). Своеобразие этого подхода в рассматриваемом случае состоит в том, что несмотря на разницу гидродинамических скоростей отдельных фаз и, связанную с этим, необходимость учета динамических и инерционных эффектов их относительного движения, континуальное описание дисковой среды возможно проводить исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии для системы в целом, дополненных определяющими (замыкающими) соотношениями для ряда термогидродинамических потоков, как внутрифазных, так и межфазных. В частности, для потоков межфазной диффузии (или относительных скоростей фаз) могут быть использованы обобщенные соотношения Стефана—Максвелла, выведенные для гетерогенных смесей с достаточной полнотой и логической стройностью методами неравновесной термодинамики в работе (*Колесниченко*, *Максимов*, *2001*). Важно подчеркнуть, что применение только одного суммарного континуума для моделирования газопылевого космического вещества позволяет, при использовании средневзвешенного осреднения Фавра (*Favre*, *1969*), выполнить осреднение гидродинамических уравнений для дисковой среды в целом достаточно аккуратно (см., например, *Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*).

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность эффектов неоднофазности в солнечном допланетном облаке (фазовые переходы, химические реакции, теплообмен, гравитационное взаимодействие, пульсационное и хаотическое движение, вращение, радиация, коагуляция и т. п.) с необходимостью требует разумной схематизации описания движения газопылевой среды. В связи с этим, далее будем предполагать, что движение дисперсной смеси (дисперсная фаза с точки зрения термодинамики и механики сплошной среды может рассматриваться как «псевдогаз», «псевдомолекулами» которого являются дисперсные частицы) в допланетном диске можно адекватно описать при следующих допущениях:

• пылевые частицы (далее под пылевыми частицами понимаются твердые тела с размерами от одного микрона до нескольких сотен метров) — твердые и недеформируемые, сферичны по форме и полидисперсны;

• предполагается несжимаемость вещества пылевых частиц, $\rho_d = \mathrm{const}$;

• истинная плотность частиц пыли много больше истинной плотности газовой составляющей системы, $\rho_d \gg \rho_g$;

• объемная концентрация дисперсной фазы не очень велика ($s^2 \ll 1$), так что членами порядка s^2 можно пренебречь;

• несущая фаза — сжимаемый многокомпонентный совершенный газ;

• можно пренебречь диффузионным переносом молекул всех химических сортов друг относительно друга, $\boldsymbol{u}_{\alpha(k)} \equiv \boldsymbol{u}_\alpha$;

• вязкость и теплопроводность дисперсной фазы можно не учитывать, $\boldsymbol{P}_d = 0$, $\boldsymbol{q}_d = 0$;

• предполагается условие термического равновесия газовой и дисперсной фаз, $T_g = T_d = T$;

• суммарный гетерогенный континуум рассматривается в однодавленческом приближении, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;

• гетерогенные реакции на поверхности твердых частиц можно не учитывать;

• вкладом от приповерхностного слоя твердых частиц в энергетику дисковой системы в целом можно пренебречь; наличие в гетерогенных системах межфазных границ, моделируемых математическими поверхностями, на которых терпят разрыв непрерывности поля различных термодинамических параметров, приводит к весьма серьезным осложнениям континуальной теории многофазных многокомпонентных систем (см. *Нигматулин*, *1982*);

• считается, что при описании динамического взаимодействия фаз вращением твердых частиц можно пренебречь;

• теплообмен между дисперсными частицами и несущим газом можно не учитывать.

Таким образом, предполагается моделировать гетерогенный континуум, состоящий и двух соприкасающихся друг с другом фаз — несущей газовой фазы солнечного состава и дисперсной фазы твердых конденсированных частиц сложного химического состава (см., например, *Дорофеева*, *Макалкин*, *2004*), находящийся при общей абсолютной температуре T и давлении p. Заметим, что это есть условие только термического и механического равновесия фаз, но не полного фазового равновесия, для которого дополнительно требуется еще и совпадение химических потенциалов фаз (являющихся ключевым понятием теории фазового равновесия). Кроме этого, при химическом равновесии, т. е. равновесном распределении химических компонентов между двумя фазами их химические потенциалы должны иметь постоянное значение в обеих фазах. Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного макрообъема $\delta\mathscr{V}$ дисковой среды должны быть намного больше линейных размеров дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера задачи L_{hydr}. Предполагается, что каждая фаза представляет собой гомогенную-компонентную смесь (причем каждое геохимически значимое вещество допланетного облака присутствует в каждой фазе). Далее для обозначения фазы будем использовать нижний греческий индекс α, β, ..., а нижние латинские индексы в круглых скобках типа (k) или (i) у любой величины будем относить к молекулярной составляющей фазы. Газовая фаза $(\alpha = g)$ является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости. Дисперсная фаза $(\alpha = d)$, присутствующая в виде твердых включений (столкновениями между которыми мы пренебрегать, однако, не будем), является невязкой и не теплопроводной. Иногда для обозначения газовой и конденсированной фаз вместо буквенных будем использовать цифровые индексы, отнеся нижний индекс $\alpha = 1$ к газовой фазе, а $\alpha = 2$ — к параметрам дисперсной фазы.

§ 7.2. Исходные уравнения механики гетерогенных сред в допланетном газопылевом облаке

Предполагая далее локальное термодинамическое равновесие в пределах каждой фазы, а также локальное термодинамическое равновесие излучения с веществом, воспользуемся для описания гидродинамических движений в газопылевой среде (с соответствующими физико-химическими свойствами) феноменологической теорией многожидкостных взаимопроникающих континуумов, учитывающей, в частности, динамические эффекты из-за несовпадения гидродинамических скоростей $\boldsymbol{u}_\alpha$ фаз, входящих в состав системы (см., например, *Нигматулин, 1987*; *Колесниченко, Максимов, 2001*).

Для каждой из двух фаз в каждой пространственно-временной точке $(\boldsymbol{r}, t)$ определим массовую плотность, гидродинамическую скорость, внутреннюю энергию и другие термогидродинамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей химической составляющей смеси. При этом в качестве характеристик фазы будем использовать величины, осредненные, как по совокупному элементарному макрообъему $\delta\mathscr{V} = \sum_\alpha \delta\mathscr{V}_\alpha$, относящемуся к гетерогенной системе в целом, так и по части $\delta\mathscr{V}_\alpha$ элементарного объема, занимаемой отдельной фазой α. В частности, наряду с распределенной (размазанной по совокупному объему $\delta\mathscr{V}$) массовой плотностью $\widetilde{\rho}_\alpha$ фазы α, далее будем использовать истинную (физическую) плотность ρ_α (равную отношению массы частиц фазы α в элементарном макрообъеме $\delta\mathscr{V}$ к части этого объема $\delta\mathscr{V}_\alpha$, которую фаза занимает), определяемую выражением

$$\rho_\alpha = \widetilde{\rho}_\alpha / s_\alpha, \qquad s_\alpha \equiv \delta\mathscr{V}_\alpha / \delta\mathscr{V}, \qquad \sum_\alpha s_\alpha = 1, \tag{7.2.1}$$

где s_α — так называемое, объемное содержание (объемная концентрация или фазовая насыщенность) α-фазы. Именно истинная ρ_α, а не распределенная $\widetilde{\rho}_\alpha$ плотность фазы совместно с другими параметрами состояния, например такими, как температура T_α, внутренняя энергия e_α и энтропия S_α, определяет термодинамические свойства элементарной макрочастицы α-фазы в различных ее состояниях. Кроме того, величины s_α непосредственно влияют и на гидродинамическое движение фаз, поскольку фигурируют в соответствующих уравнениях движения. Одновременно будем предполагать, что между отдельными химическими компонентами k дисковой системы возможны r независимых химических реакций, включая межфазные реакции и случаи, когда химические превращения сводятся просто к перемещению компоненты k из одной фазы в другую.

Рассмотрим сначала случай, когда все сконденсированные частицы допланетного газопылевого диска в каждом элементарном макрообъеме $\delta\mathscr{V}$, независимо от их размеров имеют одну и ту же мгновенную гидродинамическую скорость $\boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{r}, t)$. Массовую плотность $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и среднемассовую гидродинамическую скорость $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ (мгновенную скорость движения центра тяжести элементарного макрообъема газовзвеси с центром в точке $\boldsymbol{r}$) газопылевой смеси в целом определим соотношениями

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha = \rho_g(1 - s) + \rho_d s, \tag{7.2.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \rho^{-1} \sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha = \frac{\rho_g(1-s)}{\rho}\boldsymbol{u}_g + \frac{\rho_d s}{\rho}\boldsymbol{u}_d, \tag{7.2.3}$$

где $\rho_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — соответственно истинная массовая плотность и гидродинамическая скорость фазы α; $s_d(\boldsymbol{r}, t)$ — мгновенное значение объемной концентрации дисперсной фазы, $(s_g + s_d = 1)$; индекс «d» у параметра s_d далее будем опускать, $s_d \equiv s$.

Для моделирования химического состава, особенно на ранних этапах эволюции допланетного облака (см., например, *Willacy и др.*, *1998*; *Дорофеева*, *Макалкин*, *2004*), необходимо в общем случае привлекать уравнения баланса масс для каждой химической компоненты фазы, которые могут быть представлены в форме уравнений сохранения частиц сорта k в фазе α. С учетом сделанных выше допущений эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha n_{\alpha(k)}) + \operatorname{div}(s_\alpha n_{\alpha(k)} \boldsymbol{u}_\alpha) = \sigma_{\alpha(k)} \equiv \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha(k),\rho} \xi_\rho + \delta_{2\alpha} \overset{\circ}{n}_\alpha(k), \tag{7.2.4}$$

$$(\alpha = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho}\right) + \operatorname{div}(s_\alpha n_{\alpha(k)} \boldsymbol{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha(k)}, \qquad \boldsymbol{w}_\alpha \equiv (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}). \tag{7.2.5}$$

Здесь $d(\ldots)/dt \equiv \partial(\ldots)/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\partial(\ldots)/\partial\boldsymbol{r}$ — субстанциональная производная, связанная с движением элементарного макрообъема газопылевой среды в целом; $\partial(\ldots)/\partial\boldsymbol{r} = \sum\limits_l \boldsymbol{i}_l\partial(\ldots)/\partial x_l$ — векторный дифференциальный оператор; $\boldsymbol{i}_l$ ($l = 1, 2, 3$) — суть декартовы единичные векторы, параллельные соответствующим осям координат; величина $(\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{b}$ является дивергенцией $\boldsymbol{b}$; $n_{\alpha(k)}(\boldsymbol{r}, t)$ — число частиц химического вещества k в единице объема, занимаемого фазой α (счетная концентрация); $\boldsymbol{w}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — мгновенная диффузионная скорость фазы α, удовлетворяющая, в силу определения среднемассовой скорости $\boldsymbol{u}$, соотношению

$$\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha = 0, \quad \boldsymbol{w}_\alpha \equiv (\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}), \tag{7.2.6}$$

или

$$\sum_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha = 0, \quad \boldsymbol{J}_\alpha \equiv \rho_\alpha s_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha = \rho_\alpha s_\alpha(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}), \tag{7.2.7}$$

где $\rho_\alpha = \sum\limits_k m_{(k)} n_{\alpha(k)}$; $\boldsymbol{J}_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ — массовый диффузионный поток частиц α-фазы; $\sigma_{\alpha(k)}$ — скорость образования числа частиц компоненты k в единице объема среды за счет химических реакций и фазовых переходов (испарения и конденсации вещества), а также процессов дробления и коагуляции дисперсной составляющей; $\xi_\rho(\boldsymbol{r}, t)$ — скорость ρ-й химической реакции (включая межфазовые реакции и фазовые переходы), $\rho = 1, 2, \ldots, r$; $\nu_{\alpha(k),\rho}$ — стехиометрический коэффициент компоненты k в фазе α по отношению к ρ-й химической реакции, стехиометрическое уравнение которой символически может быть записано в виде (см., например, *Пригожин, Дефей, 1966*)

$$\sum_\alpha \sum_k \nu_{\alpha(k),\rho} m_{(k)} = 0, \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r) \tag{7.2.8}$$

— принцип сохранения общей массы в ρ-й химической реакции; $m_{(k)}$ — молекулярная масса k-й компоненты; $\overset{\circ}{n}_{\alpha(k)}$ — величина, описывающая изменение числовой концентрации химической компоненты k в пылевой фазе, связанное с процессами дробления или слипания сконденсированных частиц в газопылевом облаке. Стехиометрические коэффициенты компонентов, образующихся при протекании реакции (слева направо) считаются положительными, а коэффициенты расходующихся при этом компонентов — отрицательными.

Из (7.2.4), при условии сохранения массы всех химических компонентов в пылевой фазе в процессе трансформации твердых частиц $\left(\sum\limits_k m_{(k)}\overset{\circ}{n}_{\alpha(k)} = 0\right)$, следует дифференциальное уравнение сохранения

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}\right) + \operatorname{div}(\rho_\alpha s_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha,\rho}\xi_\rho, \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{7.2.9}$$

для распределенной массовой плотности

$$\tilde{\rho}_\alpha \equiv s_\alpha \sum_k m_{(k)} n_{\alpha(k)} = \rho_\alpha s_\alpha \tag{7.2.10}$$

α-фазы. Здесь $\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum\limits_k m_{(k)}\nu_{\alpha(k),\rho}$; величина $\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, t)$ характеризует интенсивность перехода массы из фазы α в фазу β (или наоборот, тогда $\sigma_{\alpha\beta} < 0$) за счет химических реакций и процессов испарения или конденсации вещества в допланетном облаке; при этом $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$. Для дальнейших целей целесообразно ввести в рассмотрение массовые фазовые концентрации $C_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$

$$C_\alpha \equiv \frac{\tilde{\rho}_\alpha}{\rho} = \frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}, \quad \sum_\alpha C_\alpha = 1 \tag{7.2.11}$$

и относительную скорость пыли и газа $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{w}_{dg} = (\boldsymbol{u}_d - \boldsymbol{u}_g)$; тогда уравнениям (7.2.9) можно придать более компактный вид

$$\rho \frac{dC_\alpha}{dt} = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad \boldsymbol{J}_{1,2} = \begin{cases} \rho C_1 \boldsymbol{w}_1 = -\rho C_1 C_2 \boldsymbol{w}, \\ \rho C_2 \boldsymbol{w}_2 = \rho C_1 C_2 \boldsymbol{w}. \end{cases} \tag{7.2.12}$$

Закон сохранения массы в целом, получающийся в результате суммирования (7.2.4) по индексам k и α, с учетом (7.2.7) и (7.2.8), принимает обычную форму

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{7.2.13}$$

как и в однофазном континууме. Отметим, что излучение не изменяет уравнение непрерывности (7.2.13), поскольку оно «не обладает» массой.

Далее будем предполагать, что в процессе эволюции газопылевого облака материал твердых включений остается несжимаемым, т. е. истинная (физическая) плотность пыли $\rho_d = \text{const}$. Тогда мгновенное уравнение (7.2.12) для пыли сводится к уравнению

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) = -\operatorname{div}(s\boldsymbol{w}_d) + \rho_d^{-1}\sigma_{dg}, \quad \boldsymbol{w}_d = C_g \boldsymbol{w} = (1-s)\frac{\rho_g}{\rho}\boldsymbol{w}, \tag{7.2.14}$$

позволяющему найти объемное содержание $s(\boldsymbol{r}, t)$ пылевой составляющей в двухфазном потоке при заданной относительной скорости фаз $\boldsymbol{w}$. Таким образом, для расчета параметров ρ и s (а следовательно, и плотности газа ρ_g [см. соотношение (7.2.2)]) можно использовать уравнения (7.2.13) и (7.2.14) вместо двух уравнений (7.2.9).

Интенсивность силового взаимодействия фаз и характеристики излучения в газопылевом облаке сильно зависят от характерного размера твердых включений (например, характерного объема одной частицы пыли $\tilde{U}_d(\boldsymbol{r}, t)$) и полного их числа $N_d \equiv s \sum_k n_{d(k)}$ в единице совокупного объема газовзвеси. В случае если все твердофазные конденсаты являются сферическими или близкими к ним по форме с характерным диаметром Ферета $\tilde{d}(\boldsymbol{r}, t)$, то $\tilde{U}_d = (\pi/6)\tilde{d}^3$. Балансовое уравнение для полного числа дисперсных частиц $N_d(\boldsymbol{r}, t)$ можно получить, используя (7.2.4); в результате будем иметь

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{N_d}{\rho}\right) + \operatorname{div}(N_d \boldsymbol{w}_d) = \sigma_{N_d} \equiv \sum_k \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{d(k),\rho}\xi_\rho \overset{\circ}{N}_d, \tag{7.2.15}$$

где источниковый член $\overset{\circ}{N}_d \equiv \sum \overset{\circ}{n}_{\alpha(k)}$, характеризующий изменение полной числовой плотности разномасштабных твердых частиц за счет процессов коагуляции и дробления, определяется в общем случае кинетическим уравнением

Смолуховского [см. уравнение (7.2.29)]. По известным параметрам N_d и s можно определить важную характеристику коагулирующей смеси в двухфазном потоке — характерный объем $\widetilde{U}_d(\boldsymbol{r}, t)$ (или средний линейный размер $\widetilde{d}_d$) твердых включений:

$$\widetilde{U}_d = s/N_d, \quad \widetilde{d}_d = \sqrt[3]{(6/\pi)(s/N_d)}. \tag{7.2.16}$$

Следует отметить, что если при численном моделировании эволюции газопылевого облака не принимать во внимание процессы дробления и коагуляции твердых частиц ($\overset{\circ}{N}_d$), процессы испарения и конденсации ($\sigma_{dg} = 0$), а также предположить несжимаемость материала включений ($\rho_d = \mathrm{const}$), то будем иметь $\widetilde{U}_d = \mathrm{const}$. При этих допущениях $\widetilde{\rho}_d = s\rho_d = \rho_d \widetilde{U}_d N_d$, и уравнение (7.2.15) (с правой нулевой частью) является просто следствием уравнения (7.2.14) сохранения массы второй фазы, которое в этом случае принимает простой вид

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) + \operatorname{div}(s\boldsymbol{w}_d) = 0, \quad \boldsymbol{w}_d = C_g \boldsymbol{w}. \tag{7.2.14*}$$

7.2.1. Межфазная диффузия. Коэффициент аэродинамического сопротивления пылевых частиц диска

Как уже говорилось выше, обобщенные соотношения Стефана—Максвелла могут служить исходными уравнениями при анализе процессов фазовой диффузии в газопылевом диске. Диффузия в многокомпонентной смеси газов подробно рассмотрена методами кинетической теории в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда (*1961*). Их основной результат состоит в том, что скорость относительной диффузии $(\boldsymbol{u}_{(j)} - \boldsymbol{u}_{(k)})$ двух компонентов газа может быть вызвана факторами, не влияющими непосредственно на эти компоненты, например термодинамическими силами, действующими на молекулы прочих компонентов смеси. Скорости $(\boldsymbol{u}_{(j)} - \boldsymbol{u}_{(k)})$ находятся (в первом приближении метода Чепмена—Энскога решения уравнений Больцмана) из системы уравнений Стефана—Максвелла

$$\sum_j \frac{n_{(j)} n_{(k)}}{n^2 \mathscr{D}_{(jk)}} (\boldsymbol{u}_{(j)} - \boldsymbol{u}_{(k)}) - k_{T(k)} \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{d}_{(k)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p}\left\{ -\rho_{(k)} \boldsymbol{F}_{(k)} + \frac{\partial p_{(k)}}{\partial \boldsymbol{r}} - C_{(k)} \sum_j \left(-\rho_{(j)} \boldsymbol{F}_{(j)} + \frac{\partial p_{(j)}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \right\}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

которым можно придать вид уравнений движения отдельных компонентов смеси (см., например, «Примечание И» в монографии Чепмена и Каулинга (*1960*)).

$$\rho_{(k)} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{\partial p_{(k)}}{\partial \boldsymbol{r}} + \rho_{(k)} \boldsymbol{F}_{(k)} + \sum_j k_{\mathrm{B}} T \frac{n_{(j)} n_{(k)}}{n \mathscr{D}_{(jk)}} (\boldsymbol{u}_{(j)} - \boldsymbol{u}_{(k)}) - k_{\mathrm{B}} k_{T(k)} n \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Здесь $\rho_{(k)} = m_{(k)} n_{(k)}$, $C_{(k)} = \rho_{(k)}/\rho$, $p_{(k)}$ — соответственно массовая плотность, массовая концентрация и парциальное давление частиц сорта k; $p = \sum_k p_{(k)}$ —

полное давление смеси (закон Дальтона), $p_{(k)} = n_{(k)} k_{\mathrm{B}} T$; k_{B} — постоянная Больцмана; $n = \sum_k n_{(k)}$, $\rho = \sum_k \rho_{(k)}$ — соответственно полные числовая и массовая плотности многокомпонентной смеси; $\mathscr{D}_{(jk)}$ — бинарные коэффициенты диффузии; $\boldsymbol{F}_{(k)}$ — внешняя объемная сила (на единицу массы k-й компоненты); $k_{T(k)}$ — термодиффузионное отношение.

В работе (*Колесниченко, 1998*) указанные отношения Стефана—Максвелла для многокомпонентных смесей были выведены методами неравновесной термодинамики, а в работе (*Колесниченко, Максимов, 2001*) они были обобщены и на гетерогенные смеси (причем им также можно придать вид уравнений движения отдельных фаз системы). В рассматриваемом здесь однодавленческом приближении ($p_g = p_d$) эти соотношения для межфазовой диффузии принимают следующий вид

$$\sum_\beta R_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_\beta - \boldsymbol{u}_\alpha) - p k_{T\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{d}_\alpha \equiv -\widetilde{\rho}_\alpha \boldsymbol{K}_\alpha + s_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}} - C_\alpha \sum_\beta \left(-\widetilde{\rho}_\beta \boldsymbol{K}_\beta + s_\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \equiv$$
$$\equiv \rho_\alpha s_\alpha \frac{d_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha}{dt} + s_\alpha \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} - \rho_\alpha s_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\Pi}_\alpha\right) + \frac{1}{2} \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}_\alpha - \boldsymbol{u}_\beta), \quad (\alpha = 1, 2, \ldots), \tag{7.2.17}$$

где $d_\alpha(\ldots)/dt = \partial(\ldots)/\partial t + \boldsymbol{u}_\alpha \cdot \partial(\ldots)/\partial \boldsymbol{r}$ — субстанциональная производная, вдоль траектории центра масс α-фазы, заключенной внутри элементарного макрообъема $\delta\mathscr{V}$ многофазной среды; $\boldsymbol{\Pi}_\alpha$ — парциальный тензор вязких напряжений; $R_{\alpha\beta}$ — коэффициент межфазного трения для фаз α и β (коэффициент $R_{\alpha\beta}$ отражает взаимодействие двух фазовых континуумов и поэтому его часто удобно записать в симметричном виде $R_{\alpha\beta} = \widetilde{\rho}_\alpha \widetilde{\rho}_\beta \theta_{\alpha\beta}$, где параметры $\theta_{\alpha\beta}$ не зависят, по крайней мере грубо, от пропорций смеси), $R_{\alpha\beta = R_{\beta\alpha}}$; $\boldsymbol{F}_\alpha$ — внешняя массовая сила, отнесенная к единице массы вещества фазы α;

$$\widetilde{\rho}_\alpha \boldsymbol{K}_\alpha \equiv -\widetilde{\rho}_\alpha \frac{d_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha}{dt} + \widetilde{\rho}_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\Pi}_\alpha\right) - \frac{1}{2} \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} \boldsymbol{w}_{\alpha\beta} \tag{7.2.18}$$

— обобщенная термодинамическая сила, сопряженная с диффузионным потоком $\boldsymbol{J}_\alpha$; величины $\boldsymbol{d}_\alpha$ также имеют смысл обобщенных термодинамических сил, вызывающих относительное движение фаз $\left(\sum_\alpha \boldsymbol{d}_\alpha = 0\right)$; $k_{T\alpha}$ — термофоретическое отношение, причем $\sum_\alpha k_{T\alpha} = 0$. Более тонкий анализ межфазного взаимодействия показывает, что эффекты больших градиентов макроскопических параметров, вращения твердых частиц, не стационарности установления профиля скоростей около частиц, деформации дисперсных частиц и некоторые другие, могут приводить к появлению дополнительных сил в левой части уравнений (7.2.17). Таковыми кроме стоксовой силы трения могут быть сила Сэфмена, связанная с неоднородностью профиля скорости несущего газа, «наследственная» сила Бассе (учитывающая предысторию движения на поведение дисперсных частиц), сила Магнуса или Жуковского (сила дополнительного воздействия на вращающиеся дисперсные частицы из-за градиентов в поле средних скоростей несущей фазы) и т. д. Для определения величины термофоретической силы в литературе предложен целый ряд теоретических формул (см., например, *Soo и др.*, *1960*; *Медников*, *1981*). Следует, однако, отметить, что в случае дисперсных частиц, размер которых в диске, как правило, значительно меньше характерного размера неоднородностей температуры, силу, связанную с термофорезом, можно не учитывать. Последнее слагаемое в правой части уравнения (7.2.17), равное $\frac{1}{2}\sum_{\beta}\boldsymbol{w}_{\alpha\beta}\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{\alpha,\rho}\xi_{\rho}$, описывает изменение импульса фазы α при фазовых переходах (напомним, что $\boldsymbol{w}_{\alpha\beta}=\boldsymbol{u}_{\alpha}-\boldsymbol{u}_{\beta}$). В рассматриваемом нами случае двухфазной газопылевой дисковой системы этим слагаемым учитывается утрата импульса частицами пылевой фазы за счет перехода массы части их в газовую фазу при испарении или приобретение дополнительного импульса дисперсной фазой за счет возникновения (из газовой составляющей) новых твердых частиц при конденсации. Тем не менее далее этим слагаемым мы также будем в большинстве случаев пренебрегать, поскольку практически оно всегда много меньше стоксовой силы трения $\boldsymbol{F}_{\mathrm{fric},\alpha}\equiv\sum_{\beta}R_{\alpha\beta}\boldsymbol{w}_{\alpha\beta}$, возникающей из-за эффектов вязкости фаз (см., например, *Нигматулин*, *1987*), и точно равно нулю при отсутствии фазовых переходов. Важно лишний раз подчеркнуть, что, в отличие от классических безынерционных соотношений Стефана—Максвелла для относительных скоростей компонентов $\boldsymbol{w}_{(jk)}=\boldsymbol{u}_{(j)}-\boldsymbol{u}_{(k)}$, законы межфазной диффузии, описываемые обобщенными соотношениями (17), учитывают инерцию относительного движения фаз.

Для двухфазной газопылевой дисковой среды соотношения (7.2.17) принимают вид уравнений движения газа и пыли

$$\begin{cases} R_{gd}\boldsymbol{w}\equiv(1-s)s\rho_d\rho_g\theta_{dg}\boldsymbol{w}=\rho_g(1-s)\dfrac{d_g\boldsymbol{u}_g}{dt}+(1-s)\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}-\rho_g(1-s)\boldsymbol{g}-\left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\Pi}_g\right), \\ -R_{dg}\boldsymbol{w}=\rho_d s\dfrac{d_d\boldsymbol{u}_d}{dt}+s\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}-\rho_d s\boldsymbol{g}, \end{cases} \tag{7.2.17*}$$

где $\boldsymbol{F}_d=\boldsymbol{F}_g\equiv\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)$ — объемная сила на единицу массы, связанная в общем случае как с гравитационным притяжением звезды, так и с гравитационным притяжением самого газопылевого облака. Заметим, что общий вид уравнений движения и неразрывности у нас и у различных авторов, изучающих газовзвеси применительно к аккреционным дискам, одинаков. Отличие связано лишь с наличием члена $-s(\partial p/\partial \boldsymbol{r})$ в уравнении движения (7.2.17*) для газа и отсутствием члена $s(\partial p/\partial \boldsymbol{r})$ в уравнении движения (7.2.17*) для пыли. Их появление в континуальной гетерогенной механике связано, в конечном счете, с учетом эффекта присоединенных масс (из-за ускоренного движения твердых частиц относительно несущего газа, когда в последнем возникают возмущения порядка размера частиц) и силы Архимеда, которые при больших значениях ρ_d/ρ_g (характерных для газовых потоков с твердыми частицами) часто намного меньше других слагаемых уравнений движения (см. *Нигматулин, 1978*). Вместе с тем, поскольку эти силы пропорциональны не только плотности газа, но и локальному ускорению среды, либо разности локальных ускорений газовой среды и твердых частицы, вполне возможны ситуации, когда указанные дополнительные члены уравнений (7.2.17*) будут соизмеримы с аэродинамической силой Стокса.

Искомое диффузионное соотношение для вектора относительной скорости пыли и газа $\boldsymbol{w} \equiv (\boldsymbol{u}_d - \boldsymbol{u}_g)$ можно получить из тех членов уравнений (7.2.18), которые описывают действие трения, если каждый из них разделить на соответствующую величину $s_\alpha \rho_\alpha$, вычесть один из другого и выделить слагаемое с $\boldsymbol{w}$. Записывая истинные скорости фаз в виде $\boldsymbol{u}_d = (C_g \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{u}_g = (-C_d \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u})$ и предполагая, что $\rho_d \gg \rho_g$, в результате получим определяющее соотношение для (аналог закона Дарси для фильтрации)

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}_d \tilde{\rho}_g} R_{dg} \boldsymbol{w} \equiv \rho \theta_{gd} \boldsymbol{w} = \frac{d_g \boldsymbol{u}_g}{dt} - \frac{d_d \boldsymbol{u}_d}{dt} + \frac{\rho_d - \rho_g}{\rho_g \rho_d} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\tilde{\rho}_g} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{P}_g \right) \cong -\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{7.2.19}$$

которое далее будет рассматриваться нами при моделировании фазовой диффузии в диске, как основное. Отметим, что гравитационные силы при таком вычитании взаимно уничтожились, однако их воздействие на процесс движения газопылевой среды проявляется посредством градиента давления. При написании (7.2.19) нами не делалось различия между субстанциональными производными для отдельных фаз и системы в целом, т. е. предполагалось, что $d_d/dt \cong d_g/dt \cong d/dt$, что справедливо в механике смесей лишь в так называемом диффузионном приближении. В общем случае, т. е. при учете ускорения диффузионных потоков относительно центра тяжести, надлежит использовать точное преобразование

$$\begin{aligned}\frac{d_d \boldsymbol{u}_d}{dt} - \frac{d_g \boldsymbol{u}_g}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + \left(\boldsymbol{w}_d \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}_d - \left(\boldsymbol{w}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}_g = \\ &= \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + \left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} + C_g\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_g\boldsymbol{w} - C_d\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_d\boldsymbol{w} = \\ &= \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + \left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} + \Im(\boldsymbol{w}^2) \approx \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + \left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u},\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

где $\Im(\boldsymbol{w}^2) \equiv C_g\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_g\boldsymbol{w} - C_d\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_d\boldsymbol{w}$ — квадратичная по $\boldsymbol{w}$ функция, которая часто может быть опущена (см. *Youdin, Goodman, 2004*), в частности, для пассивной мелкодисперсной примеси, поскольку для них величина $|\boldsymbol{w}|$ мала. Тогда определяющее диффузионное соотношение для вектора относительной скорости фаз принимает более сложный вид:

$$\rho \theta_{gd} \boldsymbol{w} \cong -\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} - \left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} - C_g\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_g\boldsymbol{w} + C_d\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)C_d\boldsymbol{w} + \frac{1}{\rho_g}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{7.2.19*}$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления

Коэффициент трения R_{dg} между газовым и пылевым континуумами определяется в литературе различными формулами в зависимости от характерного диаметра $\widetilde{d}_d$ частиц дисперсной фазы (см., например, *Стернин и др.*, *1980*; *Шрайбер и др.*, *1987*). Если характерный размер сферических твердых частиц $\widetilde{d}_d \ll \lambda_g$, где λ_g — длина свободного пробега молекул в газовой фазе, то величина R_{dg} задается формулой Эпстейна (*Epstein*, *1924*). Для крупнодисперсных сферических конденсатов с диаметрами, превышающими длину свободного пробега молекул газа, коэффициент сопротивления определяется законом Стокса (*Stokes*, *1851*). Таким образом, для коэффициентов сопротивления R_{dg} (или θ_{dg}) гладкой шарообразной частицы имеем (см., например, *Weidenschilling*, *1977*; *Garaud и др.*, *2005*)

$$R_{dg} = \begin{cases} \dfrac{2\bar{\rho}_d\bar{\rho}_g c_{sg}}{\widetilde{d}_d \rho_d}, & \text{когда } \widetilde{d}_d \ll \lambda_g \quad \text{(режим Эпстейна)}, \\ \dfrac{d\bar{\rho}_d\bar{\rho}_g}{\widetilde{d}_d \rho_d} C_D(\mathrm{Re}_d)|\boldsymbol{w}|, & \text{когда } \widetilde{d}_d \gg \lambda_g \quad \text{(режим Стокса)}, \end{cases} \tag{7.2.21}$$

или

$$\theta_{dg} = \begin{cases} \dfrac{2c_{sg}}{\widetilde{d}_d \rho_d}, & \text{когда } \widetilde{d}_d \ll \lambda_g, \\ \dfrac{2}{\widetilde{d}_d \rho_d} C_D(\mathrm{Re}_d)|\boldsymbol{w}|, & \text{когда } \widetilde{d}_d \gg \lambda_g. \end{cases} \tag{7.2.21*}$$

Здесь c_{sg} — скорость звука в газе [см. ниже формулу (7.2.57)]; $\mathrm{Re}_d = \widetilde{d}_d|\boldsymbol{w}|/\nu_g$ — число Рейнольдса для пыли; ν_g — коэффициент молекулярной кинематической вязкости газовой составляющей смеси, $\nu_g = \lambda_g c_{sg}/2$; $C_D(\mathrm{Re}_d)$ — коэффициент аэродинамического сопротивления (так называемая стандартная кривая сопротивления), который имеет достаточно сложный характер. В литературе известно значительное количество формул, аппроксимирующих стандартную кривую (см., например, *Шлихтинг*, *1974*; *Стернин и др.*, *1980*; *Медников*, *1981*). В частности, в астрофизике широкое распространение получило выражение (Whipple, 1972)

$$C_d(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 9\mathrm{Re}_d^{-1}, & \mathrm{Re}_d \leqslant 1, \\ 9\mathrm{Re}_d^{-0,6}, & 1 \leqslant \mathrm{Re}_d \leqslant 800, \\ 0{,}165, & \mathrm{Re}_d \geqslant 800. \end{cases} \tag{7.2.22}$$

На наш взгляд, не менее удобной является трехчленная формула

$$C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}(1 + 0{,}179\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0{,}013\mathrm{Re}_d), \quad (0{,}1 < \mathrm{Re}_d < 10^3), \tag{7.2.22*}$$

достоинством которой является возможность применения в широком диапазоне значений Re_d.

Следует отметить, что в реальных многофазных потоках условия обтекания частиц, как правило, существенно отличаются от идеализированных условий, в которых применима стандартная кривая. В газопылевом облаке космические частицы, имеют, в общем случае, неправильную форму и шероховатую поверхность, движутся неравномерно в турбулизованном потоке газа, который является разреженным и сжимаемым. Каждый из названных факторов, разумеется, изменяет (порой существенно) условия обтекания частицы в диске и величину силы аэродинамического сопротивления. Рассмотрим кратко их влияние, не учитываемое, как правило, в астрофизической литературе.

1) Степень отличия формы частиц от шарообразной в гетерогенной механике принято охарактеризовывать коэффициентом формы β ($\beta \geqslant 1$), который представляет собой отношение поверхности реальной частицы к поверхности шара того же объема. В работе (*Горбис*, *1970*) предложены формулы для вычисления аэродинамических коэффициентов сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d, \beta)$, которые в случае существенно неизометрической формы пылевых частиц имеют более высокие значения по сравнению со стандартной кривой.

2) Авторами работы (*Стернин и др.*, *1980*) установлен факт увеличения (по сравнению со стандартной кривой) коэффициента сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d)$ частиц с заметной шероховатостью, если она соизмерима с толщиной пограничного слоя.

3) Турбулизация течения также оказывает существенное влияние на величину $C_d(\mathrm{Re}_d)$. Как отмечается в работе (*Стернин*, *Шрайбер*, *1994*), по данным различных авторов, например, в области $20 < \mathrm{Re}_d < 100$ значения C_D колеблются в пределах $(0{,}01 - 3)C_d^*$ (здесь и ниже C_d^* соответствует стандартной кривой). Важно отметить, что влияние турбулентности уменьшается с уменьшением числа Рейнольдса Re_d. Для сравнительно небольших Re_d можно использовать формулы Лопеса и Даклера (см., например, *Стернин и др.*, *1980*)

$$C_D(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 60{,}75\varepsilon^{1/3}\mathrm{Re}_d^{-1}, & \mathrm{Re}_d < 50; \quad 0{,}05 < \varepsilon < 0{,}5; \\ 0{,}0498(1 + 150/\mathrm{Re}_d)^{1{,}565} + 1{,}5\varepsilon, & 50 < \mathrm{Re}_d < \mathrm{Re}_d^*; \quad 0{,}07 < \varepsilon < 0{,}5, \end{cases}$$

где ε — относительная степень турбулентности, т. е. отношение среднеквадратичной пульсационной скорости к осредненной скорости скольжения; $\mathrm{Re}_d^* = \min\{0{,}9\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}, 700\}$; $\mathrm{Re}_{\mathrm{crit}}$ — критическое значение числа Рейнольдса: $\ln \mathrm{Re}_{\mathrm{crit}} = 5{,}477 - 15{,}8\varepsilon$ ($\varepsilon \leqslant 0{,}15$); $\ln \mathrm{Re}_{\mathrm{crit}} = 3{,}371 - 1{,}75\varepsilon$ ($\varepsilon > 0{,}15$).

4) Значительное влияние на аэродинамическое сопротивление частиц оказывают сжимаемость и разреженность набегающего потока. Роль этих факторов определяется, прежде всего, значениями чисел Маха $\mathrm{Ma} = |\boldsymbol{u}_g|/c_{sg}$ и Кнудсена Kn. В высокоскоростном течении газовзвеси в диске значительную роль играет сжимаемость несущего газа. Из многочисленных обобщенных зависимостей, имеющихся в литературе, приведем формулу Карлсона и Хоглунда (см., например, *Стернин и др.*, *1980*)

$$C_d(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}(1 + 0{,}179\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0{,}013\mathrm{Re}_d) \times \\ \times \frac{[1 + \exp(-0{,}427\mathrm{Ma}^{-4{,}63} - 3\mathrm{Re}_d^{-0{,}88})]}{1 + \mathrm{Re}_d^{-1}\mathrm{Ma}[3{,}82 + 1{,}38\exp(-1{,}25\mathrm{Ma}^{-1}\mathrm{Re}_d)]}, \tag{7.2.22**}$$

где $\mathrm{Re}_d < 100$, $\mathrm{Ma} < 2$. Здесь два первых сомножителя в числителе соответствуют стандартной кривой, третий учитывает влияние сжимаемости, а знаменатель — разреженности.

В работе (*Hunter и др., 1981*) для области $\mathrm{Re}_d < 10^3$ приводится зависимость

$$C_d(\mathrm{Re}_d) = (C_D^* - 2)\exp\left[-3{,}07\gamma^{1/2}\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Re}_d}\cdot\frac{1+\mathrm{Re}_d(12/28+0{,}584\mathrm{Re}_d)}{1+11{,}28\mathrm{Re}_d}\right] + \\ + \frac{1}{\gamma^{1/2}\mathrm{Ma}}\left[\frac{5{,}6}{\mathrm{Ma}+1} + 1{,}7\left(\frac{T_d}{T}\right)^{1/2}\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}_d}{2\mathrm{Ma}}\right) + 2,$$

где T_d — температура твердых частиц.

5) При пониженном давлении газа в диске (например, Вассон (*Wasson, 1985*) получил следующие оценки давления в центральной плоскости околосолнечного диска: $2\cdot10^{-5}$—10^{-1} г/см^3 на $r=1$ а. е. и $5\cdot10^{-7}$—$2\cdot10^{-6}$ г/см^3 на $r=3$ а. е.) может возникнуть скольжения газовой составляющей среды по поверхности твердой частицы, что также приводит к уменьшению коэффициента аэродинамического сопротивления. Разреженность среды характеризуется числом Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda_g/\widetilde{d}$. Обычно различают четыре области значений Kn: свободномолекулярное обтекание ($\mathrm{Kn} > 10$), переходный режим ($10 > \mathrm{Kn} > 0{,}25$), течение со скольжением ($0{,}25 > \mathrm{Kn} > 0{,}01$), континуальное обтекание (эффект разреженности отсутствует, $\mathrm{Kn} < 0{,}01$). Для первых трех областей коэффициент аэродинамического сопротивления можно представить в виде $C_d = \varphi C_d^*$, где коэффициент определяется известной формулой Милликена (см., например, *Фукс, 1955*)

$$\varphi = \{1 + \mathrm{Kn}[1{,}155 + 0{,}471\exp(-0{,}596/\mathrm{Kn})]\}^{-1}.$$

С увеличением разреженности влияние сжимаемости на коэффициент сопротивления вырождается. Все перечисленные усовершенствования формулы (7.2.22) легко могут быть учтены при численном моделировании строения допланетного газопылевого диска, например, на стадии образования субдиска.

Возвращаясь к формуле (7.2.21*) для коэффициента $\theta_{dg}(\mathrm{Re}_d)$ заметим, что выражение (7.2.21*) удобны только для монодисперсной пыли с заданным характерным линейным размером включений $\widetilde{d}_d$, так как в этом случае θ_{dg} не зависит от объемной концентрации дисперсной фазы и полной числовой плотности твердых частиц N_d. Однако, при учете процессов коагуляции, происходящих в газопылевом допланетном облаке, т. е. с учетом многофракционности пылевой составляющей, целесообразно переписать (7.2.21*) в виде, явно зависящем от параметров s и N_d, которые определяются уравнением Смолуховского. При использовании формулы (7.2.16), выражение (7.2.21*) для $\theta_{dg}(s, N_d, \mathrm{Re}_d)$ преобразуется к виду

$$\theta_{dg} = \theta_{dg}(s, N_d, \mathrm{Re}_d) = \begin{cases} (4/3\pi)^{1/3}\rho_d^{-1}s^{-1/3}c_{sg}N_d^{1/3}, & \text{когда } \widetilde{d}_d \ll \lambda_g, \\ (4/3\pi)^{1/3}\rho_d^{-1}s^{-1/3}N_d^{1/3}C_D(\mathrm{Re}_d)|\boldsymbol{w}|, & \text{когда } \widetilde{d}_d \gg \lambda_g. \end{cases} \tag{7.2.23}$$

7.2.2. Учет многофракционности пыли. Кинетическое уравнение коагуляции

Рассмотрим теперь более детально методику расчета величины $N_d(\boldsymbol{r}, t)$ в случае учета многофракционности пылевой составляющей системы. Реальное допланетное облако полидисперсно, т. е. в элементарном макрообъеме $\delta\mathscr{V}$

присутствуют сконденсированные частицы разных размеров $d_{d,k}$. Этот факт можно учесть, если разбить пылевую составляющую на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется, вообще говоря, своими термогидродинамическими параметрами, т. е. вместо одной дисперсной фазы, необходимо рассматривать m фаз (где m — число фракций), каждая из которых имеет свои макрохарактеристики

$$d_{d,k},\ \ n_{d,k},\ \ s_{d,k}=n_{d,k}(\pi/6)d_{d,k}^3,\ \ \rho_{d,k},\ \ \boldsymbol{u}_{d,k},\ \ \ldots\ \ (k=1,\ldots,m), \tag{7.2.24}$$

где $\boldsymbol{u}_{d,k}(\boldsymbol{r},t)$ — гидродинамическая скорость твердых частиц k-й фракции.

Будем далее считать, что вещество разных фракций одно и то же ($\rho_{d,1}=\rho_{d,2}=\ldots=\rho_{d,m}=\rho_d=\mathrm{const}$) и что твердофазные конденсаты фракции «1» составляют группу частиц наименьшего размера (первичные частицы), фракции «2» — группу двойных частиц и т. д. до максимального размера. Для упрощения анализа процесса коагуляции, происходящего в $(m+1)$-фазном полидисперсном потоке, предположим также, что все твердые частицы являются сферическими или близкими к ним по форме с диаметрами Ферета $d_{d,k}$. Так как размер одинаковых по химическому составу твердых частиц после слипания возрастает пропорционально кубическому корню из количества первичных конденсатов ее составляющих ($d_{d,k}=d_{d,1}\sqrt[3]{k}$), то объемная концентрация дисперсных частиц k-й фракции определяется соотношением

$$s_{d,k}=n_{d,k}(\pi/6)d_{d,k}^3=U_1 k n_{d,k}, \tag{7.2.25}$$

где $n_{d,k}(\boldsymbol{r},t)$ — числовая плотность частиц k-й фракции (их число в единице совокупного объема газовзвеси); $U_1=(\pi/6)d^3$, $d\equiv d_{d,1}$ — соответственно объем и диаметр одной частицы наименьшего размера. Тогда объемное содержание $s(\boldsymbol{r},t)$, распределенная массовая плотность $\widetilde{\rho}_d(\boldsymbol{r},t)$ и гидродинамическая скорость $\boldsymbol{u}_d(\boldsymbol{r},t)$ всего пылевого континуума выражаются в виде

$$s\equiv\sum_{k=1}^{m}s_{d,k}=U_1\sum_{k=1}^{m}kn_{d,k},\qquad \widetilde{\rho}_d=\rho_d\sum_{k=1}^{m}s_{d,k},\qquad s\boldsymbol{u}_d=\sum_{k=1}^{m}s_{d,k}\boldsymbol{u}_{d,k}. \tag{7.2.26}$$

В дисперсной смеси, в которой макроскопические скорости фракций отличаются друг от друга, т. е. фракции j и k движутся друг относительно друга со скоростью $\boldsymbol{u}_{d,j}-\boldsymbol{u}_{d,k}$ ($j,k=1,\ldots,m$), будут происходить столкновения между частицами разных фракций, что приведет к обмену массой, импульсом и энергией между фракциями. Учет этого обстоятельства, важного на последней стадии образования субдиска (когда возможно появление в потоке фракции «отраженных» от субдиска частиц, имеющих отличную от «падающих» частиц среднюю или макроскопическую скорость) и на этапе образования планетезималей (после развала субдиска), сильно усложнит задачу моделирования эволюции допланетного газопылевого облака (см. *Колесниченко, 2001*). В данной работе мы, однако, будем предполагать, что частицы вещества («псевдомолекулы»), принадлежащие к различным пылевым континуумам (фракциям), двигаются с одной и той же гидродинамической скоростью, $\boldsymbol{u}_{d,k}\equiv\boldsymbol{u}_d$ ($k=1,\ldots,m$).

Выше уже упоминалось, что в процессе аккумуляции крупных твердых частиц в газопылевом облаке основными механизмами формирования их размеров являются процессы дробления и коагуляции. Механизм дробления сталкивающихся твердых тел основательно изучен (см., например, *Стернин, Шрайбер, 1994*) и при необходимости может быть учтен; поэтому далее, для того чтобы не перегружать деталями задачу моделирования эволюции диска, распад частиц рассматриваться не будет. В этом случае изменение числовой плотности $n_{d,k}$ фракции k может произойти только в результате уменьшения числа частиц этой фракции при соединении их с другими пылевыми частицами, а также в результате увеличения количества частиц этой фракции в результате слипания более мелких конденсатов. Тогда, система кинетических уравнений, описывающая процесс коагуляции, может быть записана в виде (*Смолуховский, 1936*)

$$\overset{\circ}{n}_{d,k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - \sum_{j=1}^{m} K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (7.2.27)$$

где $\overset{\circ}{n}_{d,k}(\boldsymbol{r}, t)$ — полная скорость изменения концентрации $n_{d,k}(\boldsymbol{x}, t)$ пылевых частиц k-й фракции за счет процессов коагуляции; $K_{kj}(d_k, d_j)$ — коэффициент (ядро) коагуляции для частиц k-го и j-го размеров, характеризующий эффективность коагуляционного взаимодействия, определяется как среднее число столкновений частиц размера d_k с частицами размера d_j в единице объема в единицу времени при единичной концентрации того и другого сорта. Поскольку подобное взаимодействие двух разновеликих частиц в потоке усложнено влиянием окружающей среды, характером взаимодействия в ламинарном или турбулентном потоке, а также силовыми полями (гравитацией, электромагнитным полем, молекулярным взаимодействием), то определение ядра коагуляции представляет самостоятельную сложную задачу (см., например, *Волощук, 1984*; *Мазин, 1971*). Коагуляция частиц в газопылевом потоке может быть вызвана одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц. Это, прежде всего, гравитационная коагуляция, электрическая коагуляция, броуновская коагуляция, турбулентная коагуляция и различные их сочетания, типа турбулентно-броуновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, броуновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т. п. В работе (*Колесниченко, 2001*) проанализированы различные механизмы коагуляции применительно к турбулизованному газопылевому облаку и приведены соответствующие выражения для коэффициентов K_{kj}. С использованием (7.2.27), система мгновенных уравнения сохранения числа частиц k-й фракции пылевой фазы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{d,k} + \operatorname{div}(n_{d,k}\boldsymbol{u}_d) = \overset{\circ}{n}_{d,k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - n_{d,k}\sum_{j=1}^{m} K_{kj} n_{d,j}, \qquad (7.2.28)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Из (7.2.28) следует балансовое уравнение для полного числа $N'_d = \sum_k n_{d,k}$ дисперсных частиц в единице совокупного объема газовзвеси, определяемого только процессами коагуляции (см. (7.2.15))

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{N_d'}{\rho}\right) + \operatorname{div}(N_d' \mathbf{w}_d) = \sum_k \overset{\circ}{n}_{d,k} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1} \sum_{j=1} K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}, \tag{7.2.29}$$

причем правая часть (7.2.29) равна половине второго члена в правой части уравнения (7.2.28), поскольку увеличения общего числа пылевых частиц в единице объема во время коагуляции не происходит. В пространственно-однородном случае, когда все константы коагуляции приблизительно одинаковы $K_{kj} = K$, уравнение (7.2.29) $\partial N_d' \partial t = -(K/2) N_d'^2$ (с начальным условием $N_d'(0) = N_{d0}'$) имеет простое решение $N_d'(t) = N_{d0}'/(1 + qt)$, где $q = KN_{d0}'/2$, которое позволяет определить (по наклону прямой) константу коагуляции K экспериментально.

Заметим, что суммирование левых и правых частей уравнений системы (7.2.28) по k, предварительно умноженных на массу отдельной пылевой частицы k-й фракции $m_{d,k} = \rho_d U_1 k$, приводит, с учетом закона сохранения полной массы пылевых частиц в процессе коагуляции $\sum\limits_k m_{d,k} \overset{\circ}{n}_{d,k} = 0$, к уравнению (7.2.14*), позволяющему рассчитать полную объемную концентрацию пыли в двухфазном полидисперсном потоке.

Важно также иметь в виду, что количество нелинейных дифференциальных уравнений (7.2.28), требуемых для описания пространственно-временного распределения всей совокупности размеров пылевых частиц в диске, в общем случае неограниченно. Вместе с тем, при численном моделировании процессов коагуляции на основе системы (7.2.28) приходится использовать конечное (m) число уравнений. При этом, разумеется, возможна «потеря материала», поскольку некоторое количество частиц может коагулировать до размеров, превышающих наибольший из учитываемых при таком подходе размеров $d_{d,m}$. В связи с этим, для наших целей более предпочтительной является другая, интегральная форма записи системы уравнений коагуляции (7.2.28).

Для получения этой формы предположим, что число частиц с объемом от U до $U + dU$, находящихся в момент времени , в элементарном объеме в окрестности точки $\mathbf{r}$, равно $f(U, \mathbf{r}, t)dU$. Функция $f(U, \mathbf{r}, t)$, характеризующая спектр размеров частиц, по определению удовлетворяет следующему нормировочному соотношению

$$N_d(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty f(U, \mathbf{r}, t) dU. \tag{7.2.30}$$

Очевидно, что формулой

$$s(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty U f(\mathbf{r}, t, U) dU \tag{7.2.31}$$

определяется суммарная объемная концентрация пылевых частиц. Поскольку объем частиц k-го размера равен kU_1, то числовая плотность $n_{d,k}$ частиц k может быть выражена через $f(\mathbf{r}, t, U)$ следующим образом :

$$n_{d,k} = f(kU_1, \mathbf{r}, t) U_1. \tag{7.2.32}$$

Если воспользоваться этим соотношением, то после операции $U_1 \to dU$ из (7.2.28) можно получить следующее кинетическое уравнение коагуляции

$$\frac{\partial f(U, \boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}[f(U, \boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{u}_d] \equiv \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{f(U, \boldsymbol{r}, t)}{\rho}\right) + \operatorname{div}[f(U, \boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{w}_d] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^U f(W, \boldsymbol{r}, t) f(U-W, \boldsymbol{r}, t) K(W, U-W)\, dW -$$
$$- f(U, \boldsymbol{r}, t)\int_0^\infty f(W, \boldsymbol{r}, t) K(W, U)\, dW, \quad (7.2.33)$$

являющееся обобщением на случай пространственно-неоднородных движений газовзвеси известного уравнения Мюллера для описания коагулирующей дисперсной среды (см., например, *Волощук, 1984*). Здесь $K(W, U)$ — симметричное по аргументам ядро коагуляции, определяющее поведение диспергированной смеси во времени. Для решения этого уравнения необходимо потребовать выполнения соглашений $f(U, \boldsymbol{r}, t) \to 0$ при $U \to 0$ и $U \to \infty$, а также задать начальное условие $f(U, \boldsymbol{r}, 0) = f_0(U, \boldsymbol{r})$ и граничные условия.

Кинетическое уравнение (7.2.33) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого в общем случае можно получить только численными методами, поскольку члены, описывающие конвекцию пылевых частиц, к сожалению, чрезвычайно усложняют стандартное уравнение коагуляции (см., например, *Lissauer, Stewart, 1993*). В литературе известен ряд точных аналитических решений нестационарного пространственно-однородного аналога уравнения (7.2.33) для некоторых простых по структуре ядер коагуляции (линейных по каждому из аргументов в отдельности), основанных на применении интегрального преобразования Лапласа (см., например, *Сафронов, 1969*; *Волощук, 1984*). В связи с этим, следует отметить следующее. Наиболее теоретически продвинутыми к настоящему времени являются исследования процессов коагуляции для ядер $K(W, U) = \Lambda_0$, не зависящих от объемов коагулирующих частиц. Решение уравнения коагуляции с ядром $K(W, U) = \Lambda_1 WU$ вряд ли можно считать физически реализуемым, поскольку оно не обладает свойствами непрерывности во времени (начиная с некоторого времени, число частиц в системе становится отрицательным (*Волощук, 1984*)). Аналитическое решение кинетического уравнения с ядром, пропорциональным сумме объемов коагулирующих частиц $K(W, U) = \Lambda_2(W + U)$, было получено Сафроновым (*1969*) в связи с исследованиями эволюции допланетного газопылевого облака. Однако до сих пор не найдено ни одной дисперсной системы, для которой микрофизика коагуляционного процесса в точности приводила бы к ядрам подобного типа.

Вместе с тем при гидродинамическом моделировании газопылевого диска часто не требуется полного знания функции распределения частиц по размерам, а достаточно лишь информации о поведении во времени и в пространстве ее нескольких первых моментов типа $N_d(\boldsymbol{r}, t)$, $s(\boldsymbol{r}, t)$ и т. п. В этом случае можно воспользоваться одним из возможных приближенных методов решения кинетического уравнения коагуляции, в частности, методом моментов. В п. 7.4.4 будут проиллюстрированы возможности этого метода на примере решения кинетического уравнения коагуляции (7.2.33) для случая, когда распределение частиц по размерам зависит от одной пространственной координаты z, что соответствует установившемуся режиму движения пыли, при осаждении твердых частиц под действием силы тяжести в субдиск.

7.2.3. Уравнение сохранения количества движения газопылевого вещества и излучения

При моделировании допланетного облака приходится решать уравнения радиационной гидродинамики для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные термогидродинамические и радиационные параметры газопылевой дисковой среды. При линейном размере совокупного элементарного объема $\delta\mathscr{V}$, значительно большего длины пробега излучения λ_{rad}, пренебрегать энергией и давлением излучения нельзя. Довольно очевидно, что в случае локального равновесия излучения с веществом, когда плотность энергии излучения $E_{\text{rad}} = aT^4/\rho$ (на единицу массы), а давление излучения

$$p_{\text{rad}} = \frac{\rho E_{\text{rad}}}{3} = \frac{1}{3} a T^4, \tag{7.2.34}$$

в уравнениях гетерогенной механики следует везде к внутренней энергии $E(\boldsymbol{r}, t)$ и тепловому давлению $p(\boldsymbol{r}, t)$ вещества добавлять энергию и давление излучения, а также вводить в рассмотрение процесс лучистой теплопроводности. Здесь $a = 4\sigma/c$, σ, c — соответственно постоянная плотности излучения, постоянная Стефана—Больцмана и скорость света.

Мгновенное уравнение сохранения полного количества движения газопылевого вещества можно получить, например, суммируя уравнения движения отдельных фаз (7.2.17*). В результате дифференциальное уравнение сохранения импульса дисковой среды в целом (с учетом поля излучения), зависящее, в отличие от уравнения неразрывности (7.2.13), от относительного движения фаз, может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \right) = -\frac{\partial p_{\text{sum}}}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}} \right) + \rho \boldsymbol{g}, \tag{7.2.35}$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{ab}) \right) \equiv \sum\limits_k \sum\limits_l \boldsymbol{i}_l \frac{\partial (a_k b_l)}{\partial x_k}$ — дивергенция диадика $\boldsymbol{ab} = \sum\limits_k \sum\limits_l \boldsymbol{i}_l \boldsymbol{i}_k (a_k b_l)$ (см. приложение); $p_{\text{sum}}(\boldsymbol{r}, t)$ — полное давление, равное сумме теплового давления газопылевой смеси и давления излучения, $p_{\text{sum}} = p + p_{\text{rad}}$;

$$\boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}} \equiv \boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} + \boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}} = \boldsymbol{\Pi}_g + \boldsymbol{\Pi}_{\text{rad}} - (1-s)\rho_g \boldsymbol{w}_g \boldsymbol{w}_g - s\rho_d \boldsymbol{w}_d \boldsymbol{w}_d; \tag{7.2.36}$$

$\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}}(\boldsymbol{r}, t)$ — суммарный тензор вязких напряжений, равный сумме тензора вязких напряжений для гетерогенной смеси $\mathbf{\Pi} = \sum_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha \cong \mathbf{\Pi}_g$ (т. к. по предположению $\mathbf{\Pi}_d \cong 0$) и тензора лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{\rm rad}$; $\mathbf{\Pi}_\alpha$ — тензор вязких напряжений фазы α, зависящий от тензора скоростей деформаций, определяемого полем скоростей соответствующей фазы;

$$\mathbf{\Pi}_{\rm rel} \equiv -\sum_\alpha \tilde{\rho}_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha = -(1-s)\rho_g \boldsymbol{w}_g \boldsymbol{w}_g - s\rho_d \boldsymbol{w}_d \boldsymbol{w}_d \tag{7.2.37}$$

— тензор «относительных» напряжений, возникающий из-за динамических эффектов относительного движения твердых частиц и газа (заметим, что в гетерогенных средах осложняются законы, описывающие относительное движение фаз, ибо это движение определяется не диффузионным механизмом (столкновение молекул при их хаотическом движении), а процессами взаимодействия фаз как макроскопических систем (см., например, *Колесниченко, Максимов, 2001*); эти процессы описываются с помощью сил и более последовательного учета инерции фаз; наличие тензора относительных напряжений в суммарном уравнении движения смеси приводит к кардинальному отличию гетерогенной механики от механики многокомпонентной, для которой возможно пренебрежение членами, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей $\boldsymbol{w}_\alpha$ (так называемое диффузионное приближение в механике смесей), $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = -\partial\Psi/\partial\boldsymbol{r}$ — вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ — ньютоновский гравитационный потенциал. Когда масса газопылевого облака составляет несколько процентов от массы центрального тела (или точнее, когда $\mathcal{M}_{\rm disk}/\mathcal{M}_\odot \leqslant h_{\rm disk}/R$, где $h_{\rm disk}$ и R — полутолщина и радиус диска соответственно (см., например, *Hersant и др., 2004*) можно пренебречь самогравитацией частиц диска; в этом случае будем иметь

$$\Psi = \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\tilde{\boldsymbol{r}}|}, \quad \boldsymbol{g} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Psi = \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\tilde{\boldsymbol{r}}|^3}, \tag{7.2.38}$$

где $\mathcal{M}_\odot$ — масса центрального тела (звезды); G — гравитационная постоянная; $|\tilde{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ — центральный радиус-вектор, $\tilde{\boldsymbol{r}} = \sum_k \boldsymbol{i}_k r_k$; центр масс протозвезды здесь и далее принят за начало системы отсчета. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны

$$\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\tilde{\boldsymbol{r}}| + \Psi_{\rm cr}, \tag{7.2.38*}$$

и потенциал самогравитации $\Psi_{\rm cr}$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Psi_{\rm cr} = 4\pi G\rho$, где ∇^2 — оператор Лапласа.

Тензор относительных напряжений $\mathbf{\Pi}_{\rm rel}$ для газопылевого диска можно записать в нескольких эквивалентных формах, удобных при написании модельных уравнений движения в различных системах координат. Используя (7.2.6) и (7.2.12), будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{\rm rel} &\equiv -(1-s)\rho_g \boldsymbol{w}_g \boldsymbol{w}_g - s\rho_d \boldsymbol{w}_d \boldsymbol{w}_d = -(1-s)\rho_g \boldsymbol{u}_g \boldsymbol{u}_g - s\rho_d \boldsymbol{u}_d \boldsymbol{u}_d + \rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = \\ &= -s\rho_d C_g \boldsymbol{w}\boldsymbol{w} = -s\rho_d C_g (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 w_1 w_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 w_1 w_2 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3 w_1 w_3 + \\ &+ \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 w_2 w_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 w_2 w_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 w_2 w_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 w_3 w_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2 w_3 w_2 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3 w_3 w_3).\end{aligned} \tag{7.2.39}$$

Важно отметить, что при моделировании динамики допланетного облака эти дополнительные напряжения должны приниматься во внимание, когда в нем присутствуют фракции относительно крупных твердых частиц ($\geqslant 1$ мм), поскольку в этом случае имеется существенная разница скоростей между фазами, т. е. скорость относительного движения фаз $\boldsymbol{w}$ по порядку величины может быть равной гидродинамической скорости суммарного континуума $\boldsymbol{u}$. Вместе с тем, для очень мелких частиц ($\ll 1$ мм, при числе Стокса $Stk \ll 1$), когда частицы успевают реагировать на изменение параметров несущей среды, может быть использовано приближение пассивной примеси — двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной (в общем случае многокомпонентной) среды с определенными эффективными теплофизическими свойствами (плотностью, газовой постоянной, теплоемкостью, и т. п.) (см. *Колесниченко, 2000*). В другом крайнем случае (при $Stk \gg 1$), когда крупные твердые частицы в дисковой системе не изменяют свого состояния в соответствии с изменениями параметров газа, также можно рассматривать однофазное течение, но уже чистого газа, причем обратное влияние крупных тел может быть учтено путем введения распределенных источников сопротивления. Наконец, в случае, когда $C_d \ll 1$, присутствие редких частиц газопылевой смеси не влияет на параметры течения газа и поэтому можно воспользоваться приближением единичной частицы; здесь вначале решаются уравнения движения газа, а затем по известным его параметрам определяются траектории частиц и изменение их состояния вдоль траекторий (см., например, *Garaud и др., 2005*). Далее мы будем пользоваться, в основном, представлением тензора $\boldsymbol{\Pi}_{\rm rel}$ через вектор скорости относительного движения фаз $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{u}_d - \boldsymbol{u}_g$.

Известно (см, например, *Тассуль, 1982*), что тензор лучистых касательных напряжений $\boldsymbol{\Pi}_{\rm rad}$ по своей структуре похож на тензор вязких напряжений для вещества $\boldsymbol{\Pi}$, поэтому, если учитывать взаимодействие между веществом и излучением до членов самого низкого порядка по $|\boldsymbol{u}|/c$, то в компоненты $(\boldsymbol{\Pi}_{\rm rad})_{ik}$ тензора лучистых касательных напряжений входят и следующие члены: $-c^{-2}(u_i(\boldsymbol{q}_{\rm rad})_k + u_k(\boldsymbol{q}_{\rm rad})_i + \delta_{ik}u_s(\boldsymbol{q}_{\rm rad})_s)$, где $\boldsymbol{q}_{\rm rad}$ — вектор лучистого потока тепла, определенный формулой (7.2.48) (см., например, *Hazlehurst, Sargent, !959*), и поэтому можно написать

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Pi}_{\rm sum} \equiv (\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}_{\rm rad}) \cong 2(\mu_g + \mu_{\rm rad})\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} + (\xi_g + 5/3\mu_{\rm rad})(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{U}, \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{D}} \equiv \boldsymbol{D} - 1/3\boldsymbol{U} \operatorname{div} \boldsymbol{u},\end{gathered} \tag{7.2.40}$$

где $\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}$ — тензор скоростей деформаций; $\boldsymbol{D} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^{\rm transp}\right)$ — тензор деформаций; $\boldsymbol{U}$ — единичный тензор (или единичный диадик $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$); $\mu_g(\rho, T)$, $\xi_g(\rho, T)$ — соответственно молекулярные коэффициенты динамической и объемной вязкости газа; $\mu_{\rm rad} = 4aT^4/15c\tilde{\varkappa}\rho$ — коэффициент лучистой вязкости; $\tilde{\varkappa}$ — полная непрозрачность среды (осредненная по Росселанду), которая, в свою очередь, также зависит от ρ, s, N_d, T и химического состава газа [см. формулы (7.2.72) и (7.2.73)].

7.2.4. Уравнение притока тепла для гетерогенной газопылевой среды и радиации в диске

Мгновенное уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) для гетерогенной газопылевой среды в целом, с учетом сделанных выше предположений, может быть записано в виде (*Колесниченко, Максимов, 2001*)

$$\rho\frac{d}{dt}(E_{\text{sum}}) = -\operatorname{div}\boldsymbol{q}_{\text{sum}} - p_{\text{sum}}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \Phi_u + \sum_\alpha(\boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{K}_\alpha). \tag{7.2.41}$$

Здесь $\boldsymbol{K}_\alpha \cong -\frac{d_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha}{dt} + \boldsymbol{F}_\alpha - \frac{1}{2\tilde{\rho}_\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\boldsymbol{w}_{\alpha\beta}$ — обобщенная термодинамическая сила диффузии, включающая «инерционное слагаемое» и слагаемое, обязанное фазовым переходам [см. (7.2.18)]; $E_{\text{sum}} \equiv E + E_{\text{rad}}$ — полная внутренняя энергия дисковой системы (вещество плюс радиация) на единицу массы; $E(\boldsymbol{r}, t) \equiv \equiv \sum_\alpha C_\alpha e_\alpha$ — внутренняя энергия вещества (отметим, что введенная нами в рассмотрение внутренняя энергия газопылевой смеси в целом является истинной внутренней энергий смеси, поскольку не содержит вклада от кинетической энергии межфазной диффузии); $e_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$, $h_\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ $(= e_\alpha + p/\rho_\alpha)$ — соответственно парциальная внутренняя энергия и энтальпия (на единицу массы) вещества α-фазы; E_{rad} — плотность энергии излучения (на единицу массы), определяемая законом Стефана—Больцмана $E_{\text{rad}} = aT^4/\rho$; $\boldsymbol{q}_{\text{sum}} \equiv \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_{\text{rad}}$ — плотность полного потока энергии в системе; $\boldsymbol{q}_{\text{rad}}$ — удельный поток энергии, переносимой излучением (перенос энергии излучением должен учитываться всегда, поскольку он велик даже при малой плотности энергии излучения (из-за большой скорости фотонов)); $\boldsymbol{q}$ — удельный поток энергии, связанный с тепловым движением частиц фазового вещества (т. е. определяемый теплопроводностью) и с переносом парциальных энтальпий потоками фазовой диффузии; $\Phi_u \cong (\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} : \nabla\boldsymbol{u})$ — диссипативная функция, представляющая собой скорость, с которой теплота порождается вязким трением газа в единичном объеме в единицу времени. При написании (7.2.41), мы воспользовались предположением об аддитивности термодинамических функций (внутренней энергии, энтальпии и т. п.) по массам входящих в гетерогенную систему фаз, что допустимо только в случае пренебрежения вкладами в термодинамические функции от приповерхностных (кнудсеновских) слоев твердых частиц.

Последнее слагаемое в уравнении (7.2.41), с учетом (7.2.17) и (7.2.18), может быть переписано в виде $\sum_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{K}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{w}_\alpha\cdot(-\boldsymbol{d}_\alpha + s_\alpha\partial p/\partial\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{d}_g = -\boldsymbol{d}_d = R_{gd}\boldsymbol{w}$ (без учета термофореза). Тогда для дополнительного источника тепла, связанного с диссипацией кинетической энергии диффузии, будем иметь (аналог джоулева нагрева для плазмы)

$$\sum_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha\cdot\boldsymbol{K}_\alpha = -C_d\boldsymbol{w}\cdot\left(-\boldsymbol{d}_g + s_g\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + C_g\boldsymbol{w}\cdot\left(-\boldsymbol{d}_d + s_d\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}}\right) = R_{gd}|\boldsymbol{w}^2| - s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}}\right),$$

поскольку $s^2 \ll 1$. Здесь $\sigma \equiv (\rho_d - \rho_g)/\rho$ — относительное превышение плотности пылевых частиц над плотностью газа; для малых твердых частиц $s\sigma \ll 1$ и последним слагаемым в этом соотношении можно пренебречь.

Важно отметить, что в уравнении притока тепла (7.2.41) фигурирует истинная внутренняя энергия газопылевой среды E на единицу массы, которая определена путем вычитания из полной энергии U_{tot} вещества дисковой системы потенциальной и кинетической энергий всех фаз (*Колесниченко*, *Максимов*, *2001*)

$$E = U_{\text{tot}} - \sum_\alpha C_\alpha \psi_\alpha - \sum_\alpha \frac{1}{2} C_\alpha |\boldsymbol{u}_\alpha|^2 = U_{\text{tot}} - \Psi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - \sum_\alpha C_\alpha \frac{1}{2}|\boldsymbol{w}_\alpha|^2 =$$
$$= U_{\text{tot}} - \Psi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 - C_d C_g |\boldsymbol{w}|^2/2. \quad (7.2.42)$$

Вместе с тем, если определить внутреннюю энергию газопылевой системы соотношением $E^* = U_{\text{tot}} - \Psi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$, то она будет включать в себя и макроскопическую кинетическую энергию фаз в системе центра масс, т. е. $E^* = E + c_d C_g |\boldsymbol{w}|^2/2$. Если теперь записать уравнение (7.2.41) через переопределенную таким образом внутреннюю энергию E^*, то оно примет более привычный вид, т. е. не будет содержать слагаемых $R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\boldsymbol{w}\cdot(\partial p/\partial \boldsymbol{r})$. Действительно, балансовое уравнение для кинетической энергии межфазной диффузии, с учетом (7.2.19*) и векторного преобразования $(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b})\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r}))\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} : (\partial/\partial\boldsymbol{r})\boldsymbol{c})$, может быть записано в виде

$$\rho\frac{d}{dt}(C_d C_g |\boldsymbol{w}|^2/2) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt}(|\boldsymbol{w}^2|/2) \cong -R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 + \left(\boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \quad (7.2.43)$$

поскольку, с точностью до членов второго порядка относительно $\boldsymbol{w}$, имеем

$$\rho\frac{d}{dt}(C_d C_g |\boldsymbol{w}|^2/2) = \rho C_d C_g \frac{d}{dt}(|\boldsymbol{w}|^2/2) + (|\boldsymbol{w}|^2/2)\left\{C_d \rho \frac{dC_g}{dt} + C_g \rho \frac{dC_d}{dt}\right\} =$$
$$= \rho C_d C_g \frac{d}{dt}(|\boldsymbol{w}|^2/2) + (|\boldsymbol{w}|^2/2)(C_d - C_g)\ \mathrm{div}(\rho C_g C_d \boldsymbol{w}) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt}(|\boldsymbol{w}|^2/2).$$

И все-таки, используемая нами в уравнении притока тепла (7.2.41) величина E, по-видимому, более заслуживает наименования внутренней энергии, чем величина E^*, поскольку внутренняя энергия должна содержать только вклад от теплового движения и короткодействующих молекулярных взаимодействий и не содержать каких-либо макроскопических слагаемых (см. *Де Гроот*, *Мазур*, *1964*).

Другие формы записи энергетического уравнения для газовзвеси

Далее нам потребуются энергетические уравнения, записанные в нескольких других формах. Введем суммарную энтальпию $H_{\text{sum}} \equiv H + H_{\text{rad}}$ вещества и излучения в диске, где

$$\begin{cases} H \equiv \sum\limits_\alpha C_\alpha h_\alpha = \sum\limits_\alpha C_\alpha(e_\alpha + p/\rho_\alpha) = E + p/\rho, \\ H_{\text{rad}} = E_{\text{rad}} + p_{\text{rad}}/\rho = 4/3aT^4/\rho, \qquad H_{\text{sum}} = E_{\text{sum}} + p_{\text{sum}}/\rho. \end{cases} \quad (7.2.44)$$

Тогда, с учетом выражения (7.2.42) и преобразования $\rho dE_{\text{sum}}/dt + p_{\text{sum}}\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \rho dH_{\text{sum}}/dt - dp_{\text{sum}}/dt$, являющегося следствием определений (7.2.44) и уравнения неразрывности смеси (7.2.13), будем иметь

$$\rho\frac{dH_{\text{sum}}}{dt} = \frac{dp_{\text{sum}}}{dt} - \operatorname{div}\boldsymbol{q}_{\text{sum}} + \Phi_u + R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right). \tag{7.2.45}$$

Это уравнение соответствует первому закону термодинамики (т. е. закону сохранения тепловой энергии).

Перепишем теперь уравнение (7.2.45) в переменных $T(\boldsymbol{r}, t)$ и $p(\boldsymbol{r}, t)$. Для большинства целей, относящихся к рассматриваемой нами проблеме моделирования эволюции аккреционного диска, достаточно будет аппроксимировать парциальные энтальпии газа и пыли (на единицу массы) с помощью выражений: $h_g = c_{Pg}T + h_g^0$, $h_d = c_{Pd} + h_g^0$, где h_α^0 — энтальпия фазы α при нулевой температуре (так называемая теплота образования); $c_{P\alpha}$ — удельная теплоемкость (при постоянном давлении) фазы α. Теплофизические величины $c_{P\alpha}$ и h_α^0 будем далее считать постоянными, аппроксимирующими реальные дисковые теплоемкости $c_{P\alpha}(T)$ и парциальные теплоты образования $h_\alpha^0(T)$ в ограниченном температурном интервале. Тогда можно написать

$$H = c_P T + \sum_\alpha C_\alpha h_\alpha^0, \qquad H_{\text{rad}} = E_{\text{rad}} + p_{\text{rad}}/\rho = 4/3aT^4/\rho, \tag{7.2.46}$$

где

$$c_P = \sum_\alpha c_{P\alpha}C_\alpha = \rho^{-1}(\rho_g(1-s)c_{Pg} + s\rho_d c_d)$$

— полная удельная теплоемкость системы «газ-твердые частицы» при постоянном давлении. Используя теперь выражения (7.2.46), а также уравнения (7.2.9), (7.2.12), (7.2.13), получим

$$\rho\frac{dH}{dt} \equiv \rho\sum_\alpha C_\alpha\frac{dh_\alpha}{dt} + \rho\sum_\alpha h_\alpha\frac{dC_\alpha}{dt} = \rho c_P\frac{dT}{dt} + \sum_\alpha h_\alpha(-\operatorname{div}\boldsymbol{J}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta}) =$$
$$= \rho c_P\frac{dT}{dt} - \operatorname{div}\left[\sum_\alpha h_\alpha\boldsymbol{J}_\alpha\right] + \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho\xi_\rho + \frac{\partial T}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\left[\sum_\alpha c_{P\alpha}\boldsymbol{J}_\alpha\right], \tag{7.2.47}$$

где соотношением $q_\rho \equiv \sum_\alpha h_\alpha\nu_{\alpha,\rho} = q_\rho^0 + \sum_\alpha c_{P\alpha}\nu_{\alpha,\rho}$ введена, так называемая теплота реакции ρ, равная разности произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагентов $\left(\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum_{k=1}^{N} m_{(k)}\nu_{\alpha(k),\rho}\right)$; заметим, что величина $q_\rho^0 = \sum_\alpha h_\alpha^0\nu_{\alpha,\rho}$ может интерпретироваться как теплота фазового перехода ρ при нулевой температуре. Последнее слагаемое в правой части (7.2.47) представляет собой эффект, так называемых, «диффундирующих теплоемкостей», который мал и потому его, как правило, не учитывают.

Полный поток энергии $\boldsymbol{J}_q \equiv \boldsymbol{q} - \sum_\alpha h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha$, связанный с тепловым движением частиц вещества в гетерогенном континууме, согласно (*Колесниченко, Максимов, 2001*), может быть записан в традиционном виде

$$\boldsymbol{J}_q \equiv \boldsymbol{q} - \sum_\alpha h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha \equiv \boldsymbol{q} - \rho C_g C_d (h_d - h_g)\boldsymbol{w} = -\chi_g \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}},$$

или

$$\boldsymbol{q} = \sum_\alpha h_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha - \chi_g \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{7.2.48}$$

обобщающем на гетерогенные среды аналогичное соотношение, полученное для гомогенных многокомпонентных смесей (см. *Гиршфельдер, Кертисс, Берд, 1961*). Напомним, что для диффундирующих смесей можно дать различные определения потока тепла, причем каждому определению потока тепла соответствует своя специфическая форма выражения для производства энтропии $\sigma_{(S)}$; выбор в каждом конкретном случае зависит от удобства рассмотрения проблемы. В выражении (7.2.48) мы пренебрегли термофоретическим эффектом, $k_{T\alpha} = 0$. Подобным же образом, если исключить из рассмотрения области диска близкие к поверхности протозвезды, можно записать для вектора лучистого потока тепла закон теплопроводности

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}} = -\chi_{\mathrm{rad}} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{7.2.48*}$$

Здесь χ_g — молекулярный коэффициент теплопроводности газа, $\chi_{\mathrm{rad}} = 4acT^3/(3\tilde{\varkappa}\rho)$ — коэффициент лучистой (нелинейной) теплопроводности, весьма сильно зависящий от температуры и плотности вещества [см. формулу (7.2.71)].

Подставляя (7.2.47), (7.2.48) и (7.2.48*) в уравнение (7.2.45), окончательно найдем

$$\rho c_{P,\mathrm{sum}} \frac{dT}{dt} = \frac{dp_g}{dt} + \operatorname{div}\left(\chi_{\mathrm{sum}} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - 4p_{\mathrm{rad}} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \Phi_u + R_{gd}\boldsymbol{w}^2 - s\sigma\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho \xi_\rho, \tag{7.2.49}$$

где введены обозначения $\chi_{\mathrm{sum}} = \chi_g + \chi_{\mathrm{rad}}$ и $c_{P,\mathrm{sum}} = c_P + 16aT^3/3\rho$.

Наконец, получим балансовое уравнение для удельной энтропии $S = \sum_\alpha C_\alpha S_\alpha$ суммарного континуума, моделирующего газопылевую среду диска в целом, которое обычно называют общим уравнением переноса тепла (здесь S_α — энтропия единицы массы α-фазы). Воспользуемся для этого фундаментальным соотношением Гиббса (см., например, *Пригожин, Дефей, 1966*) для однотемпературного гетерогенного многокомпонентного радиационного континуума в однодавленческом приближении, которое, будучи записанным вдоль траектории движения центра масс элементарного объема $\delta\mathcal{V}$, принимает вид (*Колесниченко, Максимов, 2001*)

$$T\frac{dS_{\mathrm{sum}}}{dt} = \frac{dE_{\mathrm{sum}}}{dt} + p_{\mathrm{sum}} \frac{d}{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sum_\alpha \sum_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} \frac{d}{dt}\left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho}\right), \tag{7.2.50}$$

где $\mu_{\alpha(k)}$ — химический потенциал k-й компоненты в α-фазе. С помощью уравнений (7.2.9), (7.2.13) и (7.2.41) соотношению Гиббса (7.2.50) можно придать вид уравнения баланса

$$\rho \frac{dS_{\text{sum}}}{dt} + \operatorname{div}\left\{ \frac{1}{T}\left(\boldsymbol{q}_{\text{sum}} - \sum_{\alpha} G_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha \right) \right\} = \sigma_{(S)}, \tag{7.2.51}$$

где

$$0 \leqslant T\sigma_{(S)} = -(\boldsymbol{J}_q + \boldsymbol{q}_{\text{rad}}) \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}} - \sum_{\alpha} \boldsymbol{w}_\alpha \cdot \boldsymbol{d}_\alpha + \\ + \left(\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u} \right) + \sum_{\alpha} \left(\boldsymbol{\Pi}_\alpha : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{w}_\alpha \right) + \sum_{\rho=1}^{r} \mathrm{A}_\rho \xi_\rho \tag{7.2.52}$$

— рассеяние энергии в необратимых процессах, являющееся локальной мерой неравновесности системы; $G_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} = e_\alpha + p/\rho_\alpha - TS_\alpha$ — свободная энергия Гиббса элементарной макрочастицы α-фазы;

$$\mathrm{A}_\rho \equiv - \sum_{\alpha=1} \sum_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} \nu_{\alpha(k),\rho} \tag{7.2.53}$$

— химическое сродство ρ-й реакции, протекающей, в общем случае, между компонентами, находящимися в разных фазах.

Отметим, что конкретное представление скорости производства энтропии ($T\sigma_{(S)}$) в виде билинейной формы, используется в неравновесной термодинамике для установления методом Онзагера определяющих соотношений, линейно связывающих между собой термодинамические потоки и сопряженные им термодинамические силы в рассматриваемом необратимом процессе. В частности, именно таким образом были выведены в работе (*Колесниченко, Максимов, 2001*) обобщенные соотношения Стефана—Максвелла (7.2.17) для гетерогенных сред.

7.2.5. Термодинамическое уравнение состояния вещества диска

В качестве термического состояния многокомпонентной газовой фазы диска (уравнения для давления) будем использовать далее бароклинное уравнение состояния для смеси совершенных газов

$$p_g = \sum_{(k)} p_{(k)} = k_{\mathrm{B}} T \sum_{k} n_{g(k)} = \rho_g \mathfrak{R}_g T, \tag{7.2.54}$$

где

$$\mathfrak{R}_g = k_{\mathrm{B}} \sum_{k} n_{g(k)} / \rho_g = k_{\mathrm{B}} / \mathscr{M}_g;$$

$\mathscr{M}_g$ — средняя молекулярная масса частиц газовой составляющей, которая далее считается постоянной.

Используя исходное предположение о равенстве парциальных давлений в фазах $p_g = p_d = p$, запишем уравнение состояния вещества диска в виде

$$P = \rho \Re T, \quad \Re(C_g, s) = \Re_g \rho_g / \rho = \Re_g C_g / (1 - s) \cong \Re_g C_g. \tag{7.2.55}$$

(заметим, что в рассматриваемом здесь случае величина $\Re$ для не является константой). Приближенное равенство в формуле (7.2.55) имеет место для случая газовзвеси с малым объемным содержанием конденсированной фазы (т. е. когда $s \ll 1$, что в данной работе предполагается; тем не менее, и в этом случае динамическое воздействие твердых частиц на газовый поток может оказаться существенным из-за огромного влияния силы гравитации). Таким образом, газопылевая дисковая среда в целом может рассматриваться как совершенный газ с показателем адиабаты γ и скоростью звука c_s, определяемыми соотношениями

$$\gamma \equiv \frac{c_P}{c_P - \Re} \cong \frac{\rho_g c_{Pg} + s\rho_d c_{Pd}}{\rho_g (c_{Pg} - \Re_g) + s\rho_d c_{Pd}}, \qquad 1 \leqslant \gamma \leqslant_g \equiv \frac{c_{Pg}}{c_{Pg} - \Re_g}, \tag{7.2.56}$$

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \Re T \cong c_{sg}^2 \frac{\gamma \rho_g}{\gamma_g \rho}, \qquad c_s < c_{sg} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_g}\right)_{S_g} = (\gamma_g \Re_g T)^{1/2}, \tag{7.2.57}$$

где γ_g и c_{sg} — показатель адиабаты и изотермическая скорость звука в чистом газе. Для газа солнечного состава, состоящего на 98% из водорода и гелия, показатель адиабаты $\gamma_g = 1{,}45$, а средняя молекулярная масса $\mathscr{M}_g = 2{,}39$.

7.2.6. Уравнение переноса излучения для газопылевого диска. Оптические свойства пылинок

Лучистый теплообмен оказывает определяющее влияние на состояние и движение турбулизованного высокотемпературного допланетного облака. Между тем, взаимодействие лучистого теплообмена и турбулентности почти не исследовано в литературе, вследствие чего до последнего времени оно не учитывалось и при моделировании эволюции газопылевого диска. Так как в действительности такое взаимодействие может быть существенным (см., например, *Иевлев*, *1975*), то далее будет предпринята попытка учесть его (хотя бы отчасти) в рамках развиваемого здесь подхода. В связи с этим, рассмотрим более детально некоторые основные понятия теории переноса излучения, которые понадобятся нам для указанных целей.

Излучение и поглощение фотонов описывается уравнением переноса излучения, которое для локально-равновесной (в любой точке пространства и в любой момент времени) газопылевой среды принимает вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\partial I_\nu}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = \rho \varkappa_\nu (B_\nu - I_\nu). \tag{7.2.58}$$

Известно, что рассеяние непосредственным образом не отражается на тепловом режиме среды. Именно поэтому в задачах радиационной гидродинамики рассеянием излучения, как правило, пренебрегают (что мы и будем делать далее) и рассматривают только истинный коэффициент ослабления $\varkappa_\nu$

и истинную функцию источников излучения B_ν (без учета рассеяния). Здесь $I_\nu \equiv I_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$ — спектральная интенсивность излучения, определенная таким образом, что $I_\nu d\nu d\boldsymbol{\Omega}$ описывает энергию фотонов в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, пересекающих в единицу времени единичный элемент поверхности с нормалью $\boldsymbol{\Omega}$ в пределах телесного угла $d\boldsymbol{\Omega}$, ориентированного в направлении $\boldsymbol{\Omega}$; $B_\nu(T) \equiv (2h\nu^3/c^2)(\exp(h\nu/k_B T) - 1)^{-1}$ — функция Планка; h — постоянная Планка; $\varkappa_\nu(\boldsymbol{r}, t)$ — полный спектральный коэффициент ослабления (непрозрачность), выражающийся через сечения элементарных физических процессов в газопылевой смеси соотношением

$$\rho\varkappa_\nu = (1-s)\sum_k n_{g(k)}\sigma_{(k)}(\nu) + N_d \frac{\pi \tilde{d}_d^2}{4} Q_d(m(\nu), \tilde{d}_d); \tag{7.2.59}$$

$$\sigma_{(k)}(\nu) = \sigma_{a(k)}(\nu)[1 - \exp(h\nu/k_B T)] + \sigma_{s(k)}^{\text{eff}}$$

— сечение ослабления излучения частоты в расчете на одну молекулу газа сорта k, равное сечению поглощения фотонов (исправленное на индуцированное испускание излучения) плюс эффективное сечение рассеяния; $Q_d = Q_{ds} + Q_{da}$; Q_{ds}, Q_{da} — соответственно факторы эффективности для рассеяния и поглощения света на пылевых частицах (безразмерные величины, рассчитываемые на основе теории Ми); $m(\nu)$ — комплексный показатель преломления вещества пылинки. С функцией I_ν связаны используемые в работе моменты:

$$E_{\text{rad},\nu}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \frac{1}{c\rho}\int_{4\pi} I_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)d\boldsymbol{\Omega} \tag{7.2.60}$$

— спектральная плотность энергии (на единицу массы вещества),

$$\boldsymbol{q}_{\text{rad},\nu}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \int_{4\pi} I_\nu(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)\boldsymbol{\Omega}\, d\boldsymbol{\Omega} \tag{7.2.61}$$

— спектральная поток энергии по направлению $\boldsymbol{\Omega}$. Полные плотность энергии и поток получаются интегрированием соответствующих монохроматических величин по частоте

$$E_{\text{rad}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} E_{\text{rad},\nu}(\boldsymbol{r}, t)d\nu, \qquad \boldsymbol{q}_{\text{rad}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} \boldsymbol{q}_{\text{rad},\nu}(\boldsymbol{r}, t)d\nu. \tag{7.2.62}$$

Уравнение (7.2.58), записанное вдоль направления распространения излучения, принимает более простой вид

$$\frac{dI_\nu}{dl} = \rho\varkappa_\nu(B_\nu - I_\nu). \tag{7.2.63}$$

Здесь l — координата вдоль луча; член $c^{-1}\partial I_l nu/\partial t$ в уравнении (7.2.58) далее будем опускать, поскольку характерные времена при движении газопылевой среды много больше, чем l^*/c, где l^* — длина луча. Если определить оптическую толщину слоя газопылевой среды (с длиной луча l) вдоль направления распространения излучения выражением

$$\tau_\nu = \int_0^l \rho\varkappa_\nu dl, \tag{7.2.64}$$

то легко можно проинтегрировать уравнение (7.2.63); в результате получим следующее выражение для интенсивности излучения из области, имеющей полную оптическую толщину τ_ν:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\exp(-\tau_\nu) + \int\limits_{\tau_{\nu 1}=0}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau_{\nu 1})\exp[-(\tau_\nu - \tau_{\nu 1})]d\tau_{\nu 1}, \qquad (7.2.65)$$

где $I_\nu(0)$ — постоянная интегрирования, которая имеет смысл интенсивности излучения в некоторой точке на луче, в которой примем координату l равной нулю, $l = 0$. При удалении точки $l = 0$ на очень большое расстояние из (7.2.65) следует

$$I_\nu \approx \int\limits_{-\infty}^{l} B_\nu(l_1)\exp\left(-\int\limits_{l_2=l_1}^{l} \rho\varkappa_\nu(l_2)dl_2\right)\cdot \rho\varkappa_\nu(l_1)dl_1. \qquad (7.2.66)$$

Выражения (7.2.65) и (7.2.66) позволяют в идеале найти, при известных оптических свойствах среды (т. е. распределении $\varkappa_\nu(\boldsymbol{r}, t)$) и граничных условий на центральной плоскости диска, интенсивность $I_\nu(\boldsymbol{r}, \Omega, t)$ в разных точках и по разным направлениям, после чего по формулам (7.2.61) и (7.2.62) можно будет рассчитать распределение лучистого теплового потока $\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}}(\boldsymbol{r}, t)$.

Вместе с тем, в уравнения притока тепла (7.2.41) или (7.2.45) входит дивергенция потока излучения $\operatorname{div}\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}}$. Часто, при известном распределении I_ν эту величину можно найти, не вычисляя $\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}}$ по (7.2.62). Проинтегрировав стационарное уравнение (7.2.58) по всему спектру частот и по телесному углу Ω, получим следующее общее выражение для вклада радиации в тепловой баланс газопылевой среды диска

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}} = -\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_{4\pi}\left(\Omega\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \boldsymbol{r}}\right)d\Omega\,d\nu = \int\limits_{\nu=0}^{\infty}\left\{4\pi\rho\varkappa_\nu B_\nu(T) - \int\limits_{4\pi}\rho\varkappa_\nu I_\nu d\Omega\right\}d\nu, \qquad (7.2.67)$$

где первый член соответствует спонтанно излучаемой, а второй — поглощаемой радиационной энергии в единице объема в единицу времени. Вычисления вклада излучения в уравнение притока тепла (7.2.41) по формуле (7.2.67) в общем случае очень сложны. Однако они значительно упрощаются в следующих двух случаях, важных при моделировании различных этапов эволюции допланетного газопылевого облака:

1. При очень малой оптической толщине газопылевого диска. В этом случае в (7.2.67) можно пренебречь членом с I_ν, т. е. в уравнении притока тепла можно принять

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}_{\mathrm{rad}} \cong 4\pi\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\rho\varkappa_\nu B_\nu(T)d\nu. \qquad (7.2.68)$$

При очень высоких температурах среды этот член может быть существенным даже при малой оптической толщине газа (см. *Иевлев*, *1975*), например, в приповерхностном слое диска.

2. При очень большой оптической плотности газопылевого диска для излучения всех частот ν, существенных в энергетическом отношении. В этом случае применимо диффузионное приближение для лучистого переноса тепла

(приближение лучистой теплопроводности), когда поле излучения I_ν оказывается лишь слегка анизотропным. При умножении уравнения переноса излучения (7.2.58) на $\mathbf{\Omega}$ и интегрировании по всем углам, получим (с учетом того, что изотропный член с $\rho\varkappa_\nu B_\nu$ не зависит от направления и потому не вносит вклада в интеграл)

$$\int\limits_{4\pi} \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{r}}\right)d\Omega = -\rho\varkappa_\nu \mathbf{q}_{\mathrm{rad},\nu}, \tag{7.2.69}$$

откуда для полного потока тепла будем иметь

$$\mathbf{q}_{\mathrm{rad}} = -\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\rho\varkappa_\nu}\int\limits_{4\pi}\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{r}}\right)d\Omega. \tag{7.2.70}$$

Если для слегка анизотропного поля излучения в левой части (7.2.69) оставить в рассмотрении только наиболее значащую изотропную часть, то

$$\mathbf{q}_{\mathrm{rad}} = -\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\rho\varkappa_\nu}\int\limits_{4\pi}\mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{r}}\right)d\Omega \cong -\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\rho\varkappa_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \mathbf{r}}\int\limits_{4\pi}\cdot\mathbf{\Omega}\right)\mathbf{\Omega}\,d\Omega =$$

$$= -\frac{c}{3\rho}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial \mathbf{r}}d\nu = -\frac{c}{3\rho}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}d\nu =$$

$$= -\frac{4caT^3}{3\rho\tilde{\varkappa}}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = -\chi_{\mathrm{rad}}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}, \tag{7.2.71}$$

где введена в рассмотрение, так называемая полная непрозрачность среды $\tilde{\varkappa}(\rho, s, T, N_d)$, которая определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\varkappa_\nu$ спектральной непрозрачности (см. *Pollack et al.*, *1985*)

$$\frac{1}{\tilde{\varkappa}} \equiv \frac{1}{4aT^3}\int\limits_{\nu=0}^{\infty}(1/\varkappa_\nu)(dB_\nu/dT)d\nu = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty}(1/\varkappa_\nu)(dB_\nu/dT)d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty}(dB_\nu/dT)d\nu} \tag{7.2.72}$$

(поскольку $\int\limits_{\nu=0}^{\infty} dB_\nu/dT\,d\nu = 4aT^3$). Диффузионное приближение справедливо, если поле излучения изотропно на расстояниях, сравнимых со средней длиной свободного пробега фотонов: $\lambda_\nu = 1/\varkappa_\nu$, или малых по сравнению с ней. Отметим также, что уравнение (7.2.71) с очень хорошей точностью выражает вектор лучистого потока $\mathbf{q}_{\mathrm{rad}}$ во внутренних областях газопылевого диска. Однако в приповерхностных слоях диска оптическая толща порядка единицы или меньше, и поток уже не определяется этим локальным выражением. Поэтому нужно использовать нелокальное решение (7.2.68) уравнения переноса, которое обычно используют при изучении звездных атмосфер.

Оптические свойства пылинок

Спектральную непрозрачность среды, связанную с пылевой составляющей, определяемую соотношением (7.2.59), удобно переписать в виде

$$\varkappa_\nu(\rho, s, N_d) = \frac{\pi \widetilde{d}_d^2}{4\rho} N_d Q_d(m(\nu), d_d) = \frac{\pi^{1/3}6^{2/3}}{4\rho} s^{2/3} N_2^{1/3} [Q_{da}(m(\nu), d_d) + Q_{ds}(m(\nu), d_d)], \tag{7.2.73}$$

явно зависящем от первых моментов s и N_d [см. (7.2.30) и (7.2.31)] функция распределения $f(U, \mathbf{r}, t)$ пылевых частиц по размерам. Расчеты рассеяния и поглощения света сферическими твердыми телами с комплексным показателем преломления m предполагается проводить на основе теории Ми. Заметим, что, например, $m = \infty$ соответствует бесконечной диэлектрической проницаемости, $m = 1{,}33$ соответствует частичкам льда (для видимых длин волн), $m = 1{,}33 - 0, -9i$ соответствует грязному льду (льду с поглощающими примесями), $m = 1{,}27 - 1{,}37i$ соответствует пылинкам из железа.

Размер сферической твердой частицы обычно выражают через безразмерный параметр $x(\nu) = \pi d_d/\lambda$, где $\lambda = c/\nu$ — длина волны света. Для малых x фактор эффективности рассеяния света на пылевых частицах фактор эффективности рассеяния Q_{ds} становится очень малым; при $|mx| \ll 1$ имеем обычную формулу Рэлеевского рассеяния

$$Q_{ds} = 8/3x^4|(m^2 - 1)/(m^2 + 2)|^2, \tag{7.2.74}$$

а фактор эффективности поглощения в этом случае дается соотношением

$$Q_{da} = -4x \,\mathrm{Im}[(m^2 - 1)/(m^2 + 2)], \tag{7.2.75}$$

где Im означает, что нужно брать мнимую часть.

7.2.7. Базовая система ламинарных уравнений движения газопылевой дисковой среды

Для удобства ссылок суммируем приведенные выше уравнения движения двухфазной полидисперсной среды, состоящей из газа и пыли. Эти уравнения (опорный базис модели), учитывающие относительное движение фаз, процессы коагуляции и фазовые переходы, а также различные физико-химические и радиативные процессы, предназначены, в частности, для континуального описания пространственно-временной эволюции состава, динамики и теплового режима газопылевого облака на последней ламинарной стадии эволюции допланетного диска (т. е. после затухания турбулентных движений; отметим, что в областях диска, близких к прото-Солнцу, полного затухания турбулентности может и не быть из-за возмущающего воздействия на среду магнитных полей, корпускулярных потоков и т.п.) в зонах субдиска, расположенных на различных расстояниях от прото-Солнца (см., например, *Nakagawa, Sekiya, 1986*). Существенным также является и то, что эти уравнения, описывающие мгновенное состояние турбулизованного допланетного облака на любой стадии его эволюции, могут рассматриваться как исходные при изучении осредненного движения дисковой системы, когда с целью феноменологического описания гидродинамических и физико-химических процессов приходится проводить теоретико-вероятностное осреднение стохастических уравнений движения. Итак, имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \quad \left(\dfrac{d}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \\ \rho \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{s\rho_d}{\rho}\right) = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_d + \sum\limits_{\rho=1}^{r} \nu_{d,\rho}\xi_\rho, \quad (\boldsymbol{J}_d = \rho C_d C_g \boldsymbol{w},\ C_g = 1 - \dfrac{s\rho_d}{\rho},\ \rho_d = \text{const}), \\ \rho \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{N_d}{\rho}\right) = -\operatorname{div}(N_d C_g \boldsymbol{w}) - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(W, U) f(W) f(U)\, dW\, dU + \sum\limits_k \sum\limits_{\rho=1}^{r} \nu_{d(k),\rho}\xi_\rho, \\ \rho \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\dfrac{\partial (p + p_{\text{rad}})}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} - \boldsymbol{J}_d \boldsymbol{w})\right) + \rho \dfrac{G\mathscr{M}_\odot}{|\widetilde{\boldsymbol{r}}|^3}\widetilde{\boldsymbol{r}}, \\ (\rho c_{Vg} + 4aT^3/3)\dfrac{dT}{dt} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{J}_q + \boldsymbol{q}_{\text{rad}}) - (p + 4p_{\text{rad}}) \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \Phi_u + \\ \qquad - s\rho_d C_g \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{w^2}{2}\right) - \sum\limits_{\rho=1}^{r} q_\rho \xi_\rho, \quad (\rho_g \cong \rho - s\rho_d), \\ p = p_g = \rho_g \Re_g T, \quad p_{\text{rad}} = aT^4/3. \end{cases} \tag{7.2.76}$$

Гидродинамические уравнения движения (7.2.76) должны быть дополнены соответствующими выражениями для скоростей фазовых переходов ξ_ρ и определяющими соотношениями для термодинамических потоков

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} = (\mu_g + \mu_{\text{rad}})\left[\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^{\text{transp}}\right] + (\xi_g - 2/3\mu_g + \mu_{\text{rad}})(\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{U}, \\ \boldsymbol{w} \cong \dfrac{1}{\rho\theta_{dg}}\left(-\dfrac{d\boldsymbol{w}}{dt} - \left(\boldsymbol{w} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} + \dfrac{1}{\rho_g}\dfrac{\partial p_g}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \\ \boldsymbol{J}_q = -\chi_g \dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{q}_{\text{rad}} = -\chi_{\text{rad}}\dfrac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}}, \end{cases} \tag{7.2.77}$$

а также выражениями для коэффициентов коагуляции $K(W, U)$ (см. *Колесниченко, 2001*) и коэффициентов молекулярного переноса $\mu_g(s, T)$, $\xi_g(s, T)$, $\chi_g(s, T)$, $\theta_{dg}(s, N_d, \text{Re})$ и лучистой теплопроводности $\chi_{\text{rad}}(s, N_d, T)$. Для выписанной системы уравнений двухфазной механики (7.2.76)—(7.2.77) необходимо задать начальные и граничные условия, выбор которых требует в каждом конкретном случае специального рассмотрения, поскольку, как правило, моделируется не дисковая система в целом, имеющая, скажем, такие естественные границы, как экваториальная плоскость диска или его внешняя граница, а ее отдельные области.

Важно подчеркнуть, что приведенная система уравнений (7.2.76)—(7.2.77), описывающая при заданных начальных и граничных условиях также и все детали мгновенного состояния стохастических термогидродинамических полей турбулизованного течения газопылевой дисковой среды и их вариации, зачастую не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Это обусловлено тем, что применение численных методов влечет за собой аппроксимацию колоссального пространственно-временного поля параметров турбулизованного потока конечным числом узлов сетки, которое нужно использовать, чтобы решить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать гидродинамические уравнения (7.2.76)—(7.2.77) только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осредненные структурные параметры подобной стохастической среды, а все более мелкие масштабы моделировать феноменологически. Стохастичность в данном случае означает существование ансамбля возможных реализаций пульсирующих полей течения газовзвеси, для которой определено понятие статистически среднего (математически ожидаемого) значения для всех термогидродинамических параметров.

§ 7.3. Осредненные уравнения двухфазной механики для описания турбулизованного газопылевого диска

Прежде чем приступить к разработке основ феноменологической теории турбулентности многофазных сред применительно к моделированию эволюции околосолнечного допланетного диска, отметим еще раз следующее: имеющиеся на сегодняшний день подходы к описанию многофазных турбулентных течений, к сожалению, несовершенны (см., например, *Шрайбер и др., 1987*; *Вараксин, 2003*). Подобное положение дел обусловлено как незавершенностью «классической» теории турбулентности в «обычной» гидромеханике (см. гл. 4), так и кардинальным усложнением картины турбулентного течения несущего газа в присутствии дисперсной примеси. Следует иметь в виду, что проблема обратного влияния твердых частиц на характеристики течения, являясь одной из фундаментальных проблем механики гетерогенных сред, в полной мере все еще не решена. Это касается, в частности, способов учета коллективных эффектов, связанных с межчастичным взаимодействием, роль которого возрастает с увеличением концентрации и размера твердых частиц. Например, с межчастичными столкновениями связан механизм интенсивной хаотизации движения относительно крупных частиц (так называемая псевдотурбулентность), которые слабо увлекаются турбулентными пульсациями несущей среды (см., *Шрайбер и др., 1980*). Таким образом, в силу отмеченной специфики турбулентных течений в гетерогенных средах, любые теоретические подходы к их описанию и развитые на их основе математические модели всегда будут ограничены, поскольку относятся, как правило, к строго определенному диапазону концентраций и инерционности дисперсной фазы. Сказанное имеет отношение и ко всем существующим на сегодняшний день моделям эволюции газопылевого диска, которые охватывают по этой причине сравнительно узкий круг задач, относящихся к данной проблеме.

Перейдем теперь к выводу базовых осредненных гидродинамических уравнений для дисковой газопылевой турбулизованной среды, предназначеных для постановки и численного решения конкретных задач по взаимосогласованному моделированию физических и химических параметров допланетного облака на разных этапах его эволюции, и проанализируем физический смысл отдельных членов этих уравнений. Для того чтобы функции, входящие в эти уравнения, были гладкими и непрерывными с непрерывными первыми производными, необходимо провести осреднение стохастических уравнений (7.2.76) для газовзвеси по времени или по ансамблю возможных реализаций. Достигнутый в последнее время прогресс в развитии и применении полуэмпирических моделей турбулентности первого порядка замыкания (так называемых градиентных моделей) для однородной сжимаемой жидкости (см., гл. 3, а также монографии *Таунсенд, 1959*; *Ван Мигем, 1977*; *Колесниченко, Маров, 1999*), позволяет получить обобщения некоторых из подобных моделей и на случай сдвиговых течений двухфазной газопылевой среды, описываемой в данной главе в рамках одножидкостного континуума. Вывод замыкающих соотношений для турбулентных потоков фазовой диффузии, тепла и тензора турбулентных напряжений Рейнольдса мы проведем традиционным способом, основанном на понятии пути смешения.

Как мы уже неоднократно подчеркивали, в теориях турбулентности жидкости и газа применяются различные способы осреднения полей физических величин, например, временное осреднение (3.1.1), когда интервал осреднения Δt пульсирующего параметра $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ предполагается достаточно большим по сравнению с характерным периодом его пульсаций и существенно малым по сравнению с временным периодом изменения осредненного поля $\overline{A}(\boldsymbol{r}, t)$; пространственное осреднение, посредством интегрирования по пространственному объему; пространственно-временное осреднение; теоретико-вероятностное осреднение по ансамблю возможных реализаций [см. формулу (3.1.3)] и т. п. (*Монин, Яглом, 1992*). Последний подход, использующий понятие ансамбля, то есть бесконечной совокупности стохастических систем гидродинамической природы, отличающихся друг от друга состоянием поля скоростей и/или других термогидродинамических параметров движения в данный момент времени, является наиболее фундаментальным и будет использован далее при моделировании гетерогенной турбулентности.

В классических теориях турбулентности однородных несжимаемых жидкостей, разработанных к настоящему времени достаточно полно (см., например, *Монин, Яглом, 1992*), осреднения для всех без исключения термогидродинамических параметров обычно вводятся некоторым одинаковым способом и, как правило, без весовых коэффициентов. Например, при осреднении по времени (3.1.1), или при теоретико-вероятностном осреднении по ансамблю возможных реализаций (3.1.3), актуальное значение параметра $\mathscr{A}$ представляется в виде суммы осредненной $\overline{\mathscr{A}}$ и пульсационной $\mathscr{A}'$ составляющих: $\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}} + \mathscr{A}'$ (причем $\overline{\mathscr{A}'} = 0$). При этом разделение реального стохастического движения системы на «медленно» изменяющееся непрерывное среднее и нерегулярное, быстро колеблющееся, пульсирующее около средних значений (турбулентное движение) полностью зависит от выбора пространственно-временной области, для которой определены средние величины. Именно размер этой области осреднения фиксирует масштаб среднего движения. Заметим, что процедура получения уравнений для крупномасштабной турбулентности может быть и иной: например, «сглаженные» значения термогидродинамических параметров могут быть введены с помощью функции-фильтра $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ с помощью формулы

$$\overline{\mathscr{A}}(\boldsymbol{r}, t) = \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathscr{A}(\boldsymbol{r}', t)d\boldsymbol{r}'$$

(см. *Leonard, 1974*), или в случае численного решения задачи, при составлении уравнений баланса (количества движения, массы и энергии) для каждой ячейки расчетной сетки (*Иевлев, 1970*). Во всех этих случаях все вихри большого размера вносят вклад в осредненное движение, определенное осредненными значениями термогидродинамических параметров, а все вихри меньшего размера, отфильтрованные в процессе осреднения, вносят вклад в «мелкомасштабное» турбулентное движение, определенное соответствующими пульсациями тех же самых структурных параметров.

Вместе с тем, подобный способ осреднения (одинаковый для всех переменных) в случае двухфазного континуума с пульсирующей суммарной плотностью ρ, приводит не только к громоздким гидродинамическим уравнениям масштаба среднего движения, что связано с необходимостью удержания в их структуре корреляций типа $\overline{\rho'\boldsymbol{u}'}$, $\overline{\rho'\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}'}$, $\overline{\rho' C'_\alpha \boldsymbol{u}'}$ и т. п. (появление которых обусловлено нелинейностью конвективных членов исходных гидродинамических уравнений для мгновенного движения среды), но и к затруднениям физической интерпретации отдельных членов осредненных уравнений. В связи с этим, далее при разработке моделей газопылевой среды диска, мы будем использовать, наряду с «обычными» средними значениями для некоторых пульсирующих параметров, так называемое средневзвешенное значение (среднее по Фавру (*1969*)) для ряда других параметров, задаваемое, соотношением

$$\langle \mathscr{A} \rangle \equiv \overline{\rho\mathscr{A}}/\overline{\rho}; \tag{7.3.1}$$

при этом: $\mathscr{A} = \langle \mathscr{A} \rangle + \mathscr{A}''$, $\overline{\mathscr{A}''} \neq 0$; здесь $\mathscr{A}''$ — соответствующая турбулентная пульсация. Таким образом, для осреднения уравнений гетерогенной механики мы будем поступать точно также, как и в случае моделирования турбулентности многокомпонентной смеси (см. гл. 3). Для обозначения средних величин в этой главе использовано два символа: черта сверху означает осреднение по ансамблю (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение. Двойной штрих используется для обозначения пульсаций относительно величины, осредненной по Фавру. Заметим, что осреднение по Фавру ряда пульсирующих термогидродинамических параметров гетерогенного континуума существенно упрощает запись и анализ осредненных уравнений движения. Это связано с тем, что при обычном осреднении (без веса) корреляции $\overline{\rho'\mathscr{A}'}$, $\overline{\rho'\mathscr{A}'\boldsymbol{u}'}$ и т. п. фигурируют в явном виде в осредненных уравнениях движения, в то время как при осреднении по Фавру подобные корреляции скрыты в соответствующих членах уравнений, которые по этой причине имеют более простой (традиционный) вид. В третьей главе данной книги приведены некоторые свойства средневзвешенного осреднения [см. (3.1.7)], которые будут нами широко использованы и при построении модели гетерогенной турбулентности.

7.3.1. Осредненные уравнения баланса масс газопылевого вещества. Коэффициент турбулентного переноса

Будем рассматривать протопланетное турбулизованное газопылевое облако, как континуальную среду, мгновенные движения которой могут быть описаны системой гидродинамических уравнений (7.2.76) при случайной выборке начальных и граничных условий. Такой подход возможен для пространственно-временных масштабов, заключенных между масштабами молекулярных движений и минимальными масштабами турбулентности (линейный размер и время существования наименьших из вихрей), которые, как правило, на несколько порядков (по крайней мере на три порядка) превосходят масштабы молекулярных движений, т. е. расстояние между молекулами, а тем более — размеры молекул (см., например, *Ван Мигем, 1977*).

Тогда макроуравнения турбулентного движения газопылевой среды можно получить путем теоретико-вероятностного осреднения по ансамблю возможных реализаций стохастических уравнений (7.2.76) и при использовании средневзвешенных значений для таких характеристик движения, как скорость $\langle \boldsymbol{u} \rangle$, температура $\langle T \rangle$, массовые концентрации $\langle C_\alpha \rangle$ и т. п. Однако давление p и массовую плотность ρ газовзвеси, а также все «молекулярные» термодинамические потоки $\boldsymbol{J}_\alpha$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\Pi}$, ξ_ρ удобно будет осреднять «обычным» образом, т. е. без использования весового множителя. Заметим, что процедура осреднения по Фавру уравнений движения для двухфазного течения газовзвеси (описываемой в рамках одножидкостного континуума), выполнена здесь, по-видимому, впервые.

Осредненное уравнение неразрывности

Легко видеть, что осредненная массовая плотность $\overline{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость газовзвеси $\langle \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\rho \boldsymbol{u}}/\overline{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\rho}\langle \boldsymbol{u} \rangle) = 0, \quad \text{или} \quad \overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\overline{\rho}}\right) - \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{7.3.2}$$

По поводу этого уравнения важно подчеркнуть следующее: при известных трудностях моделирования двойных корреляций $\overline{\rho' \boldsymbol{u}'}$, появляющихся при «обычном» осреднении без веса уравнения неразрывности (7.2.13) для истинных значений плотности и гидродинамической скорости двухфазной системы, сохранение стандартной формы (7.3.2) для осредненного уравнения неразрывности является убедительным аргументом в пользу использования средневзвешенного осреднения $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ для полной гидродинамической скорости течения (см. *Колесниченко, Маров, 1999*).

Кроме того, широко далее используемая формула (7.3.3) может быть получена только с учетом уравнения (7.3.2), путем осреднения операторного соотношения $\rho d\mathscr{A}/dt = \partial(\rho\mathscr{A})/\partial t + (\partial/\partial \boldsymbol{r})\cdot(\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u})$; в результате будем иметь

$$\overline{\rho\frac{d\mathscr{A}}{dt}} = \frac{\partial(\overline{\rho\mathscr{A}})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\overline{\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u}})\right) = \frac{\partial(\overline{\rho\mathscr{A}})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot[\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle + \overline{\rho\mathscr{A}''\boldsymbol{u}''}]\right) = \overline{\rho}\frac{D}{Dt}\langle\mathscr{A}\rangle + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{\mathscr{A}}\right), \tag{7.3.3}$$

где введено обозначение

$$\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}}^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho \mathscr{A}'' \boldsymbol{u}''} = \overline{\rho} \langle \mathscr{A}'' \boldsymbol{u}'' \rangle \tag{7.3.4}$$

для вторых одноточечных корреляционных моментов пульсаций скорости течения и некоторой переносимой субстанции $\mathscr{A}$. Формулой (7.3.4) определяется, так называемый, турбулентный поток, связанный с переносом субстанции $\mathscr{A}$ турбулентными пульсациями гидродинамической скорости гетерогенной системы.

Приведем уже здесь выражение для турбулентного потока $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}$ удельного объема $v(\boldsymbol{r}, t)$ $(\equiv 1/\rho)$. Поток $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}$ играет важную роль в рассматриваемом нами подходе и фигурирует в осредненных уравнениях движения газовзвеси, например, в осредненном энергетическом уравнении [см. (7.3.45*)]. Используя соотношение $v'' = -\rho'/\rho\overline{\rho}$, которое следует непосредственно из определения пульсации v'' $(v'' = v - \langle v \rangle = 1/\rho - 1/\overline{\rho} = -\rho'/\rho\overline{\rho})$, из (7.3.4) легко получить

$$\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho v'' \boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho' \boldsymbol{u}''}/\overline{\rho} = \overline{\boldsymbol{u}''}. \tag{7.3.5}$$

Далее везде будем исходить из того, что в газопылевом потоке флуктуируют только объемное содержание пыли s и истинная плотность газа ρ_g (это ключевое предположение развиваемого далее подхода); тогда из (7.2.2) следует

$$\frac{\rho'}{\overline{\rho}} \cong (1-\overline{s})\frac{\rho_g'}{\overline{\rho}} + \langle \sigma \rangle s' = \langle C_g \rangle \frac{\rho_g'}{\overline{\rho}_g} + \langle \sigma \rangle s', \tag{7.3.6}$$

где введено обозначение

$$\langle \sigma \rangle \equiv (\rho_d - \overline{\rho}_g)/\overline{\rho} \cong \rho_d/\overline{\rho} \tag{7.3.7}$$

для осредненного превышения плотности пылевых частиц над плотностью газовзвеси и использовано выражение

$$\langle C_g \rangle \equiv \frac{\overline{(1-s)\rho_g}}{\overline{\rho}} \cong \frac{(1-\overline{s})\overline{\rho}_g}{\overline{\rho}} \cong \frac{\overline{\rho}_g}{\overline{\rho}}, \tag{7.3.8}$$

для осредненной массовой концентрации газовой фазы; при этом

$$\langle C_d \rangle \equiv \rho_d \overline{s}/\overline{\rho} \cong \overline{s} \langle \sigma \rangle, \qquad \langle C_g \rangle + \langle C_d \rangle = 1.$$

Тогда из (7.3.6) в (7.3.5) вытекает следующее важное выражение для турбулентного потока удельного объема $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}$ в газопылевой среде

$$\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \equiv -\overline{\rho' \boldsymbol{u}''}/\overline{\rho} = -\langle \sigma \rangle \overline{s' \boldsymbol{u}''} - \left(1 - \frac{\rho_d \overline{s}}{\overline{\rho}}\right) \overline{\rho_g' \boldsymbol{u}''} \overline{\rho}_g. \tag{7.3.9}$$

Следует отметить, что приведенные выше соотношения для величин ρ' и $\langle C_g \rangle$ (как и некоторые другие подобные им, которые появятся в дальнейшем в ходе построения модели гетерогенной турбулентности) верны лишь в том случае, когда справедливы неравенства $\overline{\mathscr{A}'\mathscr{B}'}/\overline{\mathscr{A}\mathscr{B}} \ll 1$ и $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle / \langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle \ll 1$ для любых пульсирующих термодинамических параметров $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, не равных скорости газопылевого потока $\boldsymbol{u}$; малость подобного рода отношений далее всюду нами предполагается без специальных оговорок.

Осредненное уравнение диффузии дисперсной составляющей дисковой системы

Применим теперь оператор осреднения (7.3.3) к диффузионному уравнению (7.2.12) для дисперсных частиц; в результате получим следующее балансовое уравнение для концентрации пыли:

$$\overline{\rho}\frac{D\langle C_d\rangle}{Dt} + \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{J}}_d + \boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}}) = \overline{\sigma_{dg}}, \qquad \overline{\sigma_{dg}} \equiv \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{d,\rho}\overline{\xi}_\rho. \tag{7.3.10}$$

Здесь $\langle C_d\rangle = \rho_d\overline{s}/\overline{\rho}$; $\overline{\boldsymbol{J}}_d$ — осредненный «молекулярный» диффузионный поток пыли, определяемый соотношением [см. (7.2.12)]

$$\overline{\boldsymbol{J}_d} \equiv \overline{\rho C_d C_g \boldsymbol{w}} \cong \overline{\rho}\langle C_d\rangle\langle C_g\rangle\overline{\boldsymbol{w}} \cong \rho_d\frac{\overline{\rho}_g}{\overline{\rho}}\overline{s\boldsymbol{w}}; \tag{7.3.11}$$

$$\boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho C_d'' \boldsymbol{u}''} = \rho_d\overline{s\boldsymbol{u}''} \tag{7.3.12}$$

— так называемый, турбулентный поток диффузии вещества дисперсной фазы; заметим, что для диффузионного потока газа можно написать

$$\boldsymbol{J}_g^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho C_g'' \boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho C_d'' \boldsymbol{u}''} = -\boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}}.$$

Если записать турбулентный поток пыли в виде $\boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}} = \rho_d\overline{s}\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}} + \rho_d\overline{s'\boldsymbol{u}''}$, то, с учетом формулы (7.3.9), можно получить представление для турбулентного потока удельного объема в несколько ином виде

$$\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}} = -\langle\sigma\rangle\frac{\overline{\rho}}{\rho_d\overline{\rho}_g}\boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}} - (1-\overline{s})\frac{\overline{\rho_g'\boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}_g}. \tag{7.3.13}$$

Это выражение для потока $\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}}$ нам понадобится в дальнейшем.

Для замыкания осредненного диффузионного уравнения (7.3.10) необходимо получить определяющее соотношение для турбулентного диффузионного потока пыли $\boldsymbol{J}_d^{\mathrm{turb}} \equiv \overline{\rho}\langle C_d''\boldsymbol{u}''\rangle$. Известно, что имеется несколько подходов к моделированию подобного рода корреляционных моментов второго порядка, различающихся степенью сложности (см. гл. 3). Здесь мы ограничимся наиболее простым градиентным соотношением, которое выведем традиционным способом, вводя в рассмотрение понятие пути смешения. Следует однако иметь в виду, что в последнее десятилетие для моделирования турбулентных однофазных потоков в тонких аккреционных дисках стали применяться более глубокие по физическому содержанию дифференциальные модели турбулентности, аналогичные, приведенным в гл. 4. Подобные модели включают в себя кроме уравнений для осредненных величин дополнительные дифференциальные уравнения переноса важнейших статистических характеристик дисковой турбулентности (см., например, *Dubrulle*, *1992*).

Итак, будем полагать, что перенос каких-либо полевых характеристик $\mathscr{A}$ газопылевого потока турбулентными пульсациями среды происходит как иключительно диффузионный процесс и что можно допустить существование некоторого эффективного пути смешения ξ_A субстанции $\mathscr{A}$, представляющего собой расстояние, на которое перемещаются турбулентные моли (вихри) в потоке, прежде чем они разрушатся за счет взаимодействия с другими возмущениями. Если обозначить через $\mathscr{A}''_L$ лагранжеву турбулентную пульсацию переносимой субстанции $\mathscr{A}$, соответствующую эйлеровой пульсации $\mathscr{A}''$, а через $\boldsymbol{\xi}_{\mathscr{A}}$ — эффективный путь смешения, то можно написать $\mathscr{A}''_L = \mathscr{A}'' + \left(\boldsymbol{\xi}_{\mathscr{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle\mathscr{A}\rangle\right)$ (см. гл. 3). Будем теперь считать, что вихри, смещаясь на расстояние $\xi_{\mathscr{A}}$, сохраняют в лагранжевом объеме ту же удельную плотность пыли, которой она обладала на исходном уровне (предполагается, что пылевая субстанция обладает свойством неуничтожимости: количество ее в элементарном объеме не изменяется за время, в течение которого она движется не смешиваясь с окружающим газом); тогда $(C_d)''_l \cong 0$, или $C''_d = -\left(\boldsymbol{\xi}_d \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle C_d\rangle\right)$.

Отсюда диффузионный поток $\boldsymbol{J}_d^{\text{turb}}$ пылевой составляющей газовзвеси в рамках градиентных представлений равен

$$\boldsymbol{J}_d^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho C''_d \boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}''\boldsymbol{\xi}_d\rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle C_d\rangle = -\overline{\rho}\left(\boldsymbol{D}_d^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial\langle C_d\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = -\overline{\rho}\rho_d\left(\boldsymbol{D}_d^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{s}}{\overline{\rho}}\right)\right). \quad (7.3.14)$$

Здесь диада $\boldsymbol{D}_d^{\text{turb}} \equiv \langle\boldsymbol{u}''\boldsymbol{\xi}_d\rangle$ определяет несимметричный тензор коэффициентов турбулентной диффузии пыли, учитывающий в общем анизотропном случае различия интенсивностей турбулентных пульсаций скорости и концентрации твердых частиц вдоль разных осей координат. Соотношение (7.3.14) эквивалентно утверждению, что турбулентный поток пылевой фазы пропорционален градиенту средней концентрации $\langle C_d\rangle$ и имеет по отношению к нему обратное направление. Важно при этом иметь в виду, что, как мы видели ранее (см. гл. 4), применение градиентной гипотезы не исключает всех затруднений, связанных с проблемой замыкания, поскольку необходимо еще определить (экспериментально или на базе качественного физического анализа) соответствующие коэффициенты турбулентной диффузии.

В случае изотропного турбулентного поля можно считать, что тензор $\boldsymbol{D}_d^{\text{turb}}$ шаровой, $\boldsymbol{D}_d^{\text{turb}} = \boldsymbol{U} D_d^{\text{turb}}$, т. е. определяется одним коэффициентом турбулентной диффузии пыли $D_d^{\text{turb}}(\boldsymbol{r})$ (который является некоторой статистической характеристикой турбулентности газовзвеси); тогда

$$\boldsymbol{J}_d^{\text{turb}} = -\overline{\rho} D_d^{\text{turb}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle C_d\rangle \cong -D_d^{\text{turb}} \frac{\rho_d \overline{\rho}_g}{\overline{\rho}}\left(\frac{\partial \overline{s}}{\partial \boldsymbol{r}} - \overline{s}\frac{\partial \ln \overline{\rho}_g}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \quad (7.3.15)$$

и осредненное диффузионное уравнение (7.3.10) принимает вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle C_d\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\overline{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\boldsymbol{w}} - \frac{\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\text{turb}}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle C_d\rangle\right\} = \overline{\sigma}_{dg}. \quad (7.3.10^*)$$

Здесь ν^{turb} — турбулентный аналог коэффициента кинематической вязкости газопылевой смеси (см. ниже); $\mathrm{Sc}^{\text{turb}} \equiv \nu^{\text{turb}}/D_d^{\text{turb}}$ — турбулентное число Шмидта для дисперсной фазы (безразмерный коэффициент порядка единицы, зависящий от природы пылевой субстанции и являющийся некоторой функцией безразмерных характеристик потока). В рамках градиентной теории число

Шмидта вычисляется по формуле $\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}} \equiv \xi_u/\xi_d$, где ξ_u — длина пути смешения по скорости. Заметим, что впервые зависимость числа Шмидта от концентрации пылевых частиц была получена в работе (*Абрамович*, *Гиршович*, *1973*).

Коэффициент турбулентного переноса; число Стокса

Прежде всего отметим, что коэффициенты турбулентного переноса в любой турбулизованной среде, в отличие от соответствующих коэффициентов молекулярного переноса, описывают не просто ее физические свойства, но и состояние турбулентного поля и потому непосредственно зависят от масштаба осреднения пульсирующих термогидродинамических параметров. Именно по этой причине способ введения осредненных характеристик турбулентного движения газовзвеси является решающим при разработке методов экспериментального определения подобного рода коэффициентов. В основе наиболее продвинутого подхода к моделированию коэффициентов турбулентной диффузии лежит предположение о полном увлечении частиц турбулентными пульсациями того масштаба, который играет основную роль в механизме их сближения (приближение пассивной примеси). Если твердые частицы очень малы, и в силу этого их движение практически ничем не отличается от движения несущих молей газа, то для них имеет место равенство коэффициентов турбулентной диффузии частиц пыли D^{turb} и турбулентной вязкости ν^{turb} газа. В этом случае D_d^{turb} зависит только от масштаба турбулентных пульсаций несущего газа и оценивается, например, выражением (см. *Левич*, *1959*)

$$D_d^{\mathrm{turb}} \sim \nu^{\mathrm{turb}} = \sqrt{b}\,l \sim (\varepsilon l)^{1/3} l = \varepsilon^{1/3} l^{4/3}, \quad \text{когда} \quad l < \lambda_K, \tag{7.3.16}$$

в котором использованы следующие обозначения: b — турбулентная энергия газопылевой среды в целом [(см. (7.3.31)]; $\varepsilon \cong b^{3/2}/l \cong v_g^3/\lambda_K^4$ — скорость диссипации турбулентной энергии газа [см. формулу (7.3.44*)]; $\lambda_K \cong (v_g^3/\varepsilon)^{1/4}$ — колмогоровский (внутренний) масштаб турбулентности; $l(\boldsymbol{r})$ — длина пути перемешивания по Прандтлю (числовой множитель можно включить в значение l). В дальнейшем мы будем называть l пространственным масштабом турбулентности в данной точке потока.

Следует, однако, отметить, что многочисленные экспериментальные данные (см., например, *Медников*, *1981*) подтверждают равенство $D_d^{\mathrm{turb}} \cong \nu^{\mathrm{turb}}$ лишь для очень мелких частиц, когда безразмерное число Стокса в крупномасштабном пульсационном движении $\mathrm{Stk} \ll 1$. Заметим, что в общем случае для турбулизованного гетерогенного потока можно ввести несколько чисел Стокса Stk, равных отношению времени динамической релаксации пылевых частиц к тем или иным временным масштабам течения (например, к временному колмогоровскому масштабу турбулентности $\tau_K \cong (v_g/\varepsilon)^{1/2}$, или к крупномасштабному пульсационному движению среды $\tau_l \propto b/\varepsilon$), которые характеризуют инерционность частиц по отношению к выбранному масштабу течения в турбулентном потоке. В случае кеплеровского дифференциального вращения твердых частиц в диске, где имеется градиент осредненной скорости в радиальном направлении, важно учитывать инерционность частиц при анализе процесса релаксации осредненных скоростей фаз. Для этого удобно ввести число Стокса в осредненном движении, которое мы запишем в следующем виде $\mathrm{Stk} = \omega_{\mathrm{turb}}\tau_{\mathrm{relax}}$, где τ_{relax} — время динамической релаксации (динамической инерционности) частиц; ω_{turb} — нижний предел частоты турбулентных пульсаций несущего газа в диске, принадлежащий наиболее крупным вихрям с масштабом L (макромасштаб турбулентности); тогда частота ω_{turb} определяет медленные макроскопические изменения параметров течения (которые, вообще говоря, не связаны с турбулентностью) и согласно Сафронову (*1969*) задается в виде $\omega_{\mathrm{turb}} = \Omega_{K,\mathrm{mid}}$, где $\Omega_{K,\mathrm{mid}} = \sqrt{G\mathcal{M}_{\odot}/\overline{r}^3}$ — орбитальная частота (кеплеровская угловая скорость в районе центральной плоскости диска). В работе (*Cuzzi et al.*, *1993*) эта оценка была несколько уточнена $\omega_{\mathrm{turb}} \cong \zeta\Omega_{K,\mathrm{mid}}$, где $\zeta \approx 0{,}0126$.

Для малых сферических частиц (например, с диаметром $\ll 1$ см на 1 а. е., или ~ 600 см на 10 а. е.) время динамической релаксации определяется законом Эпстейна [см. формулу (7.2.21)]

$$\tau^{\mathrm{Ep}}_{\mathrm{relax}} = \frac{\widetilde{\rho}_d\widetilde{\rho}_g}{\rho R_{dg}} = \frac{\rho_d\widetilde{d}_d}{2\rho c_{sg}}, \qquad \widetilde{d}_d < \lambda_g \tag{7.3.17}$$

(длина свободного пробега молекул газа $\lambda_g \sim 1$ см на 1 а. е.). Однако, для грубодисперсных сферических частиц эта формула несколько видоизменяется. Наиболее простое выражение для τ_{relax} можно получить, когда число Рейнольдса для пыли $\mathrm{Re}_d = \widetilde{d}_d|\boldsymbol{w}|/\nu_g = 2\widetilde{d}_d|\boldsymbol{w}|/\lambda_g c_{sg}$ имеет достаточно малые значения, $\mathrm{Re}_d < 1$ (что имеет место для, так называемых, стоксовых частиц). Это неравенство справедливо, например, для частиц с диаметрами между 1 и 10 см на 1 а. е., и между 600 и 1000 см на 10 а. е. (*Dubrulle et al.*, *1995*). В этом случае, согласно формуле (7.2.22), коэфициент аэродинамического сопротивления $C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}$ и время динамической релаксации τ_{relax} будет определятся законом Стокса ($\widetilde{d}_d > \lambda_g$)

$$\tau^{\mathrm{St}}_{\mathrm{relax}} = \frac{\widetilde{\rho}_d\widetilde{\rho}_g}{\overline{\rho}R_{dg}} = \frac{\widetilde{d}_d\rho_d}{2\overline{\rho}C_d(\mathrm{Re}_d)|\boldsymbol{w}|} \cong \frac{\widetilde{d}_d\rho_d\mathrm{Re}_d}{18\overline{\rho}|\boldsymbol{w}|} = \frac{\rho_d\widetilde{d}_d^2}{9\overline{\rho}c_{sg}\lambda_g} = \frac{\rho_d\widetilde{d}_d^2}{18\overline{\rho}\nu_g}. \tag{7.3.18}$$

Таким образом, инерционность стоксовой частицы зависит от характеристик среды, в которой она движется. Кроме того, если частицы не слишком малы (и в силу этого увлекаются несущими их молями газа не полностью), то их относительные скорости, приобретаемые за счет турбулентных пульсаций, существенно зависят от их массы. Заметим, что в случае движения нестоксовой частицы ее инерционность зависит от числа Рейнольдса для пыли Re_d и может быть записана в виде

$$\tau_{\mathrm{relax}} = \tau^{\mathrm{St}}_{\mathrm{relax}}/C(\mathrm{Re}_d), \tag{7.3.18*}$$

где

$$C(\mathrm{Re}_d) = \begin{cases} 1 + 0{,}179\mathrm{Re}_d^{1/2} + 0{,}013\mathrm{Re}_d, & \mathrm{Re}_d \leqslant 10^3 \\ 0{,}0183\mathrm{Re}_d, & \mathrm{Re}_d > 10^3 \end{cases}$$

— некоторая поправочная функция, учитывающая влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы (коэффициент аэродинамического сопротивления частицы равен $C_D(\mathrm{Re}_d) = 9\mathrm{Re}_d^{-1}C(\mathrm{Re}_d)$). Разность пульсационных скоростей частиц разного размера обусловливает их сближение и увеличивает вероятность столкновений. С этим обстоятельством связан также и инерционный механизм коагуляции частиц в турбулентном потоке. Таким образом, для полидисперсной дисковой среды справедлива формула (ср., например, *Cuzzi et al., 1993*)

$$\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}} = \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{D_d^{\mathrm{turb}}} \cong (1 + \mathrm{Stk})\sqrt{1 + 3|\overline{\boldsymbol{w}}|^2/2b}, \qquad \mathrm{Stk} = \zeta\Omega_{K,\mathrm{mid}}\frac{\rho_d d_d^2}{18\rho\nu_g C(\mathrm{Re}_d)}. \tag{7.3.19}$$

Определяющее уравнение для осредненной скорости относительного движения фаз

Осредняя определяющее уравнение (7.2.19*) для актуальных значений вектора $\boldsymbol{w}$, в результате получим

$$\overline{\rho}\theta_{gd}\overline{\boldsymbol{w}} \cong -\frac{D\overline{\boldsymbol{w}}}{Dt} - \overline{\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\overline{\rho}_g}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} =$$

$$= -\frac{D\overline{\boldsymbol{w}}}{Dt} - \left(\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\overline{\boldsymbol{w}}\right) - \overline{\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{w}'\right)} - \left(\overline{\boldsymbol{w}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle\boldsymbol{u}\rangle - \overline{\left(\boldsymbol{w}'\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}''} + \frac{1}{\overline{\rho}_g}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} -$$

$$- \left(\overline{\boldsymbol{w}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}} = -\frac{D\overline{\boldsymbol{w}}}{Dt} - \left(\overline{\boldsymbol{w}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle\boldsymbol{u}\rangle + \frac{1}{\overline{\rho}_g}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{7.3.20}$$

При написании этого соотношения мы пренебрегли пульсациями $\boldsymbol{w}'$ относительной скорости (что справедливо лишь для тех случаев, когда скорость осредненного относительного движения фаз $\overline{\boldsymbol{w}}$ намного больше скорости пульсаций $\boldsymbol{w}'$, т. е. для достаточно крупных частиц) и произведениями осредненных термодинамических потоков различной природы, как членами второго порядка малости. Кроме этого нами использовано тождественное преобразование

$$\overline{\frac{d\mathcal{A}}{dt}} \equiv \frac{D\overline{\mathcal{A}}}{Dt} + \left(\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\overline{\mathcal{A}}\right) + \overline{\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial \boldsymbol{r}}\right)}, \tag{7.3.21}$$

которое может быть получено путем осреднения субстанциональной производной $d\mathcal{A}/dt$, предварительно записанной в виде

$$D\mathcal{A}/dt = D\mathcal{A}/Dt + \boldsymbol{u}''\cdot(\partial\mathcal{A}/\partial\boldsymbol{r}) = D\mathcal{A}/Dt + (\boldsymbol{u}''\cdot(\partial\overline{\mathcal{A}}/\partial\boldsymbol{r})) + (\boldsymbol{u}''\cdot(\partial\mathcal{A}'/\partial\boldsymbol{r})).$$

7.3.2. Осредненное уравнение коагуляции Смолуховского

Турбулентность приводит к двоякого рода явлениям, влияющим на процесс коагуляции в дисперсной системе. Во-первых, под действием турбулентных пульсаций частицы приобретают дополнительную относительную скорость, что в свою очередь изменяет ядро коагуляции $K(W, U)$, характеризующее вероятность столкновения частиц в системе (см., например, *Волощук,* *1984*). Здесь с известной определенностью пока можно говорить о двух эффектах, ускоряющих коагуляцию. Первый из них связан с увеличение коэффициента захвата за счет турбулентного перемешивания, в результате чего число столкновений твердых частиц существенно увеличивается по сравнению с ламинарным потоком. Второй эффект связан с наличием сдвига в поле скоростей турбулентного потока, который приводит к изменению условий захвата в области значений $K(W, U)$, близких к нулю, и увеличивает вероятность коагуляции мелких частиц (см., например, *Woods*, *Drake*, *Goldsmith*, *1972*).

Явления второго типа связаны с коллективным поведением частиц в турбулизованной системе. Турбулентность, увеличивая локальные неоднородности распределения коагулирующих частиц до масштабов, сравнимых со средним расстоянием между частицами, приводит к возникновению флуктуаций функции распределения частиц по размерам $f(U, \boldsymbol{r}, t)$ на макроскопических расстояниях. С физической точки зрения это колебание концентрации частиц с объемом U, в силу нелинейного характера уравнений коагуляции (7.2.33), приводит к тому, что в области с повышенной концентрацией частиц коагуляция ускоряется, а с пониженной — замедляется, так что в среднем это приводит к иной скорости коагуляции, чем в однородном случае ($U = \mathrm{const}$) и способствует более быстрому появлению крупных частиц.

Такой процесс может быть описан формальным осреднением уравнения коагуляции (7.2.33)

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}}\right) + \mathrm{div}[\boldsymbol{J}_f^{\mathrm{turb}}(U) + \overline{f(U)}\langle C_g\rangle\overline{\boldsymbol{w}}] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^U \overline{f(W)f(U-W)}K(W, U-W)dW - \overline{f(U)}\int_0^\infty \overline{f(W)}K(W, U)dW +$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^U \overline{f'(W)f'(U-W)}K(W, U-W)dW - \int_0^\infty \overline{f'(U)f'(W)}K(W, U)dW, \quad (7.3.22)$$

где

$$\boldsymbol{J}_f^{\mathrm{turb}}(U) \equiv \overline{\rho(f/\rho)''\boldsymbol{u}''} = -\bar{\rho}D_U^{\mathrm{turb}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left(\frac{\overline{f(U)}}{\bar{\rho}}\right) \quad (7.3.23)$$

— турбулентный поток пылевых частиц объема U; $\langle C_g\rangle = (1-\bar{s})\bar{\rho}_g/\bar{\rho}$; D_U^{turb} — коэффициент турбулентной диффузии для частиц U-фракции, выражение для которого получено, например, в работе (*Schmit и др.*, *1997*). Уравнение (7.3.22) является незамкнутым, поскольку функция $\gamma(U, W, \boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{f'(U, \boldsymbol{r}, t)f'(W, \boldsymbol{r}, t)}$ не определена. Уравнение для $\gamma(U, W, \boldsymbol{r}, t)$ можно получить умножением исходного уравнения (7.2.33) на f и последующим стохастическим осреднением по ансамблю возможных реализаций, в результате чего получится уравнение, содержащее среднее от произведения трех функций f'. Подобная операция приводит к бесконечной цепочке уравнений. Проблема замыкания последней может быть решена лишь путем введения какой-либо гипотезы.

Если проинтегрировать уравнение (7.3.22) по размеру U, то уравнение для осредненного полного числа дисперсных частиц $\overline{N}_d(\boldsymbol{r}, t)$ будет иметь следующий вид:

$$\overline{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{N}_d}{\overline{\rho}}\right) = -\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{N_d} + \frac{\overline{N}_d(1-\overline{s})\overline{\rho}_g}{\overline{\rho}}\overline{\boldsymbol{w}}\right) - \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(W,U)\overline{f}(W,\boldsymbol{r},t)\overline{f}(U,\boldsymbol{r},t)dW\,dU -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(W,U)\gamma(U,W,\boldsymbol{r},t)dW\,dU + \sum_k\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{d(k),\rho}\overline{\xi}_\rho, \quad (7.3.24)$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{N_d} = \int_U \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_f(U)dU \quad (7.3.25)$$

— турбулентный поток числа пылевых частиц, для которого справедливо представление $\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{N_d} = \overline{N_d\boldsymbol{u}''} = \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_d/\rho_d\widetilde{U}_d$. Так как функция $\gamma(U, W, \boldsymbol{r}, t)$ должна быть положительно определенной в силу своей симметрии по U и W, то коагуляция в турбулизованной среде с неравномерно распределенными частицами должна происходить быстрее. В заключение заметим, что вопрос о влиянии флуктуаций на скорость коагуляции, несмотря на свою важность, до настоящего времени является практически неразработанным и требует дальнейшего исследования.

7.3.3. Осредненное уравнение движения для газопылевой дисковой среды

Осредняя по Фавру мгновенное уравнение движения (7.2.35) газопылевой смеси, рассматриваемой как единое целое, при учете (7.3.3) получим

$$\overline{\rho}\frac{D\langle\boldsymbol{u}\rangle}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle) + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle)\right) = -\frac{\partial\overline{p}_{\text{sum}}}{\partial\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{R} + \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{sum}} + \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})\right) + \overline{\rho}\frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\widetilde{\boldsymbol{r}}|^3}\widetilde{\boldsymbol{r}}, \quad (7.3.26)$$

где

$$\boldsymbol{R} \equiv -\overline{\rho\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}''\boldsymbol{u}''\rangle \quad (7.3.27)$$

— так называемый тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений, который, будучи записанным в декартовой системе координат, принимает вид:

$$R_{ij} \equiv -\overline{\rho u_i''u_j''} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u_1''^2} & -\overline{\rho u_1''u_2''} & -\overline{\rho u_1''u_3''} \\ -\overline{\rho u_2''u_1''} & -\overline{\rho u_2''^2} & -\overline{\rho u_2''u_3''} \\ -\overline{\rho u_3''u_1''} & -\overline{\rho u_3''u_2''} & -\overline{\rho u_3''^2} \end{pmatrix}. \quad (7.3.28)$$

Тензор Рейнольдса является симметричным тензором второго ранга и описывает турбулентные напряжения, обусловленные пульсациями поля турбулентных скоростей газопылевого континуума в целом. Известно (см., например, *Монин, Яглом, 1992*), что в развитом турбулентном потоке однофазного течения, т. е. при больших значениях глобального числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{glob}} = L\boldsymbol{u}_0/\nu$, соответствующих крупномасштабным движениям (здесь u_0 — типичные изменения скорости газопылевой смеси на расстояниях порядка макромасштаба турбулентности L; ν — эффективный коэффициент кинематической вязкости газовзвеси) можно пренебречь осредненным тензором вязких напряжений среды $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$ по сравнению с напряжениями Рейнольдса $\boldsymbol{R}$, за исключением тонких областей, так называемого, вязкого подслоя, граничащих с твердой подложкой (в рассматриваемом нами случае такой подложкой является тонкий слой пыли, примыкающим к центральной плоскости диска). Это справедливо и для допланетного дифференциально вращающегося кеплеровского диска с характерным значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{glob}} \gg 10^{10}$, поскольку турбулентная вязкость его вещества, на 8 и более порядков выше молекулярной, что следует из наблюдаемого распределения углового момента и массы в Солнечной системе и в многочисленных системах молодых звезд с дисками (см., например, *Richard*, *Zahn*, *1999*). Следует однако иметь в виду, что сказанное не относится к осредненному тензору «напряжений относительного движения фаз» $\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{rel}}$, влияние которого на двухфазное течение дисковой среды может быть сопоставимым по порядку величины с тензором Рейнольдса $\boldsymbol{R}$. В частности, в окрестности субдиска, где значительна концентрация пылевых частиц достаточно крупных размеров (и, следовательно, $\overline{\boldsymbol{w}} \gg 0$) эти «сдвиговые» напряжения действуют особенно эффективно, приводя к дополнительной турбулизации потока, правда, в объеме, сопост малом по сравнению со всем объемом диска (см., например, *Goldrich*, *Ward*, *1973*).

Можно показать, используя консервативность $(\boldsymbol{u}'')_L \cong 0$ лагранжевых пульсаций среднемассовой скорости газопылевого потока, что тензор Рейнольдса $\boldsymbol{R}$ (в случае изотропного турбулентного поля) связан с градиентами $\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r}$ осредненной по Фавру скорости течения следующим определяющим соотношением (см., например, *Колесниченко*, *Маров*, *1999*)

$$\boldsymbol{R} = -2/3\overline{\rho}b\boldsymbol{U} + 2\overline{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}, \qquad \overset{\circ}{\boldsymbol{D}} \equiv \boldsymbol{D} - 1/3\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle), \tag{7.3.29}$$

или

$$\boldsymbol{R} = -2/3\overline{\rho}b\boldsymbol{U} + \overline{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\mathrm{transp}}\right) - 2/3\overline{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle, \tag{7.3.30}$$

где $\boldsymbol{D} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)^{\mathrm{transp}}\right)$ — тензор осредненных деформаций; $\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}$ тензор осредненных скоростей деформаций, ν^{turb} — кинематический коэффициент турбулентной вязкости газопылевой смеси (возможная в дифференциально вращающемся газопылевом облаке анизотропия коэффициентов турбулентной вязкости ν^{turb} (см.*Сафронов*, *1969*) подробно проанализирована в работе (*Колесниченко*, *2000*)). Здесь и далее оставлены прежние обозначения $\boldsymbol{D}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}$ и для осредненных тензоров деформации и скоростей деформации, что не должно привести к недоразумению [ср. с формулой (7.2.40)].

В соотношение (7.3.29) входит ключевая в теории турбулентности величина

$$b \equiv \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho} \tag{7.3.31}$$

— осредненное значение кинетической энергии турбулентных пульсаций среднемассовой скорости газопылевого континуума (турбулентная энергия), для нахождения которой необходимо иметь, в общем случае, соответствующее балансовое уравнение [см. (7.3.67)]). Отметим, что поскольку в развитом турбулентном потоке создается непрерывное распределение пульсаций скорости $\boldsymbol{u}''$ на самых различных частотах f (от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения), то дисперсию (7.3.31) часто удобно представлять в виде суммы соответствующих величин, относящихся к разным частотам

$$b = \int_0^\infty b(f)df, \tag{7.3.32}$$

где $b(f)$ — доля турбулентной энергии газопылевой смеси, соответствующая полосе частот df (энергетический спектр величины b).

Осредненный тензор «относительных» напряжений $\overline{\Pi_{\rm rel}}$ в уравнении (7.3.26) (напомним, что тензор $\Pi_{\rm rel}$ возникает из-за инерционных эффектов относительного движения низкодисперсной фракции твердых частиц и газа [см. формулу (7.2.37)]) можно, с учетом принятых нами выше предположений, преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi_{\rm rel}} &\equiv -\overline{\rho C_d C_g \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} = -\overline{\rho C_d C_g}(\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}} + \overline{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}'}) - \overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}(\rho C_d C_g)'} = \\ &= -(\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}} + \overline{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}'})(\overline{\rho}\langle C_d\rangle\langle C_g\rangle + \overline{\rho C_d'' C_g''}) - 2\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}'(\rho C_d C_g)'} - \overline{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}'(\rho C_d C_g)'} \cong \\ &\cong -\overline{s}\rho_d\langle C_g\rangle(\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}} + \overline{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}'}) - 2\overline{\boldsymbol{w}}(\rho_d\overline{\boldsymbol{w}'s'}\langle C_g\rangle + \overline{\rho C_g''\boldsymbol{w}'}\langle C_d\rangle + \overline{\rho C_d'' C_g''\boldsymbol{w}'}).\end{aligned} \tag{7.3.33}$$

Для двухфазного турбулентного потока в соотношениях типа (7.3.33) всеми корреляционными членами обычно пренебрегают и учитывают только первое слагаемое (см., например, *Зуев, Лепешинский, 1981*; *Картушинский, 1984*):

$$\overline{\Pi_{\rm rel}} \cong -\overline{s}\rho_d\langle C_g\rangle\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}}, \tag{7.3.34}$$

что разумеется справедливо лишь в том случае, когда скорость осредненного относительного движения фаз $\overline{\boldsymbol{w}}$ намного больше скорости пульсаций $\boldsymbol{w}'$, т. е. для достаточно крупных твердых частиц. Для менее инерционных мелко- и среднедисперсных частиц будем учитывать два первых члена в (7.3.33); тогда

$$\overline{\Pi_{\rm rel}} = -\overline{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{R}_{\rm rel}, \tag{7.3.35}$$

где $\boldsymbol{R}_{\rm rel} \equiv -\overline{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}'}$ — дополнительный тензор рейнольдсовых напряжений, обусловленный пульсациями поля относительных скоростей фаз. В рамках градиентных моделей возможны два подхода к определению подобного рода парных корреляций. Согласно первому из них корреляционные моменты $\boldsymbol{R}_{\rm rel}$ для относительно мелких частиц выражаются непосредственно через рейнольдсовы напряжения $\boldsymbol{R}$ газопылевого континуума в целом, т. е. $\boldsymbol{R}_{\rm rel} = \beta\boldsymbol{R}$, где β — коэффициент вовлечения дисперсных частиц в пульсационное движение газа (см., например, *Гавин и др., 1984*). Вторым способом определения дополнительных турбулентных напряжений $\boldsymbol{R}_{\rm rel}$ является использование градиентных соотношений типа (7.3.30), с заменой осредненных скоростей $\langle\boldsymbol{u}\rangle$ на $\overline{\boldsymbol{w}}$ и определением соответствующего коэффициента «турбулентной вязкости» (см., например, *Melville, Bray, 1979*).

7.3.4. Уравнение баланса для осредненной внутренней энергии газовзвеси

Энергетическое уравнение масштаба среднего движения для газопылевой дисковой системы в целом получим, осредняя по ансамблю возможных реализаций уравнение энергии (7.2.45) для истинного мгновенного движения; в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H_{\text{sum}}\rangle}{Dt} = \overline{\frac{dp_{\text{sum}}}{dt}} - \operatorname{div}(\boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{sum}} + \bar{\boldsymbol{q}}_{\text{sum}}) + \overline{\Phi_u} + \overline{R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right)}, \qquad (7.3.36)$$

где

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{sum}} = \boldsymbol{q}^{\text{turb}} + \boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{rad}}; \qquad \boldsymbol{q}^{\text{turb}} \equiv \overline{\rho H''\boldsymbol{u}''} \cong \langle c_P\rangle\overline{\rho T''\boldsymbol{u}''} + \sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_\alpha \qquad (7.3.37)$$

— турбулентный поток тепла, возникающий благодаря корреляции между пульсациями энтальпии H'' вещества и гидродинамической скорости $\boldsymbol{u}''$;

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{rad}} \equiv \overline{\rho H''_{\text{rad}}\boldsymbol{u}''} \cong \langle c_{P,\text{rad}}\rangle\overline{\rho T''\boldsymbol{u}''}, \qquad \langle c_{P,\text{rad}}\rangle \equiv 16a\langle T\rangle^3/3\bar{\rho} \qquad (7.3.38)$$

— турбулентный радиационный поток тепла. Приближенные соотношения для потоков тепловой энергии (7.3.37) и (7.3.38) записаны с точностью до членов, содержащих тройные корреляции. Формулу (7.3.37) легко получить, используя алгебраические свойства (3.1.7) осреднения Фавра и выражение

$$H'' = \sum_\alpha [h''_\alpha\langle C_\alpha\rangle + \langle h_\alpha\rangle C''_\alpha + (C''_\alpha h''_\alpha)''] = \langle c_p\rangle T'' + \sum_\alpha C''_\alpha\langle h_\alpha\rangle + (c''_p T'')'' \qquad (7.3.39)$$

для пульсации удельной энтальпии вещества диска. Здесь $h''_\alpha = c_{p\alpha}T''$ — пульсация парциальной энтальпии фазы α ($c_{p\alpha} \cong \text{const}$);

$$\langle c_p\rangle = \sum_\alpha c_{p\alpha}\langle C_\alpha\rangle, \qquad c''_p = \sum_\alpha c_{p\alpha}C''_\alpha \qquad (7.3.40)$$

— соответственно осредненная и пульсационная составляющие удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении. Осредненные значения для энтальпий излучения и вещества, входящие в уравнение (7.3.36), определяются соотношениями

$$\langle H_{\text{rad}}\rangle \cong 4/3a\langle T\rangle^4/\bar{\rho}, \qquad \langle H\rangle \cong \langle c_p\rangle\langle T\rangle + \sum_\alpha h^0_\alpha\langle C_\alpha\rangle, \qquad (7.3.41)$$

которые следуют из (7.2.43) и (7.2.44).

Субстанциональную производную от суммарного давления в уравнении (7.3.36) удобно далее представить, с учетом формулы (7.3.21), в виде

$$\overline{\frac{dp_{\text{sum}}}{dt}} \equiv \frac{D\bar{p}_{\text{sum}}}{Dt} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_v\cdot\frac{\partial\bar{p}_{\text{sum}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \overline{\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial p'_{\text{sum}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)} =$$

$$= \frac{D\bar{p}_{\text{sum}}}{Dt} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_v\cdot\frac{\partial\bar{p}_{\text{sum}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \operatorname{div}(\overline{p'_{\text{sum}}\boldsymbol{u}''}) - \overline{p'_{\text{sum}}\operatorname{div}\boldsymbol{u}''}. \qquad (7.3.42)$$

Кроме того, величину $\overline{\Phi_u}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\overline{\Phi_u} \equiv \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{sum}} : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \overline{\left(\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} : \frac{\partial\boldsymbol{u}''}{\partial\boldsymbol{r}}\right)} = (\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{sum}} : \boldsymbol{D}) + \bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle, \qquad (7.3.43)$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle \equiv \overline{\left(\mathbf{\Pi}_{\text{sum}} : \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} \tag{7.3.44}$$

— скорость диссипации турбулентной кинетической энергии газопылевой смеси в тепло под действием «молекулярной» вязкости (вторая ключевая характеристика в теории гетерогенной турбулентности). Можно показать (см. гл. 3 и монографию *Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*), что в случае развитой турбулентности диссипативное слагаемое (7.3.44) несколько упрощается

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_e\rangle \cong \left(\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}\right) + \overline{\left(\mathbf{\Pi}' : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}'\right)} \approx \overline{\left(\mathbf{\Pi}' : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}'\right)} = \bar{\rho}\varepsilon \geqslant 0; \tag{7.3.44*}$$

заметим, что величина ε (так называемая «истинная» диссипация турбулентной энергии) всегда положительна. Подставляя (7.3.42) и (7.3.44*) в (7.3.36), получим следующее представление для осредненного энергетического уравнения газопылевой смеси

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H_{\text{sum}}\rangle}{Dt} = \frac{D\bar{p}_{\text{sum}}}{Dt} - \operatorname{div}(\boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{sum}} - \overline{p'_{\text{sum}}\boldsymbol{u}''} + \bar{\boldsymbol{q}}_{\text{sum}}) + (\overline{\mathbf{\Pi}}_{\text{sum}} : \boldsymbol{D}) +$$
$$+ R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}\cdot\frac{\partial \bar{p}_{\text{sum}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'_{\text{sum}}\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + \bar{\rho}\varepsilon. \tag{7.3.45}$$

Для замыкания уравнения (7.3.45) необходимы определяющие соотношения для турбулентных потоков тепла; эти соотношения, полученные в монографии (*Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*), имеют вид

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}} = \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \chi^{\text{turb}}\left\{\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right\} + \sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}, \tag{7.3.46}$$

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}}_{\text{rad}} = \overline{p'_{\text{rad}}\boldsymbol{u}''} - \chi_{\text{rad}}\left\{\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_{p,\text{rad}}\rangle}\frac{\partial\bar{p}_{\text{rad}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right\}, \tag{7.3.47}$$

где

$$\chi^{\text{turb}} = \bar{\rho}\langle c_p\rangle\frac{\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}, \qquad \chi_{\text{rad}} = \frac{4ac\langle T\rangle^3}{3\varkappa\bar{\rho}} \tag{7.3.48}$$

— соответственно коэффициент турбулентной теплопроводности газопылевой среды и коэффициент турбулентной лучистой теплопроводности;

$$\langle c_p\rangle = [\bar{\rho}_g(1-\bar{s}) + \rho_d\bar{s}c_{\text{Pd}}]/\bar{\rho}$$

— осредненная удельная теплоемкость (при постоянном давлении) для суммарного континуума. Далее мы будем считать, что в диске $\text{Sc}^{\text{turb}} = \text{Pr}^{\text{turb}}$, поскольку обычно в турбулизованной смеси предполагают равенство турбулентных коэффициентов диффузии и температуропроводности ($\chi^{\text{turb}}/\bar{\rho}\langle c_p\rangle = D^{\text{turb}}$), что равносильно равенству путей смешения для вещества и тепла.

В соответствии с выражением (7.3.46) существует два механизма передачи тепловой энергии через газовзвесь:

1) под действием осредненного градиента температуры (точнее потенциальной температуры для осредненного движения

$$\theta \equiv \mathrm{const} \cdot \langle T \rangle / \overline{p}^{\langle \Re \rangle / \langle c_p \rangle}, \tag{7.3.49}$$

поскольку

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\langle T \rangle}\left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p \rangle}\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}\right) \approx \frac{1}{\langle T \rangle}\left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + G_a\right),$$

где $G_a \equiv g_z / \langle c_p \rangle$ — адиабатический градиент температуры в газопылевом диске;

2) потоками турбулентной диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} = -\overline{\rho} D^{\mathrm{turb}} \partial \langle C_\alpha \rangle / \partial \boldsymbol{r}$ [см. (7.3.15)], причем каждая частица вещества фазы α переносит с собой в среднем $\langle h_\alpha \rangle$ тепловой энергии (заметим, что поскольку $\sum\limits_\alpha \boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}} = 0$, то и $D_d^{\mathrm{turb}} = D_g^{\mathrm{turb}} = D^{\mathrm{turb}}$).

Следует также отметить, что первые члены в (7.3.46) и (7.3.47) не играют роли потока энергии, поскольку величина $\overline{p'_{\mathrm{sum}} \boldsymbol{u}''}$ выпадает из полного энергетического уравнения (7.3.45), и оставлены в формулах (7.3.46) и (7.3.47) только из соображений удобства.

Приведем теперь полезную при моделировании турбулизованной газовзвеси форму записи соотношения (7.3.46). Используя (7.3.15) для преобразования соотношения (7.3.46), в результате будем иметь

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} = \overline{p' \boldsymbol{u}''} - \chi^{\mathrm{turb}}\left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p \rangle}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - D^{\mathrm{turb}} \overline{\rho} \sum_\alpha \langle h_\alpha \rangle \frac{\partial \langle C_\alpha \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} =$$

$$= \overline{p' \boldsymbol{u}''} - \frac{\chi^{\mathrm{turb}}}{\langle c_p \rangle}\left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \tag{7.3.46*}$$

где нами сделано обычное для теории турбулентности предположение о равенстве единице турбулентного числа Льюиса, $\mathrm{Le}^{\mathrm{turb}} \equiv \chi^{\mathrm{turb}} / \overline{\rho}\langle c_p \rangle D^{\mathrm{turb}} = 1$ (см. *Монин*, *Яглом*, *1992*).

Энергетическое уравнение (7.3.45) иногда удобно записать через осредненную суммарную энергию $\langle E_{\mathrm{sum}} \rangle$ вещества и излучения. Используя для этого преобразование

$$\overline{\rho} D \langle E_{\mathrm{sum}} \rangle / Dt + \overline{p}_{\mathrm{sum}} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\rho} D \langle H_{\mathrm{sum}} \rangle / Dt - D \overline{p}_{\mathrm{sum}} / Dt \tag{7.3.50}$$

(являющееся следствием соотношения $\langle H_{\mathrm{sum}} \rangle = \langle E_{\mathrm{sum}} \rangle + \overline{p}_{\mathrm{sum}} / \overline{\rho}$ и осредненного уравнения неразрывности (7.3.2)), для развитого турбулентного течения в диске получим

$$\overline{\rho}\frac{D \langle E_{\mathrm{sum}} \rangle}{Dt} + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{sum}}^{\mathrm{turb}} - \overline{p'_{\mathrm{sum}} \boldsymbol{u}''} + \overline{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{sum}}) = -\overline{p}_{\mathrm{sum}} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle + (\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\mathrm{sum}} : \boldsymbol{D}) +$$

$$+ \overline{R_{gd} |\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\left(\boldsymbol{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} + \left(\boldsymbol{J}_v^{\mathrm{turb}} \cdot \frac{\partial \overline{p}_{\mathrm{sum}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'_{\mathrm{sum}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \overline{\rho}\varepsilon. \tag{7.3.45*}$$

Турбулентный поток удельного объема в газопылевой среде

Получим теперь окончательное представление для турбулентного потока удельного объема J_v^{turb} [см. (7.3.9)]. Для его вывода найдем сначала выражение для турбулентных пульсаций плотности ρ_g' в газовой составляющей смеси, в качестве уравнения состояния которой возьмем, как и прежде, уравнение состояния совершенного многокомпонентного газа

$$p = p_g = k_{\text{B}} T \sum_k n_{g(k)} = \rho_g \mathfrak{R}_g T, \tag{7.3.51}$$

где

$$\mathfrak{R}_g = k_{\text{B}} \sum_k n_{g(k)}/\rho_g = k_{\text{B}} \sum_k Z_k \tag{7.3.52}$$

— так называемая «газовая постоянная» для смеси газов; $Z_k = n_{g(k)}/\rho_g$ — удельная (на единицу массы газового континуума) числовая плотность k-й компоненты. Представляя актуальные значения величин $\mathfrak{R}_g$ и T в виде сумм осредненных и пульсационных значений ($\mathfrak{R}_g = \langle\mathfrak{R}_g\rangle + \mathfrak{R}_g''$, $T = \langle T\rangle + T''$), перепишем (7.3.51) следующим образом

$$\begin{aligned} p &= \langle\mathfrak{R}_g\rangle\rho_g\langle T\rangle + \mathfrak{R}_g''\rho_g\langle T\rangle + \langle\mathfrak{R}_g\rangle\rho_g T'' + \mathfrak{R}_g''\rho_g T'' = \\ &\cong \langle\mathfrak{R}_g\rangle\rho_g\langle T\rangle + k_{\text{B}}\rho_g\langle T\rangle \sum_{k=1}^{n} nZ_k'' + \langle\mathfrak{R}_g\rangle\rho_g T'' + k_{\text{B}}\rho_g \sum_{k=1}^{n}(Z_k''T''). \end{aligned} \tag{7.3.53}$$

Если теперь применить к (7.3.53) оператор статистического осреднения, то получим осредненное уравнение состояния для давления газовзвеси

$$\overline{p} = \langle\mathfrak{R}_g\rangle\overline{\rho}_g\langle T\rangle + k_{\text{B}}\overline{\rho}_g \sum_{k=1}^{n}\langle Z_k''T''\rangle \cong \langle\mathfrak{R}_g\rangle\overline{\rho}_g\langle T\rangle \tag{7.3.54}$$

(заметим, что пульсационный член в осредненном уравнении состояния (7.3.54) в теории турбулентности обычно опускают), которое используем для исключения произведения $\langle\mathfrak{R}_g\rangle\langle T\rangle$ из (7.3.53); в результате для пульсаций ρ_g' будем иметь (*Маров*, *Колесниченко*, *1987*)

$$\frac{\rho_g'}{\overline{\rho}_g} = \frac{p'}{\overline{p}} - \frac{\rho_g T''}{\overline{\rho}_g\langle T\rangle} - \frac{k_{\text{B}}\langle T\rangle\rho_g}{\overline{p}} \sum_{k=1}^{n} Z_k''. \tag{7.3.55}$$

Известно, что относительными пульсациями давления для течений газа с малыми числами Маха, Ма, почти всегда можно пренебречь, по сравнению с относительными пульсациями температуры. Это предположение (*Morkovin*, *1961*), проверенное вплоть до Ма = 5, справедливо, по-видимому, и для турбулентных движений в тонких аккреционных дисках: движение вдоль r- и z-направлений происходят с дозвуковыми скоростями, а скорость вращения u_φ превосходит скорость звука c_{gs} (условие тонкости диска $h_{\text{disk}} \ll r$ вместе с выражением $h_{\text{disk}} \approx c_{gs}/\Omega K$, mid для толщины диска требует $h_{\text{disk}}/r \approx c_{gs}/u\varphi \ll 1$). Далее будем также полагать, что средняя масса газовой составляющей газовзвеси не флуктуирует, и потому $\sum_{k=1}^{n} Z_k'' = (n_g/\rho_g)'' = 0$. Тогда, при учете

(7.3.55), корреляционный член (содержащий пульсации истинной плотности газа) в соотношении (7.3.13) можно переписать в виде

$$-\frac{\overline{\rho_g' \boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}_g} = \frac{\overline{\rho C_g T'' \boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}_g \langle T \rangle} \cong \langle C_g \rangle \frac{\overline{\rho T'' \boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}_g \langle T \rangle} = \frac{\langle T'' \boldsymbol{u}'' \rangle}{\langle T \rangle} \tag{7.3.56}$$

(здесь, как и всюду далее, члены с тройными корреляциями отброшены). Для окончательного преобразования этого выражения воспользуемся определяющим соотношением (7.3.46) для турбулентного потока тепла (7.3.37):

$$-\frac{\overline{\rho_g' \boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}_g} \cong \frac{1}{\langle T \rangle} \overline{\rho T'' \boldsymbol{u}''} \cong \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \sum_\alpha \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \right). \tag{7.3.57}$$

Наконец, подставляя (7.3.15) и (7.3.57) в (7.3.13) и учитывая (7.3.48), в результате получим определяющее соотношение для турбулентного потока удельного объема гетерогенной смеси в следующем окончательном виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} &= -\langle \sigma \rangle \frac{\overline{\rho}}{\rho_d \overline{\rho}_g} \boldsymbol{J}_d^{\text{turb}} + \frac{1}{\langle T \rangle \langle c_p \rangle} \left(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \sum_\alpha \langle h_\alpha \rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}} \right) \cong \\ &\cong \overline{\rho} \frac{\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}} \left[\frac{\rho_d}{\overline{\rho}_g} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\frac{\overline{s}}{\overline{\rho}} \right) - \frac{1}{\langle T \rangle} \left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho} \langle c_p \rangle} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{7.3.58}$$

7.3.5. Балансовые энергетические уравнения дискового вещества

В турбулизованном течении дискового вещества, по сравнению с его ламинарным аналогом, существует большое разнообразие всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергий движения твердых частиц и газа, вносящих свой вклад в сохраняющуюся осредненную суммарную энергию. Для наиболее точного истолкования отдельных слагаемых энергетического баланса, рассмотрим полную систему уравнений энергии для осредненных полей пульсирующих термогидродинамических параметров газопылевого облака, включая уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций.

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии газопылевого потока

Умножая скалярно уравнение движения (7.3.26) на скорость $\langle \boldsymbol{u} \rangle$ и учитывая формулу (7.2.38) для гравитационной силы, после простых преобразований получим следующую субстанциональную форму уравнения живых сил для осредненного движения дискового вещества (теорема количества движения)

$$\begin{aligned} \overline{\rho} \frac{D}{Dt} (|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2) + \operatorname{div} \left(\left[U \overline{p}_{\text{sum}} - \boldsymbol{R} - \overline{\boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}}} \right] \langle \boldsymbol{u} \rangle \right) &= \\ = \overline{p}_{\text{sum}} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{u} \rangle - \left(\left[\boldsymbol{R} + \overline{\boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}}} \right] : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) &- \overline{\rho} \left(\langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right). \end{aligned} \tag{7.3.59}$$

Здесь $-\partial \langle \Psi \rangle / \partial \boldsymbol{r} = \boldsymbol{g} = G \mathcal{M}_\odot \overline{\boldsymbol{r}} / |\overline{\boldsymbol{r}}|^3$; $|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2/2$ — удельная кинетическая энергия осредненного движения вещества диска. Хотя уравнение (7.3.59) имеет энергетическую природу, оно не является законом сохранения энергии в турбулизованном континууме: уравнение (7.3.59) описывает закон превращения кинетической энергии осредненного движения газовзвеси в работу внешних массовых и поверхностных сил и в работу внутренних сил (и обратно) без учета необратимого перехода механической энергии диска в тепловую или другие виды энергии.

Поясним физический смысл отдельных членов уравнения (7.3.59): величина $\operatorname{div}(\overline{p}_{\text{sum}}\langle\boldsymbol{u}\rangle)$ связана с оттоком механической энергии из единицы объема дисковой среды за единичный интервал времени; дивергенция $(\partial/\partial\boldsymbol{r})\times$ $\times\,[(\boldsymbol{R}+\overline{\Pi^*_{\text{sum}}})\langle\boldsymbol{u}\rangle]$ представляет собой скорость, с которой полное поверхностное напряжение $(\boldsymbol{R}+\overline{\Pi^*_{\text{sum}}})$ в осредненной движущейся системе <газозвесь плюс излучение> совершает работу в единичном объеме; величина $\overline{p}_{\text{sum}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle$ $(>0$, или $<0)$ связана со скоростью обратного адиабатического превращения осредненной внутренней энергии (тепла) $\langle E_{\text{sum}}\rangle$ в механическую энергию системы [см. уравнение (7.3.45*)] и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единичном объеме против осредненного суммарного давления $\overline{p}_{\text{sum}}$ потоком движущейся газовзвеси; знак величины $\overline{p}_{\text{sum}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle$ зависит от того, будет ли поток смеси расширяться $(\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle>0)$ или сжиматься $(\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle<0)$; величина $(\boldsymbol{R}+\overline{\Pi^*_{\text{sum}}}):\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r}$ представляет собой полную скорость необратимого превращения кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии [см. уравнения (7.3.45*), (7.3.62) и (7.3.67)], причем диссипация энергии происходит как под влиянием «молекулярной» вязкости со скоростями $(\overline{\Pi}_{\text{sum}}:\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})$ и $(\overline{\Pi}_{\text{rel}}:\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})$, так и под влиянием турбулентной вязкости со скоростью $(\boldsymbol{R}:\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})$.

Если сложить уравнение (7.3.59) и осредненные уравнение баланса потенциальной энергии вещества диска

$$\overline{\rho}\frac{D\langle\Psi\rangle}{Dt}\equiv\frac{\partial\overline{\rho}\langle\Psi\rangle}{\partial t}+\operatorname{div}(\overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\langle\Psi\rangle)=\overline{\rho}\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\langle\Psi\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right),\tag{7.3.60}$$

то в результате получим уравнение переноса осредненной механической энергии турбулизованного газопылевого потока

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{|\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2}{2}+\langle\Psi\rangle\right)+\operatorname{div}([U\overline{p}_{\text{sum}}-\boldsymbol{R}-\overline{\Pi}_{\text{sum}}-\overline{\Pi}_{\text{rel}}]\langle\boldsymbol{u}\rangle)=$$
$$=\overline{p}_{\text{sum}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle-([\boldsymbol{R}+\overline{\Pi}_{\text{sum}}+\overline{\Pi}_{\text{rel}}]:\partial\boldsymbol{D}/\partial\boldsymbol{r}).\tag{7.3.61}$$

Уравнение баланса осредненной кинетической энергии относительного движения фаз

Осредняя уравнение (7.2.43) и пренебрегая корреляционными членами третьего порядка (и тем самым турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии), а также произведениями термогидродинамических потоков (например, членами типа $(\overline{\Pi}_{\text{rel}}:\partial J_v^{\text{turb}}/\partial\boldsymbol{r})$) в осредненном газопылевом континууме, как величинами второго порядка малости, в результате получим

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(\langle C_d\rangle\langle C_g\rangle|\overline{w}|^2/2)\approx\overline{\rho}\langle C_d\rangle\langle C_g\rangle\frac{D}{Dt}(|\overline{w}|^2/2)\cong\overline{-R_{gd}|w|^2+s\sigma\left(w\cdot\frac{\partial p}{\partial r}\right)}+(\overline{\Pi}_{\mathrm{rel}}:D)-\overline{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}}, \tag{7.3.62}$$

где

$$\overline{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}}\equiv-\overline{\left(\Pi'_{\mathrm{rel}}:\frac{\partial u'}{\partial r}\right)}. \tag{7.3.63}$$

Заметим, что когда мы пренебрегаем турбулентной кинетической энергией межфазной диффузии, как величиной третьего порядка малости, мы тем самым не учитываем и связанный с наличием мелкодисперсных частиц дополнительный диссипативный член (см. *Danon et al.*, *1977*) в уравнении переноса турбулентной энергии газопылевой среды (7.3.67). В случае течений со средними и крупными частицами, время релаксации которых значительно, величина дополнительной диссипации энергии турбулентности будет пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (7.3.67) (см., например, *Вараксин*, *2003*). В уравнении (7.3.62) диссипация тепла $(\overline{\Pi}_{\mathrm{rel}}:D)$ (представляющая собой среднее значение работы, совершаемой тензором относительных напряжений над градиентом осредненной скорости $\partial\langle u\rangle/\partial r\neq 0$ вследствие относительного сдвига скоростей фаз при орбитальном движении дискового вещества) связана со скоростью перехода осредненной кинетической энергии диффузии в кинетическую энергию осредненного движения газопылевой смеси в целом [ср. с (7.3.59)]; σ_{rel} — дополнительный источник генерирования турбулентной энергии, связанный с присутствием средних и крупных инерционных частиц в потоке [см. уравнение (7.3.67*)]. Следует иметь в виду, что, согласно (*Gore*, *Crowe*, *1989*), только за крупными частицами (при числах Рейнольдса обтекания частиц $\mathrm{Re}_d>400$) возникают турбулентные вихревые следы, дестабилизирующие течение газовой составляющей и трансформирующие энергию осредненного относительного движения в высокочастотные компоненты энергетического спектра турбулентности. Мелкие же частицы ($\mathrm{Re}_d<110$) преимущественно подавляют энергию турбулентности, расходуя ее на собственное ускорение (т. е. на вовлечение в пульсационное движение полидисперсного потока), причем с уменьшением инерционности части ламинаризирующее воздействие дисперсной фазы на поток возрастает. Что касается частиц средних размеров ($110<\mathrm{Re}_d<400$), то они оказывают смешанное влияние на дисковую турбулентность.

Баланс турбулентной энергии

Рассмотрим теперь уравнение переноса турбулентной энергии $b\equiv\overline{|u''|^2}/2$ газопылевого вещества аккреционного диска. Это фундаментальное в теории турбулентности уравнение, или некоторые его модификации, лежит в основе многих современных полуэмпирических теорий турбулентности (см. *Монин*, *Яглом*, *1965*; *Колесниченко*, *Маров*, *1999*). С помощью уравнения для b в случае гетерогенной среды можно, в частности, проанализировать динамическое воздействие дисперсной фазы на интенсивность турбулентности в газопылевой дисковой среде, а также разработать феноменологический способ моделирования коэффициента турбулентной вязкости с учетом влияния обратных эффектов переноса пыли и «потенциальной» температуры на затухание (поддержание) сдвиговой турбулентности в допланетном облаке. Балансовое уравнение для b может быть получено различными способами (см. *Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*), одним из которых мы воспользуемся и в рассматриваемом здесь случае двухфазной среды.

Пусть $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho d\mathscr{A}/dt = -(\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}} + \sigma_{\mathscr{A}}$, где $\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}}$ и $\sigma_{\mathscr{A}}$ — соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объемная плотность источника признака $\mathscr{A}$. Например, для уравнения движения (7.3.35):

$$\mathscr{A} \equiv \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{J}_{\mathscr{A}} \equiv -\boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}}, \qquad \sigma_{\mathscr{A}} \equiv -p_{\text{sum}} U + \rho \boldsymbol{g}. \tag{7.3.64}$$

Легко показать (для чего нужно умножить тождество $d\mathscr{A}''/dt = d\mathscr{A}/dt - D\langle\mathscr{A}\rangle/Dt - \boldsymbol{u}''\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})\langle\mathscr{A}\rangle$ на $\rho\mathscr{A}''$ и осреднить результат по Рейнольдсу), что балансовое уравнение для среднеквадратичной пульсации $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$ имеет следующий общий вид (см. *Колесниченко*, *1995*)

$$\bar{\rho}\frac{D\langle A''^2/2\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\left(\overline{\rho\mathscr{A}''^2\boldsymbol{u}''/2} + \overline{\mathscr{A}''\boldsymbol{J}_{(A)j}}\right) = -\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_A\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\langle\mathscr{A}\rangle + \overline{\mathscr{A}''\sigma_{\mathscr{A}}} - \bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathscr{A}}\rangle, \tag{7.3.65}$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathscr{A}}\rangle \equiv -\overline{\left(\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\mathscr{A}''\right)} \tag{7.3.66}$$

— скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$. Обобщенное уравнение переноса (7.3.65) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, диффузии, образования за счет обмена энергии между осредненным и пульсационным движением, перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Подставим теперь (7.3.64) в (7.3.65) и (7.3.66); в результате получим следующее уравнение переноса турбулентной энергии газопылевой смеси

$$\rho\frac{Db}{Dt} + \operatorname{div}\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_b = (\boldsymbol{R}:\boldsymbol{D}) - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_v\cdot\frac{\partial\bar{p}_{\text{sum}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \overline{p'_{\text{sum}}\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} - \rho\langle\varepsilon_b\rangle, \tag{7.3.67}$$

где

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_b \equiv \overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'_{\text{sum}}/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{(\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} + \boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}})\cdot\boldsymbol{u}''} \\ \bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle \equiv \overline{(\boldsymbol{\Pi}_{\text{sum}} + \boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}}):\partial\boldsymbol{u}''/\partial\boldsymbol{r}}. \end{cases} \tag{7.3.68}$$

Оценки отдельных членов уравнения (7.3.67), проведенные для случая развитой турбулентности, например в монографии (*Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*), позволяют записать его в виде

$$\bar{\rho}\frac{D\overline{|\boldsymbol{u}''|^2/2}}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'_{\text{sum}}/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{(\boldsymbol{\Pi}^*_{\text{sum}})' \cdot \boldsymbol{u}''}\right\} =$$

$$= (\boldsymbol{R} : \boldsymbol{D}) + \overline{p'_{\text{sum}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}'} - \left(\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \bar{p}_{\text{sum}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}, \qquad (7.3.67^*)$$

где

$$\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle = (\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{sum}} + \overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}}) : \partial \boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}/\partial \boldsymbol{r} + \overline{\boldsymbol{\Pi}'_{\text{sum}} : \partial \boldsymbol{u}'/\partial \boldsymbol{r}} + \overline{\boldsymbol{\Pi}'_{\text{rel}} : \partial \boldsymbol{u}'/\partial \boldsymbol{r}} \cong \bar{\rho}\varepsilon - \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}.$$

Первый член в левой части уравнения (7.3.67*) характеризует изменение во времени (включая конвективный перенос осредненным движением) кинетической энергии турбулентности диска b, второй член — отражает перенос энергии турбулентных пульсаций за счет процессов турбулентной «диффузии». Величина (диссипация энергии)

$$\boldsymbol{R} : \boldsymbol{D} \equiv -2/3\bar{\rho}b \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}\left(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}}\right) \qquad (7.3.69)$$

в правых частях уравнений (7.3.59) и (7.3.67*) фигурирует с разными знаками и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осредненного движения в энергию турбулентности газопылевой дисковой среды, рассматриваемой как целое. Этот гидродинамический механизм генерации турбулентности в дифференциально вращающемся кеплеровском диске рассматривается здесь как основной. Следует подчеркнуть, что подобный переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора пространственно-временного масштаба осреднения турбулентного движения. В случае мелкомасштабной турбулентности величина $(\boldsymbol{R} : \boldsymbol{D})$ всегда положительна, так что мелкомасштабная турбулентность преобразует кинетическую энергию осредненного движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций (это так называемый диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности); вместе с тем, крупномасштабными турбулентными вихрями кинетическая энергия турбулентности может передаваться энергии осредненного движения (см., например, *Ван Мигем*, *1977*)). Величина $\overline{p'_{\text{sum}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}'}$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии газовзвеси в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций суммарного давления p'_{sum} дисковой системы и расширения или сжатия турбулентных вихрей ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}' > 0$ или $\operatorname{div} \boldsymbol{u}' < 0$). Величина $(\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \cdot \partial \bar{p}_{\text{sum}}/\partial \boldsymbol{r})$ представляет собой скорость перехода (в единице объема среды) между турбулентной и осредненной внутренней энергиями диска, причем мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них величина $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \cdot \partial \bar{p}_{\text{sum}}/\partial \boldsymbol{r} > 0$, а крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией (для которых $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \partial \bar{p}_{\text{sum}}/\partial \boldsymbol{r} < 0$ (см. *Колесниченко*, *Маров*, *1999*)), напротив, преобразовывают тепловую энергию газопылевого потока в осредненную кинетическую энергию пульсаций скорости. Следует отметить, что этот механизм генерации турбулентности в диске, предложеннный в работе (*Lin*, *Papaloizou*, *1980*) как основной, не может рассматриваться в таком качестве, поскольку он не всеобъемлющий и носит временный характер (см. *Ruden*, *Pollack*, *1991*; *Nomura*, *2002*). Парная корреляция $\overline{\rho}\varepsilon \equiv \overline{\mathbf{\Pi}'_{\mathrm{sum}} : \partial\boldsymbol{u}'/\partial\boldsymbol{r}} > 0$ в развитом турбулентном потоке представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. уравнение (7.3.45*)] (напомним, что величина пульсаций $\mathbf{\Pi}'$ тензора вязких напряжений определяется эффективным, учитывающим наличие дисперсной добавки коэффициентом кинематической вязкости газопылевой среды, рассматриваемой как целое). Наконец, величину $\overline{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}} \equiv -\overline{\mathbf{\Pi}'_{\mathrm{rel}} : \partial\boldsymbol{u}'/\partial\boldsymbol{r}} > 0$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесенную к единице времени и единице объема), совершаемую пульсациями тензора относительных напряжений над турбулентными вихрями [см. уравнение (7.3.63)], можно интерпретировать как дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом диске, возникающую из-за инерционных эффектов относительного движения дисперсной и газовой фаз и связанную с образованием вихревого следа за крупными частицами с размерами > 1 см (см., например, *Зайчик*, *Вараксин*, *1999*). Отметим, что именно с этим механизмом турбулизации потока фракцией крупномасштабных частиц сантиметрового размера и более (рождающихся благодаря процессам коагуляции и оседания в окрестности центральной плоскости допланетного облака) можно связать часть того дополнительного источника турбулизации течения газовзвеси в окрестности тонкого пылевого слоя которая, по мнению многих исследователей (см. *Goldreich*, *Ward*, *1973*), в значительной степени предотвращает дальнейшее оседание мелких пылевых частиц (микронных размеров) в субдиск и тем самым отодвигает во времени момент наступления прямой гравитационной неустойчивости этого слоя (см., например, *Сафронов*, *1969*; *Weidenschilling*, *1884*; *Goodmann*, *Pindor*, *2000*). Для достижения критической плотности в пылевом слое необходима очень высокая степень его успокоения и уплощения (*Сафронов*, *1969*).

Величину $\overline{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}}$ с точностью до тройных корреляционных членов можно преобразовать к виду

$$\overline{\rho}\sigma_{\mathrm{rel}} = \overline{(s\rho_d C_g \boldsymbol{w}\boldsymbol{w})' : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} = \rho_d \overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}}\overline{s C_g : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} + 2\rho_d \overline{\boldsymbol{w}}\overline{s C_g \boldsymbol{w}' : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} + \rho_d \overline{s C_g \boldsymbol{w}'\boldsymbol{w}' : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} \cong$$

$$\cong \rho_d \overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} : \left(\langle C_g \rangle \overline{s' \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} + \overline{s}\,\overline{C'_g \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} \right) + 2\rho_d \overline{s} \langle C_g \rangle \overline{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{w}' : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \boldsymbol{u}'}, \qquad (7.3.70)$$

из которого видно, что дополнительная генерация турбулентности в запыленном диске (в частности, в субдиске, в котором присутствуют относительно крупные твердые частицы) может возникнуть вследствие осредненного динамического скольжения фаз, коррелированности пульсаций объемного содержания пылевых частиц и концентрации газовой составляющей смеси с пульсационной скоростью потока, а также вследствие пульсационного межфазового скольжения. Как уже неоднакратно подчеркивалось нами, для мелких частиц, для которых эффектами инерции можно пренебречь ($\mathbf{\Pi}_{\mathrm{rel}} \cong 0$), этот дополнительный источник турбулизации диска мал.

В заключении этого раздела отметим, что, как правило, в астрофизической литературе энергетическое уравнения (7.3.45*) для газопылевой дисковой системы записывают в предположении стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля, когда в структуре турбулентности существует некоторое внутреннее равновесие, при котором производство турбулентной энтропии S^{turb} газопылевого вещества примерно равно ее диссипации. К сожалению, некоторые авторы при моделировании диска некритично используют ламинарное энергетическое уравнение с заменой коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент турбулентной вязкости, не принимая во внимание все тонкости вывода энергетического уравнения для турбулизованнной газовзвеси. Если принять такое условие равновесия для баланса величины S^{turb}, то получим [см. формулу (7.3.85)]

$$2\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) + \overline{p'_{\text{sum}} \operatorname{div} \boldsymbol{u}'} - \left(\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \overline{p}_{\text{sum}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{\rho}\varepsilon + \overline{\rho}\sigma_{\text{rel}} \approx 0, \tag{7.3.71}$$

и уравнение (7.3.45*) для развитого турбулентного потока может быть преобразовано к виду

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E_{\text{sum}}\rangle}{Dt} + \operatorname{div}(\boldsymbol{q}_{\text{sum}}^{\text{turb}} - \overline{p'_{\text{sum}}\boldsymbol{u}''}) \cong -\overline{p}_{\text{sum}} \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + 2(\overline{\rho}\nu^{\text{turb}} + \mu_{\text{rad}})(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) +$$
$$+ \overline{\rho}\sigma_{\text{rel}} + \overline{R_{gd}|\boldsymbol{w}|^2 - s\sigma\left(\boldsymbol{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}\right)}, \tag{7.3.72}$$

или, с учетом (7.3.62),

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}(\langle E_{\text{sum}}\rangle + \langle C_d\rangle\langle C_g\rangle|\overline{\boldsymbol{w}}|^2/2) \cong -\operatorname{div}(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'_{\text{sum}}\boldsymbol{u}''} + \boldsymbol{q}_{\text{rad}}^{\text{turb}}) -$$
$$- \overline{p}_{\text{sum}} \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + 2(\overline{\rho\nu^{\text{turb}}} + \mu_{\text{rad}})(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) + (\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}}:\boldsymbol{D}). \tag{7.3.73}$$

В результате уравнение для внутренней энергии осредненного турбулизованного газопылевого континуума, записанное через абсолютную температуру принимает вид

$$\overline{\rho}\langle c_p\rangle\frac{D\langle T\rangle}{Dt} - \operatorname{div}\left\{\chi^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \chi_{\text{rad}}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right\} =$$
$$= \frac{D\overline{p}_{\text{sum}}}{Dt} + 2(\overline{\rho}\nu^{\text{turb}} + \mu_{\text{rad}})(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) + (\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}}:\boldsymbol{D}) - \sum_{s=1}^{r}\langle q_s\rangle\overline{\xi}_s + \overline{\rho}\sigma_{\text{rel}} + R_{gd}|\overline{\boldsymbol{w}}|^2. \tag{7.3.72*}$$

Здесь мы пренебрегли энергией диссипации $\overline{\Phi}_u$ (в единичном объеме в единицу времени) за счет молекулярной вязкости газопылевой смеси по сравнению с «фрикционным теплом» $2\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})$ за счет вязких рейнольдсовых напряжений, возникающих вследствие относительного сдвига элементов газовзвеси при орбитальном движении дискового вещества, а также кинетической энергией диффузии по сравнению с внутренней энергией газовзвеси. Следует отметить, что наличие внутреннего источника нагрева допланетного диска, связанного с турбулентной вязкостью, удовлетворяет современным астрофизическим данным и всем космохимическим ограничениям. В стационарном состоянии это тепло, выделяющееся внутри диска из-за вязкости, не накапливается, а переносится к его поверхности (в основном излучением), а затем излучается с верхней и нижней поверхностей диска наружу. Кроме того в уравнении (7.3.72*), при сделанных предположениях, появляется дополнительный источник нагрева газопылевой среды, связанный с диссипацией энергии под влиянием «молекулярной» диффузии $(\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} : \boldsymbol{D})$, играющий важную роль в субдиске, где относительные скорости фаз могут быть значительными.

Закон сохранения полной энергии для турбулизованной смеси

Складывая балансовые уравнения для внутренней энергии (7.3.45*), механической энергии (7.3.61), кинетической энергии межфазной диффузии (7.3.62) и турбулентной энергии дисковой системы (7.3.67), в результате получим субстанциональную форму закона сохранения полной осредненной энергии двухфазной газопылевой смеси и излучения в диске (в этом параграфе для полной энергии системы «вещество плюс излучение» мы оставили обозначение $U_{\rm tot}$ [ср. с формулой (7.2.42)])

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\langle U_{\rm tot}\rangle = {\rm div}(\overline{\boldsymbol{J}}_U + \boldsymbol{J}_U^{\rm turb}), \tag{7.3.74}$$

где

$$\langle U_{\rm tot}\rangle = \langle E_{\rm sum}\rangle + \langle\Psi\rangle + \frac{1}{2}|\langle\boldsymbol{u}\rangle|^2 + \langle C_d\rangle\langle C_g\rangle|\overline{\boldsymbol{w}}|^2/2 + \overline{|\boldsymbol{u}''|^2/2} \tag{7.3.75}$$

— осредненная полная энергия газовзвесии излучения [см. (7.2.42)];

$$\overline{\boldsymbol{J}}_U \equiv \overline{\boldsymbol{q}_{\rm sum} + (Up_{\rm sum} - \mathbf{\Pi}_{\rm sum} - \mathbf{\Pi}_{\rm rel})\cdot\boldsymbol{u}} \cong$$

$$\cong \overline{\boldsymbol{q}}_{\rm sum} + (U\overline{p}_{\rm sum} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel})\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle + \overline{p_{\rm sum}\boldsymbol{u}''} - \overline{\mathbf{\Pi}'_{\rm sum}\cdot\boldsymbol{u}''} - \overline{\mathbf{\Pi}'_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{u}''} \tag{7.3.76}$$

— осредненный актуальный поток полной энергии а двухфазной газовзвеси;

$$\boldsymbol{J}_U^{\rm turb} \equiv \overline{\rho}\langle U''_{\rm tot}\boldsymbol{u}''\rangle = \overline{\rho\left(H_{\rm sum} - p_{\rm sum}/\rho + \Psi + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + C_2 C_g|\boldsymbol{w}|^2/2\right)\boldsymbol{u}''} =$$

$$= \boldsymbol{q}_{\rm sum}^{\rm turb} - \overline{p_{\rm sum}\boldsymbol{u}''} + \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2\boldsymbol{u}''/2} - (\boldsymbol{R}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle) + \boldsymbol{q}_{\rm sum}^{\rm turb} \tag{7.3.77}$$

— турбулентный поток полной энергии смеси.

Объединяя формулы (7.3.76) и (7.3.77), получим следующее выражение для суммарного потока полной энергии турбулизованного течения газопылевой смеси

$$\overline{\boldsymbol{J}}_U + \boldsymbol{J}_U^{\rm turb} = \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2\boldsymbol{u}''/2} - \overline{(\mathbf{\Pi}'_{\rm sum} + \mathbf{\Pi}'_{\rm rel})\cdot\boldsymbol{u}''} + \boldsymbol{q}_{\rm sum}^{\rm turb} + \overline{\boldsymbol{q}}_{\rm sum} + (U\overline{p}_{\rm sum} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} - \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} - \boldsymbol{R})\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle. \tag{7.3.78}$$

Здесь $\overline{q}_{\rm sum} + \boldsymbol{q}_{\rm sum}^{\rm turb}$ — суммарный поток тепла, обусловленный как осредненным молекулярным, так и турбулентным переносом; $\overline{p}_{\rm sum}\langle\boldsymbol{u}\rangle$ — поток «механической» энергии; $(\overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm sum} + \overline{\mathbf{\Pi}}_{\rm rel} + \boldsymbol{R})\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle$ — суммарный поток энергии, обусловленный работой вязких, относительных и турбулентных напряжений; $\overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2\boldsymbol{u}''/2} - \overline{(\mathbf{\Pi}'_{\rm sum} + \mathbf{\Pi}'_{\rm rel})\cdot\boldsymbol{u}''}$ — «диффузионный» поток вихревой турбулентной энергии. Заметим, что член $\overline{p_{\rm sum}\boldsymbol{u}''}$ в (7.3.77) и (7.3.78) не играет роли потока энергии, так как он выпадает из суммарного потока энергии (7.3.78).

7.3.6. Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в пылевом субдиске

Обсудим теперь полуэмпирический метод моделирования коэффициента кинематической турбулентной вязкости ν^{turb} в двухфазной дисковой среде, учитывающий влияние инерционных эффектов средне- и крупнодисперсных частиц на дополнительную генерацию турбулентности в газопылевом облаке. Далее основным источником турбулентности в диске будем считать сдвиг скорости космического вещества (когда кинетическая энергия турбулентности извлекается из кинетической энергии осредненного движения), связанный с дифференциальностью его углового вращения вокруг прото-Солнца (см., например, *Dubrulle, 1993*; *Горькавый, Фридман, 1994*). Каждый слой вещества с радиусом r дифференциально вращающегося тонкого диска ($h_{\text{disk}}(r) \ll r$), лежащего в окрестности плоскости $r\varphi$ (расположенной при $z=0$ в цилиндрических координатах), движется практически точно по третьему закону Кеплера, т. е. при приближении к центральному телу (с массой $\mathcal{M}_{\odot}$) вращается все быстрее: кеплеровская орбитальная скорость $u_{\varphi}(r) = r\Omega_{K,\text{mid}}(r) = \sqrt{G\mathcal{M}_{\odot}/r}$, а угловая скорость орбитального вращения $\Omega_{K,\text{mid}}(r)$ растет по закону $r^{-3/2}$. Следует отметить, что толщина диска, вообще говоря, не постоянна, а увеличивается с расстоянием от прото-Солнца (в первом приближении $h_{\text{disk}}(r) \propto r$). Подобное движение представляет собой типичный случай крупномасштабного сдвигового течения, исследование которого также возможно в рамках инвариантного моделирования развитых турбулентных течений неоднородных сред (*Колесниченко, Маров, 1999*).

α-параметризация вязкости допланетного диска

Впервые коэффициент турбулентной вязкости в астрофизическом газофазном диске был смоделирован в ставшей уже классической работе (*Shakura, Sunyaev, 1973*), в которой авторы, используя концепцию Колмогорова для динамического коэффициента турбулентной вязкости $\mu_g^{\text{turb}} = \overline{\rho}_g u_g^{\text{turb}} l_g^{\text{turb}}$ (где u_b^{turb} — среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, ограниченная скоростью звука в газе, вычисленной в центральной плоскости диска,

$$u_g^{\text{turb}} \leqslant c_{sg}|_{z=0} \cong \sqrt{\overline{p}/\overline{\rho}_g}|_{z=0};$$

l_g^{turb} — так называемая длина перемешивания Прандтля, ограниченная полутолщиной h_{disk} диска, $l_g^{\text{turb}} \leqslant h_{\text{disk}} \approx c_{sg}|_{z=0}/\Omega_{K,|}$; ρ_g, p_g — соответственно массовая плотность и давление в газофазном диске), получили соотношение ($\alpha \leqslant 1$)

$$R_{r\varphi} = \overline{\rho}_g \nu_g^{\text{turb}}(r) r\partial_r(u_\varphi/r) = -3/2\overline{\rho}_g u_g^{\text{turb}} l_g^{\text{turb}} \Omega_{K,\text{mid}}(r) = -\alpha \overline{p}_g|_{z=0}, \qquad (7.3.79)$$

между r, φ-компонентой тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $R_{r\varphi}$ и тепловым давлением p_g газа. Значение дискового параметра Шакуры—Сюняева (безразмерного свободного параметра) α, характеризующего степень возбуждения турбулентных движений, может быть прокалибровано эмпирически при помощи зависящих от времени спектров, получаемых, в частности, при наблюдении вспышек в двойных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая найдены значения $0{,}01 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (см., например, *Eardley и др., 1978*). Модели турбулизованных аккреционных дисков, построенные с применением соотношения (7.3.79), относятся к так называемым вязким α-дискам. Определение параметра α на основе различных предположений о природе физических процессов, действующих в диске, было темой многочисленных исследований (см., например, обширную библиографию к статье Макалкина, 2004). В частности, ряд авторов (см. *Dubrulle, 1993*; *Cabot и др., 1987*), которые использовали α-модель при рассмотрении таких физических механизмов турбулентности в протопланетном диске, как дифференциальное вращение, тепловая конвекция и т. п. пришли к значению параметра $\alpha \sim 10^{-3}$, которое лучше других удовлетворяет астрофизическим ограничениям.

Главное достоинство подобного эвристического подхода к описанию дисковой турбулентности состоит в его относительной простоте: достаточно заменить в уравнениях звездной гидродинамики коэффициент молекулярной вязкости ν на коэффициент турбулентной вязкости $\nu^{\text{turb}}(r)$, чтобы как-то учесть процессы турбулизации космической среды в аккреционном диске (так, собственно, и поступает большинство астрофизиков, пренебрегая, по существу, почти всеми корреляционными членами в осредненных уравнениях движения). Вместе с тем, важно иметь в виду, что подход Шакуры—Сюняева, разработанный авторами специально для моделирования тонких (однородных по вертикали, т.е. бесструктурных) астрофизических дисков и не учитывающий зависимости коэффициента турбулентной вязкости от высоты, целесообразно использовать только при глобальном (одномерном по r) моделировании эволюции солнечного допланетного диска с параметрами, осредненными по его толщине. Однако, в последнее время этот подход стал некритично применяться в астрофизической литературе и в двумерных (r, z) моделях, так или иначе связанных с моделированием деталей вертикального строения диска, в частности, с расчетом распределения по высоте термогидродинамических параметров в пылевом субдиске, что, конечно, не совсем оправдано.

Кроме этого, следует иметь в виду, что формула (7.3.79), выведенная для газофазных дисков, естественно, не учитывает обратный эффект переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в диске, что при моделировании многих существенных для космогонии явлений необходимо делать. Указанный эффект заключается в том, что благодаря различию концентраций пылевого вещества, смешанного со средой (при турбулентной диффузии), или различию температур (при переносе тепла) в отдельных точках дисковой среды возникают дополнительные архимедовы силы, способствующие или препятствующие развитию турбулентности в диске. Поэтому при моделировании эволюции допланетного облака, как вязкого газопылевого диска, окружавшего Солнце на ранней стадии эволюции, важно учитывать динамические процессы взаимодействия газа и пыли, и, в частности, принимать во внимание обратное влияние инерционных свойств пылевых частиц на интенсивность турбулентности и тепловой режимы субдиска. Весомым аргументом в пользу подобного общего подхода является следующее: частицы пыли, составляющие лишь около 2% массы околосолнечного допланетного облака, могут не приниматься в расчет лишь только на самой начальной стадии эволюции рассматриваемой космической системы, когда почти все первичные (межзвездные) пылевые частицы испарились. На более поздних стадиях, по мере охлаждения допланетного облака, конденсации твердых частиц и значительного увеличения их в размерах в результате процессов коагуляции, оседания дисперсной фазы к центральной плоскости диска, а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой компоненты газовзвеси существенно возрастает (см., например, *Cuzzi и др., 1993*).

На первый взгляд, турбулентное перемешивание мешает диффузионному разделению пылевой и газовой составляющих в гравитационном поле прото-Солнца, препятствуя опусканию мелкодисперсных твердых частиц к его экваториальной плоскости (где они образуют уплощенный пылевой слой), и, тем самым, задерживает формирование критической массы субдиска, при которой возникает его гравитационная неустойчивость (*Сафронов, 1969*). Однако, с другой стороны, как уже было отмечено, при турбулентном режиме течения действенным механизмом аккумуляции средне- и крупномасштабных твердых частиц становится негравитационная аккреция, связанная, в частности, с ростом массы частиц в результате различных механизмов турбулентной коагуляции. Кроме того, турбулентность способствует формированию мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих наиболее благоприятные условия слипания пылевых частиц между собой. В подобных вихревых образованиях число столкновений (в единицу времени) существенно увеличивается, а относительные скорости столкновений существенно уменьшаются по сравнению с ламинарными условиями (за счет совместного когерентного мезомасштабного движения частиц и мелкомасштабных турбулентных пульсаций их относительных скоростей внутри вихревых структур), что также способствует росту конденсированной составляющей субдиска (см. *Barge, Sommeria, 1995*; *Tanga и др., 1996*; *Chavanis, 1999*; *Колесниченко, 2004*). С ростом инерционности твердых частиц они все меньшей степени вовлекаются в пульсационное движение газового несущего потока. Таким образом, турбулентность, в конечном счете, способствует эффективности оседания пылевых частиц к центральной плоскости диска, и тем самым формированию критической массы субдиска, гравитационная неустойчивость и распад которого приводит к образованию планетезималей.

Следует отметить, что воздействие дисперсной фазы на динамику турбулентного течения газовзвеси не является однозначным, а существенно зависит от инерционности и величины объемного содержания (концентрации) пылевых частиц, поскольку они могут оказывать на поток как ламинаризирующее, так и турбулизирующее воздействие (см. *Шрайбер и др., 1987*). Были исследованы течения дискового вещества (*Колесниченко, 2000*), когда твердые частицы газовзвеси начинают оказывать обратное влияние на ее характеристики. Предложено обобщение формулы (7.3.79) для коэффициента турбулентной вязкости на случай учета малоинерционной пылевой составляющей, когда можно воспользоваться приближением пассивной примеси (при котором двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной «многокомпонентной» среды с эффективными теплофизическими свойствами).

Вместе с тем, все еще остается открытым вопрос о влиянии средне- и крупнодисперсных частиц на процессы турбулентного тепломассопереноса в допланетном газопылевом диске и их вкладе в поправочный множитель к коэффициенту турбулентной вязкости газовзвеси. Определение такого рода поправки представляет собой весьма не простую задачу и требует более глубокого изучения структуры турбулентности газовзвеси. В следующем разделе сделана попытка теоретического определения коэффициента турбулентной вязкости ν^{turb} в потоке газовзвеси с относительно крупными инерционными частицами пыли.

Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в пылевом субдиске

Прежде чем приступить к определению указанной поправки к коэффициенту ν^{turb}, напомним, что связь между коэффициентом турбулентной вязкости и энергией турбулентности газовзвеси определяется при помощи соотношения Колмогорова *1942* [см. формулу (7.3.16)]

$$\nu^{\text{turb}} = \gamma^* l \sqrt{b}, \tag{7.3.80}$$

где $l = l(\boldsymbol{r})$ — масштаб турбулентности в данной точке потока (числовой множитель γ^* можно включить в значение l). Для турбулизованного сдвигового потока, обтекающего бесконечную плоскость (в рассматриваемом случае, экваториальную плоскость диска, $z = 0$), локальный масштаб турбулентности $l(\boldsymbol{r})$ можно принять пропорциональным толщине рассматриваемого тонкого слоя

$$L(z) = \gamma^* \varkappa z \tag{7.3.81}$$

или

$$l(z) = \gamma^* \varkappa z \Phi(\text{Re}_{\text{glob}}, \text{Ri}, K), \tag{7.3.82}$$

где Φ — некоторая безразмерная функция; $\varkappa$ — постоянная Кармана, которую можно положить равной $\propto 0{,}4$.

Следует иметь в виду, что вывод адекватного дифференциального уравнения для масштаба $l(\boldsymbol{r})$ является одной из наиболее сложных задач полуэмпирической теории сдвиговой турбулентности. Дело в том, что параметр $l(\boldsymbol{r})$ не может, в общем случае, быть определен только через одноточечные моменты пульсирующей скорости. Являясь мерой расстояния между двумя точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ в турбулизованном потоке, на котором двухточечные корреляторы $\langle \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{u}''(\boldsymbol{r}_2)\rangle$ еще заметно отличаются от нуля, масштаб $l(\boldsymbol{r})$ может быть найден из сложных дифференциальных уравнений для этих моментов путем их интегрирования по расстоянию между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ (см., например, *Иевлев*, *1975*). Вместе с тем, даже в случае известного дифференциального уравнения для $l(\boldsymbol{r})$ возникает сложная проблема граничных условий на свободной границе области турбулентного течения, где масштаб $l(\boldsymbol{r})$ не стремится к нулю (*Лайхтман*, *1970*). Именно по этим причинам, для обеспечения эффективности практических расчетов, локальный масштаб турбулентности $l(\boldsymbol{r})$ часто задается в виде чисто эмпирически найденных функций, или находится с помощью алгебраической формулы типа (7.3.82), учитывающей только геометрию потока, расстояние до стенки и т. п. и не зависящей от особенностей течения жидкости. В некоторых случаях, по-видимому, можно использовать формулу Прандтля—Никурадзе для величины $l(z)$, которую применительно к рассматриваемому здесь плоскому случаю можно записать в виде

$$l(z) = \gamma\bullet, z[1 - 1,1(z/h_{\text{disk}}) + 0,6(z/h_{\text{dis}})^2 - 0,15(z/h_{\text{dis}})^3].$$

Внутреннее равновесие в структуре дисковой турбулентности

Перейдем теперь к выводу искомой поправки к коэффициенту $\nu^{\text{turb}}(\boldsymbol{r})$. Ограничимся в нашем анализе упрощенной статистической схемой турбулентности в двухфазной среде, основанной на уравнении переноса турбулентной энергии (7.3.67*) (однопараметрическая модель турбулентности). Заметим, что для двухфазных течений начало разработки двухпараметрической модели турбулентности $b - \varepsilon$ было положено в работах (*Elghobashi*, *Abou—Arab*, *1982*;*1983*). Если пренебречь в уравнении (7.3.67*) малыми членами (все необходимые оценки можно найти, например, в монографии (*Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*)), то, с учетом формулы (7.3.29) для тензора Рейнольдса и формулы (7.3.58) для турбулентного потока удельного объема $\boldsymbol{J}_v^{\text{turb}}$, его можно переписать в виде

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial b}{\partial t} + \langle \boldsymbol{u}\rangle \cdot \nabla b\right) + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_b^{\text{turb}} \cong -2/3 b\bar{\rho}\, \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}}) +$$

$$- \langle \sigma\rangle \frac{\bar{\rho}}{\rho_d \bar{\rho}_g} \boldsymbol{J}_{dz}^{\text{turb}} g_z + \frac{g_z}{\langle T\rangle\langle c_P\rangle}\left(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \sum_\alpha \langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}\right)_z - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}, \qquad (7.3.83)$$

где g_z — вертикальная компонента силы тяготения прото-Солнца. Как уже подчеркивалось, вклад дополнительной диссипации в величину ε существенен только для относительно мелких пылевых частиц, вследствие чего в балансовом уравнении (7.3.83) для крупнодисперсной пыли он заметной роли не играет (этот вклад частично учтен в диссипативном члене $2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}})$).

Для придания уравнению (7.3.83) необходимого для дальнейших целей вида, используем развитую в работе (*Колесниченко*, *1998*), концепцию двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды в виде двух взаимосвязанных континуумов (открытых подсистем), которые заполняют один и тот же объем координатного пространства диска непрерывно — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса. Использование этой концепции явилось той отправной точкой, которая позволила феноменологически развить гидродинамическую модель структурированной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами (см. *Колесниченко*, *2004*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2006*). Для дискового вещества континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных уравнений движения гетерогенной среды (7.2.76), предназначен для исследования эволюции осредненных полей термогидродинамических характеристик газовзвеси (включая также возможные крупные вихревые образования). Подсистема турбулентного хаоса для диска (вихревой континуум с внутренней структурой) состоит в общем случае из двух составляющих: собственно турбулентного хаоса (так называемой некогерентной турбулентности), связанного со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости, и внедренной в такое почти однородное пульсирующее поле когерентной составляющей — ансамбля мезомасштабных упорядоченных вихревых структур («многомолекулярных» образований). В соответствии с имеющимися на сегодня экспериментальными данными (основательный обзор соответствующих публикаций приведен, например, в монографии (*Хлопков и др.*, *2002*)), когерентная турбулентная структура может быть определена как связная, жидкая масса с завихренностью, скоррелированной по фазе (т. е. когерентной) во всей области координатного пространства, занимаемой структурой. Образование гранул в солнечной фотосфере служит наглядным примером существования обширного семейства когерентных структур в турбулентном потоке, которые появляются на фоне мелкомасштабного турбулентного движения.

Для подсистемы турбулентного хаоса газовзвеси постулируем, как и в случае многокомпонентного континуума (см. гл. 3), фундаментальное тождество Гиббса (*Колесниченко*, *1998*)

$$\sigma E^{\text{turb}} = T^{\text{turb}}\sigma S^{\text{turb}} - p^{\text{turb}}\sigma(1/\bar{\rho}), \tag{7.3.84}$$

с помощью которого можно известным образом (см., например, *де Грот*, *Мазур*, *1964*) определить всю термодинамическую структуру вихревого континуума, т. е. ввести в рассмотрение удельную внутреннюю энергию $E^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, обобщенную удельную энтропию $S^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, обобщенное давление $p^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = 2/3\bar{\rho}E^{\text{turb}}$ и обобщенную температуру $T^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ турбулизации. Различные соотношения между параметрами E^{turb}, S^{turb}, T^{turb} и p^{turb}, которые могут быть получены традиционным способом, могут интерпретироваться тогда как «уравнения состояния» рассматриваемой подсистемы. Далее будем считать, что внутренняя энергия подсистемы турбулентного хаоса $E^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ тождественна энергии турбулентности $E^{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\bar{\rho} \equiv b(\boldsymbol{r}, t)$ и что подсистема турбулентного хаоса газовзвеси в термодинамическом смысле является «идеальным газом», $\bar{\rho}b = 3/2p^{\text{turb}} = 3/2\mathfrak{R}_{gd}\bar{\rho}T^{\text{turb}}$, где $\mathfrak{R}_{gd} = k_{\text{B}}/\mathcal{M}_{gd}$, $\mathcal{M}_{gd}$ — средняя молекулярная масса частиц газовзвеси (кардинальные предположения модели). При использовании тождества Гиббса (7.3.84), уравнение (7.3.83) принимает вид

$$\bar{\rho}T^{\text{turb}}\frac{DS^{\text{turb}}}{Dt} + \operatorname{div}\boldsymbol{J}_b^{\text{turb}} \cong 2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) - \frac{1}{\bar{\rho}_g}J_{dz}^{\text{turb}}g_z + \\ + \frac{g_z}{\langle T\rangle\langle c_p\rangle}\left(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \sum_\alpha\langle h_\alpha\rangle\boldsymbol{J}_\alpha^{\text{turb}}\right)_z - \bar{\rho}\varepsilon + \bar{\rho}\sigma_{\text{rel}}, \tag{7.3.85}$$

которому, по аналогии с (7.2.51), можно придать форму уравнения баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}S^{\text{turb}}) + \operatorname{div}\left(\bar{\rho}S^{\text{turb}}\langle\boldsymbol{u}\rangle + \frac{J_b^{\text{turb}}}{T^{\text{turb}}}\right) = \sigma_{S^{\text{turb}}} \equiv \sigma^e_{S^{\text{turb}}} + \sigma^i_{S^{\text{turb}}}.$$

Воспользуемся теперь уравнением (7.3.85) для анализа стационарно-неравновесного режима развитой ($\mathrm{Re}_{\mathrm{glob}} \gg 1$) турбулентности газопылевой смеси в дисковой системе. Для его реализации должен, естественно, существовать какой-то постоянно действующий механизм турбулизации среды (каким является, естественно, крупномасштабный сдвиг скорости потока космического вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца, или термоконвективная крупномасштабная неустойчивость), передающий кинетическую энергию осредненного течения вихревому движению на больших масштабах и не позволяющий подсистеме турбулентного хаоса достигнуть в течение длительного времени полного термодинамического равновесия. Мощность подобного источника энергии должна быть такой, чтобы скомпенсировать, в частности, расход турбулентной энергии, рассеиваемой в тепло за счет молекулярной вязкости. Известно, что для подобного стационарно-неравновесного режима практически вся расходуемая энергия турбулентности без заметных потерь передается (вниз по цепочке разномасштабных вихрей в процессе их дробления) через инерционный интервал к диссипативному интервалу (см. *Ландау*, *Лифшиц*, *1988*). Тогда в структуре подсистемы турбулентного хаоса устанавливается такое внутреннее равновесие (фактически во всех существующих полуэмпирических теориях турбулентности предполагается (явно или неявно) существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности, когда производство энергии турбулентности равно ее диссипации в каждой точке (см. гл. 3)), при котором $DS^{\mathrm{turb}}/Dt \cong 0$ (энтропия хаоса не меняется вдоль пути элемента массы газовзвеси) и поток энтропии турбулизации постоянен, $\boldsymbol{J}_{(S^{\mathrm{turb}})} \equiv \boldsymbol{J}_b^{\mathrm{turb}}/T^{\mathrm{turb}} \cong$ $\cong \mathrm{const}$ (*Колесниченко*, *2003*). Это означает, что производство $\sigma^i_{S^{\mathrm{turb}}}$ энтропии турбулизации (из-за внутренних диссипативных процессов) компенсируется ее оттоком $\sigma^e_{S^{\mathrm{turb}}}$, т. е. суммарное возникновение энтропии S^{turb} отсутствует, $\sigma_{S^{\mathrm{turb}}} = \sigma^e_{S^{\mathrm{turb}}} + \sigma^i_{S^{\mathrm{turb}}} \cong 0$. Таким образом, подсистема турбулентного хаоса экспортирует свою энтропию во «внешнюю среду», т. е. отдает ее подсистеме осредненного движения. Важно иметь в виду, что как раз такого рода условия являются достаточными для возникновения диссипативных когерентных структур в «открытом» вихревом континууме (см. *Пригожин*, *Стенгерс*, *1994*).

Вывод поправочной функции к коэффициенту ν^{turb}

В случае локально-стационарного состояния развитого турбулентного течения в диске, уравнение (7.3.85) принимает вид

$$\nu^{\mathrm{turb}}(1 - \boldsymbol{R}_f - \boldsymbol{K}_f)(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) + \sigma_{\mathrm{rel}} - \varepsilon \approx 0. \tag{7.3.86}$$

Здесь, по аналогии с безразмерным динамическим числом Ричардсона [см. (3.3.31)]

$$\boldsymbol{R}_f \simeq -\frac{g_z\left(\boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} - \sum\limits_\alpha \langle h_\alpha\rangle \boldsymbol{J}_\alpha^{\mathrm{turb}}\right)_z}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle 2\overline{\rho}\nu^{\mathrm{turb}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = \frac{1}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\,\frac{\dfrac{g_z}{\langle T\rangle}\left(\dfrac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} + \dfrac{g_z}{\langle c_p\rangle}\right)}{2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = \frac{\mathrm{Ri}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}, \tag{7.3.87}$$

учитывающим влияние термической конвекции вещества на порождение турбулентности в диске по сравнению с динамическими факторами (Ri — градиентное число Ричардсона), введено безразмерное динамическое число Колмогорова [ср. с формулой (3.3.32)]

$$\boldsymbol{K}_f \equiv \frac{(g_z/\bar{\rho}_g)(\boldsymbol{J}_d^{\text{turb}})_z}{2\bar{\rho}\nu^{\text{turb}}(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = -\frac{1}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{(g_z/\bar{\rho}_g)\dfrac{\partial\langle C_d\rangle}{\partial z}}{2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = -\frac{1}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{\langle\sigma\rangle g_z\left[\dfrac{\partial\bar{s}}{\partial z} - \bar{s}\dfrac{\partial\ln\bar{\rho}_g}{\partial z}\right]}{2\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}} = \frac{\boldsymbol{K}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}, \tag{7.3.88}$$

являющееся критерием динамической активности пылевых частиц в турбулизованном сдвиговом потоке дискового вещества (*Колесниченко, 2000*). На самом деле, числом Колмогорова является только первое слагаемое в выражении (7.3.88) (при $\bar{\rho}_g = \text{const}$ число $\boldsymbol{K}$ выражает собой относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц несущим потоком); второе слагаемое, характеризующее влияние неоднородности газовой среды на турбулентность, является так называемым критерием Прандтля. Введенные безразмерные параметры являются критериями динамической активности бароклинного вещества диска. Из (7.3.87) следует, что $\text{Ri} < 0$ при $-\partial\langle T\rangle/\partial z > g_z/\langle c_p\rangle$ (т. е. при неустойчивой термической стратификации вещества диска) и $\text{Ri} > 0$ при $-\partial\langle T\rangle/\partial z < g_z/\langle c_p\rangle$ (при устойчивой стратификации); при безразличной же стратификации $\text{Ri} = 0$. Однако наличие в потоке взвешенных мелкодисперсных частиц всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку градиентное число Колмогорова всегда положительно, $\boldsymbol{K} > 0$ (см. *Barenblatt, Golitsyn, 1974*). Таким образом, безразмерное число Колмогорова $\boldsymbol{K}$ учитывает обратное влияние стратификации (по толщине диска) объемной концентрации мелких пылевых частиц на развитие турбулентности в диске.

Принимая далее, согласно гипотезам Колмогорова (*1942*), что кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb} и скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ε зависят только от двух параметров течения — энергии турбулентности b и локального масштаба турбулентности $l(\boldsymbol{r})$, получим [см. формулу (7.3.16)]:

$$\nu^{\text{turb}} = l\sqrt{b}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\alpha^2}\frac{b^{3/2}}{l}. \tag{7.3.89}$$

Здесь в силу неопределенности масштаба $l(\boldsymbol{r})$ константа в выражении для ν^{turb} принята равной единице, а числовой множитель $1/\alpha^2$ в первом приближении считается постоянным. Член [см. формулу (7.3.70)]

$$\bar{\rho}\sigma_{\text{rel}} \equiv -\overline{\left(\boldsymbol{\Pi}'_{\text{rel}} : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} = \overline{s\rho_d C_g(\boldsymbol{w}\boldsymbol{w})' : \frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} \cong \rho_d\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}} : \left(\bar{s}\overline{C'_g\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial \boldsymbol{r}}} + \langle C_g\rangle\overline{s'\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}'}\right),$$

отвечающий за дополнительное порождение энергии турбулентности при больших числах Рейнольдса (в следах за движущимися крупными частицами), представим в виде

$$\sigma_{\text{rel}} = \beta\bar{s}\frac{|\overline{\boldsymbol{w}}|^2\sqrt{b}}{l}, \tag{7.3.90}$$

где β — эмпирическая константа. Следует отметить, что формула (7.3.90) достаточно близка по форме к выражению, полученному в работе (*Вараксин*, *2003*) с использованием автомодельного решения для дальнего осесимметричного турбулентного следа (*Yarin*, *Hetsroni*, *1994*) и в работе (*Деревич*, *1994*) на основе полуэмпирического подхода, и справедливому только при очень малой объемной концентрации $\bar{s}$ дисперсной фазы, когда отсутствует интерференция следов за отдельными частицами. Формула (7.3.90) полностью совпадает с выражением $\sigma_{\rm rel} = \beta^* \bar{s} |\overline{\boldsymbol{w}}|^3 / d_p$, приведенным в монографии Вараксина (*2003*) при $|\overline{\boldsymbol{w}}|/\sqrt{b} = d_d/l$. Здесь $\beta^* = a(C_D \delta/\xi_d)^{4/3}$; ξ_d — длина смешения концентрации пылевых частиц; δ — полуширина следа; $C_D(\mathrm{Re}_d)$ — коэффициент сопротивления частицы ($a = 0{,}0027$, $\delta/\xi_d = 5$).

Подставляя (7.3.89) и (7.3.90) в (7.3.86), будем иметь:

$$2l\sqrt{b}(1 - \boldsymbol{R}_f - \boldsymbol{K}_f)(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}}) + \beta \bar{s} \frac{|\overline{\boldsymbol{w}}|^2 \sqrt{b}}{l} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{b^{3/2}}{l} = 0. \tag{7.3.91}$$

Уравнение (7.3.91) распадается на два уравнения: $b = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения в дисковой системе, и

$$b = 2\alpha^2 l^2 \left(1 - \alpha^2 \beta \bar{s} \frac{|\overline{\boldsymbol{w}}|^2}{b}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K}}{\mathrm{Sc}^{\rm turb}}\right)(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}}), \tag{7.3.92}$$

описывающее установившийся турбулентный режим движения газовзвеси. Уравнение (7.3.92) имеет вещественные решения только при $\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K} < (\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K})_{\rm cr} \equiv \mathrm{Sc}^{\rm turb}$ (при $\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K} \geqslant \mathrm{Sc}^{\rm turb}$ существует единственное вещественное решение , относящееся к ламинарному режиму течения). Пусть имеет место турбулентный режим; тогда

$$\sqrt{b} = \alpha l \frac{\sqrt{1 - (\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K})/\mathrm{Sc}^{\rm turb}}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \beta^* (d_2^2/l^2)\bar{s}}} \sqrt{2(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}})}. \tag{7.3.93}$$

Из формулы (7.3.92) видно, что наличие в потоке крупных твердых частиц всегда приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку осредненная кинетическая энергия относительного движения фаз ($\propto |\overline{\boldsymbol{w}}|^2$) для них сопоставима с энергией турбулентности b.

Таким образом, для локального коэффициента турбулентной вязкости в газопылевом диске получим

$$\nu^{\rm turb}(\boldsymbol{r}) = \alpha l^2(\boldsymbol{r}) \varphi \varphi_1 \sqrt{2(\mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}})}, \tag{7.3.94}$$

где

$$\varphi = \varphi(\mathrm{Ri}, \boldsymbol{K}) \equiv \sqrt{1 - (\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K})/\mathrm{Sc}^{\rm turb}}, \tag{7.3.95}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(\bar{s}, C_d, \delta/\xi_d, d_d/l,) \equiv \sqrt{1 - \alpha^2 a (C_D \delta/\xi_d)^{4/3} (d_d/l)^2 \bar{s}} \tag{7.3.96}$$

— поправочные безразмерные функции, учитывающие, соответственно, обратный эффект переноса пыли и тепла на развитие турбулентности в допланетном диске (φ), а также эффект влияния на процессы турбулентного тепломассопереноса в потоке средне- и крупнодисперсных частиц и их вклад в коэффициент турбулентной вязкости газовзвеси (φ_1).

§ 7.4. Стационарные движения в турбулизованном газопылевом субдиске

В качестве иллюстрации развитого подхода применим полученные выше общие соотношения к моделированию допланетного газопылевого облака (вращающегося вокруг прото-Солнца, находящегося на ранней стадии эволюции, до потери им газовой составляющей) на основе достаточно схематизированного описания стационарного осесимметрического турбулизованного течения дискового вещества, приводящего, однако, к обозримым и численно решаемым уравнениям. Поскольку нас в конечном счете будет интересовать пространственное распределение термогидродинамических параметров внутри пылевого слоя (в субдиске), образованного при оседании твердых частиц к экваториальной плоскости прото-Солнца при существовании в диске развитой турбулентности, то для полноты картины важно будет рассмотреть и некоторые простые механические свойства вращающегося газопылевого облака в целом. Анализ дисковой среды проведем при следующих предположениях:

1) исследуется медленно эволюционирующее газопылевое облако, которое вращается вокруг фиксированной в пространстве оси z с некоторой угловой скоростью $\Omega(r, z)$;

2) вращение предполагается настолько медленным, что меридиональной циркуляцией вещества допланетного облака можно пренебречь (по существу для кеплеровских аккреционных дисков у скорости имеется только φ-компонента, т. е. $u_z \ll u_r \ll u_\varphi$);

3) магнитные поля не играют существенной роли (как известно, в отсутствие макроскопического магнитного поля фигура облака становится сплюснутой);

4) предполагается, что дисковая конфигурация стационарна в инерциальной системе отсчета с началом в центре массы прото-Солнца;

5) для бароклинного диска (для вещества которого справедливо уравнение состояния (7.2.54)) постулируется существование центральной плоскости симметрии, которая совпадает с экваториальной плоскостью прото-Солнца, определяемой условием $z = 0$;

6) отношение полутолщины диска $h_{\text{disk}}(r)$ к его радиусу r предполагается гораздо меньшим единицы, $h_{\text{disk}}(r)/r \ll 1$ (условие тонкости диска);

7) пренебрегается процессом самогравитации вещества диска по сравнению с влиянием гравитационного поля прото-Солнца;

8) радиационное давление в диске считается много меньше газового давления, $p_R \ll p_g$;

9) газопылевой диск обладает очень большой оптической толщиной для излучения всех частот;

10) химические реакции и фазовые переходы не учитываются, состав газовой фазы диска предполагается однородным;

11) механизмом турбулизации допланетного кеплеровского диска считается крупномасштабный сдвиг скорости вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг прото-Солнца.

7.4.1. Аксиально-симметричное движение в газопылевом диске

При вращении вокруг прото-Солнца практически точно по закону Кеплера каждый элемент газовзвеси в диске совершает медленное движение по радиусу внутрь, поскольку торможение, связанное с силами вязкого трения между соседними цилиндрическими слоями, вращающимися с разными угловыми скоростями, приводит к перераспределению удельного момента количества движения и появлению радиального потока массы. Таким образом, основная масса вещества диска медленно (по сравнению с орбитальным движением) дрейфует к центру масс по очень пологой спиральной траектории, по мере того как момент количества движения вместе с меньшей массой вещества передается наружу (в силу закона сохранения) — из внутренних областей диска во внешние области. Одновременно турбулентные напряжения, возникающие вследствие относительного сдвига отдельных слоев дискового вещества при их орбитальном движении, приводят к вязкой диссипации тепла. Как известно, условие тонкости диска означает, что температура в нем относительно низка и градиент давления значительно меньше двух основных механических сил — гравитационной и центробежной (см., например, *Шапиро, Тьюколски, 1985*). Низкие температуры поддерживаются, однако, лишь в том случае, если диссипируемое в турбулизованной системе вязкое тепло эффективно излучается наружу и не накапливается в диске. В стационарном состоянии большая часть этого тепла должна излучаться верхней и нижней поверхностями диска (поскольку диск тонкий, излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении). Таким образом, тонкий аккреционный диск должен быть в высокой степени неадиабатическим.

Далее будем использовать инерциальную цилиндрическую систему координат $(\boldsymbol{r}, \varphi, z)$ с началом отсчета, совпадающим с центром тяжести; плоскость $z = 0$ будем считать совпадающей с центральной плоскостью симметрии диска. Предположим также, что осредненное движение космической жидкости реализуется лишь в азимутальном направлении

$$\langle u_r \rangle = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = \Omega(\boldsymbol{r}, z)\boldsymbol{r}, \quad \langle u_z \rangle = 0, \tag{7.4.1}$$

а истинная скорость течения газопылевой смеси беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях. Можно показать, что если вещество диска находится в состоянии квазистационарного вращения в инерциальной системе отсчета, то оно с необходимостью обладает осевой симметрией $(\partial/\partial\boldsymbol{\varphi} = 0)$: $\bar{s} = \bar{s}(\boldsymbol{r}, z)$, $\bar{\rho}_g = \bar{\rho}_g(\boldsymbol{r}, z)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\boldsymbol{r}, z)$, $\bar{p} = \bar{p}(\boldsymbol{r}, z)$, $\langle T \rangle =, \langle T \rangle(\boldsymbol{r}, z)$, $\Omega = \Omega(\boldsymbol{r}, z)$ и т. п. (см., например, *Тассуль, 1982*). Отметим, что закон сохранения массы (7.3.2) в рассматриваемом стационарном случае всегда выполняется, так как движения осесимметричны, а меридиональных течений нет, $\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$.

Уравнения сохранения импульса

Поскольку звезды типа T Тельца имеют, по-видимому, высокую концентрацию пыли по всей толщине диска (см., например, *Beckwith et al., 2000*), дополнительные напряжения, связанные с относительным движением газа и крупнодисперсной пыли, эффективно действуют только в области, непосредственно прилегающей к экваториальной плоскости диска (малой по сравнению со всем диском), то в уравнении движения они могут быть опущены. Если учесть взаимодействие между веществом и излучением внутри диска до членов самого низкого порядка по $|\langle \boldsymbol{u}\rangle/c$, то три компоненты уравнения движения (7.3.26) можно записать в виде

$$\frac{1}{\overline{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial r}(\overline{p}+p^{\text{turb}}) = r\Omega^2(r,z) - \frac{G\mathcal{M}_{\odot}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \equiv g_r \cong 0, \tag{7.4.2}$$

$$\frac{1}{\overline{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial z}(\overline{p}+p^{\text{turb}}) = -\frac{G\mathcal{M}_{\odot}z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \equiv -g_z, \tag{7.4.3}$$

$$\overline{\rho}\frac{\partial}{\partial t}[r\Omega(r,z,t)] \cong \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{r\varphi} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{q}_{\text{rad}})_r r\Omega(r,z)\right]\right\} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{z\varphi} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{q}_{\text{rad}})_z r\Omega(r,z)\right] +$$
$$+\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{\varphi r} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{q}_{\text{rad}})_r r\Omega(r,z)\right] \cong 0, \tag{7.4.4}$$

где

$$g_z = \frac{G\mathcal{M}_{\odot}z}{r^3}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \Omega^2_{K,\text{mid}}(r)z; \tag{7.4.5}$$

$\boldsymbol{g}=\{g_r,\,0,\,-g_z\}$— эффективная сила тяжести (на единицу массы) с поправкой на центробежное ускорение;

$$\Omega_K(r,z) \equiv \sqrt{G\mathcal{M}_{\odot}/(r^2+z^2)^{3/2}}$$

— кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{K,\text{mid}}(r) \equiv \Omega_K(r,0) = \sqrt{G\mathcal{M}_{\odot}/r^3}$— кеплеровская угловая скорость в центральной плоскости диска; $\overline{p}(r,z)$ — тепловое давление дисковой среды, связанное с плотностью $\overline{\rho}(r,z)$ и температурой $\langle T(r,z)\rangle$ осредненным уравнением состояния (7.2.55), $\overline{p}=\overline{\rho}\langle\Re\rangle\langle T\rangle$;

$$p^{\text{turb}}(r,z) \equiv \frac{2}{3}\overline{\rho}b = \frac{1}{3}\overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}$$

— давление турбулизации [см. уравнение (7.3.29)]; c — скорость света в вакууме;

$$\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}} \equiv -p^{\text{turb}}\boldsymbol{U} + 2(\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}+\mu_{\text{rad}})\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} = -\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r p^{\text{turb}} - \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi p^{\text{turb}} - \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_z p^{\text{turb}} +$$
$$+(\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}+\mu_{\text{rad}})\left\{\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_r r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_z r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z} + \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi r\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right\} \tag{7.4.6}$$

[см. (7.3.29) и приложение]. При написании уравнения (7.4.2) нами было принято во внимание то обстоятельство, что в радиальном направлении (перпендикулярном оси вращения) сила тяготения уравновешивается центробежной силой, т. е. полный градиент давления газовзвеси $\partial(\overline{p}+p^{\text{turb}})/\partial r$ очень мал, и вращение является практически кеплеровским (однако именно этот градиент в конечном счете служит движущей силой радиального дрейфа пылевых частиц к центру диска). С другой стороны, поскольку нет результирующего движения газовзвеси в вертикальном направлении (перпендикулярном центральной плоскости диска), то сохранение импульса вдоль оси $\boldsymbol{i}_z$ сводится к условию гидростатического равновесия, при котором равновесие в направлении z поддерживается благодаря градиенту давления. Отметим, что замена в уравнении (7.3.96) дифференциалов конечными разностями, т. е. замена $\Delta(\overline{p}+p^{\text{turb}})$ на $\approx \overline{p}+p^{\text{turb}}$, где $(\overline{p}+p^{\text{turb}})$ — полное давление, вычисленное при $z=0$, и замена $\Delta z \approx h_{\text{disk}}$, позволяет найти следующее выражение для полутолщины турбулизованного диска

$$h_{\text{disk}} = \sqrt{((\overline{p}+p^{\text{turb}})/\overline{\rho})_{z=0}}/\Omega_{K,\text{mid}} \cong c_s\sqrt{1+\tfrac{2}{3}bc_s^{-2}}/\Omega_{K,\text{mid}} \qquad (7.4.7)$$

[ср. с формулой (7.3.79)]. В этом соотношении $\Omega_{K,\text{mid}} = \sqrt{G\mathscr{M}_{\odot}/r^3}$ — кеплеровская угловая скорость в центральной плоскости диска; c_s — скорость звука газовзвеси [см. формулу (7.2.57)]. Именно градиент $\partial(\overline{p}+p^{\text{turb}})/\partial z$ определяет основное направление выталкивающей силы плавучести в поле тяготения центральной массы, способствующей, в частности, дополнительной генерации турбулентной энергии за счет конвективной неустойчивости в вертикальном направлении (между экваториальной плоскостью и поверхностями диска). Таким образом, из (7.4.2) и (7.4.3) следует, что вязкая диссипация не влияет на r- и z-компоненты уравнения движения для всего диска, которые распадаются на отдельные уравнения для осредненных радиального и вертикального движений.

Напротив, φ-компонента уравнения движения (7.4.4) (по существу уравнение для определения угловой скорости $\Omega(r, z)$ при заданных граничных условиях), которую с помощью преобразований [см. приложение]

$$\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})\right]_{\varphi} \equiv \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{r\varphi}] + \frac{\partial}{\partial z}[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{z\varphi}] + \frac{(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rad}})_{\varphi r}}{r}\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\,\text{div}\left(\mu(r, z)r^2\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z, t)\right), \qquad (7.4.8)$$

$$-\frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot[r\Omega(r, z, t)\boldsymbol{q}_{\text{rad}}]\right\}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{1}{c^2 r}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot[r^2\Omega(r, z, t)\boldsymbol{q}_{\text{rad}}] \qquad (7.4.9)$$

(здесь и далее для краткости через $\mu(r, z) \equiv \overline{\rho}\nu^{\text{turb}}(r, z) + \mu_{\text{rad}}(r, z)$ обозначен полный коэффициент сдвиговой вязкости), можно привести к виду

$$\overline{\rho}\frac{\partial J r, z, t)}{\partial t} = \text{div}\left(\mu(r, z)r^2\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z, t)\right) - c^{-2}\,\text{div}(r^2\Omega(r, z, t)\boldsymbol{q}_{\text{rad}}) \cong 0 \qquad (7.4.10)$$

(где $\text{div}\,\boldsymbol{A} \equiv r^{-1}\partial(rA_r)/\partial r + \partial A_z/\partial z$ — дивергенция в цилиндрической системе координат), описывает необратимое изменение удельного момента количества движения $\boldsymbol{J}(r, z, t) \equiv \lfloor r^2\Omega(r, z, t)\rfloor$ за счет вязкого трения и, кроме того, учитывает перенос момента количества движения полным лучистым потоком $\boldsymbol{q}_{\text{rad}}$ (второй член в правой части уравнения (7.4.6) учитывает потерю момента количества движения вследствие излучения, испускаемого вращающимися областями диска). Как известно (см., например, *Тассуль, 1982*), механизм торможения излучением оказывается сильнее, чем диффузия угловой скорости за счет вязкости, если величина $\langle T\rangle/|\partial\langle T\rangle/\partial \boldsymbol{r}|$ мала по сравнению с $\langle\Omega\rangle/|\partial\langle\Omega\rangle/\partial \boldsymbol{r}|$, что имеет место, по-видимому, лишь в областях диска, прилегающих к его излучающей поверхности Σ.

Далее мы ограничимся, однако, анализом стационарных или квазистационарных движений внутри диска, когда с точностью до членов порядка $|\langle \boldsymbol{u}\rangle|/c$ уравнение (7.4.10) сводится к следующему:

$$\operatorname{div}\left[\mu(r, z) r^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \Omega(r, z)\right] = 0. \tag{7.4.11}$$

Поскольку на внешней границе Σ диска вектор касательных напряжений должен обращаться в нуль, то должно выполняться условие

$$\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Omega(r, z) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{7.4.12}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к дисковой поверхности.

В связи с уравнениями (7.4.11) и (7.4.12), сформулируем один любопытный результат, относящийся к проблеме медленно эволюционирующего вязкого диска. Запишем для этого полную диссипативную функцию диска в стационарном состоянии

$$D(\Omega) \equiv \int_{\wp} \Phi_{\langle u\rangle} d\boldsymbol{r} \equiv \int_{\wp} 2\mu(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}}) d\boldsymbol{r} = \int_{\wp} 4\mu(r, z)(D_{r\varphi}^2 + D_{z\varphi}^2) d\boldsymbol{r} =$$
$$= \int_{\wp} \mu(r, z) r^2 \left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2\right\} d\boldsymbol{r}, \tag{7.4.13}$$

где $\wp$ — объем диска [см. приложение]. Если рассмотреть теперь произвольный закон вращения диска $\Omega(r, z) + \delta\Omega(r, z, t)$, на который наложено лишь то ограничение, что сохраняются поверхность Σ и объем $\wp$ конфигурации, то классический результат (полученный по существу еще Гельмгольцем) состоит в том, что каждое решение уравнений (7.4.11) и (7.4.12) характеризуется тем свойством, что полная мощность (7.4.13), рассеиваемая трением, является абсолютным минимумом по сравнению с мощностью при любом другом движении, которое согласуется с границей Σ и объемом $\wp$.

Сохранение энергии

Для моделирования внутренней термической структуры допланетного диска вокруг молодого Солнца, необходимо привлекать уравнение энергии (7.3.73), в котором основным внутренним источником нагрева является диссипация турбулентной энергии. Если не принимать во внимание химические реакции, а также процессы испарения и конденсации дискового вещества, то для квазистационарного осесимметричного движения это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(q_r^{\text{turb}} + q_{\text{rad},r})] + \frac{\partial}{\partial z}(q_z^{\text{turb}} + q_{\text{rad},z}) = \mu(r, z) r^2 \left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2\right\} + Q_{\odot},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}(q_z^{\text{turb}} + q_{\text{rad},z}) = \mu(r, z)r^2\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2\right\} + Q_{\odot}, \qquad (7.4.14)$$

поскольку для тонкого диска излучение направлено в основном в вертикальном, а не в радиальном направлении. Заметим, что возможный дополнительный источник нагревания диска, связанный с членом $\overline{\overline{\Pi}}_{\text{rel}} : \boldsymbol{D}$, эффективно действует только в пылевом субдиске (т. е. в объеме малом по сравнению со всем диском) и потому в уравнении (7.4.14) опущен.

В уравнениях (7.4.12) и (7.4.14) через $Q_{\odot}$ обозначены возможные локальные источники нагрева газопылевого облака, связанные, в частности, с поглощением солнечной электромагнитной и корпускулярной радиации составляющими газопылевого диска и ее последующей трансформацией вследствие всевозможных радиативных процессов, переизлучения, рассеяния, фотохимических и химических реакций и т. п. Сложность и многочисленность химических и фотохимических реакций, протекающих в допланетной дисковой среде в самом общем случае, обусловлена присутствием основных элементов Солнечной системы, входящих в состав исходных компонентов газовой смеси, а также наличием агентов ионизации (диссоциации) в виде энергичных фотонов излучения и фотоэлектронов (продуктов фотолиза) (см., например, *Willacy и др., 1998*). Их поглощение приводит к диссоциации, ионизации, и/или возбуждению вращательных и колебательных уровней газовых компонентов смеси, причем каждая из этих реакций может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. При практических расчетах далеко не все элементарные процессы, ответственные за тепловой баланс дисковой среды, можно адекватно учесть в соответствующих моделях. Именно поэтому при постановке физически самосогласованных задач моделирования эволюции химического состава и гидродинамики диска возникает как одна из важнейших проблема точного учета вкладов от взаимодействия вещества и излучения в структуре энергетического уравнения с целью определения так называемой функции нагревания вещества, учитывающую ту долю поглощенной солнечной радиации, которая переходит в тепло (см., например, *Маров, Колесниченко, 1987*). Оценки подобной функции сопряжены с известными трудностями и требуют конкретизации химической стадии дисковой эволюции.

Турбулентный поток тепла q_z^{turb} и радиационный поток энергии $q_{\text{rad},z}$, излучаемой диском, определяются уравнениями (7.3.46) и (7.3.47)

$$\begin{cases} q_z^{\text{turb}}(r, z) = -\overline{\rho}\langle c_P\rangle \dfrac{\nu^{\text{turb}}(r, z)}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle + \dfrac{\Omega^2_{K,\text{mid}}(r)}{\langle c_P\rangle} z\right), \\ q_{\text{rad},z}(r, z) = -\chi_{\text{rad}}(r, z)\dfrac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle, \end{cases} \qquad (7.4.15)$$

где $\chi_{\text{rad}}(r, z) = 4ca\langle T\rangle^3/3\widetilde{\varkappa}\overline{\rho}$ — коэффициент лучистой теплопроводности дисковой среды; $\widetilde{\varkappa}$ — полная осредненная по Росселанду непрозрачность газовзвеси [см. формулу (7.2.72)], существенно зависящая от наличия и высотного распределения пылевых частиц в допланетном облаке (см., например, *Pollack и др., 1994*); $\mu_{\text{rad}}(r, z) = 4a\langle T\rangle^4/15c\widetilde{\varkappa}\overline{\rho}$ — коэффициент лучистой вязкости. Уравнение (7.4.15) должно быть дополнено следующими граничными условиями на экваториальной плоскости (ввиду симметрии диска) и верхней поверхности диска

$$q_z^{\text{turb}}|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z}\langle T\rangle = 0, \quad (*) \qquad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{q}^{\text{turb}} + \boldsymbol{q}_{\text{rad}}) = \sigma\langle T\rangle^4 - f_0\frac{L_\odot}{4\pi r^2}, \quad \text{на } \Sigma \quad (**) \tag{7.4.16}$$

(где σ — постоянная Стефана—Больцмана; $L_\odot$ — светимость Солнца) учитывающими баланс тепла на границах. Первый член в правой части формулы (**) учитывает чернотельное излучение поверхности диска, а второй член описывает падающий на поверхность диска ослабленный поток излучения от протозвезды, причем ослабляющий фактор (*Kusaka и др., 1970*)

$$f_o = \left[\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_{\text{disk}}(r,z)}{r} + \frac{2R_\odot^{\text{proto}}}{3\pi r}\right)\right]\frac{L_\odot^{\text{proto}}}{L_\odot} \tag{7.4.17}$$

зависит от геометрии диска, радиуса $R_\odot^{\text{proto}}$ и светимости $L_\odot^{\text{proto}}$ прото-Солнца (в частности, для $L_\odot^{\text{proto}} = 7L_\odot$ и $R_\odot^{\text{proto}} = 5R_\odot$ (см. *Watanabe и др., 1990*)) $f_o = 0{,}1$ на $r = 1$ а. е.).

Уравнение переноса пылевой составляющей

При моделировании эволюции турбулизованного газопылевого облака, особенно на стадии образования в окрестности его экваториальной плоскости пылевого субдиска (толщиной $2h_{\text{subdisk}}$, где h_{subdisk} — верхняя граница пылевого субдиска, $h_{\text{disk}} > h_{\text{subdisk}}$), следует привлекать к рассмотрению осредненное уравнение переноса (7.3.10*) для концентрации $\langle C_d\rangle = \rho_d\bar{s}/\bar{\rho}$ пылевой составляющей дискового вещества. Если не принимать во внимание процессы испарения и конденсации ($\overline{\sigma}_{dg} = 0$) твердых частиц, то в стационарном состоянии имеет место баланс между осаждением пылевых частиц $\boldsymbol{J}_d \equiv \overline{\overline{\rho}_d\boldsymbol{w}_d} \cong \cong \overline{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\boldsymbol{w}}$ и турбулентным перемешиванием $\boldsymbol{J}_d^{\text{turb}} = -\overline{\rho}D_d^{\text{turb}}\partial\langle C_d\rangle/\partial\boldsymbol{r}$ [см. формулу (7.3.15)]; тогда уравнение (7.3.10*) принимает вид

$$\operatorname{div}\left(\overline{\rho}_g\langle C_d\rangle\overline{\boldsymbol{w}} - \frac{\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\langle C_d\rangle\right) = 0, \tag{7.4.18}$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\bar{s}\langle C_g\rangle\overline{w}_r - \frac{\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{s}}{\overline{\rho}}\right)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{s}\langle C_g\rangle\overline{w}_z - \frac{\overline{\rho}\nu^{\text{turb}}}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{s}}{\overline{\rho}}\right)\right) = 0, \tag{7.4.19}$$

где $\overline{\boldsymbol{w}} \equiv (\overline{\boldsymbol{u}}_d - \overline{\boldsymbol{u}}_g)$ — осредненная относительная скорость пыли и газа, определяемая соотношением (7.3.20), которое в цилиндрических координатах принимает вид

$$\overline{\rho}\theta_{gd}\overline{w}_r(r,z) \cong \overline{w}_\varphi(r,z)\Omega(r,z) + \frac{1}{\overline{\rho}_g}\frac{\partial\overline{p}}{\partial r} \cong \overline{w}_\varphi(r,z)\Omega_{K,\text{mid}}(r) - \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_g}r\eta\Omega_{K,\text{mid}}^2(r), \tag{7.4.20}$$

$$\overline{\rho}\theta_{gd}\overline{w}_\varphi(r,z) = -\frac{1}{2}\overline{w}_r(r,z)\Omega(r,z) \cong -\frac{1}{2}\overline{w}_r(r,z)\Omega_{K,\text{mid}}(r), \tag{7.4.21}$$

$$\overline{\rho}\theta_{gd}\overline{w}_z(r,z) = \frac{1}{\overline{\rho}_g}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} \cong -\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_g}\Omega_{K,\text{mid}}^2(r)z. \tag{7.4.22}$$

Тогда r, φ, z компоненты осредненной относительной скорости $\overline{w}$, полученные с учетом уравнений движения (7.3.95) и (7.3.96), выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \overline{w}_r(r, z) \cong -\dfrac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_g}\eta \dfrac{\zeta}{1+\zeta^2} r\Omega_{K,\mathrm{mid}}(r), \\ \overline{w}_\varphi(r, z) \cong \dfrac{\overline{\rho}}{2\overline{\rho}_g}\eta \dfrac{\zeta^2}{1+\zeta^2} r\Omega_{K,\mathrm{mid}}, \\ \overline{w}_z(r, z) \cong -\zeta z \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r), \end{cases} \tag{7.4.23}$$

где параметр $\zeta = \Omega_{K,mid}^{/}\overline{\rho}\theta_{gd} \ll 1$, поскольку время установления квазиравновесного движения пыли и газа $(1/\overline{\rho}\theta_{gd})$ в диске много меньше кеплеровского периода $(2\pi/\Omega_{K,\mathrm{mid}})$, определяющего медленные времена изменения макроскопических параметров течения. Здесь нами использовано вытекающее из уравнения (7.4.2) приближенное равенство

$$\Omega(r, z) = \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r)[1-\eta]^{1/2} \cong \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r), \tag{7.4.24}$$

в котором малый параметр определяется следующим образом

$$\eta \equiv -(r\Omega_{K,\mathrm{mid}}^2 \overline{\rho})^{-1} \partial\overline{p}/\partial r = -\overline{\gamma}\left(\frac{\mathcal{H}}{r}\right)^2 \left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathcal{H}^2}\right) = 3{,}62 \cdot 10^{-3} r_{\text{а.е.}}^{1/2}, \tag{7.4.25}$$

где второе оценочное представление получено с помощью формулы (210) (ср. *Nakagawa и др., 1986*; *Takeuchi T., Lin, 2002*).

Диффузионное уравнение (7.4.18) может быть упрощено в зависимости от преобладания газовой или пылевой составляющих в рассматриваемой области диска.

7.4.2. Коэффициент турбулентной вязкости в газопылевом диске

Коэффициент турбулентной вязкости в формулах (7.4.6), (7.4.10), (7.4.15) и (7.4.15) определяется соотношением (7.3.94), которое в рассматриваемом аксиально-симметричном случае принимает вид

$$\nu^{\mathrm{turb}}(r, z) = a l^{*2} r \sqrt{\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2\right\}}, \tag{7.4.26}$$

где

$$l^*(z) \equiv l(z)[1 - (\mathrm{Ri} + \boldsymbol{K})/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}]^{0,25}, \tag{7.4.27}$$

$$\mathrm{Ri} \equiv \frac{\Omega_{K,\mathrm{mid}}^2 z}{r^2} \frac{1}{\langle T \rangle} \frac{\dfrac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + G_a}{\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2}, \tag{7.4.28}$$

$$\boldsymbol{K} \equiv -\langle \sigma \rangle \frac{\Omega_{K,\mathrm{mid}}^2 z}{r^2} \frac{\dfrac{\partial \overline{s}}{\partial z} - \overline{s}\dfrac{\partial}{\partial z}\ln \overline{\rho}_g}{\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\Omega(r, z)\right]^2} \tag{7.4.29}$$

$$G_a \equiv \frac{g_z}{\langle c_p \rangle} = -\frac{1}{\langle c_p \rangle}\frac{G\mathcal{M}_\odot z}{r^3}\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \frac{1-\overline{\gamma}}{\overline{\gamma}}\frac{1}{\langle \mathfrak{R} \rangle}\Omega_{K,\mathrm{mid}}^2 z \tag{7.4.30}$$

— адиабатический градиент температуры в допланетном газопылевом диске; $\bar{\gamma} = \langle c_P \rangle / (\langle c_P \rangle - \langle \mathfrak{R} \rangle)$, $\langle \mathfrak{R} \rangle = \mathfrak{R}_g \bar{\rho}_g / \bar{\rho}$ — соответственно показатель адиабаты и «газовая постоянная» для осредненного двухфазного континуума. Из формул (7.4.26)—(7.4.28) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой

$$-\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} = \left(-\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \right)_{ad} = \frac{\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)}{\langle c_P \rangle} z \tag{7.4.31}$$

число Ричардсона $\mathrm{Ri} = 0$ и температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. В случае температурно-неустойчивой стратификации ($\mathrm{Ri} < 0$) газопылевого диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} + \frac{\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)}{\langle c_P \rangle} z = f \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial z} \tag{7.4.32}$$

(множитель f, характеризующий превышение вертикального градиента температуры в диске над адиабатическим, может достигать величины $f = 0{,}2$ при $r \simeq 10$ а. е. (см. *Макалкин, Дорофеева, 1995*)), энергия турбулентности возрастает за счет энергии неустойчивости в направлении перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности) и одновременно с этим увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время, неоднородность газовзвеси всегда приводит к уменьшению турбулентной энергии, поскольку число Колмогорова больше нуля, $\mathbf{K} > 0$. Обратное турбулентное число Шмидта $1/\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}$ в формуле (7.4.27) можно принять равным единице в случае, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном кеплеровском вращении диска; однако оно может быть в 2—3 раза больше, когда причиной турбулентности является тепловая конвекция в вертикальном направлении (см., например, *Shakura и др., 1978*).

Покажем теперь, что иногда в диссипативной функции $\Phi_{\langle u \rangle} = 2\bar{\rho}\nu^{\mathrm{turb}} \mathring{\boldsymbol{D}} : \mathring{\boldsymbol{D}}$ осесимметричного диска можно пренебречь вертикальным градиентом угловой скорости $\partial\Omega(r, z)/\partial z$ по сравнению с ее радиальным градиентом $\partial\Omega(r, z)/\partial r$ по следующим соображениям. Если предположить (для выполнения оценок) изотермичность диска в вертикальном направлении и пренебречь членами порядка $(z/r)^2$ и выше, то из уравнения (7.3.96) можно получить (известную для ламинарного течения) формулу для вертикального распределения плотности газовзвеси в турбулизованном диске

$$\bar{\rho}(r, z) = \bar{\rho}(r, 0) \exp\left\{ -\frac{\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)}{2(\langle \mathfrak{R} \rangle (\langle T \rangle + T^{\mathrm{turb}})} z^2 \right\} = \bar{\rho}(r, 0) \exp\left\{ -\frac{z^2}{2\mathscr{H}^2} \right\}, \tag{7.4.33}$$

где

$$\mathscr{H} = \frac{\sqrt{\langle \mathfrak{R} \rangle (\langle T \rangle + T^{\mathrm{turb}})}}{\Omega_{K,\mathrm{mid}}(r)} = \frac{\tilde{c}_s}{\bar{\gamma}^{1/2} \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r)} \tag{7.4.34}$$

— локальная шкала высот для диска,

$$\tilde{c}_s \equiv \sqrt{(\partial(\overline{p}+p^{\text{turb}})/\partial\overline{\rho})_{\langle S\rangle}} = \sqrt{\tilde{\gamma}\langle\mathfrak{R}\rangle(\langle T\rangle + T^{\text{turb}})} \tag{7.4.35}$$

— изотермическая скорость звука в турбулизованной среде. Пространственные распределения плотности, давления, температуры, непрозрачности и т. п. в любом аккреционном диске имеют различные значения в зависимости от его природы и расстояния от протозвезды и/или от экваториальной плоскости диска. Будем считать, что радиальные распределения подобных структурных параметров следуют степенному закону (это обычное предположение в астрофизической литературе (см., например, *Takeuchi*, *Lin*, *2002*)); тогда

$$\begin{cases} \tilde{c}_s^2(r) = \tilde{c}_{s,\text{a.e}}^2 r_{\text{a.e}}^q, \quad q=-0{,}5 \\ \overline{\rho}(r,z) = \overline{\rho}_{\text{a.e}} r_{\text{a.e}}^f \exp\{-z^2/2\mathscr{H}^2\}, \quad \overline{\rho}_{\text{a.e}} = 2{,}83\times10^{-10} g\ \text{см}^{-3}, \quad f=-2{,}25 \\ \mathscr{H}(r) = \mathscr{H}_{\text{a.e}} r_{\text{a.e}}^{(q+3)/2}, \quad \mathscr{H}_{\text{a.e.}} = 3{,}33\times10^{-2}\ \text{а. е.} \end{cases} \tag{7.4.36}$$

где $r_{\text{a.e}}$ — радиус, измеренный в а. е. С учетом (206) уравнение (176) можно переписать в виде

$$\Omega^2(r,z) = \Omega_{K,\text{mid}}^2\left[1 + \frac{1}{\overline{\rho} r \Omega_{K,\text{mid}}^2}\frac{\partial}{\partial r}(\overline{p}+p^{\text{turb}})\right] =$$

$$= \Omega_{K,\text{mid}}^2\left[1 + \frac{\tilde{c}_s^2}{\overline{\rho} r\Omega_{K,\text{mid}}^2}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r}\right] \cong \Omega_{K,\text{mid}}^2\left[1 + \frac{\tilde{\gamma}\mathscr{H}^2}{r^2}\left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathscr{H}^2}\right)\right],$$

откуда

$$\Omega(r,z) = \Omega_{K,\text{mid}}\left[1 + \frac{\tilde{\gamma}}{2}\left(\frac{\mathscr{H}}{r}\right)^2\left(f + q + \frac{q+3}{2}\frac{z^2}{\mathscr{H}^2}\right)\right]. \tag{7.4.37}$$

Из соотношения (7.4.37) следует

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega(r,z) \sim \frac{\mathscr{H}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z), \quad (\mathscr{H}/r \ll 1), \tag{7.4.38}$$

что и позволяет пренебречь в диссипативной функции $\Phi_{\langle u\rangle}$ вертикальным градиентом угловой скорости.

Таким образом, для большей части диска (за исключением областей, близких к прото-Солнцу) справедливо следующее приближенное выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$\nu^{\text{turb}}(r,z) = \alpha l^{*2} r\left|\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r,z)\right|, \quad l^*(z) \equiv l(z)[1-(\text{Ri}+\boldsymbol{K})/\text{Sc}^{\text{turb}}]^{0{,}25}. \tag{7.4.39}$$

Для того чтобы получить формальное совпадение выражения (7.3.79) с формулой Шакуры—Сюняева (7.3.79), справедливой для газофазных аккреционных дисков, нужно положить в формуле (7.4.39) параметры $\boldsymbol{K}=0$ и $\text{Ri}=0$. Если подставить теперь в (7.4.39) угловую скорость кеплеровского вращения

$$\Omega_{K,\text{mid}}(r) = (GM_\odot)^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}}$$

(заметим, что $r|\partial\Omega_{K,\text{mid}}(r)/\partial r| = -\frac{3}{2}\Omega_{K,\text{mid}}$) и использовать в качестве масштаба турбулентности величину $l = h_{\text{disk}} = \sqrt{(\overline{p}/\overline{\rho})|_{z=0}}/\Omega_{K,\text{mid}}$, то в результате получим

$$\nu^{\text{turb}} = \frac{3}{2}\alpha(\overline{p}/\overline{\rho})|_{z=0}/\Omega_{K,\text{mid}},$$

тогда

$$R_{r\varphi} = \overline{\rho}\nu^T r(\partial\Omega_{K,\mathrm{mid}}(r)/\partial r) = -\frac{9}{4}\alpha\overline{p}|_{z=0}, \tag{7.4.40}$$

что совпадает с формулой (7.3.79) (поскольку безразмерный параметр α не поддается сколько-нибудь точному вычислению и остается свободным параметром в уравнениях строения диска, то множитель $\frac{9}{4}$ в формуле (213) не имеет принципиального значения).

Итак, уравнения (7.2.55), (7.3.95), (7.3.96), (7.4.11), (7.4.14) и (7.4.18) образуют систему шести соотношений с шестью неизвестными функциями $\overline{p}(r, z)$, $\overline{\rho}(r, z)$, $\langle T\rangle(r, z)$, $\overline{s}$, $\overline{\rho}_g$, $\Omega(r, z)$. Таким образом, строение газопылевого диска с пылевой составляющей полностью определяется этими уравнениями дополненными граничными условиями и соотношениями (7.4.26) и (7.2.21*) для коэффициентов турбулентного переноса ν^{turb} и для коэффициента сопротивления θ_{dg} гладкой шарообразной частицы. Полное решение поставленной задачи требует привлечения численных методов.

7.4.3. Режим предельного насыщения вращающегося газопылевого диска с мелкодисперсными пылевыми частицами

В качестве простого примера, иллюстрирующего некоторые возможности развитого здесь подхода, рассмотрим модельную задачу о высотном распределении взвешенных мелкодисперсных пылевых частиц в стационарном газопылевом потоке (при температурно-нейтральной стратификации диска, $\mathrm{Ri} = 0$) в тонком слое «космической жидкости», расположенном вблизи пылегазового субдиска (слоя повышенной концентрации пыли, но ниже критического значения, при котором возникает гравитационная неустойчивость). Будем предполагать, что концентрация твердых частиц в атмосфере субдиска и в самом субдиске достаточно велика, так что для описания движения газовзвеси надо учитывать обратное влияние дисперсной фазы на динамику турбулентного потока. Далее мы для простоты будем считать, что дисковое вещество в атмосфере субдиска является изотермическим, а газовая фаза несжимаема. Кроме этого, будем иметь в виду, что седиментация твердых частиц происходит без большой радиальной миграции, поэтому диффузионный поток пыли в вертикальном направлении $\partial\overline{\widetilde{\rho}_d w_{dz}}/\partial z \gg \partial\overline{\widetilde{\rho}_d w_{dr}}/\partial r$. Тогда при стационарном режиме движения пылевой компоненты в атмосфере регулярное гравитационное оседание частиц в субдиск (скорость гравитационного оседания $a = -w_z$ будем считать не зависящей от $\overline{s}$, т. е. постоянной) должно быть сбалансировано их турбулентным переносом вверх, т. е. $\overline{J}_{dz} + J^{\mathrm{turb}}_{dz} = \mathrm{const} = 0$, откуда, с учетом формул (7.3.15) и (7.4.18), для относительной скорости в вертикальном направлении будем иметь

$$-a = \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\,\frac{\partial \ln(\overline{s}/\overline{\rho}_g)}{\partial z} \cong \frac{\nu^{\mathrm{turb}}}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}\,\frac{\partial \ln \overline{s}}{\partial z}. \tag{7.4.41}$$

В субдиске эффективно действуют дополнительные напряжения $\overline{\overline{\Pi}}_{\mathrm{rel}}$, связанные с относительным движением газа и крупнодисперсной пыли, поэтому меридиональная φ-компонента уравнения Рейнольдса (7.4.5) для внутренних областей субдиска сводится к следующему уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{r\varphi}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial z}[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{z\varphi}]+\frac{1}{r}[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{\varphi r}]\cong 0, \tag{7.4.42}$$

где в силу соотношений (7.4.23) соответствующие компоненты тензора относительных напряжений $\overline{\boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}}}\cong -\bar{s}\rho_d\langle C_g\rangle\overline{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}}$ принимают вид:

$$(\boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}})_{z\boldsymbol{\varphi}}=\bar{s}\rho_d\langle C_g\rangle a\overline{w}_{\boldsymbol{\varphi}}=\bar{s}\rho_d\frac{\xi^3\eta}{2(1+\xi^2)}zr\Omega^2_{K,\text{mid}}(r), \tag{7.4.43}$$

$$(\boldsymbol{\Pi}_{\text{rel}})_{\boldsymbol{\varphi}r}=-\bar{s}\rho_d\langle C_g\rangle\overline{w}_r\overline{w}_{\boldsymbol{\varphi}}=\frac{\bar{s}\rho_d\bar{p}}{2\bar{\rho}_g}\frac{\xi^3\eta^2}{(1+\xi^2)^2}r^2\Omega^2_{K,\text{mid}}(r). \tag{7.4.44}$$

Поскольку радиальное направление во всем диске является основным (см. *Сафронов*, *Гусейнов*, *1990*), то для субдиска можно положить

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{z\varphi}]\cong 0. \tag{7.4.45}$$

Это уравнение показывает, что плотность потока φ-компоненты импульса вдоль вертикальной оси будет одной и той же на всех расстояниях от плоскости $z=0$ до «поверхности» $z=h_{\text{subdisk}}$ субдиска: $(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{z\boldsymbol{\varphi}}=(\boldsymbol{R}+\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{z\boldsymbol{\varphi}}|_{z=0}=$ $=\text{const}$. Так как в окрестности экваториальной плоскости и не слишком больших z, в силу соотношений (7.3.81), (7.4.39),

$$R_{z\boldsymbol{\varphi}}|_{z\approx 0}\equiv{}^{-}\rho(,0)\nu^{\text{turb}}(r,0)r\left\{\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right\}\Big|_{z\approx 0}=0, \tag{7.4.46}$$

то уравнение Рейнольдса (7.4.42) для атмосферы субдиска можно принять имеющим вид

$$\nu^{\text{turb}}\frac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r,z)/\partial z]\equiv V_*^2, \tag{7.4.47}$$

где

$$V_*^2=(\overline{\boldsymbol{\Pi}}_{\text{rel}})_{z\varphi}|_{z=h_{\text{subdisk}}}\cong\frac{\rho_d\xi^3\eta}{2\bar{\rho}(r,0)(1+\xi^2)}r\Omega^2_{K,\text{mid}}(r)[z\bar{s}(r,z)]_{z=h_{\text{subdisk}}}, \tag{7.4.48}$$

V_* — так называемая динамическая скорость (естественный масштаб скоростей для течения около «поверхности» субдиска). В уравнении (7.4.47) мы пренебрегли вкладом относительных напряжений сравнительно с турбулентными напряжениями Рейнольдса.

Исключая из (7.3.92) $b=\alpha^2l^2(1-K_f)[r\partial\Omega(r,z)/\partial z]^2$ градиент меридиональной скорости $\partial[r\Omega(r,z)]/\partial z$ с помощью уравнения (7.4.47) и соотношения $\nu^{\text{turb}}=l\sqrt{b}$, получим

$$b=\alpha V_*^2\sqrt{1-K_f}, \tag{7.4.49}$$

где

$$\boldsymbol{K}_f\equiv-\frac{\langle\sigma\rangle}{\text{Sc}^{\text{turb}}}\frac{GM_\odot z}{r^3}\frac{\partial\bar{s}/\partial z}{[r\partial\Omega(r,z)/\partial z]^2}=\frac{GM_\odot z}{r^4}\frac{\langle\sigma\rangle\bar{s}a}{V_*^2\partial\Omega(r,z)/\partial z} \tag{7.4.50}$$

— динамическое число Колмогорова. Таким образом, распределения по z

структурных параметров диска могут быть найдены с помощью уравнений (7.4.41), (7.4.47), (7.4.49) и (7.4.50), которым придадим следующий вид:

$$\begin{cases} l\sqrt{b}\dfrac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r,z)/\partial z] = V_*^2, \quad \dfrac{1}{\mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}}l\sqrt{b}\dfrac{\partial\bar{s}}{\partial z} + a\bar{s} = 0, \quad l(z) = \dfrac{\gamma^*\varkappa}{a^{1/2}}z\Phi(K_f) \\ b = aV_*^2\sqrt{1-K_f}, \quad K_f = \langle\sigma\rangle\dfrac{GM_\odot z}{r^4}\,\dfrac{\vec{s}a}{V_*^2\partial\Omega(r,z)/\partial z}. \end{cases} \tag{7.4.51}$$

Здесь локальный масштаб турбулентности $l(z)$ выражается (в предположении полной автомодельности по локальному $\mathrm{Re} = u_0 z/\nu$ и глобальному $\mathrm{Re}_{\mathrm{glob}} = u_0 L/\nu$ числам Рейнольдса) через некоторую универсальную функцию $\Phi(\boldsymbol{K}_f)$ от числа Колмогорова $\boldsymbol{K}_f$, причем $\Phi(0)$, очевидно, равно единице. Поскольку масштаб турбулентности под влиянием пылевой составляющей газовзвеси убывает [см. (7.4.26)], то функция $\Phi(\boldsymbol{K}_f)$ также должна убывать с ростом своего аргумента.

Определим теперь для стационарного режима течения в атмосфере субдиска распределение по z объемной концентрации пылевых частиц и угловой скорости турбулизованного потока, несущего мелкие взвешенные частицы. Для интегрирования системы уравнений (7.4.51) необходимо, в общем случае, знание граничных условий на поверхности субдиска. Например, если исключить из (7.4.41) и (7.4.47) величину ν^{turb}, то в результате получим

$$\frac{\partial \ln \bar{s}}{\partial z} = -\omega\frac{\gamma^*\varkappa}{V_*}\,\frac{\partial}{\partial z}[r\partial\Omega(r,z)], \tag{7.4.52}$$

где

$$\omega \equiv \mathrm{Sc}^{\mathrm{turb}}a/\gamma^*\varkappa V_* \tag{7.4.53}$$

— безразмерный параметр. Интегрируя уравнение (225) найдем

$$\bar{s}(r,z) = \bar{s}(r,z)|_{z=h_{\mathrm{subdisk}}}\exp\left\{-\frac{\omega\gamma^*\varkappa}{V_*}r[\Omega(r,z) - \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r,z)|_{z=h_{\mathrm{subdisk}}}]\right\}. \tag{7.4.54}$$

Вместе с тем, система (7.4.51) обладает некоторыми специфическими для подобного типа режимов течения газовзвеси свойствами, которые позволяют найти некоторое автомодельное решение, не зависящее от граничных условий. Заметим, что характер турбулентных потоков, содержащих твердую примесь, впервые был изучен применительно к расчету движения наносов в работе Колмогорова (*1954*), а к атмосферным задачам — в работе (*Баренблатт*, *Голицын*, *1973*). Это связано с тем, что она содержит только градиент угловой скорости, а не саму скорость. А это означает, что при неограниченном запасе частиц в окрестности пылевого субдиска ввиду обратного влияния частиц на динамику потока можно ожидать существования такого режима течения газовзвеси в нем, при котором турбулентный поток вбирает в себя максимально возможное при заданной динамической скорости и прочих параметрах течения количество пыли (см. *Barenblatt*, *Golitsyn*, *1974*). Этот режим, получивший в литературе название «режим предельного насыщения», должен описываться особым решением системы (7.4.51), которое определяется параметрами, входящими только в сами дифференциальные уравнения (7.4.51).

Групповой анализ системы (7.4.51) показывает, что у нее имеется решение

$$\partial\Omega(r, z)/\partial z = C_1(r)/rz, \quad \bar{s} = C_2(r)/z^2, \tag{7.4.55}$$

где C_1 и C_2 — не зависящие от z функции от r, подлежащие определению. Подставляя эти выражения в (7.4.51), получим

$$C_1 = \frac{V_*}{\gamma^* \varkappa \Phi(\boldsymbol{K}_f)(1 - \boldsymbol{K}_f)^{1/4}} = \frac{2V_*}{\gamma^* \varkappa \omega}, \tag{7.4.56}$$

откуда вытекает функциональное уравнение

$$\Phi(\boldsymbol{K}_f)(1 - \boldsymbol{K}_f)^{1/4} = \omega/2, \tag{7.4.57}$$

предназначенное для определения конкретного для изучаемого режима движения числа Колмогорова $\boldsymbol{K}_f$ (вычисленного на заданном расстоянии r от прото-звезды).

Так как Φ — не возрастающая функция своего аргумента, $\Phi(0) = 1$, а число $\boldsymbol{K}_f$ по своему физическому смыслу заключено между нулем и единицей, то функциональное уравнение при $\omega > 2$ (что соответствует малой скорости потока, либо крупным частицам) не имеет корня; однако при $\omega < 2$ (условие существования режима предельного насыщения) корень существует и притом один, $\boldsymbol{K}_f = \boldsymbol{K}_f^*$. Из первого соотношения (7.4.55), с учетом (7.4.56), следует (при $\omega < 2$)

$$\Omega(r, z) = \Omega_{K,\mathrm{mid}}(r) + \frac{V_*(r)}{\gamma^* \varkappa \omega r} \ln z. \tag{7.4.58}$$

С учетом этого соотношения и формулы (7.4.53) легко получить следующее предельное стационарное распределение мелких частиц пыли по высоте в тонком околоэкваториальном слое субдиска:

$$\bar{s} = \frac{C_2(r)}{z^2} = \frac{V_*^4 K^*}{\langle\sigma\rangle a^2 \Omega_{K,\mathrm{mid}}^2} \cdot \frac{1}{z^2}, \tag{7.4.59}$$

к которому стремится поток при неограниченном запасе пыли на подстилающей поверхности.

Формула (7.4.58) показывает, что в предельно нагруженном частицами турбулентном потоке распределение скоростей по z в «приповерхностной» атмосфере субдиска является логарифмическим (как и должно быть в турбулизованной жидкости вблизи «стенки»), однако присутствие пыли приводит как бы к уменьшению коэффициента Кармана $\varkappa$. Это может интерпретироваться так, что при тех же внешних условиях (той же динамической скорости V_*) поток газовзвеси под действием пылевых частиц ускоряется по сравнению с потоком «чистого» газа. Другими словами, благодаря падению энергии турбулентности, часть которой затрачивается на работу взвешивания частиц, падает и турбулентное сопротивление, так что поток ускоряется (тяжелые взвешенные частицы ускоряют поток). Поскольку градиенты скорости у поверхности субдиска возрастают, это способствует эффекту сальтации — отрыву и подъему больших количеств мелких пылевых частиц в его атмосферу. Наличие подобного пылевого облака с повышенной концентрацией взвешенных мелких частиц способствует, в свою очередь, более интенсивному протеканию всевозможных процессов турбулентной коагуляции, приводящих к росту инерционности твердых частиц и эффективному их опусканию в субдиск. Таким образом, возможный режим предельного насыщения мелкими пылевыми частицами вращающегося газопылевого облака в окрестности субдиска является дополнительным механизмом, ускоряющим процесс формирования самого субдиска относительно крупными твердыми частицами, на которые турбулентные пульсации действует уже в меньшей степени.

7.4.4. Решение уравнения кинетики коагуляции методом моментов

Рассмотрим теперь эффективный метод моментов решения кинетического уравнения коагуляции (7.2.33) для случая, когда распределение частиц по размерам зависит от одной пространственной координаты z, что для рассматриваемой здесь проблемы соответствует установившемуся режиму движения в пылевом слое при осаждении частиц к центральной плоскости диска под действием силы тяжести.

Смысл метода моментов состоит в сведении кинетического уравнения коагуляции (7.2.33) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно моментов:

$$M_p = \int_0^\infty U^p f(U, z) dU, \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \tag{7.4.60}$$

функции распределения $f(U, z)$. Для получения подобной системы умножим обе части упрощенного уравнения (7.2.33)

$$w_z \frac{\partial f(U, z)}{\partial z} =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^U f(W, z) f(U - W, z) K(W, U - W) dW - f(U, z) \int_0^\infty f(W, z) K(W, U) dW$$

(где w_z — постоянная скорость оседания пылевых частиц с высоты h_{disk} к центральной плоскости диска) на U^p и проинтегрируем результат по U в пределах от 0 до ∞; в итоге будем иметь

$$w_z \frac{\partial M_0}{\partial z} = w_z \frac{\partial N_d}{\partial z} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty K(U, W) f(U, z) f(W, z) dW\, dU, \tag{7.4.61}$$

$$w_z \frac{\partial M_1}{\partial z} = w_z \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (W - U) K(U, W) f(U, z) f(W, z) dW\, dU = 0, \tag{7.4.62}$$

$$w_z \frac{\partial M_p}{\partial z} = \int_0^\infty \int_0^\infty K(U, W) \left[\frac{1}{2} (U + W)^p - U^p \right] f(U, z) f(W, z) dW\, dU$$
$$(p = 2, 3, \dots). \tag{7.4.63}$$

Для того чтобы выразить правые части уравнений этой системы также через моменты, нужно конкретизировать ядро коагуляции и принять допущение относительно исходного вида функции распределения. Рассмотрим далее ядра типа

$$K(U, W) = \Lambda \sum_{j=0}^{K} \beta_j (U^{\alpha-\alpha_j} W^{\alpha_j} + U^{\alpha_j} W^{\alpha-\alpha_j}), \tag{7.4.64}$$

где Λ — множитель, определяемый внешними условиями, при которых идет коагуляция. К этому классу ядер относятся ядра, при которых кинетическое уравнение допускает точные решения. Кроме этого, формулами вида (7.4.64) могут быть аппроксимированы ядра, соответствующие многим механизмам коагуляции в газопылевом диске, в частности, проанализированные в работе (*Колесниченко, 2001*). Рассмотренные там ядра являются однородными функциями, для которых возможна запись $K(U, W) = U^\alpha K(1, x)$, где α — степень однородности, $x \equiv W/U$. Как известно, любую подобную функции возможно аппроксимировать многочленом:

$$K(U, W) = \Lambda U^\alpha \sum_{j=0}^{K} \beta_j (x^{\alpha_j} + x^{\alpha-\alpha_j}), \tag{7.4.65}$$

причем для определения неизвестных коэффициентов β_j следует выбрать s точек x_i (узлов интерполяции) в количестве, совпадающем с числом неизвестных коэффициентов β_j, и принять

$$K(1, x_i) = \Lambda \sum_{j=0}^{K} \beta_j (x_i^{\alpha_j} + x_i^{\alpha-\alpha_j}), \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{7.4.66}$$

Чтобы при последующем интегрировании разложения (7.4.65) не появлялись моменты с порядком выше степени однородности ядра, величину α_j следует определить равенством $\alpha_j = \alpha j/(K+1)$. При рассмотрении разных значений K можно получить различные интерполяционные многочлены.

Если подставить (7.4.64) в (7.4.61)—(7.4.63), то получим следующую бесконечную систему уравнений для моментов

$$w_z \frac{\partial M_0}{\partial z} = w_z \frac{\partial N_d}{\partial z} = -\Lambda \sum_{j=0}^{K} \beta_j M_{\alpha-\alpha_j} M_{\alpha_j}, \tag{7.4.67}$$

$$w_z \frac{\partial M_1}{\partial z} = w_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0, \tag{7.4.68}$$

$$w_z \frac{\partial M_p}{\partial z} = \frac{\Lambda}{2} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (M_{\alpha-\alpha_j+p-k} M_{\alpha_j+k} + M_{\alpha-\alpha_j+k} M_{\alpha_j+p-k}),$$
$$(p = 2, 3, \ldots). \tag{7.4.69}$$

Для решения этой системы, в правые части которых входят в общем случае дробные моменты, необходимо дополнить ее уравнениями связей между дробными и целыми моментами. Здесь также возможны разные подходы: подход, связанный с аппроксимацией (полиномами Лагранжа) дробных моментов через целые (см., например, *Логинов, 1979*), и параметрический метод.

Ограничимся далее параметрическим методом, который базируется на принадлежности искомой функции распределения $f(U, z)$ к определенному параметрическому классу распределений. Примем для простоты, что в результате процессов коагуляции распределение $f(U, z)$ остается в классе распределений, к которым принадлежит исходное распределение, а по мере опускания частиц к центральной плоскости диска изменяются (с высотой) только его статистические параметры: среднее значение, дисперсия и т.п. В качестве исходного распределения пылевых частиц по размеру (диаметру) d в газопылевом аккреционном диске, по аналогии с атмосферным аэрозолем, выберем двухпараметрическое логнормальное распределение.

Плотность вероятности логарифмически нормального закона зависит от среднего значения $\langle \ln d\rangle$ и показателя рассеяния (дисперсии) логарифма диаметра $\sigma_L^2 \equiv \langle(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2\rangle$:

$$p(d;\, \mu^*,\, \sigma_L) = \frac{N_d}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2}{2\sigma_L^2}\right\} = \frac{N_d}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(d/\mu^*)}{2\sigma_L^2}\right\}. \quad (7.4.70)$$

Медиана распределения определяется, как известно, соотношением $\mu^* = \exp(\langle \ln d\rangle)$, а средние значения самого диаметра и его дисперсии соответственно равны

$$\langle d\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_L^2 + \ln \mu^*\right), \quad (7.4.71)$$

$$\sigma^2 \equiv \langle(d - \langle d\rangle)^2\rangle = \langle d\rangle^2[\exp \sigma_L^2 - 1]. \quad (7.4.72)$$

Применяя приведенные соотношения, можно получить формулы для статистических параметров (σ_L^2 и μ^*) логнормального распределения (7.4.70) только через средний диаметр частиц $\langle d\rangle$ и относительную дисперсию $\beta^2 \equiv \langle(d - \langle d\rangle)^2\rangle/\langle d\rangle^2$ их размера:

$$\sigma_L^2 = \ln(1 + \beta^2), \qquad \mu^* = \langle d\rangle/\sqrt{1+\beta^2}. \quad (7.4.73)$$

Для определения плотности исходного распределения объема $U = (\pi/6)d^3$ пылевых частиц используем формулу перехода

$$f(U) = p[d(U)]|dd/dU| \quad (7.4.74)$$

(справедливую для строго возрастающей функции $U = U(d)$ случайной величины d (*Хан*, *Шапиро*, *1969*)) и распределение (7.4.70); в результате будем иметь

$$f(U;\, \sigma_L,\, \mu) = \frac{N_d}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L U} \exp\left[-\frac{\ln^2(U/\mu)}{18\sigma_L^2}\right], \quad (7.4.75)$$

где $\mu = (\pi/6)\mu^{*3}$.

Пусть процесс коагуляции в диске не изменяет этого распределения, а с высотой изменяются только параметры $\mu(z)$ и $\sigma_L^2(z)$. Введем моменты логнормального распределения

$$M_p(z) = \frac{N_d}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L(z)} \int\limits_0^\infty U^{p-1} \exp\left[-\frac{\ln^2[U/\mu(z)]}{18\sigma_L^2(z)}\right] dU. \quad (7.4.76)$$

Согласно (*Lee, 1983*), для любого момента p-го порядка справедливо представление

$$M_p = M_1 \mu^{p-1} \exp[3/2(p^2-1)\sigma_L^2], \tag{7.4.77}$$

$$M_1 = s = \text{const}, \tag{7.4.78}$$

позволяющее выразить дробные моменты, входящие в (7.4.67)—(7.4.69) через величины M_1, μ, σ_L^2. В итоге получим следующую параметрическую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (число уравнений должно совпадать с числом неизвестных коэффициентов) для определения параметров $\mu(z)$, $\sigma_L^2(z)$ по заданным граничным значениям $\mu(h_{\text{disk}})$, $\sigma_L^2(h_{\text{disk}})$:

$$w_z \frac{\partial M_0}{\partial z} = -\Lambda \sum_{j=0}^{K} \beta_j M_{\alpha-\alpha_j} M_{\alpha_j} = -\Lambda M_1^2 \mu^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2 - 2]\sigma_L^2\right] =$$

$$= -\Lambda \mu^{\alpha} M_0^2 \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2\right], \tag{7.4.79}$$

$$w_z \frac{\partial M_2(z)}{\partial z} = 2\Lambda \sum_{j=0}^{K} \beta_j M_{\alpha-\alpha_j+1} M_{\alpha_j+1} = 2\Lambda M_1^2 \mu^{\alpha} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[(\alpha_j+1)^2 + (\alpha-\alpha_j+1)^2 - 2]\sigma_L^2\right] =$$

$$= 2\Lambda M_1^2 \mu^{\alpha} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[(\alpha_j+1)^2 + (\alpha-\alpha_j+1)^2 - 2]\sigma_L^2\right] =$$

$$= 2\Lambda \mu^{\alpha+2} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2\right]. \tag{7.4.80}$$

$$N_d \equiv M_0 = s\mu^{-1} \exp\left(-\frac{3}{2}\sigma_L^2\right); \quad M_2 = s\mu \exp\left(\frac{9}{2}\sigma_L^2\right). \tag{7.4.81}$$

Эта параметрическая система нелинейных уравнений может быть решена только численно. Пока лишь отметим, что изменение с высотой среднего числа частиц $N_d(z)$ можно оценить, предположив, что дисперсия σ_L^2 остается постоянной. В этом случае, ограничившись двумя первыми моментами, из (7.4.80) будем иметь

$$w_z \frac{\partial N_d}{\partial z} = -\Lambda \mu^{\alpha} N_d^2 \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2\right]. \tag{7.4.82}$$

Решение этого уравнения, полученное при использовании граничного условия $N_d(h_{\text{disk}}) \equiv N_{d,h_{\text{disk}}} = s/\tilde{U}(h_{\text{disk}})$, имеет вид

$$N_d(z) = \frac{s}{\tilde{U}(h_{\text{disk}})} \frac{1}{1 + q[(h_{\text{disk}} - z)/w_z]}, \tag{7.4.83}$$

где

$$q = \Lambda \mu^{\alpha} \frac{s}{\tilde{U}(h_{\text{disk}})} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha-\alpha_j)^2]\sigma_L^2\right]. \tag{7.4.84}$$

Здесь $\widetilde{U}(h_{\text{disk}}) = (\pi/6) < d >^3 = \mu(h_{\text{disk}}) \exp\left(\frac{3}{2}\sigma_L^2\right)$ — верхнее граничное значение среднего объема (эта формула следует из (7.4.73). Отсюда, используя соотношение $\widetilde{U}(z) = s/N_d$, можно найти изменение с высотой среднего объема частиц. Для относительно малых значений z (т. е. когда частицы уже находятся в окрестности центральной плоскости диска) $q[(h_{\text{disk}} - z)/w_z] \gg 1$, из (7.4.84) следует

$$N_d(z) = \left\{\Lambda\mu^\alpha[(h_{\text{disk}} - z)/w_z] \sum_{j=0}^{K} \beta_j \exp\left[\frac{3}{2}[\alpha_j^2 + (\alpha - \alpha_j)^2]\sigma_L^2\right]\right\}^{-1}. \tag{7.4.85}$$

Из этого выражения видно, что при достаточно большом времени коагуляции среднее число частиц в системе перестает зависеть от их исходного распределения, т. е. как бы «забывает свое прошлое», и может быть описано некоторой универсальной функцией, вид которой определяется только ядром коагуляции. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и с другими возможными распределениями пылевых частиц по объемам в коагулирующем турбулентном потоке, например, с гамма-распределением.

В заключение вновь подчеркнем, что изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося допланетного диска при учете магнитогидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов. От пространственно-временного распределения термогидродинамических параметров дисковой среды зависит агрегатное состояние основных компонентов допланетного вещества, расположение их фронтов конденсации-сублимации, и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении уровня приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей реконструкции динамической системы, в которой эволюция изначального допланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца и уплотненного пылегазового субдиска. В данной главе нами предпринята попытка построения теоретических основ такой динамической системы на основе базовой модели сплошной среды с усложненными физико-химическими свойствами, в которой получили дальнейшее обобщение на гетерогенные среды развитые ранее авторами эффективные методы инвариантного моделирования турбулентных течений в многокомпонентных реагирующих газовых смесях (*Колесниченко, Маров, 1998*; *Marov, Kolesnichenko, 2002*). Это исследование открывает перспективы существенно более полного моделирования разнообразных процессов эволюции допланетного газопылевого турбулизованного диска, с чем связана необходимость последующей разработки рациональных схематизаций, приводящих к обозримым и численно решаемым уравнениям.

Глава 8

Влияние гидродинамической спиральности на эволюцию турбулентности в аккреционном диске

В этой главе исследовано влияние гидродинамической спиральности, возникающей во вращающемся диске, на синергетическое структурирование в нем космического вещества. Показано, что относительно длительное затухание турбулентности в диске связано с отсутствием отражательной симметрии (относительно экваториальной плоскости) анизотропного поля турбулентных скоростей. Сформулирована общая концепция возникновения энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности. Показано, что вследствие энерговыделения обратный каскад порождает иерархическую систему сгущений вещества с фрактальным распределением плотности, инициирующих в конечном счете механизмы триггерного кластерообразования. В свою очередь, образование вихревых когерентных образований приводит к интенсификации механических и физико-химических взаимодействий между частицами вещества, в результате чего происходит самопроизвольное возникновение и рост пылевых кластеров, стимуляция процессов конденсации и фазовых переходов, процессов массо- и теплообмена между различными областями дисковой гетерогенной среды и существенная модификация спектра колебаний (волн плотности). Показано также, что отрицательная вязкость во вращающейся дисковой системе является проявлением каскадных процессов в гиротропной турбулентности, когда осуществляется инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным.

§ 8.1. Некоторые теоретические предпосылки к моделированию гидродинамической спиральности

Важно подчеркнуть, что одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно возникновения и эволюции околозвездных газопылевых дисков любого рода является их турбулентная природа (*Zel'dovich*, *1981*; *Фридман*, *1989*; *Dubrulle*, *1993*; *Balbus*, *Hawley*, *1998*; *Richard*, *Zahn*, *1999*). Заметим, что для вращающегося с угловой скоростью Ω солнечного протопланетного диска радиуса R число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{glob}} \equiv \Omega R^2/\nu$ больше 10^{10} (здесь ν — кинематическая вязкость, предполагаемая далее постоянной).

По современным воззрениям наиболее вероятными причинами генерации турбулентности в астрофизических дисках является крупномасштабное сдвиговое течение дифференциально-вращающегося вещества (*Горькавый, Фридман, 1994*; *Fridman и др., 2003*), а также воздействие хаотических магнитных полей (см. *Armitage и др., 2001*), энергия которых часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности. Синергетические процессы самоорганизации, приводящие в конечном счете к структурированию турбулизованных астрофизических объектов (см. *Колесниченко, 2003, 2004*), на фоне осредненного крупномасштабного сдвигового течения космического вещества, связанного с его дифференциальным вращением, являются важнейшими механизмами, обусловливающими свойства протопланетного облака на разных стадиях его эволюции, включая создание вязкого аккреционного диска вокруг молодого Солнца, проходившего стадию *T* Тельца, возникновение пылегазового субдиска, разрушение последнего в результате гравитационной неустойчивости, образование и рост планетезималей, из которых в конечном счете и сформировалась планетная система. Это относится также и к образованию мезомасштабных когерентных вихревых структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами космического вещества (см. *Barge, Sommeria, 1995*; *Tanga и др., 1996*; *Chavanis, 1999*; *Колесниченко, 2005*). В результате происходит интенсификация фазовых переходов и процессов тепло- и массообмена между различными областями дисковой газопылевой системы, самопроизвольное возникновение и рост конденсированных пылевых кластеров, существенная модификация спектра колебаний и т. п. Отметим, что один из возможных сценариев образования и роста пылевых частиц в дисковой плазме состоит из следующих этапов: сначала образуются первичные кластеры; после прохождения критического размера начинается этап гетерогенной конденсации; на следующем этапе на первый план выходят процессы коагуляции и агломерации (слипания); наконец, на последнем этапе становится наиболее важной поверхностная рекомбинация ионов, приводящая к постоянному осаждению материала на поверхности изолированных многозарядных частиц. На более поздних стадиях эволюции допланетного облака, по мере охлаждения диска, конденсации твердых частиц и увеличения их в размерах (в основном в результате процессов коагуляции), а также диссипации газа из дисковой системы в межзвездное пространство, динамическая, энергетическая и оптическая роль пылевой составляющей существенно возрастает. По мере роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газовзвеси, что приводит в конечном счете к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости диска. Таким образом, турбулентность дисковой среды в значительной степени способствует формированию пылегазового субдиска, гравитационная неустойчивость которого приводит в конечном итоге к образованию планетезималей (см. *Колесниченко, Маров, 2006*).

В связи со сказанным, особо важное значение приобретает проблема длительного существования неупорядоченных хаотических движений в протопланетном облаке, поскольку от интенсивности турбулизации космического вещества на разных этапах эволюции диска в значительной степени зависит его структура и, в частности, возможные механизмы формирования планет (*Сафронов*, *1969*). Обращаясь вновь к проблеме формирования допланетных аккреционных дисков, рассмотренной детально в предыдущей главе, обратим теперь внимание на тот факт, что с эволюцией структурированной крупномасштабной турбулентности, производящей перераспределение начального углового момента и вещества облака (внешних частей — наружу, внутренних к Солнцу) по радиусу диска, связана проблема современного распределения массы и углового момента между Солнцем и планетами. Напомним, что на долю Солнца приходится 99,87% массы и менее 2% углового момента системы; такой дисбаланс массы и углового момента трудно объяснить в рамках моделирования процесса коллапса протозвезды и образования диска. Для реализации современного распределения этих величин необходимо, чтобы на протяжении всей стадии *T* Тельца во всем диске или значительной его части происходило перетекание вещества и количества движения в направлении звезды. Для дифференциально вращающегося кеплеровского диска (каким в первом приближении можно считать солнечный протопланетный диск) угловая скорость среднего вращения $\Omega(\boldsymbol{r})$ растет по закону $|\boldsymbol{r}|^{-3/2}$, т. е. при приближении к центральному телу каждый слой вещества вращается быстрее. Таким образом, существование направленного во внутренние слои диска турбулентного потока импульса (вещества) является, вообще говоря, проявлением эффекта отрицательной вязкости, поскольку поток переносит осредненное количество движения от более медленно вращающихся внешних частей диска к более быстро вращающимся его внутренним частям (см. *Старр*, *1971*; *IX. Приложение к околосолнечной туманности*). Отрицательная вязкость является характеристикой статистического ансамбля хаотических вихревых движений вращающегося дискового вещества, описывающей способность переносить количество движения из областей пространства, где его плотность меньше, в область, где она больше. При этом осредненное течение получает кинетическую энергию от нерегулярных вихревых движений, а сами хаотические движения либо постепенно ослабевают, либо же поддерживаются некоторыми внутренними процессами, например регулярным преобразованием тепла в кинетическую энергию в границах отдельных возмущений (*Старр*, *1971*). Поскольку осредненное течение имеет большие, а пульсационное — меньшие масштабы движения, то с отрицательной вязкостью связан перенос энергии по спектру от меньших масштабов к большим. Хотя в литературе и предложены различные источники генерации турбулентности на разных этапах эволюции протопланетного облака (либо его отдельных областей) и механизмы переноса массы и углового момента в дисках (см., например, обзор Макалкина (*2003*) и обширную библиографию к нему), эти результаты все еще требуют дальнейшего подтверждения и развития.

Отметим, что многочисленные исследования дисковой турбулентности, выполненные в рамках данной проблематики, базируются в основном на классическом представлении о ее статистической однородности и локальной изотропности (см. *Колмогоров*, *1941*, *1962*). Локальная изотропия мелкомасштабной турбулентности подразумевает инвариантность пульсационного поля скоростей как относительно поворотов системы отсчета, так и при зеркальном отражении в произвольной плоскости. Вместе с тем, по современным воззрениям, в свободных сдвиговых слоях дифференциально вращающегося вещества картина турбулентного течения представляет собой до известной степени «двойную» анизотропную систему, состоящую из совокупности движущихся и взаимодействующих между собой макро- и мезомасштабных спиральных вихревых образований, наложенных на фон мелкомасштабных пульсационных скоростей (турбулентный хаос); причем сами мелкомасштабные вихревые движения также могут быть частично высокоорганизованными. Таунсенд (*1959*) называл когерентные вихревые образования и мелкомасштабную турбулентность проявлением «двойной» структуры турбулентности, подчеркивая тем самым влияние организованных вихревых движений на процессы турбулентного переноса в сдвиговых слоях. Подобное явление связано с еще недостаточно изученной тенденцией турбулентного течения самоорганизовываться при больших числах Рейнольдса в разнообразные когерентные структуры (см., например, *Хлопков и др.*, *2002*).

Кроме этого, в турбулизованном протопланетном облаке, как в любом вращающемся газовом объекте, генерируется, по-видимому, так называемая плотность спиральности $\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ (псевдоскаляр, меняющий знак при зеркальном отражении), также приводящая к анизотропии мелкомасштабной турбулентности, которая в этом случае имеет гиротропный характер (см. *Вайнштейн и др.*, *1980*; *Краузе*, *Рэдлер*, *1984*). Последнее означает, что в мелкомасштабном вихревом движении левовращательные движения в совокупности могут быть более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. В этом случае от величины и направления вектора угловой скорости вращения протопланетного облака $\Omega(\boldsymbol{r})$ зависят многие важные гидродинамические параметры космического вещества, среди которых и такая лишенная отражательной симметрии статистическая характеристика поля пульсационной скорости, как средняя спиральность H (сохранение средней спиральности в течениях невязкой жидкости было открыто относительно недавно Моро (*Moreau*, *1961*)). Воздействием этой величины на каскадные процессы энергии в трехмерной гиротропной турбулентности можно, как будет показано ниже, объяснить возможный эффект отрицательной вязкости в диске. Эффект отрицательной вязкости представляет собой гидродинамический аналог альфа-эффекта в магнитной гидродинамике (*Steenbeck и др.*, *1966*), объясняющего рост крупномасштабного магнитного поля (динамо-эффекта) при турбулентном движении проводящей сплошной среды, происходящем с нарушением инвариантности относительно изменения четности.

Для объяснения феномена отрицательной вязкости обычно используют теорию двумерной турбулентности, в рамках которой обеспечивается инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным (см., например, *Монин*, *Яглом*, *1996*). Как известно, в Солнечной системе отрицательная вязкость проявляется, в частности, в глобальных циркуляциях вещества на Солнце, Юпитере, Сатурне, Венере (вероятно, также на Уране и Нептуне), в циркуляциях земной атмосферы и океана (см. *Монин и др.*, *1989*). Крупномасштабные движения на сферической поверхности этих космических тел могут быть исследованы в рамках двумерной гидродинамики, поскольку горизонтальные размеры течения значительно превосходят локальную шкалу высот по плотности (см. *Старр*, *1971*; *Sivashinsky*, *Frenkel*, *1992*; *Vergassola и др.*, *1993*; *Gama и др.*, *1994*). По-видимому, подобный подход к моделированию турбулентности возможно частично реализовать и в рассматриваемом здесь случае дисковой гидродинамики, поскольку сдвиговым движениям вещества в тонких астрофизических дисках, у которых отношение толщины h_{disk} к радиусу R гораздо меньше единицы ($h_{\text{disk}}/R \ll 1$), также должны быть присущи некоторые черты двумерной турбулентности (см., например, *Bodenheimer*, *1995*; *Klahr*, *Bodenheimer*, *2003*). Однако для дисков более точно следует говорить о квазидвумерной турбулентности, в которой движения являются приближенно двумерными, т. е. описываются двумерными уравнениями гидродинамики, содержащими специальные дополнительные слагаемые.

Как уже отмечалось, реальная турбулентность в астрофизическом диске имеет гиротропный характер, поскольку пульсационное поле скоростей при сильном вращении дискового вещества и неоднородности интенсивности турбулентных пульсаций не обладает, в общем случае, отражательной симметрией относительно преобразования $z \to -z$. На важность спиральности локализованных возмущений вихрей для трехмерной гидродинамики турбулизованной жидкости указал Моффат (*Moffat*, *1969*). Он же обнаружил связанный с ней интегральный инвариант $H \equiv \langle(\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u})/2\rangle$, характеризующий степень связности вихревых образований в потоке (см, например, *Сэффмэн*, *2000*; *Алексеенко и др.*, *2005*) и сохраняющийся вдоль траектории движения любой жидкой частицы невязкой среды. Напомним, что, согласно теореме Кельвина, при $\nu = 0$, $p = p(\rho)$ и консервативности внешних силах на единицу массы вихревые линии являются вмороженными в жидкость и вследствие этого неизбежно сохраняются узлы и зацепления на вихревых нитях (см. *Алексеенко и др.*, *2005*).

Существование этого дополнительного невязкого инварианта для трехмерной турбулентности предопределяет некоторую степень свободы для энергетического каскадного процесса, поскольку теперь две величины (средняя энергия $E \equiv \langle|\boldsymbol{u}|^2/2\rangle$ и средняя спиральность H), сохраняющиеся при нелинейных взаимодействиях в инерциальном интервале энергетического спектра, одновременно участвуют в каскадном турбулентном процессе. По аналогии с двумерными течениями несжимаемой невязкой жидкости (когда также существует каскадный перенос двух квадратичных по скоростям интегралов — энергии E и энстрофии $\Omega \equiv \langle(\operatorname{rot} \boldsymbol{u})^2/2\rangle$), возможен, по-видимому, такой режим турбулентного движения, при котором реализуется каскад этих сохраняемых величин к противоположным концам спектра, причем прямой каскад спиральности к мелким масштабам будет сопровождаться обратным каскадом энергии к более крупным масштабам.

Из всего вышесказанного следует, что без учета законов симметрии вращающейся турбулентности затруднительно, по-видимому, построить вполне адекватную математическую модель процесса эволюции анизотропного пульсационного поля скоростей в протопланетном облаке. Поскольку вопрос о влиянии флуктуаций фоновой спиральности на появление в диске отрицательной вязкости, до настоящего времени детально не обсуждался в литературе, нами предпринята попытка восполнить этот пробел, что ранее было сделано в работе (*Колесниченко*, *Маров*, *2004*).

§ 8.2. Энергетический каскад в изотропной турбулентности с отражательной симметрией

Будем исходить из концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды протопланетного облака с помощью двух взаимодействующих континуумов (взаимно открытых подсистем), которые заполняют одновременно один и тот же объем координатного пространства непрерывно — подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса. Подобный подход является, по существу, приложением многомасштабных методов к турбулентности (см., например, *Dubrulle*, *Frisch*, *1991*; *Fannjiang*, *Papanicolaou*, *1994*). Именно этот способ описания развитой гидродинамической турбулентности явился той отправной точкой, который позволил авторам начать разработку моделей структурированной мезомасштабной турбулентности, как процесса самоорганизации в открытых неравновесных флуктуирующих средах (см. гл. 5, а также *Колесниченко*, *2002*, *2003*; *2005*). Континуум осредненного движения, получающийся в результате теоретико-вероятностного осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, предназначен для исследования эволюции осредненных гидродинамических полей, включая крупные вихревые образования в диске. Подсистема турбулентного хаоса (в общем случае вихревой анизотропный континуум с внутренней структурой) представляет собой собственно турбулентное поле скорости $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, связанное со стохастическим мелкомасштабным пульсационным движением завихренной жидкости (для которой $\Omega \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \neq 0$). Отметим, что завихренность играет в механике турбулентности определяющую роль, создавая возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными.

Как было показано в гл. 6 в процессе временной эволюции квазиравновесной подсистемы турбулентного хаоса, возможно генерирование мезомасштабных когерентных структур, связанное с эффектом взаимной фазовой синхронизации (когерентности) некоторой совокупности мелкомасштабных колебательных мод с близкими частотами. Подобное деление реального турбулентного течения на воображаемые — осредненное и пульсационное, зависит, вообще говоря, от выбора пространственно-временной области осреднения (при выполнении условий эргодичности), для которой установлены средние значения локальных гидродинамических переменных, являющихся непрерывными функциями координат $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ и времени t, т. е. имеет до некоторой степени условный характер.

Для составления полной системы уравнений движения турбулизованной жидкости, характеризуемой двумя линейными масштабами движений

L (внешним) и l_0 (внутренним), удобно ввести две координатные системы: микромасштаба x'_j ($\delta x'_j \sim l$) и макромасштаба x_j ($dx_j \sim \Lambda \gg l$). Эти системы координат делят геометрическое пространство на элементарные объемы $\delta\boldsymbol{r}'$ и $d\boldsymbol{r}$ соответственно. Будем далее считать, что $L \gg \Lambda \geqslant l_0$ и $l_0 \gg l \gg l_\nu$. Здесь величина L есть интегральный масштаб турбулентности (характерный масштаб движения системы), величина l_0 (размер турбулентного «моля») есть масштаб внутреннего движения или состояния среды, а величина l_ν есть молекулярный почти нулевой микромасштаб. Важно иметь в виду, что здесь речь не идет об абсолютных размерах. К примеру, если рассматривается гидродинамическая модель дисковой среды, то физически бесконечно малый объем в этом случае может быть значительно большим объема отдельно взятой планеты. Можно поставить задачу нахождения гидродинамических уравнений движения в макромасштабе x_j по известным уравнениям Навье—Стокса в микромасштабе x'_j. Связанная с этой задачей проблема осреднения является одной из центральных в механике сплошных сред, а в случае такой сложной системы, как турбулизованная жидкость, часто именно от способа осреднения зависит само построение макроскопической модели. Современные методы пространственного осреднения турбулизованной жидкости, соответствующие переходу от уравнений движения малых элементов сплошной среды к описанию тех же движений в макромасштабе, наиболее отчетливо представлены в монографии В. Н. Николаевского (*Nikolaevskiy*, *2003*). Гидродинамический масштаб осредненного движения Λ (например, шаг разрешения разностной сетки) предполагается далее таким, что подсистема турбулентного хаоса в области осреднения $d\boldsymbol{r} \sim \Lambda^3$ содержит всю совокупность мезомасштабных когерентных структур, размер которых меньше области осреднения. Согласно существующим оценкам, чтобы осредненному потоку содержать основную долю (80% или 90%) полной энергии турбулизованного течения, нужно, чтобы масштаб осреднения Λ был в 10—20 раз меньше интегрального масштаба L.

В этом случае воздействие турбулентного хаоса на осредненное движение проявляется в дополнительном турбулентном переносе импульса и энергии мелкомасштабными вихревыми образованиями, что требует построения полуэмпирических моделей замыкания (определяющих соотношений) для осредненных гидродинамических уравнений, а также моделирования эффективных коэффициентов турбулентного обмена, учитывающих, в частности, анизотропию хаоса, связанную с наличием мезомасштабных когерентных структур (*Колесниченко*, *2002*).

8.2.1. Уравнения турбулентного хаоса при наличии среднего течения

Итак, пусть случайная составляющая $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ поля скоростей $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)$ обладает характеристической длиной l_0 (в случае мелкомасштабной турбулентности размер l_0 может совпадать с размером энергосодержащих вихрей), которая мала по сравнению с гидродинамическим масштабом осреднения Λ. Далее будем полагать, что в любом промежуточном масштабе l, удовлетворяющем неравенству $l_\nu \ll l \ll l_0 \ll \Lambda$, осредненная скорость $\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ изменяется слабо, и потому на таких промежуточных масштабах возможно применение методов теории однородной турбулентности (см. *Монин, Яглом, 1996*). В данной главе мы будем предполагать также, что на дисковую среду не действуют электромагнитные силы, диск вращается вокруг оси z с кеплеровской угловой скоростью $\Omega(r)$, и примем центр масс системы за начало отсчета. Кроме этого, будем для простоты полагать, что крупномасштабное (осредненное) течение сводится лишь к дифференциальному вращению. Тогда в цилиндрических координатах (r, φ, z) компоненты вектора осредненной скорости $\langle \boldsymbol{U} \rangle$ будут иметь вид: $\langle \boldsymbol{U} \rangle_r = 0$, $\langle \boldsymbol{U} \rangle_\varphi = \Omega(r)r$, $\langle \boldsymbol{U} \rangle_z = 0$.

Далее для простоты изложения мы ограничимся несжимаемой жидкостью $\langle \rho \rangle = \rho = \mathrm{const}$; рассмотрение турбулентности в сжимаемой среде потребовало бы больших математических усилий. Таким образом, в нашем анализе дисковой трехмерной турбулентности будем исходить из следующей системы мгновенных уравнений движения для несжимаемой однородной жидкости, включающей уравнение Навье—Стокса, уравнение неразрывности и уравнение состояния

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U} + \left(\boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{U} = -\rho^{-1}\frac{\partial P}{\partial \boldsymbol{r}} + \nu\nabla^2\boldsymbol{U} + \boldsymbol{g}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad p = p(\rho). \tag{8.2.1}$$

Здесь $P(\boldsymbol{r}, t)$ — истинное (мгновенное) давление дискового вещества, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = -\partial\Psi/\partial\boldsymbol{r}$ — вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ — ньютоновский гравитационный потенциал. Когда масса протопланетного облака составляет несколько процентов от массы центрального тела (или точнее, когда $\mathcal{M}_{\mathrm{disk}}/\mathcal{M}_\odot \leqslant h_{\mathrm{disk}}/R$, где h_{disk} и R полутолщина и радиус диска соответственно), можно пренебречь самогравитацией частиц диска; в этом случае будем иметь

$$\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\boldsymbol{r}|, \quad \boldsymbol{g} = -\partial\Psi/\partial\boldsymbol{r} = G\mathcal{M}_\odot\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3, \tag{8.2.2}$$

где $\mathcal{M}_\odot$ — масса звезды, G — гравитационная постоянная, $|\boldsymbol{r}|$ — центральный радиус-вектор. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны $\Psi = G\mathcal{M}_\odot/|\boldsymbol{r}| + \Psi_{\mathrm{cr}}$, и потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона.

Угловые скобки в данной главе обозначают осреднение какого-либо периодического по l параметра $\mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)$ по некоторой кубической пространственной области с ребром l (на гранях которой выполняются периодические граничные условия), в предположении, что это осреднение не зависит от точного значения масштаба;

$$\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{r}, t)\rangle \equiv \frac{1}{l^3}\int\limits_{|\xi|<l} \mathcal{A}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\xi}, t)d^3\boldsymbol{\xi}. \tag{8.2.3}$$

Заметим, что с чисто математической точки зрения это определение можно отождествить с осреднением по ансамблю одинаковых гидродинамических систем в асимптотическом пределе $l/\Lambda \to 0$. Далее мы будем использовать следующие, доказываемые интегрированием по частям, тождества для периодических функций:

$$\langle \partial_i\mathcal{A}\rangle = 0; \quad \langle(\partial_i\mathcal{A})\mathcal{B}\rangle = -\langle\mathcal{B}\partial_i\mathcal{A}\rangle; \quad \langle(\nabla^2\mathcal{A})\mathcal{B}\rangle = -\langle(\partial_i\mathcal{B})(\partial_i\mathcal{A})\rangle;$$
$$\langle\boldsymbol{u}\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\rangle = \langle(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}\rangle; \quad \langle\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\boldsymbol{v})\rangle = -\langle(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\rangle, \tag{8.2.4}$$

(если $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$).

Осредняя уравнения (8.2.1) по ансамблю одинаковых гидродинамических систем, получим уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \boldsymbol{U}\rangle + \left(\langle \boldsymbol{U}\rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle \boldsymbol{U}\rangle = -\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{I}\langle P\rangle - \boldsymbol{R}) + \nu\nabla^2\langle \boldsymbol{U}\rangle - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle \Psi\rangle, \quad \operatorname{div}\langle \boldsymbol{U}\rangle = 0, \tag{8.2.5}$$

где $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\rho\langle \boldsymbol{uu}\rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса; в этой главе единичный тензор обозначен символом $\boldsymbol{I}$.

Уравнения движения для пульсационной скорости $\boldsymbol{u}$ могут быть получены путем вычитания соответствующих частей уравнений (8.2.5) из (8.2.1). Далее мы ограничимся так называемым корреляционным приближением второго порядка (см. *Краузе и др., 1984*), когда можно пренебречь членами, квадратичными по флуктуациям скорости, и воспользуемся сделанным выше предположением о неизменности осредненной скорости $\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ на любом промежуточном микромасштабе l внутри инерционного интервала $l_\nu \ll l \ll l_0$. В результате все сводится к исследованию уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} + \left((\langle \boldsymbol{U}\rangle + \boldsymbol{u}) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \tag{8.2.6}$$

которые для элементарного объема $d\boldsymbol{r}'$, движущегося со средней скоростью турбулизованного потока $\langle \boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)\rangle$ принимают (при соответствующем переопределении скорости $\boldsymbol{u}$ в этой системе координат) вид

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \tag{8.2.7}$$

Это означает, что подсистема турбулентного хаоса не имеет гидродинамической скорости относительно подсистемы осредненного движения. Здесь $p \equiv P - \langle P\rangle$ — пульсация давления; $\psi \equiv \Psi_{\text{cr}} - \langle \Psi_{\text{cr}}\rangle$ (далее предполагается, что ψ некоторым образом, который мы не конкретизируем, возбуждает поле пульсационных скоростей $\boldsymbol{u}$). Разумеется, уравнения (8.2.7) должны быть дополнены периодическими граничными условиями по пространственной переменной: $\boldsymbol{u}(x + nl, y + ml, z + ql) = \boldsymbol{u}(x, y, z)$ для всех x, y, z и любых целых n, m, q.

8.2.2. Законы сохранения в локально изотропной турбулентности

Рассмотрим вначале интегральные законы сохранения, связанные с однородностью, изотропностью и зеркальной симметрией турбулентного поля $\boldsymbol{u}$. Используя тождества (8.2.4), из уравнений (8.2.7), при интегрировании по ячейке пространственной периодичности (кубической пространственной области с ребром l, на гранях которой выполняются периодические граничные условия), легко получить (см., например, *Фриш, 1998*) следующие законы сохранения для осредненных кинетической энергии $E = \langle |\boldsymbol{u}|^2/2\rangle$, энстрофии $\Omega = \langle |\Omega|^2/2\rangle$ и полной спиральности $H = \langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}/2\rangle$:

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon = -2\nu\Omega, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = -\varepsilon_\Omega, \qquad \frac{dH}{dt} = -\varepsilon_H, \tag{8.2.8}$$

где

$$\varepsilon \equiv \frac{\nu}{2}\langle \sum_{i,j}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \rangle, \qquad \varepsilon_\Omega \equiv \nu \langle |\operatorname{rot} \omega|^2 \rangle, \qquad \varepsilon_H \equiv \nu \langle \omega \cdot \operatorname{rot} \omega \rangle. \tag{8.2.9}$$

Важно иметь в виду, что уравнение баланса (8.2.8) для энстрофии справедливо только в лишь двумерном случае. Здесь величины ε, ε_Ω ε_H обозначают соответственно скорость диссипации осредненной кинетической энергии, скорость диссипации энстрофии и скорость диссипации спиральности на единицу массы. Из уравнений (8.2.8) видно, что в невязком пределе $\nu \to 0$ (в частности, во всем инерционном интервале) в отсутствии диссипации и накачки движения величины E, Ω и H остаются постоянными.

8.2.3. Динамика завихренности и каскад энергии

Прежде чем проанализировать возможное влияние спиральности на динамику дисковой турбулентности, напомним некоторые используемые далее понятия и количественные спектральные характеристики мелкомасштабной турбулентности (см. *Бэтчелор*, *1955*; *Монин*, *Яглом*, *1996*). Как уже было отмечено выше, большинство проведенных исследований турбулентного движения в диске в рамках рассматриваемой проблематики базировались на концепции Колмогорова (*1941*, *1962*), согласно которой в пределе больших чисел Рейнольдса (отвечающих крупномасштабным движениям в потоке космического вещества), несмотря на анизотропность, неоднородность и нестационарность осредненного течения, случайный характер дробления вихрей и хаотичность передачи их энергии по каскаду вниз приводят к тому, что стохастический режим турбулентных флуктуаций в границах пространственно-временной области осреднения мгновенных гидродинамических уравнений, является почти локально изотропным. Напомним, что локально изотропная турбулентность обладает тем свойством, что любая характеризующая ее средняя величина инвариантна относительно любых параллельных переносов, вращений и зеркальных отражений. В этом случае энергетическая структура трехмерного мелкомасштабного поля пульсационных скоростей является статистически подобной для больших значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} \equiv u_0 l_0/\nu$ (где $u_0 = \sqrt{\langle |\boldsymbol{u}|^2 \rangle}$ — характеристическая скорость пульсационного поля скорости, l_0 — характеристический масштаб энергосодержащих вихрей) и инерционный интервал волновых чисел $k_0 \ll k \ll k_\nu$, разделяющий зоны диссипации и генерации турбулентной энергии $E = u_0^2/2$ в пространстве волновых чисел k, тем больше, чем больше число Re. Скорость диссипации осредненной кинетической энергии на единицу массы ε, определяемая формулой (8.2.9) в первоначальной теории Колмогорова (*K41*), считалась универсальной константой для рассматриваемого турбулентного течения. Величина ε характеризует также поток кинетической энергии, который каскадным образом без потерь переносится вдоль последовательно возрастающих волновых чисел $k_n \gg k_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) (уменьшающихся масштабов длины, $l_n = 1/k_n$) внутри инерционного интервала до тех пор, пока поток не достигает диссипативного масштаба $l_\nu = 1/k_\nu \sum(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, для которого скорость диссипации энергии благодаря кинематической вязкости будет равна ε.

В предположении однородности и стационарности поля пульсационных скоростей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ важнейшими характеристиками турбулентности являются корреляционный (двухточечный и двухвременной) тензор поля скоростей $\widetilde{R}_{ij}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}, t, \tau) \equiv \langle u_i(\boldsymbol{r}, t) u_j(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{x}, t+\tau))\rangle$ и спектральный тензор энергии (см. *Бэтчелор, 1955*)

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \widetilde{R}_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) \exp[-i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega\tau)] d\boldsymbol{x}\, d\tau, \tag{8.2.10}$$

являющейся, по существу, фурье-образом корреляционного тензора $\widetilde{R}_{ij}$. Заметим, что для несжимаемой жидкости ($\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0$) комплексный тензор $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega)$ обладает следующими (используемыми ниже) свойствами

$$k_j \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = k_i \Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = 0 \tag{8.2.11}$$

(по повторяющимся индексам здесь и всюду далее, если не оговорено противное, предполагается суммирование). Энергетическая спектральная функция (плотность) $E(k, \omega)$, являющаяся в теории однородной турбулентности ключевой характеристикой, определяется интегралом

$$E(k, \omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{S_k} \Phi_{ii}(\boldsymbol{k}, \omega) dS, \tag{8.2.12}$$

где интегрирование проводится в $\boldsymbol{k}$-пространстве по сфере S_k радиуса $k \equiv |\boldsymbol{k}|$. Тогда передаваемую по каскаду полную кинетическую энергию E единицы массы можно представить в виде

$$E \equiv \frac{1}{2}\langle |\boldsymbol{u}|^2 \rangle = \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ii}(0, 0) = \frac{1}{2} \iint \Phi_{ii}(\boldsymbol{k}, \omega) d\boldsymbol{k} d\omega = \int \int E(k, \omega) dk\, d\omega, \tag{8.2.13}$$

причем $\Phi_{ii} \geqslant 0$ для всех $\boldsymbol{k}$ и ω, так как эти диагональные элементы представляют в волновом пространстве плотность составляющих кинетической энергии. Отсюда величину $E(k, \omega) dk\, d\omega$ можно интерпретировать как кинетическую энергию (соответствующую всем волновым числам с фиксированным модулем), заключенную в интервале волновых чисел $(k, k + dk)$ и интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

Поскольку в интервале волновых чисел $k_0 \ll k \ll k_\nu$ спектральный энергетический тензор $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega)$, являющийся изотропным тензором второго ранга, статистически не связан с источником энергии, ограниченным волновым числом k_0, то можно предположить, что он будет определяться только скоростью диссипации энергии ε

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4}(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j), \tag{8.2.14}$$

причем, как это следует из соображений размерности, энергетическая спектральная плотность описывается формулой Колмогорова

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (k_0 \ll k \ll k_\nu), \tag{8.2.15}$$

где C — безразмерная постоянная порядка единицы.

8.2.4. Двумерная турбулентность

В случае развитой двумерной турбулентности (напомним еще раз, что строго двумерная турбулентность представляет собой всего лишь математическую идеализацию и никогда не реализуется в природе) в несжимаемой жидкости, в теориях колмогоровского типа существуют две положительно-определенные сохраняющиеся в невязком пределе величины. Это осредненные кинетическая энергия $E=\langle|\boldsymbol{u}|^2/2\rangle$ и энстрофия $\Omega\equiv\langle|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}|^2/2\rangle$, которые, при их генерации в однородном потоке на некоторых промежуточных масштабах энергетической накачки k_l, далеких от диссипативного масштаба k_ν, обе вовлекаются в каскадный процесс. При конечной вязкости в двумерном потоке энстрофия, как видно из формулы (8.2.8), может только монотонно убывать со временем вместе с величиной $\varepsilon=2\nu\Omega$. Это связано с тем, что в двумерном потоке блокирован механизм растяжения вихревых трубок, который обеспечивает рост энстрофии в трехмерном течении.

В общем трехмерном случае преобразование Фурье вихревого поля $\boldsymbol{\omega}\equiv\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$, компоненты которого имеют вид $\omega_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k$, очевидно, равно $\boldsymbol{\omega}\equiv i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u}$, а его спектральный тензор имеет вид $\Omega_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)=\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}k_m k_p\Phi_{nq}(\boldsymbol{k},\omega)$, где ε_{jpq} — антисимметричный тензор Леви-Чивиты. В частности, при учете (8.2.11), отсюда имеем

$$\Omega_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)=k^2\Phi_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{E(k,\omega)}{4\pi k^2}(k^2\delta_{ij}-k_ik_j). \tag{8.2.16}$$

Заметим, что из формулы $\Omega=\varepsilon/2\nu$ следует, что спектр среднего квадратичного вихря Ω скорости совпадает со спектром вязкой диссипации кинетической энергии ε. Непосредственным следствием (8.2.16) является соотношение

$$\Omega\equiv\langle|\omega|^2/2\rangle=\iint\Omega(k)dk=\iint k^2E(k,\omega)d\,kd\omega, \tag{8.2.17}$$

где соответствующая спектральная плотность для среднего квадратичного вихря скорости имеет вид

$$\Omega(k)=k^2E(k)=C\varepsilon^{2/3}k^{1/3}. \tag{8.2.18}$$

В теории двумерной турбулентности показано (см., например, *Монин, Яглом, 1996*; *глава 26*), что связь (8.2.18) между спектральными плотностями энергии $E(k)$ и энстрофии $\Omega(k)$ запрещает одновременный перенос этих величин к мелким масштабам. Впервые гипотезу о возможности обратного каскада энергии в двумерной турбулентности высказал Крайчнан (*Kraichnan, 1967*) и он же в работе (*Kraichnan, 1976b*) дал интерпретацию обратного каскада в терминах отрицательной турбулентной вязкости. По некоторым оценкам, обратный каскад, который неоднократно подтверждался в численных экспериментах, является одним из важнейших результатов в теории развитой турбулентности после работ Колмогорова (см. *Гама и др., 1994*; *Фриш, 1998*).

Энергия в двумерном случае переносится к большим, а не к малым (как в трехмерном случае) масштабам, а к малым масштабам направлен поток энстрофии. Причем в развитой двумерной турбулентности имеется два инерционных интервала. Для малых волновых чисел $k_0<k<k_l$ каскадный процесс

определяется скоростью диссипации энергии, и анализ размерности приводит к классической формуле (8.2.15) для спектральной плотности, с тем существенным отличием от трехмерного случая, что поток энергии в инерционном интервале со спектром (8.2.15) направлен от малых масштабов к большим. Для больших волновых чисел ($k_\nu > k > k_l$) дополнительной определяющей величиной является скорость диссипации энстрофии $\varepsilon_\Omega \equiv \nu|\mathrm{rot}\ \omega|^2$, и размерный анализ приводит к другому спектральному распределению кинетической энергии по модулю волнового числа k,

$$E(k) = C_\Omega \varepsilon_\Omega^{2/3} k^{-3}, \tag{8.2.19}$$

которое и описывает инерционный интервал переноса энстрофии. Важно при этом иметь ввиду, что в двумерном случае именно каскад энстрофии — это прямой каскад, т. е. энстрофия переносится от больших масштабов к меньшим масштабам. Формула $k_\nu \sim (\varepsilon_\Omega/\nu^3)^{1/6}$ определяет границу инерционного интервала переноса энстрофии.

Таким образом, в случае двумерной турбулентности имеет место обратный каскад кинетической энергии E, при котором энергия мелкомасштабного хаотического движения затрачивается на энергетическую накачку мезомасштабных вихревых структур. Этот эффект, получивший название отрицательной вязкости (см. *Старр*, *1971*; *Vergassola и др.*, *1993*; *Gama и др.*, *1994*), свойствен, как отмечалось выше, многим космическим квазидвумерным объектам. Перейдем теперь к рассмотрению реальной трехмерной гидродинамической турбулентности в природных средах.

§ 8.3. О каскадах энергии и спиральности в дисковой отражательно-неинвариантной турбулентности

8.3.1. Нарушение зеркальной симметрии в протопланетном диске

Существование полей турбулентности, удовлетворяющих в статистическом отношении определенным условиям симметрии (как в случае локально изотропной турбулентности), приводит, как видим, к ряду существенных математических упрощений. Хотя зеркальная симметрия и является фундаментальным свойством уравнений гидродинамики, тем не менее, в определение некоторых важных гидродинамических параметров включена правосторонность (левосторонность). Такой величиной является, в частности, завихренность поля пульсационных скоростей, $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}$. Для дискового дифференциально вращающегося вещества, как уже было отмечено, может представлять значительный интерес, такая лишенная зеркальной симметрии статистическая характеристика мелкомасштабной турбулентности, как полная гидродинамическая спиральность (псевдоскаляр), определяемая средним

$$H \equiv \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{2l^3}\int_{|\xi|<l} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\xi}, t)\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\xi}, t)d^3\boldsymbol{\xi}. \tag{8.3.1}$$

Напомним, что векторы $\boldsymbol{A}$, которые ведут себя как величины $\boldsymbol{A}^{\text{ref}}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r}, t)$, называются полярными, а те, для которых справедливо соотношение $\boldsymbol{A}^{\text{ref}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r}, t)$, — аксиальными или псевдовекторами (здесь индекс «*ref*» обозначает оператор отражения в произвольной плоскости или в произвольной точке). Скаляр $V^{\text{ref}} \equiv (\boldsymbol{A}^{\text{ref}} \times \boldsymbol{B}^{\text{ref}}) \cdot \boldsymbol{C}^{\text{ref}} = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = -V$, зависящий от использования правосторонности, является псевдоскаляром; последнее означает, что он меняет знак при замене правосторонней системы отсчета на левостороннюю. Поле пульсационных скоростей $\boldsymbol{u}$ с отличной от нуля средней спиральностью представляет из себя анизотропный континуум, образованный совокупностью произвольно ориентированных мелкомасштабных винтовых вихрей, в котором, например, правовращательные пульсационные движения (вихревые структуры) более вероятны, чем левовращательные. Заметим, что в своих исследованиях мелкомасштабных свойств течения (модель случайного каскада) Колмогоров (*1941*; *1962*) отказался от учета любых пространственных структур, которыми мог бы обладать турбулентный поток. Однако, как было неоднократно подчеркнуто выше, по современным представлениям, на малых масштабах в турбулентном течении почти всегда присутствуют вихревые структуры (нити), которые могут влиять на свойства течения также и в инерционном интервале. Таким образом, величина H, связанная с топологической структурой сложного поля завихренности, является фундаментальной мерой «отсутствия отражательной симметрии» в турбулентном течении.

Согласно Моффату (*Moffatt*, *1981*), спиральность поля турбулентности, «будучи квадратичным инвариантом некоторого локализованного движения жидкости (при условиях, определенных в выше), имеет статус, сравнимый со статусом кинетической энергии возмущения». Вопрос о существовании других возможных интегральных инвариантов (см. *Edwards*, *1967*; *1968*), кроме классических (энергии, импульса и момента количества движения), характеризующих в той или иной степени сохраняемую топологическую конфигурацию вихревых нитей, остается на сегодняшний день все еще открытым. Напомним также, что только благодаря введению в рассмотрение анизотропной фоновой турбулентности с магнитным полем, не обладающей отражательной симметрией (простейшей мерой которой служит, в частности, и гидродинамическая спиральность H), удалось продвинуться в понимании турбулентного магнитного динамо в астрофизике (так называемого α-эффекта) (см., например *Вайнштейн и др.*, *1980*; *Паркер*, *1982*; *Краузе*, *Рэдлер*, *1984*). Вместе с тем, величину H, как будет показано ниже, можно рассматривать, по всей вероятности, и как ту статистическую характеристику анизотропного поля пульсационных скоростей, которая способна обеспечить появление эффекта отрицательной вязкости во вращающейся среде (в частности, в протопланетном диске).

Итак, спиральность поля скорости может эффективно генерироваться в зеркально-несимметричном (не инвариантном относительно изменения четности) поле случайных мелкомасштабных скоростей $\boldsymbol{u}$, например в быстро вращающейся вокруг фиксированной оси турбулентности (см., например, *Steenbeck и др.*, *1966*). В частности, спиральность в протопланетном облаке может возникать естественным образом вследствие его вращения и неоднородности плотности (стратификации по плотности) или интенсивности турбулентных пульсаций в зонах с развитой конвекцией. Действительно, поднимающееся вещество будет расширяться и вращаться под действием сил Кориолиса, приводя, таким образом, к левовинтовому спиральному движению. Опускающееся вещество будет сжиматься под действием сил Кориолиса и вынуждено вращаться в противоположном направлении, опять таки совершая левовинтовое движение. Очевидно, что в «нижней» части диска будут преобладать правовинтовые спиральные движения. Баланс левовинтовых и правовинтовых винтовых движений может установиться в окрестности экваториальной плоскости диска только при отсутствии градиентов интенсивности турбулентности, т. е. на самых поздних этапах эволюции дифференциально-вращающегося протопланетного облака.

8.3.2. Влияние спиральности на энергетический каскад

Представим теперь такую ситуацию, когда источник пульсационной кинетической энергии (например, в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в дифференциально вращающемся дисковом веществе) на волновых числах k_0 генерирует отличную от нуля полную спиральность H. Как было показано выше, полная спиральность пульсационного поля скоростей в инерционном интервале (подобно полной энергии) является сохраняющейся величиной $d\langle \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\rangle/dt=0$. Важно иметь в виду, что с генерированием спиральности связано появление так называемых зацеплений вихревых линий течения (см., например, *Алексеенко и др.*, *2005*), которые сохраняются в каскадном (не невязком) процессе в инерционной области, но уничтожаются вязкостью в масштабах $l_\nu=k_\nu^{-1}$. Спиральность, как уже нами было отмечено, характеризует степень связности вихревых линий в потоке. Число витков $\boldsymbol{n}$ одной нити вокруг другой характеризуется величиной зацепления $H=\pm 2n\Gamma_1\Gamma_2$, где Γ_k — интенсивность нити, причем знаки $\pm$ показывает на правое или левое зацепление соответственно. Если отдельная вихревая трубка, прежде чем замкнуться, обвивается вокруг себя, то на ней имеется узел; сохранение спиральности означает также, что сохраняется структура «узловатости» вихревого поля. В теории вихрей было показано, что инвариант спиральности H связан с более общей топологической характеристикой — так называемым инвариантом Хопфа (см., например, *Moffatt*, *1984*).

По аналогии с определением величины $E(k)$ (8.2.12) можно определить спектральную плотность спиральности

$$F(k,\tau)\equiv i\int\limits_{S_k}\varepsilon_{jkl}k_k\Phi_{jl}(\boldsymbol{k},\tau)\,dS, \tag{8.3.2}$$

где интегрирование проводится в $\boldsymbol{k}$-пространстве по сфере S_k радиуса $k\equiv|\boldsymbol{k}|$. Таким образом, для полной спиральности H имеем

$$H=i\varepsilon_{jkl}\iint k_k\Phi_{jl}(\boldsymbol{k},\tau)\,d\boldsymbol{k}\,d\tau=\iint F(k,\tau)\,dk\,d\tau. \tag{8.3.3}$$

Функция $F(k,\tau)$, в силу (8.3.2), действительна и является псевдоскаляром; если поле пульсационных скоростей $\boldsymbol{u}$ статистически инвариантно относительно преобразования отражения (например, преобразования четности вида $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$, описывающего зеркальное отражение в плоскости $z = 0$), то она обращается в нуль.

Для изотропной отражательно-несимметричной турбулентности для полного определения спектрального тензора $\Phi_{il}(\boldsymbol{k}, \tau)$ достаточно функций $E(k, \tau)$ и $F(k, \tau)$. Тогда наиболее общая форма однородного поля (стационарного по t) мелкомасштабной турбулентности, удовлетворяющая равенствам (8.2.11), (8.2.12) и (8.3.2), имеет вид (см. *Моффат*, *1980*)

$$\Phi_{il}(\boldsymbol{k}, \tau) = \frac{E(k, \tau)}{4\pi k^4}(k^2\delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{iF(k, \tau)}{8\pi k^4}\varepsilon_{ijk}k_k. \tag{8.3.4}$$

В отличие от спектральной плотности кинетической энергии $E(k, \tau)$, спектральная плотность спиральности $F(k, \tau)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Именно с этим обстоятельством связана неоднозначная роль спиральности в каскадных трехмерных процессах, поскольку простые аргументы, приводящие к выводу о существовании двух инерционных интервалов (как для двумерной турбулентности) в этом случае не работают. Если в случае двумерной турбулентности спектральные плотности энергии и энстрофии связаны соотношением (8.2.18), то для функции $F(k)$ можно получить только ограничение сверху (так называемое условие «реализуемости»)

$$|F(k)| \leqslant 2kE(k), \tag{8.3.5}$$

которое следует, например, из неравенства Коши—Буняковского—Шварца, записанного в виде

$$\left|\int\limits_{S_k} < \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{u}^*\cdot\boldsymbol{\omega} > dS\right|^2 \leqslant 4\int\limits_{S_k} < |\boldsymbol{u}|^2 > dS \int\limits_{S_k} < |\boldsymbol{\omega}|^2 > dS,$$

и равенств (8.2.13), (8.2.16) и (8.3.3). Здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение, а значок «$\wedge$» сверху какого-либо символа обозначает Фурье-преобразование.

Неравенство (8.3.5) позволяет реализоваться, вообще говоря, двум сценариям поведения спиральности в турбулентном потоке (*Brissaund и др.*, *1973*). Во-первых, в некоторых случаях, по аналогии с двумерной турбулентностью, имеет место каскад сохраняемых величин к противоположным концам инерционного интервала спектра, причем прямой каскад спиральности H к мелким масштабам сопровождается синхронным обратным каскадом энергии E к крупным масштабам. Во-вторых, существует возможность прямого одновременного каскада обеих величин к малым масштабам. Какой процесс будет иметь место в некоторый данный момент времени, зависит от интегральных свойств рассматриваемой системы, а также от граничных и начальных условий.

В первом случае используется гипотеза о том, что спектр энергии $E(k)$ может зависеть только от волнового числа k и скорости диссипации спиральности ε_H; тогда соображения размерности приводят к спектральному закону вида

$$E(k) \sim \varepsilon_H^{2/3}k^{-7/3}. \tag{8.3.6}$$

Спектральная функция спиральности $F(k)$ определяется процессом переноса спиральности от источника, действующего на волновых числах k_0, к вязкому стоку на волновых числах k_ν и далее. При генерировании спиральности появляются крупномасштабные зацепления вихревых линий рассматриваемого течения, которые выживают в каскадном процессе в инерционной области, но уничтожаются вязкостью в масштабах $l_\nu = k_\nu^{-1}$.

Второй сценарий предполагает пассивное поведение спиральности в турбулентном потоке. Это означат, что реализуется обычный колмогоровский каскад энергии $E(k)$ к малым масштабам с законом (8.2.15). Пусть скорость генерирования спиральности на волновых числах ik_0 равна ε_H [см. (8.2.9)]. Поскольку спиральность генерируется одновременно с энергией, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $|\varepsilon_H| \leqslant k_0\varepsilon$ (*Brissaund и др., 1973*). Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то

$$|\varepsilon_H| \sim ik_0\varepsilon \sim iu_0^3/l_0^2. \tag{8.3.7}$$

Спектр спиральности $F(k)$ должен быть пропорционален ε_H (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), и единственными дополнительными параметрами, определяющими $F(k)$ в инерционной области $k_0 \ll k \ll k_\nu$, могут быть ε и k. Следовательно, из соображений размерности

$$F(k) = C_H\varepsilon_H\varepsilon^{-1/3}k^{-5/3} \quad (k_0 \ll llk_\nu), \tag{8.3.8}$$

где C_H — универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C. Отметим, что из равенств (8.3.7), (8.2.15) и (8.3.8) также вытекает неравенство $|F(k)| \leqslant 2kE(k)$, в полном согласии с формулой (8.3.5).

Из всего сказанного следует, что присутствие спиральности оказывает в этом случае слабое влияние на каскадный перенос энергии, поскольку, независимо от величины спиральности, инжектированной в поток на волновых числах ik_0, относительная величина спиральности, определяемая безразмерным отношением $F(k)/2kE(k)$, с увеличением k последовательно уменьшается. Можно полагать, что при достаточно большом значении величины k/k_0 влияние спиральности на динамику будет незначительно, и она будет переноситься и диффундировать так же, как динамически пассивная скалярная примесь (*Монин, Яглом, 1996*). Вместе с тем, как было показано в работе (*Kraichnan, 1973*; *Andre, Lesieur, 1977*), если в рассматриваемом потоке жидкости реализуется режим генерирования почти максимальной спиральности для каждого значения волнового числа, то суммарный перенос кинетической энергии к более высоким волновым числам будет ослаблен, и потому процесс затухания турбулентности будет растянут во времени. В рассматриваемом здесь случае отсюда можно сделать важный вывод о том, что относительно длительное существование турбулентности во вращающемся в протопланетном облаке может быть частично связано с отсутствием отражательной симметрии относительно экваториальной плоскости поля вихревых скоростей в диске.

Итак, гиротропная турбулентность ведет себя качественно иным образом, чем не спиральная, что позволяет в случае возможной реализации обратного каскада кинетической энергии не только объяснить появление эффекта отрицательной вязкости в дифференциально-вращающемся (трехмерном) протопланетном облаке, но и прогнозировать зарождение относительно устойчивых и энергоемких мезомасштабных когерентных вихревых структур, запускающих (инициирующих) механизмы триггерного кластерообразования в диске.

8.3.3. Генерация гидродинамической спиральности во вращающемся диске

Отсутствие симметрии относительно плоскости $z=0$, перпендикулярной вектору угловой скорости $\mathbf{\Omega}$, с необходимостью приводит к нарушению отражательной симметрии случайных движений, играющей главную роль в генерации спиральности (см. *Steenbeck и др.*, *1966*). Покажем, что такая симметрия отсутствует и в случае вращающегося стратифицированного по z протопланетного диска, когда на жидкие элементы, плотность которых отличается на величину ρ'от локальной плотности ρ_0 окружающей среды, действуют архимедовы силы $\rho'\boldsymbol{g}$ (с $\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{\Omega}\neq 0$). Другими словами, рассмотрим роль взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил в генерации средней спиральности в диске. В связи с этим следует отметить, что отсутствие инвариантности относительно преобразования четности является более общим свойством, чем наличие спиральности, хотя и следует из последнего (см. *Gilbert и др.*, *1988*).

Примем здесь ту точку зрения, что мелкомасштабная завихренность в диске порождается конвекцией. Для нахождения псевдоскалярной функции $\langle \boldsymbol{u}\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\rangle$ необходимо, в общем случае, решить гидродинамическую задачу в приближении Буссинеска для пульсирующего поля скорости $\boldsymbol{u}$ при наличии неустойчивой стратификации плотности и с выделенным направлением $\mathbf{\Omega}$ преимущественного закручивания вихрей (см., например, *Eltayeb*, *1972*; *Моффат*, *1980*). В рамках этого подхода будем описывать движение вещества в системе отсчета, вращающейся со средней угловой скоростью вращения диска $\mathbf{\Omega}$. Тогда уравнение движения (8.2.1) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}+\left(\boldsymbol{U}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{U}+2\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{U}=-\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}P+\boldsymbol{g}+\nu\nabla^2\boldsymbol{U}, \tag{8.3.9}$$

где $2\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{U}$ и $\frac{1}{2}|\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2$ — соответственно ускорение Кориолиса и потенциал центробежной силы; $\boldsymbol{g}=-\boldsymbol{U}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\psi-\frac{1}{2}|\Omega\times\boldsymbol{r}|^2\right)$. Задача характеризуется двумя безразмерными числами: числом Россби $\mathrm{Ro}=U_0/\mathbf{\Omega}L$ и числом Экмана $\mathrm{Ek}=\nu/\mathbf{\Omega}L^2$ (здесь $L=0(R)$ — масштаб измерения характерной скорости U_0). Для диска числа Экмана и Россби много меньше единицы, поэтому для простоты мы ограничимся рассмотрением геострофического движения, когда в (8.3.9) можно пренебречь переносным ускорением и вязким членом. Тогда в приближении Буссинеска уравнение для турбулентной составляющей поля скорости $\boldsymbol{U}$ принимает вид:

$$2\rho_0\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{U}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}p'+\rho'\boldsymbol{g}.$$

Напомним, что в приближении Буссинеска, с точностью до величин первого порядка малости и с учетом соотношения $\partial P_0/\partial\boldsymbol{r}=\rho_0\boldsymbol{g}$, можно положить $\rho^{-1}\partial P/\partial\boldsymbol{r}+\boldsymbol{g}\approx\rho_0^{-1}(\partial p'/\partial\boldsymbol{r}+\rho'\boldsymbol{g})$ с одновременной заменой уравнения неразрывности условием бездивергентности, $\operatorname{div}\boldsymbol{U}=0$; здесь p' и ρ' — отклонения давления и плотности от основного состояния P_0 и ρ_0, обусловленные существованием ветров и течений. Применив к этому уравнению операцию ротора и учитывая, что

$$\mathrm{rot}(\rho' \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho' \times \boldsymbol{g},$$

получим

$$2\rho_0 \,\mathrm{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{U}) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho' \tag{8.3.10}$$

и, следовательно,

$$2\rho_0(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{rot}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}) \cdot \left(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho'\right) = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \left[\boldsymbol{u} \times \left(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho'\right)\right] =$$

$$= -(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{g})\left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho'\right) + \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho'\right)(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g}). \tag{8.3.11}$$

Если положить теперь $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{u}_\parallel$ (где $\boldsymbol{u}_\parallel = u_z \boldsymbol{i}_z$ — составляющая турбулентной скорости $\boldsymbol{u}$ параллельная вектору угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$; $\boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$; $u_z = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i}_z$; $\boldsymbol{u}_\perp = u_x \boldsymbol{i}_x + u_y \boldsymbol{i}_y$ — проекция скорости $\boldsymbol{u}$ на экваториальную плоскость диска, предполагаемая далее однородной относительно x и y, $u_x = u_y = u_\perp$) и усреднить (8.3.11) по горизонтальным плоскостям $z = \mathrm{const}$, то в результате получим

$$2\rho_0 |\boldsymbol{\Omega}|^2 \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle = -(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{g}) \langle \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho' \rangle + \boldsymbol{g} \cdot \langle \boldsymbol{u} \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \rho' \rangle \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{8.3.12}$$

В частном случае, когда вектор ускорения силы тяжести $\boldsymbol{g}$ параллелен вектору углового вращения $\boldsymbol{\Omega}$ и величина ρ_0однородна в горизонтальных плоскостях из (8.3.12), следует, при использовании уравнения неразрывности

$$\boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\rho_0 \boldsymbol{u}) = \rho_0 \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}{}_\perp \boldsymbol{u}_\perp + \partial(\rho_0 u_z)/\partial z = 0,$$

соотношение (*Hide*, *1976*)

$$\langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp / 2 \rangle \cong -\frac{\langle \rho' \partial u_z / \partial z \rangle}{4\rho_0 |\boldsymbol{\Omega}|^2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{g}), \tag{8.3.13}$$

устанавливающее прямую связь между частью $\langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp / 2 \rangle$ средней спиральности H и псевдоскаляром $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{g}$. Используя оценку (*Моффат*, *1980*)

$$\langle \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle + \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\parallel \rangle + \langle \boldsymbol{u}_\parallel \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle =$$

$$= \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle \left(1 + \frac{\langle \boldsymbol{u}_\parallel \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle}\right) = \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle \left(1 + 0\left(\frac{U_\parallel / L_\perp}{U_\perp / L_\parallel}\right)\right) =$$

$$= \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle (1 + O(L_\parallel^2 / L_\perp^2)) \cong \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp \rangle, \tag{8.3.14}$$

можно считать, что для протопланетного диска величина спиральности приближенно равна $H \cong \langle \boldsymbol{u}_\perp \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_\perp / 2 \rangle$, поскольку отношение $L_y / L_\perp$ в нем достаточно мало. Здесь $U_\parallel$, $U_\perp$, $L_\parallel$ и $L_\perp$ — характеристические скорости и пространственные масштабы, параллельные и перпендикулярные вектору угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, которые (в силу уравнения неразрывности) связаны соотношением $U_\parallel / L_\parallel = 0(U_\perp / L_\perp)$.

Заметим, что корреляция $(g/\rho_0) < \rho' u_z >$ фигурирует также и в определении коэффициентов турбулентных переноса по вертикали, в частности, коэффициента турбулентного теплообмена по вертикали (см., например, *Ван Мигем, 1977*; *Marov, Kolesnichenko, 1992*), характеризуя величину скорости перехода турбулентной энергии во внутреннюю энергию среды (или наоборот, в зависимости от устойчивости или неустойчивости распределения плотности и температуры в системе) и тем самым степень затухания или генерации турбулентности. Таким образом соотношение (8.3.13) еще раз доказывает, что не равная нулю спиральность в диске, генерируемая благодаря взаимодействию архимедовых и кориолисовых сил, действительно влияет на время поддержания турбулентности в нем.

Итак, корреляция между плотностью и вертикальной скоростью $\langle \rho' \partial u_z / \partial z \rangle$ играет важную роль в определении величины и знака средней спиральности в диске. Найти явный вид этой корреляции, а вместе с ним и функции H, можно будет лишь в рамках адекватной гидродинамической модели турбулентного течения в диске, когда известны пространственные распределения всех гидродинамических параметров в нем. Здесь мы этого делать не будем, а рассмотрим качественную картину появления спиральности в некоторой дисковой конвективной зоне. Пусть вихрь со скоростью u_z смещается на расстояние ζ в конвективной зоне верхней части диска $(0 < z < h_{\text{disk}})$, средняя плотность ρ_0 которого убывает от экваториальной плоскости к поверхности диска $[(-\partial \rho_0 / \partial z) > 0]$, тогда имеют место положительные флуктуации плотности $\rho' \cong -\zeta \partial \rho_0 / \partial z > 0$. Вследствие градиента средней плотности, он будет согласно уравнению неразрывности $\nabla_\perp \boldsymbol{u}_\perp \to -\rho_0^{-1} \partial (u_z \rho_0) / \partial z$ (в приближении Буссинеска), расширяться, т. е. приобретать горизонтальные составляющие скорости. Возникающие при этом моменты кориолисовых сил приводят к левовинтовому спиральному вращению. Опускающееся вещество в верхней части диска будет сжиматься под действием сил Кориолиса и вынуждено вращаться в противоположном направлении, т. е. опять-таки совершая левовинтовое спиральное движение. В приведенных рассуждениях не принималась во внимание интенсивность турбулентных пульсаций в конвективной области диска, которая может быть, вообще говоря, не везде одинакова. Анизотропная интенсивность мелкомасштабной турбулентности может в принципе изменить направление вращения отдельного вихря в конвективной зоне. Но все-таки основной вклад в полную спиральность H вносит градиент плотности.

Таким образом, конвекция в верхней половине диска с большей вероятностью приводит к левовинтовым спиральным движениям, чем к правовинтовым. Очевидно, что в нижней половине диска $(-h_{\text{disk}} < z < 0)$ будет преобладать правовинтовые спиральные движения. Таким образом, отсутствие зеркальной симметрии относительно преобразования $z \to -z$ приводит к усилению вихревых структур одного знака. Баланс левовинтовых и правовинтовых движений может установиться в области экваториальной плоскости диска только при отсутствии градиента интенсивности турбулентности в ней (т. к. однородная турбулентность способствует установлению равномерного распределения разноориентированных вихрей), поскольку один из типов спиральных движений приходит снизу, а другой — сверху, т. е. только на самых поздних этапах эволюции дифференциально-вращающегося протопланетного облака.

§ 8.4. Отрицательная вязкость по вращающейся дисковой турбулентности как проявление каскада спиральности

Перейдем теперь к интерпретации обратного каскада энергии пульсационной скорости $\boldsymbol{u}$, возможного в спиральной трехмерной турбулентности, в терминах отрицательной вязкости.

8.4.1. Затруднения теории переноса количества движения

Начнем с того, что в последнее время в громадном большинстве астрофизической литературы в моделях эволюции вращающегося турбулентного облака используются обычные уравнения гидродинамики, в которых, однако, молекулярная вязкость заменяется на турбулентную. В этом случае авторы, естественно, используют линейную связь

$$R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} = \rho K_{ijmn}(\partial_m \langle U \rangle_n + \partial_n \langle U \rangle_m) = \rho K_{ijmn} e_{mn} \tag{8.4.1}$$

между симметричным тензором напряжений Рейнольдса R_{ij} и симметричным тензором скоростей деформации $e_{mn} \equiv \partial_m \langle U \rangle_n + \partial_n \langle U \rangle_m$ (т. е. обобщенную теорию Прандтля переноса количества движения). Величины K_{ijmn} (компоненты некоторого тензора четвертого ранга, симметричного по i, j и m, n) этой линейной функции имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости и определяются статистическими характеристиками мелкомасштабной турбулентности. По самому определению изотропной крупномасштабной турбулентности, все связанные с ней средние величины остаются неизменными при вращениях (но не обязательно относительно отражений); тензоры, обладающие этим свойством, являются изотропными тензорами. Тензоры Кронекера δ_{ij} и Леви-Чивиты ε_{ijk} являются примерами изотропных тензоров соответственно второго и третьего ранга, а произведение тензоров $\delta_{ij}\delta_{mn}$ является изотропным тензором четвертого ранга. Эти тензоры имеют одинаковые компоненты во всех координатных системах, а значит, имеют неизменные компоненты при произвольном вращении. Предположим далее изотропность (но не зеркальную симметричность) тензора турбулентной вязкости K_{ijmn}. В этом случае справедливо разложение

$$K_{ijmn} = a\delta_{ij}\delta_{mn} + b\delta_{im}\delta_{jn} + c\delta_{in}\delta_{jm}$$

(см., например, *Коренев*, *1996*), подставляя которое в (8.4.1), будем иметь

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ij} + \rho\nu^{\text{turb}} e_{mn} \quad (\nu^{\text{turb}} \equiv b + c). \tag{8.4.2}$$

Заметим, что в (8.4.2) коэффициент турбулентной вязкости ν^{turb}, определяемый мелкомасштабным полем пульсационной скорости $\boldsymbol{u}$, обычно считается положительным. Однако не исключена также и экзотическая возможность $\nu^{\text{turb}} < 0$, которая, согласно (*Kraichnan*, *1976a*), может реализовываться благодаря флуктуациям спиральности турбулентного поля $\boldsymbol{u}$. Следует подчеркнуть, что для турбулентного течения жидкости положительность коэффициентов турбулентного обмена (в, частности, коэффициента ν^{turb}) в общем случае не доказана (в отличие от молекулярных коэффициентов переноса, положительность которых имеет глубокое обоснование в термодинамике необратимых процессов); в случае двумерного течения турбулентная вязкость может быть меньше нуля (см., например, *Vergassola и др., 1993*; *Gama и др., 1994*). Используя общую формулу (8.4.2) для анализируемой нами частной модели дискового осредненного движения, получим, что касательные напряжения $R_{r\varphi}$ зависят от градиента угловой скорости

$$R_{r\varphi} = \rho\nu^{\text{turb}} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\langle U\rangle_\varphi}{r}\right) = \rho\nu^{\text{turb}} r \frac{\partial\Omega(r)}{\partial r}. \qquad (8.4.3)$$

Поскольку угловая скорость в кеплеровском диске убывает с расстоянием от Солнца, то и перенос количества движения (вещества) будет в этом случае также направлен от Солнца. Таким образом, прандтлевская теория переноса количества движения (или теория турбулентного напряжения), примененная ко всему облаку (без учета влияния сильного гравитационного поля Солнца на внутренние части протопланетного облака), приводит, вообще говоря, к заключению о повсеместном переносе во вращающемся турбулентном облаке вещества наружу. В связи с подобного рода затруднениями теории переноса количества движения в общем случае криволинейных потоков, еще создатели полуэмпирической теории турбулентности Тейлор (*Taylor, 1915*), а вслед за ним и Карман (см. *Карман, 1936*), предложили такое логическое обобщение выражения (8.4.3), когда касательные напряжения принимаются зависящими от градиента момента количества движения

$$R_{r\varphi} = \rho\nu_s^{\text{turb}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r^2\Omega(r)]. \qquad (8.4.4)$$

Для модели эволюции протопланетного облака различие в формулах (8.4.3) и (8.4.4) оказалось очень важным, поскольку в диске угловая скорость убывает с расстоянием от Солнца, а момент количества движения увеличивается, а значит, направление переноса, согласно этим двум точкам зрения, оказывается противоположным. По этой причине, формулы (8.4.3) и (8.4.4), взятые в отдельности, не могут объяснить всех особенностей турбулентного вращательного движения вещества во всех частях диска, когда имеется эффективный перенос внешних частей вещества облака — наружу, а внутренних — к Солнцу (см. *Сафронов, 1969*). В связи с этим, Васютинский (*Wasiutynski, 1946*) предложил более общее выражение для касательных напряжений $R_{r\varphi}$ во вращающейся среде

$$R_{r\varphi} = \rho K_r^r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r^2\Omega(r)] - 2\rho K_\varphi^\varphi \Omega(r), \qquad (8.4.5)$$

охватывающее оба рассмотренных выше случая и связанное с действием анизотропной вязкости. Это соотношение при чисто радиальном течении ($K_\varphi^\varphi = 0$) приводит к формуле (8.4.4), а в изотропной среде ($K_\varphi^\varphi = K_r^r$) — к обычному гидродинамическому выражению (8.4.3). Следует, однако, отметить, что вид тензора напряжений Васютинского (заметим, что на самом деле выражение (8.4.5) не является компонентной какого-либо тензора; оно применимо только в конкретной системе координат), частным случаем которого является выражение (8.4.3), широко используемый в астрофизической литературе при объяснении дифференциального вращения разнообразных космических объектов «анизотропной вязкостью», до настоящего времени не аргументирован физически, т. е. остается неясным, является это обобщение лишь формальным или описывает турбулентное течение более точно. Возможный вариант обоснования формулы (8.4.5) в рамках несимметричной гидродинамики турбулизованных сред будет рассмотрен ниже. Но сначала покажем, что даже в случае использования классической теории турбулентного напряжения Прандтля (т. е. формулы (8.4.3)) возможно проявление эффекта отрицательной вязкости в трехмерной дисковой турбулентности.

8.4.2. Отрицательная вязкость (термодинамический подход)

Турбулентный хаос далек от полного хаоса термодинамического равновесия, поскольку он обладает некоторой упорядоченностью: даже развитая локально-изотропная турбулентность в инерционном интервале масштабов имеет далекий от равномерного ($E(k) = \mathrm{const}$) колмогоровский спектр $E(k) \sim k^{-5/3}$ распределения кинетической энергии (пульсационного движения) по пространству волновых чисел k. Тем не менее при феноменологическом описании квазиравновесной подсистемы структурированного турбулентного хаоса мы будем исходить из формализма обобщенной статистической термодинамики, предусматривающего исследование ансамбля макроскопически одинаковых систем турбулентного хаоса с одними и теми же обобщенными термодинамическими параметрами состояния (такими как внутренняя энергия $U_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, температура турбулизации $T_{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$, удельный объем $1/\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и т. п.) и требующего вероятностного подхода (*Колесниченко*, *2002*; *Marov*, *Kolesnichenko*, *2006*). Причиной последнего являются крупномасштабные турбулентные флуктуации (которые следует отличать от статистических молекулярных флуктуаций, обусловленных атомной структурой системы) некоторых дополнительных параметров состояния хаоса $q_k(\boldsymbol{r}, t)$ $(k = \overline{1, n})$ (так называемых внутренних координат), которые и служат мерой различий в любом множестве термодинамически одинаковых систем. К числу внутренних координат, описывающих термодинамическое состояние хаоса, можно отнести такие флуктуирующие положительно-определенные параметры, которые адекватно характеризуют завихренную жидкость (включая и мезомасштабные когерентные образования) внутри физически бесконечно малого элементарного объема $d\boldsymbol{r}$. В частности, в качестве стохастических величин q_k могут быть выбраны: скорость диссипации турбулентной энергии ε, обобщенные угловые скорости (характеризующие мезомасштабные когерентные вихревые образования), энстрофия Ω (в случае плоского течения) и т. п. Заметим, что часть внутренних координат q_k может относиться к некогерентной составляющей подсистемы турбулентного хаоса, а другая часть — охарактеризовать мезомасштабные индивидуальные когерентные структуры.

В гл. 5 методами неравновесной термодинамики было показано, что в случае принятого здесь двухуровневого описания предельно развитой турбулентности, в вихревом континууме, отвечающем мелкомасштабным составляющим пульсирующих термогидродинамических параметров, устанавливается такой квазистационарный режим между отбором энергии у «внешнего источника» (связанного, в частности, с глобальным дифференциальным вращением дискового вещества) и диссипацией энергии из-за внутренних диссипативных процессов в подсистеме хаоса, при котором производство энтропии турбулизации $S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ компенсируется ее оттоком в подсистему осредненного движения, так что суммарное возникновение энтропии хаоса будет минимально. Заметим, что, согласно Колмогорову (*1941*), характерным параметром в подсистеме мелкомасштабной турбулентности является поток энергии η по иерархии турбулентных вихрей вплоть до молекулярного уровня, который в стационарном случае совпадает со скоростью диссипации энергии ε. Из этого следует, что подсистема турбулентного хаоса экспортирует энтропию во «внешнюю среду» (т. е. отдает ее подсистеме осредненного движения). Другими словами, для поддержания стационарного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды» (т. е. подсистемы осредненного движения); эта поступающая в подсистему хаоса негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование ее внутренней структуры. Как известно (см. *Пригожин*, *Стенгерс*, *1994*), условие такого рода является достаточным для возникновения диссипативных когерентных (мезомасштабных) структур в самом вихревом континууме.

В работе (*Колесниченко*, *2002*) было показано, что в квазистационарном случае суммарное возникновение турбулентной энтропии (рассеяние энергии) $\sigma_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ будет иметь структуру билинейной формы $T_{\text{turb}}\sigma_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\alpha} \mathfrak{I}_{\alpha}(\boldsymbol{r}, t) X_{\alpha}(\boldsymbol{r}, t)$, явный вид которой определяется моделью турбулизованной среды, т. е. набором учитываемых конкретных гидродинамических процессов. Согласно основному постулату неравновесной термодинамики (см., например, *де Гроот*, *Мазур*, *1964*), эта форма позволяет найти определяющие (замыкающие) соотношения между термодинамическими потоками $\mathfrak{I}_{\alpha}$ и силами X_{α} в виде линейных соотношений $\mathfrak{I}_{\alpha i} = \sum_{\beta} L^{ij}_{\alpha\beta} X_{\beta j}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$. Своеобразием турбулизованного континуума является то, что матрица онзагеровских коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ зависит не только от осредненных термодинамических параметров состояния среды (как в ламинарном случае), но и от статистических характеристик подсистемы турбулентного хаоса, в частности, от величины ε — потока энергии по каскаду турбулентных вихрей (являющегося, таким образом, одним из термодинамических потоков системы) или от потока гидродинамической спиральности, эффективно генерируемой в случае гиротропной турбулентности. Подобная ситуация, типичная для любых самоорганизующихся (синергетических) систем (см. *Хакен*, *1985*), приводит, вообще говоря, к тому, что отдельные слагаемые $\mathfrak{I}_{\alpha}(\boldsymbol{r}, t) X_{\alpha}(\boldsymbol{r}, t)$ в сумме $T_{\text{turb}}\sigma_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ не будут положительно-определенными величинами, хотя вся сумма в целом положительна, $\sigma_{\text{turb}} \geqslant 0$. Известно (см., например, *Хакен*, *1985*), что тогда наложение различных термодинамических потоков в принципе может приводить к отрицательным значениям отдельных диагональных элементов матрицы $L_{\alpha\beta}$ и тем самым к отрицательности отдельных коэффициентов турбулентного обмена.

Таким образом, нельзя исключить возникновения такой ситуации в эволюции турбулизованного протопланетного облака, когда в некоторых его областях возможно появление режимов движения вещества, при которых коэффициенты турбулентного обмена будут принимать отрицательные значения (например, коэффициент вязкости ν^{turb} в выражении (8.4.3)) (см., п. 5.1, а также *Sivashinsky*, *Frenkel*, *1992*; *Vergassola и др.*, *1993*; *Gama и др.*, *1994*). Из вышеприведенного рассмотрения следует, что статистической характеристикой мелкомасштабной турбулентности, которая могла бы обеспечить инверсный каскад турбулентной энергии и тем самым появление эффекта отрицательной вязкости в диске, может явиться гидродинамическая спиральность H.

8.4.3. Вращательная вязкость

Вернемся теперь к тому затруднению прандтлевской теории переноса количества движения в турбулизованной среде, с которым столкнулись исследователи при попытке объяснения переноса вещества и импульса в аккреционных дисках. Используемый в астрофизике стандартный подход к выводу осредненных гидродинамических уравнений, предназначенных, в частности, для моделирования протопланетного облака (основанный на постулатах Рейнольдса), нельзя, по-видимому, считать вполне адекватным, поскольку действительная картина турбулентного переноса в диске, как уже упоминалось, существенно отличается от классической (см., например, *Сафронов*, *1969*). Хотя в литературе, начиная с основателя феноменологической теории турбулентности О. Рейнольдса, а затем итальянского ученого Г. Маттиоли (*Mattioli G. D.*), и обсуждались подходы, связанные с несимметричностью тензора турбулентных напряжений ($R_{ij} \neq R_{ji}$) и привлечением к рассмотрению таких дополнительных внутренних характеристик состояния турбулентного поля, как вихрь, момент инерции и момент внутренних сил, к сожалению, это направление в последующем не было по достоинству оценено и развито.

Вместе с тем, в последнее время вновь возродился интерес к асимметричной моментной гидродинамике (заметим, что асимметричная гидромеханика Коссера давно получила широкое признание, например, в теории жидких кристаллов и теории жидкого гелия (см., например, *де Гроот*, *Мазур*, *1964*)) турбулизованных сред, обусловленный определенными достижениями в теории пространственного осреднения различных уравнений движения в механике сплошных сред, включая, например, течения жидкости в пористых средах, течение взвесенесущих потоков, деформирование композитных материалов и т. п. В частности, было показано (см., например, *Ferrari*, *1972*; *Nikolaevskiy*, *2003*), что при более аккуратном пространственном осреднении (исключающем традиционный рейнольдсовский постулат о коммутативности операций осреднения и дифференцирования) гидродинамических уравнений для малых элементов сплошной среды, с целью описания тех же движений в макромасштабе, получаются обобщенные уравнения Рейнольдса. Эти обобщенные уравнения содержат, в частности, член с вращательной вязкостью, связанный с антисимметричной частью турбулентного тензора напряжений.

Для асимметричного турбулентного течения, в монографии (*Nikolaevskiy*, *2003*) методами моментной гидромеханики получено следующее, связанное с вязкостными процессами, выражение для рассеяния энергии

$$T_{\text{turb}}\sigma'_{\text{turb}} = \left(\boldsymbol{R}^s + \frac{2}{3}\rho E\boldsymbol{I}\right) : \boldsymbol{e} - \boldsymbol{R}^a \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{T} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\text{rot}\langle \boldsymbol{U}\rangle + \overline{\boldsymbol{\omega}}) \geqslant 0, \tag{8.4.6}$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор; $\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle \boldsymbol{U}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial\langle \boldsymbol{U}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^{\text{transp}}\right)$ — тензор осредненных деформаций; $\boldsymbol{R}^s$, $\boldsymbol{R}^a$ — соответственно симметричная и антисимметричная части тензора напряжений Рейнольдса; $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ $(\equiv \langle \text{rot}\, \boldsymbol{u}\rangle)$ — так называемый вектор внутренней угловой скорости, обусловленный собственной завихренностью поля пульсационных скоростей $\boldsymbol{u}$ и характеризующий вихревую «анизотропию» течения на микромасштабе l (напомним, что в «элементарном» объеме масштаба l в случае диска может находится значительное количество вращающихся вихревых образований (кластеров)); $\boldsymbol{T}$ — тензор турбулентных моментных напряжений, связанный с пульсационным переносом флуктуаций момента количества движения мелкомасштабных вихрей. В асимметричной турбулентной гидромеханике этот тензор фигурирует в дополнительном эволюционном уравнении баланса внутреннего момента количества движения (уравнение для $\overline{\boldsymbol{\omega}}$) (см. *де Гроот*, *Мазур*, *1964*; *Nikolaevskiy*, *2003*). Это обстоятельство является серьезным аргументом в пользу использования моментной турбулентной гидромеханики и концепции двухуровневого макроскопического описания турбулизованной среды при моделировании и протопланетного облака. В общем случае анизотропной жидкости потоки и термодинамические силы, входящие в выражение (8.4.6), связаны следующей простой системой определяющих соотношений

$$R^s_{ij} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ij} + \rho K_{ijmn}e_{mn}, \tag{8.4.7}$$

$$R^a_{ij} \equiv \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -\rho K^*_{ijmn}\varepsilon_{mnk}\overline{\omega}_k, \tag{8.4.8}$$

$$T_{ij} = \rho K^{**}_{ijmn}\partial_n(\varepsilon_{mlk}\partial_l\langle U_k\rangle + \overline{\omega}_m), \tag{8.4.9}$$

характерной для асимметричной гидродинамики Коссера. Здесь феноменологические турбулентные коэффициенты K_{ijmn}, K^*_{ijmn} и K^{**}_{ijmn} являются сильно меняющимися функциями осредненных параметров состояния среды и зависят от статистических характеристик турбулентного поля скорости $\boldsymbol{u}$.

Таким образом, в случае анизотропного мелкомасштабного турбулентного поля ситуация оказывается значительно сложнее и в выражении (8.4.2) может появиться целый ряд дополнительных членов, связанных с векторным полем (например, с полем градиента плотности или с угловой скоростью вращения системы), которым обусловлена анизотропия (см., например, *Краузе*, *Рэдлер*, *1984*). Заметим, что для большей части жидкости после очень короткого времени релаксации ротор осредненной скорости $\text{rot}\langle \boldsymbol{U}\rangle$ становится равным угловой скорости $\overline{\omega}$, определяющей внутреннее вращение элементов массы континуума, $-\varepsilon_{mlk}\partial_l\langle U_k\rangle = \overline{\omega}_m$. При этом обращается в нуль термодинамическая сила в линейных конститутивных соотношениях (8.4.9) и соответствующие плотности потока момента количества движения мелкомасштабных вихрей, т. е. исчезает взаимодействие между вихрями макроскопического поля скоростей и внутренним вращательным движением частиц (см., например, *де Гроот*, *Мазур*, *1964*). Тем не менее в случае турбулизованного континуума закон парности $R_{ij} = R_{ji}$ касательных напряжений на макроуровне нарушается (в отличие от ламинарного течения) и соотношение (8.4.2) должно быть заменено на

$$R_{ik} = R^s_{ik} + R^a_{ik} = -\frac{2}{3}\rho E\delta_{ik} + \rho\nu^{\text{turb}} e_{ik} + \rho\nu_r^{\text{turb}}\varepsilon_{ikp}(\text{rot}\langle U\rangle)_p. \tag{8.4.10}$$

Коэффициенты ν^{turb} и ν_r^{turb}, фигурирующие в этом соотношении, определяются полем турбулентной скорости $\boldsymbol{u}$, причем коэффициент ν^{turb} является скаляром, в то время как коэффициент ν_r^{turb} — псевдоскаляр, поскольку тензор $\varepsilon_{ikp}(\text{rot}\langle U\rangle)_p$ является псевдотензором второго порядка.

Проанализируем теперь турбулентность с отражательной симметрией. Для нее, с одной стороны, коэффициенты ν^{turb} и ν_r^{turb} не должны изменяться, при выполнении преобразования отражения, но, с другой стороны, коэффициент ν_r^{turb} должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром. Поэтому для изотропной и зеркально-симметричной мелкомасштабной турбулентности коэффициент $\nu_r^{\text{turb}} = 0$. Итак, вращательная вязкость ν_r^{turb} может быть отличной от нуля только тогда, когда само поле турбулентных скоростей не является статистически инвариантным относительно преобразования четности, в частности, когда спиральность $H \neq 0$.

Для рассматриваемой нами модели дисковой турбулентности, соотношение (8.4.10) для напряжения сдвига принимает простой вид

$$\begin{aligned} R_{r\varphi} &= \rho\nu^{\text{turb}} r\frac{\partial\Omega(r)}{\partial r} + \rho\nu_r^{\text{turb}}\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} = \\ &= \rho\nu^{\text{turb}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - 2\Omega\right) + \rho\nu_r^{\text{turb}}\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} = \\ &= \rho(\nu^{\text{turb}} + \nu_r^{\text{turb}})\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - 2\rho\nu^{\text{turb}}\Omega \end{aligned} \tag{8.4.11}$$

(ср. с формулой (8.4.2)). Таким образом, выражение для касательных напряжений во вращающейся среде, предложенное Васютинским, может быть физически обосновано в рамках асимметричной механики турбулизованных сред с несимметричным тензором напряжений Рейнольдса. Существенным следствием формулы (8.4.11) является вывод о взаимодополняемости теорий переноса импульса Прандтля и переноса вихря Тейлора во вращающейся среде. Из-за появления дополнительной степени свободы $\overline{\omega}$ в асимметричной гидродинамике оба подхода оказываются необходимыми для решения тех или иных задач. В частности, для вращающегося протопланетного облака будет преобладать тот или другой из конкурирующих механизмов в зависимости от численного значения коэффициентов сдвиговой и вращательной вязкости в соответствующих областях диска.

В заключение кратко суммируем основные результаты предпринятого исследования. В рамках проблемы реконструирования эволюции протопланетного диска, возникает вопрос о возможности влиянии гидродинамической спиральности, возникающей во вращающемся диске, на синергетическое структурирование в нем космического вещества, а также на появление эффекта отрицательной турбулентной вязкости.

Один из конкретных механизмов формирования мезомасштабных когерентных образований в подсистеме турбулентного хаоса, связанный с явлением фазово-частотной синхронизации автоколебаний стохастических внутренних координат (относящихся к когерентной составляющей хаоса), был рассмотрен в работах (*Колесниченко*, *2004*; *2005*). В главе 6 была продемонстрирована принципиальная возможность самоорганизации потока, когда в процессе временной эволюции квазиравновесной вихревой подсистемы вероятно генерирование когерентных образований, связанное с эффектом «фазовых переходов», индуцированных естественным шумом мелкозернистого флуктуационного поля хаоса. В данной главе сформулирована общая концепция энергетической подпитки мезомасштабных когерентных вихревых структур в термодинамически открытой подсистеме турбулентного хаоса, связанная с реализацией обратного каскада кинетической энергии в зеркально-несимметричной дисковой турбулентности.

В случае двухуровневого описания развитой турбулентности, методами неравновесной термодинамики показана возможность появления эффекта отрицательной вязкости. Высказано предположение, что статистической характеристикой изотропной зеркально-неинвариантной мелкомасштабной турбулентности, которая могла бы обеспечить появление этого феномена, может служить гидродинамическая спиральность, возникающая благодаря вращению неустойчиво стратифицированной дисковой среды. Тогда появление отрицательной вязкости в диске может быть связано с каскадным переносом энергии от малых вихрей к более крупным в спиральной турбулентности.

В рамках асимметричной гидромеханики турбулизованных сред получено выражение для тензора турбулентных напряжений в форме Васютинского. Это выражение, широко используемое в астрофизической литературе в связи с известными затруднениям прандтлевской теории переноса количества движения во вращающейся турбулизованной среде, до последнего времени не было физически обосновано. Нами выявлена взаимодополняемость теорий переноса импульса Прандтля и переноса момента количества движения Тейлора для вращающегося протопланетного облака, когда тот или другой из конкурирующих механизмов преобладает (в зависимости от численного значения коэффициентов сдвиговой и вращательной вязкости) на некотором расстоянии от Солнца.

Наш интерес к гидродинамической спиральности в применении к дисковой турбулентности заключается в том, что существование этого дополнительного невязкого инварианта подразумевает, вообще говоря, некоторую степень видоизменения классического энергетического каскадного процесса в инерционной области спектра, когда возможен инверсный перенос энергии от малых вихрей к более крупным. Это позволяет не только объяснить появление феномена отрицательной вязкости в дифференциально-вращающемся протопланетном облаке, но и прогнозировать зарождение энергетически активных когерентных вихревых структур, инициирующих, в конечном счете, механизмы образования газопылевых кластеров в диске. К сожалению, необходимо отметить, что пока нет надежного подтверждения в численном эксперименте эффекта обратного каскада энергии для трехмерной гиротропной турбулентности.

Глава 9

Термодинамическая модель МГД-турбулентности и некоторые ее приложения к аккреционным дискам

В данной главе в приближении одножидкостной магнитной гидродинамики получена замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования сдвиговых и конвективных турбулентных течений электропроводных сред в присутствии магнитного поля. В частности, ее можно использовать для моделирования мощных турбулентных течений космической плазмы в аккреционных дисках и в связанных с ними коронах, в которых магнитное поле заметно влияет на динамику происходящих астрофизических процессов. При разработке модели проводящей турбулизованной среды, наряду с традиционным теоретико-вероятностным осреднением уравнений магнитной гидродинамики, систематически использовано весовое осреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись осредненных уравнений движения для сжимаемой жидкости и анализ механизмов усиления макроскопических полей турбулентными течениями. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса плазмы и поля, получены различные энергетические уравнения, позволяющие прослеживать возможные переходы энергии из одной формы в другую и, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию. Особое внимание уделено методу получения в рамках расширенной необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учетом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений в электропроводной среде и турбулентной электродвижущей силы (или так называемого магнитного тензора Рейнольдса), с помощью которого возможно проанализировать ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса.

Для создания усовершенствованной модели реконструирования структуры и эволюции допланетного дифференциально вращающегося аккреционного диска, предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, например, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, позволяющая учитывать влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности во вращающемся электропроводном диске.

§ 9.1. Исходные уравнения магнитной гидродинамики для моделирования структуры диска и его короны

Если плазма магнитогидродинамически неустойчива, то в ней возможно возбуждение сравнительно медленных крупномасштабных движений, которые могут быть адекватно описаны в рамках приближения одножидкостной магнитной гидродинамики. Эти течения имеют сходство с обычными течениями жидкости и газа, усложненные, однако, действием объемной силы Лоренца. При этом движение электропроводной жидкости в магнитном поле сопровождается специфическими явлениями. Эти явления связаны с тем, что при перемещении проводящих масс жидкости в них возбуждаются токи индукции, которые совместно с магнитным полем оказывают обратное воздействие на жидкость. Если механизмы диссипации в плазме достаточно слабы, то подобные течения приобретают турбулентный характер. Поскольку имеется множество работ, подробно описывающих вывод уравнений магнитной гидродинамики (см., например, *Сыроватский, 1957*; *Куликовский, Любимов, 1962*; *Biskamp, 2003*), то в данном разделе, являющемся подготовительным для более подробного рассмотрения магнитогидродинамической турбулентности, мы запишем эти уравнения в том виде, который будет использован далее при получении осредненных уравнений турбулентного движения электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля.

9.1.1. Уравнение магнитной индукции

Дифференциальные уравнения нерелятивистской магнитной гидродинамики (МГД) представляют из себя законы сохранения, полученные из электромагнитных уравнений Максвелла и общих гидродинамических уравнений движения жидкости. Обозначим через $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ вектор магнитной индукции, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ — вектор напряженности электрического поля, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность электрического тока, $\rho_e(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность заряда, $\mu(\boldsymbol{r}, t)$ — магнитную проницаемость, $\varepsilon(\boldsymbol{r}, t)$ — диэлектрическую проницаемость (безразмерные коэффициенты ε и μ связаны с физическими свойствами среды), $\sigma_e(\boldsymbol{r}, t)$ — удельную электропроводность и $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ — гидродинамическую скорость течения проводящей жидкости. Будем далее для простоты считать параметры μ, ε и σ_e постоянными, а переносные свойства среды, несмотря на присутствие магнитного поля, изотропными. Основное предположение магнитной гидродинамики состоит в том, что характерная электромагнитная (плазменная) скорость

$$U_0 \equiv l_0/t_0 \ll c \quad \text{и} \quad E_0/l_0 \approx B_0/t_0. \tag{9.1.1}$$

Здесь E_0 и B_0 — типичные значения полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$; l_0 и t_0 — характерные электромагнитные длина и время; c — скорость распространения света в пустоте. В этом случае уравнения Максвелла (записанные в абсолютной гауссовой системе единиц) для определения полей $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ принимают вид

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{9.1.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_e, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{9.1.3}$$

где объемная плотности электрического заряда ρ_e и плотность полного тока $\boldsymbol{j}$ (измеряемого неподвижным наблюдателем), индуцированные движением заряженных частиц плазмы, определяются формулами

$$\rho_e \equiv \sum_k e_k n_k \cong 0, \quad \boldsymbol{j} \equiv \sum_k e_k n_k \boldsymbol{u}_k = \rho_e \boldsymbol{u} + \boldsymbol{j}^* \cong \boldsymbol{j}^*. \tag{9.1.4}$$

Здесь $n_k(\boldsymbol{r}, t)$, $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{r}, t)$ — соответственно числовая плотность (на единицу объема среды) и средняя гидродинамическая скорость частиц k-го сорта плазмы; $\boldsymbol{j}^* \equiv \sum_k e_k n_k (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u})$ — плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с газом). В формулах (9.1.4) суммирование идет по электронам (с зарядом $e_e = -e$) и по заряженным частицам k с зарядом $e_k = eZ_k$. Характерной особенностью процессов, происходящих, например, в астрофизических дисках, является то, что плазма с высокой степенью приближения является электрически нейтральной ($\rho_e \cong 0$), что означает практически отсутствие объемного заряда вне сферы дебаевского радиуса $R_D \equiv \sqrt{k_B T/(4\pi n_e e^2)}$, называемой квазинейтральной областью. В этом случае во всех максвелловских и гидродинамических уравнениях можно пренебречь членами с объемным зарядом ρ_e. В частности, можно пренебречь плотностью конвективного тока $\rho_e \boldsymbol{u}$, считая, что плотность электрического тока $\boldsymbol{j}$ тождественно равна плотности тока проводимости $\boldsymbol{j}^*$. Для замыкания системы уравнений Максвелла (9.1.2)—(9.1.3) необходимы два соотношения, описывающие законы поляризации и намагничивания

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{9.1.5}$$

а также закон Ома, дающий зависимость тока проводимости $\boldsymbol{j}^*$ от различных факторов, вызывающих диффузию заряженных компонентов электропроводной смеси, в том числе от полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, гидродинамической скорости $\boldsymbol{u}$ и от пространственных градиентов определяющих параметров среды $\boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j}^*[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{u}, \partial(\,)/\partial \boldsymbol{r}]$. В простейшем варианте МГД-приближения, которым мы только и ограничимся в нашем рассмотрении турбулентности, используется следующая упрощенная форма закона Ома

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma_e \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \right). \tag{9.1.6}$$

Заметим, что одним из следствий условий (9.1.1) является то, что при написании второго уравнения (9.1.2) возможно было опустить член, связанный с током смещения $c^{-1} \partial \boldsymbol{D}/\partial t$. Другое следствие состоит в том, что уравнение непрерывности для электрического заряда ρ_e принимает вид $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ (результат взятия дивергенции от второго уравнения (9.1.2)); физически это означает, что локальные плотности заряда ρ_e во времени пренебрежимо малы и электрические токи текут по замкнутым контурам. Уравнение Пуассона (9.1.3) служит при этом только для определения (по найденному из остальных уравнений системы (9.1.2) и (9.1.3) электрическому полю) малого отклонения плазмы от квазинейтральности, которое часто необходимо учитывать либо вблизи границы системы (в слое толщиной порядка дебаевского радиуса R_D), либо при анализе высокочастотных плазменных колебаний.

Из уравнений Максвелла (9.1.2) и закона Ома (9.1.6) удобно исключить поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$, что приводит при использовании известной формулы векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = (\partial/\partial\boldsymbol{r})\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \nabla^2\boldsymbol{a}$, к так называемому уравнению магнитной индукции

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) + \nu_M \nabla^2 \boldsymbol{B}, \tag{9.1.7}$$

являющемуся одним из основных уравнений магнитной гидродинамики. Здесь ∇^2 — оператор Лапласа; $\nu_M \equiv c^2/4\pi\mu\sigma_e$ — так называемый коэффициент диффузии магнитного поля (или коэффициент молекулярной магнитной вязкости), который имеет такую же размеренность, как и коэффициент кинематической вязкости ν, или коэффициент диффузии D, т. е. см^2/с. Если применить операцию дивергенции у уравнению индукции (9.1.7), то получим, что в магнитной гидродинамике имеет место уравнение $(\partial/\partial t)\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$. Поэтому для того, чтобы какое-либо решение удовлетворяло уравнению $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$, достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Таким образом, второе равенство (9.1.3) выполняется в силу уравнения индукции и начальных условий.

Для дальнейших целей уравнение (9.1.7) удобно записать в другой форме. Используя формулу $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r}))\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r}))\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и уравнение неразрывности для скорости среды [см. (9.1.10)], перепишем (9.1.7) в виде

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right) = \left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u} + \nu_M\nabla^2\boldsymbol{B}, \tag{9.1.8}$$

где $d/dt \equiv \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})$ — субстанциональная производная, описывающая скорость изменения какого-либо параметра в системе координат, передвигающейся со скоростью $\boldsymbol{u}$.

Из уравнения (9.1.8) видно, что эволюция вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ зависит от движения электропроводной среды, т. е. при известной гидродинамической скорости $\boldsymbol{u}$ уравнение (9.1.8) полностью определяет вектор $\boldsymbol{B}$, удовлетворяющий условию $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$. Таким образом, вектор индукции $\boldsymbol{B}$ в МГД-приближении рассматривается как первопричина возникновения электродинамических движений, а возникновение плотности тока и электрического поля как вторичные явления: соответствующие значения $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ могут быть найдены из законов Ампера и Ома

$$\boldsymbol{j} = (c/4\pi\mu)\operatorname{rot}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E} = c^{-1}(\nu_M\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}). \tag{9.1.9}$$

Плотность заряда ρ_e, в тех случаях, когда это представляет интерес, может быть определена из уравнения Пуассона $\rho_e = (\varepsilon/4\pi)\operatorname{div}\mathbf{E}$.

Из уравнения магнитной индукции (9.1.8) следует, что условия подобия течений электропроводных сред дополнительно определяются магнитным числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_M \equiv V_0 L_0/\nu_M$, характеризующим отношение конвективного члена в уравнении (9.1.8) к диффузионному члену. Это число дополняет критерии подобия течений неэлектропроводных сред. Здесь ρ_0, V_0 и L_0 —

какие-либо характерные для рассматриваемой задачи значения плотности, скорости и длины соответственно. Если $\mathrm{Re}_M \gg 1$, то членами с магнитной вязкостью ν_M в (9.1.8) можно пренебречь. В свою очередь закон Ома (9.1.6) в случае идеально проводящей среды с очень высокой степенью аппроксимации сводится к виду $\boldsymbol{E} = -c^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$. В магнитной гидродинамике показано (см., например, *Сыроватский, 1957*), что в этом случае величина $(\boldsymbol{B}/\rho)$ в каждой точке среды изменяется пропорционально удалению друг от друга двух соседних «жидких частиц», расположенных на магнитной силовой линии, другими словами, силовые линии магнитного поля как бы «вморожены» в частицы вещества. Если $\mathrm{Re}_M \ll 1$, то уравнение индукции принимает вид $\partial\boldsymbol{B}/\partial t = \nu_M \nabla^2 \boldsymbol{B}$, т. е. поле $\boldsymbol{B}$ определяется уравнением диффузии. В аккреционных дисках «эффективное» магнитное число Рейнольдса порядка единицы и важен турбулентный перенос.

9.1.2. Уравнения сохранения массы и количества движения

Рассмотрим теперь несколько подробнее магнитогидродинамические уравнения, которые достаточно хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении составляющих ее заряженных компонент.

Уравнение неразрывности

Уравнение сохранения массы может быть записано в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}) = 0, \quad \text{или} \quad \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}. \tag{9.1.10}$$

Здесь плотность массы $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и полная гидродинамическая скорость потока $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ определяются соотношениями

$$\rho \equiv \sum_k \rho_k = \sum_k n_k m_k, \qquad \boldsymbol{u} \equiv \rho^{-1} \sum_k \rho_k \boldsymbol{u}_k, \tag{9.1.11}$$

где m_k — молекулярная масса частицы сорта k.

Сохранение количества движения

Уравнение баланса количества движения для проводящей среды имеет вид

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \equiv \frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})\right) = -\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\Pi}\right) + \sum_k n_k\boldsymbol{F}_k, \tag{9.1.12}$$

где $p(\boldsymbol{r}, t)$ — термодинамическое давление жидкости; $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = \{u_i u_j\}$ — диада (тензор с девятью декартовыми компонентами); $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$ $(= \{\Pi_{ij}\})$ — тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения всех компонент плазмы; $((\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\Pi})_j = \partial\Pi_{ij}/\partial x_i$, причем для изотропной жидкости связь между тензорами $\boldsymbol{\Pi}$ и $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r}$ имеет обычную форму

$$\Pi_{jk} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\right) + \mu_\theta\delta_{jk}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u},$$

где молекулярные коэффициенты кинематической вязкости $\nu(\boldsymbol{r}, t)$ и объемной вязкости $\mu_\theta(\boldsymbol{r}, t)$ зависят только от локальных термодинамических свойств среды; $\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{F}_k^{\text{pond}}(\boldsymbol{r}, t) + m_k \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ — внешняя сила, действующая на одну заряженную частицу вещества сорта k; $\boldsymbol{F}_k^{\text{pond}}$ — сила Лоренца (так называемая пондеромоторная сила электромагнитного поля), которая в инерциальной системе координат в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\boldsymbol{F}_k^{\text{pond}} \equiv e_k\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{B}\right) \tag{9.1.13}$$

и ее нужно учитывать, если частицы компоненты k несут заряд e_k; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -\partial\Psi_G/\partial\boldsymbol{r}$ — вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi_G(\boldsymbol{r})$ — потенциальная функция гравитационного поля. Например, в случае гравитационного диска, когда можно пренебречь его самогравитацией (что имеет место, когда $\mathcal{M}_{\text{disk}}/\mathcal{M}_\odot \ll h_{\text{disk}}/R$, где h_{disk} и R полутолщина и радиус диска соответственно (см., например, *Hersant и др., 2004*))

$$\Psi_G \equiv \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\tilde{\boldsymbol{r}}|}, \quad \boldsymbol{g} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Psi_G = \frac{G\mathcal{M}_\odot}{|\tilde{\boldsymbol{r}}|^3}\tilde{\boldsymbol{r}}, \tag{9.1.14}$$

где $\mathcal{M}_\odot$ — масса центрального тела (звезды); G — гравитационная постоянная; $|\tilde{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ — центральный радиус-вектор, $\tilde{\boldsymbol{r}} = \sum_k \boldsymbol{i}_k r_k$; центр масс протозвезды здесь и далее принят за начало системы отсчета координат; $\boldsymbol{i}_k$ — единичные координатные векторы. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны $\Psi_G = G\mathcal{M}_\odot/|\tilde{\boldsymbol{r}}| + \Psi_{\text{cr}}$, где потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Psi_{\text{cr}} = 4\pi G\rho$.

При использовании выражения (9.1.13) для силы Лоренца, член в уравнении движения (9.1.12), соответствующий внешним электромагнитным и гравитационным силам, для случая электрической квазинейтральности плазмы принимает вид

$$\sum_k n_k \boldsymbol{F}_k = \rho\boldsymbol{g} + \rho_e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}\right) + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \cong \rho\boldsymbol{g} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B},$$

причем плотность пондеромоторной силы $c^{-1}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$ в этом соотношении, при использовании известного соотношения векторного анализа $\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\partial/\partial\boldsymbol{r})|\boldsymbol{a}|^2 - ((\partial/\partial\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})) + \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{a}$, может быть представлена следующим образом

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = -\frac{1}{4\pi\mu}\boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi\mu}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}}{4\pi\mu}\right)\right) = -\frac{\partial p^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{T}^M\right). \tag{9.1.15}$$

Здесь

$$\boldsymbol{T}^M \equiv \frac{1}{4\pi\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{T}^M = \left\{T_{ij}^M\right\} \equiv \left\{\frac{B_i B_j}{4\pi\mu}\right\} \tag{9.1.16}$$

— тензор магнитных натяжений Максвелла;

$$p^M \equiv |\boldsymbol{B}|^2/8\pi\mu \tag{9.1.17}$$

— давление магнитного поля. В результате уравнение сохранения количества движения (9.1.12) может быть переписано в виде

$$\rho\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{r}}+\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\Pi}\right)+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\rho\boldsymbol{g}=-\frac{\partial p^{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{r}}+\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{T}^{M})\right)-\rho\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Psi_G, \quad (9.1.18)$$

где $p^{\Sigma}\equiv p+p^{M}=p+|\boldsymbol{B}|^2/8\pi\mu$ — полное давление плазмы.

Проанализируем теперь это уравнение. Из соображений размерности легко получить следующие выражения: $F_{\text{vis}}\propto\rho\nu V_0/L_0^2$ — для вязкой силы (в отнесенной к единице объема жидкости), $F_{\text{iner}}\propto\rho V_0^2/L_0$ — для силы инерции, $F_{\text{mag}}\propto\sigma_e B_0^2 V_0/c^2$ — для электромагнитной силы (здесь B_0 — характерная величина индукции магнитного поля, которую можно выбрать в качестве масштаба для отдельных членов уравнений; σ_e — электрическая проводимость жидкости). Отсюда следует, что порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкости характеризует величина $\sigma_e B_0^2 L_0^2/\rho\nu c^2$. Обычно используется квадратный корень из этой величины, называемый числом Гартмана $\mathrm{Ha}\equiv B_0 L_0\sqrt{\sigma_e/\rho\nu c^2}$. Порядок отношения электромагнитной силы к силе инерции характеризует число Стюарта $N\equiv\sigma_e B_0^2 L_0/c^2\rho V_0$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{Ha}^2=N\cdot\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re}\equiv V_0 L_0/\nu$ — число Рейнольдса. Из критериев Re, N и Re_M можно получить, путем их комбинации, все другие критерии, характеризующие различные явления, наблюдающиеся при движении проводящей жидкости в магнитном поле. В частности, при делении числа Стюарта на магнитное число Рейнольдса получается критерий, называемый числом Альфвена: $\mathrm{Al}\equiv B_0^2/4\pi\mu\rho V_0^2$, характеризующий отношение магнитной энергии к кинетической энергии. Заметим, что в случае, когда рассматриваются вопросы теплообмена, к этим критериям необходимо добавить числа Нуссельта Пекле и др.

9.1.3. Различные формы уравнений энергии и притока тепла для электропроводной среды

При феноменологическом построении одножидкостной модели МГД-турбулентности нам придется осреднять различные уравнения энергетического баланса. Приведем их здесь краткий вывод.

Уравнение механической энергии проводящего вещества

Уравнение механической энергии (кинетической энергии движения центра тяжести плюс потенциальной энергии вещества) плазмы может быть получено путем скалярного умножения уравнения движения (9.1.18) на скорость $\boldsymbol{u}$. В результате будем иметь

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}+\Psi_G\right)+\operatorname{div}\{p^{\Sigma}\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{T}^M)\cdot\boldsymbol{u}\}=p^{\Sigma}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\left((\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{T}^M):\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right), \quad (9.1.19)$$

или (в виде уравнения баланса)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2}+\Psi_G\right)\right\}+\operatorname{div}\boldsymbol{J}_{\text{mech}}=p^{\Sigma}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\left((\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{T}^M):\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right). \quad (9.1.19^*)$$

Здесь

$$J_{\text{mech}} \equiv \left\{\rho\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \Psi_G\right)\boldsymbol{u} + p^{\Sigma}\boldsymbol{u} - ((\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{T}^M)\cdot\boldsymbol{u})\right\}$$

— полный поток механической энергии плазмы; величина $(\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{T}^M)\cdot\boldsymbol{u}$ — вектор, i-компонента которого равна $(\Pi_{ik} + T^M_{ik})u_k$, величина $(\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{T}^M) : \partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r} \equiv$ $\equiv (\Pi_{ik} + T^M_{ik})\partial u_i/\partial x_k$ — скаляр. Энергия, стоящая в правой части уравнения (9.1.19*) и представляющая собой работу, затрачиваемую на деформацию (сдвиг скорости $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r} \neq 0$), расширение ($\operatorname{div}\boldsymbol{u} > 0$) или сжатие ($\operatorname{div}\boldsymbol{u} < 0$) единичного объема среды, превращается в другие формы энергии, например во внутреннюю энергию [см. уравнение (9.1.20)], или энергию магнитного поля [см. уравнение ((9.1.27*)].

Уравнение внутренней энергии проводящего вещества

Дифференциальное уравнение (закон сохранения) для внутренней (удельной) энергии $E(\boldsymbol{r}, t)$ вещества в МГД приближении может быть записано в следующей субстанциональной форме [ср. с (2.1.22)]

$$\rho\frac{dE}{dt} + \operatorname{div}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R) = -p \operatorname{div}\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\boldsymbol{B}|^2 \equiv Q_E, \tag{9.1.20}$$

где $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность молекулярного потока тепла; $\boldsymbol{q}_R(\boldsymbol{r}, t)$ — плотность потока энергии, переносимого излучением. Последний член в правой части этого уравнения представляет собой джоулево тепло за единицу времени. Уравнение (9.1.20) является модификацией исходного энергетического уравнения (2.1.22) на случай проводящей среды, получающейся при использовании преобразования

$$\sum_{k=1} \boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{F}_k = \sum_{k=1}^{n_k} e_k(\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u})\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}_k\times\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{j}\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right) = \frac{|\boldsymbol{j}|^2}{\sigma_e} = \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\boldsymbol{B}|^2.$$

Для дальнейших целей нам понадобится энергетическое уравнение, записанное через энтальпию $H(\boldsymbol{r}, t)$ $(= E + p/\rho)$ материальной составляющей плазмы. Это уравнение, вытекающее из (9.1.20), при учете выражения $\rho dE/dt + p \operatorname{div}\boldsymbol{u} = \rho dH/dt + dp/dt$, имеет вид

$$\rho\frac{dH}{dt} \equiv \rho c_p\frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} - \operatorname{div}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R) + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\boldsymbol{B}|^2, \tag{9.1.20*}$$

где c_p — теплоемкость среды при постоянном давлении.

Приведем также другую полезную форму записи энергетического уравнения для электропроводного вещества. При использовании тождества Гиббса $TdS/dt = dE/dt + pd(1/\rho)/dt$ для энтропии $S(\boldsymbol{r}, t)$ (на единицу массы) системы, которая есть функция внутренней энергии и удельного объема, совершенно такой же, как в случае неэлектропроводной жидкости (см. *де Гроот*, *Мазур*, *1964*), запишем (9.1.20) в виде так называемого общего уравнения переноса тепла

$$\rho T\frac{dS}{dt} = -\operatorname{div}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R) + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{j}\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{9.1.21}$$

где для идеальной жидкости

$$S = c_V \ln(p\rho^{-\gamma}) + \text{const}, \tag{9.1.22}$$

c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\gamma = c_P/c_V$ — показатель адиабаты. Уравнение (9.1.21) может быть переписано в дивергентном (балансовом) виде

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho S \boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}_{(S)}) = \sigma_{(S)} \geqslant 0, \tag{9.1.23}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{(S)} \equiv (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R)/T \tag{9.1.24}$$

— субстанциональный поток энтропии;

$$0 \leqslant \sigma_{(S)} \equiv \frac{1}{T}\left\{ -\left((\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R) \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{j} \cdot \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}\right)\right\} \tag{9.1.25}$$

— возникновение энтропии в результате необратимых процессов теплопроводности, внутреннего трения и электропроводности среды. Последний член в (9.1.25), соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад электромагнитных явлений в производство энтропии системы. Заметим, что выражение (9.1.25) позволяет получить при использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики [см. гл. 2] замыкающие (определяющие) соотношения для необратимых процессов в электропроводной среде, которые линейно (в первом приближении) связывают термодинамические потоки $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\Pi}$ и $\boldsymbol{j}$ с термодинамическими силами $\partial \ln T/\partial \boldsymbol{r}$, $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{r}$ и $\mathbf{E} + \mathbf{c}^{-1}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$.

Уравнение для магнитной энергии плазмы

Уравнение для магнитной энергии плазмы $E^M \equiv |\boldsymbol{B}|^2/8\pi\mu\rho$ (на единицу массы) получим путем скалярного умножения на $\mathbf{B}$ уравнения индукции (9.1.8). В результате, при учете дифференциального тождества $\boldsymbol{ab} \cdot \partial \boldsymbol{c}/\partial \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \partial/\partial \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$, будем иметь

$$\rho\frac{dE^M}{dt} = -p^M \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{T}^M : \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\boldsymbol{B} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{B}, \tag{9.1.26}$$

или

$$\frac{\partial(\rho E^M)}{\partial} + \operatorname{div}\left\{(\rho E^M + p^M)\boldsymbol{u} - \nu_M \frac{\partial p^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \nu_M \boldsymbol{T}^M\right)\right\} = \left(\boldsymbol{T}^M : \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot} \boldsymbol{B}|^2. \tag{9.1.27}$$

Балансовая форма (9.1.27) представления уравнения магнитной энергии записана с учетом соотношения

$$\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\boldsymbol{B} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{B} = -\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \nu_M(-p^M \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T}^M)\right) - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot} \boldsymbol{B}|^2, \tag{9.1.28}$$

которое получается (с учетом формулы векторного анализа $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$) путем взятия дивергенции от выражения (9.1.15):

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \nu_M(-p^M\boldsymbol{U}+\boldsymbol{T}^M)\right) = \frac{\nu_M}{c}\,\mathrm{div}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}) =$$
$$= \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{\nu_M}{c}\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = -\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\boldsymbol{B}\cdot\nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{|\boldsymbol{j}|}{\sigma_e}^2.$$

Отметим, что в некоторых случаях уравнение (9.1.27) удобно переписать, пользуясь так называемым вектором Умова—Пойнтинга $\boldsymbol{q}_{\mathrm{Poynt}} \equiv \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$, имеющим смысл плотности потока энергии электромагнитного поля. В МГД-приближении этот вектор может быть записан, при использовании формул (9.1.9) и (9.1.15), следующим образом

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{Poynt}} \equiv \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu}(\nu_M\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} =$$
$$= (\rho E^M + p^M)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{T}^M\cdot\boldsymbol{u}) - \nu_M\frac{\partial p^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\nu_M\boldsymbol{T}^M\right). \quad (9.1.29)$$

С учетом этого выражения, уравнение баланса магнитной энергии (9.1.27) для медленно движущейся среды ($|\boldsymbol{u}|/c \ll 1$) может быть преобразовано к следующему «классическому» виду

$$\frac{\partial(\rho E^M)}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} - p^M\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}^M\cdot\boldsymbol{u}\right) +$$
$$- p^M\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{T}^M : \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \boldsymbol{j}\cdot\left(\boldsymbol{E} + \frac{\Gamma}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\right) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_{\mathrm{Poynt}} - \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}. \quad (9.1.27^*)$$

Наконец, комбинируя (9.1.19*) и (9.1.27*), получим уравнение баланса механической и магнитной энергии электропроводной среды

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \Psi_G + E^M\right)\right\} + \mathrm{div}\left\{\rho\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \Psi_G\right)\boldsymbol{u} + p\boldsymbol{u} + \boldsymbol{q}_{\mathrm{Poynt}} - \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}\right\} =$$
$$+ p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{u}\right) - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}|^2 \equiv -Q_E. \quad (9.1.30)$$

Это уравнение выражает тот факт, что сумма плотностей механической энергии и магнитной энергии плазмы не сохраняется, а именно количество энергии, равное Q_E, превращается во внутреннюю энергию системы. Заметим, что в приближении МГД электрическое поле энергии в среде не создает.

Закон сохранения полной энергии электропроводной среды

Уравнение первого начала термодинамики, выражающее сохранение полной энергии (на единицу массы вещества) замкнутой системы (электропроводная жидкость плюс магнитное поле)

$$U_{(\mathrm{tot})}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + \Psi_G + E + E^M, \quad (9.1.31)$$

может быть получено путем сложения балансовых уравнений для механической энергии (9.1.19), внутренней энергии (9.1.20) и магнитной энергии (9.1.27*) плазмы. В результате получим

$$\frac{\partial(\rho U_{(\mathrm{tot})})}{\partial t} + \operatorname{div}\{\rho U_{(\mathrm{tot})}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}_{(U_{\mathrm{tot}})}\} = 0, \tag{9.1.32}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{(U_{\mathrm{tot}})} \equiv \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R + \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} + p\boldsymbol{u} - \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi\mu}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{u}) =$$

$$= \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_R + (p + p^M)\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{T}^M)\cdot\boldsymbol{u} - \nu_M\frac{\partial p^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \nu_M \boldsymbol{T}^M\right) \tag{9.1.33}$$

— вектор субстанционального потока полной энергии движущейся плазмы (в одножидкостном МГД-приближении с законом Ома в форме (9.1.6)).

9.1.4. Уравнения состояния

В дополнение к приведенным выше уравнениям электродинамики и гидродинамики, необходимо привлекать уравнение состояния $p = p(\rho, T)$ и калорическое уравнение состояния $E = E(\rho, T)$. Давление газа будем далее определять уравнением состояния совершенного газа

$$p = \Re\rho T, \tag{9.1.34}$$

где $\Re = \mathscr{R}/\tilde{\mu}$; $\mathscr{R}$ — газовая постоянная; $\tilde{\mu}$ — средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p). Здесь знак тильды над $\tilde{\mu}$ служит для того, чтобы отличить среднюю атомную массу от магнитной проницаемости. Внутреннюю энергию газа будем далее считать пропорциональной температуре

$$E = c_V T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{9.1.35}$$

где $c_V = (R/\tilde{\mu})/(\gamma - 1)$ — теплоемкость газа, соответствующая нагреванию при постоянном объеме, которую в дальнейшем будем считать постоянной величиной.

Система магнитогидродинамических уравнений должна быть дополнена определяющими соотношениями для потоков энергии $\boldsymbol{q}$ [см. (2.3.26)] и радиационного тепла $\boldsymbol{q}_R$, [см. (2.1.30)] для тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\Pi}$ [см. (2.3.9)], а также выражениями для всех необходимых термодинамических и переносных характеристик среды. Заметим, что граничные и начальные условия для гидротермодинамических параметров в МГД-приближении не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводных сред, но необходимы дополнительные условия для поля магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ (см., например, *Ахиезер и др., 1974*).

§ 9.2. Уравнения турбулентного движения проводящей среды в присутствии магнитного поля

В настоящее время какой-либо строгой и общепринятой полуэмпирической теории турбулентности электропроводных сред не существует. Большая часть теоретических работ по моделированию турбулентного движения подобных сред выполнена для проводящей жидкости с постоянными свойствами и изотропным тензором проводимости, т. е. применительно к случаю, когда качественное различие между плазмой и жидкими металлами не проявляется. Как известно, к этому случаю при некоторых ограничениях можно отнести и проблемы моделирования турбулентного движения высокотемпературных электропроводных сред с большой плотностью, либо при небольшой величине напряженности магнитного поля (напомним, что высокотемпературные электропроводные среды (плазма) в магнитном поле характеризуются в общем случае анизотропным коэффициентом проводимости). В данной главе предпринята попытка термодинамического вывода (при систематическом использовании средневзвешенного осреднения Фавра) основной системы осредненных уравнений МГД — турбулентности. Подобный подход позволяет описать все основные специфические особенности, присущие турбулентным движениям проводящих изотропных сред в присутствии магнитного поля, которые важны не только для задач моделирования магнитных астрофизических аккреционных дисков (естественным состоянием движения которых в виду их огромности должно быть турбулентное движение), но и для многих других случаев.

Как мы уже упоминали выше, магнитногидродинамические течения при $\mathrm{Re}_M \ll 1$ и при $\mathrm{Re}_M \gg 1$ качественно отличаются друг от друга. Это относится, естественно, и к особенностям турбулентности при $\mathrm{Re}_M \ll 1$ и $\mathrm{Re}_M \gg 1$, когда в качестве характерных скорости V_0 и масштаба L_0 течения выбраны пульсационная скорость $w \equiv \sqrt{\overline{|\boldsymbol{u}''|^2}}$ и масштаб турбулентности L. Если магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_M \equiv Lw/\nu_M$ для турбулентных пульсаций много больше единицы, то представление о «вмороженном» магнитном поле применимо как для рассмотрения движений крупных турбулентных вихрей, так и для исследования мелкомасштабной структуры турбулентности в таком диапазоне масштабов, в котором число Re_M для соответствующих вихрей остается существенно больше единицы. Это означает, что магнитные силовые линии получаются столь же запутанными, как и «материальные» линии, образованные жидкими частицами. В результате возникает пульсирующее магнитное поле. Физической причиной его возникновения являются, в конечном счете, турбулентные электрические токи, возникающие в среде в результате турбулентных пульсаций скорости при наличии магнитного поля.

Далее мы ограничимся рассмотрением только магнитогидродинамической турбулентности низкотемпературной плазмы при следующих предположениях, вытекающих из анализа МГД уравнений (см. *Иевлев*, *1975*):

1) $\mathrm{Re}_M \leqslant 1$; в этом случае можно учитывать влияние на поток только внешнего магнитного поля $\boldsymbol{B}_0$ и вызываемых им токов;

2) $N \cdot \mathrm{Re}_M \ll 1$ в этом случае оказывается не существенной генерация магнитогидродинамических волн турбулентными пульсациями;

3) $(c_A/c_s)(N \cdot \mathrm{Re}_M)^{3/2} \ll 1$, $w/c_s \ll 1$ (где $c_A \equiv B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho}$ — характерная альфвеновская скорость, c_s — скорость звука); в этом случае динамика развития турбулентности может рассматриваться без учета генерации акустических колебаний.

При нарушении какого-либо из указанных условий механизм турбулентного движения существенно усложняется. Например, при нарушении условия 2) турбулентные пульсации в электропроводной среде должны приводить к появлению турбулентного поля магнитогидродинамических и акустических волн, и волн связанных с взаимодействием магнитогидродинамических и акустических колебаний, причем энергия пульсационного движения среды может быть при этом меньше или равна энергии пульсационного магнитного поля и энергии акустических колебаний. В то же время и при таких ограниченных полях, при которых условие 2) выполняется, воздействие магнитного поля на турбулентность может быть весьма существенным.

В турбулизованной низкотемпературной плазме гидродинамическая скорость, температура, плотность и электромагнитные поля являются флуктуирующими величинами. Далее, как и в предыдущих главах, мы будем применять рейнольдсову схематизацию, используя для обозначения осредненных физических величин два символа: черта сверху над какой-либо величиной $\mathscr{A}$ предполагает ее теоретико-вероятностное осреднение $\overline{\mathscr{A}} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{p=1}^{N} \mathscr{A}^{(p)}$ по ансамблю возможных реализаций рассматриваемой стохастической системы, т. е. имеется в виду, что соответствующее среднее поле $\overline{\mathscr{A}}$ определяется как математически ожидаемое значение поля $\mathscr{A}$ для ансамбля одинаковых магнитогидродинамических систем ($\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}} + \mathscr{A}'$, $\overline{\mathscr{A}'} = 0$), в то время как угловые скобки означают средневзвешенное осреднение Фавра параметра $\mathscr{A}$: $\langle\mathscr{A}\rangle = \overline{\rho\mathscr{A}}/\overline{\rho}$ (при этом $\mathscr{A} = \langle\mathscr{A}\rangle + \mathscr{A}''$, $\overline{\rho\mathscr{A}''} = 0$). Следует отметить, что введение в рассмотрение осреднения с весом оказалось удобным также и для случая модельного описания турбулентного течения электропроводной жидкости с переменной плотностью.

9.2.1. Осредненное уравнение неразрывности

Легко проверить, что осредненная плотность $\overline{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость $\langle\boldsymbol{u}\rangle \equiv \overline{\rho\boldsymbol{u}}/\overline{\rho}$ удовлетворяют уравнению неразрывности для среднего движения

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \overline{\rho}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right) = 0, \quad \text{или} \quad \overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\overline{\rho}}\right) = \operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle. \tag{9.2.1}$$

Это уравнение может быть получено путем применения операции рейнольдсовского осреднения к уравнению неразрывности (9.1.10), справедливому по предположению для мгновенных (актуальных) значений плотности и гидродинамической скорости.

Осреднение операторного соотношения $\rho d\mathscr{A}/dt = \partial(\rho\mathscr{A})/\partial t + \partial(\rho\mathscr{A}\boldsymbol{u})/\partial\boldsymbol{r}$, описывающего связь между субстанциональным и локальным изменениями характеристики $\mathscr{A}$ в мгновенном движении плазмы, приводит (при учете формулы (9.2.1)) к следующему тождеству

$$\overline{\rho\frac{d\mathscr{A}}{dt}} = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle) + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\overline{\rho}\langle\mathscr{A}\rangle\langle\boldsymbol{u}\rangle)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot(\overline{\rho\mathscr{A}''\boldsymbol{u}''})\right) = \overline{\rho}\frac{D\langle\mathscr{A}\rangle}{Dt} + \left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathscr{A})}\right), \tag{9.2.2}$$

задающему связь между субстанциональным и локальным изменением величины $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ в осредненном потоке. Здесь $D(..)/Dt \equiv \partial(..)/\partial t + \langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\partial(..)/\partial\boldsymbol{r}$ — субстанциональная производная по времени для осредненного континуума;

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(\mathscr{A})} \equiv \overline{\rho\mathscr{A}''\boldsymbol{u}''} = \overline{\rho}\langle\mathscr{A}''\boldsymbol{u}''\rangle \tag{9.2.3}$$

— турбулентный поток признака $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$, представляющий собой перенос пульсирующей характеристики $\mathscr{A}''$ пульсациями $\boldsymbol{u}''$ гидродинамической скорости.

9.2.2. Уравнение магнитной индукции для средних полей

Осредняя по ансамблю возможных реализаций (стохастического электропроводного жидкостного континуума) максвелловские уравнения (9.1.2)—(9.1.3) и закон Ома (9.1.6), справедливые по предположению для мгновенных значений электродинамических полей, в результате получим

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{E}}, \qquad \operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} = \frac{4\pi\mu}{c}\overline{\boldsymbol{j}}, \qquad \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{B}} = 0, \tag{9.2.4}$$

$$\overline{\boldsymbol{j}} = \sigma_e\left(\overline{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}}\right) \equiv \sigma_e\left(\overline{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\langle\boldsymbol{u}\rangle\times\overline{\boldsymbol{B}} + \frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{B}}\right). \tag{9.2.5}$$

Как видим, уравнения Максвелла сохраняют, в силу их линейности, свой прежний вид и для осредненных полей. Однако при осреднении нелинейного соотношения (9.1.6) появляется новый член $c^{-1}\overline{\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{B}}$, который приводит к дополнительной электродвижущей силе в законе Ома для средних полей. Обычно говорят о «турбулентной электродвижущей силе», для которой принято специальное обозначение

$$\mathscr{G} \equiv \frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{B}}, \tag{9.2.6}$$

или в тензорном виде

$$\mathscr{G}_i \equiv -\frac{1}{2c}\varepsilon_{ijk}R^M_{jk}, \qquad R^M_{jk} = -(\overline{u''_j B_k} - \overline{u''_k B_j}), \tag{9.2.6*}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга (альтернирующий тензор Леви-Чивита); $\boldsymbol{R}^M$ — так называемый магнитный тензор Рейнольдса. Величина $\mathscr{G}$ имеет размерность напряженности электрического поля и описывает средний результат взаимодействия пульсаций поля скорости и магнитной индукции. Таким образом, закон Ома для средних полей принимает вид

$$\overline{\boldsymbol{j}} = \sigma_e\left(\overline{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\langle\boldsymbol{u}\rangle\times\overline{\boldsymbol{B}} + \mathscr{G}\right) \equiv \sigma_e(\boldsymbol{E}^* + \mathscr{G}), \tag{9.2.7}$$

где $\boldsymbol{E}^* \equiv \overline{\boldsymbol{E}} + c^{-1}\langle \boldsymbol{u}\rangle \times \overline{\boldsymbol{B}}$ — электрическое поле в системе координат, движущейся со скоростью $\langle \boldsymbol{u}\rangle$.

Теперь, в отличие от регулярного течения, для того чтобы определить осредненные поля $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{E}}$ и $\overline{\boldsymbol{j}}$, необходимо знание не только величины осредненной скорости $\langle \boldsymbol{u}\rangle$, но и турбулентной электродвижущей силы $\mathscr{G}$:

$$\overline{\boldsymbol{j}} = (c/4\pi\mu)\,\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}, \tag{9.2.8}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{j}}/\sigma_e - c^{-1}\langle \boldsymbol{u}\rangle \times \overline{\boldsymbol{B}} - \mathscr{G} = c^{-1}(\nu_M\,\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}} - \langle \boldsymbol{u}\rangle \times \overline{\boldsymbol{B}}) - \mathscr{G}. \tag{9.2.9}$$

Эволюция осредненного магнитного поля определяется уравнением индукции для $\overline{\boldsymbol{B}}$, которое мы получим путем осреднения по Рейнольдсу уравнения (9.1.7). Используя соотношение (9.2.2), в результате будем иметь

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{B}}}{\overline{\rho}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}''}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle \boldsymbol{u}\rangle + \overline{\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}''} + \nu_M\nabla^2\overline{\boldsymbol{B}}. \tag{9.2.10}$$

Для дальнейших целей это уравнение удобно записать в более компактном виде

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{B}}}{\overline{\rho}}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle \boldsymbol{u}\rangle + c\,\mathrm{rot}\,\mathscr{G} + \nu_M\nabla^2\overline{\boldsymbol{B}}, \quad (\mathrm{div}\,\overline{\boldsymbol{B}} = 0), \tag{9.2.10*}$$

или, если использовать преобразование

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathscr{G} \equiv \mathrm{rot}(\overline{\boldsymbol{u}''\times\boldsymbol{B}}) \equiv \overline{\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{u}''} - \overline{\left(\boldsymbol{u}''\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\boldsymbol{B}} - \overline{\boldsymbol{B}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}''} \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{R}^M, \tag{9.2.11}$$

в виде

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{B}}}{\overline{\rho}}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\langle \boldsymbol{u}\rangle + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{R}^M + \nu_M\nabla^2\overline{\boldsymbol{B}}. \tag{9.2.10**}$$

Отметим, что в осредненном уравнении индукции (9.2.10*) появился новый член $c\,\mathrm{rot}\,\mathscr{G}$, определяемый произведением случайных флуктуаций и играющий роль дополнительного источника, генерирующего поле $\overline{\boldsymbol{B}}$. Ясно, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД-турбулентности является конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентного потока $\mathscr{G}$ как функции средних полей $\overline{\boldsymbol{B}}$ и $\langle \boldsymbol{u}\rangle$, с тем чтобы, задавшись полем $\langle \boldsymbol{u}\rangle$, можно было решить уравнение (9.2.10*) относительно $\overline{\boldsymbol{B}}$.

9.2.3. Осредненное уравнение движения

Осредненное уравнение движения для электропроводных сред получим путем осреднения по ансамблю возможных реализаций (при использовании средневзвешенного осреднения для скорости течения) уравнения сохранения количества движения (9.1.18) для регулярных течений. В результате будем иметь

$$\overline{\rho}\frac{D\langle \boldsymbol{u}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\overline{p} + \overline{p^M}) + \left(\frac{\partial}{\partial}\boldsymbol{r}\cdot(\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{R} + \overline{\boldsymbol{T}^M})\right) - \overline{\rho}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Psi_G. \tag{9.2.12}$$

Здесь $\overline{\Pi}(\boldsymbol{r}, t)$ — осредненный тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости;

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\overline{\rho \boldsymbol{u}'' \boldsymbol{u}''} = -\overline{\rho}\langle \boldsymbol{u}'' \boldsymbol{u}'' \rangle, \qquad (R_{jk} = -\overline{\rho}\langle u_j'' u_k'' \rangle) \tag{9.2.13}$$

— обычный тензор Рейнольдса для жидкости, имеющий смысл дополнительных (турбулентных) напряжений;

$$\overline{\boldsymbol{T}^M} \equiv \frac{1}{4\pi\mu}\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}_{av}^M + \boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M, \qquad \overline{p^M} \equiv p_{av}^M + p_{\text{turb}}^M \tag{9.2.14}$$

— соответственно осредненный тензор магнитных натяжений и осредненное давление магнитного поля;

$$\begin{cases} (\boldsymbol{T}_{av}^M)_{jk} \equiv \dfrac{1}{4\pi\mu}\overline{B}_j\overline{B}_k, \\ (\boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M)_{jk} \equiv \dfrac{1}{4\pi\mu}\overline{B_j' B_k'} \end{cases} \tag{9.2.15}$$

— компоненты тензоров магнитных натяжений для осредненного магнитного поля и пульсационной составляющей магнитного поля;

$$\begin{cases} p_{av}^M \equiv |\overline{\boldsymbol{B}}|^2/8\pi\mu, \\ p_{\text{turb}}^M \equiv \overline{|\boldsymbol{B}'|^2}/8\pi\mu \end{cases} \tag{9.2.16}$$

— давление осредненного магнитного поля и турбулентное магнитное давление электропроводной жидкости.

Используя преобразование [ср. с (9.1.15)],

$$-\frac{\partial p_{av}^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{T}_{av}^M = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{|\overline{\boldsymbol{B}}|^2}{8\pi\mu}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \left(\frac{\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{B}}}{4\pi\mu}\right)\right) = -\frac{1}{4\pi\mu}\overline{\boldsymbol{B}} \times \operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{j}} \times \overline{\boldsymbol{B}},$$

придадим осредненному уравнению движения плазмы (9.2.12) следующий вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle \boldsymbol{u}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}(\overline{p} + p_{\text{turb}}^M) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\overline{\Pi} + \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M)\right) + \frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{j}} \times \overline{\boldsymbol{B}} - \overline{\rho}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Psi_G \cong$$

$$\cong -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\overline{p} + \overline{|\boldsymbol{B}'|^2}/8\pi\mu\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{R}^K\right) + \frac{1}{4\pi\mu}\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} \times \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\rho}\boldsymbol{g}, \tag{9.2.17}$$

где

$$\boldsymbol{R}^K \equiv \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M \equiv \left(-\overline{\rho \boldsymbol{u}'' \boldsymbol{u}''} + \frac{1}{4\pi\mu}\overline{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}'}\right) \tag{9.2.18}$$

— полный тензор турбулентных напряжений в плазме (так называемый кинетический тензор Рейнольдса для электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле). Приближенное уравнение (9.2.18) справедливо в случае развитой турбулентности, когда осредненным тензором вязких (молекулярных) напряжений $\overline{\Pi}$ можно пренебречь по сравнению с тензором напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}$ во всей области течения (за исключением примыкающего к твердым стенкам вязкого подслоя).

9.2.4. Энергетические уравнения масштаба среднего движения для электропроводного вещества

В осредненном турбулизованном течении проводящей жидкости, по сравнению с его регулярным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объемов вещества, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума. Для наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса, выпишем сначала различные уравнения энергии для осредненного движения материальной составляющей плазмы, включая уравнение баланса для турбулентной кинетической энергии вещества.

Уравнение притока тепла для среднего движения турбулентной плазмы

Осредняя по Рейнольдсу уравнение (9.1.20) для внутренней энергии проводящего вещества и используя легко выводимые тождества

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} + \overline{p}\,\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle \equiv \overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt} - \frac{D\overline{p}}{Dt}$$

и

$$\overline{\frac{dp}{dt}} \equiv \frac{D\overline{p}}{Dt} + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \mathrm{div}(\overline{p'\boldsymbol{u}''}) - \overline{p'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}''},$$

где $\langle H\rangle \equiv \langle E\rangle + \overline{p}/\overline{\rho}$, получим уравнение притока тепла для среднего движения жидкости в следующем виде [ср. с (3.1.54)]

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt} + \mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{q}}_R + \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{turb}}) =$$

$$\overline{p}\,\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) + \frac{|\overline{\boldsymbol{j}}|^2}{\sigma_e} + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}''} + \frac{\overline{|\boldsymbol{j}'|^2}}{\sigma_e} + \overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle \qquad (9.2.19)$$

или

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle} = \frac{D\overline{p}}{Dt} + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) +$$

$$+ \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left|\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}\right|^2 + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}''} + \overline{\rho}(\langle\varepsilon_b\rangle + \langle\varepsilon_M\rangle). \qquad (9.2.19^*)$$

Здесь

$$\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle} \equiv \overline{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{q}}_R + \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{turb}}, \qquad (\widetilde{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{turb}} \equiv \boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}); \qquad (9.2.20)$$

— полной поток внутренней энергии осредненного движения плазмы;

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho(1/\rho)''\boldsymbol{u}''} = \overline{\boldsymbol{u}''}, \qquad \boldsymbol{q}^{\mathrm{turb}}(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho H''\boldsymbol{u}''} \cong c_p\overline{\rho T''\boldsymbol{u}''} \qquad (9.2.21)$$

— соответственно турбулентные потоки удельного объема и тепла;

$$\begin{cases} 0 \leqslant \overline{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle \equiv \overline{\left(\boldsymbol{\Pi} : \frac{\partial\boldsymbol{u}''}{\partial\boldsymbol{r}}\right)} = \overline{\Pi_{kj}(\partial u''_k/\partial x_j)}, \\ 0 \leqslant \overline{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle \equiv \frac{\overline{|\boldsymbol{j}'|^2}}{\sigma_e} = \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\overline{|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}'|^2} \end{cases} \qquad (9.2.22)$$

— соответственно удельная скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости) и удельная скорость диссипации энергии турбулентности, связанная с действием пульсирующего магнитного поля. Эту последнюю величину можно интерпретировать как джоулево тепловыделение от пульсационных электрических токов, возникающих при турбулентных пульсациях магнитного поля в проводящей среде.

Уравнение для осредненной механической энергии

Уравнение для осредненной механической энергии плазмы может быть получено путем скалярного умножения обеих частей осредненного уравнения движения (9.2.12) на вектор $\langle \boldsymbol{u} \rangle$. В результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{|\langle \boldsymbol{u} \rangle|^2}{2} + \Psi_G\right) + \operatorname{div}\{(\bar{p} + p^M_{\text{turb}})\langle \boldsymbol{u} \rangle - (\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{T}^M_{av} + \boldsymbol{R}^K)\cdot\langle \boldsymbol{u} \rangle\} =$$

$$= (\bar{p} + p^M_{\text{turb}})\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle - \left((\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{T}^M_{av} + \boldsymbol{R}^K) : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right). \quad (9.2.23)$$

Уравнение для турбулентной кинетической энергии вещества

Уравнение для турбулентной кинетической энергии вещества может быть получено различными способами (см. *Marov*, *Kolesnichenko*, *2002*), одним из которых мы воспользуемся в рассматриваемом здесь случае электропроводной среды.

Пусть $\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)$ актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты какого-либо вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho d\mathscr{A}/dt = -(\partial/\partial \boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{J}_{\mathscr{A}} + \sigma_{\mathscr{A}}$, где $\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}}$ и $\sigma_{\mathscr{A}}$ — соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объемная плотность источника признака $\mathscr{A}$. Например, для уравнения движения (9.1.18):

$$\mathscr{A} \equiv \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{J}_{\mathscr{A}} \equiv -\boldsymbol{\Pi}, \quad \sigma_{\mathscr{A}} \equiv -\partial p/\partial \boldsymbol{r} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \rho\boldsymbol{g}. \quad (9.2.24)$$

Легко показать (для чего нужно умножить тождество $d\mathscr{A}''/dt \equiv d\mathscr{A}/dt - D\langle\mathscr{A}\rangle/Dt - \boldsymbol{u}''\cdot(\partial/\partial\boldsymbol{r})\langle\mathscr{A}\rangle$ на $\rho\mathscr{A}''$ и осреднить результат по Рейнольдсу), что уравнение переноса для среднеквадратичной пульсации $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$ имеет следующий общий вид (см. *Колесниченко*, *1995*)

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\langle\mathscr{A}''^2\rangle}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\left(\overline{\frac{1}{2}\rho\mathscr{A}''^2\boldsymbol{u}''} + \overline{\mathscr{A}''\boldsymbol{J}_{(\mathscr{A})}}\right) = -\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_A\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\langle\mathscr{A}\rangle\right) + \overline{\mathscr{A}''\sigma_{\mathscr{A}}} - \bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathscr{A}}\rangle, \quad (9.2.25)$$

где $\bar{\rho}\langle\varepsilon_{\mathscr{A}}\rangle \equiv -\overline{(\boldsymbol{J}_{\mathscr{A}}\cdot\partial\mathscr{A}''/\partial\boldsymbol{r})}$ — так называемая скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$. Уравнение переноса (9.2.25) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle\mathscr{A}''^2\rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, турбулентной диффузии (второй член слева), образования за счет обмена энергией между осредненным и пульсационным движением (первый член справа), перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle \mathscr{A}''^2 \rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Тогда уравнение для турбулентной кинетической энергии вещества (для осредненной пульсационной кинетической энергии $b = |\boldsymbol{u}''|^2/2$ единицы массы плазмы)

$$\langle b \rangle(\boldsymbol{r}, t) \equiv \overline{\rho |\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho} \tag{9.2.26}$$

может быть получено из общего уравнения (9.2.25) для дисперсии $\langle \mathscr{A}''^2 \rangle$ путем подстановки в него соотношений (9.2.24); в результате будем иметь

$$\overline{\rho} \frac{D\langle b \rangle}{Dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_{\langle b \rangle} = \left(\boldsymbol{R} : \frac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) + \\ + \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} - \mathscr{G} \cdot \overline{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{c} \langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \overline{\boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}'} + \overline{\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}'} - \overline{\rho}(\langle \varepsilon_b \rangle + \langle \varepsilon_M \rangle), \tag{9.2.27}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{\langle b \rangle} \equiv \overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{u}''} \tag{9.2.28}$$

— турбулентно-диффузионный поток турбулентной кинетической энергии вещественной составляющей плазмы. При написании (9.2.27) мы использовали легко выводимое преобразование

$$c^{-1} \overline{\boldsymbol{u}'' \cdot (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})} \equiv -c^{-1} \langle \boldsymbol{u} \rangle \cdot \overline{\boldsymbol{j}' \times \boldsymbol{B}'} + \overline{\boldsymbol{j}' \cdot \boldsymbol{E}'} - \overline{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle - \mathscr{G} \cdot \overline{\boldsymbol{j}}. \tag{9.2.29}$$

Члены, стоящие в левой части уравнения (9.2.27), выражают полное изменение осредненной пульсационной кинетической энергии в единицу времени. Физический смысл членов, стоящих в правой части, следующий. Величина $(\boldsymbol{R} : \partial \langle \boldsymbol{u} \rangle / \partial \boldsymbol{r})$ фигурирует в правых частях уравнений (9.2.23) и (9.2.27) с разными знаками, и потому ее можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии осредненного движения в энергию турбулентности электропроводной жидкости. Величина $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии плазмы в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объема пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций гидродинамического давления p' в системе и расширения ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' > 0$) или сжатия ($\operatorname{div} \boldsymbol{u}'' < 0$) турбулентных вихрей. Величина $(\partial \overline{p} / \partial \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}$ представляет собой скорость перехода (в единице объема среды) между турбулентной и осредненной внутренней энергиями системы, причем мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них эта величина всегда положительна; заметим, однако, что крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией (для которых $(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \partial \overline{p} / \partial \boldsymbol{r}) < 0$, могут преобразовывать тепловую энергию турбулизованного потока в осредненную кинетическую энергию пульсаций скорости (см., например, *Колесниченко, Маров, 1999*); парная корреляция $\overline{\rho} \langle \varepsilon_b \rangle$ в развитом турбулентном потоке представляет собой скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. (9.2.19)]; наконец, величину $\overline{\rho} \langle \varepsilon_M \rangle$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесенную к единице времени и единице объема), совершаемую пульсациями тензора магнитных натяжений над турбулентными вихрями, можно интерпретировать как дополнительное рассеяние турбулентной кинетической энергии под влиянием магнитной вязкости, происходящее в электропроводной турбулизованной среде (джоулева диссипация).

Таким образом, из уравнения (9.2.27) видно, что воздействие поля магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ на баланс турбулентной кинетической энергии определяется влиянием как прямых факторов, так и факторов, действующих косвенно. Прямое действие поля $\boldsymbol{B}$ на турбулентность приводит к подавлению турбулентных пульсаций и изменению структуры турбулентности (член $\overline{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle$). Косвенное воздействие магнитного поля связано с влиянием изменений поля средних скоростей и структуры турбулентности на производство турбулентности, диссипацию энергии и ее перенос. Различные косвенные воздействия магнитного поля могут в общем случае как уменьшать, так и увеличивать интенсивность турбулентных пульсаций.

Уравнение для осредненной полной энергии электропроводного вещества

Комбинируя уравнения (9.2.19), (9.2.23) и (9.2.27), получим балансовое уравнение для осредненной полной удельной энергии

$$\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle \equiv |\langle \boldsymbol{u}\rangle|^2/2 + \Psi_G + \langle E\rangle + \langle b\rangle \tag{9.2.30}$$

электропроводного вещества в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle) + \operatorname{div}\{\overline{\rho}\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle\langle \boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{J}_{\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle}\} =$$
$$= \overline{p^M}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle - \left(\overline{\boldsymbol{T}^M} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2 - \mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}} - \frac{1}{c}\langle \boldsymbol{u}\rangle\cdot\overline{\boldsymbol{j}'\times\boldsymbol{B}'} + \overline{\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}'}, \tag{9.2.31}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle} \equiv \{\overline{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{q}}_R + \boldsymbol{q}^{\text{turb}} + \overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2)\boldsymbol{u}''} - \overline{\Pi\cdot\boldsymbol{u}''} + (\overline{p} + p_{\text{turb}}^M)\langle \boldsymbol{u}\rangle - (\overline{\Pi} + \boldsymbol{T}_{av}^M + \boldsymbol{R}^K)\cdot\langle \boldsymbol{u}\rangle\} \tag{9.2.32}$$

— субстанциональный поток осредненной полной энергии вещественной составляющей турбулизованной плазмы. Из этого уравнения видно, что осредненная плотность полной энергии для электропроводного вещества не сохраняется: полная энергия вещества $\langle U_{\text{tot}}^{\text{sub}}\rangle$ и магнитная энергия $\langle E^M\rangle$ могут переходить одна в другую.

9.2.5. Уравнения для магнитной энергии турбулизованной плазмы

Для турбулизованной плазмы следует принимать во внимание еще и другие виды энергии, связанные с проявлением магнитного поля. Получим сначала уравнение для осредненной плотности магнитной энергии плазмы $\langle E_M\rangle$, которую удобно разложить на сумму двух величин: $\langle E_M\rangle \equiv \overline{|\boldsymbol{B}|^2/8\pi\mu}/\overline{\rho} = E_M^{av} + \langle b_M\rangle$, где $E_M^{av} \equiv |\overline{\boldsymbol{B}}|^2/8\pi\mu\overline{\rho}$ — плотность магнитной энергии среднего поля; $\langle b_M\rangle = \overline{|\boldsymbol{B}'|^2}/8\pi\mu\overline{\rho}$ — плотность турбулентной магнитной энергии. Проводя теоретико-вероятностное осреднение уравнения (9.1.26) и учитывая соотношения (9.1.28) и (9.2.29), будем иметь

$$\rho\frac{D}{Dt}\langle E^M\rangle + \operatorname{div}\left\{\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(E^M)} + \overline{p^M\boldsymbol{u}''} - \overline{\boldsymbol{T}^M\cdot\boldsymbol{u}''} - \nu_M\frac{\partial\overline{p^M}}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\nu_M\overline{\boldsymbol{T}^M}\right\} =$$

$$= -\overline{p^M}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\boldsymbol{T}^M} : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2 + \mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}} + \frac{1}{c}\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\overline{\boldsymbol{j}'\times\boldsymbol{B}'} - \overline{\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}'}, \tag{9.2.33}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(E^M)} \equiv \overline{\rho E^M\boldsymbol{u}''} \tag{9.2.34}$$

— турбулентный поток магнитной энергии плазмы.

Поскольку правые части уравнений (9.2.31) и (9.2.33) отличаются лишь по знаку, то плотность полной энергии осредненного континуума $\langle U_{(\text{tot})}\rangle$, равная сумме плотностей (на единицу массы) осредненной энергии вещества $\langle U^{\text{sub}}_{\text{tot}}\rangle$ и осредненной магнитной энергии плазмы $\langle E^M\rangle$, сохраняется. Единственным процессом, под влиянием которого изменяется в неподвижном объеме полная энергия осредненного континуума, служит приток или отток энергии через поверхность этого объема, что и выражает принцип сохранения полной энергии в механически, термически и электромагнитно изолированной системе.

Если использовать осредненный вектор Пойнтинга [см. формулу (9.1.29)]

$$\overline{\boldsymbol{q}_{\text{Poynt}}} \equiv \frac{c}{4\pi}\overline{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}} = \overline{\rho(E^M + p^M/\rho)\boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{T}^M\cdot\boldsymbol{u}} - \nu_M\frac{\partial\overline{p^M}}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\nu_M\overline{\boldsymbol{T}^M}, \tag{9.2.35}$$

то уравнению (9.2.33) для осредненной магнитной энергии можно придать следующий балансовый вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle E^M\rangle) + \operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}\overline{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}} - \overline{p^M}\langle\boldsymbol{u}\rangle + \overline{\boldsymbol{T}^M}\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle\right\} =$$

$$= -\overline{p^M}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle + \left(\overline{\boldsymbol{T}^M} : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \frac{|\overline{\boldsymbol{j}}|^2}{\sigma_e} + \mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}} + \frac{1}{c}\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\overline{\boldsymbol{j}'\times\boldsymbol{B}'} - \overline{\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}'}, \tag{9.2.36}$$

эквивалентный, как легко проверить, осредненному закону сохранения энергии электромагнитного поля (см. *Тамм, 1976*)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\langle E^M\rangle) + \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}} = -\overline{\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{E}}. \tag{9.2.37}$$

Уравнение для магнитной энергии среднего поля

Получим теперь уравнение для магнитной энергии среднего поля. С этой целью умножим скалярно на $\overline{\boldsymbol{B}}/4\pi\mu$ осредненное уравнение индукции (9.2.10*) и используем формулу

$$\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\nabla^2\overline{\boldsymbol{B}} = -\frac{|\overline{\boldsymbol{j}}|^2}{\sigma_e} - \operatorname{div}\left(-\nu_M\frac{\partial p^M_{av}}{\partial\boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\nu_M\boldsymbol{T}^M_{av}\right), \tag{9.2.38}$$

справедливую, как легко проверить, и для осредненных полей [ср. с (9.2.32)]; в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{DE_{av}^M}{Dt} + \operatorname{div}\left\{-\nu_M\frac{\partial p_{av}^M}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \nu_M \boldsymbol{T}_{av}^M\right\} =$$

$$= -p_{av}^M \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\boldsymbol{T}_{av}^M : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{c}{4\pi\mu}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot \operatorname{rot}\mathscr{G} - \frac{|\bar{\boldsymbol{j}}|^2}{\sigma_e}. \quad (9.2.39)$$

Придадим этому уравнению более удобный для дальнейших целей вид, воспользовавшись соотношением $|\bar{\boldsymbol{j}}|^2/\sigma_e = (\nu_M/4\pi\mu)|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2$ и формулой векторного анализа $\operatorname{div}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$, в результате получим

$$\bar{\rho}\frac{DE_{av}^M}{Dt} + \operatorname{div}\left\{-\nu_M\frac{\partial p_{av}^M}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot \nu_M \boldsymbol{T}_{av}^M - \frac{c}{4\pi\mu}(\mathscr{G}\times\overline{\boldsymbol{B}})\right\} =$$

$$= -p_{av}^M \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\boldsymbol{T}_{av}^M : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \bar{\boldsymbol{j}}\cdot\mathscr{G} - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2. \quad (9.2.40)$$

Из правой части этого уравнения видно, что магнитная энергия среднего поля E_{av}^M убывает за счет диссипации (последний член) и возрастает в результате перехода кинетической энергии среднего движения (член $\boldsymbol{T}_{av}^M : \partial\langle\boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r}$) и турбулентной кинетической энергии вещества (член $\mathscr{G}\cdot\bar{j}$) в магнитную энергию среднего поля [см. уравнения (9.2.19*), (9.2.23) и (9.2.27)].

Уравнение для турбулентной магнитной энергии

Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_M\rangle$ может быть получено тогда из разности (9.2.33) и (9.2.40):

$$\bar{\rho}\frac{D\langle b_M\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\boldsymbol{J}_{\langle b_M\rangle} = -p_{\text{turb}}^M \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{c}\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\overline{\boldsymbol{j}'\times\boldsymbol{B}'} - \overline{\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{E}'}, \quad (9.2.41)$$

где

$$\boldsymbol{J}_{\langle b_M\rangle} \equiv \left\{\overline{\rho(E^M + p^M/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{\boldsymbol{T}^M\boldsymbol{u}''} + \frac{c}{4\pi\mu}(\mathscr{G}\times\overline{\boldsymbol{B}})\right\} \quad (9.2.42)$$

— турбулентно-диффузионный поток турбулентной магнитной энергии $\langle b_M\rangle$ плазмы. Из этого уравнения видно, что физической причиной возникновения и поддержания турбулентной магнитной энергии (турбулентного магнитного поля) являются турбулентные электрические токи (член $c^{-1}\overline{\boldsymbol{j}'\times\boldsymbol{B}'} \equiv (\partial/\partial\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{T}_{\text{turb}}^M$), возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости при наличии магнитного поля и пульсациях магнитного поля. Последний член уравнения (9.2.41) описывает убывание турбулентной магнитной энергии за счет перехода ее в кинетическую турбулентную энергию среды [см. уравнение (9.2.27)].

Балансовое уравнение для полной энергии турбулентности плазмы

Складывая теперь (9.2.27) и (9.2.41), получим балансовое уравнение для полной энергии турбулентности $b_\Sigma \equiv \langle b\rangle + \langle b_M\rangle$ электропроводной среды в виде

$$\frac{\partial(\bar{\rho} b_\Sigma)}{\partial t} + \operatorname{div}\{\bar{\rho} b_\Sigma \langle \boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{J}_{b_\Sigma}\} = -p^M_{\text{turb}} \operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\boldsymbol{R}^K : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \\ + \frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} - \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma, \qquad (9.2.43)$$

где

$$\boldsymbol{J}_{b_\Sigma} \equiv \boldsymbol{J}_{\langle b\rangle} + \boldsymbol{J}_{\langle b_M\rangle} = \left\{\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{\left(\Pi + \frac{1}{4\pi\mu}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}'\right)\cdot \boldsymbol{u}''} - \\ - \frac{1}{4\pi\mu}\left[\overline{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{u}'')}\overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}''(\boldsymbol{B}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}})\right]\right\} \qquad (9.2.44)$$

— турбулентно-диффузионный поток полной (кинетической плюс магнитной) турбулентной энергии электропроводной среды;

$$\varepsilon_\Sigma \equiv \langle\varepsilon_M\rangle + \langle\varepsilon_b\rangle = \frac{1}{\bar{\rho}}\left\{\overline{\left(\Pi : \frac{\partial \boldsymbol{u}''}{\partial \boldsymbol{r}}\right)} + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\overline{|\operatorname{rot} \boldsymbol{B}'|^2}\right\} \qquad (9.2.45)$$

— полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической и вязкости магнитного поля); $\boldsymbol{R}^K \equiv \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}^{\text{turb}}$ — полный тензор турбулентных напряжений плазмы (так называемый кинетический тензор Рейнольдса). При написании (9.2.43), нами использовано преобразование

$$\mathscr{G}\cdot\bar{\boldsymbol{j}} \equiv -\frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right), \qquad (9.2.46)$$

которое следует из соотношений (9.2.6*) и (9.2.8); действительно,

$$\mathscr{G}_i\bar{j}_i = -\frac{1}{2c}\varepsilon_{ijk}R^M_{jk}\bar{j}_i = -\frac{1}{8\pi\mu}\varepsilon_{ijk}R^M_{jk}(\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}})_i = -\frac{1}{8\pi\mu}\varepsilon_{kji}\varepsilon_{mli}R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l} = \\ = -\frac{1}{8\pi\mu}R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l}(\delta_{km}\delta_{jl} - \delta_{jm}\delta_{kl}) = -\frac{1}{8\pi\mu}R^M_{jk}\left(\frac{\partial \overline{B}_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{B}_j}{\partial x_k}\right) = -\frac{1}{4\pi\mu}R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_k}{\partial x_j}.$$

Заметим, что в пульсационном магнитном поле может содержаться значительная (а по некоторым оценкам даже большая) часть общей энергии турбулентности системы.

Из уравнения (9.2.43) видно, что джоулева диссипация [член $\bar{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle$] приводит к более быстрому затуханию возмущения плазмы, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация, т. е. непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения плазмы. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с осредненным течением жидкости. При этом скорость кинематического обмена $(\boldsymbol{R}^K : \partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})$ между кинетической энергией среднего движения жидкости [см. (9.2.23)] и кинетической энергией вихревого движения системы зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей $\boldsymbol{R}$ и пульсациями компонент магнитного поля $\boldsymbol{R}^M$, так и от сдвига средней скорости $\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r}$, т. е. влияние на устойчивость происходит через изменение профиля осредненной скорости течения $\langle \boldsymbol{u}\rangle$. Это влияние может оказаться намного существеннее, чем непосредственное взаимодействие с возмущением, причем изменение профиля осредненной скорости приводит в случае мелкомасштабной турбулентности к повышению устойчивости. Как уже было отмечено, крупномасштабная турбулентность может превращать кинетическую энергию турбулентности в энергию среднего движения, как, например, в случае воздействия поперечного магнитного поля на течение Куэтта (см. *Кадомцев, 1976*).

Случай развитой турбулентности

При решении конкретных задач турбулентной гидродинамики электропроводных сред в случае развитой турбулентности (когда $\boldsymbol{q}^{\text{turb}} \gg \overline{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{R} \gg \overline{\boldsymbol{\Pi}}$) часто поступают следующим образом. Вводя обозначение

$$\langle H_0\rangle \equiv \frac{|\langle \boldsymbol{u}\rangle|^2}{2} + \Psi_G + \langle H\rangle \tag{9.2.47}$$

для полной энтальпии и подставляя в (9.2.19*) выражение $\langle H\rangle \equiv \langle H_0\rangle - |\langle \boldsymbol{u}\rangle|^2/2 - \Psi_G$, после несложных преобразований, выполненных с использованием уравнения баланса осредненной механической энергии (9.2.23), получим

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H_0\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\{\overline{\boldsymbol{q}}_R + \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} + \overline{p^M}\langle \boldsymbol{u}\rangle - (\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{T}^M_{av} + \boldsymbol{R}^K)\cdot\langle \boldsymbol{u}\rangle\} = \frac{\partial\overline{p}}{\partial t} + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2 -$$

$$+ \overline{p^M}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle - \left((\boldsymbol{T}^M_{av} + \boldsymbol{R}^K) : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma. \tag{9.2.48}$$

Сделаем теперь важное предположение (которое часто реализуется на практике), что в структуре пульсирующих полей $\boldsymbol{u}''$ и $\boldsymbol{B}'$ в случае развитой турбулентности, когда гидродинамическое число Рейнольдса имеет большие значения $\mathrm{Re} \gg 1$, устанавливается такое стационарно-неравновесное состояние, при котором полная турбулентная энергия плазмы b_Σ, равная сумме турбулентной энергии материальной составляющей плазмы $\langle b\rangle \equiv \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2}/2\overline{\rho}$ и турбулентной энергии пульсирующего магнитного поля $\langle b_M\rangle \equiv \overline{|\boldsymbol{B}'|^2}/8\pi\mu\overline{\rho}$, почти не меняется как во времени, так и в пространстве. В этом случае справедливо следующее приближенное соотношение [см. уравнение (9.2.43)]

$$-p^M_{\text{turb}}\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \left(\boldsymbol{R}^K : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) \cong \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma, \tag{9.2.49}$$

при учете которого уравнение притока тепла для турбулизованной смеси

(9.2.19*) приобретает следующую почти «классическую'» форму

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt}+\operatorname{div}\{\overline{\boldsymbol{q}}_R+\widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}}\}=$$
$$=\frac{D\overline{p}}{Dt}-p^M_{\text{turb}}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle+\left(\boldsymbol{R}^K:\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M:\frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2,\qquad(9.2.50)$$

а уравнение (9.2.48) для полной энтальпии, с учетом тождественного преобразования

$$\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial p^M_{av}}{\partial\boldsymbol{r}}-\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot\frac{\partial\boldsymbol{T}^M_{av}}{\partial\boldsymbol{r}}=\frac{1}{c}\overline{\boldsymbol{j}}\cdot(\langle\boldsymbol{u}\rangle\times\boldsymbol{B})=\frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2+\frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M:\frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)-\overline{\boldsymbol{j}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}},$$

принимает вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle H_0\rangle}{Dt}+\operatorname{div}\{\overline{\boldsymbol{q}}_R+\widetilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}}+p^M_{\text{turb}}\langle\boldsymbol{u}\rangle-\boldsymbol{R}^K\cdot\langle\boldsymbol{u}\rangle\}=\frac{\partial\overline{p}}{\partial t}+\overline{\boldsymbol{j}}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}.\qquad(9.2.51)$$

На практике для различных случаев осредненное уравнение внутренней энергии плазмы может быть использовано в виде (9.2.19*), (9.2.50) или (9.2.51).

Полученные выше дифференциальные уравнения среднего движения турбулизованной электропроводной среды должны быть дополнены осредненным уравнением состояния для давления. Применяя статистическое осреднение к уравнению (9.1.34), получим следующее точное выражение

$$\overline{p}=\Re\overline{\rho}\langle T\rangle,\qquad(9.2.52)$$

которое обычно применяется в простых моделях МГД-турбулентности, основанных на градиентной гипотезе замыкания.

§ 9.3. Вывод определяющих соотношений для турбулентных течений электропроводной среды в присутствии магнитного поля

В предыдущем разделе на основе классических одножидкостных МГД уравнений с упрощенной формой закона Ома были получены (при использовании средневзвешенного осреднения Фавра) магнитогидродинамические уравнения масштаба среднего движения, предназначенные для описания осредненных турбулентных течений электропроводной среды в присутствии магнитного поля. Эти уравнения имеют, вообще говоря, ту же форму, как и представленные в п. 9.1 уравнения магнитной гидродинамики для регулярного (предсказуемого) режима движения проводящей жидкости. Вместе с тем, основная система осредненных магнитогидродинамических уравнений, состоящая из уравнений (9.2.1), (9.2.10*), (9.2.17), (9.2.19*), (9.2.43) и (9.2.52), является незамкнутой, поскольку содержит, наряду со средними значениями гидродинамических параметров состояния, таких как $\overline{\rho}$, $\langle\boldsymbol{u}\rangle$, $\overline{p}$, $\langle T\rangle$, $\overline{\boldsymbol{B}}$, и их производными, также и неизвестные корреляционные вторые моменты $\boldsymbol{q}^{\text{turb}}$, $\boldsymbol{R}^K$ и $\boldsymbol{R}^M$, которые появились в результате осреднения исходных нелинейных МГД уравнений. Кроме этих корреляционных функций для замыкания указанной системы необходимы сведения о турбулентном потоке удельного объема $\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)}$, а также о корреляционных функциях, включающих пульсации давления. В связи с этим, возникает известная проблема замыкания в турбулентности, связанная с необходимостью конструирования определяющих соотношений для указанных неопределенных величин, входящих в осредненные уравнения магнитной гидродинамики, которая для турбулентного движения электропроводных сред в присутствии магнитного поля имеет свои специфические особенности. Таким образом, наша дальнейшая задача заключается в том, чтобы получить эти замыкающие соотношения для турбулентных потоков, отвечающие за перенос тепла, количества движения и массы. Воспользуемся для этой цели методами расширенной неравновесной термодинамики (см. *Жоу и др., 2006*).

9.3.1. Уравнение баланса для осредненной энтропии проводящей среды

Термодинамический анализ турбулизованной электропроводной среды мы проведем в предположении, что одноточечные корреляции $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle$ для любых (но не равных гидродинамической скорости течения $\boldsymbol{u}$) пульсирующих термодинамических параметров $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle$ и могут быть опущены, т. е. далее будем предполагать, что выполняется неравенство $\langle \mathscr{A}'' \mathscr{B}'' \rangle / \langle \mathscr{A} \rangle \langle \mathscr{B} \rangle \ll 1$, ($\mathscr{A} \neq \boldsymbol{u}$, $\mathscr{B} \neq \boldsymbol{u}$). Для этого случая в работе (*Колесниченко, 1998*) было показано, что осреднение справедливого для микродвижений среды фундаментального тождества Гиббса (записанного вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объема) приводит к следующему уравнению для средневзвешенных удельной энтропии $\langle S \rangle(\boldsymbol{r}, t)$ и удельной внутренней энергии $\langle E \rangle(\boldsymbol{r}, t)$ проводящей жидкости

$$\bar{\rho} \langle T \rangle \frac{D\langle S \rangle}{Dt} = \bar{\rho} \frac{D\langle E \rangle}{Dt} + \bar{\rho} \bar{p} \frac{D\langle 1/\bar{\rho} \rangle}{Dt}. \tag{9.3.1}$$

Исключим теперь из правой части этого соотношения субстанциональные производные от параметров $\langle E \rangle$ и $(1/\bar{\rho})$ с помощью осредненных уравнений неразрывности (9.2.1) и энергии (9.2.20); в результате получим уравнение субстанционального баланса осредненной энтропии $\langle S \rangle$ среды в следующем явном виде

$$\bar{\rho} \frac{D\langle S \rangle}{Dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma^{(i)}_{\langle S \rangle} + \sigma^{(e)}_{\langle S \rangle}, \tag{9.3.2}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle} \equiv \boldsymbol{J}_{\langle E \rangle} / \langle T \rangle \equiv \left\{ \frac{\bar{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{q}}_R + \widetilde{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{turb}}}{\langle T \rangle} \right\}, \tag{9.3.3}$$

$$\begin{cases} \sigma^{(i)}_{\langle S \rangle} \equiv \dfrac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -\left(\boldsymbol{J}_{\langle S \rangle} \cdot \dfrac{\partial \langle T \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \dfrac{\partial \langle \boldsymbol{u} \rangle}{\partial \boldsymbol{r}} \right) + \dfrac{\nu_M}{4\pi\mu} |\mathrm{rot}\, \overline{\boldsymbol{B}}|^2 \right\} \geqslant 0, \\ \sigma^{(e)}_{\langle S \rangle} \equiv \dfrac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) + \bar{\rho} \varepsilon_{\Sigma} \right\} \equiv \dfrac{\mathfrak{I}}{\langle T \rangle}. \end{cases} \tag{9.3.4}$$

Здесь величина $\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$, определяющая скорость локального производства осредненной энтропии $\langle S\rangle(\boldsymbol{r}, t)$ смеси (обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы осредненного движения), всегда положительна. Однако величина $\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}(\boldsymbol{r}, t)$ (относящаяся к стоку или притоку осредненной энтропии) может быть разной по знаку и, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами осредненного движения и так называемой подсистемой турбулентного хаоса (см, *Колесниченко, Маров, 1999*). Таким образом, из соотношения (9.3.2) следует, что одной только осредненной энтропии $\langle S\rangle$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулентного течения электропроводной жидкости, поскольку для нее не выполняется второй закон термодинамики. Кроме этого, энтропия $\langle S\rangle$ не связана явно с какими-либо параметрами пульсирующего турбулентного хаоса, характеризующими его внутреннюю структуру, в частности с такими ключевыми характеристиками турбулентности, как энергия кинетической турбулентности $\langle b\rangle$ и энергия турбулентности магнитного поля $\langle b_M\rangle$. Собственно, по этой причине представляется необходимым при конструировании адекватной термодинамической модели МГД-турбулентности, введение в рассмотрение подсистемы турбулентного хаоса.

9.3.2. Уравнения баланса энтропии и производство энтропии для подсистемы турбулентного хаоса проводящей среды

Итак, турбулизованное движение электропроводной жидкость будем далее описывать в рамках двухжидкостного континуума, состоящего из двух взаимосвязанных открытых подсистем — подсистемы среднего движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного осреднения уравнений магнитной гидродинамики для мгновенного (актуального) течения среды, и подсистемы турбулентного хаоса (так называемой турбулентной надструктуры), которая связана с пульсационным движением электропроводной среды (см. *Колесниченко, 1998*). Будем при этом считать, что термодинамически элементарный объем $d\boldsymbol{r}$ турбулентного газопылевого хаоса может быть охарактеризован экстенсивными переменными состояния, такими как плотность внутренней энергии $E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и обобщенная энтропия $S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ турбулизации вещества и магнитного поля, а также интенсивными переменными состояния, в качестве которых могут фигурировать обобщенная температура турбулизации $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и давление турбулизации $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (ср. *Blackadar, 1955*). При этом важно иметь в виду, что такие обобщенные термодинамические параметры состояния турбулентного хаоса, как энтропия S_{turb} и энергия E_{turb} турбулизации (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций), вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности теории и не должны иметь, в общем случае, точной физической интерпретации (см. *Жоу и др., 2006*).

Перейдем теперь к следствиям из этого формального подхода. Следуя методу Гиббса, выберем в качестве локальной характеристической функции, содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного газополевого хаоса в стационарном состоянии, фундаментальное уравнение Гиббса для обобщенной энтропии: $S_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t) = S_{\text{turb}}(E_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t), 1/\overline{\rho}(\boldsymbol{r}, t))$. Это функциональное соотношение будем считать заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построении классической локально-равновесной термодинамики, следующие определения сопряженных переменных $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ (считая, что все указанные производные положительны):

$$1/T_{\text{turb}} \equiv \{\partial S_{\text{turb}}/\partial E_{\text{turb}}\}_{1/\overline{\rho}}, \quad p_{\text{turb}}/T_{\text{turb}} \equiv \{\partial S_{\text{turb}}/\partial(1/\overline{\rho})\}_{E_{\text{turb}}}. \tag{9.3.5}$$

В этом случае интенсивным переменным $T_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ и $p_{\text{turb}}(\boldsymbol{r}, t)$ можно приписать смысл соответственно обобщенной температуры и давления (турбулизации). Соответствующая дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объема, принимает вид (ср. *Marov*, *Kolesnichenko*, *2006*)

$$T_{\text{turb}}\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} = \frac{DE_{\text{turb}}}{Dt} - \frac{1}{3}R^K_{ij}\delta_{ij}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\overline{\rho}}\right). \tag{9.3.6}$$

Далее будем отождествлять величину E_{turb} с полной энергией турбулентности электропроводной жидкости

$$\overline{\rho}E_{\text{turb}} \equiv \overline{\rho}b_\Sigma = \overline{\rho|\boldsymbol{u}''|^2/2} + \overline{|\boldsymbol{B}'|^2}/8\pi\mu; \tag{9.3.7}$$

тогда

$$p_{\text{turb}} \equiv \frac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U}) = \frac{2}{3}\overline{\rho}b_\Sigma. \tag{9.3.8}$$

Соответствующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации S_{turb} проводящей среды получим из (9.3.6) указанным выше способом, используя для этого уравнение для удельного объема $(1/\overline{\rho})$ и уравнение (9.2.43) для полной турбулентной энергии b_Σ; в результате будем иметь:

$$\overline{\rho}\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\frac{\boldsymbol{J}_{b_\Sigma}}{T_{\text{turb}}}\right\} = \sigma_{(S_{\text{turb}})} \equiv \sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})} + \sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})}, \tag{9.3.9}$$

где

$$\boldsymbol{J}_{b_\Sigma} = \left\{\overline{\rho(|\boldsymbol{u}''|^2/2 + p'/\rho)\boldsymbol{u}''} - \overline{\left(\Pi' + \frac{\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}'}{4\pi\mu}\right)\cdot\boldsymbol{u}''} - \frac{1}{4\pi\mu}[\overline{(\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{u}'')}\overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{u}''}(\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}})]\right\}, \tag{9.3.10}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})} = \dfrac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{-\boldsymbol{J}_{b_\Sigma}\cdot\dfrac{\partial \ln T_{\text{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}} + \right. \\ \left. + \left(\left[\boldsymbol{R}^K - \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U}\right] : \dfrac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \dfrac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \dfrac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\right\}, \\ \sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})} \equiv \dfrac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma\right\} \equiv -\dfrac{\mathfrak{I}}{T_{\text{turb}}}. \end{cases} \tag{9.3.11}$$

Здесь $\boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} \equiv \{\boldsymbol{J}_{b_\Sigma}/T_{\text{turb}}\}$ — субстанциональный поток энтропии S_{turb} подсистемы турбулентного хаоса; величины $\sigma^{(i)}_{(S_{\text{turb}})}$ и $\sigma^{(e)}_{(S_{\text{turb}})}$ соответственно имеют смысл скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии S_{turb}.

Отметим, что отнесение отдельных членов уравнения (9.3.9) к турбулентному потоку $\boldsymbol{J}_{S_{\mathrm{turb}}}$ или к производству $\sigma_{(S_{\mathrm{turb}})}$ осредненной энтропии до некоторой степени неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения турбулентного поток энтропии S_{turb}, отличные от (9.3.10). Подобного рода соображения подробно изложены в работах (*де Гроот*, *Мазур*, *1964*; *Дьярмати*, *1974*).

9.3.3. Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Таким образом, введение двух энтропий $\langle S\rangle$ и S_{turb} конкретизирует наше представление об исходном турбулизованном электропроводном континууме как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно — подсистемы среднего движения проводящей жидкости и подсистемы турбулентного газопылевого хаоса. Комбинируя (9.3.3) и (9.3.9), найдем уравнение баланса для суммарной энтропии системы $S_{\Sigma} \equiv \langle S\rangle + S_{\mathrm{turb}}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} S_{\Sigma}) + \operatorname{div}\left\{\bar{\rho} S_{\Sigma}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \frac{\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle}}{\langle T\rangle} + \frac{\boldsymbol{J}_{b_{\Sigma}}}{T_{\mathrm{turb}}}\right\} = \sigma_{\Sigma} \geqslant 0, \tag{9.3.12}$$

где

$$\sigma_{\Sigma} \equiv \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(i)}_{(S_{\mathrm{turb}})} + \mathfrak{I}\,\frac{T_{\mathrm{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\mathrm{turb}}\langle T\rangle}$$

— производство суммарной энтропии, связанное с необратимыми процессами внутри турбулизованной плазмы;

$$\mathfrak{I} \equiv \left\{-\overline{p'\operatorname{div}\boldsymbol{u}''} + \left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{turb}}_{(1/\rho)} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \bar{\rho}\varepsilon_{\Sigma}\right\} \tag{9.3.13}$$

— поток энергии перехода между подсистемами осредненного движения и турбулентного хаоса.

Положительная величина σ_{Σ}, записанная с учетом формул (9.3.4), (9.3.5) и (9.3.11), имеет следующую билинейную структуру

$$\begin{aligned}0 \leqslant \sigma_{\Sigma} \equiv \mathfrak{I}\frac{T_{\mathrm{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\mathrm{turb}}\langle T\rangle} + \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{-\left(\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle}\cdot\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\overline{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}}|^2\right\} + \\ + \frac{1}{T_{\mathrm{turb}}}\left\{-\left(\boldsymbol{J}_{b_{\Sigma}}\cdot\frac{\partial \ln T_{\mathrm{turb}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\left[\boldsymbol{R}^K - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U}\right] : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{9.3.14}$$

Из этого выражения видно, что локальное производство σ_{Σ} суммарной энтропии S_{Σ}, связанное с необратимыми процессами внутри турбулизованного проводящего континуума, определяется следующим набором термодинамических потоков

$$\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle}, \quad \boldsymbol{J}_{b_{\Sigma}}, \quad \overline{\boldsymbol{\Pi}}, \quad \left\lfloor \boldsymbol{R}^K - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U}\right\rfloor, \quad \boldsymbol{R}^M, \quad \mathfrak{I} \tag{9.3.15}$$

и сопряженных им термодинамических сил

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{\langle T\rangle}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{T_{\text{turb}}}\right), \quad \frac{1}{\langle T\rangle}\frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \frac{1}{T_{\text{turb}}}\frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \frac{1}{T_{\text{turb}}}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \frac{(T_{\text{turb}}-\langle T\rangle)}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle}. \tag{9.3.16}$$

Согласно основному постулату обобщенной неравновесной термодинамики, в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных функций от сопряженных им макроскопических сил $J_{\gamma i} = \sum_\delta L^{ij}_{\gamma\delta} X_{\delta j}$ (γ, $\delta = 1, 2, \ldots, f$). Это позволяет получить необходимые определяющие соотношения для неопределенных пока осредненных молекулярных и турбулентных потоков, фигурирующих в осредненных МГД уравнениях. Важно при этом отметить, что выражение (9.3.14) позволяет получить определяющие соотношения для трех основных режимов течения электропроводной турбулизованной среды — для осредненного регулярного режима, для режима развитой турбулентности, когда турбулентные потоки переноса значительно эффективнее соответствующих осредненных молекулярных потоков и, наконец, в общем случае, когда процессы осредненного молекулярного и турбулентного переноса сравнимы по результативности (например, около граничной стенки). Как видно из (9.3.14), спектр возможных перекрестных эффектов для турбулентного режима течения электропроводной жидкости значительно расширяется по сравнению с ее регулярным режимом течения. Однако в настоящее время нет, к сожалению, надежных экспериментальных данных, количественно описывающих многие перекрестные эффекты в проводящей турбулизованной среде. Кроме того, известно, что обычно вклад от любых перекрестных эффектов в общую скорость процессов переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов. С учетом этих двух обстоятельств будем далее использовать условие положительности производства суммарной энтропии σ_Σ для каждого слагаемого в отдельности, т. е. полагать, что $\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} \geqslant 0$, $\sigma^{(i)}_{S_{\text{turb}}} \geqslant 0$, $\sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}} \geqslant 0$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрестных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение этого раздела заметим, что первое слагаемое в правой части (9.3.14), описывающее производство энтропии внутри полной системы за счет необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и осредненного движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно

$$\sigma_{\langle S\rangle, S_{\text{turb}}} \equiv \mathfrak{J} \cdot \frac{T_{\text{turb}} - \langle T\rangle}{T_{\text{turb}}\langle T\rangle} \geqslant 0, \tag{9.3.17}$$

и потому «направление» термодинамического потока $\mathfrak{J}$ определяется знаком функции состояния $X_{\mathfrak{J}} \equiv (1/\langle T\rangle - 1/T_{\text{turb}})$. Эту функцию следует рассматривать как сопряженную термодинамическую силу (макроскопическую причину), вызывающую именно этот поток энтропии. Известно, что подобного рода обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием структурированного коллективного поведения, т. е. может быть источником самоорганизации в одной из них (см. *Пригожин, Стенгерс, 1994*). Покажем теперь, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного состояния как раз и определяется притоком отрицательной энтропии ($\sigma^e_{(S_{\text{turb}})} \equiv -\Im/T_{\text{turb}} < 0$) от подсистемы осредненного движения.

9.3.4. Стационарно-неравновесный режим подсистемы турбулентного хаоса Вывод определяющих соотношений

С этой целью проанализируем немаловажный режим развитого турбулентного движения проводящей жидкости — режим стационарно-неравновесной турбулентности, когда в структуре подсистемы турбулентного хаоса устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором $dS_{\text{turb}}/dt \cong 0$, а поток $\boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} \equiv \boldsymbol{J}_{b_\Sigma}/T_{\text{turb}}$ энтропии турбулизации постоянен, $\boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} \cong \text{const}$ (см. *Пригожин, Кондепуди, 2002*). Это условие означает, что производство $\sigma^i_{(S_{\text{turb}})}$ энтропии турбулизации S_{turb} в такой степени компенсируется ее оттоком $\sigma^e_{(S_{\text{turb}})}$, что суммарное возникновение энтропии S_{turb} почти отсутствует, $\sigma_{(S_{\text{turb}})} \equiv \sigma^e_{(S_{\text{turb}})} + \sigma^i_{(S_{\text{turb}})} \cong 0$. Так как $\sigma^i_{(S_{\text{turb}})} \geqslant 0$, то справедливо выражение $0 > \sigma^e_{(S_{\text{turb}})} \cong -\sigma^i_{(S_{\text{turb}})}$. Таким образом, подсистема турбулентного хаоса при этом режиме турбулентности должна экспортировать энтропию во «внешнюю среду» (т. е. отдавать количество $\sigma^e_{(S_{\text{turb}})}$) подсистеме осредненного движения) с тем, чтобы скомпенсировать ее производство (количество $\sigma^i_{(S_{\text{turb}})}$) за счет внутренних необратимых процессов. Другими словами, для поддержания подобного рода квазистационарного состояния внутри подсистемы турбулентного хаоса необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от «внешней среды'» (т. е. подсистемы осредненного движения), $\sigma^e_{(S_{\text{turb}})} \equiv -\Im/T_{\text{turb}} = -\langle T\rangle\sigma^e_{\langle S\rangle}/T_{\text{turb}} < 0$. Именно эта, поступающая в подсистему турбулентного хаоса, негэнтропия расходуется на поддержание и совершенствование ее внутренней структуры. Но тогда справедливо соотношение $0 \leqslant \sigma^e_{\langle S\rangle} = -T_{\text{turb}}\sigma^e_{(S_{\text{turb}})}/\langle T\rangle \cong T_{\text{turb}}\sigma^i_{(S_{\text{turb}})}/\langle T\rangle$, и уравнение (9.3.2) баланса осредненной энтропии системы $\langle S\rangle$ принимает вид

$$\bar{\rho}\frac{D\langle S\rangle}{Dt} + \operatorname{div}\left\{\frac{\boldsymbol{J}_{\langle E\rangle}}{\langle T\rangle}\right\} = \sigma_{\langle S\rangle} = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(e)}_{\langle S\rangle} = \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \frac{T_{\text{turb}}}{\langle T\rangle}\sigma^i_{(S_{\text{turb}})}, \tag{9.3.18}$$

где для локального рассеяния энергии $\langle T\rangle\sigma_{\langle S\rangle}$ справедливо выражение

$$0 \leqslant \langle T\rangle\sigma_{\langle S\rangle} \equiv -\left(\tilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} \cdot \frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}|\text{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}|^2 + \\ + \left(\left[\boldsymbol{R}^K - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U}\right] : \frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right). \tag{9.3.19}$$

Поскольку в стационарно-неравновесном состоянии величина оттока энтропии из подсистемы осредненного движения *положительна* $0 \leqslant \sigma^e_{\langle S\rangle} = \Im/\langle T\rangle$, то скорость $\Im$ обмена энтропией (теплом) между осредненным и турбулентным движениями также положительна, $\Im \geqslant 0$. Но тогда из неравенства (9.3.17) следует, что температура турбулизации T_{turb} выше осредненной температуры турбулизованного континуума ($T_{\text{turb}} > \langle T \rangle$), что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, образование упорядоченных структур (в нашем случае разномасштабных вихревых образований в подсистеме турбулентного хаоса) при отводе тепла из системы, т. е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи.

Формула (9.3.19) содержит потоки и термодинамические силы нулевой, первой и второй тензорных размерностей. Если разбить градиент осредненной скорости $\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r}$ (тензор второго ранга) в выражении (9.3.19) на симметрическую и антисимметрическую части

$$\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r} = (\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})^s + (\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})^a = (\overset{0}{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r}})^s + \frac{1}{3}\boldsymbol{U}\,\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle + \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\langle \boldsymbol{u}\rangle, \qquad (9.3.20)$$

где

$$D_{jk} \equiv (\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})^s_{jk} = \frac{1}{2}(\partial\langle u_k\rangle/\partial x_j + \partial\langle u_j\rangle/\partial x_k),$$

$$(\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})^a_{jk} = \frac{1}{2}(\partial\langle u_k\rangle/\partial x_j - \partial\langle u_j\rangle/\partial x_k)$$

— соответственно симметрическая (тензор скорости деформации) и антисимметрическая (кососимметричный градиентный тензор скорости) части тензора скорости сдвига для осредненного движения $\overset{0}{\boldsymbol{D}} \equiv (\overset{0}{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r}})^s = \boldsymbol{D} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle$, то скалярное произведение полного тензора турбулентных напряжений электропроводной среды $\boldsymbol{R}^K \equiv \boldsymbol{R} + \boldsymbol{T}^{\text{turb}}$ и градиента осредненной скорости может быть записано в виде

$$\left(\left[\boldsymbol{R}^K - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R}^K : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U}\right] : \frac{\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = \left(\overset{0}{\boldsymbol{R}^K} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right). \qquad (9.3.21)$$

Здесь $\overset{0}{\boldsymbol{R}^K} \equiv \overset{0}{\boldsymbol{R}} + \overset{0}{\boldsymbol{T}^M_{\text{turb}}}$; симметричные тензоры турбулентных напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{R}$ и магнитных натяжений $\boldsymbol{T}^M_{\text{turb}}$ для пульсационной составляющей магнитного поля представлены в виде

$$\overset{0}{\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{R} : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R} + \frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b\rangle \boldsymbol{U}, \qquad (9.3.22)$$

$$\overset{0}{\boldsymbol{T}^M_{\text{turb}}} \equiv \boldsymbol{T}^M_{\text{turb}} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{T}^M_{\text{turb}} : \boldsymbol{U})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}^M_{\text{turb}} - \frac{2}{3}\overline{\rho}\langle b_M\rangle \boldsymbol{U}. \qquad (9.3.23)$$

При написании формулы (9.3.21) использовано то обстоятельство, что скалярное произведение симметрического и антисимметрического тензоров всегда равно нулю. Аналогично, двойное произведение $(\boldsymbol{R}^M : \partial\overline{\boldsymbol{B}}/\partial \boldsymbol{r})$ можно представить в виде

$$\frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\boldsymbol{R}^M : \left\{\left(\frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^s + \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}\right\}\right) = -\mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}}, \qquad (9.3.24)$$

если использовать соотношение (9.2.6*).

Следовательно, в линейном приближении и при использовании принципа Кюри—Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна (*де Гроот*, *Мазур*, *1974*)), можно записать следующие обобщенные реологические соотношения для турбулентных потоков и сопряженных им термодинамических сил для проводящей среды:

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}} \equiv (\boldsymbol{q}^{\text{turb}} - \overline{p'\boldsymbol{u}''}) = -\lambda^{\text{turb}} \partial\langle T\rangle/\partial \boldsymbol{r}, \\ \boldsymbol{R}^K = -\frac{2}{3}\bar{\rho}(\langle b\rangle - \langle b_M\rangle)\boldsymbol{U} + 2\bar{\rho}\nu_K^{\text{turb}}(\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial \boldsymbol{r})^{\overset{0}{s}} - 2\nu_{K,M}^{\text{turb}}(\partial\overline{\boldsymbol{B}}/\partial\boldsymbol{r})^s, \\ \boldsymbol{R}^M = -2\nu_{M,K}^{\text{turb}}(\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r})^a + 2\nu_M^{\text{turb}}(\partial\overline{\boldsymbol{B}}/\partial\boldsymbol{r})^a, \end{cases} \tag{9.3.25}$$

или в координатном виде

$$\begin{cases} J_{\langle E\rangle k} = -\lambda^{\text{turb}}\partial\langle T\rangle/\partial x_k, \\ R_{jk}^K = -\frac{2}{3}\bar{\rho}\Gamma\delta_{jk} + \bar{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left\{\left(\dfrac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\delta_{jk}\,\text{div}\langle \boldsymbol{u}\rangle\right\} - \nu_{K,M}^{\text{turb}}\left(\dfrac{\partial\overline{B}_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\overline{B}_k}{\partial x_j}\right), \\ R_{jk}^M = -\nu_{M,K}^{\text{turb}}\left(\dfrac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k} - \dfrac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}\right) + \nu_M^{\text{turb}}\left(\dfrac{\partial\overline{B}_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\overline{B}_k}{\partial x_j}\right), \end{cases} \tag{9.3.26}$$

где $\Gamma \equiv \langle b\rangle - \langle b_M\rangle$; λ^{turb}, ν_K^{turb}, ν_M^{turb} — соответственно коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля. Заметим, что в общем случае неоднородной турбулентности эти коэффициенты должны быть анизотропными (т. е. являться тензорами 2-го или 4-го рангов (*Моффат*, *1980*; *Yoshizawa*, *1990*; *Biskamp*, *2003*)) — сильное магнитное поле обусловливает анизотропию турбулентности, поскольку движение вдоль магнитного поля является более предпочтительным (см., например, *Брановер*, *Цинобер*, *1970*). В случае развитой турбулентности эти эмпирические коэффициенты турбулентного переноса зависят от следующих параметров электропроводной среды: $\bar{\rho}$, $\partial\langle \boldsymbol{u}\rangle/\partial\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{B}/4\pi\mu$, L, причем параметр L — это не действительный масштаб турбулентности в потоке с магнитным полем, а просто некоторая геометрическая характеристика расположения точки, равная обычной «длине пути смешения» (см. *Иевлев*, *1975*). Важно иметь в виду, что определяющие соотношения (9.3.25)—(9.3.27) отвечают режиму стационарно-неравновесного состояния турбулентного поля. Вместе с тем, в общем случае сильно развитой турбулентности первое соотношение (9.3.25), описывающее процессы турбулентного теплообмена, приобретает несколько иной вид

$$\boldsymbol{q}^{\text{turb}} = \overline{p'\boldsymbol{u}''} - \lambda^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{1}{\bar{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right),$$

который может быть получен для этого случая из билинейной функции (3.2.71) [см. вывод формулы (3.2.76)]. В дальнейшем нам понадобятся компоненты кинетического тензора Рейнольдса (9.2.18), записанные в цилиндрической системе координат

$$R^K_{rr} \equiv -\overline{\rho}\langle|u_r''|^2\rangle + \frac{\overline{|B_r'|^2}}{4\pi\mu} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\Gamma + 2\overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_r\rangle}{\partial r} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right),$$

$$R^K_{\varphi\varphi} \equiv -\overline{\rho}\langle|u_\varphi''|^2\rangle + \frac{\overline{|B_\varphi'|^2}}{4\pi\mu} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\Gamma + 2\overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\langle u_\varphi\rangle}{\partial\varphi} + \frac{\langle u_r\rangle}{r} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right),$$

$$R^K_{zz} \equiv -\overline{\rho}\langle|u_z''|^2\rangle + \frac{\overline{|B_z'|^2}}{4\pi\mu} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\Gamma + 2\overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial z} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{u}\rangle\right),$$

$$R^K_{r\varphi} \equiv -\overline{\rho}\langle u_r'' u_\varphi''\rangle + \frac{\overline{B_r'B_\varphi'}}{4\pi\mu} = R^K_{\varphi r} = \overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\langle u_r\rangle}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\langle u_\varphi\rangle}{r}\right)\right),$$

$$R^K_{\varphi z} \equiv -\overline{\rho}\langle u_\varphi'' u_z''\rangle + \frac{\overline{B_\varphi'B_z'}}{4\pi\mu} = R^K_{z\varphi} = \overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_\varphi\rangle}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial\varphi}\right),$$

$$R^K_{zr} \equiv -\overline{\rho}\langle u_z'' u_r''\rangle + \frac{\overline{B_z'B_r'}}{4\pi\mu} = R^K_{rz} = \overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\frac{\partial\langle u_z\rangle}{\partial r} + \frac{\partial\langle u_r\rangle}{\partial z}\right). \tag{9.3.27}$$

Из соотношений (9.2.6*) и (9.3.25) вытекает следующее выражение для турбулентной электродвижущей силы для изотропной среды

$$c\mathscr{G} = -\nu_M^{\text{turb}}\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} + \nu_{M,K}^{\text{turb}}\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{u}\rangle. \tag{9.3.28}$$

Здесь коэффициенты ν_M^{turb} и $\nu_{M,K}^{\text{turb}}$, определяемые полем скорости $\boldsymbol{u}''$, являются по предположению постоянными. Поскольку вектор $\overline{\boldsymbol{B}}$ является псевдовектором (т. е. он изменяет знак при инверсии пространственных координат), а вектор $\mathscr{G}$ представляет собой истинный (полярный) вектор и должен быть образован из различных истинных векторов, то коэффициент ν_M^{turb} должен является скаляром, в то время как коэффициенты $\nu_{M,K}^{\text{turb}}$ и $\nu_{K,M}^{\text{turb}}$ являются псевдоскалярами. Будем иметь в виду, что члены с коэффициентами $\nu_{M,K}^{\text{turb}}$ и $\nu_{K,M}^{\text{turb}} \cong \frac{7}{5}\nu_{M,K}^{\text{turb}}$ (*Yoshzawa, 1990*), описывающие перекрестные эффекты, часто могут быть опущены.

Уравнение (9.3.28) принимает вид $c\mathscr{G} = -\nu_M^{\text{turb}}\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} = -\nu_M^{\text{turb}}(4\pi\mu/c)\overline{\boldsymbol{j}}$, где $\overline{\boldsymbol{j}}$ — средний ток. Подстановка этого выражения в (9.2.10*) приводит к следующему уравнению индукции для средних полей

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{B}}}{\overline{\rho}}\right) = \left(\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\langle\boldsymbol{u}\rangle + (\nu_M + \nu_M^{\text{turb}})\nabla^2\overline{\boldsymbol{B}}.$$

Отсюда следует, что суммарное влияние э. д. с. $\mathscr{G}$ в уравнении (9.2.10*) сводится, очевидно, просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т. е. ν_M переходит в $(\nu_M + \nu_M^{\text{turb}})$. В случае когда коэффициент ν_M^{turb} положителен, следует ожидать, что случайное перемешивание (создаваемое $\boldsymbol{u}''$-полем) должно не ослаблять, а усиливать процесс молекулярной диффузии.

Покажем теперь, что в рамках развитого здесь подхода коэффициент турбулентной диффузии ν_M^{turb} должен быть всегда положительным. Сразу же отметим, что данное утверждение находится в противоречии с известной точкой зрения Г. Моффата, предполагающего, что коэффициент ν_M^{turb} при некоторых экстремальных условиях может стать отрицательным (см. *Моффат, 1980*). Итак, подставляя соотношения (9.3.26) и (9.3.27) в (9.3.19), получим выражение для производства энтропии в виде

$$0 \leqslant \langle T\rangle\sigma'_{\langle S\rangle} \equiv \left(\overset{0}{\boldsymbol{R}}{}^{K} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) - \mathscr{G}\cdot\bar{\boldsymbol{j}} = 2\bar{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}} + \nu_M^{\text{turb}}(4\pi\mu/c^2)|\bar{\boldsymbol{j}}|^2. \qquad (9.3.19^*)$$

Здесь первый член представляет собой увеличение энтропии благодаря кинематической турбулентной вязкости, а второй — увеличение энтропии $\langle S\rangle$, обусловленное магнитной вязкостью. Второй закон термодинамики требует положительности всей суммы (9.3.19*) в целом. С другой стороны, второе слагаемое этой суммы может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю первого члена (симметричный тензор $\overset{0}{\boldsymbol{D}}$, служащий мерой относительного движения между различными элементами жидкости, обращается в нуль, например, когда вещество локально покоится ($\langle\boldsymbol{u}\rangle = 0$) или когда оно вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ ($\langle\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$)). Поэтому каждое из этих слагаемых должно быть всегда положительно. Отсюда следует, в частности, что магнитный коэффициент турбулентной вязкости (диффузии) ν_M^{turb} должен неизбежно и при всех условиях быть положительным, а это означает, что случайное перемешивание (создаваемое $\boldsymbol{u}''$ — полем) всегда усиливает процесс магнитной молекулярной диффузии. Приведенные соображения являются термодинамическим обоснованием невозможности появления эффекта отрицательной магнитной вязкости в изотропных зеркально-симметричных турбулентных течениях электропроводной жидкости.

Формула (9.3.28) получена нами для изотропной (в гидродинамическом смысле) турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей $\boldsymbol{u}''$ обладает зеркальной симметрией, при которой полученные из него любые средние величины, инвариантны при отражении поля в произвольной плоскости. Может, однако, случиться, что в турбулентном движении левовращательные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. В этом случае отсутствует зеркальная симметрия поля $\boldsymbol{u}''$ и турбулентность имеет спиральность [см. гл. 8]. Обобщенная на этот случай формула (9.3.28) принимает следующий вид (см., например, *Steenbeck и др., 1966*)

$$c\mathscr{G} = \alpha\overline{\boldsymbol{B}} - \nu_M^{\text{turb}}\,\mathrm{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}} + \nu_{M,K}^{\text{turb}}\,\mathrm{rot}\langle\boldsymbol{u}\rangle, \qquad (9.3.29)$$

где безразмерный коэффициент α является псевдоскаляром. Покажем, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей $\boldsymbol{u}''$ коэффициент α должен быть равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из нее зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина α не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому $\alpha = 0$.

Таким образом отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной (отражательно-несимметричной турбулентности, может вызывать только турбулентную диффузию магнитного поля.

Возвращаясь теперь к максвелловским уравнениям для средних полей (9.2.5) и закону Ома (9.2.6) и подставляя в них выражение (9.2.16), получим окончательное выражение для осредненного тока

$$\bar{\boldsymbol{j}} = \sigma_e^{\text{turb}}(\boldsymbol{E}^* + \alpha c^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}). \tag{9.3.30}$$

Здесь турбулентная проводимость σ_e^{turb} определяется формулой

$$\sigma_e^{\text{turb}} = \frac{\sigma_e}{1 + 4\pi\mu\nu_M^{\text{turb}}\sigma_e/c^2} = \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M + \nu_M^{\text{turb}}}, \tag{9.3.31}$$

из которой видно, что турбулентная проводимость σ_e^{turb} меньше молекулярной проводимости σ_e.

В заключение этого параграфа перечислим базисные (опорные) дифференциальные уравнения и конечные соотношения, характеризующие относительно простую модель турбулизованного многокомпонентного континуума. Это, прежде всего, гидродинамические уравнения для среднего движения (3.1.21), (3.1.23), (3.1.28), (3.1.58), осредненное уравнение состояния для давления в форме (3.1.71), соотношение (3.2.67), определяющее турбулентный поток удельного объема смеси $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}}$, а также реологические соотношения (3.2.55), (3.2.56) и (3.2.45) для турбулентных потоков диффузии $\boldsymbol{J}_\alpha^\Sigma$, тепла $\boldsymbol{q}^\Sigma$ и тензора рейнольдсовых напряжений $\boldsymbol{R}$.

9.3.5. Вывод поправочной функции к коэффициенту турбулентной вязкости для проводящей среды с переменной плотностью

Рассмотрим теперь полуэмпирический метод определения коэффициентов турбулентного переноса в электропроводной среде, находящейся под воздействием магнитного поля. Известно, что при изотропной турбулентности оба коэффициента ν_K^{turb} и ν_M^{turb} близки к произведению $w_{\text{turb}}l_{\text{cor}}$ скорости турбулентных вихрей $w_{\text{turb}} \cong \sqrt{|\boldsymbol{u}''|^2}$ и их корреляционной длины l_{cor}, а коэффициент α по порядку величины $\alpha \cong -\frac{1}{3}\overline{\boldsymbol{u}'' \cdot \text{rot}\, \boldsymbol{u}''}\tau_{\text{cor}} = -\frac{1}{3}h\tau_{\text{cor}}$, где h — гидродинамическая спиральность (псевдоскаляр), τ_{cor} — масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей $\boldsymbol{u}''$ во времени (см., например, *Краузе, Рэдлер, 1984*). В частности, если принять, согласно стандартной гипотезы Шакуры и Сюняева (*1973*), что l_{cor} — полутолщина аккреционного диска, а w_{turb} выражается через скорость звука, то турбулентная диффузия приводит к характерному времени затухания магнитного поля (вернее, тех его компонент, которые заметно меняются на масштабе толщины диска) порядка периода кеплеровского вращения. При этом «эффективное» магнитное число Рейнольдса $\text{Re}_M \propto 1$ и важен турбулентный перенос.

С другой стороны, обобщая известную формулу Колмогорова для непроводящей жидкости на случай МГД-турбулентности, можно с точностью, вполне достаточной для практических приложений, предполагать, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости ν_K^{turb} может быть вычислен по формуле $\nu_K^{\text{turb}} = L\sqrt{b_\Sigma}$, где L — путь перемешивания по Прандтлю (здесь числовой множитель включен в значение L). Однако в этой формуле явно не учитывается влияние магнитного поля на турбулентное течение проводящей жидкости через посредство пути смешения, что для многих практически важных случаев развитой МГД-турбулентности (например, для возмущений больших масштабов) становится неприемлемым. Поэтому в приведенное соотношение для ν_K^{turb} необходимо в общем случае вводить поправку, учитывающую влияние на величину пути смешения как магнитного поля, так и обратных эффектов переноса тепла на развитие турбулентности.

Далее основным источником турбулентности будем считать сдвиг гидродинамической скорости плазмы. Предполагая стационарно-неравновесный режим турбулентности в электропроводной среде, для определения указанного поправочного множителя к коэффициенту турбулентной вязкости воспользуемся уравнением баланса (9.3.9) энтропии турбулизации S_{turb}. При этом полную диссипацию турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло ε_Σ при развитом режиме будем считать (на основании соображений теории подобия при числе Рейнольдса $\text{Re} \to \infty$) прямо пропорциональной кубу пульсационной скорости w_{turb} и обратно пропорциональной характерной длине L — масштабу пути перемешивания (см., например, *Ландау, Лифшиц, 1982*). В случае стационарно-неравновесного режима подсистемы турбулентного хаоса уравнение (9.3.9) приобретает вид

$$\overline{\rho}\frac{DS_{\text{turb}}}{Dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}} = \frac{1}{T_{\text{turb}}}\left\{\left(\overset{0}{\boldsymbol{R}}{}^K : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) - \mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}} - \left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) - \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma\right\} \cong 0. \tag{9.3.32}$$

При написании этого уравнения, мы, как это часто делается, пренебрегли слагаемым $\overline{p' \operatorname{div} \boldsymbol{u}''}$, описывающим эффект возникновения пульсационной энтропии S_{turb} под действием сил давления. Иначе можно считать, что это слагаемое включено в левую часть уравнения (9.3.32) — при этом лишь придется изменить определение субстанционального потока $\boldsymbol{J}_{S_{\text{turb}}}$ энтропии S_{turb}. Правую часть этого уравнения можно представить следующим образом

$$2\overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) - \frac{\nu_M^{\text{turb}}}{4\pi\mu}\left(\frac{ca}{\nu_M^{\text{turb}}}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} - \operatorname{rot}^2\overline{\boldsymbol{B}}\right) + \frac{\lambda^{\text{turb}}}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\boldsymbol{g}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right) - \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma \cong 0, \tag{9.3.33}$$

если воспользоваться следующими выражениями для ее отдельных членов:

$$\left(\overset{0}{\boldsymbol{R}}{}^K : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) = 2\overline{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right), \tag{9.3.34}$$

$$-\mathscr{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}} = \frac{\nu_M^{\text{turb}}}{4\pi\mu}\left(l_{\text{cor}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{B}} + \operatorname{rot}^2\overline{\boldsymbol{B}}\right), \tag{9.3.35}$$

$$\left(\boldsymbol{J}^{\text{turb}}_{(1/\rho)}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right) \cong -\frac{\lambda^{\text{turb}}}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\boldsymbol{g}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right), \tag{9.3.36}$$

где $l_{\text{cor}} \equiv -(\nu_M^{\text{turb}}/\alpha)$ — масштаб корреляции, характеризующий изменение поля турбулентных скоростей $\boldsymbol{u}''$ в пространстве. Здесь мы воспользовались формулами (9.3.26) и (9.3.29) для потоков $\boldsymbol{R}^K$ и $\mathcal{G}$, а также выражением

$$\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}} = -\overline{p'\boldsymbol{u}''}/\overline{p} + \tilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}}/\overline{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle \cong \tilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}}/\overline{\rho}\langle c_p\rangle\langle T\rangle \tag{9.3.37}$$

для турбулентного потока удельного объема $\boldsymbol{J}_{(1/\rho)}^{\text{turb}}$ [см. (3.2.67) и (3.2.11)] и приближенным соотношением $\partial\overline{p}/\partial\boldsymbol{r} \cong \overline{\rho}\boldsymbol{g} - \partial(p_{av}^M + p_{\text{turb}}^M)/\partial\boldsymbol{r} \cong \overline{\rho}\boldsymbol{g}$ для градиента давления вещества (условие механического квазиравновесия плазмы).

Используя обозначение w_{turb} для характерной пульсационной скорости проводящей среды, и L для пути перемешивания по Прандтлю в случае отсутствия поля, напишем

$$\nu_K^{\text{turb}} = Lw_{\text{turb}}, \quad \nu_M^{\text{turb}} = \frac{Lw_{\text{turb}}}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}}, \quad \frac{\lambda^{\text{turb}}}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle} = \frac{Lw_{\text{turb}}}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}}, \quad \varepsilon_\Sigma = \frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{\text{turb}}^3}{L}. \tag{9.3.38}$$

При этом эмпирическую константу α_{ss}, а также турбулентные числа Прандтля—Шмидта (кинетическое $\text{Pr}_K^{\text{turb}} = \overline{\rho}\langle c_p\rangle\nu_K^{\text{turb}}/\lambda^{\text{turb}}$ и магнитное $\text{Pr}_M^{\text{turb}} = \nu_K^{\text{turb}}/\nu_M^{\text{turb}}$) будем в первом приближении считать постоянными, считая, что $\nu_M^{\text{turb}} > 0$ и $\text{Pr}_M^{\text{turb}} \cong \text{Pr}_K^{\text{turb}}$. Подставляя эти выражения в формулу (9.3.33), получаем для стационарного режима:

$$w_{\text{turb}}\left\{2L\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}}:\overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) + \frac{L}{\text{Pr}_M^{\text{turb}}}\frac{(l_{\text{cor}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\text{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}} + \text{rot}^2\,\overline{\boldsymbol{B}})}{4\pi\mu\overline{\rho}} + \right.$$
$$\left. + \frac{L}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}}\frac{\boldsymbol{g}}{\langle T\rangle}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right) - \frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{\text{turb}}^2}{L}\right\} \cong 0. \tag{9.3.39}$$

Уравнение (9.3.39) распадается на два уравнения: уравнение $w_{\text{turb}} = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{\text{turb}}^2 = \alpha_{ss}^2L^2\left\{2\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}}:\overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) + \frac{(l_{\text{cor}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\text{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}} + \text{rot}^2\,\overline{\boldsymbol{B}})}{4\pi\mu\overline{\rho}\,\text{Pr}_M^{\text{turb}}} + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}}\frac{\boldsymbol{g}}{\langle T\rangle}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right)\right\}, \tag{9.3.40}$$

описывающее установившийся турбулентный режим. Уравнение (9.3.40) имеет вещественное решение в том случае, когда

$$2\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}}:\overset{0}{\boldsymbol{D}}\right) + \frac{1}{\text{Pr}_K^{\text{turb}}}\left\{\frac{(l_{\text{cor}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\text{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}} + \text{rot}^2\,\overline{\boldsymbol{B}})}{4\pi\mu\overline{\rho}} + \frac{\boldsymbol{g}}{\langle T\rangle}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right)\right\} \geqslant 0,$$

откуда получаем

$$\text{Ri}_\Sigma \equiv \text{Ri}_K - \text{Ri}_M \leqslant (\text{Ri}_\Sigma)_{\text{cr}} = \text{Pr}_K^{\text{turb}}, \tag{9.3.41}$$

где введены обозначения

$$\text{Ri}_K \equiv \frac{\frac{1}{\langle T\rangle}\left(\tilde{\boldsymbol{q}}^{\text{turb}}\cdot\frac{\partial\overline{p}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)}{\lambda^{\text{turb}}2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = -\frac{\frac{\boldsymbol{g}}{\langle T\rangle}\cdot\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial\boldsymbol{r}} - \frac{\boldsymbol{g}}{\langle c_p\rangle}\right)}{2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})}, \tag{9.3.42}$$

$$\text{Ri}_M \equiv -\frac{1}{\overline{\rho}\nu_M^{\text{turb}}}\frac{\mathcal{G}\cdot\overline{\boldsymbol{j}}}{2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})} = \frac{1}{4\pi\mu\overline{\rho}}\frac{\text{rot}^2\,\overline{\boldsymbol{B}} + l_{\text{cor}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\cdot\text{rot}\,\overline{\boldsymbol{B}}}{2(\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}})}. \tag{9.3.43}$$

Здесь Ri_K и Ri_M — соответственно градиентные гидродинамическое число Ричардсона (безразмерная величина, определяющее относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии в проводящей среде по сравнению с передачей энергии от осредненного движения) и магнитогидродинамическое число Ричардсона (учитывающее влияние магнитного поля, в частности турбулентной электродвижущей силы на возникновение турбулентности в потоке). Легко видеть, что число Ri_M пропорционально числу Альфвена $\mathrm{Al} \equiv \mathrm{N}/\mathrm{Re}_M \equiv B_0^2/4\pi\mu\rho V_0^2$ и характеризует отношение магнитной энергии к кинетической энергии плазмы.

Если $\mathrm{Ri}_\Sigma = \mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}}$, то имеется единственное вещественное решение $w_{\mathrm{turb}} = 0$, соответствующее ламинарному режиму. Пусть имеет место турбулентный режим и, следовательно $\mathrm{Ri}_\Sigma < (\mathrm{Ri}_\Sigma)_{\mathrm{cr}}$, тогда для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$\nu_K^{\mathrm{turb}} = \alpha_{ss} L^2 \sqrt{2\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right)} \sqrt{1 - \mathrm{Ri}_\Sigma / \mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}}} = \alpha_{ss} L^{*2} \sqrt{2\left(\overset{0}{\boldsymbol{D}} : \overset{0}{\boldsymbol{D}}\right)}. \tag{9.3.44}$$

Таким образом, рассмотрев балансовое уравнение для энтропии хаоса, мы установили вид безразмерной функции

$$\varphi(\mathrm{Ri}_\Sigma/(\mathrm{Ri}_\Sigma)_{\mathrm{cr}}) = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{Ri}_K - \mathrm{Ri}_M}{\mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}}}}, \qquad L^* \equiv L(1 - \mathrm{Ri}_\Sigma / \mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}})^{1/4}, \tag{9.3.45}$$

учитывающей влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство пути смешения. Одновременно получилась приближенная оценка для критического числа Ричардсона $(\mathrm{Ri}_\Sigma)_{\mathrm{cr}} = \mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}} = \bar{\rho}\langle c_p \rangle \nu_K^{\mathrm{turb}}/\lambda^{\mathrm{turb}}$. Здесь L^* — путь смешения при течении в магнитном поле.

Для вычисления пути смешения при отсутствии поля L можно воспользоваться формулой Прандтля—Никурадзе с поправкой, предложенной Ван-Драйстом (*Van Driest*, *1956*), учитывающей более быстрое затухание турбулентности вблизи твердой стенки $L = L_{00}\{1 - \exp(-zV^*/A\nu)\}$, где A — численная константа, V^* — динамическая скорость на стенке; L_{00} — путь смешения в отсутствии магнитного поля, вычисленный по Прандтлю—Никурадзе (см., например, *Лапин*, *1982*), который, например, для диска имеет вид

$$L_{00}/h_{\mathrm{disk}} = 0{,}14 - 0{,}08(1 - z/h_{\mathrm{disk}})^2 - 0{,}06(1 - z/h_{\mathrm{disk}})^4. \tag{9.3.46}$$

В заключение заметим, что влияние магнитного поля на течение электропроводных сред существенно зависит от относительной ориентации магнитного поля и средней скорости потока. Магнитное поле может создаваться не только токами в плазме, но и внешними (по отношению к рассматриваемой движущейся среде) источниками. Поэтому во многих случаях удобно представлять напряженность магнитного поля в виде суммы двух величин — напряженности внешнего магнитного поля и напряженности поля, инициируемого токами в плазме.

§ 9.4. Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в тонком аккреционном диске

Разработанная выше термодинамическая модель среды, отвечающая МГД-турбулентности в присутствии магнитного поля, может быть применена, в частности, к численному исследованию структуры и эволюции протопланетных аккреционных дисков, возникающих вокруг только что сформировавшихся звезд (протозвезд и звезд типа Т Тельца) или звезд в двойных звездных системах с переносом массы (системы типа карликовые новые). Подобные астрофизические диски образованы вращающимся вокруг компактной звезды веществом, которое удерживается на приблизительно круговой орбите совместным действием гравитационных и центробежных сил. Независимо от того, как возник протопланетный аккреционный диск, его вещество на ранней стадии эволюции имеет достаточный для вращения по круговым орбитам момент количества движения. Вместе с тем, при вращении примерно в круговом режиме каждый элемент газа в диске совершает медленное движение по очень спиральной траектории к звезде (аккрецируя на нее) по мере того, как его момент количества движения, благодаря силам вязкого трения, передается из внутренних областей диска во внешние.

Как уже отмечалось (см. гл. 1), существующее распределение массы и углового момента в Солнечной системе (а также в многочисленных системах молодых звезд с дисками) возможно только при наличии эффективного механизма перераспределения углового момента и массы на стадии формирования системы, когда Солнце находилось в фазе Т Тельца и было окружено аккреционным диском. Классическое представление об аккреционных дисках основывается на существовании вязкого механизма переноса момента наружу, где он распределяется в пространстве или же (как в случае двойной системы) возвращается к своему первоначальному источнику — звезде-спутнику благодаря приливному взаимодействию. Причем необходимый радиальный перенос массы и сопутствующий ему перенос углового момента для звезд типа Т Тельца могут быть обеспечены только при очень высокой кинематической вязкости газа в диске, которая на много порядков превышает молекулярную вязкость.

Ранее также подчеркивалось, что одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно механизма возникновения такой большой вязкости в солнечном протопланетном диске является представление о его турбулентной природе (см., например, *Zel'dovich*, *1981*; *Фридман*, *1989*; *Dubrulle*, *1993*; *Balbus*, *Hawley*, *1998*; *Richard*, *Zahn*, *1999*; *Bisnovatyi-Kogan*, *Lovelace*, *2001*), когда основным механизмом турбулизации диска является крупномасштабный сдвиг скорости вещества, связанный с его дифференциальным вращением вокруг центра притяжения (см., например, *Горькавый*, *Фридман*, *1994*). Наряду с этим, существенным механизмом перераспределения момента количества движения в диске является МГД турбулентность (*Eardley*, *Lightman*, *1975*; *Galeev et al.*, *1979*; *Coroniti*, *1981*; *Tout*, *Pringle*, *1992*; *Brandenburg et al.*, *1996*; *Lesch*, *1996*), эффективность которой как механизма диссипации зависит от процесса магнитного пересоединения, т. е. перезамыкания магнитных силовых линий (см. *Кадомцев*, *1987*).

Вполне вероятно, что в диске на раннем этапе его существования присутствовали хаотические магнитные поля, возникшие под воздействием механизма турбулентного динамо или просто привнесенные в диск вместе с аккрецируемой межзвездной плазмой. Эти поля (энергия которых могла быть сопоставима с энергией гидродинамической турбулентности), перемешиваемые благодаря дифференциальному вращению диска и испытывающие перезамыкания на его границе, могли вносить значительный вклад в турбулентную вязкость как во внутренней области диска, так и во внешних слоях его короны, где достигалась достаточная степень ионизации вещества. Напомним, что процесс перезамыкания силовых линий магнитного поля (представляющий собой фундаментальный физический процесс в космической плазме, ответственный за многие проявления ее активности) возможен лишь при сложном движении электропроводного вещества, когда магнитные силовые линии с различными направлениями могут тесно сближаться друг с другом. При этом вблизи точки сближения силовых линий с различными направлениями магнитного поля достигается достаточно высокая плотность электрического тока. Перед началом перезамыкания в такой плазме имеется определенный запас магнитной энергии, затем в ней начинает развиваться так называемая разрывная (тиринг) неустойчивость, которая, в конечном счете, и приводит к перезамыканию силовых линий и переходу избыточной энергии магнитного поля в кинетическую или тепловую энергию плазмы.

Наряду с хаотическим магнитным полем в аккреционном диске, по крайней мере, в некоторых его частях возможно присутствие и крупномасштабного сильно упорядоченного магнитного поля, которое, благодаря турбулентному переносу, простирается, по меньшей мере, вплоть до внутреннего края диска. Это поле проникает и в некоторую область по обе стороны от поверхности диска. В этом случае на эту внешнюю область действуют магнитные напряжения, которые порождаются как мелкомасштабными возмущениями, связанными с турбулентностью в диске, так и с крупномасштабным сдвиговым течением. В результате возникают не только эффективная турбулентная вязкость и турбулентная магнитная диффузия, но и все эффекты, связанные с электродинамикой средних полей. В частности, поскольку во вращающейся электропроводной среде эффективную магнитную диффузию неизбежно сопровождает возникновение турбулентной электродвижущей силы $\alpha \boldsymbol{B}$ (так называемый α-эффект, связанный в конечном счете с влиянием спиральности на генерацию индуцированного магнитного поля [см. гл. 8]), то следует ожидать существенного воздействия и механизма турбулентного динамо на структуру и эволюцию аккреционного диска. Как известно, мелкомасштабная гиротропная (отражательно-неинвариантная) турбулентность в быстровращающемся диске создает «петли» (α-эффект), когда любая силовая трубка магнитного поля под действием локального спирального движения приобретает форму скрученной буквы Ω (см. *Parker, 1955*). Эта магнитная петля сопровождается током, имеющим антипараллельную (параллельную) относительно приложенного среднего магнитного поля компоненту для правовинтовых (левовинтовых) случайных спиральных движений. Энергия производимого подобными токами джоулева тепла является мощным источником нагрева, при котором создается дисковая корона, толщина которой порядка толщины диска (*Galeev et. al.*, *1979*). Следует, однако, иметь в виду, что в действительности корона может быть и гораздо толще, несмотря на то что всплывающие под действием подъемной силы «первичные петли» имеют именно такой характерный размер. Это связано с тем, что в процессе пересоединения малых петель могут образовываться петли в среднем большего размера и т. д. По сути, это хорошо известный инверсный каскад, возможный в трехмерных магнитогидродинамических течениях, когда турбулентность обладает кинематической и магнитной спиральностью. Вместе с тем, короной поддерживается и магнитная связь удаленных друг от друга областей диска посредством проходящих через нее крупномасштабных силовых линий, замыкающихся в диске. Подобного рода магнитная связь является также возможным дополнительным источником напряжений в короне и тем самым ее нагрева.

Как видим, из-за вязких напряжений, возникающих вследствие дифференциального вращения диска и возникающего в турбулизованной плазме турбулентного динамо, его корона нагревается, подобно тому как нагревается солнечная корона. В свою очередь, горячая корона порождает струйное истечение вещества и поля. Фактически подобная струя является замагниченным вращающимся ветром, истекающим из аккрецирующего диска. В свою очередь, вращающийся ветер переносит на бесконечность вместе с веществом и магнитным полем значительный момент количества движения диска, позволяя тем самым ему медленно сжиматься. Следовательно, «вращающийся ветер» обеспечивает, наряду с вязким переносом углового момента наружу, другую возможность удалить момент количества движения из диска. Заметим, что магнитные напряжения в ветре могут также вызывать очень эффективную фокусировку движения вещества (джеты).

Для аккуратного моделирования эволюции допланетного аккреционного диска необходима разработка численной модели, учитывающей весь комплекс описанных выше явлений и процессов, отвечающих за структуру внутренних областей электропроводного диска и его короны (см. *Колесниченко*, *Маров*, *2006*, *2007*). При этом одной из проблем первостепенной важности является, как и в случае неэлектропроводного диска (см. *Колесниченко*, *2000*, *2001*), проблема моделирования коэффициента турбулентной вязкости ν_K^{turb} в плазменной дисковой среде, находящейся под воздействием магнитного поля. Изучению этой проблемы и посвящен настоящий раздел.

9.4.1. Закон вязкости в тонких кеплеровских дисках

Далее будем использовать инерциальную цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат, совпадающим с центром тяжести; плоскость $z = 0$ будем считать совпадающей с центральной плоскостью симметрии диска. Анализ дисковой системы проведем при следующих предположениях:

— Исследуется медленно эволюционирующее протопланетное газовое облако, которое вращается вокруг фиксированной в пространстве оси z с некоторой угловой скоростью $\Omega(\boldsymbol{r})$.

— Предполагается, что дисковая конфигурация находится в состоянии квазистационарного вращения в инерциальной системе отсчета с началом в центре массы прото-Солнца; в этом случае она с необходимостью обладает осевой симметрией ($\partial/\partial\varphi = 0$): $\overline{s} = \overline{s}(r, z)$, $\overline{\rho} = \overline{\rho}(r, z)$, $\overline{p} = \overline{p}(r, z)$, $\langle T \rangle = \langle T \rangle(r, z)$, $\Omega = \Omega(r, z)$ и т. п. (см., например, *Тассуль, 1982*).

— Отношение полутолщины диска $h_{\text{disk}}(r)$ к его радиусу r предполагается гораздо меньшим единицы, $h_{\text{disk}}(r)/r \ll 1$ (условие тонкости диска).

— Пренебрегается процессом самогравитации вещества диска по сравнению с влиянием гравитационного поля прото-Солнца.

— Радиационное давление в диске считается много меньше газового давления, $p_R \ll p_g$.

— Вращение предполагается настолько медленным, что меридиональной циркуляцией вещества допланетного облака можно пренебречь, т. е., по существу, для аккреционных дисков осредненное движение космической жидкости реализуется лишь в азимутальном направлении

$$\langle u_r \rangle = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = r\Omega(r, z), \quad \langle u_z \rangle = 0, \tag{9.4.1}$$

а истинная скорость течения газопылевой смеси беспорядочно пульсирует около этого среднего значения, крайне нерегулярно изменяясь в меридиональном и азимутальном направлениях. В принятых предположениях осредненный закон сохранения массы (9.2.1) всегда выполняется, так как движения осесимметричны, а меридиональных течений нет, $\operatorname{div}\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$. Тогда компоненты кинетического тензора Рейнольдса и тензора скоростей деформаций $\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}$ в цилиндрической системе координат принимают вид

$$\begin{cases} R^K_{rr} = R^K_{\varphi\varphi} = R^K_{zz} = -\frac{2}{3}\overline{\rho}\Gamma, & R^K_{zr} = R^K_{rz} = 0, \\ R^K_{\varphi z} = R^K_{z\varphi} = \overline{\rho}\nu^{\text{turb}}_K r \frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z}, & R^K_{r\varphi} = R^K_{\varphi r} = \overline{\rho}\nu^{\text{turb}}_K r \frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial r}, \end{cases} \tag{9.4.2}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi \frac{r}{2}\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_r \frac{r}{2}\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_z \frac{r}{2}\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z} + \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi \frac{r}{2}\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z}, \tag{9.4.3}$$

откуда для диссипативной функции имеем

$$2\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}} = 4D^2_{r\varphi} + 4D^2_{z\varphi} = r^2\left\{\left(\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega(r, z)}{\partial z}\right)^2\right\}. \tag{9.4.4}$$

Для начала рассмотрим случай кеплеровского дифференциально вращающегося тонкого диска, лежащего в плоскости $r\varphi$ (расположенной при $z = 0$ в цилиндрических координатах). Каждый слой с радиусом r этого диска движется практически точно по третьему закону Кеплера, т. е. при приближении к центральному телу (с массой $M_\odot$) вращается все быстрее: кеплеровская орбитальная скорость $\langle u_\varphi \rangle = r\Omega_K(r) = r\sqrt{GM_\odot/r^3}$ (где G — гравитационная постоянная), а угловая скорость орбитального вращения $\Omega_K(r)$ растет по закону $r^{-3/2}$. Подобное движение представляет собой типичный случай крупномасштабного сдвигового течения, которое может считаться главным источником турбулентности для протопланетной дисковой системы.

Впервые коэффициент турбулентной вязкости $\nu_K^{\rm turb}$ в подобном астрофизическом диске был оценен в ставшей уже классической работе (*Shakura and Sunyaev, 1973*), в которой была построена простая модель тонкого диска. В ней авторы, используя концепцию Колмогорова $\nu_K^{\rm turb} = u_{\rm turb} l_{\rm turb}$ для коэффициента вязкости, возникающей вследствие МГД турбулентности в диске (где $u_{\rm turb}$ — среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, ограниченная термической скоростью звука $c_s|_{z=0}$, вычисленной в центральной плоскости диска, $u_{\rm turb} \leqslant c_s|_{z=0} \cong \sqrt{\gamma \overline{p}/\overline{\rho}}|_{z=0}$; $l_{\rm turb}$ — так называемая длина перемешивания Прандтля, ограниченная по предположению полутолщиной $h_{\rm disk}$ диска,

$$l_{\rm turb} \leqslant h_{\rm disk} = (p/\rho \Omega_K^2)^{1/2} \approx c_s|_{z=0}/\Omega_K, \tag{9.4.5}$$

которую можно оценить, используя баланс сил в направлении z: $p/z \cong \rho g z/r \cong$ $\cong \rho \Omega_K^2 z$ (см., например, *Шапиро, Тьюкольски, 1985*); $\overline{\rho}$, $\overline{p}$— соответственно массовая плотность и газовое давление в диске), получили соотношение

$$R_{r\varphi}^K = \overline{\rho} \nu_K^{\rm turb} r \partial_r (\langle u_\varphi \rangle / r) = -\frac{3}{2} \overline{\rho} u_{\rm turb} l_{\rm turb} \Omega_K(r) \leqslant -\frac{3}{2} \overline{\rho} c_s^2|_{z=0} \cong -\overline{p}|_{z=0} \tag{9.4.6}$$

между r, φ-компонентной тензора турбулентных напряжений Рейнольдса $R_{r\varphi}$ и давлением $\overline{p}$ газа. Тогда, вводя некоторый безразмерный свободный параметр вязкости α_{ss}, можно записать

$$R_{r\varphi}^K = -\frac{3}{2} \overline{\rho} \nu_K^{\rm turb} \Omega_K(r) = -\alpha_{ss} \overline{p}. \tag{9.4.7}$$

Соотношение между параметром Шакуры—Сюняева α_{ss} и коэффициентом турбулентной кинематической вязкости в уравнении (9.4.7) имеет вид

$$\alpha_{ss} = -\frac{R_{r\varphi}^K}{\overline{p}} \cong \frac{-\overline{\rho}\langle u_r'' u_\varphi'' \rangle + \overline{B_r' B_\varphi'}/4\pi\mu}{\overline{\rho} c_s^2} \cong \frac{3 \nu_K^{\rm turb} \Omega_K(r)}{2 c_s^2}. \tag{9.4.8}$$

Этот параметр, не поддающийся, вообще говоря, сколько-нибудь точному вычислению, удовлетворяет ограничению

$$\alpha_{ss} \leqslant 1. \tag{9.4.9}$$

Астрофизические модели, построенные с применением соотношения (9.4.6), относятся к так называемым вязким α-дискам. Главное достоинство подобного эвристического описания дисковой турбулентности состоит в его относительной простоте. В частности, по мнению многих исследователей, достаточно заменить в уравнениях звездной МГД коэффициент молекулярной вязкости на коэффициент турбулентной вязкости, чтобы как-то учесть процессы турбулизации проводящей среды в астрофизическом диске. В моделях подобного рода α_{ss} остается обычно свободным параметром в уравнениях строения диска. Его определение на основе различных предположений о природе физических процессов, происходящих в диске, было темой многочисленных исследований (см., например, библиографию к обзору (*Макалкин, 2004*)). В частности, значение дискового параметра Шакуры—Сюняева α_{ss}, характеризующего степень возбуждения турбулентных движений, может быть прокалибровано эмпирически, в частности при помощи зависящих от времени спектров, получаемых при наблюдении вспышек в двойных звездных системах с переносом массы, содержащих карликовые новые. Для этого случая были найдены значения α_{ss} в интервале $0{,}1 \leqslant \alpha_{ss} \leqslant 1$ (см. *Lynden-Bell, Pringle, 1974*; *Bath, Pringle, 1981*). Эти значения совпадают с оценками из работы (*Eardley и др., 1978*), где рассматривалась вязкость, возникающая вследствие сдвига скорости и пересоединения силовых линий хаотического магнитного поля. Однако для этого случая получены значения $0{,}01 \leqslant \alpha_{ss} \leqslant 1$.

Совершенно иной подход к роли магнитных полей в механике уноса количества движения представлен в работе (*Blandford, 1976*), в которой утверждается, что если в диске имеется упорядоченное магнитное поле с большой перпендикулярной составляющей, то как энергия, так и момент количества движения могут уноситься посредством намагниченных струй плазмы, движущихся перпендикулярно плоскости диска. В аналитических работах (*Coroniti, 1981*; *Tout, Pringle, 1992*) была получена связь между вязкостью в диске и процессом перезамыкания магнитных полей внутри диска. Известно, что скорость перезамыкания может быть охарактеризована величиной $M_A = u/c_A$, где u — скорость вещества перед разрывом, а $c_A = |\boldsymbol{B}|/\sqrt{4\pi\mu\rho}$ — альфвеновская скорость перед разрывом (см. *Прист, Форбс, 2005*). Обе модели используют сдвиговое течение внутри диска для усиления магнитного поля и используют МГД-турбулентность как механизм радиального переноса вещества. В модели Коронити кеплеровское движение в диске с течением времени создает магнитное поле, которое лежит в плоскости диска, образуя эллиптические ячейки. Эти магнитные ячейки непрерывно создаются и разрушаются в турбулентном процессе, который приводит к радиальной диффузии плазмы в диске. Вязкий параметр Шакуры—Сюняева, полученный в этой работе, выражается через параметр пересоединения следующим образом: $\alpha_{ss} \approx M_A^{2/3}$. В модели Тоута и Прингла заранее не предполагается какая-либо специальная геометрия магнитного поля, а просто оцениваются источники и стоки для различных его компонент. В этой модели показано, что существует пересоединение вертикального поля, инициированное сильными радиальными шировыми течениями, которое является более важным процессам, чем пересоединение азимутального поля, как это предполагается в модели Коронити. Модель Тоута и Прингла дает следующее выражение для параметра Шакуры—Сюняева: $\alpha_{ss} \approx 0{,}6 M_A$. Для того чтобы вызвать аккрецию, согласующуюся с наблюдениями различных астрофизических явлений, число Маха M_A должно быть порядка 0,1, что предполагает очень большие скорости перезамыкания. Однако в настоящее время нет никаких оснований считать, что такое быстрое перезамыкание возможно в режиме турбулентного МГД-движения, возникающего в диске. Чтобы получить реальную картину связи между аккрецией и перезамыканием необходимо, по-видимому, численное моделирование, которое рассматривает турбулентное динамо и процесс перезамыкания самосогласованно. В литературе известны и другие аналитические модели, позволяющие вычислить α_{ss}, но все они не могут быть признаны окончательными, поскольку во всех этих работах результат моделирования параметра Шакуры—Сюняева сводится, по существу, к выражению неизвестной величины α_{ss} через какою-либо другую неизвестную величину (например, M_A).

Вместе с тем, в подходе Шакуры и Сюняева, разработанном авторами специально для тонких аккреционных дисков, не принимались во внимание динамические процессы взаимодействия газа и магнитного поля, в частности, не учитывалось влияние магнитного поля на турбулентное течение через посредство пути смешения, а также обратное влияние переноса тепла на развитие дисковой турбулентности. Кроме этого, известно, что первоначальная модель дисковой аккреции Шакуры и Сюняева неустойчива по отношению, как к тепловым, так и к медленным возмущениям. В связи с разработкой численной модели структуры и эволюции солнечного протопланетного диска и его короны представляется целесообразным отойти от α_{ss}-формализма и получить обобщение формулы (9.4.7) на случай расслоенного вещества (по плотности) субдиска конечной толщины.

9.4.2. Моделирование коэффициента турбулентной вязкости в протопланетном диске конечной толщины

Разберем вначале, какова может быть конфигурация магнитного поля в диске. Если бы диска не существовало, то силовые линии дипольного магнитного поля не имели бы φ-компоненты (т. е. они были бы полоидальны), а вблизи экваториальной плоскости преобладал бы компонент $\overline{B}_z$. Однако если вокруг звезды имеется диск, то магнитные силовые линии, первоначально «вмороженные» во вращающуюся плазму, испытывают сдвиг в направлении φ, который приводит в конечном счете к появлению отличного от нуля компонента $\overline{B}_\varphi$. Если предположить, что силовые линии, будучи сдвинутыми, остаются непрерывными при пересечении поверхности диска, то компоненты $\overline{B}_\varphi$ должны быть одинаковыми по величине, но противоположными по направлению сверху и снизу от плоскости диска. Таким образом, магнитное поле будет гораздо сильнее меняться по высоте z внутри диска, чем по его радиусу r (например, $\overline{B}_\varphi$ изменяется от $+\overline{B}_\varphi$ до $-\overline{B}_\varphi$ при изменении z от $-h_{\text{disk}}$ до $+h_{\text{disk}}$, где $h_{\text{disk}} \ll r$ — полутолщина диска). Кроме этого, очевидно, что $\overline{B}_r \ll \overline{B}_\varphi$, $\overline{B}_z$, поскольку диск расположен вблизи экваториальной плоскости, а газ движется почти по круговым орбитам.

Таким образом, выражение для коэффициента турбулентной вязкости (9.3.44), в рассматриваемом аксиально-симметричном случае может быть записано следующим образом

$$\nu_K^{\text{turb}} = \alpha_{ss} L^{*2} r \sqrt{\left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right)^2}, \tag{9.4.10}$$

$$L^*(z) \equiv L(z)\{1 - (\text{Ri}_K - \text{Ri}_M)/\,\text{Pr}_K^{\text{turb}}\}^{0,25}, \tag{9.4.10*}$$

где, с учетом сделанных предположений, числа Ричардсона Ri_K и Ri_M имеют вид

$$\text{Ri}_K = \frac{\Omega_{K,\text{mid}}^2(r) z}{r^2} \frac{1}{\langle T\rangle} \frac{\partial\langle T\rangle/\partial z + G_a}{\left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right)^2}, \tag{9.4.11}$$

$$\text{Ri}_M \cong \frac{1}{4\pi\mu\bar{\rho}} \frac{(\partial\overline{B}_\varphi/\partial z)^2}{r^2\left\{\left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega(r,z)}{\partial z}\right)^2\right\}}. \tag{9.4.12}$$

При написании этих соотношений использовано следующие представление для эффективной силы тяжести $\boldsymbol{g} = \{0,\ 0,\ -g_z\}$ (на единицу массы с поправкой на центробежное ускорение), где

$$g_z = \frac{G\mathscr{M}_\odot z}{r^3}\left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)z; \tag{9.4.13}$$

$$\Omega_K(r,\,z) \equiv \sqrt{G\mathscr{M}_\odot/(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{9.4.14}$$

— кеплеровская угловая скорость; $\Omega_{K,\mathrm{mid}}(r) \equiv \Omega_K(r,\,0) = \sqrt{G\mathscr{M}_\odot/r^3}$ — кеплеровская угловая скорость в центральной плоскости диска;

$$G_a \equiv \frac{g_z}{\langle c_p\rangle} = -\frac{1}{\langle c_p\rangle}\,\frac{G\mathscr{M}_\odot z}{r^3}\left(1+\frac{z^2}{r^2}\right)^{-3/2} \cong \frac{1-\gamma}{\gamma}\,\frac{1}{\mathfrak{R}}\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}z \tag{9.4.15}$$

— адиабатический градиент температуры в протопланетном аккреционном диске; $\gamma = \langle c_p\rangle/(\langle c_p\rangle - \mathfrak{R})$ — показатель адиабаты для осредненного континуума. Из формул (9.4.11) видно, что в случае адиабатического распределения температуры с высотой (безразличная стратификация)

$$-\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} = \left(-\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z}\right)_{ad} = \frac{\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)}{\langle c_p\rangle}z,$$

число Ричардсона $\mathrm{Ri}_K = 0$, т. е. температурный градиент в диске не оказывает влияния на коэффициенты турбулентного переноса. Однако в случае неустойчивой термической стратификации аккреционного диска, когда имеют место сверхадиабатические градиенты температуры

$$\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z} - \frac{\Omega^2_{K,\mathrm{mid}}(r)}{\langle c_p\rangle}z = f\,\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial z}, \tag{9.4.16}$$

$\mathrm{Ri}_K < 0$ (здесь множитель f, характеризующий превышение вертикального градиента температуры в диске нададиабатическим, может достигать величины $f = 0{,}2$ при $r \simeq 10$ а. е. (см. *Макалкин*, *Дорофеева*, *1995*)) и энергия турбулентности возрастает за счет энергии неустойчивости в направлении перпендикулярном к экваториальной плоскости диска (конвективный источник турбулентности); при этом одновременно увеличивается коэффициент турбулентной вязкости. В то же время, пространственная неоднородность (по высоте) осредненного магнитного поля приводит к увеличению турбулентной энергии, поскольку магнитное число Ричардсона всегда больше нуля, $\mathrm{Ri}_M > 0$. Обратное турбулентное число Прандтля—Шмидта $1/\mathrm{Pr}_K^{\mathrm{turb}}$ в формуле (9.4.10) можно принять равным единице в случае, когда основным механизмом турбулентности являются сдвиговые напряжения при дифференциальном вращении диска; однако оно может быть в 2—3 раза больше, когда причиной турбулентности является тепловая конвекция в вертикальном направлении (см., например, *Shakura и др.*, *1978*).

Можно показать (*Колесниченко, Маров, 2006*), что иногда в диссипативной функции $\Phi_{\langle u\rangle} = 2\bar{\rho}\nu_K^{\text{turb}}\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}:\overset{\circ}{\boldsymbol{D}}$ для осесимметричного диска можно пренебречь вертикальным градиентом угловой скорости $\partial\Omega(r, z)/\partial z$ по сравнению с ее радиальным градиентом $\partial\Omega(r, z)/\partial r$. Тогда для большей части диска (за исключением областей, близких к прото-Солнцу) справедливо следующее приближенное выражение для коэффициента турбулентной вязкости

$$\begin{gathered}\nu_K^{\text{turb}}(r, z) = \alpha_{ss}L^{*2}r\left|\frac{\partial}{\partial r}\Omega(r, z)\right|,\\ L^*(z) \equiv L(z)\left(1 - \frac{\text{Ri} - \text{Ri}_M}{\text{Pr}^{\text{turb}}}\right)^{0,25}.\end{gathered} \tag{9.4.17}$$

Для того чтобы получить формальное совпадение этого выражения с формулой Шакуры—Сюняева (9.4.7), справедливой для газофазных аккреционных дисков, нужно положить в формуле (9.4.17) параметры $\text{Ri} = 0$ и $\text{Ri}_M = 0$ и подставить в нее угловую скорость кеплеровского вращения $\Omega_{K,\text{mid}}(r) = (GM_\odot)^{1/2}r^{-3/2}$. Если использовать теперь в качестве масштаба турбулентности величину $L = h_{\text{disk}} = \sqrt{(\bar{p}/\bar{\rho})|_{z=0}}/\Omega_{K,\text{mid}}$, то в результате получим

$$\begin{gathered}\nu_K^{\text{turb}} = \frac{3}{2}\alpha_{ss}(\bar{p}/\bar{\rho})|_{z=0}/\Omega_{K,\text{mid}},\\ R_{r\varphi} = \bar{\rho}\nu_K^{\text{turb}}r(\partial\Omega_{K,\text{mid}}(r)/\partial r) = -\frac{9}{4}\alpha_{ss}\bar{p}|_{z=0},\end{gathered}$$

что совпадает с формулой (9.4.7) $\Big($поскольку множитель $\frac{9}{4}$ для свободного параметр α_{ss} не имеет принципиального значения).

В заключение вновь обратим внимание на важность учета магнитогидродинамических эффектов при создании адекватных космогонических моделей дифференциально вращающегося допланетного диска.

В данной главе получили дальнейшее обобщение на электропроводные среды развитые ранее авторами эффективные методы инвариантного моделирования турбулентных течений в многокомпонентных реагирующих газовых смесях (*Колесниченко, Маров, 1999*; *Marov, Kolesnichenko, 2002*). Настоящее исследование является необходимым для более полного и более приближенного к реальности моделирования разнообразных процессов эволюции дифференциально вращающегося плазменного вещества допланетного турбулизованного диска.

К основным полученным результатам можно отнести:

• формулирование базовой системы уравнений МГД для мгновенных (актуальных) параметров течения проводящей космической жидкости, предназначенных для численного моделирования околосолнечного допланетного диска на разных стадиях его эволюции и в пространственных зонах, расположенных на различных расстояниях от протозвезды;

• теоретико-вероятностное осреднение по Фавру стохастических уравнений движения уравнений магнитной гидродинамики с целью феноменологического описания осредненного течения плазмы и процессов турбулентного тепло- и массопереноса в проводящем диске;

• вывод определяющих соотношений для корреляционных характеристик турбулентного течения электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля, необходимых для замыкания магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения;

• разработку полуэмпирического способа моделировании коэффициентов турбулентного переноса в электропроводном диске с учетом влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности во вращающемся электропроводном диске.

Заключение

На современном этапе развития науки возрастающее значение приобретает изучение природных динамических систем и проявлений их многообразных физических свойств. В основе лежат фундаментальные закономерности формирования макромолекулярных структур из гомогенной недифференцируемой среды, наблюдаемые в окружающей природе и космосе, проникновение в сущность которых непрерывно расширяет горизонты познания. Громадную роль в этом процессе играют создаваемые математические модели, в первую очередь модели космических объектов, обычно недоступных для непосредственных исследований, с целью понимания их генезиса и этапов эволюции.

В монографии авторы сосредоточили основное внимание на изучении развитой турбулентности в многокомпонентных смесях реагирующих газов и в гетерогенных газопылевых средах и на термодинамическом конструировании континуальных моделей турбулизованных гидродинамических систем. Поскольку такие системы обладают, как правило, усложненными физико-химическими характеристиками, при их математическом моделировании необходимо, в общем случае, учитывать сжимаемость потока, переменность теплофизических свойств среды, наличие процессов тепло- и массопереноса, химических реакций, фазовых переходов и излучения, воздействие гравитационных и электромагнитных сил. Данное традиционное направление исследований имеет многочисленные естественнонаучные и технические приложения, среди которых достаточно назвать развитие научных представлений об эволюции Земли и планет Солнечной системы, аккреционных дисков и других разнообразных объектов во Вселенной, изучение процессов турбулентного тепло- и массопереноса в разреженных газовых оболочках небесных тел, создание космических аппаратов и энергетических установок нового поколения.

Наряду с этим, в монографии обсуждается актуальная теория самоорганизации при необратимых процессах и проблема структурообразования в различных природных комплексах, прежде всего в развитых турбулентных течениях, что служит отражением общей концепции стохастической динамики, связанной с возникновением упорядоченных структур при значительном отклонении от равновесия. Проблема возникновения и эволюции когерентных вихревых образований в турбулентных течениях рассматриваются нами, исходя из анализа соотношения порядка и хаоса в открытых диссипативных системах с позиций стохастической нелинейной термодинамики необратимых процессов, и эта концепция используется, в частности, на примере моделирования структуры и эволюции протопланетного газопылевого диска, турбулентная природа которого способствует возникновению в нем первичных пылевых кластеров.

Авторы сознательно расширили перечень примеров самоорганизующихся динамических систем, распространив его на наблюдаемые специфические особенности многочисленных космологических структур и их эволюции, хорошо осознавая при этом, что само понимание процесса структурообразования в подобном многоплановом явлении может носить субъективный характер и не разделяться другими исследователями природных и космических сред. Такие природные объекты и сопровождающие их процессы, как звезды, планеты и малые тела Солнечной системы, звездно-галактическая и планетная эволюция, формирование аккреционных протопланетных дисков, строение и эволюции Вселенной, несомненно нуждаются в усовершенствовании подходов при их анализе как реальных динамических систем и в разработках адекватных математических моделей. Таким образом, предпринятое нами в первой главе обсуждение комплекса вопросов о природе окружающего нас мира, выходящее далеко за рамки более узких проблем моделирования структурированной турбулентности, которым, собственно, и посвящен основной объем монографии, служит задаче отразить общность концепции образования высокоорганизованных неравновесных структур в природных и космических средах и привлечь к данной проблематике внимание исследователей.

Подводя итог, можно говорить о том, что в монографии рассмотрен ряд сложных современных проблем геофизики и астрофизики на основе методов механики сплошных сред, исходя из предложенного авторами стохастико-термодинамического подхода к построению полуэмпирических моделей развитой турбулентности в реагирующих многокомпонентных газах и газопылевых средах, а также структурированной турбулентности в однородной жидкости. Такой подход обещает эффективное использование при построении моделей и численном решении конкретных гидродинамических задач, связанных с изучением особенностей природных комплексов и космических сред, их реконструкцией и прогнозом эволюции. Значительное внимание авторы уделили также проблемам теории самоорганизации при необратимых процессах, предложив ряд новых оригинальных методов при описании развитой гидродинамической турбулентности, в которой происходят кооперативные процессы вихревого структурообразования.

Приложение

Элементы тензорного исчисления

А. Векторные и тензорные обозначения

В книге использованы следующие тензорные обозначения:

a — тензор нулевого ранга (скаляр),

$\boldsymbol{a}(a_k)$ — тензор первого ранга (вектор),

$\boldsymbol{A}(A_{kj})$ — тензор второго ранга,

$\boldsymbol{U}(\delta_{kj})$ — единичный тензор (δ_{kj} — символ Кронекера),

$\boldsymbol{J}(J_{ijk})$ — тензор третьего ранга.

Симметричные и антисимметричные тензоры

Симметричные и антисимметричные тензоры определяются следующим образом:

симметричный: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\text{transp}}(A_{kj} = A_{jk})$, (A.1)

антисимметричный: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\text{transp}}(A_{kj} = -A_{jk})$. (A.2)

След тензора определяется как сумма его диагональных элементов:

$\operatorname{Sp} \boldsymbol{A} = \sum\limits_k A_{kk}$ (A.3)

Скалярное и тензорное (внутреннее) произведение

Скалярное произведение

Двух векторов $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum\limits_k a_k b_k$ (скаляр)

Вектора и тензора $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b} = \sum\limits_k A_{jk} b_k$ (вектор) (A.4)

Тензора и вектора $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{A} = \sum\limits_k b_k A_{kj}$ (вектор)

Двух тензоров $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum\limits_k A_{jk} B_{ki}$ (тензор)

Двойное скалярное произведение тензоров:

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \sum_{k,j} A_{jk} B_{kj} \quad \text{(скаляр)} \tag{A.5}$$

Внутреннее (диадное) тензорное произведение

Двух векторов $(\boldsymbol{ab})_{jk} = a_j b_k$ (тензор второго ранга)

Вектора и тензора $(\boldsymbol{aB})_{ijk} = a_i B_{jk}$ (тензор третьего ранга) (A.6)

Тензора и вектора $(\boldsymbol{Ba})_{ijk}=B_{ij}a_k$ (тензор третьего ранга)

Двух тензоров $(\boldsymbol{AB})_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$ (тензор четвертого ранга)

Векторное произведение для двух векторов и для тензора и вектора

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k=\sum_{i,j}\varepsilon_{ijk}a_ib_j \quad \text{(вектор)}, \qquad (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{a})_{ik}=\sum_{j,l}\varepsilon_{jkl}B_{ij}a_l \quad \text{(тензор)}, \tag{A.7}$$

где символ перестановки ε_{ijk} принимает значения

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases} +1 & \text{при четной перестановке индексов (т. е. 123, 231,312),}\\ -1 & \text{при нечетной перестановке индексов (т. е. 321, 132, 213),}\\ 0 & \text{при повторяющихся индексах.}\end{cases} \tag{A.8}$$

B. Цилиндрические координаты

Здесь для удобства читателя представлены в цилиндрической координатной системе r, φ, z (для осесимметричного случая, $\partial/\partial\varphi=0$) выражения для различных операторов, фигурирующих в приведенных выше уравнениях гетерогенной механики и действующих на

1) скаляры:

$$\frac{d\mathscr{B}}{dt}\equiv\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\mathscr{B}=\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}+u_r\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial r}+u_z\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial z}, \qquad \nabla\mathscr{B}=\boldsymbol{i}_r\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial r}+\boldsymbol{i}_z\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial z}, \tag{B.1}$$

$$\nabla^2\mathscr{B}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\mathscr{B}}{\partial z^2}; \tag{B.2}$$

2) векторы:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathscr{A}_r)}{\partial r}+\frac{\partial\mathscr{A}_z}{\partial z}, \tag{B.3}$$

$$\nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r\frac{\partial A_r}{\partial r}+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_z\frac{\partial A_z}{\partial r}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_r\frac{A_\varphi}{r}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi\frac{A_r}{r}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_r\frac{\partial A_r}{\partial z}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{B.4}$$

3) диадики:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_rP_{rr}+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi P_{r\varphi}+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_zP_{rz}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_rP_{\varphi r}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi P_{\varphi\varphi}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_zP_{\varphi z}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_rP_{zr}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi P_{z\varphi}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_zP_{zz}, \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_r&\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{rr})}{\partial r}-\frac{\partial P_{zr}}{\partial z}-\frac{P_{\varphi\varphi}}{r}\right]+\\ &+\boldsymbol{i}_\varphi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{r\varphi})}{\partial r}+\frac{\partial P_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{P_{\varphi r}}{r}\right]+\boldsymbol{i}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rP_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right].\end{aligned} \tag{B.6}$$

Тогда для тензоров деформаций и тензора скоростей деформаций будем иметь:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\equiv\frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\text{transp}}\right)&=\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+\boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\\ &+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi\frac{u_r}{r}+\boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_z\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\\ &+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi\frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\text{transp}}) - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_r\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\nabla \cdot \boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_\varphi\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) +$$

$$+ \boldsymbol{i}_r\boldsymbol{i}_z\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_\varphi\left(\frac{u_r}{r} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\nabla \cdot \boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{i}_\varphi\boldsymbol{i}_z\frac{1}{2}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} +$$

$$+ \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_r\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_\varphi\frac{1}{2}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \boldsymbol{i}_z\boldsymbol{i}_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\nabla \cdot \boldsymbol{u}\right). \quad (\text{B}.8)$$

Оператором, который широко используется в гидродинамике, является двухточечное умножение Гиббса. Согласно обозначениям Гиббса, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — произвольные векторы, то $\boldsymbol{ab}:\boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})$. В частности, для единичных векторов можно написать

$$\boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_k : \boldsymbol{i}_l\boldsymbol{i}_m = (\boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}_l)(\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_m) = \delta_{jl}\delta_{km}, \quad (\text{B}.9)$$

тогда для двух диадиков имеем

$$\boldsymbol{D}^{(1)} : \boldsymbol{D}^{(2)} = \left(\sum_j \sum_k \boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_k D^{(1)}_{jk}\right) : \left(\sum_l \sum_m \boldsymbol{i}_l\boldsymbol{i}_m D^{(2)}_{lm}\right) =$$

$$= \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \delta_{jl}\delta_{km} D^{(1)}_{jk} D^{(2)}_{lm} = \sum_j \sum_k D^{(1)}_{jk} D^{(2)}_{jk}, \quad (\text{B}.10)$$

или

$$2\overset{\circ}{\boldsymbol{D}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{D}} = 2D^2_{rr} + 2D^2_{\varphi\varphi} + D^2_{zz} + 4D^2_{r\varphi} + 4D^2_{rz} + 4D^2_{z\varphi} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2. \quad (\text{B}.11)$$

Список литературы

К главе 1

Авдуевский В. С., Бородин Н. Ф., Кузнецов В. В., Лифшиц А. И., Маров М. Я., Михневич В. В., Рождественский М. К. Температура, давление и плотность атмосферы Венеры по данным измерений АМС «Венера 4» // Доклады АН СССР. 1968. Т. 179. № 2. С. 310.

Авдуевский В. С., Завелевич Ф. С., Маров М. Я., Нойкина З. И., Полежаев В. И. Численное моделирование лучисто-конвективного теплообмена в атмосфере Венеры // Космич. исслед. 1971. Т. 9. № 2. С. 280—291.

Авдуевский В. С., Головин Ю. М., Завелевич Ф. С., Лихушин В. Я., Ватников Д. К., Маров М. Я., Мерсон Я. И., Мошкин Б. Е., Разин К. А., Чернощеков Л. И., Экономов А. П. Предварительные результаты исследования светового режима в атмосфере и на поверхности Венеры // Космич. исслед. 1976. Т. 14. Вып. 5. С. 735.

Анищенко А. А. Сложные колебания в простых системах. — М. : Наука, 1990.

Анищенко А. А., Вадивасова Т. Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статистическое описание колебательных систем. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2005.

Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. Мат. Наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 85—91.

Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. Наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91—192.

Афанасенко Т. С., Родин А. В. Влияние столкновительного уширения линий на спектры и потоки теплового излучения в нижней атмосфере Венеры // Астрон. вестник. Исслед. Солнечной системы. 2005. Т. 39. № 3. С. 214—226

Баренблат Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины // Прикл. матем. мех. 1955. Т. 19. № 1. С. 61—88.

Барсуков В. Л., Маров М. Я. (ред.). Спутники Юпитера : пер. с англ. — М. : Мир, 1985.

Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М. : Наука, 1984 [1-е изд.], 1994 [2-е изд., испр. и доп.].

Белоцерковский О. М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. — М. : Наука, 1997.

Белоцерковский О. М. Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. — М. : Наука. 1997.

Бершадский А. Г. Виртуальное статистическое равновесие и квазистационарные спектры однородной турбулентности // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 9. С. 117—122.

Бершадский А. Г. Фрактальная структура турбулентных вихрей // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. № 2(8). С. 625—631.

Бете Г. А. Теория сверхновых // Ядерная астрофизика / под ред. А. Г. Масевич. — М. : Мир. 1966. — С. 418—445.

Бетчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. — М. : ИЛ, 1955.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел. — М. : Наука, 1990.

Былов Б. Ф., *Виноград Р. И.*, *Гробман Д. М.*, *Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М. : Наука, 1966.

Вассербург Г. Дж., *Папанастасиу Д. А.* Некоторые короткоживущие нуклиды в ранней Солнечной системе — связь с исходной межзвездной средой // Ядерная астрофизика. — М. : Мир, 1986. — С. 85—142.

Вашковьяк М. А., *Тесленко Н. Г.* Эволюция характеристик орбит внешних спутников Сатурна, Крана и Нептуна // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 5.

Виноградов А. П. Введение в геохимию океана. — М. : Наука, 1967.

Виноградов А. П., *Волков В. П.* О волластонитовом равновесии как механизме, определяющем состав атмосферы Венеры // Геохимия. 1971. Т. 7. С. 755.

Виноградов А. П. (ред.) Космохимия Луны и планет. — М. : Наука, 1975.

Галимов Э. М. Феномен жизни. Между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. — М. : Едиториал УРСС, 2001.

Галимов Э. М. О происхождении вещества Луны // Геохимия. 2004. Т. 4. С. 691—706.

Галимов Э. М. Предпосылки и условия возникновения жизни. Задачи исследования // Геохимия. 2005. Т. 5. С. 1—18.

Галимов Э. М. Концепция устойчивого упорядочения и АТФ-зависимый механизм происхождения жизни // Проблемы зарождения и эволюции биосферы / под ред. Э. М. Галимова. — М. : URSS, 2008. — С. 23—32.

Галимов Э. М., *Кривцов А. М.*, *Забродин А. В.*, *Легкоступов М. С.*, *Энеев Т. М.*, *Сидоров Ю. И.* Динамическая модель образования системы Земля—Луна // Геохимия. 2005. Т. 11. С. 1139—1150.

Галимов Э. М. Проект «Луна — Гелий-3». — М. : Наука в России, 2006.

Гледзер Е. Б., *Должанский Ф. В.*, *Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применение. — М. : Наука, 1981.

Гленсдорф П., *Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М. : Едиториал УРСС, 2003.

Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер. — Л. : Гидрометеоиздат, 1973.

Горькавый Н. Н., Фридман А. М. Физика планетных колец. — М. : Наука, 1994.

Грин Б. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. — М. : Едиториал УРСС, 2004.

Дорофеева В. А., Макалкин А. Б. Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. — М. : Едиториал УРСС, 2004.

Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Адиабатическая теория образования галактик // Происхождение и эволюция галактик и звезд / под ред. С. Б. Пикельнера. — М. : Наука, 1976. — С. 65—104.

Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М. : Наука, 1966.

Зельдович Я. Б. Структура Вселенной. // Итоги науки и техники. Астрономия. Т. 22. / под ред. Р. А. Сюняева. — М. : ВИНИТИ, 1983. — С. 4—32.

Иванов Б. А. Сравнение по размерам астероидов и ударных кратеров // «Современные проблемы механики и физики космоса» (к юбилею М. Я. Марова). — М. : Наука, Физматлит, 2003.

Ингерсолл А., Биб Р., Конрат Б., Хант Г. Структура и динамика атмосферы Сатурна // Система Сатурна / под ред. М. Я. Марова и В. Н. Жаркова. — М. : Мир, 1990. — С. 56—87.

Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе. — М. : Едиториал УРСС, 2000.

Кадомцев Б. Б., Рязанов А. И. Что такое синергетика? // Природа. 1983. № 8. С. 2—11.

Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. — М. : Мир, 1990.

Кампе де Ферье Ж. Статистическая механика и теоретические модели диффузионных процессов // Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха / под ред. А. С. Монина. — М. : ИЛ, 1962. — С. 165—174.

Кантуэлл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках. — М. : Мир. 1984.

Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса. — М. : Наука, 1990.

Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. — М. : Янус-К, 2002.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. С. 572.

Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. С. 754

Колмогоров А. Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout — sept. 1961 [на рус. и фр. яз.]. — Paris, 1962. — P. 447—458.

Крестьяникова М. А., Шематович В. И. Стохастические модели горячих планетных и спутниковых корон: горячая кислородная корона Марса // Астрон. вест. 2006. Т. 38. № 3. С. 1—9.

Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.—Л. : изд-во АН СССР, 1950.

Кузьмин А. Д., *Маров М. Я.* Физика планеты Венера. — М. : Наука, 1974.

Кузьмин Р. О., *Забалуева Е. В.*, *Митрофанов И. Г.*, *Литвак М. Л.*, *Родин А. В.*, *Бойнтон В.*, *Саундерс Р. С.* Сезонное перераспределение воды в поверхностном слое Марсианского реголита по данным нейтронного детектора ХЕНД с борта КА Mars Odyssey // Астрон. вестн. 2007. Т. 41. № 2. С. 99—112.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М. : Наука, 1988.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.—Л. : ГТТИ, 1944.

Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // УФН. 2007. Т. 177. № 9. С. 989—1015.

Мазер Дж. К. От Большого взрыва до Нобелевской премии и дальше // УФН. 2007. Т. 177. № 12. С. 1278—1293.

Макалкин А. Б. Проблемы эволюции протопланетных дисков // Современные проблемы механики и физики космоса (к юбилею М. Я. Марова). — М. : Наука, Физматлит, 2003.

Маров М. Я. Модель атмосферы Венеры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 1. С. 67—70.

Маров М. Я., *Шари В. П.* Перенос длинноволнового излучения в нижней атмосфере Венеры // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 1973. № 23.

Маров М. Я., *Бывшев Б. В.*, *Баранов Ю. П.*, *Кузнецов И. С.*, *Лебедев В. Н.*, *Лысцев В. Е.*, *Макесимов А. В.*, *Попандопуло Г. К.*, *Раздолин В. Р.*, *Сандимиров В. А.*, *Фролов А. М.* Нефелометрические измерения на станциях Венера 9 и Венера 10 // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 5. С. 729—734.

Маров М. Я., *Гальцев А. П.*, *Шари В. П.* Профиль H_2O в нижней атмосфере Венеры по измерениям эффективного потока // Космич. исслед. 1984. Т. 22. № 2. С. 267—282.

Маров М. Я., *Гальцев А. П.*, *Шари В. П.* Перенос тепловой радиации и содержание воды в атмосфере Венеры // Астрон. вестник. 1985. Т. 19. № 1. С. 15—41.

Маров М. Я. Планеты Солнечной системы. — М. : Наука, 1986.

Маров М. Я., *Колесниченко А. В.* Введение в планетную аэрономию. — М. : Наука, 1987.

Маров М. Я., *Волков В. П.*, *Сурков Ю. А.*, *Ривкин М. Л.* Нижняя атмосфера // Планета Венера / под ред. В. Л. Барсукова и В. П. Волкова. — М. : Наука, 1989.

Маров М. Я., Гальцев А. П., Шари В. П. Тепловой режим атмосферы Венеры // Планета Венера / под ред. В. Л. Барсукова и В. П. Волкова). — М. : Наука, 1989. — С. 94—132.

Маров М. Я. Физические свойства и модели комет // Астрон. вестник. Исслед. Солн. системы. 1994. Т. 28. № 4—5. С. 5—85

Маров М. Я. Малые тела и некоторые проблемы космогонии // УФН. 2005. Т. 175. № 6. С. 668—678.

Маров М. Я., Колесниченко А. В., Макалкин А. Б., Дорофеева В. А., Зиглина И. Н., Сироткин Ф. В., Чернов А. А. Моделирование эволюции протопланетного газопылевого диска и механизма развития гравитационной неустойчивости : доклад, представл. на конференцию «Зарождение Биосферы и Фотоника Нуклеиновых Кислот» (Терскол, 6—10 августа 2007).

Маров М. Я., Колесниченко А. В., Макалкин А. Б., Дорофеева В. А., Зиглина И. Н., Чернов А. В. От протосолнечного облака к планетной системе: Модель эволюции газопылевого диска // Проблемы зарождения и эволюции биосферы / под ред. Э. М. Галимова. — М. : URSS, 2008. — С. 233—273.

Масевич А. Г., Тутуков А. В. Эволюция звезд: теория и наблюдения. — М. : Наука, 1988.

Массер Д. Четыре ключа к космологии // Космос : альманах / ред. С. П. Капица. — М. : В мире науки, 2006. — С. 13.

Митрофанов И. Г., Литвак М. Л., Козырев А. С. и др. Оценка содержания воды в грунте Марса по данным нейтронных измерений прибора ХЕНД на борту космического аппарата 2001 Mars Odyssey // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 4. С. 291—303.

Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М. : Мир, 1973.

Монин А. С. О спектре турбулентности в температурно-неоднородной среде // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 3. С. 397.

Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. — М. : Наука, 1969.

Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. — Л. : Гидрометеоиздат, 1988.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. Т. 1. — М. : Наука, 1965 ; СПб : Гидрометеоиздат, 1992.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. — СПб : Гидрометеоиздат, 1996.

Мороз В. И., Мошкин Б. Е., Экономов А. П., Григорьев А. В., Гнедых В. И., Головин Ю. М. Спектрофотометрический эксперимент на борту спускаемых аппаратов Венера 13 и Венера 14. Предварительный анализ поглощения в полосах H_2O // Космич. исслед. 1983. Т. 21. С. 246—253.

Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М. : Мир, 1979.

Новиков И. Д., Кардашев А. А., Шацкий А. А. Многоэлементная Вселенная и астрофизика кротовых нор. Доклад, представленный на конференцию, посвященную юбилеям И. С. Шкловского и С. Б. Пикельнера. Москва, ГАИШ, 13—14 декабря 2006.

Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1941. Т. 5. № 4. С. 453—466.

Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1949. Т. 13. № 4. С. 281—306.

Озерной Л. М., Чибисов Г. В. // Астрон. журнал. 1970. Т. 4. С. 469.

Озерной Л. М. Вихревая теория происхождения галактик и их систем // Происхождение и эволюция галактик и звезд / под ред. С. Б. Пикельнера. — М. : Наука, 1976. — С. 105—131.

Пикельнер С. Б., Каплан С. А. Основы теории звездообразования. Происхождение звезд первого поколения // Происхождение и эволюция галактик и звезд / под ред. С. Б. Пикельнера. — М. : Наука, 1976. — С. 190—234.

Пригожин И. Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. — Ижевск : Ижевская республиканская типография, 1999.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М. : Эдиториал УРСС, 2001.

Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. — Новосибирск : Наука, 1966.

Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // *Пуанкаре А.* Избранные труды : в 2 т. — М. : Наука, 1971—1972.

Родин А. В., Уилсон Р. Дж. Сезонный цикл климата Марса: экспериментальные данные и численное моделирование // Космич. исслед. 2006. Т. 44. № 4. С. 1—5.

Сафронов В. С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. — М. : Наука, 1969.

Сафронов В. С. Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5—24.

Сафронов В. С. Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска // Астрон. вестн. 1987. Т. 21. № 3. С. 216—220.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М. : Наука, 1965.

Синай Я. Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР. 1963. № 6.

Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН. 1970. Т. 25. № 2(152). С. 141—192.

Сироткин Ф., Каретников В. Ф. Образование протопланетных систем посредством слияния компонентов двойной и сжатия к Главной последовательности // Astronomy Reports. 2006. V. 50. P. 655.

Смут Дж. Ф. Анизотропия реликтового излучения: открытие и научное значение // УФН. 2007. Т. 177. № 12. С. 1294—1317.

Спутники Юпитера : пер. с англ. / под ред. В. Л. Барсукова и М. Я. Марова. — М. : Мир, 1985.

Стратонович Р. Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. — М. : Наука, 1985.

Сюняев, Зельдович (*Sunyaev R. A., Zeidovich Ya. B.*) // Astron. Astrophys. 1972. V. 20. P. 189.

Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М. : ИЛ, 1959.

Тегмарк М. Параллельные вселенные // Космос : альманах / ред. С. П. Капица. — М. : В мире науки, 2006. — С. 21—32.

Тихонов А. Н., *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1986.

Тутуков А. В., *Павлюченков Я.* Модель астрофизических текреционно-аккреционных диффузионных дисков // Астрон. журнал. 2004. Т. 82. С. 881.

Тутуков А., *Дремов В.*, *Дремова Г.* Динамическая эволюция скоплений галактик в рамках проблемы образования сверхмассивных CD-галактик // Астрон. журнал. 2007. Т. 84. С. 427.

Феррас-Меллу С. Динамика галилеевых спутников Юпитера. — М. : Мир, 1983.

Фридман Ф. М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122—1130.

Шкловский И. С. Вселенная, жизнь, разум. — М. : Наука, 1987.

Шмидт О. Ю. Четыре лекции о происхождении Земли [3-е изд., доп.].— М. : изд-во АН СССР, 1957.

Энеев Т. М., *Козлов Н. Н.* Модель аккумуляционного процесса формирования планетных систем. I. Численные эксперименты // Астрон. вестник. 1981. Т. 15. № 2. С. 80—94.

Фридман А. М., *Сагдеев Р. З.*, *Хоружий О. В.*, *Поляченко Е. В.* Наблюдаемые проявления хаоса в спиральных галактиках // Современные проблемы механики и физики космоса (к юбилею М. Я. Марова). — М. : Физматлит, 2003. — С. 12—26.

Хакен Г. Синергетика. — М. : Мир, 1980.

Хакен Г. Информация и самоорганизация. — М. : Мир, 1991.

Хлопков Ю. И., *Жаров В. А.*, *Горелов С. Л.* Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. — М. : МФТИ, 2002.

Хорстхемке В., *Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. — М. : Мир, 1987.

Чепмен Д. Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития : Драйденовская лекция // Ракетная техника и космонавтика. 1980. Т. 18. № 2. С. 3—32.

Шематович В. И., *Цветков Г. А.*, *Крестьяникова М. А.*, *Маров М. Я.* Стохастические модели горячих планетных и спутниковых корон: общие потери воды в атмосфере Марса // Астрон. вест. 2007. Т. 41. № 2. С. 113—119.

Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы (Миниатюры из бесконечного Рая). — Ижевск : R and C Dynamics, 2001.

Эбелинг В., *Файстель Р.* Хаос и космос. Синергетика эволюции. — М.— Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.

Энеев Т. М. О возможной структуре внешних (занептунных) областей Солнечной системы // Письма в Астрон. журн. 1981. Т. 6. № 5. С. 295—300.

Acuna M. H., *Acuna M. H.*, *Connerney J. E. P.*, *Ness N. F.*, *Lin R. P.*, *Mitchell D.*, *Carlson C. W.*, *McFadden J.*, *Anderson K. A.*, *Reme H.*, *Mazelle C.*, *Vignes D.*, *Wasilewski P.*, *Cloutier P.* Global distribution of crystal magnetism discovered by the Mars Global Surveyor MAG/ER experiment // Science. 1999. V. 284. P. 790—793.

Alexander C. M. O. D., *Boss A. P.*, *Keller L. P.*, *Nuth J. A.*, *Weinberger A.* Astronomical and meteoritic evidence for the nature of interstellar dust and its processing in protoplanetary discs // Protostars and Planets. V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Alpher R. A., *Bethe H.*, *Gamov G.* The origin of chemical elements // Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 803—804.

Anders E., *Owen T.* Origin and abundances of volatiles // Science. 1977. V. 198. P. 453—465.

Andersen J. Accurate masses and radii of normal stars // Astron. Astrophys. Rev. Dirac House, Temple Back, Bristol. 1991. V. 3. P. 91—126.

Anderson J. D., *Lau E. L.*, *Sjogren W. L.*, *Schubert G.*, *Moore W. B.* Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede // Nature. 1996. V. 384. P. 541.

Anderson J. D., *Schubert G.*, *Jacobsen R. A.*, *Lau E. L.*, *Moore W. B.*, *Sjogren W. L.* Distribution of rock, metals, and ices in Callisto // Science. 1998. V. 280. P. 1573—1576.

Anderson R. C., *Dohm J. M.*, *Golombek M. P.*, *Haldemann A. F. C.*, *Franklin B. J.*, *Tanaka K. L.*, *Lias J.*, *Peer B.* Primary centers and secondary concentrations of tectonic activity through time in the western hemisphere of Mars //J. Geophys. Res. 2001. V. 106. P. 20563—20586.

Armitage P. J., *Livio M.*, *Pringle J. E.* Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2001. V. 324. P. 705—711.

Artymowicz P. Beta Pictoris: An early solar system? // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1997. V. 25. P. 175—219.

Atreya S. K., *Mahaffy*, *P. R.*, *Niemann H. B.*, *Won M. H.*, *Owen T. C.* Composition and origin of the atmosphere of Jupiter-an update, and implications for the extrasolar giant planets // Planet. Space Sci. 2003. V. 51. P. 105—112.

Atreya S. K., *Pollack J. B.*, *Matthews M. S.* (eds.). Origin and Evolution of Planetary and Satellite Atmospheres. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1989.

Avduevsky V. S., *Marov M. Ya.*, *Rozhdestvensky M. K.* A tentative model of the atmosphere of the planet Venus based on the results of measurements of of Venera 5 and 6 // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. No. 4. P. 561—568.

Ayres T. R. Thermal bifurcation in the solar outer atmosphere // Astrophys. J. 1981. V. 244. P. 1064—1071.

Balbus S. A., *Hawley J. F.* Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1—53.

Ballesteros-Paredes J., *Klessen R. S.*, *Mac Low M.-M.*, *Vazquez-Semadeni E.* Molecular cloud turbulence and star formation // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Barrow-Green J. Poincaré and the Three Body Problem. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1996.

Basri G. Observations of brown dwarfs // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2000. V. 38. P. 485—519.

Benner L. A. M. Triton // Encyclopedia of Planetary Sciences / eds. J. H. Shirley, R. W. Fairbridge. — London : Chapman and Hall, 1997.

Bergin E. A., Aikawa Yu., Blake G. A., van Dishoeck E. F. The Chemical evolution of protoplanetary disks // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ. 2007.

Bezard B., de Bergh C., Fegley B., Maillard J.-P., Crisp D., Owen T., Pollack J. B., Grinspoon D. H. The abundance of sulfur dioxide below the clouds of Venus // Geophys. Res. Lett. 1993. V. 20. P. 1587—1590.

Bibring J.-P., Langevin Y., Gendrin A., et al., and the OMEGA team. Mars surface diversity as revealed by the OMEGA / Mars Express observations // Science. 2005. V. 307. P. 1576—1581.

Binney J., Merrifield M. Galactic Astronomy. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1998

Bisikalo D. V., Marov M. Ya., Shematovich V. I., Strel'nitskij V. S. The flow of the subliming gas in the near-nuclear (Knudsen) layer of the cometary coma // Adv. Space Res. 1989. V. 9. No. 3. P. 53—58.

Bisnovaty-Kogan G. S., Lovelace R. V. E. Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // New astron. Rev. 2001. V. 45. P. 663—742.

Black D. C. Extra-solar planets: Searching for other planetary systems // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 941—956.

Blum J., Wurm G. (2000) Experiments of sticking, restructuring and fragmentation of preplanetary dust aggregates // Icarus. V. 143. P. 138—146.

Boice D. C., Huebner W. Physics and chemistry of comets // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 519—536.

Bonnell I. A., Larson R. B., Zinnecker H. The origin of the initial mass function // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Borner G. The Early Universe. — Heidelberg : Springer, 1993.

Bouwman J., Meeus G., de Koter A., Hony S., Dominik C., Waters L. B. F. M. Processing of silicate dust grains in Herbig Ae/Be systems // Astron. Astrophys. 2001. V. 375. V. 950—962.

Bouwman J., van Boekel R., Min M., Waters L. B. F. M., de Koter A., Dominik C., van den Ancker M. E. 10 μm spectroscopic survey of Herbig Ae star disks: Grain growth and crystallization // Astron. Astrophys. 2005. V. 437. P. 189—208.

Brain D. A., Jakosky B. M. Atmospheric loss since the onset of the martian geologic record: combined role of impact erosion and sputtering // J. Geophys. Res. 1998. V. 103. P. 22689—22694.

Britt D. T., Lebofsky L. A. Asteroids // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 585—606.

Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775—816.

Bryden G., Chen X., Lin D., Nelson R., Papaloizou J. Tidally induced gap formation in protostellar disks: gap clearing and suppression of protoplanetary growth // Astrophys. J. 1999. V. 514. P. 344.

Buratti B. J. Outer planet icy satellites // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 435—456.

Burns J. A., Matthews M. S. (eds.). Satellites. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1986.

Busse F. H. A simple model of convection in the Jovian atmosphere // Icarus. 1976. V. 29. P. 255—260.

Cameron A. G. W., Ward W. The Origin of the Moon // Sci. Proc. Lunar. Conf. 7th. Houston. 1976. P. 120—122.

Canup R. M., Asphaug E. Origin of the Moon in a giant impact near the end of the Earth's formation // Nature 2001. V. 412. P. 708—712.

Carr M. H. The Surface of Mars. — New Heaven—London : Yale University Press, 1981.

Carr M. H. D/H on Mars: effects of floods volcanism impacts and polar processes // Icarus. 1990. V. 87. P. 210—217.

Carr M. H. Water on Mars. — Oxford : Oxford University Press, 1996.

Carr M. H., Belton M. J. S., Chapman C. R., Davies M. E., Geissler P., Greenberg R., McEwen A. S., Tufts B. R., Greeley R., Sullivan R., Head J. W., Pappalardo R. T., Klaasen K. P., Johnson T. V., Kaufman J., Senske D., Moore J., Neukum G., Schubert G., Burns J. A., Thomas P., Veverka J. Evidence for a subsurface ocean on Europa // Nature. 1998. V. 39. P. 363.

Carr M. H. Retention of an atmosphere on early Mars // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 21897—21909.

Carr M. H. Mars: Surface and interior // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 291—308.

Carr M. H. Martian oceans valleys and climate // Astron. Geophys. 2000. V. 41 P. 3.20—3.26.

Cassen P. M., Woolum D. S. The origin of the Solar System // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 35—64.

Chamberlain J. W., Hunten D. M. Theory of planetary atmospheres. An introduction to their physics and chemistry. — Academic Press, 1987 [2nd ed.].

Charney J. G., Stern M. E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere // J. Atmos. Sci. 1962. V. 19. P. 159—172.

Chiang E. I. Dust in Protoplanetary Disks // Proceed. Conf. 26—30 May 2003. Estes Park. Colorado / eds. Witt A. N., Clayton G. C., Draine B. T. — (Astrophysics of Dust. ASP Conference Series ; v. 309). — 2004. — P. 213.

Chiang E. I., Lithwick Y. Neptune Trojans as a Test Bed for Planet Formation // Astrophys. J. 2005. V. 628. P. 520—532.

Chiosi C., Bertelli G., Bressan A. New development in understanding the HR diagram // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1992. V. 30. P. 235—285.

Christensen P. R., Bandfield J. L., Clark R. N., Edgett K. S., Hamilton V. E., Hoefen T., Kieffer H. H., Kuzmin R. O., Lane M. D., Malin M. C., Morris R. V., Pearl J. C., Pearson R., Roush T. L., Ruff S. W., Smith M. D. Detection of crystalline hematite mineralization on Mars by the Thermal Emission Spectrometer: evidence for near-surface water // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 9623—9642.

Chyba C. F., Owen T. C., Ip W.-H. Impact delivery of volatiles and organic molecules to earth // Hazards due Comets and Asteroids / ed. T. Gehrels,

M. S. Matthews, A. Schumann. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1994. — P. 99.

Clifford S. M., Parker T. J. The evolution of the Martian hydrosphere: implications for the fate of a primordial ocean and the current state of the northern plains // Icarus. 2001. V. 154. No. 1. P. 40—79.

Contopoulos G. Order and Chaos in Dynamical Astronomy. — Springer, 2002. — (Astronomy and Astrophysics Library).

Coustenis A., Lorenz R. Titan // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 377—404.

Crisp D., Titov D. The thermal balance of the Venus atmosphere // Venus II / eds. S. W. Bougher, D. M. Hunten, R. J. Phillips. — Tucson : The University of Arizona Press, 1997. — P. 353—384.

Crow S. C., Champagne F. H. Orderly structures in jet turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547—591.

Cruikshank D. P. (ed.) and 78 collaborating authors. Neptune and Triton. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1995.

Cruikshank D. P., Barucci M. A., Emery J. P., Fernandez Y. R., Grundy W. M., Noll K. S., Stansberry J. A. Physical properties of trans-neptunian objects // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Cuzzi J. N., Davis S. S., Dobrovolskis A. R. Blowing in the wind. II. Creation and redistribution of refractory inclusions in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus. 2003. V. 166. P. 385—402

Cuzzi J. N., Ciesla F. J., Petaev M. I., Krot A. N., Scott E. R. D., Weidenschilling S. Nebula Evolution of Thermally Processed Solids: Reconciling Models and Meteorites Chondrites and the Protoplanetary Disk // Proceedings of a workshop held, 8—11 November 2004, Kaua'i, Hawai'i / ed. A. N. Krot, E. R. D. Scott, B. Reipurth. — San Francisco : Astronomical Society of the Pacific, 2005.. — (ASP Conference Series ; v. 341). — P. 732—773.

Cuzzi J. N. Blowing in the wind. III. Accretion of dust rims by chondrule-sized particles in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus, 2004. V. 168. P. 484—497.

Cuzzi J. N., Weidenschilling S. J. Particle-Gas Dynamics and Primary Accretion // Meteorites and the Early Solar System II / eds. D. Lauretta, L. A. Leshin, H. McSween. — Tuscon, AZ : Univ. of Arizona Press, 2006. — P. 353—381

Dalal N., Kochanek C. S. Direct Detection of Cold Dark Matter Substructure // Astrophys. J. 2002. V. 572. No. 1. P. 25—33.

Del Genio A. D. Atmospheres // Encyclopedia of Planetary Sciences / eds. J. H. Shirley, R. H. Fairbridge. — London : Chapman and Hall, 1997.

Diagu F., Holmes P. Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1997.

Dominik C., Blum J., Cuzzi J., Wurm G. Growth of dust as the initial step toward planet formation // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Donahue T. M., Grinspoon D. H., Hartle R. E., Hodges R. R. Ion/neutral escape of hydrogen and deuterium: Evolution of water // Venus II / eds. S. W. Bougher, D. M. Hunten, R. J. Phillips. — Tucson : The University of Arizona Press, 1997. — P. 385—414.

Donahue T. M., Hoffman J. H., Hodges R. R., Watson A. J. Venus was wet: A measurement of the ratio of deuterium to hydrogen // Science. 1982. V. 216. P. 630.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59—76.

Dullemond C. P., Dominik C. Dust coagulation in protoplanetary disks: A rapid depletion of small grains // Astron. Astrophys. 2005. V.434. P. 971—986.

Dullemond C. P., Hollenbach D., Kamp I., D'Alessio P. Models of the structure and evolution of protoplanetary discs // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Duncan M., Levison, H. A scattered comet disk and the origin of Jupiter family comet // Science. 1997. V. 276. P. 1670.

Duncan M. J., Lissauer J. J. Solar system dynamics // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. P. 809—824.

Durisen R. H., Boss A. P., Mayer L., Nelson A. F., Quinn T., Rice W. K. M. Gravitational instabilities in gaseous protoplanetary disks and implications for giant planet formation // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Dutrey A., Guilloteau S., Ho P. Interferometric spectro-imaging of molecular gsin protoplanetary discs // Protostars and Planets V. —Arizona Press, AZ, 2007.

Dyson, Freeman A. M. Terraforming Venus // Correspondence in Journal of the British Interplanetary Society. 1989. V. 42. P. 593.

EAA. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics. — Bristol : Nature Publishing Group and Institute of Physics Publishing, Dirac House, Temple Back, 2001.

Eardley D. M., Lightman A. P., Payne D. G., Shapiro S. L. Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.

Elgaroy O., Lahav O., Percival W. J., Peacock J. A., Madgwick D. S., Bridle S. L., Baugh C. M., Baldry I. K., Bland-Hawthorn J., Bridges T., Cannon R., Cole S., Colless M., Collins C., Couch W., Dalton G., de Propris R., Driver S. P., Efstathiou G. P., Ellis R. S., Frenk C. S., Glazebrook K., Jackson C., Lewis I., Lumsden S., Maddox S., Norberg P., Peterson B. A., Sutherland W., Taylor K. New upper limit on the total neutrino mass from the 2 degree field galaxy redshift survey // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 61.

Elliot J. L., Nicholson P. D. The rings of Uranus Planetary Rings / ed. R. Greenberg, A. Brahic. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1984. — P. 25—72.

Esposito L. W., Knollenberg R. G., Marov M. Ya., Toon O. B., Turco R. P. The clouds and hazes of Venus // Venus / eds. D. M. Hunten, L. Colin, T. M. Donahue, V. I. Morozet. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1983. — P. 484—564.

Esposito L., Cuzzi J. N., Holdberg J. B., Marouf E. A., Tyler G. L. Porco C. C. Saturn's rings: structure, dynamics and particle properties // Saturn / eds. T. Gehrels, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1984. — P. 463—545.

Esposito L., Brahic A., Burns J. A., Marouf E. A. Particle properties and processes in Uranus' rings // Uranus / eds. J. T. Bergstrahl, E. D. Miner, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1991. — P. 410—465.

Fanale F. P. Mars: Atmosphere and volatile history // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 277—290.

Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear system // Physica. 1978. V. 7D. P. 16.

Fernandez J. A. Dynamics of comets: recent developments and new challenges // Asteroids, Comets, Meteors 1993 / eds. A. Milani, M. D. Martino, A. Cellino. — Dordrecht : Kluwer, 1994. — P. 223—240.

Fernandez J. A. Cometary dynamics // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 537—556.

Fixsen D. J., *Mather J. C.* The Spectral Results of the Far-Infrared Absolute Spectrophotometer Instrument on COBE // Astrophys. J. 2002. V. 581. P. 817—822.

Fowler R. H. M. N. On dense matter // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1926. V. 87. P. 114—122.

French R., *Nicholson P. D.*, *Porco C. C.*, *Marouf E. A.* Dynamics and structure of the Uranian rings // Uranus / eds. J. T. Bergstrahl, E. D. Miner, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1991. — P. 327—409.

Fridman A. M., *Polyachenko V. L.* Physics of gravitating system : 2 vol. — N. Y., etc. : Springer, 1984.

Gaidos E., *Selsis F.* From protoplanets to protolife: The emergence and maintenance of life // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Galileo Orbiter Team, 1996 // JGR. Special issues ; 1998a, b // Icarus. 1998. Special issue.

Galileo Probe Team. Galileo at Jupiter: results from the probe // Science 1996. V. 272. P. 837—860.

Gallagher J. S., *Hunter D. A.*, *Tutukov A. V.* Star formation histories of irregular galaxies // Astrophys. J. 1984. V. 284. P. 544.

Gawiser E., *Silk J.* Extracting primordial density fluctuations // Science. 1998. V. 280. P. 1405—1411.

Gillett S. L. Establishment and Stabilization of Earthlike Conditions on Venus // Journal of the British Interplanetary Society. 1991. V. 44. P. 151—156.

Girardi M., *Borgani S.*, *Giuricin G.*, *Mardirossian F.*, *Mezzetti M.* Optical Luminosities and Mass-to-Light Ratios of Nearby Galaxy Clusters // Astrophys J. V. 2000. V. 530. No. 1. P. 62—79.

Goldrich P., *Ward W. R.* The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. No. 3. P. 1051—1061.

Golombek M. P., *Bridges N. T.* Erosion rates on Mars and implications for climate change: constraints from the Pathfinder landing site // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 1841—1853.

Gounelle M., *Shu F. H.*, *Shang H.*, *Glassgold A. E.*, *Rehm E. K.*, *Lee T.* The Irradiation Origin of Beryllium Radioisotopes and Other Short-lived Radionuclides // Astrophys. J. 2006. V. 640. P. 1163—1170.

Greenberg R., *Brahic A.* (eds.) Planetary Rings. Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1984.

Grinspoon D. H., Pollack J. B., Sitton B. R., Carlson R. W., Kamp L. W., Baines K. H., Encrenaz Th., Taylor F. W. Probing Venus's cloud structure with Galileo NIMS // Planet. Space Sci. 1993. V. 41. P. 515—542.

Gulick V. C. Origin of the valley networks on Mars: a hydrological perspective // Geomorphology. 2001. V. 37. P. 241—268.

Hanse C. J., Kawaler S. D. Stellar Interiors. Physical Principles, Structure, and Evolution. — Berlin : Springer, 1994.

Hartmann W. K., Berman D. C. Elysium Planitia lava flows: crater count chronology and geological implications // J. Geophys. Res. 2000. V. 105. P. 15011—15025.

Hartmann W. K., Davis D. R. Satellite-sized planetesimals and lunar origin // Icarus. 1975. V. 24. P. 504—515.

Hartmann W. K., Neukum G. Cratering chronology and the evolution of Mars // Space Sci. Rev. 2001. V. 96. No. 1/4. P. 165—194.

Hartmann W. K. A Traveller's Guide to Mars. The Misterious Landscapes of the Red Planet. — N. Y. : Workman Publ., 2003.

Hawley J. F., Balbus S. A. A powerful local shear instability in weakly magnetized disk. II. Nonlinear evolution // Astrophys. J. 1991. V. 376. P. 223—233.

Head J. W., Basilevski A. T. Venus: Surface and Interior // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 161—190.

Head J. W., III; Hiesinger H., Ivanov M. A., Kreslavsky M. A., Pratt S., Thomson B. J. Possible ancient oceans on Mars: evidence from Mars Orbiter Laser Altimeter Data // Science. 1999. V. 286. P. 2134—2137.

Hildebrand R. The determination of cloud masses and dust characteristics from submillimeter thermal emission Q. J. R. // Astron. Soc. 1983. V. 24. P. 267—282.

Holtzman J. Microwave background anisotropies and large-scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos // Astrophys. J. Suppl. 1989. V. 71. P. 1.

Holtzman J., Primack J. R. Cluster correlations for cold and hot dark matter and other models // Astrophys. J. 1993. V. 405. P. 428.

Hunten D. M., Tomasko M. G., Flasar F. M., Samuelson R. E., Strobel D. F., Stevenson D. J. Titan // Saturn / eds. T. Gehrels, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1984. — P. 671—759.

Hunten D. M. Venus: Atmosphere // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 147—160.

Icarus. 1998. V. 135(1). Special issue.

Ingersoll A. P., Pollard D. Motion in the interiors and atmospheres of Jupiter and Saturn: Scale analysis, anelastic equations, barotropic stability criterion // Icarus. 1982. V. 52. P. 62—80

Ingersoll A. P., Barnet C. D., Beebe R. F., Flasar P. M., Hinson D. P., Limaye S. S., Sromovsky L. A., Suomi V. E. Dynamic meteorology of Neptune // Neptune and Triton / ed. D. Cruikshank. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1995. — P. 613—682.

Ingersoll A. P., Vasalada A. R. et al. [Galileo Imaging Team]. Dynamics of Jupiter's atmosphere // SPSI: The Galileo Mission to the Jupiter System / eds. M. Ya. Marov, R. W. Carlson. — Highlights of Astronomy, 1998.

Ipatov S. I., Marov M. Ya., Mather J. C. Delivery of volatiles to the terrestrial planets // Astrobiology. 2006b. V. 6. No. 1. P. 241.

Ipatov S. I., Mather J. C., Marov M. Ya. Migration of icy bodies to the terrestrial planets // Joint Assembly AGU, GS, MAS, MSA, SEG, and UGM, 23—26 May, Baltimore, Maryland, USA, Eos Trans. AGU. 2006a. 87(36).

Ivanov M. A., Head J. W. Chryse Planitia Mars: topographic configuration outflow channel continuity and sequence and tests for hypothesized ancient bodies of water using Mars Orbiter Laser Altimeter (MOLA) data // J. Geophys. Res. 2001. V. 106 P. 3275—3295.

J. Geophys. Res. Planet. 1998. V. 103. (E9) [special issue] ; (E10) [special issue].

Jakosky B. M., Jones J. H. The history of Martian volatiles // Rev. Geophys. 1997. V. 35. P. 1—16.

Jenkins J. M., Kolodne, B. J., Butler B. J., Suleiman Sh. H., Steffes P. G. Microwave remote sensing of the temperature and distribution of sulfur compounds in the lower atmosphere of Venus // Icarus. 2002. V. 158. P. 312—328.

Jewitt, D., Luu J., Trujillo C. Large Kuiper Belt Objects: The Mauna Kea 8K CCD Survey // Astron. J. 1998. V. 115. No. 5. P. 2125—2135.

Jewitt D. Kuiper Belt Objects // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 1999. V. 27. P. 287—312.

Jewitt D., Chizmadia L., Grimm R., Prialnik D. Water in the Small Bodies of the Solar System // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Johnson T. V., Soderblom L. A. Io // Sci. Am. 1983. V. 249. P. 56—67.

Kahn R. The spatial and seasonal distribution of Martian clouds and some meteorological implications // J. Geophys. Res. 1984. V. 89. P. 6671—6688.

Kaplan J., Yorke J. A. // Springer Lecture Notes in Mathematics. 1978. No. 730. P. 228.

Kasting J. F., Toon O. B., Pollack J. B. How climate evolved on the terrestrial planets // Sci. Am. 1988. V. 256. P. 90—97.

Kemper F., Vriend W. J., Tielens A. G. G. M. The Absence of Crystalline Silicates in the Diffuse Interstellar Medium // Astrophys. J. 2004. V. 609. P. 826—837.

Kerzhanovich V. V., Marov M. Ya. The atmospheric dynamics of Venus according to Doppler measurements by the Venera entry probes // Venus / ed. D. M. Hunten, L. Colin, T. M. Donahue, V. I. Moroz. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1983. — P. 766—778.

Keszthelyi L., McEwe A. Magmatic differentiation of Io // Icarus. 1997. V. 130. P. 437—448

Khurana K. K., Kivelson M. G., Stevenson D. J., Schubert G., Russell C. T., Walker R. J., Joy S., Polanskey C. Induced magnetic fields as evidence for subsurface oceans in Europa and Callisto // Nature. 1998. V. 395. P. 777—780.

Kieffer H. H., Jakosky B. M., Snyder C. W., Matthews M. S. (eds.). Mars. — Tucson, AZ : The University of Arizona Press, 1992.

Kippenhahn R., Weigert A. Stellar Structure and Evolution. — Berlin : Springer, 1990.

Kita N. T., Huss G. R., Tachibana S., Amelin Y., Nyquist L. E., Hutcheon I. D. Constraints on the Origin of Chondrules and CAIs from Short-lived and Long-Lived Radionuclides // Chondrites and the Protoplanetary Disk / ed. A. N. Krot, E. R. D. Scott, B. Reipurth. — San Francisco, 2005. — (ASP Conference Series). — P. 558—587.

Kivelson M. G., Khurana K. K., Russell C. T., Walker R. J., Warnecke J., Coroniti F. V., Polanskey C., Southwood D. J., Schubert G. Discovery of Ganymede's magnetic field by the Galileo spacecraft // Nature. 1996. V. 384. P. 537—541

Kivelson M. G., Khurana K. K., Stevenson D. J., Bennett L., Joy S., Russell C. T., Walker R. J., Zimmer C., Polanskey C. Europa and Callisto: induced or intrinsic fields in a periodically varying plasma environment // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 4609—4625.

Kliore A. J., Pate R. The vertical structure of the atmosphere of Venus from Pioneer-Venus orbiter radio occultation // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 7957.

Klypin A., Holtzman J., Primack J. R., Regos E. Structure formation with cold plus hot dark matter // Astrophys. J. 1993. V. 416. P. 1.

Kolb E. W., Turner M. S. The Early Universe. N. Y. : Addison-Wesley, 1990.

Krimigis S. M., Mitchell D. G., Hamilton D. C., Dandouras J., Armstrong T. P., Bolton S. J., Cheng A. F., Gloeckler G., Hsieh K. C., Keath E. P., Krupp N., Lagg A., Lanzerotti L. J., Livi S., Mauk B. H., McEntire R. W., Roelof E. C., Wilken B., Williams D. J. A nebula of gases from Io surrounding Jupiter // Nature. 2002. V. 415. P. 994—996.

Kwok S. The Origin and Evolution of Planetary Nebulae. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

Lagrange A.-M., Backman D., Artymowicz P. Planetary material around main sequence stars // Protostars and Planets IV / eds. V. Mannings, A. P. Boss, S. S. Russell. — Tucson : University of Arizona Press, 2000. P. 639.

Laskar J. A. The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones // Icarus. 1990. V. 88. P. 266—291.

Laskar J. A. Numerical experiment on the chaotic behavior of the solar system // Nature. 1989. V. 338. P. 237—238.

Levison H., Duncan M. From the Kuiper belt to Jupiter family comets: The spatial distribution of ecliptic comets // Icarus. 1997. V. 127. P. 13—23.

Levison, H. F., Weissman P. R. The Kuiper belt // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 557—584.

Levison H. F., Morbidelli A., Gomes R., Backman D. Planet migration in planetesimal discs // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Levy E. H., Lunine J. L. Books-Received — Protostars and Planets III // British Astron. Assoc. J. 1993. V. 103. No. 5. P. 266.

Lewis J. S. Physics and Chemistry of the Solar System. — N. Y. : Academic Press, 1997. — [rev. ed.].

Liddle A., Rand L. The cold dark matter density perturbations // Phys. Rep. 1993. V. 231. P. 1—105.

Lieske J. H. Theory of Motion of Jupiter's galilean Satellites // Astron. Astrophys. 1977. V. 56. P. 333—352.

Limaye S. S., Grund C. J., Burre S. P. Zonal mean circulation at the cloud level of Venus: Spring and Fall 1979 OCPP observationbs // Icarus. 1982. V. 51. P. 416—439.

Linde A. D. Particle Physics and Inflationary Cosmology. — Harwood Academic. Chur., 1990.

Linde A. D. The self-reproducing inflationary universe // Sci. Am. 1994. V. 271. No. 5. P. 48—55.

Lissauer J. J. Planet formation // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1993. V. 31. P. 129—174.

Lissauer J. J., Stevenson D. J. Formation of Giant Planets // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Litvak M. L., Mitrofanov I. G., Kozyrev A. S., et al. Comparison between polar regions of Mars from HEND/Odyssey data // Icarus. 2006. V. 180. No. 1. P. 23—37.

Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // J. Ftmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130.

Lucchitta B. K. Antarctic ice streams and outflow channels on Mars // Geophys. Res. Lett. 2001. V. 28. P. 403—406.

Luhman K. L., Joergen V., Lad C., Muzeroll J., Pascucc I., White R. The formation of brown dwarfs: Observations // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Lunine J. The atmospheres of Uranus and Neptune // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1993. V. 31. P. 217—263.

Lyne A. G., Graham-Smith F. Pulsar Astronomy. — Cambridge : Cambridge University Press, 1998.

Makalkin A. B. Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability // Lunar Planet. Sci. 1994. V. 25. P. 827—828.

Malhotra R. The Origin of Pluto's Orbit: Implications for the Solar System Beyond Neptune // Astron. J. 1995. V. 110. P. 420—429.

Malin M. C., Edgett K. S. Evidence for recent ground water seepage and surface runoff on Mars // Science. 2000. V. 288. P. 2330—2335.

Malin M. C., Edgett K. S. Sedimentary rocks of early Mars // Science. 2001. V. 290. P. 1927—1937.

Mandelbrot B. B. On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars // J. Fluid Mechanics. 1975. V. 72. P. 401—416.

Mangold N., Allemand P. Topographic analysis of features related to ice on Mars // Geophys. Res. Lett. 2001. V. 28. P. 407—410.

Marchal C. The Three-body Problem. — Amsterdam : Elsevier, 1990.

Marcy G., Cochran W., Mayor M. Extra solar planets around main sequence stars // Protostars and Planets IV / eds. Mannings, A. Boss, Russell. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 2000. — P. 1285.

Marov M. Ya. Venus: A perspective at the beginning of planetary exploration // Icarus. 1972. V. 16. P. 415—461.

Marov M. Ya., Avduevsky V. S., Borodin N. F., Ekonomov A. P., Kerzhanovich V. V., Lysov V. P., Moshkin B. Ye., Rozhdestvensky M. K. Preliminary results on the Venus atmosphere from the Venera 8 descent module // Icarus. 1973. V. 20. P. 407—421.

Marov M. Ya. Results of Venus missions // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1978. V. 16. P. 141—170.

Marov M. Ya., Lystsev V. E., Lebedev V. N., Lukashevich N. L., Shari V. P. The structure and microphysical properties of the Venus clouds: Venera 9, 10, and 11 data // Icarus. 1980. V. 44. P. 608—639.

Marov M. Ya., Galtsev A. P., Shari V. P. Estimation of the influence of sulfur dioxide on heat transfer in the Venus atmosphere // Proceedings of the 19th Lunar and Planetary Sci. Conf. — 1989. — P. 349—354

Marov M. Ya., Shematovich V. I., Bisikalo D. V., Gerard J.-C. Non-Equilibrium Kinetics in the Aeronomy Problems: Theory and Applications. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers ; Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1996. — V. 274. — P. 377—412.

Marov M. Ya., Grinspoon D. H. The Planet Venus. — New Heaven—London : Yale University Press, 1998.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Mechanics of Turbulence of Multicomponent Gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2001.

Marov M. Ya., Ipatov S. I. Volatile inventory and early evolution of the planetary atmospheres // Collisional Processes in the Solar System / eds. M. Ya. Marov, H. Rickman. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Acad. Publ., 2001. — P. 223—247.

Marov M. Ya., Ipatov S. I. Migration of dust particles and volatiles delivery to the inner planets // Abstracts of 35th Lunar and Planetary Science Conference, March 14—18, League City, TX, USA, 2005. — P. 1268.

Marov M. Ya., Ipatov S. I. Миграция пылевых частиц и доставка летучих на планеты земной группы // Астрон. Вест. 2006. Т. 40. № 5.

Marov M. Ya., Ipatov S. I. Volatiles Delivery to the Terrestrial Planets // 26th IAU General Assembly, 14—25 August, 2006, Prague, Czech Republic. — P. 359. Abstract No. JD 11—24.

Marov M. Ya., Ipatov S. I. Volatiles and Biogenic Matter Delivery by Small Bodies and Dust Particles // II International Conference «Biosphere Origin and Evolution», Oct. 28 — Nov. 2, 2007, Loutraki, Greece : abstracts book. — 2007. — P. 13.

Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. — N. Y. : Springer-Verlag, 1976.

Mather J. C., Fixsen D. J., Shafer R. A., Mosie C., Wilkinson D. T. Calibrator Design for the COBE Far-Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS) // Astrophys. J. 1999. V. 512. P. 511—520.

Mathew K. J., Marti K. Early evolution of Martian volatiles: nitrogen and noble gas components in ALH84001 and Chassigny // J. Geophys. Res. 2001. V. 106. P. 1401—1422.

Mathis J. S. Interstellar dust and extinction // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1990. V. 28. P. 37—70.

Matson D., Blaney D. Io // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 357—376.

Mayer L., Governato F., Kaufmann T. The formation of disk galaxies in computer simulations. — eprint arXiv: 0801.3845. — 2008.

Mayor M., *Queloz D.* A Jupiter-mass companion to a solar-type star // Nature. 1995. V. 378. P. 355.

McCinnon W. B., *Kirk R. L.* Triton // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A.McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. P. 405—434.

McEwen A. S., *Keszthelyi L.*, *Geissler P.*, *Simonelli D. P.*, *Carr M. H.*, *Johnson T. V.*, *Klaasen K. P.*, *Breneman H. H.*, *Jones T. J.*, *Kaufman J. M.*, *Magee K. P.*, *Senske D. A.*, *Belton M. J. S.*, *Schubert G.* Active Volcanism on Io as Seen by Galileo SSI // Icarus. 1998. V. 135. P. 181—219.

McEwen A. S., *Keszthelyi L.*, *Spencer J. R.*, *Schubert G.*, *Matson D. L.*, *Lopes-Gautier R.*, *Klaasen K. P.*, *Johnson T. V.*, *Head J. W.*, *Geissler P.*, *Fagents S.*, *Davies A. G.*, *Carr M. H.*, *Breneman H. H.*, *Belton M. J. S.* High-temperature silicate volcanism on Jupiter's moon Io // Science. 1998. V. 281. P. 87—90.

McFadden L.-A. Near-Earth asteroids // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 607—628.

McKay C. P., *Davis W. L.* Planets and the origin of life // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 899—922.

McKeegan K. D., *Davis A. M.* // Meteorites, Planets, and Comets / ed. A. M. Davis. — V. 1 : Treatise on Geochemistry / eds. H. D. Holland, K. K. Turekian. — Oxford : Elsevier-Pergamon, 2003. — P. 431—460.

McSween H. Y., *Jr.* Meteorites and their Parent Planets. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999.

McSween H. Y., *Jr.* What we have learned about Mars from SNC meteorites // Meteoritics. 1994. V. 29 P. 757—79.

Meier R., *Owen T. C.* Cometary Deuterium // Space Sci. Rev. 1999. V. 90. No. 1/2. P. 33—44

Meier R., *Smith B.*, *Owen T.*, *Terrile R. J.* The surface of Titanfrom NICMO Sobservations with Hubble Space Telescope // Icarus. 2000. V. 145. P. 462—473.

Mellon M. T., *Feldman W. C.*, *Prettyman T. H.* The presence and stability of ice in the southern hemisphere of Mars // Icarus. 2004. V. 169. No. 2. P. 324—340.

Melosh H. J., *Sonett C. R.* When worlds collide: jetted vapor plumes and the moon's origin // Origin ofthe Moon / eds. W. K. Hartmann, R. J. Phillips, G. J. Taylor. — Houston : Lunar Planet. Inst., 1986. — P. 621—642.

Meyer M. R., *Backman D. E.*, *Weinberger A.*, *Wyatt M. C.* Evolution of circumstellar discs around normal stars: Placing our solar system in context // Protostars and Planets V. — Arizona Press., AZ, 2007.

Millan-Gabet R., *Malbet F.*, *Akeson R.*, *Leinert C.*, *Monnier J.*, *Waters R.* The circumstellar environments of young stars at AU scales // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Mitchell, *J. F. B.* The 'greenhouse' effect and climate change // Rev. Geophys. 1989. V. 27 P. 115—139.

Morbidelli A. New insights on the Kuiper belt // Science. 1998. V. 280. P. 2071—2073.

Morbidelli A., Chambers J., Lunine J. I., Petit J. M., Robert F., Valsecchi G. B., Cyr K. E. Source regions and time scales for the delivery of water to Earth // Meteorit. Planet. Sci. 2000. V. 35. P. 1309—1320.

Morbidelli A., Chambers J., Lunine J. I. Source regions and timescales for the delivery of water to the Earth // Meteor. Planet. Sci. 2000. V. 35. P. 1309—1320.

Morbidelli A., Levison H., Tsiganis K., Gomes R. Chaotic capture of Jupiter's Trojan asteroids in the early Solar System // Nature. 2005. V. 435. P. 462—465.

Moroz V. I., Ekonomov A. P., Moshkin B. Ye., Revercomb H. E., Sromovsky L. A., Shofield J. T., Spankush D., Taylor F. W., Tomasko M. G. Venus International Reference Atmosphere / eds. A. J. Kliore et al. // Adv. Space Res. 1985. V. 5. P. 197—232.

Morrison D. (ed). Satellites of Jupiter. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1982

Moser J. On invariant curves of area-preserving mappings on an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Coettingen Math. Phys. 1962. V. K1. P. 1.

Murray C. D., Dermott S. F. Solar System Dynamics. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999.

Murray C. D. Chaotic motion in the Solar system // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 825—844.

Nagasawa M., Thommes E. W., Kenyon S. J., Bromley B. C., Lin D. N. C. The diverse origins of terrestrial-planet systems // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Najita J. R., Carr J. S, Glassgold A. E., Valenti J. A. Gaseous inner discs // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Nakagawa Y., Nakagawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517—528.

Narlikar J. V. Introduction to Cosmology. — Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

Nash D. B., Carr M. H., Gradie J., Hunten D. M., Yoder C. F. Io // Satellites. 1986. P. 629—688.

Natta A., Testi L., Calvet N., Henning T., Waters R., Wilner D. Dust in protoplanetary discs: Properties and evolution // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

O'Dell C. R. Observational properties of the Orion proplyds // Astron. J. 1998. V. 115. P. 263.

Obukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt. 1. P. 77—81.

Ockert-bell M. E., Burns J. A., Danbar I. J., Thomas P. C., Veverka J. The structure of Jupiter's ring system as revealed by the Galileo imaging experiment // Icarus. 1999. V. 138 P. 188.

Offen J. R., Kline S. J. A Proposed Model of the Bursting Process in Turbulent Boundary Layer // J. Fluid. Mech. 1975. V. 70. No. 9. P. 209—228.

Owen T., Bar-Nun A. Comets, impacts and atmospheres // Icarus. 1995. V. 116. P. 215—226.

Owen T., Mahaffy P., Niemann H. B., Atreya S., Donahue T., Bar-Nun A., de Pater I. A low-temperature origin for the planetesimals that formed Jupiter // Nature. 1999. V. 402. No. 6759. P. 269—270.

Owen T. C., Bar-Nun A. From the interstellar medium to to planetary atmospheres via comets // Collisional Processes in the Solar System / eds. M. Ya. Marov, H. Rickman. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Acad. Publ., 2001. — P. 249—264.

Oyama V. I., Carle G. C., Woeller F., Pollack J. B., Reynolds R. T., Craig R. A. Pioneer Venus gas chromotography of the lower atmosphere of Venus // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 7891—7902.

Padgett D., BranderW., Stapelfeldt S. S., Terebey S., Koerner D. HST/NICMOS imaging of disks and envelopes around very young stars // Astron. J. 1999. V. 117. P. 1490.

Papaloizou J. C. B., Nelson R. P., Kley W., Masset F. S., Artymowicz P. Disk-planet interactions during planet formation // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Peale S. J., Cassen P., Reynolds R. T. Melting of Io by tidal dissipation // Science. 1979. V. 203. P. 892—894.

Peebles P. J. E. Principles of Physical Cosmology. — Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1993.

Penzias A. A., Wilson R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s // Astrophys J. 1965. V. 142. P. 419—421.

Phillips R. J., Zuber M. T., Solomon S. C., Golombek M. P., Jakosky B. M., Banerdt W. B., Smith D. E., Williams R. M. E., Hynek B. M., Aharonson O., Hauck S. A. Ancient geodynamics and global scale hydrology on Mars // Science. 2001. V. 291. P. 2587—2591.

Poincaré H. Calcul des Probabilites. — Paris : Gauthier-Villars, 1912.

Pollack J. B., Toon O. B., Boese R. Greenhouse models of Venus' high surface temperature, as constrained by Pioneer Venus measurements // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 8223—8231.

Pollack J. B., Sagan C. Planetary Engineering // Resources of Near-Earth Space / eds. J. Lewis, M. Matthews. — University of Arizona Press, 1991.

Pollack J. B., Dalton J. B., Grinspoon D. H., Wattson R. B., Freedman R., Crisp D., Allen A., Bezard B., de Bergh G. L. P., Ma Q., Tipping R. Near infrared light from Venus' nightside: A spectroscopic analysis // Icarus. 1993. V. 103. P. 1—42.

Pollack J. B., Hollenbach D., Beckwith S., Simonelli D. P., Roush T., Fong W. Composition and radiative properties of grains in molecular clouds and accretion disks // Astrophys. J. 1994. V. 421. P. 615—639.

Pomeau Y., Manneville P. Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems // Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189—197.

Porco C. C., Nicholson P. D., Lissauer J. J., Cuzzi J. N., Esposito L. W. Neptune and Triton // Neptune's rings system / ed D. Cruikshank. — University of Arizona Press, 1995. — P. 703—804.

Porco C. C. Planetary rings // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 457—476.

Primack J. R., *Gross M. A. K.* Hot dark matter in cosmology // Current Aspects of Neutrino Physics / ed. D. O. Caldwell. — Berlin : Springer, 2001.

Primack J. R., *Holtzman J.*, *Klypin A.*, *Caldwell D. O.* Cold and hot dark matter cosmology // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 2160—2163

Protostars and Planets V / ed. B. Reipurth, D. Jewitt, K. Keil. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 2007.

Rees D., *Roper R. G.*, *Lloye K. H.*, *Low C. H.* Determination of the structure of the atmosphere between 90 and 250 km by means of contaminant releases at Woomera, May, 1968 // Phys. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. A271. P. 631

Revercomb H. E., *Sromovsky L. A.*, *Suomi V. E.* Net thermal radiation measurements in the atmosphere of Venus // Icarus. 1985. V. 61. P. 521—538.

Richard D., *Zahn J.-P.* Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette—Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734—738.

Richardson L. F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph // Proc. Roy. Soc. 1926. V. A110. No. 756. P. 709—737.

Rieder R. R., *Gellert R.*, *Anderson R. C.*, *Bruckner J.* Chemistry of rocks and soils at Meridiani Planum from the alpha particle X-ray spectrometer // Science. 2004. V. 306. P. 1746—1749.

Rossow W. B., *Del Genio A. D.*, *Limaye S. S.*, *Travis L. D.*, *Stone P. H.* Cloud morphology and motions from Pioneer Venus images // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 8107—8128.

Ruelle D., *Takens F.* On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167 ; V. 23. P. 343.

Russell S. S., *Hartmann L. A.*, *Cuzzi J. N.*, *Krot A. N.*, *Weidenschilling S. J.* Timescales of the Solar Protoplanetary Disk // Meteorites and the Early Solar System II / eds. D. Lauretta, L. A. Leshin, H. McSween. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 2006. — P. 233—251.

Sagan C. Reducing greenhouses and the temperature history of Earth and Mars // Nature. 1977. V. 269. P. 224—226.

Sagan C., *Khare B. N.*, *Lewis J. S.* Organic matter in the Saturn system // Saturn / eds. T.Gehrels and M. S. Matthews). — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1984. — P. 788—807

Salpeter E. E. The Luminosity Function and Stellar Evolution // Astrophys. J. 1955. V. 121. P. 161—167.

Samuelson R. E. Atmospheric thermal structure // Encyclopedia of Planetary Sciences / eds. J. H. Shirley, R. H. Fairbridge. — London : Chapman and Hall, 1997.

Schneider N. M., *Trauger J. T.* The Structure of the Io Torus The structure of the Io torus // Astrophys. J. 1995. V. 450. P. 450.

Schneider G., *Smith, B. A.*, *Becklin E. E.*, *Koerner D. W.*, *Meier R.*, *Hines D. C.*, *Lowrance P. J.*, *Terrile R. J.*, *Thompson R. I.*, *Rieke M.* NICMOS imaging of the HR 4796A circumstellar disk // Astrophys. J. Lett. 1999. V. 513. P. 127.

Schubert G. Inside the solid planets and moons // Phys. World. 1997. V. 10. P. 45—49.

Schubert G., *Covey C.*, *Del Genio A. D.*, *Elson L. S.*, *Keating G.*, *Seiff A.*, *Young R. E.*, *Apt J.*, *Counselman C. C.*, *Kliore A. J.*, *Limae S. S.*, *Revercomb H. E.*, *Sromovsky L. A., Suomi V. E., Taylor F. W., Woo R., von Zahn U.* Structure and circulation of the Venus atmosphere // J. Geophys. Res. 1983. V. 85. P. 8007—8025.

Schubert G., Zhang K., Kivelson M. G., Anderson J. D. The magnetic field and internal structure of Ganymede // Nature. 1996. V. 384. P. 544—545.

Seiff A. Thermal structure of the atmosphere of Venus // Venus / ed. D. M. Hunten, L. Colin, T. M. Donahue, V. I. Moroz. Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1983. — P. 215—279.

Seiff A., Shofield J. T., Kliore A. J., Taylor F. W., Revercomb H. E., Sromovsky L. A., Kerzhanovich V. V., Moroz V. I., Marov M. Ya. Models of the structure of the atmosphere of Venus from the surface to 100 kilometers altitude // Venus International Reference Atmosphere / eds. A. J. Kliore et al. // Adv. Space Res. 1985. V. 5. P. 3—58.

Sekiya M., Takeda H. (2003) Were planetesimals formed by dust accretion in the solar nebula? // Earth Planets Space. V. 55. P. 263—269.

Sekiya M., Takeda H. (2005) Does the gas flow through a porous dust aggregate help is growth in a protoplanetary disk? // Icarus. V. 176. P. 220—223.

Shakura N. I., Sunyaev R. A. (1973) Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. V. 24. P. 337—353.

Silk J, Szalay A. S., Zel'dovich Ya. B. The large-scale structure of the universe // Sci. Am. 1983. V. 249. No. 4. P. 56.

Skorov Yu. V., Marov M. Ya., Korolev A. E. Mass Transfer in the Near-Surface Layer of a Cometary Nucleus: A Gas-Kinetic Approach // Solar System Research. 2002. V. 36. No. 2. P. 87—96.

Smoot G. F., Bennett C. L., Kogut A., Wright E. L., Aymon J., Boggess N. W., Cheng E. S., de Amici G., Gulkis S., Hauser M. G., Hinshaw G., Jackson P. D., Janssen M., Kaita E., Kelsall T., Keegstra P., Lineweaver C., Loewenstein K., Lubin P., Mather J., Meyer S. S., Moseley S. H., Murdock T., Rokke L., Silverberg R. F., Tenorio L., Weiss R., Wilkinson D. T. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps // Astrophys J. 1992. V. 396. L1—L5.

Spencer J. Europa // EAA. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysucs. — Bristol : Nature Publishing Group and Institute of Physics Publishing, Dirac House, Temple Back, 2001.

Spudis P. D. The Once and Future Moon. — Washington : Smithsonian Institution Press, 1996.

Spudis P. D. The Once and Future Moon. — Washington : Smithsonian Institution Press, 1996.

Squyres S. W., Kasting J. F. Early Mars: how warm and how wet? // Science. 1994. V. 265. P. 744—749.

Squyres S. W., Grotzinger J. P., Aridson R. E., et al. In situ evidence for an ancient aqueous environment at Meridiani Planum, Mars // Science. 2004. V. 306. P. 1709—1714.

Strom S. E., Edwards S., Skrutskie M. F. Evolutionary time scales for circumstellar disks associated with intermediate- and solar-type stars // Protostars and planets III (A93—42937 17—90). — 1993. — P. 837—866.

Sunyaev R. A., Zeidovich Ya. B. Formation of Clusters of Galaxies: Protocluster Fragmentation and Intergalactic Gas Heating // Astronomy and Astrophysics. 1972. V. 20. P. 189.

Suomi V.E,. Sromovsky L. A., Revercomb H. E. Net radiation in the atmosphere of Venus: Initial results from Magellan // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. P. 8200—8218.

Sussman G. J., Wisdom J. Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic // Science. 1988. V. 241. P. 433—437.

Sussman G. J., Wisdom J. Chaotic evolution of the solar system // Science. 1992. V. 257. P. 56—62.

Taylor S. R. The Moon // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 247—276.

Titov D. V., Svedhem H., Trillard D., Rodriguez-Canabal J. The Venus Express Team // 35th COSPAR Scientific Assembly, Paris, 2004. — P. 3963.

Tokano T. Water cycle in the atmosphere and shallow subsurface // Water on Mars and life / ed. T. Tokano. — Berlin—Heidelberg : Springer, 2005. — P. 191—216.

Tomasko M. G. The thermal balance of the lower atmosphere of Venus // Venus / eds. D. M. Hunten, L. Colin, T. M. Donahue, V. I. Moroz. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1983.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217—1238.

Trimble V. Existence and nature of dark matter in the universe // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1987. V. 25. P. 425—472.

Tutukov A. V. Early stages of dynamical evolution of star cluster models // Astron. Astrophys. 1978. V. 70. P. 57.

Van Boekel R., Min M., Leinert C., Waters L. B. F. M., Richichi A., et al. The building blocks of planets within the 'terrestrial' region of protoplanetary disks // Nature. 2004. V. 432. P. 479—482.

Wadhwa M., Amelin Y., Davis A. M., Lugmair G. W., Meyer B., Gounelle M., Desch S. J. From Dust to Planetesimals: Implications for the Solar Protoplanetary Disk from Short-lived Radionuclides // Protostars and Planets V. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 2007.

Wadhwa M., Russell S. S. Timescales of Accretion and Differentiation in the Early Solar System: the Meteoritic Evidence // Protostars and Planets IV / eds. V. Mannings, A. P. Boss, S. S. Russell. — Tucson, AZ : Univ. of Arizona Press, 2000. — P. 995—1018.

Ward W. R., Rudy D. Resonant obliquity of Mars? // Icarus. 1991. V. 94. P. 160—164.

Ward W. R., Murray B. C., Malin M. C. Climatic variations on Mars. 2. Evolution of carbon dioxide atmosphere and polar caps // J. Geophys. Res 1974. V. 79. P. 3387—3395.

Ward W. R., Hahn M. Neptune's eccentricity and the nature of the Kuiper Belt // Science. 1998. V. 280. P. 2104—2106.

Wasserburg G. J. Short-lived nuclei in the early solar system // Protostars and Planets II / eds. D. C. Black, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : Univ. of Arizona Press, 1985. — P. 703—737.

Watson L. L., Hutcheon I. D., Epstein S., Stolper E. M. Water on Mars: clues from deuterium/hydrogen and water contents of hydrous phases in SNC meteorites // Science. 1994. V. 265 P. 86—90.

Watson A. M., Stapelfeldt K. R., Wood K., Menard F. Multi-wavelength imaging of young stellar object discs: Toward an understanding of disc structure and dust grain evolution // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Weidenschilling S. J. Formation of planetesimals and accretion of the terrrestrial planets // Space Sci. Rev. 2000b. V. 92. P. 295—310.

Weidenschilling S. J. Formation of planetesimals in the solar nebula // Protostars and Planets III / eds. E. H. Levy, J. I. Lunine. — Tucson : Univ. of Arizona Press, 2000a.

Weidenschilling S. J. The origin of comets in the solar nebula: a unified model // Icarus. 1997. V. 127. P. 290—306.

Weissman P. R. The Oort cloud // Completing the Inventory of the Solar System / eds. T. W. Rettig, J. M. Hahn. — 1996. — (ASP Conference Series ; 107). — P. 265—288.

West R. A., Strobel D. F., Tomasko M. G. Clouds, aerosols and photochemistry in the Jovian atmosphere // Icarus. 1986. V. 65. P. 161—217.

West R. A. Atmospheres of the giant planets // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 315—338.

Wetherill G. W., Stewart G. R. Accumulation of a swarm of small planetesimals // Icarus. 1989. V. 77. P. 330—357.

Wetherill G. W. Formation of the Earth // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1990. V. 18. P. 205—256.

White S. D. M., Frenk C. S., Davis M. Clustering in a neutrino-dominated universe // Astrophys. J. 1983. V. 274. L1.

Whitworth A., Bate M. R., Nordlund A., Reipurth B., Zinnecker H. The formation of brown dwarfs: Theory // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Wilhelms D. E. To a Rocky Moon: a Geologist's History of Lunar Exploration. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1993.

Wilson L. Planetary volcanism // Encyclopedia of the Solar System / eds. P. R. Weissman, L.-A. McFadden, T. V. Johnson. — San Diego : Academic Press, 1999. — P. 877—898.

Whipple F. L. A Comet Model. II. Physical Relations for Comets and Meteors // Astrophys. J. 1951. V. 113. P. 464.

Wisdom J. Urey Prize Lecture: Chaotic dynamics in the solar system // Icarus. 1987. V. 72. P. 241—275.

Woo R., Armstrong J. W., Kliore A. J. Small scale turbulence in the atmosphere of Venus // Icarus. 1982. V. 52. P.12.

Wooden D., Desch S., Harker D., Gail H.-P., Keller L. Comet Grains and Implications for Heating and Radial Mixing in the Protoplanetary Disk // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Youdin A. N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494—505.

Zel'dovich Ya. B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299—312.

Zharkov V. N., Gudkova T. V. Construction of Martian Interior Model // Solar System Research. 2005. V. 39. No. 5. P. 343—373.

Zuber M. T., Solomon S. C., Phillips R. J., Smith D. E., Tyler G. L., Aharonson O., Balmino G., Banerdt W. B., Head J. W., Johnson C. L., Lemoine F. G., McGovern P. J., Neumann G. A., Rowlands D. D., Zhong S. Iternal structure and early thermal evolution of Mars from Mars Global Surveyor topography and gravity // Science. 2000. V. 287. P. 1788—1793.

Zuckerman B., Becklin E. E. Submillimeter studies of main-sequence stars // Astrophys. J. 1993. V. 414. P. 793.

Zurek R. W., Barnes J. R., Haberle R. M., Pollack J. B., Tillmann J. E., Leovy C. B. Dynamics of the atmosphere of Mars // Mars / eds. H. H. Kieffer et al. — Tucson, AZ : Univ. Arizona Press, 1992. — P. 835—933.

К главе 2

Анищенко В. В., Астахов В. В., Вадивасова Т. Т., Нейман А. А., Стрелкова Г. Г., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.

Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. — М. : ИЛ, 1961.

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1974.

Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006.

Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. — М. : Мир, 1990.

Колеман (*Coleman B. B.*) // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. No. 1.

Колесниченко А. А., Тирский Г. Г. Соотношения Стефана— Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред // Числ. метод. мех. сплош. среды. 1976. Т. 7. № 4.

Колесниченко А. А., Маров М. М. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Куртисс (*Curtiss C. C.*). Symmetric gaseous diffusion coefficients // J. Chem. Phys. 1968. V. 49. No. 7. P. 2917—2923.

Лапин Ю. Ю., Стрелец Н. Н., Щур Н. Н. Расчет тепло- и массообмена при течениях вязких неравновесных газовых смесей с учетом эффектов многокомпонентной диффузии // Тепломассообмен, VII. — Т. 3. — Минск : Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1984. — С. 121—126.

Максвелл (*Maxwell J. J.*) // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell / ed. W. W. Niven. — V. 1. — Cambridge, England : Cambridge U. U., 1890. — P. 377.

Макенфус, Куртис (*Muckenfuss C., Curtiss C. C.*). Thermal Conductivity of Multicomponent Gas Mixtures. // J. Chem. Phys. 1958. V. 29. No. 10. P. 1273—1289.

Маров М. М., Колесниченко А. А. Введение в планетную аэрономию. — М. : Наука, 1987.

Мейсон, Саксена (*Mason E. E.*, *Saxena S. S.*). Approximate formula for the conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids. 1958. V. 1. No. 5. P. 361—369.

Мейсон (*Mason E. A.*). The Onsager reciprocal relations. Experimental evidence // Foundations of continuum thermodynamics. — London—Basingstoke : MacMillan, 1974.

Миллер (*Miller D. D.*). The Onsager relations; Experimental evidence. // Foundations of continuum thermodynamics. — London—Basingstoke : MacMillan, 1974.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. — М. : Едиториал УРСС, 2002.

Нигматулин Р. Р. Динамика многофазных сред. — Ч. I. — М. : Наука, 1987.

Нолл (*W. Noll*). The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. — Berlin : Springer, 1974.

Оран Э., *Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих газов. — М. : Мир, 1990.

Пригожин И., *Дефей Р.* Химическая термодинамика. — Новосибирск : Наука, 1966.

Пригожин И., *Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. — М. : Мир, 2002.

Седов Л. Л. Введение в механику сплошных сред. — М. : ГИФМЛ, 1962.

Седов Л.И. Мысли об ученых и науке прошлого и настоящего. — М. : Наука, 1973.

Седов Л. Л. Механика сплошной среды. — Т. 2. — М. : Наука, 1984.

Стефан (*Stefan J. J.*) // Wien Sitzungsber. 1871. B. 63. S. 63.

Трусделл (*Truesdell C.*). Rational Thermodynamics. — N. Y. : McGrow-Hill, 1969 ; 2 enlarged ed. — N. Y. : Springer, 1984.

Франк-Каменецкий Д. Д. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М. : Наука, 1987.

Ферцигер Дж., *Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. — М. : Мир, 1976.

Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. — М. : Мир, 2000.

Чепмен С., *Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. — М. : ИЛ, 1960.

К главе 3

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика (теория и приложения к геофицической гидродинамике). — Л. : Гидрометеоиздат, 1978.

Блэкадар (*Blackadar A. K.*). Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system // J. Meteorology. 1955. V. 12. No. 9. P. 165—175.

Брасье Г., *Соломон С.* Аэрономия средней атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1987.

Бруяцкий Е. В. Турбулентные стратифицированные струйные течения. — Киев : Наукова думка, 1986.

Брэдшоу (*Bradshaw P.*). The analogy between streamline curvature and buoeancy in turbulent shear flow // Ibid. 1969. V. 36. Pt. 1. P. 117—191.

Буссинеск (*Boussinesq J.*). Essai sur la theoriedes eaux courantes // Memoires presentees par diverses Savants a l'Acad. d. Sci. Paris. 1977. V. 23. P. 46.

Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1977.

Де Гроот С., *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Давыдов Б. И. К статистической турбулентности // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 5. С. 980—982.

Давыдов Б. И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости. // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 1. С. 47—50.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1974.

Жоу Д., *Касас-Баскес Х.*, *Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика'», Институт компьютерных исследований, 2006.

Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. — М. : Наука, 1975.

Иевлев В. М. Численное моделирование турбулентных течений. — М. : Наука, 1990.

Колесниченко А. В., *Маров М. Я.* Влияние турбулентности на структуру и энергетику нижней термосферы планеты // Препринт ИПМ АН СССР. 1979. № 175.

Колесниченко А. В. Методы неравновесной термодинамики для описания турбулентных многокомпонентных гидротермодинамических систем с химическими реакциями // Препринт ИПМ АН СССР. 1980а. № 66.

Колесниченко А. В., *Маров М. Я.* Моделирование турбулентных коэффициентов переноса в задачах аэрономии // Препринт ИПМ АН СССР. 1980б. № 20.

Колесниченко А. В., *Маров М. Я.* Моделирование второго порядка коэффициентов турбулентного обмена для сдвиговых течений многокомпонентных сжимаемых сред // Препринт ИПМ АН СССР. 1984. № 31.

Колесниченко А. В. Соотношения Стефана—Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л. И. Седова.—М. : изд-во МГУ, 1998. — С. 52—76.

Колесниченко А. В., *Маров М. Я.* Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 56—68.

Компаниец В. З., *Овсянников А. А.*, *Полак Л. С.* Химические реакции в турбулентных потоках газа и плазмы. — М. : Наука, 1979.

Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1970.

Ламли Дж. Л., *Пановский Г. А.* Структура атмосферной турбулентности. — М. : Мир, 1966.

Лапин Ю. В., *Стрелец М. Х.* Внутренние течения газовых смесей. — М. : Наука, 1989.

Лаундер, *Сполдинг* (*Launder B. E.*, *Spalding D. B.*). Mathematical model of turbulence. — London : Acad. Press, 1972.

Лаундер (*Launder B. E.*). On the effects of gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt. 3. P. 569—582.

Лаундер Б. Е., *Морс А.* Численный расчет осесимметричных свободных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // Турбулентные сдвиговые течения — I / под ред. Ф. Дурста, Б. Е. Лаундера, Ф. В. Шмидта, Дж. Х. Уайтлоу. — М. : Машиностроение, 1982. — С. 291—310.

Либби (*Libby P. A.*) On turbulent flow with fast chemical reactions. Pt. I : The closure problem. // Combus. Sci. and Technol. 1972. V. 6.

Левеллен В. Метод инвариантного моделирования // Турбулентность, принципы и применения / под ред. У. Форста, Т. Моулдена. — М. : Мир, 1980. — С. 262—310.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М. : Наука, 1978.

Манк, *Андерсон* (*Munk W. H.*, *Anderson E. R.*). Notes on the theory of the thermocline // J. of Marine Research. 1948. V. 1. P. 276.

Маров М. Я., *Колесниченко А. В.* Введение в планетную аэрономию. — М. : Наука, 1987.

Методы расчета турбулентных течений : пер. с англ. / под ред. В. Колльмана. — М. : Мир, 1984.

Монин А. С., *Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. — Т. 1. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1992.

Морковин (*Morkovin M. V.*). Effects of compressibility on turbulent flow // Mechanics of Turbulence, 367. — N. Y. : Gordon and Breach, 1961.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. — М. : Едиториал УРСС, 2002.

Невзглядов В. Г. К феноменологической теории турбулентности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 3.

Невзглядов В. Г. К статистической теории турбулентности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 7.

Прандтль (*Prandtl L.*). Bericht uber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Z. angew. Math. Mech. 1925. Bd. 5. S. 136—139.

Прандтль (*Prandtl L.*). Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz // Z. angew. Math. Mech. 1942. Bd. 22. No. 5. S. 241—243.

Prandtl L., *Weighardt K.* Ube rein neyes Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. K1. 1945. S. 6—19.

Проблемы турбулентности : сб. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.

Ростен, Сполдинг (*Rosten H.*, *Spalding B.*). PHOENICS: Beginners guide; user manual; photo user guide. — London : Concentration Heat and Momentum Ltd, 1987.

Седов Л. И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред // Размышления о науке и об ученых. — М. : Наука, 1980. — С. 173—197.

Седов Л. И. Механика сплошной среды. — Т. 2. — М. : Наука, 1984.

Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М. : ИЛ, 1959.

Taylor G. I. The transport of vorticity and head through fluids in turbulent motion // Ibid. 1932. V. 135. P. 685—706.

Турбулентность: Принципы и применения / под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. — М. : Мир, 1980.

Фавр (*Favre A.*). Statistical Equations of Turbulents Gases // Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. Philadelphia : SIAM, 1969. — P. 231—267.

Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М. : Мир, 1985.

Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. — М. : Мир, 1991.

Хинце И. О. Турбулентность. — М. : ГИФМЛ, 1963.

К главе 4

Андре и др. (*Andre J. C.*, *Moor G.De.*, *Vachat Du*). Turbulence approximation for inhomogeneous flow. Part II : The numerical simulation of a penetrative convection experiment // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 3. P. 482—491.

Борги Р. Модели для численных расчетов турбулентного горения // Методы расчета турбулентных течений. — М. : Мир, 1984. С. 399—455.

Вильямс Ф. А. Теория горения. — М. : Наука, 1971.

де Гроот С., *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Дирдорф (*Deardorff J. W.*). The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence // J. Fluids Eng. 1973. V. 95. P. 429—438.

Дональдсон С. Р. Расчет турбулентных течений в атмосфере и изолированном вихре. // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 1. С. 4—14.

Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. — М. : Наука, 1975.

Иевлев В. М. Численное моделирование турбулентных течений. — М. : Наука, 1990.

Келлер, *Фридман* (*Keller L. V.*, *Friedman A. A.*). Differentialgleichungen fur die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flussigkeit // Proc. I Intern. Congress Appl. Mech., Delft., 1924. — S. 395—405.

Келлер Л. В. Теория конвекции и турбулентности // Труды ГГО. 1930. № 4.

Колесниченко А. В. Методы механики сплошной среды для описания турбулентных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло- и массопереноса // Труды V Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике : краткие тексты докл. — М. : Алма-Ата, 1981. — С. 123—126.

Колесниченко А. В., *Маров М. Я.* К проблеме замыкания в теории турбулентных сдвиговых течений многокомпонентных смесей химически активных газов // Препринт ИПМ АН СССР. Москва. 1984. № 31.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. С. 56—68.

Кузнецов В. П. Влияние флуктуаций температур и концентраций на среднюю скорость химической реакции в турбулентном потоке // Второй Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. — М. : ИХФ АН СССР, 1969. — С. 99—103.

Лаундер, Сполдинг (*Launder B. E., Spalding D. B.*). Mathematical model of turbulence. — London : Acad. Press, 1972.

Лаундер (*Launder B. E.*). On the effects of gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // J. Fluid Mech. 1975. V. 67. Pt. 3. P. 569—582.

Лаундер Б. Е., Морс А. Численный расчет осесимметричных свободных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений // Турбулентные сдвиговые течения — I / под ред. Ф. Дурста, Б. Е. Лаундера, Ф. В. Шмидта, Дж. Х. Уайтлоу. — М. : Машиностроение, 1982. — С. 291—310.

Лаундер Б. Е. Тепломассоперенос // Турбулентность. — М. : Машиностроение, 1980.

Левеллен В. Метод инвариантного моделирования // Турбулентность: принципы и применения / под ред. У. Форста, Т. Моулдена. — М. : Мир, 1980. — С. 262—310.

Лыкосов В. Н. О противоградиентном переносе момента в струйном течении низкого уровня // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 8.

Маров М. Я., Колесниченко А. В. Введение в планетную аэрономию. — М. : Наука, 1987.

Меллор, Ямада (*Mellor G. L., Yamada T.*). A hierarhy of turbulence closure models for planetary boundary layers // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 1791—1806.

Меллор, Ямада (*Mellor G. L., Yamada T.*). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Rev. of Geoph. and Space Phys. 1982. V. 20. P. 851—875.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. — Т. 1. — М. : Наука, 1965 ; СПб. : Гидрометеоиздат, 1992.

О'Брайен Е. Е. Метод функций плотности вероятности (ФПВ) в теории турбулентных течений с химическими реакциями // Турбулентные течения реагирующих газов. — М. : Мир. 1983. — С. 252—296.

Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. — Новосибирск : Наука, 1966.

Ротта (*Rotta J.*). Statistische Theorie nichthomogeuer Turbulenz Teil 1 // Physik. 1951. Bd. 129. S. 547—572.

Ротта (*Rotta J.*). Statishische Theorie nichthomogener Turbulenz Teil 2 // Physkik. 1951. Bd. 131. S. 51—47.

Турбулентные сдвиговые течения — I / под ред. Ф. Дурста, Б. Е. Лаундера, Ф. В. Шмидта, Дж. Х. Уайтлоу. — М. : Машиностроение, 1982.

Турбулентные течения реагирующих газов / под ред. П. Либби, Ф. Вильямса. — М. : Мир, 1983.

Турбулентность: Принципы и применения / под ред. У. Фроста и Т. Моулдена. — М. : Мир, 1980.

К главе 5

Белоцерковский О. М., *Опарин А. М.* Численный эксперимент в турбулентности: От порядка к хаосу. — М. : Наука, 2000.

Берже П., *Помо И.*, *Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. — Череповец : Меркурий-ПРЕСС, 2000.

Бойко А. В., *Грек Г. Р.*, *Довгаль А. В.*, *Козлов В. В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006.

Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. — М. : ИЛ, 1955.

де Гроот С., *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М. : изд-во Моск. Ун-та, 1998.

Жоу Д., *Касас-Баскес Ч.*, *Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследованийю, 2006.

Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004.

Йорк Дж. А., *Йорк Э. Д.* Хаотическое поведение и гидродинамика // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. — М. : Мир, 1984. — С. 101—123.

Кайзер Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов. — М. : Мир, 1990.

Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. — М. : Янус, 1995.

Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. — М. : Янус-К, 2002.

Кляцкин В. И., *Татарский В. И.* Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики // УФН. 1973. Т. 110. Вып. 4. С. 499—517.

Колесниченок А. В. Методы неравновесной термодинамики для описания турбулентных многокомпонентных гидротермодинамических систем с химическими реакциями // Препринт ИПМ РАН. 1980. № 66.

Колесниченко А. В. Соотношения Стефана—Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики (к юбилею Л. И. Седова) / под ред. С. С. Григоряна. — М. : МГУ, 1998. — С. 52—74.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности // Астрон. вестник. 2002. Т. 36. № 2. С. 121—139.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астро-геофизических систем // Препринт ИПМ РАН. 2003. № 6.

Колесниченко А. В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. вестник. 2004. Т. 38. № 2. С. 144—170.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS. Marseille, aout — sept, 1961 [на рус. и фр. яз.]. — Paris, 1962. — P. 447—458.

Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М. : Постмаркет, 2000.

Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. — М. : Наука, 1988.

Мандельброт (*Mandelbrot D. D., Van Ness J. W.*). Fractinal Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // SIAM Review. 1987. V. 10. № 4. P. 422—437.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М. : Институт компьютерных исследований, 2002.

Миллионщиков М. Д. К теории однородной и изотропной турбулентности // Изв.АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. Т. 5. № 4—5. С. 433—446.

Монин А. С., Полубаринова-Кочина П. Я., Хлебников В. И. Космология, гидродинамика, турбулентность: А. А. Фридман и развитие его научного наследия. — М. : Наука, 1989.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — Т. 1. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1992.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — Т. 2. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1996.

Мюнстер А. Химическая термодинамика. — М. : Едиториал УССР, 2002.

Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М. : Физматлит, 2003.

Нигматуллин (*Nigmatullin R. R.*) The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. B. 1986. V. 133. P. 425—430.

Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теор. и Мат. Физика. 1992. Т.90. № 3. С. 354—368.

Новиков Е. А., Стюарт Р. У. Перемежаемость турбулентности и спектр флюктуаций диссипации энергии // Изв. АН СССР. сер. геофизики. 1964. № 3. С. 408—413.

Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1941. Т. 5. № 4. С. 453—466.

Олемский А. И., Флат А. Я. Использование колнцепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. 1993. Т. 163. № 12. С. 1—50.

Олемский А. И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 287—321.

Олемской А. И., Харченко Д. О. Самоорганизация самоподобных стохастических систем. — М.— Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007.

Олдхэм (*Oldham K. B., Spanier J.*) The Fractional Calculus (Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order). — N. Y.— London : Acad. Press, 1974.

Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. — М. : ИЛ, 1960.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М. : Прогресс, 1986.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. — М. : издательская группа «Прогресс», 1994.

Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. — М. : Мир, 2002.

Рабинович М. И., Сущик М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 1. С. 1—64.

Самко С. Г., Килбас А,А., Маричев О. И. Интегралы и и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск : Наука и техника, 1987.

Седов Л. И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред // Размышления о науке и об ученых. — М. : Наука, 1980. — С. 173—197.

Странные аттракторы : сб. статей : пер. с анг. / под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. — М. : Мир, 1981.

Стратонович Р. Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. — М. : Наука, 1985.

Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М. : Советское радио, 1977.

Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т. 173. № 8. С. 847—876.

Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск : Изд-во «Артишок», 2008.

Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. — М. : Фазис, 1998.

Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. — М. : Мир, 1976.

Шхануков М. Х. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // ДАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 746—748.

Шхануков-Лафишев М. Х., Нахушева Ф. М. Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка и сеточные методы их решения // Неклассические уравнения математической физики. — Новосибирск : изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. — С. 37—44.

Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. — М. : МФТИ, 2002.

Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М. : Мир, 1985.

Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. — М. : Мир, 1991.

Эбелинг В., *Энгель А*, *Файстель Р.* Физика процессов эволюции. Синергетический подход. — М. : Эдиториал УССР, 2001.

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах: Введение в теорию диссипативных структур. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследовыаний, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

Blackadar A. K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system // J. Meteorology. 1955. V. 12. P. 165—175.

Brown G. L., *Roshko A.* On density effects and large structures in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775—816.

Batchelor G. K., *Townsend*, *A. A.* The nature of turbulent motion at high wave number // Proc. of the Royal society of London. 1949. V. A199. P. 238—255.

Crow S. C., *Champagne F. H·* Orderly structures in jet turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547—591.

Druden H· I. Recent Advances in the Mechanic of Boundary Layes Flow // Adv. Appl.Mech. 1948. V. 1. P. 1—40.

Frenkiel F. N., *Klebanoff P. S.* On the log-normality of the small-scale structure of turbulence // Bound. Layer Meteorol. 1975. V. 8. No. 2. P. 173—200.

Frisch U., *Sulem P. L.*, *Nelkin M.* A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence // J. Fluid Mech. 1978. V. 87. P. 719—736.

Graham R. Stochastic Methods in Nonequilibrium Thermodynamics // Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology : Proc. of the Workshop, bielefeld, Fed, Rep. Of Germany, October 5—11, 1980 / eds. L. Arnold, R. Lefever — Berlin—Heidelberg—N. Y. : Springer-Verlag, 1981. — P. 202—212.

Kolesnichenko A. V., *Marov M. Ya.* Methods of nonequilibrium thermodynamics for description of multicomponent turbulens gas mixture // Arch. Mech. 1985. V. 37. No. 1—2. P. 3—19.

Mandelbrot B. B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrie // J. Fluid mech. 1974. V. 62. No. 2. P. 401—416.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Mechanics of turbulence of multicomponent gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2001.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Chaotic and Ordered Structures in the Developed Turbulence // Astrop. Physical. Disks. Collective and Stochastic Pheuomena / ed. A. M. Fridman, M. Ya. Marov, I. G. Kovalenko. — Springer, 2006. — P. 23—74.

Marsden J. E., *McCracren M.* The Hopf Bifurcation and its Applications // Berlin—Heidelberg—N. Y. : Springer, 1976. — (Applied Math. Sci. ; v. 19).

Obukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence // J. Fluid Mech. 1962. V. 13 Pt. 1. P. 77—81.

Onsager L. Statistical hydrodynamics // Nuovo Cimento (Supplement). 1949. V. 6. P. 279—287.

К главе 6

Акопян И. Г. Об установлении синхронного режима в ламповом генераторе при наличии помех // Радиотехника и электроника. 1966. Т. 11. № 1. С. 34—56.

Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Нейман А. Б., Стрелкова Г. И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М. : Физматгиз, 1963.

Бостанджиян В. А. Пособие по статистическим распределениям. — Черноголовка, 2000.

Гардинер К. В. Стохастические задачи в естественных науках. — М. : Мир, 1986.

Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев : Наукова думка, 1968.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Леонтович М. А. Введение в термодинамику. — М.—Л. : Гостехиздат, 1954.

Кадомцев Б. Б., Рязанов А. И. Что такое синергетика? // Природа. 1983. № 8. С. 2—11.

Климонтович Ю. Л. Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. — М. : Наука, 1990.

Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. — М. : Янус, 1995.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности // Астрон. вестник. 2002. Т. 36. № 2. С. 121—139.

Колесниченко А. В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. вестник. 2004. Т. 38. № 2. С. 144—170.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске // Астрон. вестн. Т. 40. № 1. С. 2—62.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout — sept. 1961 [на рус. и фр. яз.]. — Paris, 1962. — P. 447—458.

Кульбак С. Теория информации и статистика. — М. : Наука, 1967.

Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. — М. : Наука, 1983.

Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. — М. : Наука, 1988.

Мигдал А. А. Вихревое уравнение Фоккера—Планка // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М. : Наука, 1987. — С. 159—174.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — Т. 2. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1996.

Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М. : Техносфера, 2003.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. — М. : Прогресс, 1994.

Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125. Вып. 1. С. 123—168.

Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М. : Наука, 1984.

Рабинович М. И. Сущик М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 1. С. 1—64.

Старр В. П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М. : Мир, 1971.

Странные аттракторы : сб. статей : пер. с англ. / под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. — М. : Мир, 1981.

Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М. : Советское радио, 1961.

Стратонович Р. Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. — М. : Наука, 1985.

Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М. : Советское радио, 1977.

Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. — М. : Радио и связь, 1986.

Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. — М. : Фазис, 1998.

Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. — М. : Мир, 1969.

Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. — М. : МФТИ, 2002.

Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — Ч. 1. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004.

Янке Е, Эмде Ф, Лёш Ф. Специальные функции. Формулы графики, таблицы. — М. : Наука, 1977.

Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E. J., Antonia R. A. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 63—89.

Buckingham A. 1R38. Mechanics of turbulence of multicomponent gases // Appl. Mechanics Rev. 2003. V. 56. No. 1. P. 811—813

Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775—816.

Crow S. C., Champagne F. H. Orderly structures in jet turbulence // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 547—591.

Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance // Physical Review Letters. 1994. V. 73. P. 959—962.

Horsthemke W., Malek Mansour M. The influence of external noise on nonequilibrium phase transitions // Zs. Phys. 1976. V. B24. P. 307—321.

Horsthemke W., Lefever R. Noise Induced Transitions. — Berlin—Heidelberg—N. Y.—Tokyo : Springer-Verlag, 1984.

Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. — Berlin : Springer, 1984.

La Frieda J. R., Lindsey W. C. Transient analysis of phase-locked tracking systems in the presence of noise // Trans. IEEE. 1973. V. IT-19. No. 2. P. 36.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A. V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2002.

Frenkiel F. N., Klebanoff P. S. On the log-normality of the small-scale structure of turbulence // Bound. Layer Meteorol. 1975. V. 8. No. 2. P. 173—200.

Frisch U. Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov. — Cambridge : Cambridge University Press, 1995.

Obukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence // J. Fluid Mech. 1962. V. 13. Pt. 1. P. 77—81.

Osipov G., Pikovsky A., Rosenblum M, Kurths J. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. No. 3. P. 2353—2361.

Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization in a population of globally coupled chaotie oscillators // Europhys. Lett. 1996. V. 34. No. 3. P. 165—170.

Ruelle D., Takkens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167—192.

She Z. S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence // Physical Review Letters. 1994. V. 72. P. 336—339.

К главе 7

Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А. О диффузии тяжелых частиц в турбулентных газовых потоках // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 3. С. 573—576.

Альвен Х., Аррениус Г. Эволюция солнечной системы. — М. : Мир, 1979.

Бусройд Р. Течение газа со взвешенными частицами. — М. : Мир, 1975.

Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1977.

Баренблатт Г. И., Голицин Г. С. Локальная структура развитых пылевых бурь. — М. : изд-во МГУ, 1973.

Вараксин А. Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. — М. : Физматлит, 2003.

Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзобекян Г. З., Пашин М. М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. — М. : Энергия, 1974.

Волощук В.М, Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. — Л. : Гидрометеоиздат, 1975.

Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. — М. : Гидрометиздат, 1984.

Гавин Л. Б., Наумов В. А., Шор В. В. Численное исследование газовой струи с тяжелыми частицами на основе двухпараметрической модели турбулентности // ПМТФ. 1984. № 1. С. 62—67.

Горбис З. Р. Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков. — М. : Энергия, 1970.

Горькавый Н. Н., *Фридман А. М.* Физика планетных колец. — М. : Наука, 1994.

Гиршфельдер Д., *Кертисс Ч.*, *Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М. : ИЛ, 1961.

де Гроот С., *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Деревич И. В. Влияние примеси крупных частиц на турбуленитные характеристики газовзвеси в каналах // ПМТФ. 1994. № 2. С. 70—78.

Дорофеева В. А., *Макалкин А. Б.* Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. — М. : Едиториал УРСС, 2004.

Зайчик Л. И., *Вараксин А. Ю.* Влияние следа за крупными частицами на интенсивность турбулентности несущего потока // ТВТ. 1999. Т. 37. № 4. С. 1004—1007.

Зуев Ю. В., *Лепешинский И. Ф.* Математическая модель двухфазной турбулентной струи // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1981. № 6. С. 69—77.

Иевлев В. М. Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 91—103.

Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. — М. : Наука, 1975.

Картушинский А. И. Перенос инерционной примеси в двухфазной турбулентной струе // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1984. № 1. С. 36—41.

Колесниченко А. В. К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 133—155.

Колесниченко А. В. Соотношения Стефана—Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л. И. Седова. — М. : изд-во МГУ, 1998. — С. 52—76.

Колесниченко А. В., *Максимов В. М.* Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана—Максвелла для гетерогенной среды // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 1. С. 3—25.

Колесниченко А. В. Маров М. Я· Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колесниченко А. В. Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // Астрон. вестн. 2000. Т. 34. № 6. С. 516—528.

Колесниченко А. В. Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске // Астрон. вестн. 2001. Т. 35. № 2. С. 139—155.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М. Я. Марова. — М. : Физматлит, 2003. — С. 123—162.

Колесниченко А. В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405—427.

Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1/2. С. 56—58.

Колмогоров А. Н. О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов // Вестник МГУ. 1954. № 3. С. 41—45.

Ландау Л. Д., *Лифшиц В. М.* Гидродинамика. — М. : Наука, 1988.

Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1970.

Логинов В. И. Обезвоживание и обессоливание нефтей. — М. : Химия, 1979.

Мазин И. П. Теоретическая оценка коэффициента коагуляции капель в облаках // Труды ЦАО. 1971. Вып. 95. С. 12—25.

Макалкин А. Б., *Дорофеева В. А.* Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. I. Исходные данные, уравнения и методы построения моделей // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 99—122.

Макалкин А. Б., *Дорофеева В. А.* Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. II. Результаты расчета моделей // Астрон. вестн. 1996. Т. 30. № 6. С. 496—513.

Макалкин А. Б. Проблемы эволюции протопланетных дисков // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М. Я. Марова. — М. : Физматлит, 2003. — С. 402—446.

Макалкин А. Б. Особенности эволюции вязкого протопланетного околосолнечного диска // Астрон. вестник. 2004. Т. 38. № 6. С. 559—576.

Маров М. Я., *Колесниченко А. В.* Введение в планетную аэрономию. — М. : Наука, 1987.

Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. — М. : Наука, 1981. 174 с.

Монин А. С., *Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. — Т. 1. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1992.

Нигматулин Р. И. О сновы механики гетерогенных сред. — М. : Наука, 1978.

Пригожин И., *Дефей Р.* Химическая термодинамика. — Новосибирск : Наука, 1966.

Пригожин И., *Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. — М. : Прогресс, 1994.

Сафронов В. С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. — М. : Наука, 1969.

Сафронов В. С. Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5—24.

Сафронов В. С. Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска // Астрон. вестн. 1987. Т. 21. № 3. С. 216—220.

Сафронов В. С., *Гусейнов К. М.* О возможности образования комет Incitu // Астрон. вестн. 1990. Т. 24. № 3. С. 248—256.

Смолуховский М. Три доклада о диффузии, броуновском молекулярном движении и коагуляции коллоидных частиц. — Броуновское движение. — М.—Л. : ОНТИ, 1936 ; Коагуляция коллоидов. — М. : ОНТИ, 1936.

Стернин Л. Е., *Маслов Б. Н.*, *Шрайбер А. А.*, *Подвысоцкий А. М.* Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. — М. : Машиностроение, 1980.

Стернин Л. Е., *Шрайбер А. А.* Многофазные течения газа с частицами. — М. : Машиностроение, 1994.

Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. — М. : Мир, 1982.

Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М. : Наука, 1967.

Фортов В. Е., *Храпак А. Г.*, *Якубов И. Т.* Физика неидеальной плазмы. — М. : Физматлит, 2004.

Фридман Ф. М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122—1130.

Фукс Н. А. Механика аэрозолей. — М. : изд-во АН СССР, 1955.

Чепмен С., *Каулинг Т. К.* Математическая теория неоднородных газов. — М. : ИЛ, 1960.

Шапиро С., *Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. — Ч. II. — М. : Мир, 1985.

Шлигтинг Г. Теория пограничного слоя. — М. : Наука, 1974.

Шмидт О. Ю. Четыре лекции о происхождении Земли [3-е изд., доп.]. — М. : изд-во АН СССР, 1957.

Шрайбер А. А., *Милютин В. Н.*, *Яценко В. П.* Турбулентные течения газовзвеси. — Киев : Наук. думка, 1987.

Шрайбер А. А., *Гавин Л. Б.*, *Наумов В. А.*, *Яценко В. П.* гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. — Киев : Наук. думка, 1980.

Хан Г., *Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах. — М. : Мир, 1969.

Armitage P. J., *Livio M.*, *Pringle J. E.* Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2001. V. 324. P. 705—711.

Balbus S. A., *Hawley J. F.* Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1—53.

Barge P., *Sommeria* J. Did planet formtion begin inside persistent gaseous vortices? // Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1—L4.

Barenblatt G. I., *Golitsyn G. S.* Local structure of Mature dust storms // J.Atmos. Sci. 1974. V. 31. No. 7. P. 1917—1933.

Beckwith S. V. W., *Henning T.*, *Nakagawa Y.* Dust properties and assembly of large particjes in protoplanetary disks // Protostars and Planets IV / ed. V. Mannings, A. P. Boss, S. S. Rassell. — Tucson, AZ : Univ. Ariz. Press, 2000. — P. 533—558.

Bisnovaty-Kogan G. S., *Lovelace R. V. E.* Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // New astron. Rev. 2001. V. 45. P. 663—742.

Bryden G., *Chen X.*, *Lin D.*, *Nelson R.*, *Papaloizou J.* Tidally induced gap formation in protostellar disks: gap clearing and suppression of protoplanetary growth // Astrophys. J. 1999. V. 514 P. 344.

Cabot W., *Canuto V. M.*, *Hubickyj O.*, *Pollack J. B.* The role of turbulent convection in the primitive solar nebule // Icarus. 1987. V. 69. P. 387—423.

Chavanis P.-H. Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V. 16 P. 1—54.

Cuzzi J. N., *Dobrovolskis A. R.*, *Champney J. M.* Particle-gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula // Icarus. 1993. V. 106 P. 102—134.

Cuzzi J. N., *Davis S. S.*, *Dobrovolskis A. R.* Blowing in the wind. II. Creation and redistribution of refractory inclusions in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus. 2003. V. 166. P. 385—402.

Cuzzi J. N. Blowing in the wind: III. Accretion of dust rims by chondrule-sized particles in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus. 2004. V. 168. P. 484—497.

Cuzzi J. N., *Ciesla F. J.*, *Petaev M. I.*, *Krot A. N.*, *Scott E. R. D.*, *Weidenschilling S.* Nebula Evolution of Thermally Processed Solids: Reconciling Models and Meteorites Chondrites and the Protoplanetary Disk// Proceedings of a workshop held 8—11 November 2004 in Kaua'i, Hawai'i / ed. A. N. Krot, E. R. D. Scott, B. Reipurth. — San Francisco: Astronomical Society of the Pacific, 2005. — (ASP Conference Series ; V. 341). — P. 732—773.

Cuzzi J. N., *Weidenschilling S. J.* Particle-Gas Dynamics and Primary Accretion // Meteorites and the Early Solar System II / eds. D. Lauretta, L. A. Leshin, H. McSween. Tuscon, AZ : Univ. of Arizona Press, 2006. — P. 353—381.

Danon H., *Wolfshtein M.*, *Hetsroni G.* Numerical calculation of two-phase turbulent round jet // Int. Multiphase Flow. 1977. V. 3. No. 3. P. 223—234.

Dominik C., *Blum J.*, *Cuzzi J.*, *Wurm G.* Growth of dust as the initial step toward planet formation // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Dubrulle B. A turbulent closure model for thin accretion disks // Astron. Astrophys. 1992. V. 266. P. 592—604.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59—76.

Dubrulle B., *Morfill G.*, *Sterzic M.* The dust subdisk in the protoplanetary nebula // Icarus. 1995. V. 114. P. 237—246.

Dullemond C. P., *Dominik C.* Dust coagulation in protoplanetary disks: A rapid depletion of small grains // Astron. Astrophys. 2005. V. 434. P. 971—986.

Eardley D. M., *Lightman A. P.* Magnetic viscosity in relativistic accretion discs // Astrophys. J. 1975. V. 200. P. 187—198.

Eardley D. M., *Lightman A. P.*, *Payne D. G.*, *Shapiro S. L.* Accretion discs around massive Black Holes; Persistent Emission Spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.

Elghobashi S. E., *Abou-Arab T. W.* A second-order turbulence model for two-phase flows // Heat Transber. 1982. V. 5. P. 219—224.

Elghobashi S. E., *Abou-Arab T. W.* A two-equeation turbulence model for two-phase flows // Phys. Fluids. 1983. V. 26. No. 4. P. 931—938.

Epstein P. S. On the resistance experienced by spheres in their motion through gases // Phys. Rev. 1924. V. 23. P. 710—733.

Favre A. Equations statistiques des gaz turbulents // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. — М. : Наука, 1969. — С. 483—511.

Fridman A. M., *Boyarchuck F. F.*, *Bisikalo D. V.*, *Kuznetsov O. A.*, *Khoruzhii O. V.*, *Torgashin Yu. M.*, *Kilpio A. A.* The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // Physics Letters A. 2003. V. 317. P. 181—198.

Garaud P., *Barriere-Fouchet L.*, *Lin D. N. C.* Individual and collective behavior of dust particles in a protoplanetary nebula // J. Astroph. 2005. V. 603. P. 292—306.

Goldrich P., Ward W. R. The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. No. 3. P. 1051—1061.

Goodmann J., Pindor B. Secular instability and planetesimal formation in the dust laye // Icarus. 2000. V. 148. P. 537—549.

Gore R. A., Crowe C. T. Effect of particle size on modulating turbulent intensity // Int. J. Multiphase Flow. 1989. V. 15. No. 2. P. 279—285.

Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases // Commun. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 331 — [Русский перевод // Механика : сб. — № 4. С. 71 ; № 5. С. 61. — М. : ИЛ, 1952].

Hazlehurst J. , Sargent W. L. W. // Astrophys. J. 1959. V. 130. P. 276—285.

Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y. Formation of the Solar System // Protostars and Planets II / eds. D. C. Black, M. S. Matthews. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 1985. — P. 1100—1153.

Hersant F, Dudrulle B, Hure J.-M. Turbulence in circumstellar disks // Astron. astrophys. manuscript. 2004. No. aa3549. P. 1—12.

Hunter S. C., Cherry S. S., Kliegel J. R., Waldman C. H. Gas-particle nozzle flow with reaction and particle size change // AIAA Paper. 1981. No. 37.

Kusaka T., Nakano N., Hayashi C. Growth of solid particles in the primordial solar nebula // Progr. Theor. Phys. 1970. V. 44. P. 1580—1595.

Lee K. W. Change of particle size distribution during Brownian coagulation // J. of Colloid and Unterface Sci. 1983. V. 92. No. 2. P. 38—57.

Leonard A. Energy cascade in large eddy simulations of turbulent fluid flous // Adv. Geophys. 1974. A18. P. 237—248.

Lin D. N. C., Papaloizou J. On the structure and evolution of the primordial solar nebula // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1980. V. 191. No. 31. P. 37—48.

Lissauer J. J., Stewart G. R. Growth of planets from planetesimals // Protostars and Planets III / eds. E. H. Levy, I. J. Lunine. — Tucson, AZ : Univ. Arizona Press, 1993. — P. 1061—1088.

Makalkin A. B. Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability // Lunar Planet. Sci. 1994. V. 25. P. 827—828.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2002.

Melville W. K., Bray K. N. C. A model of the two-phase turbulent jet // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1979. V. 22. P. 647—656.

Morkovin M. V. Effects of compressibility on turbulent flow // Mechanics of Turbulence. — N. Y. : Gordon and Breach, 1961.

Nakagawa Y., Nakagawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517—528.

Nakagawa Y., Sekiya M., Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // Icarus. 1986. V. 67. P. 375—390.

Natta A., Testi L., Calvet N·, Henning T., Waters R., Wilner D. Dust in protoplanetary discs: Properties and evolution // Protostars and Planets V. — Arizona Press, AZ, 2007.

Nomura H. Structure and instabilities of an irradiated viscous protoplanetary disks // Astrophys. J. 2002. V. 567. P. 587—595.

Pollack J. B., McKay C. P., Cristofferson B. M. A calculation of a Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae // Icarus. 1985. V. 64. P. 473—492.

Richard D., Zahn J.-P. Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette—Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734—738.

Ruden S. P., Pollack J. B. The dynamical evolution of the protosolar nebula // Asrophys. J. 1991. V. 375. P. 740—760.

Russell S. S., Hartmann L. A., Cuzzi J. N., Krot A. N., Weidenschilling S. J. Timescales of the Solar Protoplanetary Disk // Meteorites and the Early Solar System II / eds. D. Lauretta, L. A. Leshin, H. McSween. — Tucson, AZ : University of Arizona Press, 2006. — P. 233—251.

Sekiya M., Nakagawa Y. Settling of Dust Particles and Formation of Planetesimals // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 96. P. 141—150.

Shakura N. I., Sunyaev R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. 1973. V. 24. P. 337—355.

Shakura N. I., Sunyaev R. A., Zilitinkevich S. S. On the turbulent energy transport in accretion disk // Astron. Astrophys. 1978. V. 62. P. 179—187.

Schmitt W., Henning T., Mucha R. Dust evolution in protoplanetary accretion disks // Astron. astrophys. 1997. V. 325. P. 569—584.

Soo S. L., Ihrig H. K., Kouh A. F. Experimental determination of statistical properties of two-phase turbulent motion // Trans. ASME J. Basic Engng. 1960. V. 82. No. 3. P. 609—621.

Stepinski T. F., Valageas P. Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. I. Aerodynamics of solid particles // Astron. Astrophys. 1996. V. 309. P. 301—312.

Stepinski T. F., Valageas P. Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. II. Development of icy planetesimals // Astron. Astrophys. 1997. V. 319. P. 1007—1019.

Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Camb. Phil. Soc. 1851. V. 9. Pt. II. P. 8—106.

Takeuchi T., Lin D. N. C. Radial flow of dust particles in accretion disks // Astrophys. J. 2002. V. 581. No. 2. P. 1344—1355.

Takeuchi T., Lin D. N. C. Surface out in optically thick dust disks by the radiation pressure // Astrophys. J. 2003. V. 593. P. 524—538.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Forming planetosimals in vortices // Icarus. 1996. V. 121. P. 158—170.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217—1238.

Wadhwa M., Amelin Y., Davis A. M., Lugmair G. W., Meyer B., Gounelle M., Desch S. J. From Dust to Planetesimals: Implications for the Solar Protoplanetary Disk from Short-lived Radionuclides // Protostars and Planets V. — Tucson, AZ : Univ. Arizona Press, 2007.

Wasson J. T. Meteorites: Their record of early solar-system history. — N. Y. : W. H. Freeman and Co., 1985.

Watanabe S., Nakagawa Y., Nakazawa K. Cooling and quasi-static contraction of the primitive solar nebula after gas accretion // Astrophys. J. 1990. V. 358. P. 282—292.

Weidenschilling S. J. Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1977. V. 180. P. 57—70.

Weidenschilling S. J. Dust to Planetesimals: Settling and Coagulation in the Solar Nebula // Icarus. 1980. V. 44. P. 172—189.

Weidenschilling S. J. Evolution of grains in a turbulent solar nebula // Icarus. 1984. V. 60. P. 553—567.

Whipple F. L. From plasma to planet. — London, 1972.

Willacy K., Klahr H. H., Millar T. J., Henning Th. Gas and grain chemistry in a protoplanetary disk // Astron. Astrophys. 1998. V. 338. P. 995—1005.

Woods J. D., Drake J. C., Goldsmith P. Coalescence in a turbulent cloud // Guart. J. Roy. Met. Soc. 1972. V. 98. P. 135—149.

Yarin L. P., Hetsroni G. Turbulence intensity in dilute two-phase flow. 3. The particles-turbulence interaction in dilute two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow. 1994. V. 20. No. 1. P. 27—44.

Youdin A. N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494—505.

Youdin A. N., Goodman J. Streaming instabilitiea in protoplanetary disks // arXiv:Astro-ph/0409263. 2004. V. 1. P. 1—26.

Zel'dovich Ya. B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299—312.

К главе 8

Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005.

Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. — М. : ИЛ, 1955.

Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. — М. : Наука, 1980.

Ван Мигем Ж. Энергетика атмосферы. — Л. : Гидрометеоиздат, 1977.

Галимов Э. М. Феномен жизни. Между равновесием и нелинейностью. Происхождение и принципы эволюции. — М. : УРСС, 2001.

Горькавый Н. Н., Фридман А. М. Физика планетных колец. — М. : Наука, 1994.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Карман Т. Некоторые вопросы теории турбулентности // Проблемы турбулентности. — М. : ОНТИ, 1936. — С. 35—74.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности // Астрон. вестник. 2002. Т. 36. № 2. С. 121—139.

Колесниченко А. В. Синергетический подход к описанию стационарно-неравновесной турбулентности астрофизических систем // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М. Я. Марова. — М. : Физматлит, 2003. — С. 123—162.

Колесниченко А. В. Термодинамическое моделирование развитой структурной турбулентности при учете флуктуаций диссипации энергии // Астрон. вестник. 2004. Т. 38. № 2. С. 144—170.

Колесниченко А. В. О возможности синергетического рождения мезомасштабных когерентных структур в макроскопической теории развитой турбулентности // Мат. мод. 2005. Т. 17. № 10. С. 47—79.

Колесниченко А. В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности // Астрон. вестн. 2005. Т. 39. № 3. С. 243—262.

Колесниченко А. В., Маров М. Я. Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске // Астрон. Вестн. 2006. Т. 40. № 1. С. 2—62.

Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

Колмогоров А. Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout. — sept. 1961 [на рус. и фр. яз.]. — Paris, 1962. — P. 447—458.

Коренев Г. В. Тензорное исчисление. — М. : изд-во МФТИ, 1996.

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. — М. : Мир, 1984.

Макалкин А. Б. Проблемы эволюции протопланетных дисков // Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М. Я. Марова. — М. : Физматлит, 2003. — С. 402—446.

Монин А. С., Полубаринова-Кочина П. Я., Хлебников В. И. Космология, гидродинамика, турбулентность: А. А. Фридман и развитие его научного наследия. — М. : Наука, 1989.

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидродинамика. — Т. 2. — СПб. : Гидрометеоиздат, 1996.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М. : Мир, 1980.

Паркер Е. Космические магнитные поля: их образование и проявления. — Ч. 2. — М. : Мир, 1982.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М. : Прогресс, 1986.

Сафронов В. С. К вопросу об образовании и эволюции протопланетных пылевых сгущений // Вопр. космогонии. 1960. Т. 7. С. 121—141.

Сафронов В. С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. — М. : Наука, 1969.

Сафронов В. С. Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5—24.

Сафронов В. С. Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска // Астрон. Вестн. 1987. Т. 21. № 3. С. 216—220.

Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М. : Мир, 1971.

Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. — М. : Научный Мир, 2000.

Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М. : ИЛ, 1959.

Шмидт О. Ю. Четыре лекции о происхождении Земли [3-е изд., доп.]. — М. : изд-во АН СССР, 1957.

Фридман Ф. М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122—1130.

Фриш У. Турбулентность. Наследие Колмогорова. — М. : Фазис, 1998.

Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М. : Мир, 1985.

Хлопков Ю. И., Жаров В. А., Горелов С. Л. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое. — М. : МФТИ, 2002.

Andre J. D., Lesieur M. Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. P. 187—208.

Armitage P. J., Livio M., Pringle J. E. Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2001. V. 324. P. 705—711.

Balbus S. A., Hawley J. F. Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1—53.

Barge P., Sommeria J. Did planet formtion begin inside persistent gaseous vortices? // Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1—L4.

Bodenheimer P. Angular momentum evolution of young stars and disks // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1995. V. 33. P. 199—238.

Brissaund A., Frisch U., Leorat J., Lessieur M., Mazure A. Helicity cascade in fully developed turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1366—1367.

Chavanis P.-H. Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V. 16 P. 1—54.

Dubrulle B., Frisch U. The eddy viscosity of parity-invariant flow // Phys. Rev. 1991. V. A43. P. 5355—5364.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59—76.

Eardley D. M., Lightman A. P. Magnetic viscosity in relativistic accretion discs // Astrophys. J. 1975. V. 200. P. 187—198.

Edwards S. F. Statistical mechanics with topological constraints: I // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 91. P. 513.

Edwards S. F. Statistical mechanics with topological constraints: II // J. Phys. A (Proc. Phys. Soc.). 1968. Ser. 2. V. 1. P. 15.

Fannjiang A., Papanicolaou G. Convection enhanced diffusion for periodic flows // SIAM J. Appl. Math. V. 54. P. 333—408.

Ferrari C. On the differential equations of turbulent flow // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. — М. : Наука, 1972.

Eltayeb I. A. Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer // Proc. Roy. Soc. 1972. V. A326. P. 229—254.

Fridman A. M., Boyarchuck F. F., Bisikalo D. V., Kuznetsov O. A., Khoruzhii O. V., Torgashin Yu. M., Kilpio A. A. The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // Physics Letters A. 2003. V. 317. P. 181—198.

Gama S., *Vergassola M.*, *Frisch U.* Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow: linear and nonlinear dynamics // J. Fluid. Mech. 1994. V. 260. P. 95—126.

Gilbert A., *Frisch U.*, *Pouquet A.* Helicity is unnecessary for alpha-effect dynamos, but it helps // Geophys. Astrophys. Fluid Dynam. 1988. V. 42. P. 151—161.

Goldrich P., *Ward W. R.* The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V. 183. No. 3. P. 1051—1061.

Hide R. A note on helicity // Geophys. Fluid Dyn. 1976. V. 7. P. 157—161.

Klahr H. H., *Bodenheimer P.* Turbulence in accretion disks: vorticity generation and angular momentum transport via the global daroclinic instability // Astrophys. J. 2003. V. 582. P. 869—892.

Kraichnan R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 1417—1423.

Kraichnan R. H. Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. P. 745—752.

Kraichnan R. H. Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence // J. Fluid. Mech. 1976a. V. 77. P. 753—774.

Kraichnan R. H. Eddy viscosity in two and three dimensions // J. Atmos. Sci. 1976b. V. 33. P. 1521—1536.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Mechanics of turbulence of multicomponent gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2002.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Chaotic and ordered structures in the developed turbulence // Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena / eds. A. M. Fridman, M. Ya. Marov. — Springer, 2006. — P. 23—54.

Moffatt H. K. The degree of knottedness of tangled vortex lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117—129.

Moffatt H. K. Some development in the theory of turbulence // J. Fluid Mech. 1981. V. 106. P. 35. — [Русский перевод // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. — М. : Мир, 1984].

Moffatt H. K. Simple topological aspects of turbulent vorticity dynamics // Proc. IUTAM Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids / ed. T. Tatsume. — Elseviere, 1984. — P. 223—230.

Moreau J. J. Constantes d'un ilot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope // C. R. Acad. Sci. Paris. V. 252. P. 2810—2812.

Nakagawa Y., *Sekiya M.*, *Hayashi C.* Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula // Icarus. 1986. V. 67. P. 375—390.

Nikolaevskiy V. N. Angular Momentum in Geophysical Turbulence. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.

Richard D., *Zahn J.-P.* Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette—Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734—738.

Sivashinsky G. I., *Frenkel A. L.* On negative eddy viscosity under conditions of isotropy // Phys. Fluids. 1992. V. A4. P. 1608—1610.

Steenbeck M., Krause F., Radler K.-H. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces // Z. Naturforsch. 1966. V. 21a. P. 369—376.

Tanga P., Babiano A., Dubrulle B. Forming planetosimals in vortices // Icarus. 1996. V. 121. P. 158—170.

Taylor G. I. Eddy motion in atmospheree // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1915. V. 215. P. 1—26.

Toomre A. On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217—1238.

Vergassola M., Gama S., Frisch U. Proving the existence of negative isotropic eddy viscosity // NATO-ASI: Solar and Planetary Dynamos / eds. M. R. E. Proctor, P. C. Mathews, A. M. Rucklidge. — Cambridge : Cambridge University Press, 1993. — P. 321—327.

Von Weizsacker C. F. Rotation kosmischer Gasmassen // Z. Naturforch. 1948. B. 3a. S. 524.

Youdin A. N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494—505.

Wasiutynski J. Studies in hydrodynamics and structure of stars and planets // Astrophys. Norv. 1946. V. 4. P. 86.

Zel'dovich Ya. B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299—312.

К главе 9

Ахиезер, А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы. — М. : Наука, 1974.

Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. — М. : Наука, 1970.

Горькавый Н. Н., Фридман А. М. Физика планетных колец. — М. : Наука, 1994.

де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1964.

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. — М. : Мир, 1974.

Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. — М. : Наука, 1975.

Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006.

Кадомцев Б. Б. Коллективны явления в плазме. — М. : Наука, 1976.

Кадомцев Б. Б. Перезамыкание магнитных силовых линий // УФН. 1987. Т. 151. С. 3—29.

Колесниченко А. В. К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров // Астрон. Вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 133—155.

Колесниченко А. В. Соотношения Стефана—Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л. И. Седова. — М. : изд-во МГУ, 1998. — С. 52—76.

Колесниченко А. В. Маров М. Я. Турбулентность многокомпонентных сред. — М. : Наука, 1999.

Колесниченко А. В. Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // Астрон. вестник. 2000. Т. 34. № 6. С. 516—528.

Колесниченко А. В. Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске // Астрон. вестник. 2001. Т. 35. № 2. С. 139—155.

Колесниченко А. В, *Маров М. Я.* Основы механики гетерогенных сред в околосолнечном допланетном облаке: влияние твердых частиц на турбулентность в диске // Астрон. вестник. 2006. Т. 40. № 1. С. 1—62.

Колесниченко А. В, *Маров М. Я.* О влиянии спмральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке // Астрон. вестник. 2007. Т. 41. № 1. С. 3—23.

Краузе Ф., *Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. — М. : Мир, 1984.

Куликовский А. Г., *Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. — М. : ГИФМЛ, 1962.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М. : Наука, 1982.

Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — М. : Наука, 1982.

Макалкин А. Б., *Дорофеева В. А.* Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца. I. Исходные данные, уравнения и методы построения моделей // Астрон. Вестн. 1995. Т. 29. № 2. С. 99—122.

Макалкин А. Б. Особенности эволюции вязкого протопланетного околосолнечного диска // Астрон. вестник. 2004. Т. 38. № 6. С. 559—576.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М. : Мир, 1980.

Пригожин И., *Стенгерс И.* Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. — М. : Прогресс, 1994.

Прист Э., *Форбс Т.* Магнитное пересоединение. Магнитогидродинамическая теория и приложения. — М. : Физматлит, 2005.

Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика // УФН. 1957. Т. 62. № 3. С. 247—303.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М. : Наука, 1989.

Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. — М. : Мир, 1982.

Фридман Ф. М. К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С. 1122—1130.

Шапиро С., *Тьюколски С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. — Ч. II. — М. : Мир, 1985.

Balbus S. A., *Hawley J. F.* A powerful local shear instability in weakly magnetised disks: 1. Linear analysis // Astrophys. J. 1991. V. 376. P. 214—222.

Bath G. T., *Pringle J. E.* The Evolution of Viscous Discs. I. Mass Transfer Variations // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 194. P. 967.

Biskamp. D. Magnetohydrodynamic turbulence. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003.

Bisnovaty-Kogan G. S., *Lovelace R. V. E.* Advective accretion disks and related problems including magnetic fields // New astron. Rev. 2001. V. 45. P. 663—742.

Blandford R. D. Accretion Disk Electrodynamics. A Model for Double Radio Sources // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1976. V. 176. P. 465.

Blackadar A. K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system // J. Meteorology. 1955. V. 12.

Brandenburg A., *Nordlund A.*, *Stein R. F.*, *Torkelsson U.* The disk accretion rate for dynamo-generated turbulence // Astrophys. J. 1996. V. 458. P. 145—148.

Coroniti F. V. On the magnetic viscosity in Keplerian accretion disks // Astrophys. J. 1981. V. 244. P. 587—599.

Dubrulle B. Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. No. 11. P. 59—77.

Eardley D. M., *Lightman A. P.* Magnetic viscosity in relativistic accretion disks // Astrophys. J. 1975. V. 200. P. 187—203.

Eardley D. M., *Lightman A. P.*, *Payne D. G.*, *Shapiro S. L.* Accretion discs around massive Black Holes. Persistent Emission Spectra // Astrophys. J. 1978. V. 234. P. 53.

Hersant F, *Dudrulle B*, *Hure J.-M.* Turbulence in circumstellar disks // Astron. astrophys. manuscript. 2004. No. aa3549. P. 1—12.

Galeev A. A., *Rosner R.*, *Viana G. S.* Structured coronae of accretion disks // Astrophys. J. 1979. V. 229. P. 318—326.

Lynden-Bell D., *Pringle J. E.* The Evolution of Viscous Discs and the Origin of the Nebular Variables // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1974. V. 168. P. 603.

Lesch H. Magnetic reconnection in accretion disc coronae // Solar and Asrophysical Magnetohydrodynamic Flows / ed. K. C. Tsinganos. — Dordrecht : Kluwer, 1996. — P. 673—682.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Mechanics of turbulence of multicomponent gases. — Dordrecht—Boston—London : Kluwer Academic Publishers, 2002.

Marov M. Ya., *Kolesnichenko A. V.* Chaotic and ordered structures in the developed turbulence // Astrophysical disks: Collective and stochastic phenomena / eds. A. M. Fridman, M. Ya. Marov. — Springer, 2006. — P. 23—54.

Parker E. N. Hydromagnetic dynamo model // Astrophys. J. 1955. V. 122. P. 293—314.

Richard D., *Zahn J.-P.* Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette—Taylor experiment // Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734—738.

Shakura N. I., Sunyaev R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. 1973. V. 24. P. 337—355.

Shakura N. I., Sunyaev R. A., Zilitinkevich S. S. On the turbulent energy transport in accretion disk // Astron. Astrophys. 1978. V. 62. P. 179—187.

Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz—Feldstärke $\overline{V \times B}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis—Kräfte beeinflußter Bewegung // Z. Naturforsch. 1966. B. 21a. S. 369—376.

Tout C., Pringle J. E. Accretion disk viscosity—a simple model for a magnetic dynamo // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1992. V. 259. P. 604—612.

Van-Driest E. R. On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. No. 10. P. 107.

Yoshizawa A. Self-consistend turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. No. 7. P. 1589—1600.

Zel'dovich Ya. B. On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299—312.