Министерство образования и науки Российской федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

В.А. ЗИМЕНКО, В.В. ГРИШИНА, А.А. ЗЕНИН,
А.П. КАПРАНОВ, И.Е. СИНИЦЫН,
К.А. ЦИПОРКОВА, В.Д. ШМАТКОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Рязань 2011

УДК 513

Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие / В.А. Зименко, В.В. Гришина, А.А. Зенин, А.П. Капранов, И.Е. Синицын, К.А. Ципоркова, В.Д. Шматков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2011. 112 с.

Содержит теоретическое изложение курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Предназначено для студентов всех специальностей факультета вычислительной техники.

Табл. 2. Ил. 45.

Матрица, определитель, системы алгебраических уравнений, линейные пространства и операторы, квадратичные формы, вектор, плоскость, прямая, кривые и поверхности 2-го порядка

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра теоретической и прикладной механики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой доц., канд. техн. наук А.А. Зенин)

З и м е н к о Виталий Александрович
Г р и ш и н а Вера Васильевна
З е н и н Алексей Алексеевич
К а п р а н о в Александр Павлович
С и н и ц ы н Иван Егорович
Ц и п о р к о в а Ксения Андреевна
Ш м а т к о в Вадим Дмитриевич

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Редактор Н.А. Орлова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 10.01.11. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,0.
Тираж 100 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций в Рязанском государственном радиотехническом университете. Принятая авторами последовательность изложения курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» позволяет несколько сократить затраты лекционного времени за счет того, что многие понятия, вводимые в линейной алгебре, используются без повторений при рассмотрении таких разделов как ранг матриц, системы линейных алгебраических уравнений, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Теоретический материал излагается с подробными доказательствами, которые при дефиците лекционного времени могут быть опущены.

Авторы выражают глубокую благодарность Раду П.Ю. за большую помощь в подготовке рукописи этого учебного пособия к печати.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения

знак	**что обозначает**
$\forall$ – квантор всеобщности	для любого, для каждого, для всех
$\in$ – принадлежность	является элементом
$\ni$ – принадлежность	содержит как член
$\exists$ – существование	существует, найдется
! – единственность	единственный
$\rightarrow$	выполняется условие
:, $\mid$ – двоеточие, прямая черта	такой, что
$\vee$ – знак дизъюнкции	или
$\wedge$ – знак конъюнкции	и
$\Rightarrow$ – знак следствия	следует
$\Leftrightarrow$ – знак равносильности	равносильность
$\sim$ – знак эквивалентности	тождественность
$\square$, $\blacksquare$	начало, конец доказательства
$\mathbb{Z}$	множество всех целых чисел
$\mathbb{R}$	мн-во всех действительных чисел
$\mathbb{C}$	мн-во всех комплексных чисел
$\mathbb{K}$	числовое поле

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

<u>Определение 1.</u> Комплексные числа – упорядоченные пары действительных чисел, на которых следующим образом определены операции сложения и умножения.

Пусть $z_1 = (a_1; b_1), z_2 = (a_2; b_2)$.

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Пример.

$z_1 = (5; 7), z_2 = (1; -3)$,

$z_1 + z_2 = (5 + 1; 7 + (-3)) = (6; 4)$,

$z_1 \cdot z_2 = (5 \cdot 1 - 7 \cdot (-3); 5 \cdot (-3) + 7 \cdot 1) = (26; -8)$.

<u>Определение 2.</u> Комплексные числа $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ называются равными тогда и только тогда, когда

$(a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$.

I. Аксиомы сложения

1. Коммутативность:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2. Ассоциативность:

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

3. Существование комплексного нуля:

$\exists\ 0_{\mathbb{C}} = (0; 0) : z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$

□ $z + 0_{\mathbb{C}} = (a; b) + (0; 0) = (a + 0; b + 0) = (a; b) = z.$ ■

4. Существование противоположного элемента:

$\forall z \neq 0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\ \ \exists\ -z \in \mathbb{C} : z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$

□ Пусть $z = (a; b),\ -z = (x; y)$.
Тогда, используя операцию сложения и условие равенства комплексных чисел, получаем:

$z + (-z) = (a; b) + (x; y) = (0; 0)$

$\begin{cases} a + x = 0, \\ b + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -a + a + x = -a, \\ -b + b + y = -b; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a, \\ y = -b; \end{cases}$

т.е. $-z = (-a;\ -b)$. ■

II. Аксиомы умножения

1. Коммутативность:

$z_1 z_2 = z_2 z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2. Ассоциативность:

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

3. Существование комплексной единицы:

$\exists\ 1_{\mathbb{C}} = (1; 0) : z \cdot 1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$

□ $(a; b)(1; 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0; a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a; b).$ ■

4. Существование обратного элемента:

$\forall \mathrm{z} \neq 0_{\mathbb{C}}\ \exists\ z^{-1} \in \mathbb{C} : z z^{-1} = z^{-1} z = 1_{\mathbb{C}}$

□ Пусть $z = (a; b),\ z^{-1} = (x; y)$

$z z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$

$(a;\ b)(x;\ y) = (1;\ 0)$

$(ax - by;\ ay + bx) = (1; 0)$

$\begin{cases} ax - by = 1, & | \cdot a \\ bx + ay = 0; & | \cdot b \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 x - bay = a, \\ b^2 x + aby = 0. \end{cases}$

Сложим первое уравнение со вторым:

$$a^2x + b^2x = a;$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Подставим во второе уравнение:

$$\frac{ab^2}{a^2 + b^2} = -aby \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{ab}\right);$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2};$$

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

Проверка: $zz^{-1} = (a; b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) =$

$$= \left(a\frac{a}{a^2 + b^2} - b\frac{-b}{a^2 + b^2}; -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2}\right) = (1; 0).\ \blacksquare$$

III. Аксиома дистрибутивности

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

□ Пусть $z_1 = (a_1; b_1)$, $z_2 = (a_2; b_2)$, $z_3 = (a_3; b_3)$

1. Вычислим выражение слева:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)(a_3; b_3) =$$

$$= \big((a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3; (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\big) \quad (*).$$

2. Вычислим выражение справа:

$$z_1z_3 = (a_1a_3 - b_1b_3; a_1b_3 + a_3b_1)$$

$$z_2z_3 = (a_2a_3 - b_2b_3; a_2b_3 + a_3b_2)$$

$$z_1z_3 + z_2z_3 =$$

$$= \big((a_1a_3 + a_2a_3) - (b_1b_3 + b_2b_3); (a_1b_3 + a_2b_3) + (a_3b_1 + a_3b_2)\big).$$

Вынесем общий множитель из каждого слагаемого:

$$z_1z_3 + z_2z_3 = \big((a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3; (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3\big) \quad (**)$$

Итак $(*) = (**)$. $\blacksquare$

IV. Рассмотрим комплексные числа вида $(a; 0)$

$$(a; 0)(b; 0) = (ab - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + b \cdot 0) = (ab; 0),$$

$$(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0),$$

$$(x; 0)(a; b) = (xa - 0 \cdot b; xb + 0 \cdot a) = (xa; xb).$$

При сложении и умножении они ведут себя так же, как и действительные числа. Поэтому числа вида $(a; 0)$ мы будем отождествлять с действительными: $a \in \mathbb{R} \sim (a; 0) \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим комплексное число $i = (0; 1)$:

$i^2 = (0; 1)(0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0) = -1$, т.е. $i^2 = -1$.

V. Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = (a, b) = (a; 0) + (b; 0)(0; 1) = a + bi.$$

Запись вида $z = a + bi$ – называется алгебраической формой комплексного числа.

Из вышесказанного следует, что сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на –1.

Пример. $z_1 = (5; 7) = 5 + 7i$, $z_2 = (1; -3) = 1 - 3i$,

$$z_1 + z_2 = 5 + 7i + 1 - 3i = 6 + 4i;$$

$$z_1 z_2 = (5 + 7i)(1 - 3i) = 5 \cdot 1 - 5 \cdot 3i + 7i \cdot 1 - 7 \cdot 3i^2 =$$
$$= 5 + 21 - 8i = 26 - 8i.$$

VI. Графическое представление комплексного числа (рис. 1)

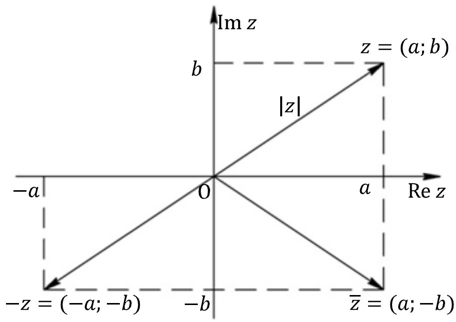


Рис. 1

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $(a; b)$ изображается точкой плоскости с координатами $(a; b)$. Соответствие между точками плоскости и комплексными числами является взаимнооднозначным, т.е. для любого комплексного числа $(a; b)$ найдется одна точка плоскости с координатами $(a; b)$, и наоборот, каждая точка плоскости с координатами $(a; b)$ соответствует одному комплексному числу $z = (a; b)$. При этом действительные числа $(a; 0)$ изображаются точками оси абсцисс, а числа $(0; b) = bi$ лежат на оси ординат (такие числа называются чисто мнимыми). Ось абсцисс называется действительной осью и обозначается $\mathrm{Re}\, z$, а ось ординат – мнимой осью и обозначается $\mathrm{Im}\, z$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Также комплексные числа можно изображать векторами, идущими из начала координат в данную точку.

$z=(a;b)$ – комплексное число, где $a=\operatorname{Re} z$ – действительная (вещественная) часть комплексного числа, $b=\operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль комплексного числа (гипотенуза прямоугольного треугольника).

Определение 3. Пусть $z=(a;b)$, тогда комплексное число, отличающееся от z знаком при мнимой части, называется комплексно-сопряженным и обозначается $\bar{z}$:

$$\forall\, z=(a;b)\in\mathbb{C}\ \ \exists\, \bar{z}\in\mathbb{C}:\ \bar{z}=(a;-b).$$

$z\,\bar{z}=(a;b)(a;-b)=(a^2+b^2;-ab+ab)=(a^2+b^2;0)=a^2+b^2=|z|^2$, т.е. $z\,\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2$.

Из рис. 1 видно, что комплексно-сопряженные числа симметричны относительно $\operatorname{Re} z$, а противоположные комплексные числа симметричны относительно начала координат.

VII. Операции вычитания и деления над комплексными числами

Пусть $z=(x;y)$, $z_1=(a_1;b_1)$, $z_2=(a_2;b_2)$.

1. $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\ \exists\,!\,z\in\mathbb{C}: z_1+z=z_2$

$$(a_1;b_1)+(x;y)=(a_2;b_2)$$

$$\begin{cases}a_1+x=a_2,\\ b_1+y=b_2;\end{cases}\quad \begin{cases}-a_1+a_1+x=-a_1+a_2,\\ -b_1+b_1+y=-b_1+b_2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=a_2-a_1,\\ y=b_2-b_1.\end{cases}$$

$\Rightarrow\ z=z_2-z_1=(a_2-a_1;\ b_2-b_1)$.

Комплексное число z называется разностью двух комплексных чисел z_2 и z_1.

2. $\forall z_1,z_2\neq 0\in\mathbb{C}\ \exists\,!\,z\in\mathbb{C}:\ z_1z=z_2$.

Умножим обе части этого уравнения на число $\overline{z_1}$, затем на $\dfrac{1}{|z_1|^2}$:

$$\overline{z_1}z_1z=\overline{z_1}z_2,\quad \text{где } \overline{z_1}z_1=|z_1|^2$$

$$z=\frac{\overline{z_1}z_2}{|z_1|^2}=\frac{(a_1;-b_1)(a_2;b_2)}{a_1^2+b_1^2}=\frac{\big(a_1a_2-(-b_1)b_2;a_1b_2+a_2(-b_1)\big)}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2;a_1b_2-a_2b_1)}{a_1^2+b_1^2}=\frac{z_2}{z_1}.$$

Полученное таким образом число z называется частным от деления комплексного числа z_2 на z_1. Эту формулу помнить необязательно, но необходимо знать алгоритм деления комплексных чисел.

Итак, чтобы разделить комплексное число z_1 на z_2 необходимо и числитель и знаменатель этой дроби умножить на число комплексно-сопряженное знаменателю (в данном случае на $\overline{z_2}$). Таким образом, мы избавляемся от i в знаменателе.

Пример. Найти частное двух комплексных чисел z_1 и z_2:

$$z = \frac{2i}{1-i}\ .$$

Умножим и числитель и знаменатель на $\overline{z_2} = 1 + i$:

$$z = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i+2i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i-2}{1+1} = i - 1.$$

VIII. Тригонометрическая форма комплексного числа (рис. 2)

Комплексные числа – это точки плоскости или векторы, идущие из начала координат в данную точку $(a; b)$. Комплексное число однозначно определяется парой чисел $(a; b)$. Но его также можно однозначно определить парой $(|z|;\ \varphi)$, где $|z|$ – модуль комплексного числа, φ – угол между положительным направлением оси $\operatorname{Re} z$ и вектором z, отсчитываемым от оси. Если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по часовой стрелке, то отрицательной. φ называется аргументом комплексного числа и обозначается $\arg z$.

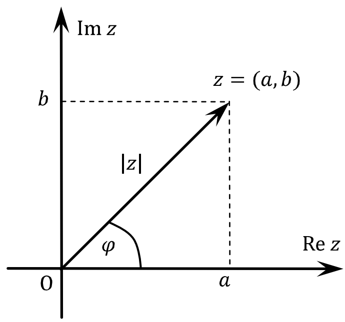


Рис. 2

Пусть $z = (a, b)$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\varphi\,;$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\sin\varphi\,;$$

$$z = (|z|\cos\varphi\,; |z|\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – запись такого вида называется тригонометрической формой комплексного числа.

IX. Типы комплексных чисел (рис. 3)

Для привидения комплексного числа, данного в алгебраической форме, в тригонометрическую форму разобьем все комплексные числа на 4 типа, в зависимости от четверти, в которой лежит комплексное число:

тип	$(a \geq 0) \wedge (b \geq 0)$	угол
I	$z_1 = a + ib$	φ
II	$z_2 = -a + ib$	$\pi - \varphi$
III	$z_3 = -a - ib$	$\pi + \varphi$
IV	$z_4 = a - ib$	$-\varphi$

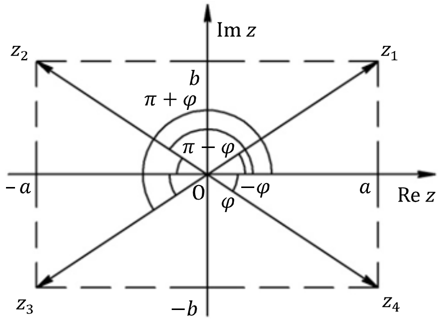


Рис. 3

Комплексное число, данное в алгебраической форме, приводится к тригонометрической форме по следующему алгоритму:

1) записываем число z_1, соответствующее данному z;
2) находим $|z_1|$;
3) находим φ_1;
4) по таблице находим φ;
5) записываем тригонометрическую форму, учитывая что $|z_1| = |z|$, т.к. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\pm a)^2 + (\pm b)^2}$.

Пример. Представить комплексное число $z = -1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Запишем комплексное число z_1, соответствующее данному z:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i.$$

Найдем модуль и аргумент для комплексного числа $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_1}{|z_1|} = \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как комплексное число z является комплексным числом II типа, пользуясь вышеприведенной таблицей, получаем:

$$\varphi = \pi - \varphi_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}; \;\; \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

X. Показательная форма комплексного числа

Используя формулу Леонардо Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число можно представить в виде:

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

$z = |z|e^{i\varphi}$ – запись такого вида называется показательной формой комплексного числа.

Тригонометрическую и показательную формы комплексного числа очень удобно использовать для умножения и деления комплексных чисел.

XI. Преобразования Муавра

1. Пусть $z_1 = (a_1; b_1) = \rho_1(\cos\varphi_1\,; \sin\varphi_1) = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, где $\rho = |z|$.

$z_2 = (a_2; b_2) = \rho_2(\cos\varphi_2\,; \sin\varphi_2) = \rho_2 e^{i\varphi_2}$,

а. Перемножим два комплексных числа в тригонометрической форме:

$z_1\,z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\,; \sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2\,;$
$\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\cdot$
$\cdot\,\sin\varphi_2\,; \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) =$
$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)\,; \sin(\varphi_1+\varphi_2))$.

В показательной форме:

$z_1\,z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\Rightarrow$ для того чтобы перемножить два комплексных числа нужно перемножить их модули и сложить аргументы, т.е.

$\rho = \rho_1\rho_2,\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (рис. 4).

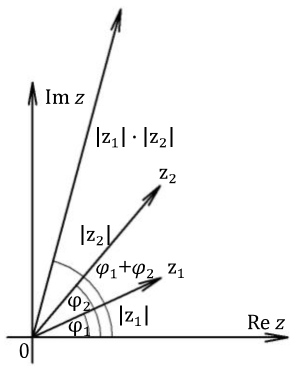


Рис. 4

б. Поделим два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1\,; \sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2\,; -\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2\,; \sin\varphi_2)\rho_2(\cos\varphi_2\,; -\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,; -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}{\rho_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\,; -\cos\varphi_2\sin\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\,; \sin(\varphi_1-\varphi_2))}{\rho_2^2(1; 0)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\,; \sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

В показательной форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\,.$$

Итак, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а аргументом является разность аргументов делимого и делителя, т.е.

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \text{(рис. 5).}$$

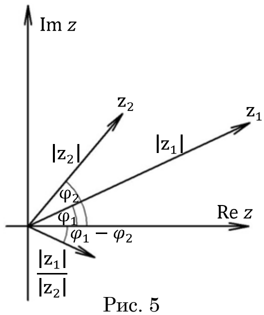


Рис. 5

2. Возведение комплексного числа в n-ю степень.

Так как z^n – это произведение числа z на себя n раз, то, пользуясь правилом умножения комплексных чисел в показательной форме:

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Воспользуемся формулой Леонардо Эйлера:

с одной стороны: $e^{in\varphi} = e^{i(n\varphi)} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$;

с другой: $e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

$\Rightarrow\ e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$,

$\Rightarrow z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Пример. Вычислить $z = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^5$ по формуле Муавра.

Пусть $\omega = 1 - \sqrt{3}i$.

Найдем тригонометрическую форму для комплексного числа ω:

$$\omega_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad \omega_1 = |\omega_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);$$

$$|\omega_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_1}{|\omega_1|} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как ω относится к IV типу комплесных чисел, то $\varphi = -\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$,

т.е. $\omega = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

По формуле Муавра: $z = \omega^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

Так как sin и cos функции периодичные, получим:

$$\text{z} = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right) - i\sin\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right)\right) = 2^5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^5 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right) = 16\left(1 + \sqrt{3}i\right).$$

3. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа.

Пусть $z = (a; b) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем $z \neq 0$,

$\omega = \sqrt[n]{z}$, если $\omega^n = z$, где $\omega \in \mathbb{C}$.

Пусть $\omega = \rho_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Тогда по формуле Муавра имеем: $\omega^n = \rho_1^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

Т.к. $z = \omega^n$, то $\rho_1^n = \rho$; $\cos n\alpha = \cos\varphi$; $\sin n\alpha = \sin\varphi$;

$\Rightarrow \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$, а так как cos и sin периодичные функции с периодом 2π, то $n\alpha = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Подставляя в данное выражение $k = 0$, затем $k = 1$ и т.д., получаем ровно n корней. При остальных значениях $k \in \mathbb{Z}$, мы получим повторяющиеся комплексные числа, так как cos и sin функции периодичные. Так как модули всех получившихся n корней равны, а разность аргументов кратна $\frac{2\pi}{n}$, то точки на комплексной плоскости, соответствующие различным значениям корня n-й степени из нашего комплексного числа, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{-1 - \sqrt{3}i}$.

Найдем для комплексного числа $z = -1 - \sqrt{3}i$ модуль и аргумент:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i,$$

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{a_1}{|z_1|} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как z относится к III типу комплексных чисел, то

$$\varphi = \pi + \varphi_1 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right), \quad \text{где } k = 0,1,2.$$

$$\omega_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right);$$

$$\omega_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right);$$
$$\omega_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{16\pi}{9}+i\sin\frac{16\pi}{9}\right).$$

Подставим $k = 3$ и убедимся в том, что получившийся корень совпадет с ω_0:

$$\omega_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{9}+\frac{6\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{9}+2\pi\right)\right) =$$
$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right),$$
$$\frac{16\pi}{9}-\frac{10\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}=\frac{6\pi}{9}=\frac{2\pi}{3}\cdot 1.$$

Построим получившиеся значения на комплексной плоскости (рис. 6).

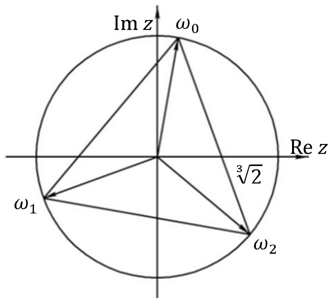


Рис. 6

2. МАТРИЦЫ

Определение 1. Совокупность $m \cdot n$ чисел, записанных в таблицу из m – строк и n – столбцов, называется матрицей размером $m \times n$ и обозначается:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n},$$ где m – количество строк матрицы $A_{m\times n}$, n – количество столбцов матрицы $A_{m\times n}$, a_{ij} – элемент матрицы $A_{m\times n}$, расположенный в i-й строке и j-м столбце.

$$\begin{array}{cc} & j\text{– й столбец} \\ & \downarrow \\ A_{m\times n} = & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \leftarrow i\text{– я строка} \end{array}$$

Элемент a_{ij} находится на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Определение 1′. Матрица – это функция, отображающая декартово произведение во множество действительных чисел.

Пусть дано множество $\mathrm{I} = \{1, \dots, m\}$ – первых m натуральных чисел и множество $\mathrm{J} = \{1, \dots, n\}$ – первых n натуральных чисел.

$\mathrm{I} \times \mathrm{J} = \{(i, j) | (i \in I) \wedge (j \in J)\}$,

$\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ – декартово произведение множеств I и J.

$A_{m\times n}: \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{R}$,

$A_{m\times n}: \mathrm{I} \times \mathrm{J} \ni (i, j) \mapsto a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим частные случаи матриц:

$m = 1;\ A_{m\times n} = A_{1\times n} = (a_{11}, \dots, a_{1n})$ – строка длины n.

$n = 1;\ A_{m\times n} = A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ – столбец высоты m.

$\overline{a_{i\cdot}} = \{a_{i1}, \dots, a_{in}\}$ – i-я строка (строка с номером i матрицы $A_{m\times n}$), где $\cdot$ – указывает на место переменного индекса.

$\overline{b_{\cdot j}} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ – j-й столбец (столбец с номером j матрицы $B_{m\times n}$).

Матрицу $A_{m\times n}$ можно рассматривать как

строку из столбцов: $A_{m\times n} = (\overline{a_{\cdot 1}}, \overline{a_{\cdot 2}}, \dots, \overline{a_{\cdot n}})$,

столбец из строк: $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \overline{a_{1\cdot}} \\ \overline{a_{2\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{a_{m\cdot}} \end{pmatrix}$.

I. Сумма матриц

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$ тех же размеров, что и матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$, состоящая из элементов, равных суммам элементов, стоящих на одинаковых позициях:

$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$,

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример. Найти сумму матриц $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 2}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

$C_{2\times 2} = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

II. Произведение матрицы на число

$C_{m\times n} = \alpha \cdot A_{m\times n}$ – произведение матрицы $A_{m\times n}$ на число α.

$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, где $i \in \{1, \dots, m\}$, а $j \in \{1, \dots, n\}$.

Пример. Вычислить произведение матрицы $A_{2\times2}$ на α.

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}, \quad \alpha = 2.$$

$$\alpha \cdot A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2\cdot0 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot3 & 2\cdot5 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

<u>Определение 2.</u> $0_{m\times n}$ – матрица, каждый элемент которой равен нулю (нулевая матрица размеров $m \times n$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

III. Свойства матриц

1. Коммутативность:
   $A_{m\times n} + B_{m\times n} = B_{m\times n} + A_{m\times n}$.
2. Ассоциативность:
   $(A_{m\times n} + B_{m\times n}) + C_{m\times n} = A_{m\times n} + (B_{m\times n} + C_{m\times n})$.
3. Существование нейтрального элемента:
   $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$.
4. Существование противоположного элемента:
   $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = -A_{m\times n} + A_{m\times n} = 0_{m\times n}$, где $-A_{m\times n} = (-1)\cdot A_{m\times n}$.
5. Дистрибутивность по отношению к сложению чисел:
   $(\alpha+\beta)A_{m\times n} = \alpha A_{m\times n} + \beta A_{m\times n}, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
6. Ассоциативность умножения матрицы на число:
   $(\alpha+\beta)A_{m\times n} = \alpha A_{m\times n} + \beta A_{m\times n}, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
7. Дистрибутивность по отношению к сложению матриц:
   $\alpha(A_{m\times n} + B_{m\times n}) = \alpha A_{m\times n} + \alpha B_{m\times n}, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

<u>Определение 3.</u> Две матрицы называются равными, если у них совпадают размерности, и элементы, стоящие на одинаковых позициях, равны.

IV. Произведение строки на столбец

Произведением строки на столбец называется число, равное сумме произведений элементов с одинаковыми номерами. Существенно, что число элементов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ должно совпадать.

$$\overline{a} = (a_1, \dots, a_n), \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Пример. Вычислить произведение строки на столбец.

$$\overline{a} = (1,2,3), \ \overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -8.$$

V. Произведение матрицы на матрицу

Пусть $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B_{n\times p} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$.

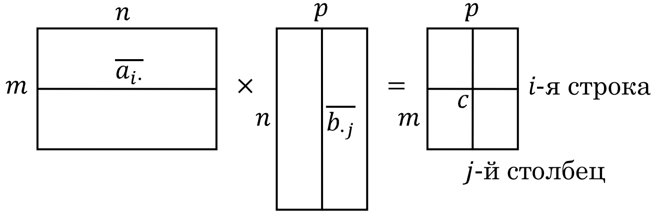
Матрицы A и B можно перемножать тогда и только тогда, когда длина строки (число столбцов) первой матрицы равна высоте столбца (число строк) второй матрицы. Перемножая матрицы, мы перемножаем все строки матрицы A на все столбцы матрицы B. Полученные $m \cdot p$ произведений запишем в матрицу $C_{m\times p}$ из m строк и p столбцов. i-я строка матрицы C получается перемножением i-й строки матрицы A на все столбцы матрицы B. j-й столбец матрицы C получается из произведения всех строк матрицы A на j-й столбец матрицы B:

$$C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \ \Rightarrow c_{ij} = \overline{a_{i\cdot}} \cdot \overline{b_{\cdot j}},$$

$$\overline{a_{i\cdot}} = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \qquad \overline{b_{\cdot j}} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix},$$

$$c_{ij} = \overline{a_{i\cdot}} \cdot \overline{b_{\cdot j}} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

VI. Графическое представление операции умножения



VII. Квадратная матрица

Определение 4. Если $m = n$, то $A_{m\times n} = A_{n\times n} = A_n$ – квадратная матрица порядка n.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ матрицы A_n называются диагональными.

Диагональ, соединяющая левый верхний с правым нижним элементом, называется главной диагональю квадратной матрицы A_n. Диагональ, соединяющая правый верхний с левым нижним элементом, называется побочной диагональю квадратной матрицы A_n.

Если в квадратной матрице A_n все недиагональные элементы равны нулю (если $i \neq j$, то $a_{ij} = 0$), то матрица называется диагональной.

Диагональная матрица, у которой все элементы, лежащие на главной диагонали, равны единице, называется единичной матрицей порядка n:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_n .$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, называется верхнетреугольной. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше главной диагонали равны нулю, называется нижнетреугольной. Например:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

VIII. Пусть $\overline{e_{i\cdot}} = (0,0,\dots,1,0,\dots 0)$ – i-я строка единичной матрицы.

$\overline{e_{i\cdot}} \cdot A = \overline{e_{i\cdot}}(\overline{a_{\cdot 1}}, \overline{a_{\cdot 2}}, \dots, \overline{a_{\cdot n}}) = (\overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot 1}}, \overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot 2}}, \dots, \overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot n}}) = \overline{a_{i\cdot}},$

$$\overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot 1}} = (0,0,\dots,1,0,\dots,0)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + \dots + 1 \cdot a_{i,1} +$$

$$+ 0 \cdot a_{i+1,1} + \dots + 0 \cdot a_{m1} = a_{i1},$$

$$\overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot 2}} = a_{i2},$$

$$\vdots$$

$$\overline{e_{i\cdot}} \cdot \overline{a_{\cdot n}} = a_{in}.$$

$$\overline{e_{\cdot j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} -$$ j-й столбец единичной матрицы.

Аналогично $A \cdot \overline{e_{\cdot j}} = \overline{a_{\cdot j}}$.

<u>Теорема 1.</u> Правило порядка суммирования: изменение порядка суммирования не меняет суммы.

□ Пусть $Z_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$.

1. Рассмотрим i-ю строку:

$$\overline{z_{i\cdot}} = (a_{i1} \dots a_{in}),$$

$$p_i = a_{i1} + \dots + a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} -$$ сумма элементов i-й строки.

$$Z = p_1 + p_2 + \dots + p_m = \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$ – сумма элементов всей матрицы $Z_{m\times n}$.

2. Рассмотрим j-й столбец:

$$\overline{z_{\cdot j}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$g_j = a_{1j} + \dots + a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$G = g_1 + \dots + g_m = \sum_{j=1}^{n} g_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Из 1 и 2 следует, что изменение порядка суммирования не меняет суммы. ■

Теорема 2. Ассоциативность. Если определены произведения матриц AB и $(AB)C$, то определены произведения BC и $A(BC)$ и $(AB)C = A(BC)$.

□ 1. Так как AB определено, то количество элементов в строке матрицы A совпадает с количеством элементов в произвольном столбце матрицы B, т.е.

$$A_{m\times n} \Rightarrow B_{n\times p} \Rightarrow (AB)_{m\times p} = G_{m\times p}.$$

Так как $(AB)C$ определено, то

$$G_{m\times p} \Rightarrow C_{p\times q} \Rightarrow \big((AB)C\big)_{m\times q} = U_{m\times q}.$$

Докажем, что определено произведение $A(BC)$:

$$B_{n\times p} \cdot C_{p\times q} = H_{n\times q},$$

$$A(BC) = A_{m\times n} \cdot H_{n\times q} = V_{m\times q}.$$

Итак, мы доказали, что размерность матриц $U_{m\times q}$ и $V_{m\times q}$ одинакова.

2. Докажем, что все соответсвующие элементы равны:

а) $$u_{ij} = \overline{g_{i\cdot}} \cdot \overline{c_{\cdot j}} = \sum_{k=1}^{p} g_{ik} c_{kj},$$

$$g_{ik} = \overline{a_{i\cdot}} \cdot \overline{b_{\cdot k}} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk},$$

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} c_{kj};$$

б) $$v_{ij} = \overline{a_{i\cdot}} \cdot \overline{h_{\cdot j}} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} h_{sj},$$

$$h_{sj} = \overline{b_{s\cdot}} \cdot \overline{c_{\cdot j}} = \sum_{k=1}^{p} b_{sk} c_{kj},$$

$$v_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{sk}\, c_{kj} \right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{is} b_{sk} c_{kj}.$$

Таким образом, применяя теорему 1:

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sk} c_{kj} = v_{ij}. \ \blacksquare$$

IX. Транспонирование матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad\quad\quad 1 \quad\quad\quad} \\ \boxed{\quad\quad\quad 2 \quad\quad\quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad\quad\quad m \quad\quad\quad} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером):

$$B_{n\times m} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{m} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Матрица B называется транспонированной к матрице A, а переход от A к B транспонированием, т.е. $b_{ji} = a_{ij}$, где $a^T{}_{ji} = a_{ij}$.

Пример. Составить транстпонированную матрицу к заданной.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

X. Свойства матриц (продолжение)

8. $1 \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot 1 = A_{m\times n}$ – существование единицы.

9. Дистрибутивность:
   $(A + B)C = AC + BC$;
   $A(B + C) = AB + AC$.

10. $(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность.

11. $(AB)^T = B^T A^T$, где A^T – транспонированная матрица A.

□ Дано: $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$.

Пусть $U = AB,\ V = (AB)^T,\ G = B^T A^T,\ E = A^T,\ F = B^T,$
$a_{jk} = e_{kj},\ b_{ki} = f_{ik}$.

1. $(AB)_{m\times p} \ \Rightarrow\ ((AB)^T)_{p\times m}$
   $B^T A^T = (B^T)_{p\times n}(A^T)_{n\times m} = (B^T A^T)_{p\times m}$.

Т.е. матрицы V и G размерами $p \times m$.

2. $v_{ij} = u_{ji} = \overline{a_{j\cdot}} \cdot \overline{b_{\cdot i}} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} e_{kj} f_{ik} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} e_{kj} = \overline{f_{i\cdot}} \cdot \overline{e_{\cdot j}} = g_{ij}$. ■

12. $(ABC)^T = \big((AB)C\big)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

3. ВЕКТОР-СТРОКИ И ВЕКТОР-СТОЛБЦЫ

Нулевой вектор – столбец, все элементы которого равны нулю.

Пусть $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ – совокупность столбцов одинаковой высоты, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – числа.

Определение 1. Выражение вида $\alpha_1\overline{a_1} + \dots + \alpha_n\overline{a_n}$ называется линейной комбинацией совокупности столбцов (векторов) $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$. Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение 2. Совокупность столбцов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ называется линейно независимой, если из равенства линейной комбинации нулевому вектору следует равенство всех коэффициентов нулю, т.е. $\alpha_1\overline{a_1} + \dots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}$ $(*)$ $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Определение 3. Совокупность столбцов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ называется линейно зависимой, если при выполнении равенства $(*)$ найдется хоть один не равный нулю коэффициент α_{i_0}, где $i_0 \in \{1, n\}$.

Определение 4. Если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ (т.е. все коэффициенты равны нулю), то эта линейная комбинация называется тривиальной.

Определение 2'. Совокупность векторов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ называется линейно независимой, если *только* тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору. Т.е. если хотя бы один коэффициент линейной комбинации линейно независимых векторов отличен от нуля, то линейная комбинация нулевому вектору равна быть не может или, можно сказать, что любая нетривиальная линейная комбинация линейно независимых векторов, не равна нулевому вектору.

Определение 3'. Система векторов называется линейно зависимой, если существует равная нулевому вектору нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы. Т.е. система векторов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ называется линейно зависимой, если среди совокупности нетривиальных линейных комбинаций векторов этой системы найдется равная нулевому вектору.

Предложение 1. Лемма. Система векторов $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы является значением линейной комбинации остальных векторов этой системы.

□ 1. Необходимость: $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ – линейно зависима.
Докажем, что хотя бы один из векторов системы является значением линейной комбинации остальных.

Так как $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ линейно зависима, то существует не тривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулевому вектору. Не нарушая общности, предположим, что $\alpha_1 \neq 0$, т.е.

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1\overline{a_1} = -\alpha_2\overline{a_2} - \dots - \alpha_n\overline{a_n} \quad | \cdot \frac{1}{\alpha_1} \neq 0.$$

Обозначим $c_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}, \ \forall\, i = \overline{2,n}$

$\Rightarrow \overline{a_1} = c_2\overline{a_2} + \dots + c_n\overline{a_n}$, т.е. $\overline{a_1}$ является значением линейной комбинации системы векторов $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$.

2. Достаточность: один из векторов системы $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ является значением линейной комбинации остальных векторов системы.
Докажем, что $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ – линейно зависима.

Не нарушая общности, предположим, что

$$\overline{a_1} = \beta_2\overline{a_2} + \beta_3\overline{a_3} + \dots + \beta_n\overline{a_n}.$$

Перенесем все векторы в левую часть уравнения:

$$1 \cdot \overline{a_1} + (-\beta_2)\overline{a_2} + (-\beta_3)\overline{a_3} + \dots + (-\beta_n)\overline{a_n} = \overline{0}.$$

Таким образом, мы получили не тривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору, а значит система векторов линейно зависима. ■

Предложение 2. Если $\overline{0} \in \{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$, то система $\{\overline{a_1},\dots,\overline{a_n}\}$ – линейно зависима.

□ Не нарушая общности, предположим, что $\overline{a_1} = \overline{0}$, тогда

$$13 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + \dots + 0 \cdot \overline{a_n} = \overline{0}.$$

Так как $\alpha_1 = 13$, а $13 \neq 0$, то комбинация нетривиальная, и она линейно зависима. Вместо 13 мы можем выбрать любое число, так как произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор. ■

Определение 5. Любое подмножество системы векторов $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ называется ее подсистемой.

Предложение 3. Если в системе $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ существует линейно зависимая подсистема, то и вся система $\{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}\}$ линейно зависима.

□ Составим нетривиальную линейную комбинацию векторов линейно зависимой подсистемы, равную нулю, и добавим к ней остальные векторы системы с нулевыми коэффициентами. Получим нетривиальную линейную комбинацию всех векторов системы, равную нулевому вектору. Это значит, что исходная система векторов линейно зависима. ■

Предложение 4. Любые столбцы, входящие в линейно независимую систему, сами по себе образуют линейно независимую систему.

□ Предположим обратное, т.е. предположим, что в линейно независимой системе существует линейно зависимая подсистема. Тогда по предложению 3 получаем, что и вся система линейно зависима. Получаем противоречие. Следовательно, любые столбцы, входящие в линейно независимую систему, сами по себе образуют линейно независимую систему. ■

Предложение 5. Система столбцов $\{\overline{e_{\cdot 1}}, \dots, \overline{e_{\cdot n}}\}$ единичной матрицы порядка n образует линейно независимую систему.

□ По определению 2:

$$\alpha_1\overline{e_{\cdot 1}} + \alpha_2\overline{e_{\cdot 2}} + \dots + \alpha_n\overline{e_{\cdot n}} = \overline{0};$$

$$\alpha_1\overline{e_{\cdot 1}} + \alpha_2\overline{e_{\cdot 2}} + \dots + \alpha_n\overline{e_{\cdot n}} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\0\\\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ все коффициенты нули, т.е. система столбцов $\{\overline{e_{\cdot 1}}, \dots, \overline{e_{\cdot n}}\}$ линейно независима. ■

Предложение 6. Любой столбец $\bar{a}$ высоты n можно представить в виде линейной комбинации столбцов единичной матрицы $\{\overline{e_{\cdot 1}}, \dots, \overline{e_{\cdot n}}\}$, причем коэффициентами этой линейной комбинации будут являться элементы столбца $\bar{a}$.

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \overline{e_{\cdot 1}} + \alpha_2 \overline{e_{\cdot 2}} + \cdots + \alpha_n \overline{e_{\cdot n}}.$$

4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определители (детерминанты) определены только для квадратных матриц. Определитель обозначается $\det A$, $|A|$ или, если нужно выписать элементы матриц,– прямыми чертами.

Определение 1. Определителем квадратной матрицы называется число, сопоставляемое этой матрице и вычисляемое по следующим правилам.

1. Определителем матрицы $A_{1\times 1}$ называется само число a_{11}:

   $\det A_{1\times 1} = a_{11}$.

2. Определителем матриц порядка $n > 1$ называется число:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_k^1,$$ где a_{1k} – элемент исходной матрицы,

стоящий в 1-й строке и k-м столбце.

I. Дополнительный минор элемента матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$.

A_j^i – матрица порядка $n-1$, полученная из исходной путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца:

$$A_j^i = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} j\text{-й столбец} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \end{array} & i\text{-я строка}; \end{array}$$

M_j^i – дополнительный минор элемента a_{ij};

$M_j^i = |A_j^i| = \det A_j^i$.

II. Определители матриц 2-го порядка

Пусть $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

$$\det A_{2\times2} = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1 = (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + (-1)^{1+2}a_{12}M_2^1 =$$
$$= a_{11}M_1^1 - a_{12}M_2^1;$$
$$A_1^1 = (a_{22}) \ \Rightarrow \ M_1^1 = |A_1^1| = a_{22};$$
$$A_2^1 = (a_{21}) \ \Rightarrow \ M_2^1 = |A_2^1| = a_{21}.$$

Тогда $\det A_{2\times2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Мы доказали, что определителем матрицы 2-го порядка является число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях.

III. Определители матриц 3-го порядка

Пусть $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$|A| = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1 = (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + (-1)^{1+2}a_{12}M_2^1 +$$
$$+ (-1)^{1+3}a_{13}M_3^1 = a_{11}M_1^1 - a_{12}M_2^1 + a_{13}M_3^1;$$
$$A_1^1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \ M_1^1 = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32};$$
$$A_2^1 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}; \ M_2^1 = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31};$$
$$A_3^1 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; \ M_3^1 = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31};$$

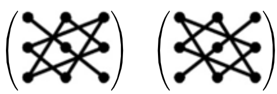


Рис. 7

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Определители третьего порядка можно вычислять по правилу треугольника (рис. 7):

со знаком " $+$ " берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и вершины треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали;

со знаком " $-$ " берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали, и вершины треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали.

IV. Введем обозначения

$A_{j,j_2}^{i,i_2} = A_{j_2,j}^{i_2,i} = A_{j,j_2}^{i_2,i} = A_{j_2,j}^{i,i_2}$ – матрица, полученная из матрицы A путем вычеркивания двух строк с номерами i, i_2 и двух столбцов с номерами j, j_2.

M_j^i – дополнительный минор A_{ij};

$M_{j,\ j_2}^{i,\ i_2}$ – дополнительный минор (определитель) $A_{j,\ j_2}^{i,\ i_2}$.

V. Метод математической индукции

Утверждение справедливо для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, если оно справедливо при $n = 1$, и из предположения о справедливости утверждения при некотором натуральном n следует его справедливость при следующем $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 (Theorem). Справедливо разложение определителя по первому столбцу:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i.$$

□ Докажем теорему методом математической индукции.

1. Убедимся в справедливости теоремы для матриц 2-го порядка.

$$|A| = \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i = (-1)^{1+1} a_{11} M_1^1 + (-1)^{2+1} a_{21} M_1^2 =$$

$$= a_{11} M_1^1 - a_{21} M_1^2 = \left| \text{т. к. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Итак, разложение по первому столбцу справедливо для матриц 2-го порядка.

2. Предположим справедливость теоремы для матриц порядка $(n-1)$ и докажем теорему для матриц порядка n.

а) Предварительно найдем дополнительный минор для k-го элемента первой строки:

$$M_k^1 = |A_k^1|, \text{ где } A_k^1 = \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Так как M_k^1 – определитель матрицы A_k^1 порядка $(n-1)$, то для него справедливо наше утверждение:

$$M_k^1 = (-1)^{1+1}a_{21}M_{k\,1}^{1\,2} + (-1)^{2+1}a_{31}M_{k\,1}^{1\,3} + (-1)^{3+1}a_{41}M_{k\,1}^{1\,4} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1+1}a_{n1}M_{k\,1}^{1\,n} = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{(i-1)+1}a_{i1}M_{k\,1}^{1\,i} = \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}M_{k\,1}^{1\,i}.$$

б) Найдем дополнительный минор для i-го элемента первого столбца:

$$M_1^i = \left|A_1^i\right| = \left|A_1^i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{12}M_{1\,2}^{i\,1} + (-1)^{1+2}a_{13}M_{13}^{i1} + \cdots + (-1)^{1+n-1}a_{1n}M_{1n}^{i1} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n}(-1)^{1+(k-1)}a_{1k}M_{1k}^{i1} = \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{1k}^{i1}.$$

в) Запишем определитель матрицы A:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1 = (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_k^1 =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\left(\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}M_{k\,1}^{1\,i}\right) =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{1+k+i}a_{1k}a_{i1}M_{k1}^{1i} =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\left(\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{k1}^{1i}\right) =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\left(\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{1k}M_{1k}^{i1}\right) =$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^{i}.$$

Таким образом, $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^{i}$. ■

Теорема 2. Если в квадратной матрице поменять какие-либо две строки местами, то определитель полученной матрицы будет совпадать с определителем исходной матрицы по абсолютному значению и будет противоположен ему по знаку.

□ Докажем методом математической индукции.

1. При $n = 1$ утверждение не имеет смысла.

Докажем наше утверждение для матриц 2-го порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}, \quad |B| = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -|A|.$$

2. Предположим, что теорема справедлива для матриц порядка $n-1$, т.е. предположим, что если в матрицах порядка $n-1$ две *соседние* строки поменять местами, то определитель будет отличаться только знаком от определителя исходной матрицы.

Разложим определитель исходной матрицы по 1-му столбцу, выделив два слагаемых, отвечающих строкам, которые меняются местами:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i =$$

$$= (-1)^{k+1} a_{k1} M_1^k + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} M_1^{k+1} + \sum_{i \neq k,k+1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^i.$$

В матрице A k-ю и $(k+1)$-ю строки поменяем местами и обозначим её B. Вычислим $|B|$ путём разложения по 1-му столбцу, выделив два слагаемых, отвечающих строкам, которые меняются местами:

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \mathrm{b}_{i1} N_1^i =$$

$$= (-1)^{k+1} b_{k1} N_1^k + (-1)^{k+2} b_{k+1,1} N_1^{k+1} + \sum_{i \neq k,k+1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i1} N_1^i.$$

По индуктивному предположению:

$M_1^i = -N_1^i, \ \forall\, i \neq k, k+1$, где $i \in \{1, \dots, n\}$.

$a_{i1} = b_{i1}, \ \forall\, i \neq k, k+1$, где $i \in \{1, \dots, n\}$.

$M_1^k = N_1^{k+1}; \quad M_1^{k+1} = N_1^k.$

$b_{k+1,1} = a_{k1}; \quad b_{k,1} = a_{k+1,1}.$

$\Rightarrow\ a_{k1} M_1^k = b_{k+1,1} N_1^{k+1}.$

В силу записанного можно утверждать, что $|A| = -|B|$.

3. Рассмотрим случай, когда в матрице две не соседние строки меняются местами

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow j \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \end{matrix}$$

Между i-й и j-й строками в матрице A расположены s промежуточных строк. Следовательно, за s преобразований мы переместим i-ю строку на место $(j-1)$-й строки. Далее, за одно преобразование, мы поменяем i-ю и j-ю строки местами. Еще за s преобразований переместим j-ю строку с $(j-1)$-го места на i-е. Таким образом, за $(2s+1)$ преобразований мы получим матрицу B. Так как всего мы совершили нечетное число перемен строк местами, то $|A| = -|B|$. ■

<u>Теорема 3.</u> Справедливо разложение определителя по любому столбцу и любой строке:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^i.$$

□ Рассмотрим матрицу B, у которой i-я строка матрицы A стоит на первом месте, а все остальные строки являются строками матрицы A и сохраняют свой порядок, который имели в матрице A.

Посчитаем $\det B$, раскладывая определитель по 1-й строке:

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Над i-й строкой стоит $(i-1)$-я, т.е. меняем строки $i-1$ раз, следовательно:

$$\det A = (-1)^{i-1} \cdot \det B\,, \text{ где } \det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} N_j^1\,;$$

$$\left.\begin{aligned} N_j^1 &= M_j^i \\ b_{1j} &= a_{ij} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \det B = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{ij} M_j^i \, ;$$

$$\det A = (-1)^{i-1} \cdot \det B = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j} a_{ij} M_j^i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{(i-1)+(1+j)} a_{ij}\, M_j^i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} M_j^i \, . \ \blacksquare$$

<u>Теорема 4.</u> Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

$A^T = B;\qquad A^T = (A^T)_{n\times n} = (A^T)_n;\qquad B = B_{n\times n} = B_n.$

□ Докажем, что $|A^T| = |A|$ или $\det B = \det A$.

$A = \left(a_{ij}\right)_n,\qquad B = \left(b_{pq}\right)_n,\qquad A^T = B,\qquad a_{ij} = b_{ji}.$

Докажем теорему методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что наше утверждение справедливо для матриц порядка $n-1$ и докажем наше утверждение для матриц порядка n. Разложим $\det A$ по 1-й строке и $\det B$ по 1-му столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k} a_{1k} M_k^1 \, ;\ \ \det A_k^1 = M_k^1;$$

$$\det B = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} b_{k1} N_1^k \, ;\ \ \det B_1^k = N_1^k.$$

По индуктивному предположению:

$M_k^1 = \det A_k^1 = \det\ (A_k^1)^{\mathrm{T}} = \det B_1^k = N_1^k;$

$A^{\mathrm{T}} = B\ \ \Rightarrow\ \ a_{1k} = b_{k1}$

$\Rightarrow \det A = \det B\,.$ ■

VI. Свойства определителя

1. Если какая-либо строка матрицы представима в виде суммы двух строк, то определитель исходной матрицы равен сумме определителей матриц, полученных из исходной путем замены вышеуказанной строки на слагаемые строки.

□ Пусть $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель по i-й строке:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \left(b_{ij} + c_{ij}\right) M_j^i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} M_j^i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} M_j^i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

M_j^i – дополнительный минор элементов i-й строки, значит он этих элементов не содержит и во всех трех матрицах одинаковый. ■

2. Если все элементы какой-либо строки матрицы имеют общий множитель, то его можно выносить за знак определителя.

□ Пусть $b_{ij} = \beta a_{ij}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$.

Разложим определитель по i-й строке:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} M_j^i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \beta a_{ij} M_j^i = \beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^i = \beta |A|. \ ■$$

3. Если в квадратной матрице какие-либо две строки состоят соответственно из одинаковых элементов, то определитель этой матрицы равен нулю.

□ Так как если в исходной матрице две строки поменять местами, то, с одной стороны, исходная матрица и преобразованная не отличаются друг от друга, а с другой – в силу теоремы 2, их определители должны отличаться знаком:

$$|A| = |B|, \quad (\text{т.к.}\, A = B)$$

$$-|A| = |B|, \quad (\text{по доказанной теореме})$$

$$\Rightarrow\ |A| = -|A|, \quad 2|A| = 0 \quad \Rightarrow\ |A| = 0. \ ■$$

4. Если к какой-либо строке матрицы прибавить другую строку этой же матрицы, умноженную на любое число, то определитель

вновь полученной матрицы будет равен определителю исходной матрицы.

$$\square \begin{vmatrix} \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} + \beta\overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots \\ \beta\overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{j\cdot}} \\ \cdots \end{vmatrix} + \beta \cdot 0 = |A|. \ \blacksquare$$

5. Если в квадратной матрице существует строка, состоящая только из нулей, то определитель этой матрицы равен нулю.

□ Пусть в матрице $\overline{a_{i\cdot}} = \{0,0,\dots,0\}$ – нулевая строка.
В силу теоремы 3 разложим определитель этой матрицы по i-й строке. В результате получим линейную комбинацию миноров матрицы, коэффициентами которой являются элементы i-й строки, которые равны нулю. Следовательно, определитель матрицы с нулевой строкой будет равен нулю. ■

6. Следствие из 4. Если какая-либо строка в матрице A является линейной комбинацией двух других строк, то $\det A = 0$.

□ Пусть $\overline{a_{i\cdot}} = \overline{a_{k\cdot}} + \overline{a_{s\cdot}}$
Тогда по свойству 4:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \cdots \\ \overline{a_{k\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{i\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{s\cdot}} \\ \cdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cdots \\ \overline{a_{k\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{k\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{s\cdot}} \\ \cdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \cdots \\ \overline{a_{k\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{s\cdot}} \\ \cdots \\ \overline{a_{s\cdot}} \\ \cdots \end{pmatrix} \overset{4}{=} 0 + 0 = 0. \ \blacksquare$$

7. Определитель произведения равен произведению определителей. Доказательство приведено в разделе линейные системы уравнений.

VII. Обратная матрица

В предыдущих лекциях символом A_j^i мы обозначали матрицу, которая получилась из матрицы A путем вычёркивания i-й строки и j-го столбца. Введем для символа A_j^i новое обозначение:

$A_j^i = (-1)^{i+j}\,\mathrm{M}_j^i$, где M_j^i – дополнительный минор элемента.

A_j^i – алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{ij}.

Разложим определитель по j-му столбцу:

$$\Delta = (-1)^{1+j} a_{1j}\ \mathrm{M}_j^1 + (-1)^{2+j} a_{2j}\ \mathrm{M}_j^2 + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj}\ \mathrm{M}_j^n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \mathrm{M}_j^i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ A_j^i.$$

Итак, определитель матрицы равен сумме произведений элементов какого-либо столбца на их алгебраические дополнения.

<u>Предложение 1.</u> Сумма произведений элементов какого-либо столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю.

□ Рассмотрим определитель матрицы, полученной из матрицы A путём замены j-го столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \text{тогда} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & y_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & y_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i A_j^i.$$

Пусть $k \neq j$, тогда, положив $y_i = a_{ik}$, получим слева: определитель матрицы, в которой k-й и j-й столбцы одинаковы, а справа – сумму произведений элементов k-го столбца на алгебраические дополнения элементов j-го столбца. Эта сумма равна нулю, так как является разложением определителя последней матрицы, в которой два одинаковых столбца. ■

<u>Теорема 5. Обратная матрица.</u> Если матрица A квадратная порядка n и $\det A \neq 0$, то $\exists\, X : A \cdot X = X \cdot A = E$,

$$\text{где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \text{ – единичная матрица порядка } n.$$

Матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}. Обратная матрица равна произведению числа, обратного определителю матрицы A, на матрицу, j-й столбец которой составлен из алгебраических дополнений элементов j-й строки матрицы A, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 & A_3^2 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}.$$

□ Докажем, что $A \cdot A^{-1} = E$.

Вычислим $A \cdot A^{-1} = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{A_k^j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_k^j.$$

Если $i \neq j$, то $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_k^j = 0$, как сумма произведений элементов i-й строки на алгебраические дополнения j-й строки.

Если $i = j$, то $c_{ij} = c_{jj} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_k^j = \frac{1}{\Delta}\Delta = 1$.

Таким образом, мы доказали, что элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а все остальные – нулю:

$$\left.\begin{matrix} c_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j \\ c_{ij} = 1, \text{ если } i = j \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = E_n. \ \blacksquare$$

5. ЛИНЕЙНО ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть $\mathrm{X} = \{x\}$ и $\mathrm{Y} = \{y\}$.

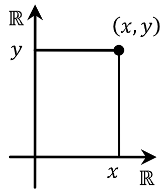


Рис. 8

<u>Определение 1.</u> $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \{(x, y) | (x \in \mathrm{X}) \wedge (y \in \mathrm{Y})\}$ – декартово произведение множеств X и Y. Например, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (рис. 8).

<u>Определение 2.</u> $\mathbb{V}$ – линейное векторное пространство или линеал, если выполняются:

1) внутренний закон композиции:

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \text{т.е. } + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \ni \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \mapsto \left(\overline{a} + \overline{b}\right) \in \mathbb{V};$$

2) внешний закон композиции:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \text{ т.е. } \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \ni (\alpha, \overline{a}) \mapsto (\alpha \cdot \overline{a}) \in \mathbb{V}.$$

I. Аксиомы

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, $\forall\, \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{V}$.

2. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right)$, $\forall\, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{V}$.

3. $\exists\, \overline{0} \in \mathbb{V} : \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$, $\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}$.

4. $\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}\ \exists\, (-\overline{a}) \in \mathbb{V} : \overline{a} + (-\overline{a}) = (-\overline{a}) + \overline{a} = \overline{0}$.

5. $\alpha\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ и $\forall\, \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{V}$.

6. $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}$.

7. $(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}$.

8. $1 \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$, $\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}$.

Замечание. Линейное векторное пространство – совокупность элементов (векторов), которая удовлетворяет восьми аксиомам. Все квадратные матрицы образуют линейно векторное пространство.

II. Простейшие следствия

1. Нулевой вектор единственный.

□ Предположим, что $\exists\ \overline{0_1}, \overline{0_2} \in \mathbb{V}$. Тогда

$$\overline{u} + \overline{0_1} = \overline{0_1} + \overline{u} = \overline{u} \quad (1)$$
$$\overline{u} + \overline{0_2} = \overline{0_2} + \overline{u} = \overline{u} \quad (2),\ \forall\, \overline{u} \in \mathbb{V}.$$

Пусть $\overline{u} = \overline{0_2}$ в (1), тогда $\overline{0_1} + \overline{0_2} = \overline{0_2}$.
Пусть $\overline{u} = \overline{0_1}$ в (2), тогда $\overline{0_2} + \overline{0_1} = \overline{0_1}$.
В силу аксиомы коммутативности $\Rightarrow\ \overline{0_1} = \overline{0_2}$. ■

2. Противоположный вектор для любого вектора единственный.

□ Пусть $\overline{u_1}, \overline{u_2} \in \mathbb{V}$ и $\overline{u} + \overline{u_1} = \overline{0}$, $\overline{u} + \overline{u_2} = \overline{0}$.
Докажем, что $\overline{u_1} = \overline{u_2} = -\overline{u}$, используя аксиомы линейного векторного пространства:

$$\overline{u_1} = \overline{u_1} + \overline{0} = \overline{u_1} + (\overline{u} + \overline{u_2}) = (\overline{u_1} + \overline{u}) + \overline{u_2} = \overline{0} + \overline{u_2} = \overline{u_2} = -\overline{u}\,.\ ■$$

3. $(\lambda_1 - \lambda_2)\overline{u} = \lambda_1\overline{u} - \lambda_2\overline{u}$.

□ $\lambda_1\overline{u} = \big((\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2\big)\overline{u} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{u} + \lambda_2\overline{u}$

$$\lambda_1\overline{u} - \lambda_2\overline{u} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{u}, \text{ где } \big(\overline{a} + \big(-\overline{b}\big) = \overline{a} - \overline{b}\big).\ ■$$

4. $\overline{0} \cdot \overline{u} = \overline{0}$.

□ Положим в 3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, тогда $\lambda\overline{u} - \lambda\overline{u} = (\lambda - \lambda)\overline{u}$. ■

5. $(-1)\overline{u} = -\overline{u}$

□ $(-1)\overline{u} + \overline{u} = (-1)\overline{u} + 1\overline{u} = \big((-1) + 1\big)\overline{u} = 0 \cdot \overline{u} = \overline{0}$;

$$\left.\begin{array}{l} \overline{u} + (-1)\overline{u} = \overline{0} \\ \overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow\ (-1)\overline{u} = -\overline{u}, \text{ в силу следствия 1. } ■$$

III. Базис в линейном векторном пространстве

Пусть $\mathbb{V}$ – линейное векторное пространство,

$\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\} \subset \mathbb{V}$, причем $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ – линейно независима.

Определение 3. Если в $\mathbb{V}$ существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ и более числа векторов линейно зависима, то $\mathbb{V}$ называется n–мерным, а система $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ называется *базисом* в n–мерном пространстве $\mathbb{V}^n$.

Теорема 1. Любой вектор n–мерного пространства $\mathbb{V}^n$ однозначно представим в виде линейной комбинации базисных векторов.

□ 1. Пусть $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\} \subset \mathbb{V}^n$ – базис в $\mathbb{V}^n$.

Тогда $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{V}^n \to \{\overline{x}, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ – линейно зависима. Следовательно, существует нетривиальная линейная комбинация системы $\{\overline{x}, \overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$, равная нулевому вектору, т.е.

$$\alpha_0\overline{x} + \alpha_1\overline{e_1} + \dots + \alpha_n\overline{e_n} = \overline{0}. \quad (\tilde{*})$$

Докажем, что $\alpha_0 \neq 0$.

Предположим, что $\alpha_0 = 0$, тогда $(\tilde{*})$ примет вид:

$$\alpha_1\overline{e_1} + \dots + \alpha_n\overline{e_n} = \overline{0}. \quad (\hat{*})$$

Так как в равенстве $(\tilde{*})$ левая часть является нетривиальной линейной комбинацией, то и левая часть равенства $(\hat{*})$ является нетривиальной линейной комбинацией базисных векторов системы $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$. Из $(\hat{*})$ следует, что существует нетривиальная линейная комбинация базисных векторов, равная нулевому вектору, т.е. система $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ линейно зависима. Но $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ – базис в $\mathbb{V}^n$, а любой базис есть линейно независимая система векторов. Противоречие. К противоречию нас привело предположение о том, что $\alpha_0 = 0$, значит $\alpha_0 \neq 0$.

Выразим из $(\tilde{*})$ вектор $\overline{x}$:

$$\alpha_0\overline{x} + \alpha_1\overline{e_1} + \dots + \alpha_n\overline{e_n} = \overline{0} \ \ |: \alpha_0$$

$$\overline{x} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\overline{e_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\overline{e_n} = \overline{0}$$

$$\overline{x} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)\overline{e_1} + \dots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)\overline{e_n}.$$

Пусть $x_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \dots, x_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_0}$, т.е. $x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0}$, где $i = \overline{1,n}$.

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что любой вектор $\bar{x}$ пространства $\mathbb{V}^n$ является значением линейной комбинации векторов базиса пространства $\mathbb{V}^n$. Причем коэффициенты линейной комбинации x_1,...,x_n называются координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$.

2. Докажем, что разложение вектора $\bar{x}$ по базису $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ однозначно.

Пусть
$$-\begin{array}{l} \bar{x} = x_1'\overline{e_1} + \dots + x_n'\overline{e_n} \\ \overline{x} = x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n} \\ \hline \overline{0} = (x_1' - x_1)\overline{e_1} + \dots + (x_n' - x_n)\overline{e_n}. \end{array}$$

Мы получили равную нулевому вектору линейную комбинацию базисных векторов $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$. Так как система $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ линейно независима, то полученная линейная комбинация тривиальна.

$$\begin{array}{ll} x_1' - x_1 = 0, & x_1' = x_1, \\ \dots & \dots \\ x_n' - x_n = 0; & x_n' = x_n. \end{array}$$

Таким образом, разложение по базису $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\} \subset \mathbb{V}^n$ однозначно.

IV. Подпространства

Пусть $\mathbb{V}^n$ – линейное n–мерное векторное пространство.

Определение 4. Пространство L подпространство $\mathbb{V}^n$ ($L \subset \mathbb{V}^n$), если

1) $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in L \to (\overline{a} + \overline{b}) \in L$;
2) $\forall\ \overline{a} \in L$ и $\forall\ \alpha \in \mathbb{K} \to \alpha\overline{a} \in L$.

Определение 4′. $L \subset \mathbb{V}^n$, если $\forall\ \overline{a}, \overline{b} \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \to (\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) \in L$.

Пусть $B = \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\} \subset \mathbb{V}^n$.

Определение 5. $\overline{B} = \{\overline{y} \mid \overline{y} = \alpha_1\overline{u_1} + \dots + \alpha_m\overline{u_m}, \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall i = \overline{1,m}\}$ – совокупность всевозможных линейных комбинаций системы векторов B. $\overline{B}$ – линейное замыкание (линейная оболочка) системы B. Говорят, что $\overline{B}$ натянуто на векторы $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$. Система $B = \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ называется системой порождающих для $\overline{B}$.

Предложение 1. $\overline{B}$ – линейное пространство, порожденное системой векторов $B = \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$, причем $\overline{B} \subset \mathbb{V}$, где $\overline{u_i} \in \mathbb{V}, \forall\, i \in \{1, \dots, m\}$.

□ Докажем, что $\forall\, \overline{b_1}, \overline{b_2} \in \overline{B} \to \left(\delta\overline{b_1} + \gamma\overline{b_2}\right) \in \overline{B}, \forall \delta, \gamma \in \mathbb{K}$.

$$\overline{b_1} \in \bar{B} \;\Rightarrow \overline{b_1} = \alpha_1\overline{u_1} + \dots + \alpha_m\overline{u_m}$$
$$\overline{b_2} \in \bar{B} \;\Rightarrow \overline{b_2} = \beta_1\overline{u_1} + \dots + \beta_m\overline{u_m}$$
$$\delta\overline{b_1} + \gamma\overline{b_2} = \delta(\alpha_1\overline{u_1} + \dots + \alpha_m\overline{u_m}) + \gamma(\beta_1\overline{u_1} + \dots + \beta_m\overline{u_m}) =$$
$$= (\delta\alpha_1 + \gamma\beta_1)\overline{u_1} + (\delta\alpha_2 + \gamma\beta_2)\overline{u_2} + \dots + (\delta\alpha_m + \gamma\beta_m)\overline{u_m} \;\in \bar{B}.\ \blacksquare$$

Теорема 2. Штейница. Пусть дано пространство $\mathbb{V}$, которое порождается системой векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$, и пусть $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\} \subset \mathbb{V}$ – линейно независима, тогда $n \le m$ и в системе $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ можно заменить n векторов $\bar{u}$ на n векторов $\bar{v}$ так, что вновь полученная система векторов будет являться системой порождающих пространства $\mathbb{V}$.

□ Так как пространство $\mathbb{V}$ порождается системой векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$, то каждый вектор пространства $\mathbb{V}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}$.

Теорему будем доказывать методом математической индукции.

1. $n = 1$. Тогда $\{\overline{v_1}\} \subset \mathbb{V}$ – линейно независима, $\Rightarrow \overline{v_1} \ne \overline{0}$.

Так как $\overline{v_1} \in V$, то $\overline{v_1} = c_1\overline{u_1} + \dots + c_m\overline{u_m}$.

Если $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$, то $\overline{v_1} = 0$, но $\overline{v_1} \ne \overline{0}$, тогда хотя бы один из коэффициентов последней линейной комбинации не равен нулю. Не нарушая общности, предположим, что c_1 отличен от нуля, тогда

$$c_1\overline{u_1} = \overline{v_1} - c_2\overline{u_2} - c_3\overline{u_3} - \dots - c_m\overline{u_m} \quad | : c_1$$
$$\overline{u_1} = \frac{1}{c_1}\overline{v_1} + \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\overline{u_2} + \left(-\frac{c_3}{c_1}\right)\overline{u_3} + \dots + \left(-\frac{c_m}{c_1}\right)\overline{u_m}. \quad (*)$$

$(*)$ – линейная комбинация векторов $\{\overline{v_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \dots, \overline{u_m}\}$, где $n \le m$.

Пусть $x \in \mathbb{V}$, тогда $\bar{x} = x_1\overline{u_1} + \dots + x_m\overline{u_m}$. $(\tilde{*})$

В равенстве $(\tilde{*})$ в правой части $\overline{u_1}$ заменим на линейную комбинацию, взятую из равенства $(*)$, в которой, раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы узнаем линейную комбинацию совокупности векторов $\{\overline{v_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}\}$. Так как $\bar{x}$ – произвольный вектор пространства $\mathbb{V}$, то система $\{\overline{v_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_m}\}$ является системой порождающих для всего пространства $\mathbb{V}$.

2. Пусть теорема справедлива в случае $(n-1)$ векторов. Докажем справедливость теоремы для n векторов, т.е. предположим, что если система векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{n-1}}\} \subset \mathbb{V}$ линейно независима, то $n-1 \le m$ и $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{n-1}}, \overline{u_n}, \dots, \overline{u_m}\}$ порождает пространство $\mathbb{V}$.

Пусть $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\} \subset \mathbb{V}$ линейно независима.

Для системы $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{n-1}}\}$ теорема справедлива по индуктивному предположению, т.е. $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{n-1}}, \overline{u_n}, \dots, \overline{u_m}\}$ порождает $\mathbb{V}$.

Так как $\overline{v_n} \in \mathbb{V}$, то $\overline{v_n} = \alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_{n-1}\overline{v_{n-1}} + \alpha_n\overline{u_n} + \dots + \alpha_m\overline{u_m}$.

Если допустить, что $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \dots = \alpha_m = 0$, то

$$\overline{v_n} = \alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_{n-1}\overline{v_{n-1}}.$$

Значит, система $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ линейно зависима, что противоречит условию, $\Rightarrow$ среди чисел $\alpha_n, \dots, \alpha_m$ найдется отличное от нуля. Не нарушая общности, будем считать, что $\alpha_n \ne 0$, тогда

$$\alpha_n\overline{u_n} = \overline{v_n} - \alpha_1\overline{v_1} - \dots - \alpha_{n-1}\overline{v_{n-1}} - \alpha_{n+1}\overline{u_{n+1}} - \dots - \alpha_m\overline{u_m} \quad | : \alpha_n$$

$$\overline{u_n} = \frac{1}{\alpha_n}\overline{v_n} + \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_n}\right)\overline{v_1} + \dots + \left(\frac{-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)\overline{v_{n-1}} +$$

$$+ \left(\frac{-\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)\overline{u_{n+1}} + \dots + \left(\frac{-\alpha_m}{\alpha_n}\right)\overline{u_m}. \quad (**)$$

Таким образом, $\overline{u_n}$ является линейной комбинацией системы векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}, \overline{u_{n+1}}, \dots, \overline{u_m}\}$.

Тогда $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{V} \to \overline{x} = \beta_1\overline{v_1} + \dots + \beta_{n-1}\overline{v_{n-1}} + \beta_n\overline{u_n} + \dots + \beta_m\overline{u_m}$. $(\hat{*})$

В равенстве $(\hat{*})$ заменим $\overline{u_n}$ на линейную комбинацию, взятую из равенства $(**)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы получим, что любой вектор $\bar{x}$ из пространства $\mathbb{V}$ является линейной комбинацией системы векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}, \overline{u_{n+1}}, \dots, \overline{u_m}\}$.

Следовательно, $n \le m$ и $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}, \overline{u_{n+1}}, \dots, \overline{u_m}\}$ порождает $\mathbb{V}$. ■

Предложение 2. Количество векторов в базисе пространства $\mathbb{V}$ неизменно.

□ Пусть $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ и $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_m}\}$ – два базиса в пространстве $\mathbb{V}$. Это значит, что они порождают пространство $\mathbb{V}$.

Положим в теореме Штейница:

$$\overline{v_1} = \overline{e_1}, \dots, \overline{v_n} = \overline{e_n};$$

$$\overline{u_1} = \overline{g_1}, \dots, \overline{u_m} = \overline{g_m}.$$

По теореме Штейница $n \le m$.

С другой стороны, в теореме Штейница положим:

$\overline{v_1} = \overline{g_1}, \dots, \overline{v_m} = \overline{g_m}$;

$\overline{u_1} = \overline{e_1}, \dots, \overline{u_n} = \overline{e_n}$.

По теореме Штейница $m \le n$.

$\Rightarrow m = n$, т.е. все базисы в пространстве $\mathbb{V}$ состоят из одного и того же количества векторов, или количество векторов в базисе пространства $\mathbb{V}$ неизменно. ■

Предложение 3. Если $L \subset \mathbb{V}$ и $W \subset \mathbb{V}$, то $L \cap W \subset \mathbb{V}$.

□ Докажем, что $\forall\, \overline{a}, \overline{b} \in L \cap W \to \overline{a}, \overline{b} \in L$ и $\overline{a}, \overline{b} \in W$.

$L \subset \mathbb{V} \quad \Rightarrow \left(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}\right) \in L, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$W \subset \mathbb{V} \quad \Rightarrow \left(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}\right) \in W, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Из этого следует, что $\left(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}\right) \in L \cap W$, т.е.

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \to \left(\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}\right) \in L \cap W \quad \Rightarrow \ L \cap W \subset \mathbb{V}$. ■

V. Максимальные линейно независимые системы

Пусть $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\} \subset \mathbb{V}$.

Определение 6. Система векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ – называется максимально линейно независимой, если:

1) $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}\}$ – линейно независима,
2) $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{V} \to \{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n}, \overline{x}\}$ – линейно зависима.

Предложение 4. Если $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ – система порождающих пространства $\mathbb{V}$, то в этой системе можно выделить максимальную линейно независимую подсистему.

□ Если $\overline{v}_1 \ne 0$, то $\{\overline{v_1}\}$ – линейно независимая подсистема системы $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$. Если среди векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ не найдется вектора $\overline{v}_2$ такого, что $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ – линейно независима, то $\{\overline{v_1}\}$ – максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$. Если же такой вектор найдется, то $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ – линейно независима, и будем искать вектор $\overline{v}_3$ среди векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ такой, что $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ – линейно независима. Если $\overline{v}_3$ не найдется, то $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ – максимальная линейная независимая подсистема системы $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$. Так как количество векторов в системе $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ – конечно, то через конечное число шагов мы придем к максимальной линейной независимой подсистеме $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\}$, где $k \le m$, т.е. $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\} \subset \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$.

Если $k < m$, то добавление любого вектора $\overline{u}_i$, не вошедшего в систему $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\}$ доставляет нам линейно зависимую систему, в которой вектор $\overline{u}_i$ будет линейной комбинацией векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\}$. Поэтому мы можем утверждать, что любой вектор порождающей системы является линейной комбинацией векторов максимальной линейно независимой подсистемы. Значит, любой вектор пространства, будучи значением линейной комбинации порождающей системы векторов, если заменить в этой линейной комбинации все векторы линейными комбинациями максимально линейно независимой подсистемы, будет являться линейной комбинацией векторов системы $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\}$, подсистемы порождающей системы векторов $\{u_1, \dots, u_m\}$. Система векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}\}$ также будет являться порождающей системой векторов. ■

VI. Размерность пространств

Пусть $L, W \subset \mathbb{V}$. По предложению 4 пространство $L \cap W$ – подпространство линейного пространства $\mathbb{V}$.

Пусть $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}\}$ – базис в пространстве $L \cap W$.

Тогда $\dim(L \cap W) = p$ – размерность постранства $L \cap W$.

Из пункта V следует, что любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса. Система $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}\} \subset L$ и $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}\} \subset W$. Тогда дополним $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}\}$ векторами $\overline{u_{p+1}}, \dots, \overline{u_n}$ до базиса в L и векторами $\overline{w_{p+1}}, \dots, \overline{w_m}$ до базиса в W. Соответственно $\dim L = n$ и $\dim W = m$.

Определение 7. $(L + W) \overset{\text{def}}{=} \{\bar{v} \in \mathbb{V} \mid \exists\, \overline{l_1} \in L$ и $\overline{w_1} \in W\colon \bar{v} = \overline{l_1} + \overline{w_1}\}$.

Предложение 5. Если $L, W \subset \mathbb{V}$, то $(L + W) \subset \mathbb{V}$.

□ Пусть $\overline{v'}, \overline{v''} \in L + W$, тогда $\exists\, \overline{l'}, \overline{l''}, \overline{w'}, \overline{w''}:\ \overline{v'} = \overline{l'} + \overline{w'}, \overline{v''} = \overline{l''} + \overline{w''}$.
Тогда

$$\alpha\overline{v'} + \beta\overline{v''} = \alpha\left(\overline{l'} + \overline{w'}\right) + \beta\left(\overline{l''} + \overline{w''}\right) = \underbrace{\left(\alpha\overline{l'} + \beta\overline{l''}\right)}_{\substack{\Cap \\ L}} + \underbrace{\left(\alpha\overline{w'} + \beta\overline{w''}\right)}_{\substack{\Cap \\ W}}. \ ■$$

Теорема 3. $\dim(L + W) + \dim(L \cap W) = \dim L + \dim W$.

□ Докажем, что $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}, \overline{u_{p+1}}, \dots, \overline{u_n}, \overline{w_{p+1}}, \dots, \overline{w_m}\}$ – базис в $L + W$.

Для того чтобы доказать, что выписанная система векторов является базисом, нужно проверить:

1) что эта система векторов из $L+W$ является линейно независимой;

2) что любой вектор из $L+W$ является линейной комбинацией выписанной системы векторов.

1. Пусть $\alpha_1\overline{u_1}+\cdots+\alpha_p\overline{u_p}+\alpha_{p+1}\overline{u_{p+1}}+\cdots+\alpha_n\overline{u_n}+$

$+\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}+\cdots+\beta_m\overline{w_m}=\overline{0}$. $(*)$

Докажем, что $\alpha_1=\cdots=\alpha_p=\alpha_{p+1}=\cdots=\alpha_n=\beta_{p+1}=\cdots=\beta_m=0$.

Пусть $\overline{w}=\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}+\cdots+\beta_m\overline{w_m}$. Из $(*)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\overline{w}=\underbrace{\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}+\cdots+\beta_m\overline{w_m}}_{\substack{\Cap\\ W}}=\underbrace{-\alpha_1\overline{u_1}-\cdots-\alpha_p\overline{u_p}-\alpha_{p+1}\overline{u_{p+1}}-\cdots-\alpha_n\overline{u_n}}_{\substack{\Cap\\ L}}$$

$\left.\begin{matrix}\overline{w}\in W\\ \overline{w}\in L\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overline{w}\in L\cap W$, т.е. $\overline{w}$ можно разложить по базису подпространства $L\cap W$, т.е. $\overline{w}$ представим в следующем виде:

$\overline{w}=\beta_1\overline{u_1}+\beta_2\overline{u_2}+\cdots+\beta_p\overline{u_p}$

$\Rightarrow\ \beta_1\overline{u_1}+\cdots+\beta_p\overline{u_p}=\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}+\cdots+\beta_m\overline{w_m}$,

т.е. $\beta_1\overline{u_1}+\cdots+\beta_p\overline{u_p}-\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}-\cdots-\beta_m\overline{w_m}=\overline{0}$.

$\Rightarrow\beta_1=\cdots=\beta_p=\beta_{p+1}=\cdots=\beta_m=0$.

Так как система $\{\overline{u_1},\dots,\overline{u_p},\overline{w_{p+1}},\dots,\overline{w_m}\}$ – базис в W, т.е. является линейно независимой системой, только тривиальная линейная комбинация которой равна нулевому вектору, то

$-\alpha_1\overline{u_1}-\cdots-\alpha_p\overline{u_p}-\alpha_{p+1}\overline{u_{p+1}}-\cdots-\alpha_n\overline{u_n}=\overline{0}$

$\Rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_p=\alpha_{p+1}=\cdots=\alpha_n=0$

$\Rightarrow$ система векторов $\{\overline{u_1},\dots,\overline{u_p},\overline{u_{p+1}},\dots,\overline{u_n},\overline{w_{p+1}},\dots,\overline{w_m}\}$ – линейно независима.

2. Докажем, что любой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

Пусть $\bar{a}\in L+W$, тогда $\exists\,\overline{l}\in L$ и $\overline{w}\in W$: $\bar{a}=\overline{l}+\overline{w}$.

$$\overline{l}\in L,\Rightarrow\overline{l}=\underbrace{\alpha_1\overline{u_1}+\cdots+\alpha_p\overline{u_p}}_{p}+\underbrace{\alpha_{p+1}\overline{u_{p+1}}+\cdots+\alpha_n\overline{u_n}}_{n-p};$$

$$\overline{w}\in W,\Rightarrow\overline{w}=\underbrace{\beta_1\overline{u_1}+\beta_2\overline{u_2}+\cdots+\beta_p\overline{u_p}}_{p}+\underbrace{\beta_{p+1}\overline{w_{p+1}}+\cdots+\beta_m\overline{w_m}}_{m-p}$$

$\Rightarrow$ вектор $\bar{\mathrm{a}} = \bar{l} + \bar{w}$ есть линейная комбинация системы векторов $\{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}, \overline{u_{p+1}}, \dots, \overline{u_n}, \overline{w_{p+1}}, \dots, \overline{w_m}\}$, которая, учитывая все вышеизложенное, и является базисом.

$\Rightarrow$ $\dim(L + W) = p + (n - p) + (m - p) = m + n - p$

$\Rightarrow$ $\dim(L + W) + \dim(L \cap W) = m + n - p + p = m + n = \dim L + \dim W$. ■

VII. Базисный минор

Пусть дана матрица $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Определение 8. Минор порядка r называется базисным минором, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или не существуют, где $r = \operatorname{rang} A$.

Теорема 4. О базисном миноре. Если $\operatorname{rang} A = r$, то в матрице найдется r линейно независимых столбцов (строк), а остальные столбцы (строки) матрицы являются линейными комбинациями этих столбцов (строк).

□ По определению 8, не нарушая общности, предположим, что базисный минор находится в левом верхнем углу, т.е. в 1-х r строках и 1-х r столбцах:

$$A = \left(\begin{array}{|ccc|cc} \hline a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right).$$

Пусть $\overline{w_1} = (a_{11}, \dots, a_{r1})^T$; $\quad \overline{v_1} = (a_{11}, \dots, a_{m1})^T$;

$\dots \quad \dots$

$\overline{w_r} = (a_{1r}, \dots, a_{rr})^T$; $\quad \overline{v_r} = (a_{1r}, \dots, a_{mr})^T$.

1. Докажем, что система векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ – линейно независима.

Если $\alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_r\overline{v_r} = \bar{0}_{1\times m}$

$$\alpha_1 a_{i1} + \alpha_2 a_{i2} + \dots + \alpha_r a_{ir} = 0 \quad (*), \ \ \forall\, i \in \{1, \dots, m\}$$

$\Rightarrow$ равенство $(*)$ выполняется при $\forall\, i \in \{1, \dots, r\}$.

Тогда $\alpha_1\overline{w_1} + \dots + \alpha_1\overline{w_r} = \bar{0}_{1\times r}$.

Так как $\{\overline{w_1}, \dots, \overline{w_r}\}$ – линейно независимая система столбцов (они образуют базисный минор матрицы A, который отличен от нуля), то $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, т.е. мы доказали, что

$$(\alpha_1\overline{v_1} + \dots + \alpha_r\overline{v_r} = \bar{0}_{m\times 1}) \ \Rightarrow \ (\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0)$$

$\Rightarrow$ система векторов $\{\overline{v_1}, \dots, \overline{v_r}\}$ – линейно независима.

2. Докажем, что любой другой столбец матрицы является линейной комбинацией базисных столбцов.

Рассмотрим окаймляющий минор для базисного минора матрицы A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rh} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ih} \end{vmatrix};$$

а) если $i \in \{1, \dots, r\}$ или $h \in \{1, \dots, r\}$, то в этом определителе две одинаковые строки или два одинаковых столбца и определитель равен 0.

б) Если $i > r$ и $h > r$, то определитель является минором матрицы A порядка $r + 1$. Так как $\operatorname{rang} A = r$, то этот опеределитель равен нулю. Разложим определитель по последней строке:

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{ih}P = 0, \text{ где}$$

$$A_1 = (-1)^{(r+1)+1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rh} \end{vmatrix};$$

$$A_k = (-1)^{(r+1)+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1r} & a_{1h} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{r,k-1} & a_{r,k+1} & \cdots & a_{rr} & a_{rh} \end{vmatrix};$$

$$P = (-1)^{(r+1)+(r+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \text{ – базисный минор.}$$

$$a_{ih} = \left(-\frac{A_1}{P}\right) a_{i1} + \left(-\frac{A_2}{P}\right) a_{i2} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{P}\right) a_{ir}, \ \ \forall\, i = \overline{1, m};$$

$$\overline{v_h} = \beta_1 \overline{v_1} + \cdots + \beta_r \overline{v_r}, \quad \text{где } \beta_j = \left(-\frac{A_j}{P}\right), \ \ \forall\, j = \overline{1, r}.$$

$\Rightarrow$ любой столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк). ■

Примечание

β_j – не зависит от i.

Если $\operatorname{rang} A = r$, то максимальная линейно независимая подсистема строк и максимальная линейно независимая подсистема столбцов состоит из r элементов.

6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРОК МАТРИЦ

Определение 1. Матрица B называется подматрицей матрицы A, если существуют $i_1, \dots, i_k$, и $j_1, \dots, j_p$ такие, что элементы матрицы A, стоящие на пересечении строк и столбцов с вышеуказанными номерами образуют матрицу B.

Определение 2. Если детерминант матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной, если не равен нулю, то матрица – невырожденная.

Определение 3. Если r – максимальное число такое, что для матрицы A существует квадратная невырожденная подматрица B, то r называется рангом матрицы A и обозначается $\operatorname{rang} A$, т.е. если $r = \operatorname{rang} A$, то квадратных подматриц порядка $r+1$ либо не существует, либо они вырожденные.

Определение 4. Если какую-либо строку (столбец) матрицы умножить на неравное нулю число, то вновь полученная матрица называется полученной из исходной с помощью элементарных преобразований строк типа 1.

Определение 5. Если к какой-либо строке матрицы прибавить любую строку, то вновь полученная матрица называется полученной из исходной путем элементарных преобразований строк типа 2.

Определение 6. Если в матрице поменять две строки местами, то такая матрица называется матрицей, полученной из исходной путем элементарных преобразований строк типа 3.

Теорема 1. Элементарные преобразования строк ранг матрицы не изменяют.

□ Докажем, что с помощью элементарных преобразований строк ранг матрицы увеличить невозможно, т.е. докажем, что если $\operatorname{rang} A = r$, то никакой минор порядка $r+1$ не станет отличным от нуля (минором порядка $r+1$ называют $\det B_{r+1}$).

Рассмотрим произвольный минор порядка $r+1$.
Так как $\operatorname{rang} A = r$, то этот минор равен нулю.

1. Рассмотрим элементарные преобразования строк типа 1.

Если на λ умножается строка, не пересекающая рассматриваемый минор, то элементарное преобразование не затрагивает рассматриваемого минора, в обратном случае умножается на λ сам минор, а так как минор был равным нулю, то он останется равным нулю.

Очевидно, что элементарные преобразования строк типа 1 никакой минор порядка $r+1$, равный нулю, не делают отличным от нуля. То есть элементарные преобразования строк типа 1 ранга матрицы не повышают.

2. Рассмотрим элементарные преобразования строк типа 2.

Если к выбранной строке в миноре прибавить другую строку, пересекающую этот минор, то мы получим определитель, равный сумме двух определителей, первый из которых является выбранным минором, а второй содержит две одинаковые строки. А значит, вновь полученный определитель равен нулю.
Если к выбранной строке в миноре прибавить другую строку, не пересекающую этот минор, то мы получим определитель, равный сумме двух определителей, первый из которых является исходным минором порядка $r+1$, а второй отличается от *некоторого* минора порядка $r+1$ только знаком. А так как $\operatorname{rang} A = r$, то оба определителя равны нулю.
То есть элементарные преобразования строк типа 2 ранга матрицы не повышают.

3. Элементарные преобразования строк типа 3 либо не затрагивают рассматриваемого минора, либо меняют его знак, т.е. повысить $\operatorname{rang} A$ не могут.

Элементарные преобразования рассмотренных типов также понизить $\operatorname{rang} A$ не могут, в противном бы случае обратные преобразования, также являющиеся элементарными, повысили бы $\operatorname{rang} A$, а это невозможно по доказанному. ■

Теорема 2. Элементарными преобразованиями строк матрицы можно привести невырожденную матрицу к единичной.

□ Рассмотрим элементы 1-го столбца матрицы.
Среди них обязательно окажется хотя бы один отличный от нуля элемент, в противном случае, если все элементы 1-го столбца равны нулю, то и определитель матрицы был бы равен нулю, что противоречит её невырожденности. Если ненулевой элемент 1-го столбца соответствует i-й строке, то, переставив i-ю строку на первое место и разделив все элементы i-й строки, уже находящиеся на 1-ом месте, на её 1-й элемент, мы получим матрицу, у которой в

позиции (1,1) будет стоять единица. Прибавляя ко 2-й, ..., n-й строкам 1-ю строку, умноженную на подходящее число, мы обнулим все элементы 1-го столбца, начиная с 2-го элемента.

В результате проведения выше указанных элементарных преобразований строк исходная матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

В матрице B в 1-м столбце найдется ненулевой элемент, т.к. если бы ненулевой элемент стоял на месте a_{12}, то $|B| = 0$. Значит, $|A| = 0$. Аналогичными элементарными преобразованиями приводим матрицу к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Продолжая процесс, приводим исходную матрицу к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\ & & & 1 & b_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Если в последней матрице к предпоследней строке прибавить последнюю строку, умноженную на $b_{n-1,n}$, то получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Продолжая процесс, приходим к единичной матрице. ■

I. Напомним, что

1. Матрицу A можно представить в виде строки из столбцов или столбца из строк:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} = (\overline{a_{\cdot 1}}, \dots, \overline{a_{\cdot n}}) = \begin{pmatrix} \overline{a_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{a_{m\cdot}} \end{pmatrix}.$$

2. Произведение матрицы A на матрицу B можно представить в следующем виде:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \overline{a_{1\cdot}} \\ \overline{a_{2\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{a_{m\cdot}} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} \overline{a_{1\cdot}} \cdot B \\ \overline{a_{2\cdot}} \cdot B \\ \vdots \\ \overline{a_{m\cdot}} \cdot B \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = A\left(\overline{b_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{b_{\cdot p}}\right) = \left(A \cdot \overline{b_{\cdot 1}}, \ldots, A \cdot \overline{b_{\cdot p}}\right) = C, \text{ где}$$

$$\overline{c_{\cdot j}} = A \cdot \overline{b_{\cdot j}} = b_{1j} \cdot \overline{a_{\cdot 1}} + b_{2j} \cdot \overline{a_{\cdot 2}} + \ldots + b_{nj} \cdot \overline{a_{\cdot n}}.$$

II. Рассмотрим единичную матрицу, с помощью элементарных преобразований преобразуем ее и найдем определитель вновь полученной матрицы.

1. Пусть матрица S такая, что i-я строка является произведением не равного нулю числа на каждый элемент этой строки:

$$S_{\lambda(i)} = \begin{pmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \lambda\overline{e_{i\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{pmatrix}; \qquad \det S_{\lambda(i)} = \begin{vmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \lambda\overline{e_{i\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{i\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{vmatrix} = \lambda.$$

2. Пусть матрица S такая, что к i-й строке прибавлена j-я строка:

$$S_{j\to i} = \begin{pmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{i\cdot}} + \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{pmatrix}; \qquad \det S_{j\to i} = \begin{vmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{i\cdot}} + \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{i\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{vmatrix} = 1.$$

3. Пусть матрица S такая, что на i-м месте стоит j-я строка, а на j-м – i-я. Так как если в квадратной матрице поменять две какие-либо строки местами, то определитель полученной матрицы будет совпадать с определителем исходной матрицы по абсолютному значению и будет противоположен ему по знаку, то:

$$S_{j\leftrightarrow i} = \begin{pmatrix} \overline{e_{1\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{j\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{i\cdot}} \\ \vdots \\ \overline{e_{n\cdot}} \end{pmatrix}; \qquad \det S_{j\leftrightarrow i} = -\det S = -1.$$

4. Пусть матрица S такая, что к i-й строке прибавлена j-я строка, умноженная на число:

$$S_{\lambda(j)\to i}=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}+\lambda\overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{pmatrix};\qquad \det S_{\lambda(j)\to i}=\begin{vmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}+\lambda\overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \lambda\overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{vmatrix}=1.$$

III. Рассмотрим произведение матриц, рассмотренных выше, на квадратную матрицу B того же порядка и найдем определитель вновь полученной матрицы.

1. $S_{\lambda(i)}\cdot B$:

$$S_{\lambda(i)}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \lambda\overline{e_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \lambda\overline{e_{i\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\cdot B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \lambda\overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножению матрицы B на матрицу $S_{j\leftrightarrow i}$ слева соответствует умножение каждого элемента i-й строки матрицы B на λ. Такое умножение матрицы B на $S_{j\leftrightarrow i}$ соответствует элементарному преобразованию строк типа 1.

Найдем определитель:

$$\det\left(S_{\lambda(i)}\cdot B\right)=\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \lambda\overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\lambda\det B=\det S_{\lambda(i)}\det B.$$

2. $S_{j\to i}\cdot B$:

$$S_{j\to i}B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}+\overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \left(\overline{e_{i\cdot}}+\overline{e_{j\cdot}}\right)\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\cdot B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}\cdot B+\overline{e_{j\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}+\overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение матрицы B на матрицу $S_{j\to i}$ слева приводит к прибавлению к i-й строке матрицы B j-й строки. Такое умножение матрицы B на матрицу $S_{j\to i}$ соответствует элементарному преобразованию строк типа 2.

Найдем определитель:

$$\det(S_{j\to i}\cdot B)=\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}+\overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\det B=1\cdot\det B=\det S_{j\to i}\det B\,.$$

3. $S_{j\leftrightarrow i}\cdot B$:

$$S_{j\leftrightarrow i}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\cdot B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение матрицы B на матрицу $S_{j\leftrightarrow i}$ слева приводит к замене i-й и j-й строк в матрице B местами. Такое умножение матрицы B на матрицу $S_{j\leftrightarrow i}$ называется элементарным преобразованием строк типа 3.

Найдем определитель:

$$\det(S_{j\leftrightarrow i}\cdot B)=\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\det S_{j\leftrightarrow i}\cdot\det B.$$

4. $S_{\lambda(j)\to i}\cdot B$:

$$S_{\lambda(j)\to i}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}+\lambda\overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}\overline{e_{1\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{i\cdot}}\cdot B+\lambda\overline{e_{j\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{j\cdot}}\cdot B\\ \vdots\\ \overline{e_{n\cdot}}\cdot B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}+\lambda\overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение матрицы B на матрицу $S_{\lambda(j)\to i}$ слева приводит к прибавлению к i-й строке матрицы B j-й строки, умноженной на λ.

Найдем определитель:

$$\det\left(S_{\lambda(j)\to i}\cdot B\right)=\begin{vmatrix}\overline{b_{1\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{i\cdot}}+\lambda\overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{j\cdot}}\\ \vdots\\ \overline{b_{n\cdot}}\end{vmatrix}=\det B=1\cdot\det B=\det S_{\lambda(j)\to i}\det B.$$

7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

I. Пусть дана *однородная* система уравнений, т.е. система, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \vdots\\ a_{n1}x_n+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\qquad(*)$$

Определение 1. Матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}_{nxn}.$$

Определение 2. Числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ образуют решение системы $(*)$, если будучи подставленными вместо неизвестных $x_1,\ldots,x_n$ в систему $(*)$, они обращают каждое уравнение в верное числовое равенство.

$$\begin{cases}a_{11}\alpha_1+\ldots+a_{1n}\alpha_n=b_1,\\ \vdots\\ a_{n1}\alpha_1+\ldots+a_{nn}\alpha_n=b_n.\end{cases}$$

Подчеркнём, что совокупность чисел $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ образует одно решение системы $(*)$, а не n различных решений. Рассмотрим такие системы $(*)$, для которых $|A|\neq 0$. Пусть $\Delta=|A|$.

Теорема 1. Правило Крамера. Если детерминант матрицы системы $(*)$ не равен нулю, то система $(*)$ имеет решение и притом единственное. Это решение находится по формуле: $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $\forall\, i=\overline{1,n}$, где Δ_i — определитель, полученный из исходной матрицы путем замены i-го столбца столбцом свободных членов.

□ Докажем, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет решение и при том единственное.

1. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ решение системы $(*)$, k – произвольное натуральное число от 1 до n. Умножим обе части первого равенства на A_k^1, обе части второго – на A_k^2 и т.д., наконец, обе части последнего равенства умножим на A_k^n. Напомним, что A_k^i – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} исходной матрицы системы

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nn}\alpha_n = b_n; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot A_k^1 \\ \;\vdots \\ \cdot A_k^n \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a_{11}A_k^1\alpha_1 + \cdots + a_{1n}A_k^1\alpha_n = b_1A_k^1, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}A_k^n\alpha_1 + \cdots + a_{nn}A_k^n\alpha_n = b_nA_k^n. \end{cases}$$

Сложим все левые и все правые части:

$$(a_{11}A_k^1 + \cdots + a_{n1}A_k^n)\alpha_1 + \cdots + (a_{1k}A_k^1 + \cdots + a_{nk}A_k^n)\alpha_k + \cdots +$$
$$+ (a_{1n}A_k^1 + \cdots + a_{nn}A_k^n)\alpha_n = b_1A_k^1 + \cdots + b_nA_k^n, \text{ где}$$
$$b_1A_k^1 + \cdots + b_nA_k^n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_k;$$

коэффициент при α_k – определитель исходной матрицы Δ; коэффициенты при $\alpha_{i\neq k}$ равны 0, как суммы произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения другой; справа в равенстве получается определитель матрицы, полученной из исходной заменой j-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta\,\alpha_k = \Delta_k; \qquad \alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \text{ где } k = \overline{1,n}; \qquad \Delta_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\,A_k^i.$$

Мы доказали, что если решение существует, то оно имеет вид:

$\left\{\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \dfrac{\Delta_n}{\Delta}\right\}$ $(\tilde{*})$, таким образом единственность доказана.

2. Докажем, что совокупность $(\tilde{*})$ действительно является решением системы $(*)$:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\Delta_1}{\Delta} + \cdots + a_{1n}\dfrac{\Delta_n}{\Delta} = b_1, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}\dfrac{\Delta_1}{\Delta} + \cdots + a_{nn}\dfrac{\Delta_n}{\Delta} = b_n. \end{cases}$$

s-е уравнение системы $(*)$ выглядит следующим образом:

$$a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s.$$

Подставим совокупность ($\tilde{*}$) в это уравнение:

$$a_{s1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+\dots+a_{sn}\frac{\Delta_n}{\Delta}=b_s.$$

Докажем, что полученное равенство справедливо:

$$a_{s1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+\dots+a_{sn}\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}(a_{s1}\Delta_1+\dots+a_{sn}\Delta_n)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\Delta_k=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left(\sum_{i=1}^{n}b_iA_k^i\right).$$

Внесем a_{sk} под знак суммы, затем поменяем порядок суммирования и вынесем b_i из-под знака суммы, так как b_i не зависит от индекса суммирования k, т.е.

$$a_{s1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+\dots+a_{sn}\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{sk}b_iA_k^i=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{sk}b_iA_k^i=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^i=\frac{1}{\Delta}\left(b_1\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\ A_k^1+b_2\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^2+\dots+\right.$$
$$\left.+b_s\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\ A_k^s+\dots+\ b_n\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^n\right)=\frac{1}{\Delta}\ b_s\,\Delta=b_s.$$

Если $i\neq s$, то $\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^i=0,$ как сумма произведений элементов s-й строки на алгебраическое дополнение элементов i-й строки.

Если же $i=s$, то $\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^i=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}A_k^s=\Delta.$

Так как s – произвольное, то совокупность чисел ($\tilde{*}$) обращает в верное равенство любое уравнение системы ($*$).

Таким образом, мы доказали, что

$$a_{s1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+\dots+a_{sn}\frac{\Delta_n}{\Delta}=b_s,\ \ \forall\, s=\overline{1,n}.\ \blacksquare$$

II. Неоднородные системы уравнений

Определение 3. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Определение 4. Если система совместна и имеет единственное решение, то она называется определенной, если же решений более одного, то система называется неопределенной.

Пусть $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$ $(*)$ где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы $(*)$;

$\bar{A} = [A \,\vdots\, \bar{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ – расширенная матрица системы $(*)$.

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$;

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (\hat{*})$$

<u>Теорема 2. Кронеккера-Капелли.</u> Система совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы.

□ 1. Дано: система совместна. Докажем, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$.

$$x_1\overline{a_{\cdot 1}} + x_2\overline{a_{\cdot 2}} + \cdots + x_n\overline{a_{\cdot n}} = \bar{b} \quad (\hat{*}), \text{ где } A = (\overline{a_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{a_{\cdot n}}).$$

Система $(\hat{*})$ совместна $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $\alpha_1\overline{a_{\cdot 1}} + \cdots + \alpha_n\overline{a_{\cdot n}} = \bar{b}$. Так как $\bar{b}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A, то добавление столбца $\bar{b}$ к системе $\{\overline{a_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{a_{\cdot n}}\}$ не влечет увеличение $\operatorname{rang} A \Rightarrow \operatorname{rang}(\overline{a_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{a_{\cdot n}}) = \operatorname{rang}(\overline{a_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{a_{\cdot n}}, \bar{b})$, т.е. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$.

2. Дано: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$. Доказать, что система $(\hat{*})$ совместна.

Так как $\operatorname{rang} A$ – количество столбцов в максимальной линейно независимой подсистеме системы столбцов матрицы A, то столбцы, образующие максимальную линейно независимую подсистему в матрице A, также будут образовывать максимальную линейно независимую подсистему в матрице $\bar{A}$. А через них выражается любой столбец матрицы $\bar{A}$, т.е. $\bar{b}$ есть линейная комбинация этих столбцов. Добавив к этой линейной комбинации матрицы A остальные столбцы с нулевыми коэффициентами, получим, что $\bar{b}$ является линейной комбинацией всех столбцов матрицы A, а это и означает, что система $(\hat{*})$ совместна. ■

Пусть $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда $A\bar{x} = \overline{b}$;

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$x_1 a_{\cdot 1} + \ldots + x_n a_{\cdot n} = \overline{b}.$$

Пусть $m = n$, тогда полагая $x_1 = b_{1j}, x_2 = b_{2j}, \ldots, x_n = b_{nj}$ и используя правило умножения строки на столбец, получаем:

$$b_{1j}\overline{a_{\cdot 1}} + b_{2j}\overline{a_{\cdot 2}} + \ldots + b_{nj}\overline{a_{\cdot n}} = (\overline{a_{\cdot 1}}, \overline{a_{\cdot 2}}, \ldots, \overline{a_{\cdot n}}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = A\overline{b_{\cdot j}}. \quad (*)$$

<u>Предложение 1.</u> j-й столбец матрицы $C = AB$ есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам j-го столбца матрицы B.

□ Рассмотрим матрицу C, используя правило умножения матриц, получаем:

$$C = AB = A(\overline{b_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{b_{\cdot p}}) = (A\overline{b_{\cdot 1}}, \ldots, A\overline{b_{\cdot p}});$$

$$(\overline{c_{\cdot 1}}, \ldots, \overline{c_{\cdot j}}, \ldots, \overline{c_{\cdot p}}) = (A\overline{b_{\cdot 1}}, \ldots, A\overline{b_{\cdot j}}, \ldots, A\overline{b_{\cdot p}}), \text{ где } c_{\cdot j} = A\overline{b_{\cdot j}}.$$

Подставим $(*)$ в наше равенство:

$c_{\cdot j} = A\overline{b_{\cdot j}} = b_{1j}\overline{a_{\cdot 1}} + b_{2j}\overline{a_{\cdot 2}} + \ldots + b_{nj}\overline{a_{\cdot n}}$ – линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам j-го столбца матрицы B. ■

<u>Предложение 2.</u> Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.

□ Рассмотрим матрицу $[A \vdots AB] = [A \vdots C]$.

С одной стороны, по предложению 1 столбцы матрицы AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Тогда по теореме Штейница $\operatorname{rang}[A \vdots AB] = \operatorname{rang} A$. С другой – столбцы матрицы AB образуют подсистему системы столбцов матрицы $[A \vdots AB]$, а ранг подсистемы не может быть больше ранга системы,

$\Rightarrow \operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang}[A \vdots AB] = \operatorname{rang} A$, т.е. $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang} A$.
Аналогично докажем, что $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang} B$, рассматривая матрицу $\begin{bmatrix} AB \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}$.
Т.е. наше утверждение справедливо. ■

<u>Предложение 3.</u> Если квадратная матрица A порядка n невырождена, т.е. если $\det A \neq 0$, то существует *невырожденная* матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = E_n$.
□ $\det E_n \neq 0, \Rightarrow \operatorname{rang} E_n = n$, но $E_n = AA^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{rang} E_n = \operatorname{rang} AA^{-1} \le \operatorname{rang} A^{-1}$, т.е. $n \le \operatorname{rang} A^{-1}$, а значит, количество линейно независимых столбцов в A^{-1} не меньше n, но размер матрицы $A^{-1} - (n \times n)$, следовательно в матрице A^{-1} ровно n столбцов, а значит все столбцы матрицы образуют линейно независимую систему, тогда A^{-1} невырождена. ■

<u>Теорема 3.</u> Для двух невырожденных квадратных матриц одного порядка $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

□ Так как матрица A невырождена, то существует невырожденная обратная матрица A^{-1}. В силу доказанной теоремы о том, что элементарными преобразованиями строк невырожденной матрицы можно привести матрицу к единичной, и учитывая, что каждому элементарному преобразованию строк соответствует умножение матрицы на подходящую элементарную матрицу, т.е. на одну из матриц $S_{\lambda(i)}, S_{j\to i}, S_{j\leftrightarrow i}, S_{\lambda(j)\to i}$, запишем следующее равенство:

$$S_k S_{k-1} \ldots S_1 A^{-1} = E_n; \quad | \cdot A$$
$$S_k S_{k-1} \ldots A^{-1} A = E_n A;$$
$$(S_k S_{k-1} \ldots S_1) E_n = A;$$
$$S_k S_{k-1} \ldots S_1 = A.$$

Рассмотрим произведение двух невырожденных матриц и найдем определитель произведения:

$$AB = (S_k S_{k-1} \ldots S_1)B = \big(S_k(S_{k-1} \ldots S_1)\big)B = S_k(S_{k-1} \ldots S_1)B =$$
$$= S_k\big((S_{k-1} \ldots S_1)B\big);$$
$$\det(AB) = \det\Big(S_k\big((S_{k-1} \ldots S_1)B\big)\Big) = \det S_k \det\Big(S_{k-1}\big((S_{k-2} \ldots S_1)B\big)\Big) =$$
$$= \cdots = \det S_k \det S_{k-1} \ldots \det S_1 \det B = |\det A = \det(S_k S_{k-1} \ldots S_1) =$$
$$= \det S_k \det\big(S_{k-1}(S_{k-2} \ldots S_1)\big) = \cdots = \det S_k \det S_{k-1} \ldots \det S_1 | =$$
$$= \det A \det B. \ ■$$

Рассмотрим неоднородную систему m линейных уравнений с n неизвестными и найдем ее решение.

Пусть
$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n = b_1, \\ a_{21}t_1 + \cdots + a_{2n}t_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + \cdots + a_{mn}t_n = b_m; \end{cases} \qquad (*)$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ – решение системы $(*)$, если, положив в системе $(*)$ $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$, то получим m верных числовых равенств и запишем их в матричном виде:

$$A\bar{t} = \bar{b}, \text{ где } \bar{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\overline{x'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $\overline{x''} = \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}$ – решение однородной системы $(\tilde{*})$ m линейных уравнений с n неизвестными, ассоциированной с системой $(*)$, где $(\tilde{*}) = \begin{cases} a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + \cdots + a_{mn}t_n = 0. \end{cases}$

То есть справедливо равенство $A\overline{x'} = \overline{0_m}$ и $A\overline{x''} = \overline{0_m}$, где $\overline{0_m}$ – нулевой столбец высоты m. Тогда $A(\alpha\overline{x'} + \beta\overline{x''}) = \alpha A\overline{x'} + \beta A\overline{x''} = \alpha\overline{0_m} + \beta\overline{0_m} = \overline{0_m}$, т.е. для любых $\overline{x'}$ и $\overline{x''}$, являющихся решением системы $(\tilde{*})$, выполняется условие, что $\alpha\overline{x'} + \beta\overline{x''}$ является решением системы $(\tilde{*})$. Следовательно, все решения системы $(\tilde{*})$ образуют линейное пространство, являющееся подпространством в $\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ – линейное пространство столбцов высоты n. Поэтому постараемся выбрать базис в пространстве решений системы $(\tilde{*})$. Этот базис называется *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

Пусть ранг матрицы A системы $(\tilde{*})$ равен r. Не нарушая общности, предположим, что первые r строк матрицы системы $(\tilde{*})$ линейно независимы, тогда остальные строки матрицы A являются линейными комбинациями базисных строк, и, прибавляя к ним соответствующие линейные комбинации базисных строк, умноженные на -1, обнулим все небазисные строки. Этим преобразованиям строк матрицы A соответствуют преобразования соответствующих уравнений системы $(\tilde{*})$, т.е. в результате этих преобразований мы перейдем от системы $(\tilde{*})$ к системе $(\hat{*})$, в которой остается только r уравнений:

$$(\hat{*}) = \begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{1n}t_n = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}t_1 + \dots + a_{rn}t_n = 0. \end{cases}$$

Пусть базисный минор расположен в первых r столбцах, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{1r}t_r = -a_{1,r+1}t_{r+1} - \dots - a_{1n}t_n, \\ \vdots \\ a_{r1}t_1 + \dots + a_{rr}t_r = -a_{r,r+1}t_{r+1} - \dots - a_{rn}t_n. \end{cases} \qquad (\#)$$

Придавая неизвестным $t_{r+1}, \dots, t_n$ произвольные значения $x_{r+1}, \dots, x_n$, получим в правых частях системы (#) числа и новую систему $(\widetilde{\#})$:

$$(\widetilde{\#}) = \begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{1r}t_r = c_1, \\ \vdots \\ a_{r1}t_1 + \dots + a_{rr}t_r = c_r. \end{cases}$$

Решая по правилу Крамера новую систему $(\widetilde{\#})$, найдем однозначное решение $x_1, \dots, x_n$ системы $(\widetilde{\#})$, где $x_1, \dots, x_n$ – значение неизвестных $t_1, \dots, t_r$.

Определение 5. Неизвестные, отвечающие столбцам базисного минора, называются главными, все остальные неизвестные называются свободными.

Придавая свободным переменным следующие значения:

$$\left.\begin{matrix} t_{r+1} = 1, & t_{r+2} = 0 & t_{r+3} = 0 & , \dots, & t_n = 0 \\ t_{r+1} = 0 & t_{r+2} = 1 & t_{r+3} = 0 & , \dots, & t_n = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r+1} = 0 & t_{r+2} = 0 & , \dots, & t_{n-1} = 0 & t_n = 1 \end{matrix}\right\} (n-r) \quad \text{наборов,}$$

где r – главных неизвестных, $(n-r)$ – свободных неизвестных.

Подставив каждый из этих наборов в систему (#) и решив ее по правилу Крамера, мы однозначно найдем значения главных неизвестных по заданным значениям свободных неизвестных.

Пусть
$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_r^{(1)}, \quad 100, \dots, 0)^{\mathrm{T}}; \\ \bar{w}_2 &= (\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_r^{(2)}, \quad 010, \dots, 0)^{\mathrm{T}}; \\ &\vdots \\ \bar{w}_{n-r} &= (\xi_1^{(n-r)}, \dots, \xi_r^{(n-r)}, 00, \dots, 01)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Система $\{\overline{w_1}, \dots, \bar{w}_{n-r}\}$ образует базис в пространстве решений системы (#).

□ 1. Пусть $\bar{w} = \alpha_1\bar{w}_1 + \dots + \alpha_{n-r}\bar{w}_{n-r}$.

Если $\bar{w} = \bar{0}$, то $\alpha_1\bar{w}_1 + \dots + \alpha_{n-r}\bar{w}_{n-r} = \bar{0}$.

$$\overline{w} = \alpha_1 \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-r} = 0.$

Мы доказали, что

$(\alpha_1 \overline{w}_1 + \dots + \alpha_{n-r}\overline{w}_{n-r} = \overline{0}) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-r} = 0)$, т.е. система $\{\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_{n-r}\}$ – линейно независима.

2. Пусть $\overline{w} = (**\dots*, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ и $\overline{w'} = (**\dots*, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ – решения системы (#), где вектор $\overline{w'} = x_{r+1}\overline{w}_1 + x_{r+2}\overline{w}_2 + \dots + x_n\overline{w}_{n-r}$.

$$\begin{aligned} x_{r+1}\overline{w}_1 &= (**\dots*, x_{r+1}, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}; \\ x_{r+2}\overline{w}_2 &= (**\dots*, 0, x_{r+2}, \dots, 0)^{\mathrm{T}}; \\ &\vdots \\ x_n\overline{w}_{n-r} &= (**\dots*, 0, \dots, 0, x_n)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{w'} = (**\dots*, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}.$

Тогда разность этих решений тоже будет являться решением системы (#), т.е.

$\bar{v} = \overline{w'} - \overline{w} = (**\dots*, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} - (**\dots*, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} =$
$= (q_1, \dots, q_r, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}.$

После подстановки вектора $\bar{v}$ в систему (#) получим r верных числовых равенств:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + \dots + a_{1r}q_r = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}q_1 + \dots + a_{rr}q_r = 0; \end{cases}$$

т.е. набор $q_1, \dots, q_r$ является решением системы (#).

С другой стороны,

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + \dots + a_{1r}t_r = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}t_1 + \dots + a_{rr}t_r = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Определитель матрицы системы не равен нулю, поэтому система (1) решается по правилу Крамера и в силу теоремы Кроннекера-Капелли система имеет и притом единственное решение $(0, \dots, 0)$.

$\Rightarrow q_1 = 0, \dots, q_r = 0$, т.е. $\bar{v} = 0 \Rightarrow \overline{w} = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, т.е. мы доказали, что система $\{\overline{w_1}, \dots, \overline{w}_{n-r}\}$ является базисом в пространстве решений в системе (#). ■

8. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\mathbb{V}$ – линейное пространство.

Определение 1. Линейный оператор – отображение линейного пространства $\mathbb{V}$ в линейное пространство $\mathbb{V}$, обладающее свойством аддитивности и однородности, т.е. φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ – линейный оператор, если выполняются следующие свойства:

1. $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b}),\ \forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}$ – аддитивности,
2. $\varphi(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi(\bar{a}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ и $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V}$ – однородности.

I. Пусть $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ и $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$ – базисы в пространстве $\mathbb{V}$.

Так как любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, выразим каждый вектор второго базиса в виде линейной комбинации векторов первого базиса и, пользуясь правилом умножения строки на столбец, запишем:

$$g_i = c_{1i}\overline{e_1} + c_{2i}\overline{e_2} + \dots + c_{ni}\overline{e_n} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix},\ \text{где } i = \overline{1,n}.$$

Пользуясь правилом умножения строки на матрицу, получим:

$$(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = \left((\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \dots, (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})C,$$

где C – *матрица перехода* от базиса $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ к базису $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$, каждый i-й столбец которой является координатным столбцом вектора g_i в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$.

II. Пусть $\bar{x} \in \mathbb{V}$, тогда,

с одной стороны, вектор $\bar{x}$ можно разложить по базису $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$:

$$\bar{x} = x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})X;$$

с другой – вектор $\bar{x}$ можно разложить по базису $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$:

$$\bar{x} = x_1'\overline{g_1} + \dots + x_n'\overline{g_n} = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})X',$$

т.е. $\bar{x} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})X = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})X'$, где

X – столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$,

X' – столбец координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$.

Учитывая, что $(\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})C$, получаем:

$$(\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})X = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})CX'$$

$X = CX'$, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно выразить координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$ через координаты в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ и матрицу перехода от базиса $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ к базису $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$.

Свойство 3. Линейный оператор переводит линейную комбинацию в линейную комбинацию с теми же коэффициентами.

□ В силу свойств аддитивности и однородности:

$$\varphi\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \varphi(\alpha\bar{a}) + \varphi\left(\beta\bar{b}\right) = \alpha\varphi(\bar{a}) + \beta\varphi\left(\bar{b}\right). \ \blacksquare$$

Определение 2. Если $\bar{a}$ прообраз, то $\varphi(\bar{a})$ – образ, где $\bar{a},\ \varphi(\bar{a}) \in \mathbb{V}$.

III. Пусть система $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ – базис в $\mathbb{V}$ и $\varphi(\overline{e_i}) \in \mathbb{V},\ \forall\, i = \overline{1,n}$.

Разложим образ каждого базисного вектора по базису:

$$\varphi(\overline{e_i}) = a_{1i}\overline{e_1} + \dots + a_{ni}\overline{e_n} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Тогда $\left(\varphi(\overline{e_1}),\dots,\varphi(\overline{e_n})\right) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})A,$ где

A – *матрица линейного оператора* φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$, каждый i-й столбец которой является координатным столбцом образа базисного вектора $\overline{e_i}$.

IV. Пусть $\bar{x} \in \mathbb{V}$, $\varphi(\bar{x}) \in \mathbb{V}$.

С одной стороны, если разложить образ по базису:

$$\varphi(\bar{x}) = y_1\overline{e_1} + \dots + y_n\overline{e_n} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})Y, \text{ где}$$

Y – координатный столбец образа вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$.

С другой – представим вектор $\bar{x}$ в виде линейной комбинации базисных векторов, и в силу свойства 3 получим:

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n}) = x_1\varphi(\overline{e_1}) + \dots + x_n\varphi(\overline{e_n}) =$$

$$= \left(\varphi(\overline{e_1}),\dots,\varphi(\overline{e_n})\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})AX, \text{ где}$$

X – координатный столбец прообраза $\bar{x}$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$.

$\Rightarrow (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})Y = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})AX$, а в силу однозначности разложения по базису: $Y = AX$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно выразить координаты образа через матрицу линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ и координатный столбец прообраза в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$.

V. Пусть

X, Y – координатные столбцы векторов $\bar{x}$ и $\varphi(\bar{x})$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$;
X', Y' – координатные столбцы векторов $\bar{x}$ и $\varphi(\bar{x})$ в базисе $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$;
A – матрица линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$;
B – матрица линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ в базисе $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$.
Тогда из пп. II и IV следует:

$$Y = AX \qquad X = CX'$$
$$Y' = BX' \qquad Y = CY'$$

$\Rightarrow CY' = ACX' | \cdot C^{-1}$

$$C^{-1}CY' = C^{-1}ACX'$$
$$Y' = [C^{-1}AC]X'$$
$$Y' = BX'$$

$\Rightarrow \underline{B = C^{-1}AC}$, где

$$A_{<\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}>} = A; \; B_{<\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}>} = B;$$
$$(\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})C.$$

<u>Определение 3.</u> $\bar{x}$ – собственный вектор, если

1) $\bar{x} \neq \bar{0} \in \mathbb{V}$;
2) $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}\colon \varphi(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, где λ – собственное значение собственного вектора $\bar{x}$.

VI. Пусть $\bar{x}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ; $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, т.е. $\varphi(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, тогда
с одной стороны, из п. 4 следует:

$$\varphi(\bar{x}) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

с другой – разложим вектор $\lambda\bar{x}$ по базису $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$:

$$\lambda\bar{x} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$$AX = \lambda X$$

$$AX = \lambda EX$$

$$AX - \lambda EX = \bar{0}_n$$

$$(A - \lambda E)X = \bar{0}_n$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Предположим, что $\det(A - \lambda E) \neq 0$. Тогда система $(*)$ решается по правилу Крамера и имеет единственное нулевое решение, но по определению собственный вектор $\bar{x}$ ненулевой. Противоречие.

$\Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по какой-либо строке или столбцу, получаем характеристический многочлен:

$$P[\lambda] = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0.$$

Следовательно, собственные значения λ собственного вектора $\bar{x}$ должны быть корнями характеристического многочлена $P[\lambda]$ линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Совокупность таких собственных значений есть спектр.

<u>Предложение 1.</u> Характеристический многочлен линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ не зависит от выбора базиса.

□ Пусть

A — матрица линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$;

B — матрица линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ в базисе $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$;

$B = C^{-1}AC$ – по п. V;

$(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})C$, где C – матрица перехода от базиса $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ к базису $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$.

Характеристический многочлен в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ равен $\det(A - \lambda E)$, а в базисе $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$ равен $\det(B - \lambda E)$. Учитывая, что детерминант произведения равен произведению детерминантов, докажем, что $\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$:

$B-E\lambda=C^{-1}AC-\lambda E=C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC=C^{-1}AC-C^{-1}(\lambda E)C=C^{-1}(A-\lambda E)C$

$\det(B-\lambda E)=\det(C^{-1}(A-\lambda E)C)=\det C^{-1}\det(A-\lambda E)\det C=\det(A-\lambda E)\cdot$
$\cdot\det C^{-1}\det C=\det(A-\lambda E)\det(C^{-1}C)=\det(A-\lambda E)\det E=\det(A-\lambda E)$.

$\Rightarrow$ $\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)$, т.е. характеристический многочлен не зависит от базиса, в котором рассматривается линейный оператор, т.е. является инвариантом (независимым). ■

<u>Теорема 1.</u> Собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

□ 1. Пусть $\varphi(\bar{x})=\lambda\bar{x}$, где $\bar{x}\neq\bar{0}$, $\lambda\neq\mu$.
$\varphi(\bar{y})=\mu\bar{y}$, $\bar{y}\neq\bar{0}$,

Докажем, что система $\{\bar{x},\bar{y}\}$ линейно независима. Предположим противное. Тогда система $\{\bar{x},\bar{y}\}$ линейно независима, т.е. один из векторов этой системы является линейной комбинацией другого:

$\bar{y}=\alpha\bar{x}$, где $\alpha\neq 0$, так как при $\alpha=0\Rightarrow\alpha\bar{x}=\bar{0}$, т.е. $\bar{y}=\bar{0}$, но $\bar{y}$ – собственный вектор для φ, т.е. $\bar{y}\neq\bar{0}$. Противоречие.

Тогда в силу однородности и аддитивности:

$\varphi(\bar{y})=\varphi(\alpha\bar{x})=\alpha\lambda\bar{x}$.

С другой стороны

$\varphi(\bar{y})=\mu\bar{y}=\mu\alpha\bar{x}=\alpha\mu\bar{x}$.

$\Rightarrow$ $\alpha\lambda\bar{x}=\alpha\mu\bar{x}$

$\alpha\lambda\bar{x}-\alpha\mu\bar{x}=\bar{0}$

$\alpha(\lambda-\mu)\bar{x}=\bar{0}$

$\alpha\neq\bar{0}$, $\lambda-\mu\neq 0$, так как $\lambda\neq\mu$ – по условию, $\bar{x}\neq\bar{0}$, так как $\bar{x}$ – собственный; $\Rightarrow\alpha(\lambda-\mu)\bar{x}\neq 0$ – противоречие. Нас привело к противоречию предположение о том, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно зависимы. Значит, два собственных вектора, отвечающих двум разным собственным значениям, линейно независимы.

2. Докажем с помощью метода математической индукции теорему для любого n векторов. Предположим, что $n-1$ собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, линейно независимы и докажем нашу теорему для n собственных векторов.

Пусть $\varphi(\bar{a}_i)=\lambda_i\bar{a}_i$, где $\bar{a}_i\neq 0$ $\forall\, i\in\{1,\dots,n\}$ и

$\lambda_i\neq\lambda_j$, где $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$.

Пусть $\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$ $(*)$.
С одной стороны, т. к. $\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{e}_k) = 0 \cdot \varphi(\bar{e}_k) = \bar{0}$, $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$:

$\varphi(\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}$,

$\alpha_1\varphi(\bar{a}_1) + \dots + \alpha_n\varphi(\bar{a}_n) = \bar{0}$,

$\alpha_1\lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}\bar{a}_{n-1} + \alpha_n\lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$. (1)

С другой стороны:

$\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$, $\mid \cdot \lambda_n$

$\alpha_1\lambda_n\bar{a}_1 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_n\bar{a}_{n-1} + \alpha_n\lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$. (2)

Вычтем из (1) (2), получим:

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)\bar{a}_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\bar{a}_{n-1} = \bar{0}$. (3)

Так как система векторов $\{\bar{a}_{11}, \dots, \bar{a}_{n-1}\}$ линейно независима, то в левой части равенства (3) стоит тривиальная линейная комбинация векторов, т.е.

$$\begin{array}{lll} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n) = 0, & \text{но } \lambda_1 - \lambda_n \neq 0 & \Rightarrow \ \alpha_1 = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0 & \lambda_{n-1} - \lambda_n \neq 0 & \alpha_{n-1} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ равенство $(*)$ примет вид: $\alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}$, но $\bar{a}_n$ – собственный вектор для φ, т.е. $\bar{a}_n \neq \bar{0}$, $\Rightarrow$ $\alpha_n = 0$, т.е. мы доказали, что

$(\alpha_1\bar{a}_1 + \dots + + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{0}) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0)$, т.е.

$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ – линейно независима. ■

<u>Свойства</u> линейного оператора:

4. $\varphi(\bar{0}) = \varphi(0\bar{a}) = 0\varphi(\bar{a}) = \bar{0}$, $\forall\, \bar{a} \in \mathbb{V}$.

5. $\varphi(-\bar{a}) = -\varphi(\bar{a})$, $\forall\, \bar{a} \in \mathbb{V}$.

□ $\varphi[(-1)\bar{a}] = (-1)\varphi(\bar{a}) = -\varphi(\bar{a})$ ■

6. Если $\varphi(\bar{a}) = \lambda\bar{a}$ и $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $\mu\bar{a}$ — собственный $\forall\, \mu \neq 0$.

□ $\varphi(\mu\bar{a}) = \mu\varphi(\bar{a}) = \mu\lambda\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ $\Rightarrow$ $\mu\bar{a}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. ■

VII. Ядро и образ линейного пространства

<u>Определение 4.</u> $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{\bar{x} \in \mathbb{V} \,|\, \varphi(\bar{x}) = \bar{0}\}$ – ядро линейного оператора φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

<u>Определение 5.</u> $\operatorname{Im}(\varphi) = \{\bar{y} \in \operatorname{Im}(\varphi) \mid \exists\, \bar{x} \in \mathbb{V} : \varphi(\bar{x}) = \bar{y}\}$ – образ линейного оператора φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$, т.е. $\bar{y} \in \operatorname{Im}(\varphi)$, если $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{V}$: $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$.

$\varphi(\mathbb{V}) = \operatorname{Im}(\varphi)$; $\varphi(\mathbb{V}) = \{\varphi(\bar{x}),\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{V}\}$ – множество всех образов пространства.

Теорема 2. $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ и $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ – подпространства в $\mathbb{V}$.

Напомним, что по определению $\boldsymbol{L}$ – подпространство в $\mathbb{V}$, если $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \boldsymbol{L}$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \rightarrow \left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) \in \boldsymbol{L}$.

□ 1. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, тогда $\varphi\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \alpha\varphi(\bar{a}) + \beta\varphi(\bar{b})$.
Так как $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$, то $\varphi(\bar{a}) = \bar{0} = \varphi\left(\bar{b}\right) \Rightarrow \varphi\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \bar{0}$,
$\Rightarrow \left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$;
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ – подпространство в $\mathbb{V}$.

2. Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$, тогда $\exists\, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{V} : \varphi(\bar{a}) = \bar{x}$ и $\varphi\left(\bar{b}\right) = \bar{y}$;

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \alpha\varphi(\bar{a}) + \beta\varphi\left(\bar{b}\right) = \varphi(\alpha\bar{a}) + \varphi\left(\beta\bar{b}\right) = \varphi\left(\alpha(\bar{a}) + \beta\left(\bar{b}\right)\right),$$

т.е. для $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}\ \exists \left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) \in \mathbb{V} : \varphi\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$,
$\Rightarrow \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathrm{Im}\,(\varphi) \rightarrow (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \in \mathrm{Im}\,(\varphi)$,
$\Rightarrow \mathrm{Im}\,(\varphi)$ – подпространство в $\mathbb{V}$. ■

VIII. Пусть $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \mathbb{V}$, причем $\dim\left(\mathrm{Im}\,(\varphi)\right) = p$;

$\left\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_p}\right\}$ – базис в $\mathrm{Im}\,(\varphi)$;

$\exists \left\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_p}\right\} \in \mathbb{V} : \varphi\left(\overline{f_\imath}\right) = \overline{e_\imath},\ \ i = \overline{1,p}$;

$\mathbf{V}_1 = \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_p} \rangle$ – подпространство в пространстве $\mathbb{V}$**,** натянутое на векторы $\left\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_p}\right\}$, т.е. $\mathbf{V}_1$ пространство прообразов $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Предложение 2. Вышеуказанная система векторов $\left\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_p}\right\}$ линейно независима.

□ Пусть $\alpha_1\overline{f_1} + \dots + \alpha_p\overline{f_p} = \bar{0}$, найдем образы правой и левой частей:

$\varphi\left(\alpha_1\overline{f_1} + \dots + \alpha_p\overline{f_p}\right) = \varphi(\bar{0})$ и согласно свойству 1, получим:

$\alpha_1\varphi\left(\overline{f_1}\right) + \dots + \alpha_p\varphi\left(\overline{f_p}\,\right) = \bar{0}$, т.к. по условию $\varphi\left(\overline{f_\imath}\right) = \overline{e_\imath}$, $i = \overline{1,p}$, то

$\alpha_1\bar{e}_1 + \dots + \alpha_p\bar{e}_p = \bar{0}$, но т.к. $\left\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p\right\}$ – линейно независима, то

$\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

Итак, мы доказали, что $\left(\alpha_1\overline{f_1} + \dots + \alpha_p\overline{f_p} = \bar{0}\right) \Rightarrow \left(\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0\right)$, т.е. $\left\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_p}\right\}$ – линейно независима по определению. ■

Определение 6. Если $\mathbf{V}_1 \subset \mathbb{V}$ и $\mathbf{V}_2 \subset \mathbb{V}$, где $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ – подпространство линейного пространства $\mathbb{V}$, то $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ прямая сумма, если $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{V}\ (\exists\, \bar{w}_1 \in \mathbf{V}_1) \wedge (\exists\, \bar{w}_2 \in \mathbf{V}_2)$: $\bar{x} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ и $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \bar{0}$.

Предложение 3. Если $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$ прямая сумма, то представление $\bar{x} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ – единственное.

□ Если $\bar{x} = \overline{w_1'} + \overline{w_2'}$, где $\overline{w_1'} \in \mathbf{V}_1$ и $\overline{w_2'} \in \mathbf{V}_2$, то $\overline{w_1'} + \overline{w_2'} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$;

$$\Rightarrow \underset{\mathbf{V}_1}{\underset{\Cap}{\overline{w_1'} - \bar{w}_1}} = \underset{\mathbf{V}_2}{\underset{\Cap}{\bar{w}_2 - \overline{w_2'}}}.$$

Но по определению $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \bar{0}$

$\Rightarrow \overline{w_1'} - \bar{w}_1 = \bar{w}_2 - \overline{w_2'} = \bar{0} \Rightarrow \overline{w_1'} = \bar{w}_1$ и $\overline{w_2'} = \bar{w}_2$. ■

<u>Теорема 3.</u> Линейное пространство – это прямая сумма пространства прообразов образа линейного оператора $\varphi: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ и ядра этого линейного пространства, т.е. $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.

□ 1. Докажем, что $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 + \operatorname{Ker}\varphi$.

$\forall\, \bar{u} \in \mathbb{V} \to \varphi(\bar{u}) = \bar{x} \in \operatorname{Im}(\varphi)$;

$\bar{x} \in \operatorname{Im}(\varphi) \Rightarrow \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_p\bar{e}_p$.

Так как система векторов $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p\}$ – линейно независима, то ее можно дополнить до базиса: $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p, \bar{f}_{p+1}, \dots, \bar{f}_n\}$.

Пусть $\bar{w}_1 = x_1\bar{f}_1 + \dots + x_p\bar{f}_p$. Тогда

$\varphi(\bar{w}_1) = \varphi(x_1\bar{f}_1 + \dots + x_p\bar{f}_p) = x_1\varphi(\bar{f}_1) + \dots + x_p\varphi(\bar{f}_p) = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_p\bar{e}_p = \bar{x}$.

Пусть $\bar{w}_2 = \bar{u} - \bar{w}_1$. Тогда

$\varphi(\bar{w}_2) = \varphi(\bar{u} - \bar{w}_1) = \varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{w}_1) = \bar{x} - \bar{x} = \bar{0}$,

т.е. $\varphi(\bar{w}_2) = \bar{0} \Rightarrow \bar{w}_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, т.е. мы доказали, что $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 + \operatorname{Ker}\varphi$.

2. Докажем, что $\mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi = \bar{0}$.

Пусть $\bar{v} \in \mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi$.

Тогда, с одной стороны, так как $\bar{v} \in \mathbf{V}_1$, то $\bar{v}$ можно разложить по базису подпространства $\mathbf{V}_1$: $\bar{v} = y_1\bar{f}_1 + \dots + y_p\bar{f}_p$. С другой –, так как $\bar{v} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то по определению $\varphi(\bar{v}) = \bar{0}$.

$\Rightarrow \varphi(y_1\bar{f}_1 + \dots + y_p\bar{f}_p) = \bar{0}$, а в силу свойства 3:

$y_1\varphi(\bar{f}_1) + \dots + y_p\varphi(\bar{f}_p) = \bar{0}$,

$y_1\bar{e}_1 + \dots + y_p\bar{e}_p = \bar{0} \Rightarrow y_1 = \dots = y_p = 0$

$\Rightarrow \bar{v} = \bar{0}$, т.е. $\mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi = \bar{0}$

$\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi$. ■

<u>Теорема 4.</u> Сумма ранга и дефекта линейного оператора $\varphi: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ равна размерности линейного пространства $\mathbb{V}$, т.е.

$\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim\mathbb{V}$, где

$\dim(\operatorname{Im}\varphi)$ – ранг оператора, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi)$ – дефект оператора.

□ Из вышедоказанной теоремы следует, что $\mathbb{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi$.

$\Rightarrow \dim\mathbb{V} = \dim(\mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi) = \dim(\mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi)$, т.к. $\dim(\mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker}\varphi) = 0$.

По определению прямой суммы и в силу теоремы о том, что сумма размерностей суммы и пересечения пространств равна сумме размерностей пространств, получим:

$\dim \mathbb{V} = \dim(\mathbf{V}_1 \oplus \operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\mathbf{V}_1 \cap \operatorname{Ker} \varphi) = \dim(\mathbf{V}_1) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi)$;

$\dim \mathbf{V}_1 = \dim(\operatorname{Im} \varphi) = p$

$\Rightarrow \dim \mathbb{V} = \dim(\operatorname{Im} \varphi) + \dim(\operatorname{Ker} \varphi)$. ■

Определение 7. Подпространство $\boldsymbol{L}$ называется инвариантным подпространства пространства $\mathbb{V}$ относительно оператора φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$, если $\varphi(\boldsymbol{L}) \subset \boldsymbol{L}$, т.е. $\boldsymbol{L}$ инвариантно относительно оператора φ, если $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{L} \to \varphi(\bar{a}) \in \boldsymbol{L}$.

Следствие 1. Из определения 3 следует, что любой собственный вектор линейного оператора φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ порождает одномерное инвариантное подпространство, т.е. если $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{V}: \varphi(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, то $\varphi(\alpha\bar{x}) = \lambda(\alpha\bar{x})$, $\alpha\bar{x} \in \langle\bar{x}\rangle$, где $\langle\bar{x}\rangle$ – порожденное пространство в линейном пространстве $\mathbb{V}$.

IX. Пусть λ – собственное значение линейного оператора φ: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Множество $\mathbf{V}_\lambda$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ и нулевого вектора, т.е.

$\mathbf{V}_\lambda = \{\bar{x} \in \mathbb{V} |\, \varphi(\bar{x}) = \lambda\bar{x}\}$, т.к. $\bar{0} \in \mathbf{V}_\lambda$, то по свойству 4: $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$;

с другой стороны: $\lambda\bar{0} = \bar{0}$, $\Rightarrow \varphi(\bar{0}) = \lambda\bar{0}$.

Предложение 4. Множество $\mathbf{V}_\lambda$ подмножество $\mathbb{V}$, т.е.

$\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}_\lambda \to (\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) \in \mathbf{V}_\lambda$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

□ 1. Найдем образ вектора $(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$:

$\varphi(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = \varphi(\alpha\bar{x}) + \varphi(\beta\bar{y}) = \alpha\varphi(\bar{x}) + \beta\varphi(\bar{y}) = \alpha\lambda\bar{x} + \beta\lambda\bar{y} = \lambda(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$.

Т.е. $(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y})$ – собственный вектор оператора φ, отвечающий собственному значению λ. Тогда в силу следствия 1 $\mathbf{V}_\lambda$ – линейное подпространство линейного пространства $\mathbb{V}$. ■

Предложение 5. Подпространства $\mathbb{V}$, состоящие из всех собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, пересекаются по нулевому вектору.

□ Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – собственные значения линейного оператора φ.

Если $\bar{x} \in \mathbf{V}_{\lambda_1} \cap \mathbf{V}_{\lambda_2}$, то $-\dfrac{\begin{matrix}\varphi(\bar{x}) = \lambda_1\bar{x} \\ \varphi(\bar{x}) = \lambda_2\bar{x}\end{matrix}}{\bar{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x}}$, но $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $\Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$, т.е. если $\bar{x} \in \mathbf{V}_{\lambda_1} \cap \mathbf{V}_{\lambda_2}$, то $\bar{x} = \bar{0}$ $\Rightarrow \mathbf{V}_{\lambda_1} + \mathbf{V}_{\lambda_2} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{V}_{\lambda_2}$. ■

X. Пусть $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ – базис в $\mathbb{V}$ и все векторы этого базиса собственные относительно оператора φ, т.е. $\varphi(\overline{e_i}) = \lambda_i\overline{e_i}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\varphi(\overline{e_i}) = \lambda_i\overline{e_i} = 0\cdot\overline{e_1} + \dots + \lambda_i\overline{e_i} + \dots + 0\cdot\overline{e_n} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тогда $\big(\varphi(\overline{e_1}),\dots,\varphi(\overline{e_n})\big) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$

<u>Теорема 5.</u> Если $\mathbb{V}$ линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то относительно оператора $\varphi\colon \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$ найдется одномерное или двумерное инвариантное линейное подпространство.

□ Рассмотрим характеристический многочлен:

$$P[\lambda] = \det(A-\lambda E) = \alpha_n\,\lambda^n + \alpha_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\,\lambda^1 + \alpha_0.$$

1. Если $\exists\,\lambda_0\in\mathbb{R}\colon P[\lambda_0]=0,$ то λ_0 – действительное собственное значение оператора φ и $\mathbf{V}_{\lambda_0}$ – инвариантное подпространство, имеющее размерность не меньше одного.

Если $\overline{x_0}\in\mathbf{V}_{\lambda_0}$, то $\langle\overline{x_0}\rangle$ – одномерное инвариантное подпространство.

2. Если многочлен $P[\lambda]$ действительных корней не имеет, то

$$\exists\,\lambda_0 = \alpha + i\beta\in\mathbb{C},\text{ где } \beta\neq 0.$$

Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_0, решая систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \lambda_0\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda_0\in\mathbb{C}$, то $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}$, где $x_j = \xi_j + i\eta_j,\ j=\overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = X = \xi + i\eta = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\overline{u} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\xi,\ \overline{v} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})\eta$.

Найдем образ вектора $\overline{x} = \overline{u} + i\overline{v}$:

$$\varphi(\overline{u}+i\overline{v}) = (\alpha+i\beta)(\overline{u}+i\overline{v})$$

$$\varphi(\overline{u}) + i\varphi(\overline{v}) = \alpha\overline{u} - \beta\overline{v} + i(\beta\overline{u}+\alpha\overline{v}).$$

$$(*)\begin{cases}\varphi(\bar{u}) = \alpha\bar{u} - \beta\bar{v},\\ \varphi(\bar{v}) = \beta\bar{u} + \alpha\bar{v};\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\varphi(\bar{u}) \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle,\\ \varphi(\bar{v}) \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle;\end{array}$$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{u} + i\bar{v}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\alpha + i\beta$, $\Rightarrow$ $\bar{u} + i\bar{v} \neq \bar{0}$, т.е. $\bar{u}\, и\, \bar{v}$ одновременно нулю равны быть не могут, тогда

а) если $\bar{v} = \bar{0}$, то $\bar{u} \neq \bar{0}$

$\varphi(\bar{0}) = \beta\bar{u} + \alpha\bar{0}$

$\bar{0} = \beta\bar{u}$, но $\bar{u} \neq \bar{0}$, так как он собственный вектор.

$\Rightarrow \beta = 0$, но это противоречит условию $\Rightarrow \bar{v} \neq \bar{0}$.

б) если $\bar{u} = \bar{0}, то\ \bar{v} \neq \bar{0}$.

$\varphi(\bar{0}) = \alpha 0 - \beta\bar{v}$

$\bar{0} = -\beta\bar{v}$, но $\bar{v} \neq 0$,

$\Rightarrow \beta = 0$, но это противоречит условию $\Rightarrow \bar{u} \neq \bar{0}$.

Мы доказали, что $\bar{u} \neq \bar{0}$ и $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Докажем, что векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ линейно независимы. Предположим, что $\exists\, k \neq 0$: $\bar{v} = k\bar{u}$. Подставим $\bar{v} = k\bar{u}$ в систему $(*)$:

$$\varphi(k\bar{u}) = \beta\bar{u} + \alpha k\bar{u}$$

$$k\varphi(\bar{u}) = \beta\bar{u} + \alpha k\bar{u} \ \mid : k$$

$$\begin{cases}\varphi(\bar{u}) = \dfrac{\beta}{k}\bar{u} + \alpha\bar{u}\\ \varphi(\bar{u}) = \alpha\bar{u} - \beta k\bar{u}\end{cases}$$

$$\bar{0} = \frac{\beta}{k}\bar{u} + \beta k\bar{u} \ \Rightarrow \beta\bar{u}\left(\frac{1}{k} + k\right) = \bar{0}, \text{но}$$

$$\beta \neq 0;\ \frac{1}{k} + k \neq 0;\ \bar{u} \neq 0 - \text{противоречие.}$$

$\Rightarrow$ система $\{\bar{u},\bar{v}\}$ линейно независима.

Пусть $\bar{x} \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$. Докажем, что $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ – инвариантное пространство, т.е. докажем, что $\varphi(\bar{x}) \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$.

С одной стороны, так как $\bar{x} \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$, то $\bar{x} = x_1\bar{u} + x_2\bar{v}$

$\Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1\bar{u} + x_2\bar{v}) = x_1\varphi(\bar{u}) + x_2\varphi(\bar{v})$.

С другой – из системы $(*)$ следует, что

$\varphi(\bar{u}) \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ и $\varphi(\bar{v}) \in \langle\bar{u},\bar{v}\rangle$,

т.е. $\langle\bar{u},\bar{v}\rangle$ – двумерное инвариантное пространство. ■

9. КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА

Пусть $\mathbb{V}^n$ – линейно-векторное пространство.
Пусть $\varphi: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$.

<u>Определение 1.</u> φ – линейная функция (линейный функционал на $\mathbb{V}^n$), если выполняются следующие свойства:

1) $\varphi(\overline{a}+\overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b}),\ \forall\, \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{V}^n$ – аддитивность;
2) $\varphi(\lambda\overline{a}) = \lambda\varphi(\overline{a}),\ \forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}^n,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ – однородность.

I. Пусть $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ и $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$ – базисы в $\mathbb{V}^n$.

$(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})C$, где $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ к базису $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$.

Пусть $\overline{x} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})X =$
$= (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})X' = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})CX'$
$\Rightarrow X = CX'$ или $X' = C^{-1}X$.

Пусть $a_1 = \varphi(\overline{e_1}), \dots, a_n = \varphi(\overline{e_n})$,
$\varphi(\overline{x}) = \varphi(x_1\overline{e_1} + \dots + x_n\overline{e_n}) = x_1\varphi(\overline{e_1}) + \dots + x_n\varphi(\overline{e_n}) = x_1a_1 + \dots + x_na_n$.
Пусть $b_1 = \varphi(\overline{g_1}), \dots, b_n = \varphi(\overline{g_n})$,
$\varphi(\overline{x}) = \varphi(x_1'\overline{g_1} + \dots + x_n'\overline{g_n}) = x_1'\varphi(\overline{g_1}) + \dots + x_n'\varphi(\overline{g_n}) = x_1'b_1 + \dots + x_n'b_n$.
Тогда $x_1a_1 + \dots + x_na_n = x_1'b_1 + \dots + x_n'b_n$.
Пусть $b_k = \varphi(\overline{g_k}) = \varphi(c_{1k}\overline{e_1} + \dots + c_{nk}\overline{e_n}) = c_{1k}\varphi(\overline{e_1}) + \dots + c_{nk}\varphi(\overline{e_n}) =$

$$= c_{1k}a_1 + \dots + c_{nk}a_n = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix},$$

$\Rightarrow (b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n)C$.

Причем при переходе от одного базиса к другому через матрицу перехода C коэффициенты линейного функционала преобразуются так же, как векторы: $(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})C$.

Пусть $f: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$;
$g: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$.

<u>Теорема 1.</u>

1. Сумма двух линейных функционалов есть линейный функционал, т.е. $(f+g)(\overline{a}) = f(\overline{a}) + g(\overline{a}),\ \forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}^n$.
2. Произведение линейного функционала на число есть линейный функционал, т.е. $(\lambda f)(\overline{a}) = \lambda f(\overline{a}),\ \forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}^n$.

□ 1. Пусть $h = f + g$.
Доказем, что

а) $h(\overline{a} + \overline{b}) = h(\overline{a}) + h(\overline{b})$;

б) $h(\lambda\overline{a}) = \lambda h(\overline{a})$.

а) $h(\overline{a} + \overline{b}) = (f + g)(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a} + \overline{b}) + g(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b}) +$
$+g(\overline{a}) + g(\overline{b}) = [f(\overline{a}) + g(\overline{a})] + [f(\overline{b}) + g(\overline{b})] = h(\overline{a}) + h(\overline{b})$.

б) $h(\alpha\overline{a}) = (f + g)(\alpha\overline{a}) = f(\alpha\overline{a}) + g(\alpha\overline{a}) = \alpha f(\overline{a}) + \alpha g(\overline{a}) = \alpha(f(\overline{a}) +$
$+ g(\overline{a})) = \alpha(f + g)(\overline{a}) = \alpha h(\overline{a})$.

2. Пусть $h = \lambda f$.

а) $h(\overline{a} + \overline{b}) = (\lambda f)(\overline{a} + \overline{b}) = (\lambda f)(\overline{a}) + (\lambda f)(\overline{b}) = \lambda f(\overline{a}) + \lambda f(\overline{b}) =$
$= h(\overline{a}) + h(\overline{b})$.

б) $h(\alpha\overline{a}) = (\lambda f)(\alpha\overline{a}) = \lambda f(\alpha\overline{a}) = \lambda\alpha f(\overline{a}) = \alpha[\lambda f(\overline{a})] = \alpha[(\lambda f)(\overline{a})] =$
$= \alpha h(\overline{a})$. ■

II. Аксиомы

$f: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$; $\quad g: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$; $\quad h: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$;

f, g, h – линейные функционалы на $\mathbb{R}$;

$(\mathbb{V}^n)^*$ – линейное пространство, сопряженное с $\mathbb{V}^n$.

1. $f + g = g + f, \ \forall f, g \in (\mathbb{V}^n)^*$.
2. $(f + g) + h = f + (g + h), \ \forall f, g, h \in (\mathbb{V}^n)^*$.
3. $\exists\, 0 \in (\mathbb{V}^n)^*: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R} : 0(\overline{a}) = 0, \forall\overline{a} \in \mathbb{V}^n: f + 0 = 0 + f = f, \forall f \in (\mathbb{V}^n)^*$.
4. $\forall f \in (\mathbb{V}^n)^* \ \exists -f \in (\mathbb{V}^n)^*: f + (-f) = (-f) + f = 0$.
5. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall f, g \in (\mathbb{V}^n)^*$.
6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall f \in (\mathbb{V}^n)^*$.
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\forall f \in (\mathbb{V}^n)^*$.
8. $1 \cdot f = f \cdot 1 = f, \ \forall f \in (\mathbb{V}^n)^*$.

III. Пусть $f_i: \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}, \ \forall i = \overline{1, n}$;

$$f_i(\overline{e_j}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j, \\ 0, \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

<u>Теорема 2.</u> $\dim(\mathbb{V}^n)^* = n$.

□ Пусть $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \in (\mathbb{V}^n)^*$

Тогда $(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(\overline{e_j}) = 0$

$\alpha_1 f_1(\overline{e_j}) + \dots + \alpha_n f_n(\overline{e_j}) = 0$

$\Rightarrow \ \alpha_j \cdot 1 = 0 \ \Rightarrow \alpha_j = 0, \ \forall \ j = \overline{1, n}$.

Итак, мы доказали, что $(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0) \ \Rightarrow \ (\alpha_j = 0, \ \forall j = \overline{1, n})$

$f(\overline{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

$(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(\overline{x}) = \alpha_1 f_1(\overline{x}) + \dots + \alpha_n f_n(\overline{x})$

$$f_i(\overline{x}) = f_i(x_1\overline{e_1} + \cdots + x_n\overline{e_n}) = \sum_{j=1}^{n} f_i(x_j\overline{e_j}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_i(\overline{e_j}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij} =$$

$$= x_i\delta_{ii} = x_i \quad \Rightarrow f_i(\overline{x}) = x_i.$$

$\Rightarrow \ (a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(\overline{x}) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = f(\overline{x}),$

т.е. $\forall\, x \in \mathbb{V}^n \to f(\overline{x}) = (a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(\overline{x}) \ \Rightarrow f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n.$ ■

IV. Квадратичная функция, билинейная и квадратичная формы

Пусть $\psi: \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$;

$\psi: \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n \ni (\overline{u}, \overline{v}) \mapsto \psi(\overline{u}, \overline{v}) \in \mathbb{R}$, где $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}^n$.

Определение 2. Функция ψ, действующая из декартова произведения пространства $\mathbb{V}^n$ на себя в множестве действительных чисел, называется билинейной, если при фиксированном значении одного из своих аргументов она является линейной функцией (линейным функционалом) другого аргумента.

Определение 2′. Функция ψ − билинейная, если

1) $\psi(\alpha_1\overline{u_1} + \alpha_2\overline{u_2}, \overline{v}) = \alpha_1\psi(\overline{u_1}, \overline{v}) + \alpha_2\psi(\overline{u_2}, \overline{v})$;

2) $\psi(\overline{u}, \beta_1\overline{v_1} + \beta_2\overline{v_2}) = \beta_1\psi(\overline{u}, \overline{v_1}) + \beta_2\psi(\overline{u}, \overline{v_2})$.

1. Пусть $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ – базис в $\mathbb{V}^n$.

$\overline{u} = x_1\overline{e_1} + \cdots + x_n\overline{e_n}\,; \qquad \overline{v} = y_1\overline{e_1} + \cdots + y_n\overline{e_n};$

$$\psi(\overline{u}, \overline{v}) = \psi(x_1\overline{e_1} + \cdots + x_n\overline{e_n}; y_1\overline{e_1} + \cdots + y_n\overline{e_n}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \psi(\overline{e_i}, \overline{e_j}).$$

Пусть $\psi(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = a_{ij}$.

$$\psi(\overline{u}, \overline{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$ − билинейная форма по переменным $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Определение 3. Билинейная функция ψ является симметричной, если $\psi(\overline{u}, \overline{v}) = \psi(\overline{v}, \overline{u})$.

$\phi(\overline{u}) = \psi(\overline{u}, \overline{u})$ – квадратичная функция, порожденная симметричной билинейной функцией ψ. Функция ψ – полярная билинейная функция к квадратичной функции ϕ.

Теорема 3. $\psi(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\big(\phi(\overline{u} + \overline{v}) - \phi(\overline{u}) - \phi(\overline{v})\big)$.

□ $\psi(\overline{u} + \overline{v}, \overline{u} + \overline{v}) = \phi(\overline{u} + \overline{v})$

$$\psi(\overline{u} + \overline{v}, \overline{u} + \overline{v}) = \psi(\overline{u} + \overline{v}, \overline{u}) + \psi(\overline{u} + \overline{v}, \overline{v}) = \psi(\overline{u}, \overline{u}) + \psi(\overline{v}, \overline{u}) +$$

$$+ \psi(\overline{u}, \overline{v}) + \psi(\overline{v}, \overline{v}) = \phi(\overline{u}) + 2\,\psi(\overline{u}, \overline{v}) + \phi(\overline{v}) = \phi(\overline{u} + \overline{v})$$

$\Rightarrow \ \psi(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\big(\phi(\overline{u} + \overline{v}) - \phi(\overline{u}) - \phi(\overline{v})\big).$ ■

2. Рассмотрим функцию $\phi(\overline{u})$, представимую в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ пространства $\mathbb{V}^n$ квадратичной формой, т.е.

$$\phi(\overline{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,.$$

Пусть

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица билинейной формы в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$.

а) Рассмотрим $\phi(\overline{u})$ для $n = 2$:

$$\phi(\overline{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 =$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

б) Рассмотрим $\phi(\overline{u})$ для n:

$$\phi(\overline{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3. Функция $\psi(\overline{u},\overline{v}) = X^{\mathrm{T}}AY$, в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$; $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Функция $\phi(\overline{u}) = X^{\mathrm{T}}AX$ в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$;

Рассмотрим матрицу билинейной формы при переходе от одного базиса к другому. Пусть

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица билинейной формы в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица билинейной формы в базисе $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$.

$\psi(\overline{e_1},\overline{e_n}) = a_{ij}; \quad \psi(\overline{g_1},\overline{g_n}) = b_{ij}.$
$\overline{u} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})X = (\overline{g_1},\dots,\overline{g_n})X';$
$\overline{v} = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})Y = (\overline{g_1},\dots,\overline{g_n})Y';$
$(\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}) = (\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})C.$
$X = CX', \quad Y = CY';$
$\psi(\overline{u},\overline{v}) = X^{\mathrm{T}}AY = (X')^{\mathrm{T}}BY';$
$\psi(\overline{u},\overline{v}) = X^{\mathrm{T}}AY = (CX')^{\mathrm{T}}A(CY') = (X')^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y'$
$\Rightarrow\ B = C^{\mathrm{T}}AC.$

Определение 4. Определителем билинейной (квадратичной) функции в каком-либо базисе называется определитель матрицы этой функции в выбранном базисе.

Теорема 4. Знак определителя биноминальной квадратичной функции не зависит от выбора базиса, в котором эта функция задана.
□ $\det B = \det(C^{\mathrm{T}}AC) = \det(C^{\mathrm{T}})\det A\det C = \det A\,(\det C)^2$, а так как $(\det C)^2 > 0$, то $\det B$ и $\det A$ одного знака. ■

V. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

Пусть $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ – квадратичная форма, представляющая данную квадратичную функцию в базисе $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\} \subset \mathbb{V}^n$.

Если $|C| \neq 0$, то $\operatorname{rang} AC \leq \operatorname{rang} A$.

С другой стороны, $A = ACC^{-1} \ \Rightarrow\ \operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} AC$.
Тогда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} AC$.
Если существует $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\} \subset \mathbb{V}^n$ – базис в $\mathbb{V}^n$, такой что

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – диагональная, то в этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид. Рангом квадратичной формы будем называть ранг матрицы A. При переходе от одного базиса к другому с матрицей перехода C, матрица квадратичной формы приобретает вид C^TAC, где $|C| \neq 0 \Rightarrow |C^T| \neq 0$ и $\operatorname{rang}(C^TAC) = \operatorname{rang} A$. Если A – диагональная, то $\operatorname{rang} A$ совпадает с количеством ненулевых диагональных элементов. Привести квадратичную форму к каноническому виду – это значит, найти такую невырожденную матрицу C, что квадратичная форма в базисе $(\overline{e_1},\dots,\overline{e_n})C$ имеет диагональную матрицу C^TAC.

Теорема 5. Квадратичную форму можно привести к каноническому виду, т.е. существует базис, в котором матрица квадратичной формы диагональна.

□ 1. $a_{11} \neq 0$.

При $n = 1 \Rightarrow \varphi(x_1) = a_{11}x_1^2$ – канонический вид.

Предположим, что наше утверждение справедливо для $n-1$ и докажем справедливость теоремы для n.

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \begin{matrix} a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ + \; a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_nx_n \end{matrix} =$$

$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \varphi_2(x_2, \dots, x_n)$, где

$\varphi_2(x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма переменных $x_2, \dots, x_n$.

$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2$,

$\varphi_2(x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ – квадратичная форма переменных $x_2, \dots, x_n$. Так как $\varphi_2(x_2, \dots, x_n)$ – квадратичная форма от $n-1$ неизвестного, то её по предположению индукции мы можем привести к каноническому виду путем некоторой линейной замены переменных.

$$\begin{aligned} x_2 &= c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n', \\ &\vdots \\ x_n &= c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n'; \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = b_2{x_2'}^2 + \dots + b_n{x_n'}^2;$$

$$\varphi = f + \varphi_2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + b_2{x_2'}^2 + \dots + b_n{x_n'}^2;$$

$$x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n;$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}x_1' - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n';$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \dots + c_{1n}x_n', \\ x_2 &= \qquad\quad\;\; c_{22}x_2' + \dots + c_{2n}x_n', \\ &\vdots \\ x_n &= \qquad\quad\;\; c_{n2}x_2' + \dots + c_{nn}x_n'; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = c_{11}\begin{vmatrix} c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ т.к. } \begin{vmatrix} c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

и $\dfrac{1}{a_{11}} = c_{11} \neq 0$.

То есть в базисе $(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})$ матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, где

$$(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = (\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $a_{ii} = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$.

Не нарушая общности, предположим, что $a_{12} \neq 0$,

$2a_{12}x_1x_2 +$ все остальные члены.

Пусть $x_1 = x_1' - x_2'$,

$x_2 = x_1' + x_2'$,

$x_3 = x_3'$,

$\dots$

$x_n = x_n'$.

Путем замены переменных слагаемое $2a_{12}x_1x_2$ перейдет в $2a_{12}(x_1' - x_2')(x_1' + x_2') = 2a_{12}{x_1'}^2 - 2a_{12}{x_2'}^2$, причем полученная разность ни с одним другим не выписанным членом взаимоуничтожиться не может, поэтому второй случай мы сводим к первому, относительно которого утверждение доказано, т.е. для любой квадратичной функции существует базис, в котором эта функция представлена квадратичной формой канонического вида. Рассмотренный метод привидения квадратичной формы к каноническому виду носит название метода Лагранжа. ■

Напоминание

$\psi: \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$ – квадратичная функция.

$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ – квадратичная форма.

Вид квадратичной формы канонический, если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т.е. квадратичная форма приобретает вид:

$a_{11}x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{rr}x_r^2 + a_{r+1,r+1}x_{r+1}^2 + \dots + a_{nn}x_n^2,$ где $a_{r+1,r+1} = \dots = a_{nn} = 0$.

$$\varphi(x_1', \dots, x_n') = (X')^{\mathrm{T}}AX' = (x_1', \dots, x_n') \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1', \dots, x_n') \begin{pmatrix} a_{11}x_1' \\ \vdots \\ a_{nn}x_n' \end{pmatrix} = a_{11}{x_1'}^2 + \dots + a_{rn}{x_n'}^2.$$

Замечание

При любом способе приведения квадратичной формы к каноническому виду количество неравных нулю диагональных элементов равно рангу матрицы квадратичной формы. Несмотря на то, что в разных базисах квадратичная форма имеет разные матрицы, все они имеют одинаковый ранг.

Теорема 6. Об инерции квадратичных форм. Независимо от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду количество положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах переменных остается неизменным.

□ Пусть в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$ квадратичная форма φ имеет вид $\varphi = c_1 x_1^2 + \dots + c_p x_p^2 - c_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - c_r x_r^2$, причем $c_i > 0,\ \forall\, i = \overline{1, p}$, а в базисе $\{\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}\}$: $\varphi = d_1 {x'_1}^2 + \dots + d_q {x'_q}^2 - d_{q+1} {x'_{q+1}}^2 - \dots - d_r {x'_r}^2$, причем $d_j > 0,\ \forall\, j = \overline{1, q}$ и $p > q$.

Рассмотрим $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_p}\}$ и натянем на них линейное подпространство $L = \langle \overline{e_1}, \dots, \overline{e_p} \rangle$. Рассмотрим $\{\overline{g_{q+1}}, \dots, \overline{g_n}\}$ и натянем на них линейное подпространство $W = \langle \overline{g_{q+1}}, \dots, \overline{g_n} \rangle$.

$p + (n - q) = n + (p - q) > n$

$\dim(L \cap W) \neq 0$, т.е. $\exists\, \overline{x} \in L \cap W : \overline{x} \neq \overline{0}$.

Так как $\dim(L + W) \leq n$; $\dim L + \dim W > n$, то $\dim(L \cap W) \neq 0$.

$\overline{x} \in L \quad \Rightarrow\ \overline{x} = x_1 \overline{e_1} + \dots + x_p \overline{e_p}$;

$\overline{x} \in W\ \Rightarrow \overline{x} = x'_{q+1} \overline{g_{q+1}} + \dots + x'_n \overline{g_n}$;

$\phi(\overline{x}) = c_1 x_1^2 + \dots + c_p x_p^2 > 0$;

$\phi(\overline{x}) = -d_{q+1} {x'_{q+1}}^2 - \dots - d_n {x'_n}^2 < 0$;

$\phi(\overline{x}) > 0$ и $\phi(\overline{x}) < 0$ – противоречие $\Rightarrow p = q$. ■

Замечание

Билинейная функция $\varphi\colon \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $\varphi(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0\ \forall\, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{V}^n$.

$\varphi(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0$ – в силу положительной определенности;

$\varphi(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = \varphi(\overline{a}, \overline{c}) + \varphi(\overline{b}, \overline{c})$ – в силу линейности;

$\varphi(\lambda \overline{a}, \overline{b}) = \lambda \varphi(\overline{a}, \overline{b})$ и $\varphi(\overline{a}, \mu \overline{b}) = \mu \varphi(\overline{a}, \overline{b})$ – в силу однородности.

VI. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби́.

Пусть $\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_n}\}$ – базис в $\mathbb{V}^n$.

$\varphi\colon \mathbb{V}^n \times \mathbb{V}^n \to \mathbb{R}$ – симметрическая билинейная функция.

$\varphi(\overline{u}, \overline{v}) = \varphi(\overline{v}, \overline{u})$.

В этом базисе симметрическая билинейная функция задается симметрической формой:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$\Delta_1 = |a_{11}| \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\dots$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е. все угловые миноры отличны от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем искать базис $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$: $\varphi(\overline{e_i}, \overline{e_j}) = 0$ при $i \neq j$, где $i, j = \overline{1, n}$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \overline{e_1} = \alpha_{11}\overline{f_1}, \\ \overline{e_2} = \alpha_{21}\overline{f_1} + \alpha_{22}\overline{f_2}, \\ \quad\vdots \\ \overline{e_k} = \alpha_{k1}\overline{f_1} + \dots + \alpha_{kk}\overline{f_k}, \\ \quad\vdots \\ \overline{e_n} = \alpha_{n1}\overline{f_1} + \dots + \alpha_{nn}\overline{f_n}; \end{cases} \qquad (*)$$

$$\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1, k-1}.$$

Докажем, что если $\varphi(\overline{e_k}, \overline{f_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1, k-1}$, то и $\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_i}) = 0$.

$$\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_i}) = \varphi(\overline{e_k}\,, \alpha_{i1}\overline{f_1} + \dots + \alpha_{ii}\overline{f_i}) = \alpha_{i1}\varphi(\overline{e_k}, \overline{f_1}) + \dots + \alpha_{ii}\,\varphi(\overline{e_k}, \overline{f_i}),$$

т.е. $\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1, k-1}$.

Но в силу симметричности билинейной формы это справедливо и когда $i > k$. Наложим дополнительное условие: $\left|\varphi\left(\overline{e_k}, \overline{f_k}\right)\right| = 1$. Тогда
$$\begin{cases} \varphi\left(\overline{f_1}, \overline{e_k}\right) = 0, \\ \varphi\left(\overline{f_2}, \overline{e_k}\right) = 0, \\ \quad\vdots \\ \varphi\left(\overline{f_{k-1}}, \overline{e_k}\right) = 0, \\ \varphi\left(\overline{f_k}, \overline{e_k}\right) = 1. \end{cases}$$
Подставим $\overline{e_k}$ из системы $(*)$:
$$\begin{cases} \varphi\left(\overline{f_1}, \alpha_{k1}\overline{f_1} + \cdots + \alpha_{kk}\overline{f_k}\right) = 0, \\ \varphi\left(\overline{f_2}, \alpha_{k1}\overline{f_1} + \cdots + \alpha_{kk}\overline{f_k}\right) = 0, \\ \quad\vdots \\ \varphi\left(\overline{f_{k-1}}, \alpha_{k1}\overline{f_1} + \cdots + \alpha_{kk}\overline{f_k}\right) = 0, \\ \varphi\left(\overline{f_k}, \alpha_{k1}\overline{f_1} + \cdots + \alpha_{kk}\overline{f_k}\right) = 1. \end{cases}$$
Воспользуемся линейностью по второму аргументу:
$$\begin{cases} \alpha_{k1}\varphi\left(\overline{f_1}, \overline{f_1}\right) + \cdots + \alpha_{kk}\varphi\left(\overline{f_1}, \overline{f_k}\right) = 0, \\ \quad\vdots \\ \alpha_{k1}\varphi\left(\overline{f_k}, \overline{f_1}\right) + \cdots + \alpha_{kk}\varphi\left(\overline{f_k}, \overline{f_k}\right) = 1. \end{cases} \qquad (\hat{*})$$
Причем $a_{ij} = \varphi\left(\overline{f_i}, \overline{f_j}\right)$.

Тогда $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi\left(\overline{f_1}, \overline{f_1}\right) & \cdots & \varphi\left(\overline{f_1}, \overline{f_k}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi\left(\overline{f_k}, \overline{f_1}\right) & \cdots & \varphi\left(\overline{f_k}, \overline{f_k}\right) \end{vmatrix} \neq 0.$

Т.к. $\Delta_k \neq 0$, то система $(\hat{*})$ однозначно разрешима по формулам Крамера, т.е. решение в этой системе существует и оно единственное. По формулам Крамера:
$$\alpha_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi\left(\overline{f_1}, \overline{f_1}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi\left(\overline{f_k}, \overline{f_1}\right) & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_k} = \frac{(-1)^{k+k} \cdot 1\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$
Причем Δ_0 положим равным 1.

Найдем $\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_k})$:
$$\varphi(\overline{e_k}, \overline{e_k}) = \varphi\left(\overline{e_k}, \alpha_{k1}\overline{f_1} + \cdots + \alpha_{kk}\overline{f_k}\right) =$$
$$= \alpha_{k1}\varphi\left(\overline{e_k}, \overline{f_1}\right) + \cdots + \alpha_{kk}\varphi\left(\overline{e_k}, \overline{f_k}\right) = \alpha_{k1} \cdot 0 + \cdots + \alpha_{kk} \cdot 1 = \alpha_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$
Тогда вектор $\overline{x} = \xi_1\overline{f_1} + \cdots + \xi_n\overline{f_n} = \eta_1\overline{e_1} + \cdots + \eta_n\overline{e_n}$. Поэтому $\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\eta_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\eta_n^2$ $(\tilde{*})$ − квадратичная форма в базисе $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$.

VII. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы

Количество отрицательных коэффициентов в квадратичной форме равно количеству смен знака в ряду $\Delta_0 = 1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Пусть $\Delta_i > 0, \ \forall\, i = \overline{1,n}$.

Тогда $\lambda_k = \dfrac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} > 0, \ \forall\, k = \overline{1,n}$;

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2 > 0, \ \forall\, \overline{x} \neq \overline{0}.$$

Пусть квадратичная форма положительно определена.

Докажем, что $\Delta_k \neq 0, \ \forall\, k = \overline{1,n}$. Предположим противное, т.е. что $\exists\, k: \Delta_k = 0$, где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi(\overline{f_1}, \overline{f_1}) & \cdots & \varphi(\overline{f_1}, \overline{f_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\overline{f_k}, \overline{f_1}) & \cdots & \varphi(\overline{f_k}, \overline{f_k}) \end{vmatrix}.$$

Тогда строки матрицы, определителем которой является число Δ_k, линейно зависимы, т.е.

$$\exists\, \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}: \ \mu_1 \varphi(\overline{f_1}, \overline{f_i}) + \dots + \mu_k \varphi(\overline{f_k}, \overline{f_i}) = 0.$$

В силу аддитивности и однородности имеем:

$$\varphi(\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}, \overline{f_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1,k}$$

$$\Rightarrow \ \mu_i \varphi(\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}, \overline{f_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1,k}$$

$$\varphi(\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}, \mu_i \overline{f_i}) = 0, \ \forall\, i = \overline{1,k}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi(\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}, \mu_i \overline{f_i}) = 0$$

$$\varphi(\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}, \mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}) = 0.$$

Так как линейная комбинация $\mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k}$ нетривиальна, а система векторов $\{\overline{f_1}, \dots, \overline{f_k}\}$ – линейно независима, то вектор

$$\overline{y} = \mu_1 \overline{f_1} + \dots + \mu_k \overline{f_k} \neq \overline{0}.$$

По условию квадратичная форма положительно определена. Поэтому если $\overline{y} \neq \overline{0}$, то $\varphi(\overline{y}, \overline{y}) > 0$, но $\varphi(\overline{y}, \overline{y}) = 0$ – противоречие, к которому привело предположение о том, что $\Delta_k = 0$.

Итак, мы доказали, что если квадратичная форма определена положительно, то $\Delta_k \neq 0, \forall\, k = \overline{1,n}$. А значит, по доказанному существует базис, в котором квадратичная форма принимает вид: $\frac{1}{\Delta_1}\eta_1^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\eta_n^2$. А по условию она положительно определена. Поэтому все коэффициенты $\lambda_k > 0$, где $\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, $\forall\, k = \overline{1,n}$. Тогда из того, что $\lambda_1 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\Delta_1} > 0 \;\Rightarrow\; \Delta_1 > 0$;

$$\lambda_2 > 0 \;\Rightarrow\; \frac{\Delta_1}{\Delta_2} > 0 \;\Rightarrow\; \text{так как } \Delta_1 > 0, \text{ то } \Delta_2 > 0;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\Delta_k > 0, \;\; \forall\, k = \overline{1,n}.$$

Таким образом, нами доказан критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы: квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы квадратичной формы положительны.

Если же квадратичная форма отрицательно определена, то в любой канонической записи квадратичной формы все коэффициенты должны быть меньше нуля, а угловые миноры должны чередовать знак, так как $\frac{1}{\Delta_1} < 0$, то $\Delta_1 < 0$;

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} < 0, \text{ то так как } \Delta_1 < 0, \text{ то } \Delta_2 > 0;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ .$$

Таким образом, получим, что $\Delta_1 < 0,\; \Delta_2 > 0,\; \Delta_3 < 0, \ldots$.

10. ВЕКТОРЫ

<u>Определение 1.</u> Вектор – направленный отрезок. Обозначение $\overline{a} = \overline{AB}$, где точка A – начало вектора $\overline{AB}$, а B – конец. Если $B = A$, то $\overline{AB} = \overline{AA} = \overline{BB} = \overline{0}$ – нулевой вектор (рис. 9).

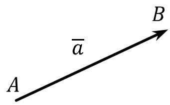


Рис. 9

I. Суммой векторов называется вектор, который получается по следующим правилам:

1) правило треугольника. Если из произвольной точки отложить вектор $\overline{a}$ и из конца вектора $\overline{a}$ отложить вектор $\overline{b}$, то вектор, начало которого будет совпадать с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$, будет называться суммой этих векторов (рис. 10);

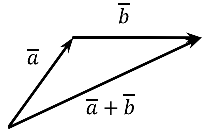


Рис. 10

2) правило параллелограмма. Если из произвольной точки отложить векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и натянуть на них параллелограмм, то вектор, идущий из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в противоположную вершину, будет называться суммой этих векторов (рис. 11);

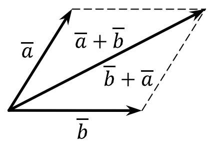


Рис. 11

3) правило замыкающего. Чтобы сложить произвольное количество векторов, необходимо сначала отложить векторы таким образом, чтобы начало следующего совпадало с концом предыдущего, а затем провести так называемый результирующий вектор, начало которого совпадает с началом первого отложенного вектора, а конец – с концом последнего. Получившийся результирующий вектор и является суммой данных векторов.

Определение 2. Векторы называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны. Обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Определение 3. Векторы называются компланарными, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 4. Векторы, длины которых равны единице, называются единичными или ортами.

Определение 5. Нулевой вектор – направленный отрезок, начало и конец которого совпадают. Направление нулевого вектора не определено.

Определение 6. Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ такой, что

1) $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$,
2) $\overline{a} \parallel \overline{b}$, причем $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (сонаправлены) при $\lambda > 0$, и $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (разнонаправлены) при $\lambda < 0$, где $|\overline{a}|$ и $|\overline{b}|$ – длины векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Следствие 1. По определению 6: $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$; $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

II. Свойства векторов

1. Коммутативность сложения:
Из правила параллелограмма следует, что $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (рис. 11).
2. Ассоциативность сложения (рис. 12):

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

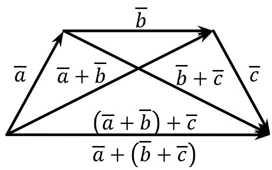


Рис. 12

3. Существование нейтрального элемента:

$\exists\, \overline{0}: \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}.$

□ Пусть $\overline{a} = \overline{AB},\ \overline{0} = \overline{BB}$. Тогда $\overline{a} + \overline{0} = \overline{AB} + \overline{BB}$.

По правилу треугольника: $\overline{AB} + \overline{BB} = \overline{AB} = \overline{a}$. ■

4. Существование противоположного элемента:

$\forall\, \overline{a} \in \mathbb{V}^3\ \exists -\overline{a} \in \mathbb{V}^3: \overline{a} + (-\overline{a}) = -\overline{a} + \overline{a} = \overline{0}.$

□ Пусть $\overline{a} = \overline{AB}$, тогда $-\overline{a} = \overline{BA}$. $\Rightarrow$ $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \overline{0}$. ■

5. Дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на вектор: $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$.

□ Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$ (рис. 13).

Аналогично рассматриваются остальные случаи. ■

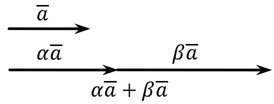


Рис. 13

6. Дистрибутивность сложения векторов относительно умножения на число:

$\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ (рис. 14)

7. Ассоциативность умножения вектора на число: $\alpha(\beta\overline{a}) = \beta(\alpha\overline{a})$.

8. Существование единицы: $1 \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot 1 = \overline{a}$.

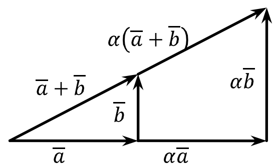


Рис. 14

III. Линейная зависимость векторов

1. Пусть $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарны, т.е. $\overline{a} \parallel \overline{b}$, $\lambda = \dfrac{|\overline{b}\,|}{|\overline{a}\,|}$.

Тогда если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$; если $\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b}$, то $\overline{b} = -\lambda\overline{a}$.

□ $|\overline{b}| = \dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}|\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|$, т.е. два коллинеарных вектора на прямой линейно зависимы. Таким образом, любой не нулевой вектор образует линейно независимую систему и является порождающим вектором подпространства, состоящего из всех коллинеарных ему векторов, т.е. этот вектор по теореме Штейница является базисом в одномерном пространстве. ■

Примечание

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Нулевой вектор и два компланарных вектора составляют тройку компланарных векторов.

2. Пусть $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$, где $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in \mathbb{V}^2$.

Пусть $\overline{x} = \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{AC}$ (рис. 15).

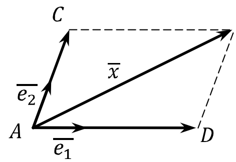


Рис. 15

$\overline{AD} \parallel \overline{e_1} \;\Rightarrow\; \exists\, x_1 \in \mathbb{R} : \overline{AD} = x_1\overline{e_1};$

$\overline{AC} \parallel \overline{e_2} \;\Rightarrow\; \exists\, x_2 \in \mathbb{R} : \overline{AC} = x_2\overline{e_2};$

$\Rightarrow\; \overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где x_1, x_2 – координаты вектора $\overline{x} \in \mathbb{V}^2$ в базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$.

Таким образом, любой вектор из $\mathbb{V}^2$ можно представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов. Докажем, что пара неколлинерных векторов линейно не зависима. Предположим обратное, т.е. если $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – линейно зависима, то $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \overline{e_1} = \lambda\overline{e_2} \;\Rightarrow \overline{e_1} \parallel \overline{e_2}$, но это противоречит условию $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$. Таким образом, любые два неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис.

3. Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\} \in \mathbb{V}^3$ – тройка некомпланарных векторов.

Пусть $\overline{x} = \overline{AG} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}$ (рис. 16)

$\overline{AB} \parallel \overline{e_1} \Rightarrow\; \exists\, x_1 \in \mathbb{R} : \overline{AB} = x_1\overline{e_1}$

$\overline{AD} \parallel \overline{e_2} \Rightarrow\; \exists\, x_2 \in \mathbb{R} : \overline{AD} = x_2\overline{e_2}$

$\overline{AE} \parallel \overline{e_3} \Rightarrow\; \exists\, x_3 \in \mathbb{R} : \overline{AE} = x_3\overline{e_3}$

$\Rightarrow\; \overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

где x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\overline{x} \in \mathbb{V}^3$ в базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

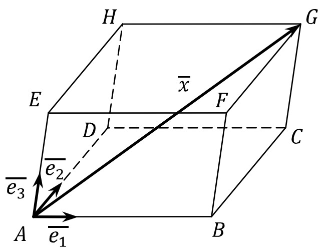


Рис. 16

Таким образом, любой вектор из $\mathbb{V}^3$ можно представить в виде линейной комбинации трех некопланарных векторов.

Докажем, что любые три некомпланарные вектора линейно независимы. Предположим обратное, т.е. если $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ – линейно зависимы, то один из этих векторов является линейной комбинацией остальных. Не нарушая общности, предположим, что $\overline{e_3} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2}$, $\Rightarrow \overline{e_3} \in \mathbb{V}_{\langle \overline{e_1}, \overline{e_2} \rangle}$, т.е. $\overline{e_3}$ находится в плоскости $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$, $\Rightarrow \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ – компланарны, что противоречит условию. Таким образом, любая тройка некомпланарных векторов задаёт базис в трёхмерном пространстве.

<u>Определение 7.</u> Любая точка на прямой и любой ненулевой вектор этой прямой, отложенный из этой точки, задают аффинную систему координат на прямой.

Определение 8. Любая точка на плоскости и пара неколлинеарных векторов, отложенная из этой точки, задают аффинную систему координат на плоскости.

Определение 9. Любая точка в пространстве и тройка некомпланарных векторов, отложенная из этой точки, задают аффинную систему координат в пространстве.

Пусть $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ – аффинная система координат в пространстве,

M – произвольная точка пространства.

Вектор $\overline{OM}$ – называется *радиус-вектором* точки M в этой системе координат. Разложим радиус-вектор $\overline{OM}$ по базису $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$:

$\overline{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + x_3\overline{e_3}$, где x_1, x_2, x_3 – координаты точки M в системе координат $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Координатами точки M в аффинной системе координат называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$.

Предложение 1. Координаты вектора в аффинной системе координат пространства равны разности соответствующих координат его конца и начала.

□ По правилу треугольника $\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2}$

$\Rightarrow \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$.

Пусть $M_1(x_1, x_2, x_3)$, $M_2(y_1, y_2, y_3)$.

$$\Rightarrow \overline{OM_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \overline{OM_1} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \overline{M_1M_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})\begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы доказали, что чтобы найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ нужно из координат точки M_2 вычесть соответствующие координаты точки M_1. ■

IV. Понятие проекции вектора на вектор

а) Пусть $A \in \alpha$; $\alpha \perp l$; $A_1 = \alpha \cap l$.

Тогда A_1 – *ортогональная проекция* точки A на прямую l. Если $\overline{a} \parallel l$, $\overline{b} = \overline{AB}$, то $\overline{A_1B_1} = \text{ПР}_{\overline{a}}\,\overline{b} = \text{ПР}_{\,l}\,\overline{b}$, где A_1, B_1 – ортогональные проекции точек A и B на прямую l (рис. 17).

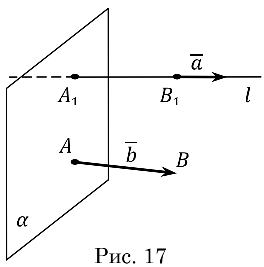


Рис. 17

<u>Предложение 2.</u> Ортогональное проецирование векторов на прямую l есть линейный оператор.

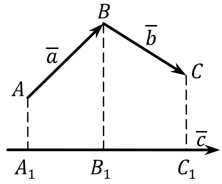


Рис. 18

□ 1. $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} = \overline{A_1B_1}$; $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{b} = \overline{B_1C_1}$ (рис. 18)

$\text{ПР}_{\overline{c}}\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \overline{A_1C_1} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} + \text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{b}$.

Таким образом, выполняется свойство аддитивности, т.е. образ суммы есть сумма образов.

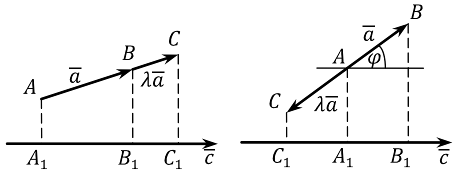
2. Покажем, что для ортогонального проецирования выполняется свойство однородности линейного оператора (рис. 19).

Рассмотрим $\lambda > 0$ (рис. 19, а).

$\text{ПР}_{\overline{c}}\,\lambda\overline{a} = \overline{A_1C_1} = \lambda\overline{A_1B_1} = \lambda\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$.

При $\lambda < 0$ (рис. 19, б):

$\text{ПР}_{\overline{c}}\,\lambda\overline{a} = \overline{A_1C_1} = \lambda\overline{A_1B_1} = \lambda\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$.



а б

Рис. 19

Таким образом, доказано, что ортогональное проецирование векторов на ось l является линейным оператором. ■

б) Пусть $\overline{e} \parallel l$ и $|\overline{e}| = 1$; $\overline{e} \uparrow\uparrow \overline{c}$, тогда

$\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} \parallel \overline{e}$ и $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{b} \parallel \overline{e}$ (рис. 20).

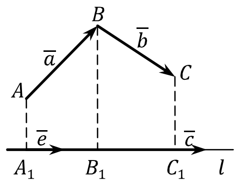


Рис. 20

Значит, векторы $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$ и $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{b}$ можно представить в виде линейной комбинации вектора $\overline{e}$:

$\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} = \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} \cdot \overline{e}$, где $\text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$ (абсолютное значение проекции $\overline{a}$ на $\overline{c}$) – координата вектора $\text{ПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$ в базисе $\{\overline{e}\}$.

Рассмотрим АЗПР суммы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 20):

$$\text{АЗПР}_{\overline{c}}\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \text{АЗ}\left(\overline{A_1C_1}\right) = \text{АЗ}\left(\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1}\right) =$$
$$= \text{АЗ}\left(\overline{A_1B_1}\right) + \text{АЗ}\left(\overline{B_1C_1}\right) = \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} + \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{b}.$$

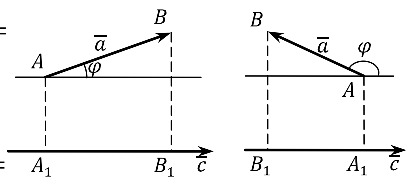
Выразим АЗПР через $\cos\varphi$, где $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{c}}\right)$ (рис. 21).

Если $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\varphi > 0$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow \overline{c} \Rightarrow |\overline{a}|\cos\varphi = \text{АЗ}\left(\overline{A_1B_1}\right) =$
$= \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$ (рис. 21, а).

Если $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0$

$\Rightarrow \overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow \overline{c} \Rightarrow |\overline{a}|\cos\varphi = \text{АЗ}\left(\overline{A_1B_1}\right) =$
$= \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a}$ (рис. 21, б).



а б

Рис. 21

V. Скалярное произведение

<u>Определение 10.</u> Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi = |\overline{b}|\text{АЗПР}_{\overline{b}}\,\overline{a}$, где $\varphi = \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$.

Свойства скалярного произведения:

1. $(\overline{b},\overline{a}) = |\overline{b}||\overline{a}|\cos\varphi = (\overline{a},\overline{b})$.

2. $(\lambda\overline{a},\overline{b}) = |\lambda\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\widehat{\lambda\overline{a},\overline{b}}\right) = \begin{cases}\lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\,, \text{ если } \lambda > 0,\\ -\lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos(\pi-\varphi)\,, \text{ если } \lambda < 0.\end{cases}$

□ $(\lambda\overline{a},\overline{b}) = \begin{cases}\lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\,,\\ -\lambda|\overline{a}||\overline{b}|(-\cos\varphi);\end{cases} = \lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\,;$

$(\overline{a},\mu\overline{b}) = (\mu\overline{b},\overline{a}) = \mu(\overline{b},\overline{a}) = \mu(\overline{a},\overline{b})$. ■

3. $(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}) = (\overline{a_1},\overline{b}) + (\overline{a_2},\overline{b})$.

□ $(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}) = |\overline{c}||\overline{a_1}+\overline{a_2}|\cos\varphi$.

Из п. 5, б) $\Rightarrow \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$ и $\text{АЗПР}_{\overline{c}}(\overline{a}+\overline{b}) = \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a} + \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{b}$.

Тогда $(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}) = |\overline{c}|\text{АЗПР}_{\overline{c}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}) = |\overline{c}|(\text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a_1} + \text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a_2}) =$

$= |\overline{c}|\text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a_1} + |\overline{c}|\text{АЗПР}_{\overline{c}}\,\overline{a_2} = (\overline{a_1},\overline{b}) + (\overline{a_2},\overline{b})$. ■

4. Если $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

5. $(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^\circ = |\overline{a}|^2, \quad \Rightarrow |\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a},\overline{a})}$.

VI. Ортонормированный базис (ОНБ)

<u>Определение 11.</u> $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{V}^3$, если $\overline{i}\perp\overline{j},\ \overline{i}\perp\overline{k},\ \overline{j}\perp\overline{k},\ |\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$.

<u>Предложение 3.</u> Система векторов $\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$ – линейно независима.

□ 1. $\alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k} = \overline{0}; \quad |\cdot\overline{i}$

$(\alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k},\overline{i}) = (\overline{0},\overline{i}) = 0;$

$\alpha_1(\overline{i},\overline{i}) + \alpha_2(\overline{j},\overline{i}) + \alpha_3(\overline{k},\overline{i}) = 0;$

$\alpha_1|\overline{i}||\overline{i}|\cos 0^\circ + \alpha_2\cdot 0 + \alpha_3\cdot 0 = 0;$

$\Rightarrow\ \alpha_1 = 0.$

2. $\alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k} = \overline{0}; \quad |\cdot\overline{j}$

$(\alpha_1\overline{i} + \alpha_2\overline{j} + \alpha_3\overline{k},\overline{j}) = (\overline{0},\overline{j}) = 0;$

$\alpha_1(\overline{i},\overline{j}) + \alpha_2(\overline{j},\overline{j}) + \alpha_3(\overline{k},\overline{j}) = 0;$

$\alpha_1\cdot 0 + \alpha_2|\overline{j}||\overline{j}|\cos 0^\circ + \alpha_3\cdot 0 = 0;$

$\Rightarrow\ \alpha_2 = 0.$

3. $\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k}=\bar{0}; \quad |\cdot\bar{k}$

$$\left(\alpha_1\bar{i}+\alpha_2\bar{j}+\alpha_3\bar{k},\bar{k}\right)=\left(\bar{0},\bar{k}\right)=0;$$
$$\alpha_1\left(\bar{i},\bar{k}\right)+\alpha_2\left(\bar{j},\bar{k}\right)+\alpha_3\left(\bar{k},\bar{k}\right)=0;$$
$$\alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\left|\bar{k}\right|\left|\bar{k}\right|\cos 0^{\circ}=0;$$

$\Rightarrow\ \alpha_3=0.$

Таким образом, из равенства линейной комбинации нулю мы доказали, что все коэффициенты равны нулю. Значит, $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ – линейно независимая система. Аналогично доказывается утверждение для n–мерного пространства. ■

VII. Скалярное произведение в координатной форме

Пусть $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ – ортонормированный базис.

Предложение 4. Скалярное произведение двух векторов в ОНБ $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ равно сумме произведений одноименных координат.

□ Пусть $\bar{a}=\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $\bar{b}=\left(\bar{i},\bar{j},\bar{k}\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

Найдем скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на $\bar{b}$:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}\right)\left(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}\right)=$$
$$=a_1b_1\left(\bar{i},\bar{i}\right)+a_1b_2\left(\bar{i},\bar{j}\right)+a_1b_3\left(\bar{i},\bar{k}\right)+a_2b_1\left(\bar{j},\bar{i}\right)+a_2b_2\left(\bar{j},\bar{j}\right)+a_2b_3\left(\bar{j},\bar{k}\right)+$$
$$+a_3b_1\left(\bar{k},\bar{i}\right)+a_3b_3\left(\bar{k},\bar{k}\right)+a_3b_2\left(\bar{k},\bar{j}\right).$$

Так как $\left(\bar{i},\bar{j}\right)=\left(\bar{j},\bar{i}\right)=\left(\bar{i},\bar{k}\right)=\left(\bar{k},\bar{i}\right)=\left(\bar{j},\bar{k}\right)=\left(\bar{k},\bar{j}\right)=0$, и $\left(\bar{i},\bar{i}\right)=\left|\bar{i}\right|\left|\bar{i}\right|\cos 0^{\circ}=\left(\bar{j},\bar{j}\right)=\left(\bar{k},\bar{k}\right)$, то $1\cdot\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. ■

Выразим $\cos\varphi$ из скалярного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в ОНБ:

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=|\bar{a}|\left|\bar{b}\right|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$$
$$\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}|\left|\bar{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

VIII. Механический смысл скалярного произведения

В механике скалярное произведение находит применение при вычислении работы A силы $\bar{F}$ при перемещении материальной точки M из начала вектора перемещения $\bar{s}$ в его конец (рис. 22).

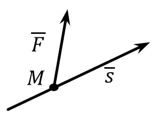


Рис. 22

IX. Ориентация базисов в пространстве

Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ и $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ – базисы в $\mathbb{V}^3$, а $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}S$, где S – матрица перехода от базиса $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ к базису $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$.

Определение 12. Если $\det S > 0$, то базисы $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ и $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \overline{g_3}\}$ называются одинаковоориентированными. Если $\det S < 0$, то базисы – разноориентированные.

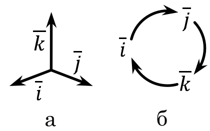


Рис. 23

Если $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ – ОНБ (рис. 23, а) и $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ – правая тройка (рис. 23, б), то

$$\overline{i} \times \overline{j} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \overline{k} = \overline{k}.$$

Аналогично, $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$; $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$; $\overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}$; $\overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}$; $\overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}$.

Предложение 5. Базисы $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\}$ и $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, где $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, одинаковоориентированы, если $\det C > 0$, где C – матрица перехода от одного базиса к другому.

□ $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$, где $\varphi = \left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$.

Пусть $\overline{n} = \overline{a} \times \overline{b} \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{a}$, $\overline{n} \perp \overline{b}$;

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{n}) = (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})C;$$

$$\det C = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det C > 0$. ■

Определение 13. $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ – правый базис, если кратчайший поворот от $\overline{i}$ к $\overline{j}$ из конца вектора $\overline{k}$ виден свершающимся против часовой стрелки.

Определение 14. $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ – левый базис, если кратчайший поворот от $\overline{i}$ к $\overline{j}$ из конца вектора $\overline{k}$ виден свершающимся по часовой стрелке.

X. Векторное произведение

<u>Определение 15.</u> Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$;
2) $\overline{c} \perp \overline{a},\ \overline{c} \perp \overline{b}$;
3) $\langle\overline{a},\overline{b},\overline{c}\rangle$ – правая тройка векторов.

а) Векторное произведение в координатной форме:

<u>Определение 15′.</u> Векторным произведением векторов $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ и $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$ называется вектор:

$$\overline{n} = \overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overline{k} =$$

$$= \left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

<u>Предложение 6.</u> $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

□ По определению 15′:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}.$$

По определению 15:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{a}||\overline{b}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} = |\overline{a}||\overline{b}|\sqrt{1 - \frac{(\overline{a},\overline{b})^2}{|\overline{a}|^2|\overline{b}|^2}} =$$

$$= \sqrt{|\overline{a}|^2|\overline{b}|^2 - (\overline{a},\overline{b})^2} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - }$$
$$\overline{-a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3} =$$
$$= \sqrt{(a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2 + (a_1b_3)^2 - 2(a_1b_3)(a_3b_1) + (a_3b_1)^2 + }$$
$$\overline{+(a_2b_3)^2 - 2(a_2b_3)(a_3b_2) + (a_3b_2)^2} = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + }$$
$$\overline{+(a_2b_3 - a_3b_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2},$$

т.е. мы доказали, что $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$. ■

Следствие. Пусть $\overline{n} = [\overline{a}; \overline{b}]$.

Найдем $[\overline{a}; \overline{n}]$, где $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$(\overline{a}, \overline{n}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a} \perp \overline{n}.$$

Аналогично и $(\overline{b}, \overline{n}) = 0 \Rightarrow \overline{b} \perp \overline{n}$.

б) Свойства векторного произведения:

1. $[\overline{b}; \overline{a}] = -[\overline{a}; \overline{b}]$.

□ $[\overline{b}; \overline{a}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -[\overline{a}; \overline{b}]$. ■

2. $\lambda[\overline{a}; \overline{b}] = [\lambda\overline{a}; \overline{b}] = [\overline{a}; \lambda\overline{b}]$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

□ $\lambda[\overline{a}; \overline{b}] = \lambda \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = [\lambda\overline{a}; \overline{b}] =$

$$= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix} = [\overline{a}; \lambda\overline{b}]. \ ■$$

3. $[\overline{a} + \overline{b}; \overline{c}] = [\overline{a}; \overline{c}] + [\overline{b}; \overline{c}]$.

□ $[\overline{a} + \overline{b}; \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

$$= [\overline{a}; \overline{c}] + [\overline{b}; \overline{c}]. \ ■$$

4. $[\overline{a}; \overline{a}] = \overline{0}$.

□ $[\overline{a}; \overline{a}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \overline{0}$. ■

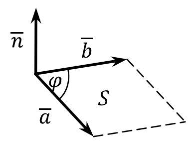


Рис. 24

5. Если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin 0^\circ = 0$.

XI. Геометрический смысл векторного произведения

Пусть $\overline{n} = [\overline{a}; \overline{b}]$, где $|\overline{n}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin \varphi = S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}$, где $S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}$ – площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 24).

XII. Механический смысл векторного произведения

Пусть $\overline{F}$ – сила, приложенная к точке M. Момент этой силы $M_A(\overline{F})$ относительно точки A равен векторному произведению $\overline{AM}$ и $\overline{F}$, т.е. $M_A(\overline{F}) = [\overline{AM};\ \overline{F}]$ (рис. 25).

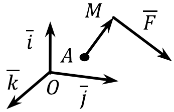


Рис. 25

XIII. Смешанное произведение векторов

<u>Определение 16.</u> Смешанным произведением трёх векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ называется число $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}; \overline{b}], \overline{c})$.

Смешанное произведение в координатной форме:

Пусть $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overline{k}.$

Тогда $\overline{c} = c_1 \overline{i} + c_2 \overline{j} + c_3 \overline{k}$.

Так как скалярное произведение в ортонормированном базисе – сумма произведений одноименных координат, то получим:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overline{i} \cdot c_1 \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{j} \cdot c_2 \overline{j} +$$
$$+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overline{k} \cdot c_3 \overline{k} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Из координатной формы смешанного произведения следует следующее равенство:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}).$$

XIV. Геометрический смысл смешанного произведения

1) Пусть $|\overline{n}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}$;

$h = |\overline{c}| \cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\overline{n}, \overline{c}})$ (рис. 26).

Тогда $V_{\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle} = S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle} \cdot h = |\overline{n}||\overline{c}| \cos\varphi = (\overline{n}, \overline{c}) =$

$= (\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

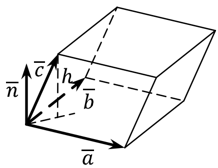


Рис. 26

Причем $\left.\begin{array}{l} (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = V_{\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle}, \quad \text{если } \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V_{\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle}, \quad \text{если } \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right] \end{array}\right\} \Rightarrow V_{\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle} = |(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})|.$

Таким образом, объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов.

2) Найдем объем пирамиды, натянутой на векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (рис. 27):

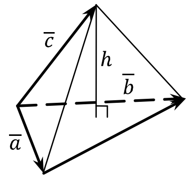


Рис. 27

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{1}{2} S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle} \cdot h = \frac{1}{6} \left| \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \right) \right|.$$

Таким образом, объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ смешанного произведения этих векторов.

11. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Определение 1. Любой вектор, параллельный прямой (плоскости), называется направляющим вектором этой прямой (плоскости).

Определение 2. Любой вектор, перпендикулярный прямой (плоскости) называется вектором нормали этой прямой (плоскости).

I. Уравнение прямой

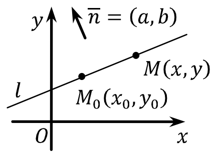


Рис. 28

1. Дано: $M_0(x_0, y_0) \in l$;
   $\overline{n} = (a, b)$ – вектор нормали прямой l $(\overline{n} \perp l)$.

Найти: уравнение прямой l.

Решение (рис. 28)

Если $M(x, y) \in l$, то $\overline{M_0M} \parallel l$, где $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$,

$\Rightarrow$ $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$ $\Rightarrow$ $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$\Rightarrow$ $ax + by + c = 0$, где $c = -ax_0 - by_0$ – общее уравнение прямой.

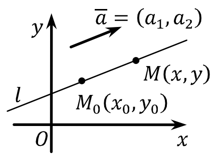


Рис. 29

2. Дано: $M_0(x_0, y_0) \in l$; $\overline{a} = (a_1, a_2)$ – направляющий вектор прямой l $(\overline{a} \parallel l)$.

Найти: уравнение прямой l.

Решение (рис. 29)

Если $M(x, y) \in l$, то $\overline{M_0M} \parallel l$ $\Rightarrow \overline{M_0M} \parallel \overline{a}$

$\Rightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\overline{M_0M} = \lambda \overline{a}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_1, \\ y - y_0 = \lambda a_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1, \\ y = y_0 + \lambda a_2; \end{cases} \text{ – параметрическое уравнение прямой } l.$$

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \text{ – каноническое уравнение прямой } l.$$

3. Дано: $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор.

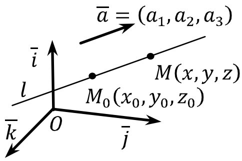


Рис. 30

Найти: уравнение прямой l:

$M_0 \in l$ и $(\overline{a} \parallel l)$, где $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Решение (рис. 30)

$$\left.\begin{matrix} M_0 \in l \\ M(x, y, z) \in l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overline{M_0 M} \parallel l \\ \overline{a} \parallel l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{M_0 M} \parallel \overline{a} \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} : \overline{M_0 M} = t\overline{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = a_1 t, \\ y - y_0 = a_2 t, \\ z - z_0 = a_3 t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t; \end{cases}$$ – параметрическое уравнение прямой.

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$ – каноническое уравнение прямой.

II. Уравнение плоскости

1. Дано: $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$.

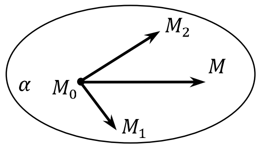


рис. 31

Найти: уравнение плоскости α: $M_0, M_1, M_2 \in \alpha$.

Решение (рис. 31)

Если $M(x, y, z) \in \alpha$, то векторы $\overline{M_0 M}, \overline{M_0 M_1}, \overline{M_0 M_2}$ – компланарны, т.е. они лежат в одной плоскости.

$\Rightarrow$ $(\overline{M_0 M}, \overline{M_0 M_1}, \overline{M_0 M_2}) = 0$, так как три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

$\overline{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,

$\overline{M_0 M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$,

$\overline{M_0 M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$,

$$\Rightarrow (\overline{M_0 M}, \overline{M_0 M_1}, \overline{M_0 M_2}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$ – уравнение плоскости α.

2. Дано: $\overline{n} = (a, b, c)$ – вектор нормали плоскости α,

точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

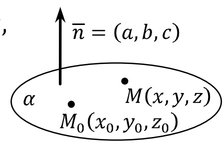


Рис. 32

Найти: уравнение плоскости α: $M_0 \in \alpha, \overline{n} \perp \alpha$.

Решение (рис. 32)

Если $M \in \alpha$, то $\begin{pmatrix} \overline{M_0 M} \parallel \alpha \\ \overline{n} \perp \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{M_0 M} \perp \overline{n} \Rightarrow \left(\overline{n}, \overline{M_0 M}\right) = 0$ или в скалярной форме $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, т.е. искомое уравнение плоскости: $ax + by + cz + d = 0$, где $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

3. Дано: $M_0(x_0, y_0, z_0), \overline{a} = (a_1, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

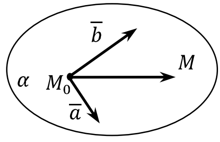


Рис. 33

Найти: уравнение плоскости

$\alpha: \overline{a} \parallel \alpha,\ \overline{b} \parallel \alpha,\ M_0 \in \alpha$.

Решение (рис. 33)

Если $M(x, y, z) \in \alpha$, то $\overline{M_0M}, \overline{a}, \overline{b}$ – компланарны $\Rightarrow \left(\overline{M_0M}, \overline{a}, \overline{b}\right) = 0$.

$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\Rightarrow \left(\overline{M_0M}, \overline{a}, \overline{b}\right) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ – уравнение плоскости } \alpha.$$

III. Расстояние от точки до прямой и плоскости

1. Расстояние от точки до прямой на плоскости (рис. 34)

Дано: $l: ax + by + c = 0$; $M_0(x_0, y_0) \notin l$.

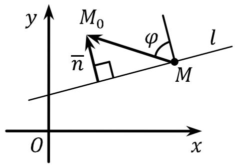


Рис. 34

Найти: $\rho(M_0, l)$ – расстояние от точки M_0 до прямой l.

Решение

Пусть $M(x_1, y_1) \in l$, т.е. $ax_1 + by_1 + c = 0$.

$$\rho(M_0, l) = |\overline{MM_0}||\cos\varphi| = \frac{|\overline{MM_0}||\overline{n}||\cos\varphi|}{|\overline{n}|} = \frac{\left||\overline{MM_0}||\overline{n}|\cos\varphi\right|}{|\overline{n}|} = \frac{|(\overline{MM_0}, \overline{n})|}{|\overline{n}|},$$

где $\varphi = \left(\widehat{\overline{MM_0}, \overline{n}}\right)$.

Так как $\overline{MM_0} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$, $\overline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, то

$$(\overline{MM_0}, \overline{n}) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$
$$= ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1 = ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1) =$$
$$= ax_0 + by_0 + c - \underbrace{(ax_1 + by_1 + c)}_{= 0} = ax_0 + by_0 + c.$$

$$|\overline{n}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \rho(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Расстояние между скрещивающимися прямыми (рис. 35)

Дано: $M_2(x_2, y_2, z_2) \notin \alpha$.

Найти: $\rho(M_2, \alpha)$.

Решение

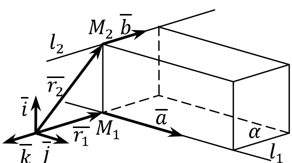


Рис. 35

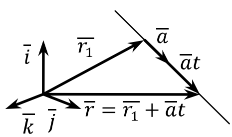


Рис. 36

Пусть $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$,

$\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$;

$l_1: \overline{r} = \overline{r_1} + \overline{a}t$ – уравнение прямой в векторном виде (рис. 36), где $\overline{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$; $l_2: \overline{r} = \overline{r_2} + \overline{b}t$, где $\overline{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$.

Найдем расстояние от точки до плоскости, разделив объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\overline{a}, \overline{b}, (\overline{r_2} - \overline{r_1})$, на площадь основания:

$$\rho(M_2, \alpha) = h = \frac{V_{\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{r_2} - \overline{r_1} \rangle}}{S_{\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle}} = \frac{\left|\left(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a}, \overline{b}\right)\right|}{\left|\left(\overline{a} \times \overline{b}\right)\right|};$$

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overline{k};$$

$$\overline{r_2} - \overline{r_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\Rightarrow \ \rho(M_2, \alpha) = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

3. Расстояние от точки до плоскости (рис. 37)

Дано: $\alpha: ax + by + cz + d = 0$,

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $M_0 \notin \alpha$.

Найти: $\rho(M_0, \alpha)$ – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α.

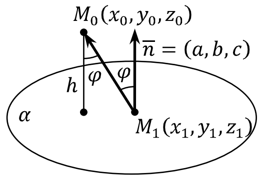


Рис. 37

Решение

$$h = \left|\overline{M_1M_0}\right| |\cos\varphi| = \frac{\left|\overline{M_1M_0}\right| |\overline{n}| |\cos\varphi|}{|\overline{n}|} = \frac{\left|\left(\overline{n}, \overline{M_1M_0}\right)\right|}{|\overline{n}|}, \text{ где}$$

$\overline{n} = (a, b, c)$, $\overline{n} \perp \alpha$.

Перемножим $\left(\overline{n}, \overline{M_1M_0}\right)$ в координатной форме:

если $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$, то $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \overline{M_1M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \\ \overline{n} = (a, b, c) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overline{M_1M_0}, \overline{n}\right) = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) =$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 + d - \underbrace{(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)}_{=0} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d;$$

$$\Rightarrow h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\overline{n}|} = \rho(M_0, \alpha).$$

IV. Уравнение линии пересечения двух плоскостей

Такое уравнение можно задавать двумя способами:

а) системой уравнений:

$$\begin{cases} \alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0; \end{cases} \quad (*)$$

б) канонически (рис. 38):

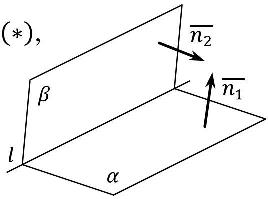


рис. 38

Дано: плоскости α, β, заданные уравнениями $(*)$,

$\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$, – вектор нормали α,

$\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, – вектор нормали β,

$l = \alpha \cap \beta$ – прямая пересечения α и β.

Найти: каноническое уравнение прямой l.

Решение

$$l = \alpha \cap \beta \Rightarrow (l \in \alpha) \wedge (l \in \beta).$$

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} l \in \alpha \\ \overline{n_1} \perp \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow\ l \perp \overline{n_1} \\ \begin{pmatrix} l \in \beta \\ \overline{n_2} \perp \beta \end{pmatrix} \Rightarrow\ l \perp \overline{n_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ l \parallel [\overline{n_1}; \overline{n_2}].$$

Пусть $\overline{n} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$ – направляющий вектор прямой l. Если (x_0, y_0, z_0) – одно из решений системы $(*)$ и $\overline{n} = (a, b, c)$, то

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ – каноническое уравнение линии пересечения двух плоскостей, заданных системой $(*)$.

V. Углы в пространстве

1. Угол между прямой и плоскостью (рис. 39)

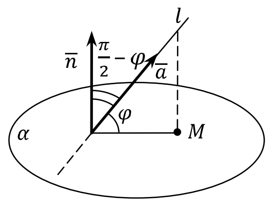


рис. 39

Дано: $\alpha: ax + by + cz + d = 0$;

$l: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}$;

$\overline{n} = (a, b, c)$ – вектор нормали плоскости α.

Найти: $\varphi = (\widehat{l, \alpha})$.

Решение

Пусть $\overline{a} \parallel l$. Тогда $\overline{a} = (m, n, k)$ – направляющий вектор l.

$$(\overline{n}, \overline{a}) = |\overline{n}||\overline{a}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Rightarrow \sin\varphi = \frac{(\overline{n}, \overline{a})}{|\overline{n}||\overline{a}|} =$$

$$= \frac{am + bn + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}}.$$

2. Угол между двумя плоскостями (рис. 40)

Дано: $\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$

$\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0;$

$\overline{n_1}, \overline{n_2}$ – векторы нормалей плоскостей α_1, α_2.

Найти: $\varphi = \left(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}}\right)$.

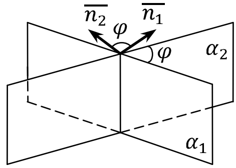


Рис. 40

Решение

$\overline{n_1} = (a_1, b_1, c_1),\ \ \overline{n}_1 \perp \alpha_1;$

$\overline{n_2} = (a_2, b_2, c_2),\ \ \overline{n}_2 \perp \alpha_2.$

Из $(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = |\overline{n_1}||\overline{n_2}|\cos\varphi$, где $\varphi = \left(\widehat{\overline{n_1}, \overline{n_2}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

12. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Оператор поворота

Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – ОНБ в $\mathbb{V}^2$ (рис. 41).

Рассмотрим $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$, где φ – оператор отображения, который вектору ставит вектор, повернутый на угол α.

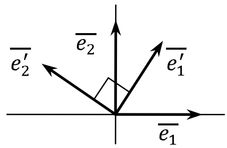


Рис. 41

Пусть векторы $\overline{e_1'} = \varphi(\overline{e_1}), \overline{e_2'} = \varphi(\overline{e_2})$. Разложим их по базису $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$:

$$\overline{e_1'} = \cos\alpha\ \overline{e_1} + \sin\alpha\,\overline{e_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix};$$

$$\overline{e_2'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\overline{e_1} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\overline{e_2} = -\sin\alpha\,\overline{e_1} + \cos\alpha\,\overline{e_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Тогда $\left(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}\right) = \left(\varphi(\overline{e_1}), \varphi(\overline{e_2})\right) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, где

$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора.

II. Ортогональная матрица

<u>Определение 1.</u> Квадратная матрица C называется ортогональной, если $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$.

Найдем определитель ортогональной матрицы:

$$CC^{\mathrm{T}} = CC^{-1} = E\ \ \Rightarrow \det(CC^{\mathrm{T}}) = \det E\ \ \Rightarrow \det C \det C^{\mathrm{T}} = 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \det^2 C = 1\ \Rightarrow\ \left[\begin{aligned}&\det C = 1,\\ &\det C = -1.\end{aligned}\right.$$

Теорема 1. Матрица ортогональна тогда и только тогда, когда она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ.

□ Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$ – ОНБ в $\mathbb{V}^2$, т.е. $|\overline{e_1}| = |\overline{e_2}| = |\overline{g_1}| = |\overline{g_2}| = 1$ и $\overline{e_1} \perp \overline{e_2}$, $\overline{g_1} \perp \overline{g_2}$.

Пусть $(\overline{g_1}, \overline{g_2}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$;

$\overline{g_1} = c_{11}\overline{e_1} + c_{21}\overline{e_2}$;

$(\overline{g_1}, \overline{g_1}) = 1 \Rightarrow c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1.$

$\overline{g_2} = c_{12}\overline{e_1} + c_{22}\overline{e_2}$;

$(\overline{g_2}, \overline{g_2}) = 1 \Rightarrow c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1.$

$\overline{g_1} \perp \overline{g_2} \Rightarrow (\overline{g_1}, \overline{g_2}) = 0 \Rightarrow c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$;

$(\overline{g_2}, \overline{g_1}) = 0 \Rightarrow c_{12}c_{11} + c_{22}c_{21} = 0.$

Рассмотрим произведение матриц C и C^{T}:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix};$$

$$C^{\mathrm{T}}C = \begin{pmatrix} c_{11}^2 + c_{21}^2 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} \\ c_{12}c_{11} + c_{22}c_{21} & c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} C^{\mathrm{T}}C = E \\ C^{-1}C = E \end{pmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}} = C^{-1} \Rightarrow C \text{ – ортогональна. } \blacksquare$$

III. Симметрическая матрица

Определение 2. Матрица называется симметрической, если $A = A^{\mathrm{T}}$, где A – матрица линейного оператора φ.

Определение 3. Линейный оператор φ называется симметрическим, если хотя бы в одном базисе матрица линейного оператора симметрическая, т.е. $\varphi\colon \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ – симметрический, если $\exists\, \{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$: $A = A^{\mathrm{T}}$, где A – матрица $\varphi\colon \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ в базисе $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$.

Предложение 1. Если линейный оператор хотя бы в одном ОНБ имеет симметрическую матрицу, то в любом другом ОНБ он будет её иметь.

□ Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$ – ОНБ в $\mathbb{V}^2$, $(\overline{g_1}, \overline{g_2}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})C \Rightarrow C^{-1} = C^{\mathrm{T}}$

Пусть B – матрица $\varphi\colon \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ в базисе $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$. Тогда $B = C^{-1}AC$.

Докажем, что $B^{\mathrm{T}} = B$.

$$B^{\mathrm{T}} = (C^{-1}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{-1})^{\mathrm{T}} = C^{-1}A(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{-1}AC = B. \ \blacksquare$$

Предложение 2. Если $\varphi\colon \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ – симметрический, то

$$\big(\overline{x}, \varphi(\overline{y})\big) = \big(\overline{y}, \varphi(\overline{x})\big).$$

$\square$ $\overline{x} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})X$; $\overline{y} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})Y$;

$\varphi(\overline{x}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})AX$; $\varphi(\overline{y}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})AY$;

$\big(\overline{x}, \varphi(\overline{y})\big) = X^{\mathrm{T}}AY$; $\big(\overline{y}, \varphi(\overline{x})\big) = Y^{\mathrm{T}}AX$;

$\big(\overline{x}, \varphi(\overline{y})\big) = X^{\mathrm{T}}AY = (X^{\mathrm{T}}AY)^{\mathrm{T}} = Y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = Y^{\mathrm{T}}AX = \big(\overline{y}, \varphi(\overline{x})\big)$. ■

Предложение 3. Если $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\varphi(\overline{x}) = \lambda_1\overline{x}$, $\varphi(\overline{y}) = \lambda_2\overline{y}$, то $\overline{x} \perp \overline{y}$.

$\square$ $\big(\overline{x}, \varphi(\overline{y})\big) = (\overline{x}, \lambda_2\overline{y}) = \lambda_2(\overline{x}, \overline{y})$;

$\big(\overline{y}, \varphi(\overline{x})\big) = (\overline{y}, \lambda_1\overline{x}) = \lambda_1(\overline{x}, \overline{y})$.

По предложению 2 $\big(\overline{x}, \varphi(\overline{y})\big) = \big(\overline{y}, \varphi(\overline{x})\big)$;

$\Rightarrow \lambda_1(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda_2(\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, но $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Rightarrow \overline{x} \perp \overline{y}$. ■

Предложение 4. В базисе $\{\overline{x}, \overline{y}\}$, где $\overline{x} \perp \overline{y}$, матрица $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ имеет диагональный вид, на главной диагонали которой находятся собственные значения симметрического линейного оператора φ.

$\square$ $\varphi(\overline{x}) = \lambda_1\overline{x} = \lambda_1\overline{x} + 0 \cdot \overline{y} = (\overline{x}, \overline{y})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\varphi(\overline{y}) = \lambda_2\overline{y} = 0 \cdot \overline{x} + \lambda_2\overline{y} = (\overline{x}, \overline{y})\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$;

$\Rightarrow \big(\varphi(\overline{x}), \varphi(\overline{y})\big) = (\overline{x}, \overline{y})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. ■

Найдем собственное значение λ симметрического линейного оператора $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ в ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ пространства $\mathbb{V}^2$.

Пусть $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где $a_{12} = a_{21}$.

Решим уравнение $\det\big(A_\varphi - \lambda E\big) = 0$;

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0;$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Так как $a_{12} = a_{21}$, то характеристический многочлен примет вид:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0;$$

$$d = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) =$$

$$= a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

1. Если $d > 0$, то $\exists\, \lambda_1 \neq \lambda_2$, где λ_1, λ_2 – корни уравнения $\det\big(A_\varphi - \lambda E\big) = 0$ и λ_1, λ_2 – собственные значения линейного опера-

тора $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$. Этим значениям отвечают собственные векторы, которые взаимно-ортогональны и образуют базис в $\mathbb{V}^2$, и в этом базисе по предложению 4 матрица линейного оператора будет диагональной, а на диагонали расположены λ_1 и λ_2.

2. Если $d = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$;

$$\left.\begin{matrix} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = a_{21} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

В этом случае симметрический линейный оператор $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ – оператор подобия растяжения или сжатия.

IV. Квадратичная форма

Определение 4. $\Phi(x_1; x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ – квадратичная форма переменных x_1, x_2, где $a_{12} = a_{21}$

$$\Rightarrow x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) =$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $\Phi(x_1, x_2)$.

1. Применим наше определение для точки M.

Пусть $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – ОНБ;

$\{0, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – аффинная система координат в $\mathbb{V}^2$.

Тогда $\forall M \ \exists \overline{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, т.е. $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(\overline{OM}) = X^{\mathrm{T}}AX$, т.е. функция $\Phi: \mathbb{V}^2 \ni \overline{OM} \longmapsto X^{\mathrm{T}}AX \in \mathbb{R}$, т.е. квадратичная форма – функция, ставящая в соответствие каждой точке выражение вида $X^{\mathrm{T}}AX$.

2. Найдем матрицу перехода квадратичной формы точки M от ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ к ОНБ $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$, где $(\overline{g_1}, \overline{g_2}) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})C$, причем $C^T = C^{-1}$, т.е. C – ортогональная.

По определению квадратичной формы:

$\overline{OM} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})X = (\overline{g_1}, \overline{g_2})X' = (\overline{e_1}, \overline{e_2})CX' \ \Rightarrow X = CX'$, где

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$.

Рассмотрим квадратичную форму точки M:

$\Phi(\overline{OM}) = X^{\mathrm{T}}AX = (CX')^{\mathrm{T}}A(CX') = (X')^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACX' = (X')^{\mathrm{T}}BX'$, где

A – матрица $\Phi(\overline{OM})$ в ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$;

$B = C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC$, т.к. $C^{\mathrm{T}} = C^{-1}$, – матрица $\Phi(\overline{OM})$ в ОНБ $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$.

3. Рассмотрим матрицу перехода симметрического оператора от ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ к ОНБ $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$.

Если A – матрица $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ в ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$, где $A = A^T$, то $B_1 = C^{-1}AC$ – матрица $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$ в ОНБ $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}\}$, причем $B_1 = C^{-1}AC = C^TAC = B$, так как $C^T = C^{-1}$.

Таким образом, из п. 2 следует, что матрицы квадратичных форм и матрицы симметрических линейных операторов при переходе от одного ОНБ к другому ОНБ преобразуются одинаковым способом. Привести квадратичную форму к каноническому виду это значит перейти к такому ОНБ, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид.

Таким образом, мы получили способ приведения квадратичной формы к каноническому виду. Для этого рассматриваем симметрический линейный оператор, имеющий такую же матрицу, что и квадратичная форма. Для этого линейного оператора ищем собственные векторы и собственные значения. Как показано выше, существует ОНБ из собственных векторов, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Следовательно, при переходе к этому базису, матрица квадратичной формы принимает канонический вид. Такой метод привидения к каноническому виду называется методом ортогональных преобразований.

Замечание

$\Phi: \mathbb{V}^2 \ni \overline{OM} \longmapsto X^TAX \in \mathbb{R}$, т.е. $\Phi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$, т.е. Φ ставит в соответствие вектору число, а $\varphi: \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^2$, т.е. φ ставит в соответствие вектору вектор.

V. Приведение к каноническому виду (II способ)

(1) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ – общее уравнение кривых второго порядка в ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$.

Сведем уравнение (1) к виду: $A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0$.

1. Пусть $\left\{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}\right\}$ – ОНБ.

$\left\{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}\right\}$ получен из ОНБ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ путем поворота на угол α (рис. 41).

По п. I $\left(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}\right) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Выразим координаты вектора $\bar{x}=(x,y)$ в ОНБ $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$ через координаты в ОНБ $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ и матрицу перехода от $\{\overline{e_1},\dots,\overline{e_n}\}$ к $\{\overline{g_1},\dots,\overline{g_n}\}$:

$$\bar{x}=(\overline{e_1},\overline{e_2})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left(\overline{e_1'},\overline{e_2'}\right)\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=(\overline{e_1},\overline{e_2})\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=$$

$$=(\overline{e_1},\overline{e_2})\begin{pmatrix}\cos\alpha\, x' & -\sin\alpha\, y'\\ \sin\alpha\, x' & \cos\alpha\, y'\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\,,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\,.\end{cases}\quad(*)$$

Подставив систему $(*)$ в уравнение (1) и приведя подобные члены, получим новое уравнение:

$$A'{x'}^2+2B'x'y'+C'{y'}^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

Найдем значение угла α, при котором коэффициент $B'=0$:

$Ax^2=A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2=\dots-2\cos\alpha\sin\alpha\, Ax'y'=\dots-\sin 2\alpha\, Ax'y'$;
$Cy^2=C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2=\dots+2\sin\alpha\cos\alpha\, Cx'y'=\dots+\sin 2\alpha\, Cx'y'$;
$2Bxy=2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)=\dots+2B(\cos^2\alpha-$
$-\sin^2\alpha)x'y'=\dots+2B\cos 2\alpha\, x'y'$;
$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\dots=[(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha]x'y'+\dots$.

Таким образом, найдем угол α, при котором:

$$(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha=0;$$
$$(A-C)\sin 2\alpha=2B\cos 2\alpha\,;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C},$$

т.е. при повороте на такой угол коэффициент при $x'y'$ обнулится.

Таким образом, мы получаем уравнение:

$$A'{x'}^2+C'{y'}^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

2. Рассмотрим аффинную систему координат $\left\{O,\overline{e_1'},\overline{e_2'}\right\}$ с началом в точке $O_0(x_0,y_0)$. Для этого выделим полные квадраты в последнем уравнении, таким образом, мы совершим параллельный перенос относительно осей абсцисс и ординат.

Если $A'\neq 0$, то выделим полный квадрат относительно x':

$$A'{x'}^2+D'x'=A'\left((x')^2+\frac{D'}{A'}x'\right)=A'\left((x')^2+2x'\frac{D'}{2A'}+\frac{{D'}^2}{4{A'}^2}-\frac{{D'}^2}{4{A'}^2}\right)=$$

$$=A'\left(\left(x'+\frac{D'}{2A'}\right)^2-\frac{{D'}^2}{4{A'}^2}\right)=A'\left(x'+\frac{D'}{2A'}\right)^2-\frac{{D'}^2}{4A'}=A'{x''}^2-\frac{{D'}^2}{4A'}.$$

Если $C'\neq 0$, то выделим полный квадрат относительно y':

$$C'{y'}^2+E'y'=C'\left((y')^2+\frac{E'}{C'}y'\right)=C'\left((y')^2+2y'\frac{E'}{2C'}+\frac{{E'}^2}{4{C'}^2}-\frac{{E'}^2}{4{C'}^2}\right)=$$

$$= C'\left(\left(y' + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \frac{E'^2}{4C'^2}\right) = C'\left(y' + \frac{E'}{2C'}\right)^2 - \frac{E'^2}{4C'} = C'y''^2 - \frac{E'^2}{4C'}.$$

Таким образом, наше уравнение примет вид:

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0, \text{где } F'' = F' - \frac{D'^2}{4A'} - \frac{E'^2}{4C'}.$$

Примечание. Рассмотрим параллельный перенос (рис. 42).
Пусть $\{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{O_0, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – аффинные системы координат. Получим зависимость координат этих аффинных систем.
Пусть $\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{r'}$.

$$\Rightarrow\ (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (\overline{e_1}, \overline{e_2})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' + \dfrac{D'}{2A'}, \\ y'' = y' + \dfrac{E'}{2C'}. \end{cases}$$

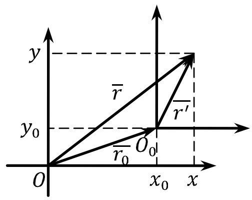


Рис. 42

VI. Модуль числа

Определение 5. Абсолютной величиной (модулем) числа a называется максимум из самого числа a и ему противоположного по знаку, т.е. $|a| = \max\{a; -a\}$.

Определение 5'. Модулем числа a называется само число a, если a – положительно, и число $-a$, если a – отрицательно, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример.

$|7| = \max\{7; -7\} = 7;$

$|-5| = \max\{-5; -(-5)\} = 5.$

Свойства модуля

1. $|-a| = |a|,\ \forall\, a \in \mathbb{R}.$

□ $|-a| = \max\{-a; -(-a)\} = \max\{-a; a\} = |a|$. ■

2. $|a + b| \leq |a| + |b|,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$

□ $+\begin{array}{l} a \leq |a| \\ b \leq |b| \\ \hline a + b \leq |a| + |b| \end{array} \qquad +\begin{array}{l} -a \leq |a| \\ -b \leq |b| \\ \hline -(a + b) \leq |a| + |b| \end{array}$

$\Rightarrow \max\{a + b; -(a + b)\} \leq |a| + |b|$. ■

3. $\big||a|-|b|\big| \le |a+b|,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$

□ С одной стороны, по свойству 2:

$|a| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b|$, перенесем $|b|$ в левую часть:

$|a| - |b| \le |a-b|$.

С другой – по свойству 2:

$|b| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a|$, перенесем $|a|$ в левую часть, учитывая свойство 1, получаем:

$-(|a|-|b|) \le |a-b|$;

т.е. $\begin{cases} |a|-|b| \le |a-b|, \\ -(|a|-|b|) \le |a-b|; \end{cases}$ $(*)$

$\Rightarrow \max\{|a|-|b|; -(|a|-|b|)\} \le |a-b|$,

т.е. $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$.

Пусть $b = -b$, тогда $\big||a|-|-b|\big| \le |a-(-b)|$,

$\big||a|-|b|\big| \le |a+b|$. ■

4. Пусть $|a| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

а) Необходимость. Докажем, что если $|a| < \varepsilon$, то $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

$|a| < \varepsilon$, т.е. по определению,

$\Rightarrow \begin{cases} a < \varepsilon, \\ -a < \varepsilon; \ \ | \cdot (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} a < \varepsilon, \\ a > -\varepsilon; \end{cases}$

т.е. $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

б) Достаточность. Докажем, что если $-\varepsilon < a < \varepsilon$, то $|a| < \varepsilon$.

$-\varepsilon < a < \varepsilon$

$\Rightarrow \begin{cases} -\varepsilon < a, \big| \cdot (-1) \\ a < \varepsilon; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon > -a, \\ a < \varepsilon; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a < \varepsilon, \\ a < \varepsilon; \end{cases} \Rightarrow \max\{a; -a\} < \varepsilon \Rightarrow |a| < \varepsilon,$

т.е. $|a| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon < a < \varepsilon$.

VII. Эллипс

Пусть F_1 и F_2 – две произвольные точки на плоскости.

<u>Определение 6.</u> Эллипс – такое геометрическое место точек M плоскости, что $\rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a$, где $a > 0$ и $a > \rho(F_1, F_2) = 2c$, а F_1 и F_2 – его фокусы (рис. 43).

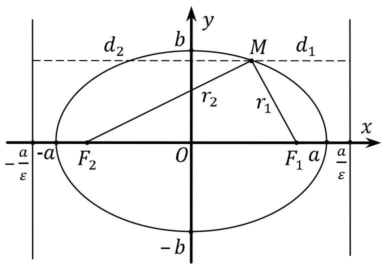


Рис. 43

1. Найдем каноническое уравнение эллипса:

$$\rho(M,F_1)=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2};\quad \rho(M,F_2)=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2};$$

$$\rho(M,F_1)+\rho(M,F_2)=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2;$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx;$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2);$$

$b^2=a^2-c^2>0$, т.к. $a>2c$;

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2;\ |:a^2b^2$$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса.

2. Проверка (так как два раза возводили в квадрат, то могли приобрести посторонние точки): докажем, что точка M лежит на эллипсе, т.е. докажем, что

$$\forall\, M(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\text{где } a^2-b^2=c^2\to\ \rho(M,F_1)+\rho(M,F_2)=2a.$$

Из канонического уравнения эллипса следует, что

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\quad\Rightarrow\ y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Оценим x:

$$0\le\frac{y^2}{b^2}\ \left|+\frac{x^2}{a^2}\right.\quad\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1\ \left|\cdot a^2\right.\quad\Rightarrow\ x^2\le a^2;$$

$\Rightarrow\ |x|\le a\ \ \Rightarrow -a\le x\le a$ (по свойству 5 модуля).

Оценим y:

$$0\le\frac{x^2}{a^2}\ \left|+\frac{y^2}{b^2}\right.\quad\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$\frac{y^2}{b^2}\le 1\ \left|\cdot b^2\right.\quad\Rightarrow\ y^2\le b^2;$$

$\Rightarrow\ |y|\le b\ \ \Rightarrow -b\le y\le b.$

Найдем расстояние от точки M до F_1:

$$\rho(M, F_1) = \sqrt{(x+c)^{\,2} + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2cx + c^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + \underbrace{c^2 + b^2}_{a^2}} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} =$$

$= \left|a + \frac{c}{a}x\right| = a + \frac{c}{a}x$, так как $\frac{c}{a}x$ по величине не превосходит a, т. к.

$\big||x| - |y|\big| \le |y + x|$ по свойству модуля 3, тогда

$\left|a + \frac{c}{a}x\right| \ge \left||a| - \left|\frac{c}{a}x\right|\right|$;

$\left|\frac{c}{a}x\right| = \frac{c}{a}|x| \le \frac{c}{a} \cdot a = c < a$;

$|a| - \left|\frac{c}{a}x\right| \ge 0.$

Аналогично $\rho(M, F_2) = a - \frac{c}{a}x$.

Тогда $\rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a$.

Таким образом, мы доказали, что посторонних точек нет.

Определение 7. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса (мерой выпуклости). В общем случае $0 \le \varepsilon \le 1$.

Определение 8. Прямые $d_{1,2}: x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса, причем $d_{1,2} \perp O_x$.

VIII. Гипербола

Пусть F_1 и F_2 – две произвольные точки на плоскости.

Определение 9. Гипербола – такое геометрическое место точек M на плоскости, что $\left|\left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_2}\right|\right| = |r_1 - r_2| = 2a$, где r_1 и r_2 – фокальные радиусы, точки F_1 и F_2 – фокусы гиперболы (рис. 44).

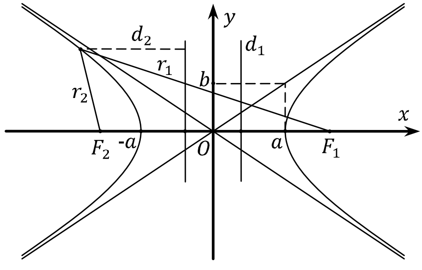


Рис. 44

Найдем каноническое уравнение гиперболы:

$$r_1 = |\overline{MF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad r_2 = |\overline{MF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению $|r_1 - r_2| = 2a \Rightarrow 2c > 2a \Rightarrow c > a > 0$.

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow r_1 = \pm 2a + r_2;$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$\mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Разделим на 4 и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $c > 0$, то $a^2 - c^2 = -b^2$:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Разделим обе части уравнения на $-a^2b^2$:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы.

Определение 10. Оси O_x и O_y называются действительной и мнимой осями гиперболы.

Определение 11. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы (мера сплюснутости ветвей), где $1 < \varepsilon < \infty$.

Определение 12. Прямые $d_{1,2}: x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами гиперболы, причем $d_{1,2} \perp O_x$.

IX. Парабола

Пусть F – произвольная точка на плоскости.

Определение 13. Парабола – такое геометрическое место точек M на плоскости, что $\rho(M, l) = \rho(M, F)$, где F – фокус параболы (рис. 45).

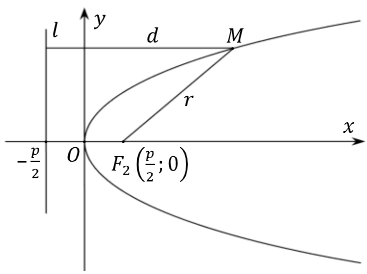


Рис. 45

Найдем каноническое уравнение параболы:

$$\rho(M,l)=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|;$$

$$\rho(M,F)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}.$$

По определению параболы $\rho(M,l)=\rho(M,F)$. Тогда

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2};$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2;$$

$$x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}=x^2-2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}+y^2;$$

$4x\dfrac{p}{2}=y^2$ или $y^2=2px-$ каноническое уравнение параболы.

<u>Определение 14.</u> Прямая $d\colon x=-\dfrac{p}{2}$ – директриса параболы.