Абрам Леонидович Зельманов

ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

О деформации и кривизне
СОПУТСТВУЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА
(1944)

Это издание на русском языке подготовлено
на основе книги:
Abraham Zelmanov. Chronometric Invariants.
Am. Res. Press, Rehoboth, 2006

Под редакцией
Дмитрия Рабунского и Стивена Дж. Крозерса

Технический редактор и корректура:
Лариса Борисова

2006

American Research Press
Rehoboth, New Mexico, USA

Originally written in Russian by Abraham Zelmanov, 1944. Translated into English and edited by Dmitri Rabounski and Stephen J. Crothers, 2006. Please send all comments on the book to the Editors: rabounski@yahoo.com; thenarmis@yahoo.com

Cover photos: deep sky images courtesy of the Hubble Space Telescope Science Institute (STScI) and NASA (public domain product in accordance with the general public license; see http://hubblesite.org/copyright for details). We are thankful to STScI and NASA for the images.

This book was typeset using BaKoMa-TEX typesetting system

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand, ProQuest Information and Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road, P. O. Box 1346, Ann Arbor, MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/

This book can be ordered on-line from:

Publishing Online, Co. (Seattle, Washington State)
http://PublishingOnline.com

Many books can be downloaded for free from the Digital Library of Science at the Gallup branch of the University of New Mexico:

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

Many papers can be downloaded for free from the online version of the quarterly issue American journal, Progress in Physics:

http://www.ptep-online.com; http://www.geocities.com/ptep_online

This book has been peer reviewed and recommended for publication by:

Prof. Florentin Smarandache, Department of Mathematics and Sciences, University of New Mexico, 200 College Road, Gallup, NM 87301, USA
Prof. Jeremy Dunning-Davies, Department of Physics, University of Hull, Hull HU6 7RX, England

ISBN: 1-59973-012-X (the publication in Russian language)

American Research Press, Box 141, Rehoboth, NM 87322, USA
Standard Address Number: 297-5092
Printed in the United States of America

Оглавление

Глава 2

Математические средства

Глава 3

Релятивистские физические уравнения

Глава 4

Некоторые космологические следствия

Предисловие редактора

А. Л. Зельманов в 1940-е годы

Абрам Леонидович Зельманов родился 15 мая 1913 года (по новому стилю) в Полтавской Губернии Российской Империи. Его отец был известным ученым-иудаистом, специалистом по комментариям к Торе и Каббале. В 1937 году Зельманов окончил механико-математический факультет Московского Государственного Университета, после чего поступил в аспирантуру Государственного Астрономического Института им. Штернберга, где в 1944 году защитил диссертацию. В 1953 году он был арестован по обвинению в "космополитизме" в рамках Сталинской кампании против евреев, но через несколько месяцев Сталин умер и Зельманова выпустили на свободу. Жил Абрам Леонидович в коммунальной квартире, ухаживая за своими парализованными родителями, которые благодаря ему дожили до глубокой старости. Только в последние годы он получил отдельную квартиру. Был трижды женат. Практически всю свою жизнь Абрам Леонидович Зельманов проработал научным сотрудником в Государственном Астрономическом Институте им. Штернберга Московского Университета вплоть до своей смерти 2 февраля 1987 года.

Внешне многим казалось, что жизнь и мысли этого невысокого, худого, как индусский факир, вежливого со всеми человека протекали очень ровно и не представляли ничего интересного. Но при беседах с ним на научные темы сразу возникало совсем другое впечатление. Это были беседы с необыкновенным ученым и человеком, который мыслил совершенно особыми категориями. Порой по стилю разговора казалось, что эти беседы происходили не во второй половине XX века, а в Древней Греции или в раннем Средневековье. И темы были поистине вечными — как устроен Мир, что такое человек во Вселенной, что такое пространство и время.

Абрам Леонидович любил повторять, что изготавливать "инструменты" ему нравится гораздо больше, чем использовать готовый "инструмент" для получения результатов. Наверное поэтому его основным вкладом в науку является математический аппарат физических наблюдаемых величин в общей теории относительности. Этот математический аппарат Зельманов подробно описал в своей диссертации 1944 года и позднее назвал *теорией хронометрических инвариантов* [1, 2, 3, 4]. Кроме хронометрических инвариантов он также создал и другие математические методы, а именно — *кинеметрические инварианты* [5] и *монадный формализм* [6].

Будучи очень требовательным к себе, Абрам Леонидович в течение своей жизни опубликовал менее десяти научных работ, каждая из которых является концентратом научной мысли и содержит в себе фундаментальные научные идеи. Большую часть времени он занимался собственными научными исследованиями, но иногда читал великолепные лекции по общей теории относительности и космологии как науке о глобальной геометрической структуре Вселенной.

Главным смыслом своей жизни Зельманов считал научное творчество, поэтому написание статей было для него потерей времени. Жалея тратить время на оформление научных статей, Абрам Леонидович никогда не жалел его на длительные дружеские беседы, в которых он подробно излагал свои философские концепции, мысли о структуре Вселенной и дальнейших путях развития человечества. Именно в тех беседах он сформулировал свой знаменитый антропный принцип, который приведен здесь с его слов:

> Человечество существует в настоящее время и может наблюдать мировые константы такими, какие они есть, потому, что константы сейчас имеют именно эти значения. Когда мировые константы имели другие значения, человечества еще не было. Когда они будут иметь другие значения, то человечества уже не будет. То есть, человечество может существовать только в определенном диапазоне значений космологических констант. Человечество — это только эпизод в жизни Вселенной. Пока что космологические условия таковы, что человечество развивается.

Таков *антропный принцип Зельманова*, сформулированный им через физические константы. В то же время Зельманов формулировал свой антропный принцип и другим путем:

> Вселенная устроена так, как мы ее наблюдаем, потому, что человек ее такой воспринимает. Вселенная неотделима от наблюдателя. Каков наблюдатель, такова и Вселенная: наблюдаемая Вселенная зависит от наблюдателя так же, как и наблюдатель зависит от Вселенной. Если физические условия во Вселенной изменятся, то изменится и сам наблюдатель. И, наоборот, если изменится наблюдатель, то он будет воспринимать мир иначе. Соответственно, изменится и наблюдаемая им Вселенная. Если бы не было наблюдателя, то наблюдаемой Вселенной не было бы тоже.

К сожалению, научное творчество Зельманова остается мало известным среди физиков. Даже ученые, работающие в области общей теории относительности, практически не используют его сложный, но дающий большие возможности математический аппарат хронометрических инвариантов. Фактически научные идеи Зельманова, достаточно четкие по своей сути, были "зашифрованы" им в сложные математические термины. Добраться до их сути можно было, только овладев всеми нюансами изобретенного им математического аппарата, которому он тщательно и терпеливо обучал нескольких своих учеников. Для остальных чрезвычайно сжатые научные статьи Зельманова, состоящие в основном из формул, без его личных комментариев было понять очень трудно.

Однако Зельманов не был одинок в науке. Сопутствующая система отсчета и операторы проецирования на время и на пространство, аналогичные теории хронометрических инвариантов, были введены Карло Катано, итальянским математиком, который опубликовал свою первую статью на эту тему в 1958 году [9]. Но математические методы Катано также остались без применения из-за своей недоступности для самостоятельного освоения по его кратким сообщениям в научных журналах [9, 10, 11, 12]. Зельманов знал о работах Катано и высоко ценил их, Катано также знал работы Зельманова и ссылался на них [12].

Здесь я представляю вниманию читателя диссертацию Зельманова, в которой он описал свой математический аппарат хронометрических инвариантов во всех подробностях, а также некоторые результаты, которые он получил с помощью этих математических методов в космологии. Нигде более вы не найдете такого подробного и систематического описания теории хронометрических инвариантов, кроме как в диссертации Зельманова. Даже в книге "Элементы общей теории относительности" [8], которую составил Владимир Агаков на основе некоторых лекций и статей Зельманова, математический аппарат хронометрических инвариантов изложен очень кратко, что не позволяет освоить его самостоятельно. То же самое можно сказать и о научных статьях Зельманова, каждая из которых занимает не более нескольких страниц. В любом случае, ничто не сравнится по глубине подробностей с диссертацией Зельманова. Сам Зельманов говорил, что реально освоить математические методы хронометрических инвариантов возможно, только ознакомившись с его диссертацией.

Единственный сохранившийся экземпляр диссертации Зельманова хранится в библиотеке Государственного Астрономического Института им. Штернберга в Москве и находится в очень плохом состоянии. Это — четвертая или пятая, отпечатанная на пишущей машинке, копия со вписанными от руки формулами. Судя по почерку, формулы вписывал сам Зельманов. В некоторых местах отпечатанный текст является настолько слабым, что прочитать его почти невозможно.

При подготовке к печати я восстановил утраченные фрагменты рукописи в соответствии с контекстом. Кроме того, мне пришлось внести в диссертацию Зельманова некоторые необходимые изменения, поскольку терминология, использованная им в 1944 году, менялась со временем. Например, вначале Зельманов называл величины, инвариантные относительно преобразований времени, "ин-инвариантами", но в 50-е годы он ввел более удачное название "хронометрические инварианты", которое и вошло в анналы науки. Также менялись и обозначения некоторых величин. Поэтому все обозначения были приведены здесь в соответствие с окончательной терминологией теории хронометрических инвариантов, которая сформировалась в 60-е годы.

Конечно, эта книга рассчитана в основном на подготовленного читателя, который знаком с основами теории хронометрических инвариантов и хочет узнать больше подробностей. Для такого читателя эта книга будет собранием настоящих математических деликатесов. Сейчас я приглашаю читателя к этому изысканному столу и надеюсь, что математические деликатесы от Зельманова доставят удовольствие всем истинным гурманам.

Д. Р.

---

1. **Зельманов А. Л.** Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности. *Доклады АН*

СССР, 107 (6), 815–818, 1956.

2. **Зельманов А. Л.** К релятивистский теории анизотропной неоднородной Вселенной. *Труды 6-го совещания по вопросам космогонии*. Наука, Москва, 144–174, 1959.
3. **Зельманов А. Л.** К постановке вопроса о бесконечности пространства в общей теории относительности. *Доклады АН СССР*, 124 (5), 1030–1034, 1959.
4. **Зельманов А. Л.** К проблеме деформации сопутствующего пространства в эйнштейновской теории тяготения. *Докл. АН СССР*, 135 (6), 1367–1370, 1960.
5. **Зельманов А. Л.** Кинеметрические инварианты и их отношение к хронометрическим инвариантам в эйнштейновской теории тяготения. *Доклады АН СССР*, 209 (4), 822–825, 1973.
6. **Зельманов А. Л.** Ортометрическая форма монадного формализма и ее отношение к хронометрическим инвариантам и кинеметрическим инвариантам. *Доклады АН СССР*, 227 (1), 78–81, 1976.
7. **Зельманов А. Л. и Хабибов З. Р.** Хронометрически инвариантные вариации в теории тяготения Эйнштейна. *Доклады АН СССР*, 268 (6), 1378–1381, 1982.
8. **Зельманов А. Л. и Агаков В. Г.** Элементы общей теории относительности. Наука, Москва, 1989.
9. **Cattaneo C.** General Relativity: Relative standard mass, momentum, energy, and gravitational field in a general system of reference. *Il Nuovo Cimento*, 10 (2), 318–337, 1958.
10. **Cattaneo C.** On the energy equation for a gravitating test particle. *Il Nuovo Cimento*, 11 (5), 733–735, 1959.
11. **Cattaneo C.** Conservation laws in General Relativity. *Il Nuovo Cimento*, 13 (1), 237–240, 1959.
12. **Cattaneo C.** Problèmes d'interprétation en Relativité Générale. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, No. 170 "Fluides et champ gravitationel en Relativité Générale", Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 227–235, 1969.

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1.1 Исходные предположения современной релятивистской космологии

В настоящее время существуют две основные космологические теории, обозначаемые как "релятивистские". Обе являются теориями однородной Вселенной и известны также как *теории расширяющейся Вселенной*. Одна из них связана с общей теорией относительности Эйнштейна (см., например, [1]), другая — с кинематической теорией относительности Милна [2]. Вторую из этих космологических теорий называют также "кинематической", сохраняя определение "релятивистская" лишь для первой из них. Такое словоупотребление примем и мы здесь.

Общая теория относительности Эйнштейна и кинематическая теория относительности Милна представляют собою развитие специальной теории относительности Эйнштейна на двух различных направлениях, логически — исключающих друг друга, физически — совершенно неравноценных. Неравноценны и современные теории однородной Вселенной — релятивистская и кинематическая. Первая — одно из возможных космологических построений на основе оправдавшей себя физической теории; другими космологическими построениями на ее основе могут явиться теории неоднородной Вселенной. Вторая — является основной частью кинематической теории относительности, претендующей на роль физической теории; одним из основных положений последней является *космологический принцип*, приводящий к требованию однородности. Можно сказать, что в случае релятивистской теории — космология выводится из физики, в случае же кинематической теории — физика выводится из космологии. Экспериментальное опровержение теории однородной Вселенной должно привести: в первом случае — к построению теории неоднородной Вселенной на основе общей теории относительности; во втором случае — к ниспровержению самой теории кинематической относительности.

Ниже кинематическая теория относительности и кинематическая космология не рассматриваются вовсе; не приходится пользоваться и специальной теорией относительности; в соответствии с этим слово “релятивистский” указывает всегда на отношение к общей теории относительности Эйнштейна.

Релятивистская теория однородной Вселенной исходит из некоторых предположений. Первое из них гласит: гравитационные уравнения Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T\right) + \Lambda\,g_{\mu\nu}\,, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{1.1}$$

применимы ко Вселенной в целом. Это предположение определяет космологическую теорию как релятивистскую. Предположения, определяющие ее как теорию однородной Вселенной, могут быть сформулированы — и разными авторами формулируются — различным образом. Толман (см. [1], стр. 362) сводит их к общему предположению: если взять любую точку, относительно которой материя, находящаяся в ее окрестностях, во всякий момент покоится (в среднем), то наблюдения, производимые в этой точке, показывают в “большом масштабе” (*large scale*) независимость от направления — иначе говоря, пространственную изотропность. Математически более совершенная, но физически менее наглядная формулировка принадлежит Робертсону [3].

Формулировка первого исходного предположения содержит уравнения Эйнштейна с космической постоянной, вопрос о значении которой и даже о знаке оставляется в современной космологии, обычно, открытым (допускается, что она может быть положительна, равна нулю или отрицательна). Космическая постоянная, и именно — положительная, — была введена Эйнштейном [4] в связи с теорией статической Вселенной*. После создания математиком Фридманом [5] теории нестатической Вселенной доводы в пользу положительности и вообще неравенства нулю космической постоянной можно было считать отпавшими, и сам Эйнштейн [6] вернулся к уравнениям без космической постоянной. Однако, так как наиболее общий возможный

*Термин “статический” употребляется в космологии не в обычном (для общей теории относительности) смысле ортогональности времени к пространству, а в смысле независимости метрики от времени.

вид релятивистских гравитационных уравнений второго порядка (см., например, [7], стр. 269) представляют уравнения (1.1), в релятивистской космологии обычно пользуются ими, считая, тем не менее, что случаи отличной от нуля космической постоянной представляют скорее математический, чем физический интерес.

Для современной космологии характерно отождествление Метагалактики, предполагаемой неограниченною, со Вселенной в целом. Поэтому слова "окрестности" и "большой масштаб" употребляются в формулировке второго исходного предположения* в том, обычном для современной космологии, понимании, при котором элементарными считаются объемы, содержащие столь большое количество галактик, что материю в этих объемах можно считать непрерывно распределенной (см. §1.11).

§ 1.2 Метрика мира

Второе из исходных предположений означает, что любую точку, относительно которой находящаяся в ее окрестностях материя постоянно покоится, можно во всякий момент времени рассматривать как центр пространственной сферической симметрии (см. [1], стр. 368). Эти соображения, в соединении с релятивистскими уравнениями движения и теоремой Шура (Shur, например, см. [8], стр. 136) позволяют выбрать такую, покоящуюся (в среднем) относительно материи, координатную систему, время в которой — космическое, т. е. удовлетворяющее условиям

$$g_{00} = 1\,, \qquad g_{0i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{2.1}$$

а пространство является пространством постоянной кривизны $\frac{1}{3}C$, испытывающим гомологичные расширения и сжатия так, что можно написать

$$C = 3\,\frac{k}{R^2}\,, \qquad k = 0,\, \pm 1\,, \qquad R = R\,(t)\,, \tag{2.2}$$

и, пользуясь конформно-евклидовыми пространственными координатами, мы имеем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left[1 + \frac{k}{4}\,(x^2 + y^2 + z^2)\right]^2}\,. \tag{2.3}$$

---

*А также везде (ниже), где не оговорено противное.

Случай $k=+1$ рассмотрен впервые: для статической модели Эйнштейном [4], для нестатических моделей Фридманом [5]. Случай $k=0$ рассмотрен впервые: для пустой статической модели де Ситтером [10], для пустой нестатической модели Леметром [11], для непустых моделей Робертсоном [3]. Случай $k=-1$ рассмотрен впервые Фридманом [12].

Из геометрии известно, что при $k=+1$ пространство — локально-сферическое, при $k=0$ локально-евклидово, при $k=-1$ локально-гиперболическое. Предъявляя требования сферической симметрии относительно любой точки к свойствам связности, мы находим, что при $k=+1$ пространство — эллиптическое (конечно, двусвязное) или сферическое (конечно, односвязное), а при $k=0$ и $k=-1$ соответственно — евклидово и гиперболическое (в обоих случаях бесконечное и односвязное).

§ 1.3 Характер материи

Подставляя в гравитационное уравнение Эйнштейна

$$G^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}G=-\kappa\,T^{\mu\nu}-\Lambda\,g^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

выражения для $g_{\alpha\beta}$ из (2.3), мы находим, что существуют также только две функции времени

$$\rho=\rho\,(t)\,,\qquad p=p\,(t)\,, \tag{3.2}$$

через которые $T^{\mu\nu}$ могут быть выражены равенствами

$$T^{00}=\frac{1}{g_{00}}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)-\frac{p}{c^2}\,g^{00}, \tag{3.3}$$

$$T^{0j}=-\frac{p}{c^2}\,g^{0j}, \tag{3.4}$$

$$T^{ik}=-\frac{p}{c^2}\,g^{ik}, \tag{3.5}$$

или

$$T^{\mu\nu}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-\frac{p}{c^2}\,g^{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

где

$$\frac{dx^\sigma}{ds}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,,\ 0,\ 0,\ 0 \tag{3.7}$$

есть четырехмерная скорость, характеризующая среднее движение материи в окрестностях каждой точки; беспорядочные уклонения от него учитываются величиной p. Но (3.6) совпадает с выражением для тензора импульса и энергии идеальной* жидкости, имеющей собственную плотность ρ и собственное давление p. Следовательно, материю, заполняющую рассматриваемую идеализированную Вселенную, можно считать идеальной жидкостью, покоящейся относительно нестатического пространства (иначе говоря, расширяющейся и сжимающейся вместе с ним) и обладающей однородными — согласно (3.2) — плотностью и давлением. В первых работах по релятивистской космологии — Эйнштейна и Фридмана† — давление не учитывалось [4, 5, 12]. Из названных авторов Фридман был первым, рассмотревшим статические модели, и поэтому случай $\rho > 0$, $p = 0$ носит его имя. Первым введшим $p > 0$ был Леметр [15, 16].

§ 1.4 Закон энергии

Из гравитационных уравнений Эйнштейна, как следствие, может быть получен релятивистский закон энергии

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T_\sigma^\nu + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma} T_\mu^\sigma = 0\,. \tag{4.1}$$

Вследствие (2.3) и (3.3–3.5), уравнение (4.1) при $\mu = 0$ принимает вид

$$\dot{\rho} + 3\,\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \tag{4.2}$$

(точки означают дифференцирование по времени), а уравнения с $\mu = 1, 2, 3$ обращаются в тождества

$$0 = 0\,. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.2) является одним из основных уравнений релятивистской теории однородной Вселенной — так называемых *космологических уравнений*. Мы будем называть его *космологическим уравнением энергии*.

Возьмем любой фиксированный объем пространства, т. е. объем, ограниченный поверхностями, уравнения которых не зависят от времени. Для величины такого объема V можно на-

*В смысле отсутствия вязкости, но не в смысле несжимаемости.

†Мы не говорим о работах де Ситтера [9, 10], Ланцожа [13], Вейля [14] и Леметра [11], посвященных пустым моделям.

писать

$$V = R^3\Pi_0\,, \qquad \Pi_0 \not\parallel t\,, \tag{4.4}$$

а для собственной энергии E, заключенной в нем,

$$E = \rho R^3 \Pi_0 c^2. \tag{4.5}$$

Вследствие (4.4) и (4.5), космологическому уравнению энергии (4.2) можно придать следующий вид

$$dE + pdV = 0\,, \tag{4.6}$$

т. е. мы получили условие адиабатности расширения или сжатия пространства.

В случае

$$p = 0 \tag{4.7}$$

(случай Фридмана), очевидно,

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{4.8}$$

и, так как

$$E = Mc^2, \tag{4.9}$$

где M собственная масса, заключенная в объеме V, то

$$\frac{dM}{dt} = 0\,. \tag{4.10}$$

Таким образом, при отсутствии давления собственные масса и энергия фиксированного объема сохраняются.

§ 1.5 Закон тяготения

Вследствие (2.3) и (3.3–3.5), уравнения релятивистского закона тяготения при $\mu, \nu = 0$, при $\mu = 0$, $\nu = 1, 2, 3$ и при $\mu, \nu = 1, 2, 3$ дают соответственно: уравнение

$$3\frac{\ddot{R}}{c^2 R} = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \Lambda\,, \tag{5.1}$$

тождество

$$0 = 0 \tag{5.2}$$

и уравнение

$$\frac{\ddot{R}}{c^2 R} + 2\frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} + 2\frac{k}{R^2} = \frac{\kappa}{2}\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) + \Lambda\,. \tag{5.3}$$

Исключая $\ddot{R}$ из (5.1) и (5.3), получаем

$$3\frac{\dot{R}^2}{c^2R^2}+3\frac{k}{R^2}=\kappa\rho+\Lambda\,. \tag{5.4}$$

Уравнения (5.1) и (5.3), равно как и (5.4) и (4.2), являются основными уравнениями релятивистской теории однородной Вселенной (космологические уравнения). Уравнения (5.1) и (5.3), а также их следствие (5.4), мы будем называть *космологическими уравнениями тяготения*.

Нетрудно убедиться, что космологическое уравнение энергии есть следствие космологических уравнений тяготения.

§ 1.6 Система космологических уравнений

Из космологических уравнений независимых — два, например (4.2) и (5.4)

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\rho}+3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)=0\\&3\frac{\dot{R}^2}{c^2R^2}+3\frac{k}{R^2}=\kappa\rho+\Lambda\end{aligned}\right\}, \tag{6.1}$$

остальные могут быть получены как их следствия. Таким образом, мы имеем систему двух уравнений с тремя независимыми функциями

$$\rho=\rho(t)\,,\qquad p=p(t)\,,\qquad R=R(t)\,. \tag{6.2}$$

Для нахождения их необходимо дополнить систему третьим независимым уравнением, например, уравнением состояния, связывающим плотность и давление. Вид кривых (6.2) можно найти и не задавая третьего уравнения, лишь налагая физически разумные ограничения на плотность и давление. Обычно исследуют кривые, изображающие третью из функций (6.2), в предположении, что

$$\rho\geqslant 0\,,\qquad p\geqslant 0\,,\qquad \frac{dp}{dR}\leqslant 0\,. \tag{6.3}$$

Так как, с одной стороны, для вещества

$$T>0 \tag{6.4}$$

и для радиации (вообще для электромагнитного поля)

$$T=0\,, \tag{6.5}$$

с другой стороны, для идеальной жидкости (3.6),

$$T = \rho - 3\frac{p}{c^2}, \tag{6.6}$$

то мы имеем

$$\rho \geqslant 3\frac{p}{c^2}. \tag{6.7}$$

Следовательно, вместо (6.3) можно написать

$$\rho \geqslant 3\frac{p}{c^2}, \qquad p \geqslant 0, \qquad \frac{dp}{dR} \leqslant 0. \tag{6.8}$$

Мы ограничимся рассмотрением непустых моделей, т. е. таких, для которых

$$\rho > 0. \tag{6.9}$$

§ 1.7 Основные свойства решений

Основные свойства решений, вид которых $R = R(t)$, при различных Λ и k находят, обычно, путем исследования нулей функций

$$f(R, \Lambda) = \dot{R}^2 = \frac{\kappa}{2}\rho c^2 R^2 + \frac{\Lambda}{3}R^2 - k, \tag{7.1}$$

см., например, [5, 12, 17, 18] и [1], стр. 359–405.

При этом обычно молчаливо делается физически разумное предположение, что существенно-положительная функция $R(t)$ непрерывна всюду в области ее существования, причем ее производная существует непрерывно, во всяком случае, при $R \neq 0$ (см., впрочем, §1.13). Основные результаты этого исследования, касающегося случая (6.9), изложены в следующем параграфе. Здесь же мы укажем некоторые основные свойства функции $R(t)$, полученные несколько иным путем, сходным с принятым ниже в §4.19–§4.23. Прежде всего, очевидно, что значения, между которыми мыслимы монотонные значения R (при упомянутом предположении), суть следующие: (1) нуль; (2) конечные минимальные значения; (3) конечные значения, к которым R приближается асимптотически сверху или снизу (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$); (4) конечные максимальные значения; (5) бесконечность.

Для всех конечных значений R мы вместо (3.1) и (3.4) можем написать, соответственно,

$$3\ddot{R} = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho c^2 + 3p\right)R + \Lambda c^2 R, \tag{7.2}$$

$$3\dot{R}^2 + 3kc^2 = \kappa\rho R^2 + \Lambda c^2 R^2. \tag{7.3}$$

Из (4.4–4.8) видно, что при давлении, равном нулю, плотность изменяется как R^{-3}, а при положительном давлении быстрее, чем R^{-3}. Заметим также, что вследствие первого и второго условий (6.8)

$$\rho R \leqslant \left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) R \leqslant 2\rho R\,, \tag{7.4}$$

так что, если ρR стремится к нулю или к бесконечности, то $\left(\rho+3\dfrac{p}{c^2}\right)R$ также стремится к нулю или, соответственно, к бесконечности.

Из сказанного выше об изменении плотности (7.3) следует также, что при стремлении R к нулю ρ и $\dot{R}^2$ стремятся к бесконечности — модель стремится к особому состоянию бесконечной плотности ($\dot{R}^2 = \infty$). Из (7.2) и (7.3) видно, что это возможно при любых Λ и k.

Из сказанного выше об изменении плотности видно также, что при стремлении R к бесконечности плотность, следовательно, и давление, стремятся к нулю — модель стремится к предельному состоянию бесконечного разрежения. Из (7.2) и (7.3) видно, что в случае $\Lambda > 0$ это возможно при любых k, в случае $\Lambda = 0$ лишь при $k = 0$ и $k = -1$, а в случае $\Lambda < 0$ вообще невозможно.

При прохождении R через конечное минимальное значение, т. е. при прохождении модели через состояние минимального объема, $\dot{R}$ обращается в нуль, а $\ddot{R}$ неотрицательно. При асимптотическом стремлении R к некоторому конкретному значению, т. е. при асимптотическом приближении модели к статическому состоянию, $\dot{R}$ и $\ddot{R}$ стремятся к нулю. Очевидно, если R может оставаться постоянным — модель может быть статична. Во всех трех случаях (7.2) и (7.3) дают, соответственно,

$$3k > \Lambda R^2, \tag{7.5}$$

$$0 < \Lambda R\,. \tag{7.6}$$

Отсюда следует, что прохождение модели через состояние минимального объема, асимптотическое приближение модели к статическому состоянию и статические модели возможны лишь при $\Lambda > 0$, $k = +1$.

При прохождении R через конечное максимальное значение, т. е. при прохождении модели через состояние максимального объема, $\dot{R}$ обращается в нуль, а $\ddot{R}$ неположительно. Тогда из (7.2) и (7.3), соответственно, получаем

$$3k > \Lambda R^2, \tag{7.7}$$

$$0 \gtreqless \Lambda R\,. \tag{7.8}$$

Следовательно, прохождение модели через состояние максимального объема возможно: в случае $\Lambda \geqslant 0$ лишь при $k=+1$, а в случае $\Lambda < 0$ при любых k.

Предположим, что модель испытывает монотонное изменение объема, ограниченное снизу состоянием минимального объема или статическим состоянием, а сверху — состоянием максимального объема или также статическим состоянием. Пусть индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к нижнему и верхнему ограничивающим состояниям. Тогда

$$\ddot{R}_1 \geqslant 0 \geqslant \ddot{R}_2\,, \qquad \dot{R}_1 < \dot{R}_2\,, \qquad \rho_1 > \rho_2 \tag{7.9}$$

и (5.1) дает

$$p_1 < p_2\,, \tag{7.10}$$

что противоречит третьему из условий (6.8). Следовательно, предположенные типы поведения модели невозможны (см. также §1.13).

§ 1.8 Типы непустых Вселенных

Перечислим теперь типы непустых Вселенных согласно современной классификации космологических моделей (см., например, [18]), следующей, в основных чертах, Фридману [5].

Статические модели или модели Эйнштейна (тип E)

В этом случае R постоянно. Уравнения (5.1) и (5.4) дают, соответственно

$$\frac{\kappa}{2}\left(\rho + 3\,\frac{p}{c^2}\right) = \Lambda\,, \tag{8.1}$$

$$3\,\frac{k}{R^2} = \kappa\rho + \Lambda\,, \tag{8.2}$$

откуда следует, что ρ и p также постоянны и что $\Lambda > 0$, $k=+1$.

Модели Эйнштейна неустойчивы: в результате сохраняющих однородность возмущений, изменяющих одну или две из величин R, ρ и p, они сжимаются до особого состояния бесконечной плотности или расширяются до предельного состояния бесконечного разрежения. Неустойчивость моделей Эйнштейна, очевидная из полученных Фридманом уравнений [5], была впервые отмечена Эддингтоном [19].

Модели первого рода — асимптотические, монотонные и осциллирующие

Все такие модели проходят через особое состояние бесконечной плотности.

Асимптотические модели первого рода (тип A_1) изменяют свой объем монотонно (расширяясь или сжимаясь) между особым состоянием бесконечной плотности при некотором конечном $t=t_0$ и статическим состоянием, отвечающим модели Эйнштейна при $t=+\infty$ или $t=-\infty$. Эти модели возможны лишь при $\Lambda>0$, $k=+1$.

Монотонные модели первого рода (тип M_1) изменяют свой объем монотонно (расширяясь или сжимаясь) между особым состоянием бесконечной плотности при некотором конечном $t=t_0$ и предельным состоянием бесконечного разрежения при $t=+\infty$ или $t=-\infty$. Эти модели возможны при $\Lambda>0$, k любом и при $\Lambda=0$, $k=0$, $k=-1$.

Осциллирующие модели первого рода (тип O_1) сначала расширяются от особого состояния бесконечной плотности при $t=t_1$ до состояния максимального объема при $t=t_0$, затем сжимаются снова до особого состояния бесконечной плотности при $t=t_2$ (t_1, t_0, t_2 конечны). Эти модели возможны при $\Lambda\geqslant 0$, $k=+1$ и также при $\Lambda<0$, k любое.

При прохождении через такое особое состояние возможны три случая:

(a) тип модели сохраняется (при $p=0$ это известно всегда);

(b) тип модели заменяется другим, тоже первого рода;

(c) R переходит из действительной области в мнимую (R^2 меняет знак).

Модели второго рода, асимптотические и монотонные*

Эти модели не проходят через особое состояние бесконечной плотности.

Асимптотические модели второго рода (тип A_2) изменяют свой объем, монотонно расширяясь или сжимаясь между статическим состоянием, отвечающим модели Эйнштейна при $t=\mp\infty$,

*Об осциллирующих моделях второго рода см. §1.13.

и предельным состоянием бесконечного разрежения при $t=\pm\infty$. Эти модели возможны лишь при $\Lambda>0$, $k=+1$.

Монотонные модели второго рода (тип M_2) сначала сжимаются от предельного состояния бесконечного разрежения при $t=-\infty$ до состояния максимального объема при некотором конечном $t=t_0$, затем расширяются снова до предельного состояния бесконечного разрежения при $t=+\infty$. Эти модели возможны лишь при $\Lambda>0$, $k=+1$.

Ниже помещена таблица, показывающая, какие типы нестатических непустых Вселенных возможны при различных численных значениях Λ и k.

	$k=+1$	$k=0$	$k=-1$
$\Lambda>0$	A_1 M_1 O_1 A_2 M_2	M_1	M_1
$\Lambda=0$	O_1	M_1	M_1
$\Lambda<0$	O_1	O_1	O_1

Таблица 1.1 Типы моделей нестатических непустых Вселенных при различных Λ и k

Возможные типы моделей и их распределение по клеткам таблицы в случаях $p>0$ и $p=0$ одинаковы.

§ 1.9 Отделы релятивистской космологии

В релятивистской космологии можно выделить пять основных вопросов, намечающих различные отделы ее: три из них намечают отделы собственно релятивистской теории — динамику, трехмерную геометрию и термодинамику моделей Вселенной; четвертый касается связи релятивистской теории с классической механикой; наконец, пятый — соотношения теории с данными наблюдений.

Основную часть релятивистской космологии составляет динамика Вселенной. К ней относятся изучение поведения моделей (основные результаты изложены в §1.7 и §1.8) и исследование их устойчивости (эта задача, в сущности, даже не поставлена в литературе, если не считать указанного в §1.8 вопроса об устойчивости моделей Эйнштейна). К динамике с одной стороны примыкает геометрия пространства, с другой — термодинамика Вселенной.

К геометрии относятся вопросы о кривизне пространства и его топологической структуре. Основные результаты, сюда относящиеся, содержатся в части §1.2, посвященной свойствам трехмерного пространства.

Термодинамика релятивистской однородной Вселенной связана с именем Толмана, предложившего релятивистское обобщение классической термодинамики [1]. Первым началом релятивистской термодинамики Толмана служит, естественно, закон энергии (см. [20] или [1], стр. 292), одной из форм которого являются уравнения (4.1), а второе начало (см. [21] или [1], стр. 293) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\varphi\,\frac{dx^\nu}{ds}\sqrt{-g}\right)d\Sigma \geqslant \frac{dQ}{\Theta}\,, \tag{9.1}$$

где φ и $\frac{dx^\nu}{ds}$, соответственно, собственная плотность энтропии и четырехмерная скорость элементарного четырехмерного объема $d\Sigma$, dQ обозначает собственный приток тепла между его временными границами (через его пространственные границы), Θ — их собственная абсолютная температура. Знак неравенства, очевидно, относится к необратимым, а знак равенства — к обратимым процессам. В случае рассматриваемых космологических моделей первое начало приводит к условию адиабатности (4.6). Из него ясно отсутствие собственного потока тепла в модели, что, впрочем, следует уже из исходного предположения об изотропии (см. §1.1). Вследствие этого и при (2.3) второе начало термодинамики дает условие неубывания собственной энтропии каждого фиксированного, в смысле §1.4, объема V (сравн. [1], стр. 424)

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\varphi V) \geqslant 0\,. \tag{9.2}$$

Материя, заполняющая модель, рассматривается, в общем случае, как смесь двух взаимодействующих компонент — производящего давление вещества и изотропной радиации. В частных случаях могут отсутствовать взаимодействие между двумя компонентами или одна из компонент (давление вещества).

Укажем другие, наиболее общие из результатов Толмана, относящихся к рассматриваемым космологическим моделям. Исходя из отсутствия в последних потока тепла, трения и градиента давления, Толман находит, что процессы расширения и сжатия моделей сами по себе могут быть обратимы (см. [22] и [23]; также [1], стр. 322, стр. 426 и след.). Этому не противоречит то обстоятельство, что, при наличии в модели радиации, каждый покоящийся наблюдатель может установить наличие потока радиации через поверхность окружающей его сферы произвольного постоянного радиуса, изнутри — при расширении, внутрь — при сжатии модели (см. [1], стр. 432 и след.). Источники необратимости могут лежать лишь в физико-химических процессах, происходящих внутри каждого элемента материи. Далее, обратимое расширение должно сопровождаться превращением части вещества в излучение (аннигиляцией вещества), а обратимое сжатие — обратным процессом (реконституцией вещества, см. [23] или [1], стр. 434). Наконец, т. к. каждый фиксированный, в смысле §1.4, объем не обладает постоянной собственной энергией, то для космологической модели не существует неизменного максимума энтропии и оказывается возможным бесконечное течение необратимых процессов без приближения модели к состоянию максимума энтропии (см. [24] или [1], стр. 326 и след., стр. 439 и след.).

Связь релятивистской космологии с классической механикой устанавливается аналогией между релятивистскими космологическими уравнениями для однородной Вселенной и классическими уравнениями для гомологично расширяющейся или сжимающейся однородной гравитирующей сферы произвольного радиуса. Эта аналогия имеет место лишь для случая идеальной жидкости, не производящей натяжений или давления ($p=0$). Она впервые установлена Милном для случая $\Lambda=0$, $k=0$ (см. [25] или [2], стр. 304), затем Мак-Кри и Милном для случаев $\Lambda=0$, $k\neq 0$ (см. [26] или [2], стр. 311) и обобщена Милном на случай $\Lambda\neq 0$ (см. [2], стр. 319). В последнем случае закон тяготения Ньютона должен быть обобщен введением дополнительной силы, вызывающей относительное ускорение двух взаимодействующих частиц, равное произведению $\frac{1}{3}\Lambda c^2$ на их взаимное расстояние. Если r, θ и φ полярные координаты произвольной точки рассматриваемой материальной сферы относительно начала координат, закрепленного в любой другой точке сферы (ρ ее плотность, γ постоянная Гаусса, ε постоянная интеграции), то для интересующего нас случая получим: условие гомологичности

$$\frac{\dot r}{r} = f(t) \nparallel r, \theta, \varphi\,, \tag{9.3}$$

условие непрерывности

$$\dot\rho + 3\frac{\dot r}{r}\,\rho = 0\,, \tag{9.4}$$

слегка преобразованное уравнение движения

$$3\frac{\ddot{r}}{r} = -4\pi\gamma\rho + \Lambda c^2, \tag{9.5}$$

и интеграл энергии

$$3\frac{\dot{r}^2}{r^2} - 6\frac{\varepsilon}{r^2} = 8\pi\gamma\rho + \Lambda c^2. \tag{9.6}$$

Введя (действительную) функцию времени $R(t)$, подчиненную условиям

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{r}}{r}, \qquad \frac{k}{R^2} = -2\frac{\varepsilon}{c^2 r^2}, \qquad k = 0, \pm 1 \tag{9.7}$$

и учтя, что

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}, \tag{9.8}$$

мы приведем (9.4), (9.5) и (9.6) к виду, тождественному с уравнениями (4.2), (5.1) и (5.4) в случае $p=0$. Очевидно, рассмотренная аналогия облегчает выяснение связи между динамикой и геометрией релятивистской однородной Вселенной, т. е. между характером поведения моделей и кривизной пространства.

Вопрос о соотношении космологической теории с данными наблюдений мы отложим до §1.14.

§ 1.10 Сопутствующее пространство

Мы видели, что трехмерное пространство, с которым оперирует релятивистская теория однородной Вселенной, есть пространство сопутствующее, т. е. движущееся в каждой точке вместе с материей, так что материя, в среднем, покоится относительно него. Таким образом, расширение или сжатие этого пространства означает расширение или, соответственно, сжатие самой материи.

Очевидно, сопутствующее пространство является физически преимущественным. Поэтому вопрос о геометрических свойствах именно этого пространства представляет наибольший физический интерес. В частности, вопрос о бесконечности этого пространства есть вопрос о пространственной бесконечности материальной Вселенной в физически разумном смысле этих слов. Геометрические характеристики именно сопутствующего пространства должны быть наиболее непосредственным образом связаны с данными наблюдений, ибо последние касаются объектов, в среднем, покоящихся относительно этого пространства.

Мы можем сказать, что релятивистская космология изучает относительное движение элементов материи как относительное движение элементов сопутствующего пространства, а деформацию материи — как деформацию сопутствующего пространства. Идея такого способа изучения движения математически очень проста. Действительно, рассмотрим, для примера, две точки

$$x = \alpha\,, \qquad x = \beta \tag{10.1}$$

на оси x. Их взаимное расстояние вдоль этой оси может быть выражено интегралом

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a}\, dx\,, \tag{10.2}$$

где a соответствующий коэффициент пространственной квадратичной формы. В координатной системе, сопутствующей точкам (10.1), α и β постоянны и относительное движение этих точек вдоль оси x будет описываться функцией

$$a = a\,(t)\,. \tag{10.3}$$

Такой способ изучения движения мыслим, разумеется, и в классической механике. Однако в последней: (1) такое изучение движения, как и обычное изучение движения относительно статического пространства, должно основываться, в конечном счете, на уравнениях движения; (2) геометрические свойства сопутствующего пространства не отличаются от свойств статического. В релятивистской теории: (1) изучение деформации сопутствующего пространства проводится при помощи уравнений тяготения, без привлечения уравнений движения; (2) вообще говоря, геометрические свойства сопутствующего пространства отличны от геометрических свойств какого-либо другого пространства, статическое же пространство можно ввести, вообще говоря, лишь в бесконечно малой области.

§ 1.11 Обычная трактовка космологических уравнений

С обычной точки зрения космологические уравнения рассматриваются как уравнения для Вселенной в целом, определяющие "радиус Вселенной" R. С этой точки зрения* величины

$$C = 3\frac{k}{R^2}\,, \tag{11.1}$$

$$D = 3\frac{\dot{R}}{R} \tag{11.2}$$

суть, соответственно, утроенная кривизна и относительная скорость объемного расширения сопутствующего пространства в целом, а ρ и p средние плотность и давление материи во Вселенной. Разумеется, при такой точке зрения существенным является предположение:

Предположение A О применимости уравнений Эйнштейна ко Вселенной в целом.

Это предположение, конечно, представляет собою далеко идущую экстраполяцию (об этом см., например, [1], стр. 331), но при построении теории мира как целого, в настоящее время оно не может быть заменено другим, которое не было бы значительно более обоснованным.

При указанной точке зрения строгое применение однородных космологических моделей к реальной Вселенной, прежде всего, вообще предполагает, что:

Предположение B Вселенную, при рассмотрении в достаточно большом масштабе, можно считать однородной.

При этом, разумеется, вообще говоря, не предполагается, что масштаб совпадает с указанным в §1.1. Это предположение не может быть оправдано — по крайней мере, в настоящее время — никакими теоретическими соображениями: физическими, астрономическими или какими-либо иными. Более того, неизвестно, является ли состояние однородности для Вселенной в целом устойчивым (см., например, [1], стр. 482). При всяком конкретном применении однородных моделей к реальной Вселенной необходимо установить тот масштаб, начиная с которого мы считаем ее однородной. Современное применение названных моделей к реальной Вселенной отождествляет ее с Метагалактикой, предполагая, что:

Предположение C Метагалактика содержит равное количество материи уже в объемах, малых сравнительно со сферой ра-

*Заметим, что иногда под "радиусом Вселенной" подразумевают также радиус кривизны пространства, равный, очевидно, $\frac{R}{\sqrt{k}}$.

диуса 10^8 парсек, но больших сравнительно со сферой радиуса 10^5 парсек*.

При современном применении релятивистских моделей к реальной Вселенной предполагается далее, что:

Предположение D Наблюдаемое в спектрах внегалактических туманностей смещение линий к красному концу, пропорциональное, в общем (по крайней мере, в первом приближении), расстоянию туманностей от нашей Галактики, есть результат взаимного удаления галактик (расширение сопутствующего пространства).

При современном применении релятивистских моделей к реальной Вселенной обычно предполагается, наконец, что:

Предположение E Почти вся масса Вселенной сосредоточена в галактиках. Или, в крайнем случае, что для нахождения средней плотности материи во Вселенной достаточно принимать в расчет только массу галактик.

Предположений A и B достаточно для получения космологических уравнений, см. §1.1. Предположения C, D и E играют роль при сравнении (особенно, при количественном) теории с наблюдениями. Предположение B покрывается Предположением C. Последнее является усиленным выражением характерного для современной космологии довольно расплывчатого *принципа образца* (см., например, [1], стр. 363 и [2], стр. 123), утверждающего, что известная нам часть Вселенной представляет собою достаточно хороший образец для суждения о свойствах всей Вселенной.

§ 1.12 Некоторые недостатки однородных моделей

Современная релятивистская космология обладает некоторыми преимуществами по сравнению с дорелятивистскими космологическими представлениями. Так, она свободна от обоих классических парадоксов (фотометрического† и гравитационного), неустранимых в дорелятивистской космологии при неравенстве ну-

*Радиус 10^8 парсек — порядок расстояния до наиболее слабых внегалактических туманностей, наблюдаемых при помощи 100-дюймового рефлектора. Радиус 10^5 парсек — порядок расстояний между ближайшими друг к другу галактиками. Очевидно, “элементарными” надо при этом считать объемы порядка 10^{20} куб. парсек.

†Так как конечное давление радиации говорит о конечной светимости неба.

лю средней плотности материи во Вселенной*. Далее, она устраняет вывод о тепловой смерти Вселенной, не рассматривая современное состояние известной нам части ее, как флуктуацию. Наконец, она совершенно естественно объясняет красное смещение, указывая на неизбежность расширения или сжатия сопутствующего пространства (ввиду неустойчивости статического состояния) и позволяя связать его расширение с фактом превращения части вещества в радиацию†.

Однако современная релятивистская космология подвержена ряду серьезных возражений, говорящих о ее неприменимости к реальной Вселенной. Некоторые из этих возражений ясны из сказанного в предыдущем §1.11 о Предположениях A и B. Другие возражения — они выясняются в §1.14 и §1.15 — возникают при сравнении теории с наблюдениями. Наконец, остальные возражения могут быть сформулированы как указания на некоторые свойства моделей, представляющиеся (из физических или других, более общих соображений) их недостатками. В качестве таких свойств, присущих тем или иным космологическим моделям, перечислим следующие.

1. Наличие особого состояния бесконечной плотности. Прохождение через такое состояние реальной Вселенной, а следовательно, применение к ней модели вблизи этого состояния, с физической точки зрения бессмысленны.
2. Признание исключительности наблюдаемого в настоящее время состояния Вселенной. Это свойство, как мы увидим в следующем §1.13, присуще всем асимптотическим и монотонным моделям (см. [1], стр. 399 и след.).
3. Предположение о неравенстве нулю космической постоянной, физически необоснованное. Попытки Эддингтона (см. [28], Глава XIV) связать релятивистскую космологию с квантовой механикой и показать при этом, что $\Lambda > 0$, $k = +1$ и что реальной Вселенной отвечает модель типа A_2, представляются искусственными.
4. Конечность (замкнутость) пространства, представляющаяся недостатком если не с физической, то с более общей точ-

*Экстраполяция красного смещения до бесконечности позволяет устранить фотометрический парадокс при конечной плотности и в нерелятивистской космологии, но ставит перед ней вопрос о природе красного смещения.

†Нерелятивистская теория Эйгенсона [27] также устанавливает между ними связь, но требует чрезмерно большой потери массы звездами через излучение.

ки зрения. Предположение о замкнутости пространства, характерное для первых моделей Эйнштейна и Фридмана, было впоследствии, после создания теории нестатической бесконечной Вселенной, признано ими произвольным (см. [12, 29]).

Из §1.7 и §1.8 видно (легче всего это усматривается из Таблицы 1.1 на стр. 23), что не существует нестатических однородных моделей*, свободных от всех или хотя бы от трех из перечисленных свойств. В самом деле:

- все модели, свободные от 1-го свойства (модели второго рода), обладают всеми остальными тремя свойствами одновременно
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{M}_2 \end{array}\right\} \Lambda > 0\,,\ k = +1\,; \tag{12.1}$$
- все модели, свободные от 2-го свойства (осциллирующие модели), обладают 1-м свойством и, кроме того, одним из остальных — 3-м или 4-м свойством
$$\mathrm{O}_1 \left\{\begin{array}{ll} \Lambda \geqslant 0\,, & k = +1 \\ \Lambda < 0\,, & k = 0, \pm 1 \end{array}\right\}; \tag{12.2}$$
- все модели, свободные от 3-го свойства (модели с $\Lambda = 0$), обладают 1-м свойством и одним из остальных свойств — 2-м или 4-м свойством
$$\Lambda = 0 \left\{\begin{array}{ll} k = +1\,, & \mathrm{O}_1 \\ k = 0, -1\,, & \mathrm{M}_1 \end{array}\right\}; \tag{12.3}$$
- все модели, свободные от 4-го свойства (пространственно-бесконечные модели), обладают 1-м свойством и одним из остальных — 2-м или 3-м свойством
$$k = 0, -1 \left\{\begin{array}{ll} \Lambda \geqslant 0\,, & \mathrm{M}_1 \\ \Lambda < 0\,, & \mathrm{O}_1 \end{array}\right\}. \tag{12.4}$$

§ 1.13 Некоторые особенности поведения моделей

Рассмотрим некоторые особенности поведения однородных моделей, отмеченные в предыдущем §1.12.

---

*Модели Эйнштейна мы исключаем из данного рассмотрения, ввиду их неустойчивости.

Существенным для особого состояния бесконечной плотности обычно считают то, что при нем R, следовательно, и каждый фиксированный объем, обращается в нуль. Предположим, однако, что нижней границей изменения R, на которой $\dot{R}$ испытывает разрыв, служит не $R = 0$ (см. §1.7), а некоторое $R_s > 0$. Но тогда можно допустить, что ρ имеет особенность (обращается в бесконечность) уже при $R = R_s > 0$, для этого необходимо наличие положительного давления ([3] стр. 72 и стр. 82, или [1] стр. 399 и след.). Из (7.3) видно, что и при конечном R бесконечность плотности требует бесконечности $\dot{R}^2$, следовательно, и бесконечности $\frac{\dot{R}}{R}$. Последнее же означает, что все, сколь угодно близкие друг к другу точки сопутствующего пространства движутся друг относительно друга со световыми скоростями. Следовательно, массы всех частиц обращаются при этом в бесконечность, что и приводит к бесконечности плотности при конечности каждого фиксированного объема.

Таким образом, при $R_s > 0$ мы получаем особое состояние бесконечной сверхплотности

$$\rho = \infty\,, \qquad \left|\frac{\dot{R}}{R}\right| = \infty \tag{13.1}$$

и замена $R = 0$ через $R_s > 0$ в качестве нижнего предела изменения R не улучшает положения.

По мнению Эйнштейна [6], разделяемому и другими авторами, особые состояния бесконечной плотности могут служить указанием на полную непригодность таких идеализаций, как предположение об однородности, при нахождении Вселенной вблизи состояний наибольшего сжатия.

Исключительность наблюдаемого состояния Вселенной, характеризуемого определенными конечными значениями величин ρ и $\frac{\dot{R}}{R}$ (см. след. §1.14), с точки зрения асимптотических и монотонных моделей состоит в следующем. Пусть ε_1 и ε_2 суть любые, сколь угодно малые значения величин ρ и $\left|\frac{\dot{R}}{R}\right|$, соответственно. Тогда время, в течении которого совокупность условий

$$\rho \geqslant \varepsilon_1\,, \qquad \left|\frac{\dot{R}}{R}\right| \geqslant \varepsilon_2 \tag{13.2}$$

выполняется, в любой из названных моделей бесконечно. Таким образом, относительно асимптотических и однородных моделей можно сказать:

> Предполагая, что свойства Вселенной, характерные для известной нам пространственно-временной области, являются правилом для всего пространства, мы находим, что асимптотические и однородные модели представляют собою исключение во времени.

В предыдущем §1.12 мы видели, что не существует однородных моделей, свободных даже только от 1-го и 2-го свойств, т. е. от тех свойств, о которых мы говорили выше. Такими были бы осциллирующие модели второго рода (тип O_2), изменяющие R между конечными минимумами и максимумами. Такое поведение R, как было показано Толманом (см. [30] или [1], стр. 401 и след.), возможно при $\Lambda > 0$, $k = +1$, если третье из условий (6.8) нарушается и при сжатиях и при расширениях. Однако позднее он же нашел (см. [1], стр. 402, 430 и след.), что указанные нарушения данного условия (6.8), а следовательно и возможность однородных моделей типа O_2, не могут быть оправданы физически. Кроме того, эти модели в любом случае обладают еще 3-м и 4-м свойствами.

Допуская, что $\Lambda \neq 0$, мы получаем бóльшее (чем при $\Lambda = 0$) разнообразие возможных однородных моделей. Так, например, мы можем получить невозможные при $\Lambda = 0$ модели, свободные от 1-го свойства или от сочетания 2-го и 4-го свойств.

Подобные соображения и побуждают некоторых авторов рассматривать случаи $\Lambda \neq 0$ (см., например, [16]).

Желание получить модели, свободные от 1-го свойства или от сочетания 2-го и 3-го свойств, приводит к случаю $k = +1$. В связи с этим следует вспомнить (см. конец §1.2), что замкнутость пространства вытекает с необходимостью из положительности кривизны лишь в случае моделей, обладающих свойствами симметрии относительно любой точки (т. е. в случае однородных моделей). Вообще же соотношение между кривизной и свойствами связности гораздо сложнее и богаче различными возможностями.

§ 1.14 Однородные модели и данные наблюдения

Открытое Слайфером (V. M. Slipher, см. [10] и [7], стр. 301 и далее) красное смещение, возрастающее с расстоянием, первоначально рассматривалось в связи с пустыми моделями [10, 31, 14, 11]. Применение непустых нестатических моделей было начато Леметром [15], по времени — между между установлением Хабблом двух эмпирических фактов, послуживших качественными оправданиями этого применения: приблизительно равномерного распределения галактик в пространстве и приблизительной пропорциональности красного смещения расстоянию (о первом см. [32], о втором — [33, 34]).

Наблюдательный материал, послуживший для установления этих фактов, позволял также сделать количественные оценки:

- в Предположении E (см. §1.11) — средней плотности материи во Вселенной $\rho \sim 10^{-31}$ грамм×см$^{-3}$, согласно более поздним оценкам $\sim 10^{-30}$ грамм×см$^{-3}$ [35, 36];
- в Предположении D — относительной скорости линейного расширения пространства $\frac{\dot{R}}{R} = 1{,}8 \times 10^{-17}$ сек$^{-1}$ как фактора пропорциональности между скоростью удаления и расстоянием (для этого были использованы определения абсолютной яркости массы галактик и их числа в единице объема).

Эти оценки, в соединении с некоторыми другими, приводят, даже при отказе от Предположения E, к заключению о том, что в современную эпоху

$$p \ll \rho c^2 , \qquad \kappa p \ll \frac{\dot{R}^2}{R^2} \tag{14.1}$$

и, следовательно, в космологических уравнениях можно при числовых подсчетах положить $p = 0$.

Кроме того, легко видеть, что

$$3 \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} > \kappa \rho . \tag{14.2}$$

Поэтому для однородной Вселенной остаются следующие возможности*

$$\left.\begin{array}{lll} \Lambda > 0 & \left\{ \begin{array}{l} k = +1 \\ k = 0, -1 , \end{array} \right. & \begin{array}{l} \mathrm{A}_1 , \mathrm{M}_1 , \mathrm{M}_2 \\ \mathrm{M}_1 \end{array} \\ \Lambda = 0 , & k = -1 , & \mathrm{M}_1 \\ \Lambda < 0 , & k = -1 , & \mathrm{O}_1 \end{array} \right\} . \tag{14.3}$$

Но более определенные заключения, тем более — количественная проверка релятивистских космологических уравнений, требуют более полных наблюдательных данных, с одной стороны, и некоторых теоретических соотношений между величина-

*Так как при (14.1), (14.2) и $\Lambda > 0$, $k = +1$ из космологических уравнений следует $\ddot{R} > 0$, что невозможно в моделях A_1 и O_1.

ми, наблюдаемыми в космологических моделях — с другой.

Более полный статистически обработанный материал был подготовлен Хабблом [37] в виде данных:

(a) о среднем спектральном классе галактик;

(b) о величине красного смещения $\delta = \frac{\triangle\lambda}{\lambda}$ в спектрах галактик до видимой фотографической звездной величины $m = 17$;

(c) о числе галактик $N(m)$ до звездной величины $m = 21$.

Из теоретических соотношений отметим следующие

$$\Phi_1 \left\{ l_m\,,\ m\,,\ \delta\,;\ T \right\} = 0\,, \tag{14.4}$$

$$\Phi_2 \left\{ \delta\,,\ l_m\,;\ \frac{\dot R}{R}\,,\ \frac{\ddot R}{R}\,,\ \ldots \right\} = 0\,, \tag{14.5}$$

$$\Phi_3 \left\{ N(l_m)\,,\ l_m\,;\ n\,,\ \frac{k}{R^2} \right\} = 0\,, \tag{14.6}$$

и также

$$\Phi_4 \left\{ N(\delta)\,,\ \delta\,;\ n\,,\ \frac{\dot R}{R}\,,\ \frac{\ddot R}{R}\,,\ \ldots \right\} = 0\,, \tag{14.7}$$

из которого получаем

$$\Phi_5 \left\{ \frac{dN}{d\delta}\,,\ \delta\,;\ n\,,\ \frac{\dot R}{R}\,,\ \frac{\ddot R}{R}\,,\ \ldots \right\} = 0\,. \tag{14.8}$$

Здесь l_m фотометрическое расстояние, определяемое (по фотометрическому закону обратных квадратов) из исправленных на влияние красного смещения звездных величин m согласно (14.4)*. Эффективная температура T, которую нужно приписать галактике, если распределение энергии в ее спектре аппроксимировать кривой Планка. Число галактик n в единице объема. Число галактик $N(l_m)$ до данной звездной величины m и число галактик $N(\delta)$ до данной величины красного смещения δ. Значения всех величин, входящих в эти соотношения, относятся к эпохе наблюдения.

Сравнение теории с наблюдениями можно вести различными путями. Рассмотрим два из них.

1. Приняв значение $T \approx 6000^\circ$, выводимое из данных (a), и пользуясь (14.4), можно сравнить данные (b) с формулой

---

*В неевклидовых и нестатических пространствах это расстояние совпадает с обычным лишь в бесконечно малом масштабе.

(14.5) и получить, таким образом, уже кроме известного значения $\frac{\dot{R}}{R}$, также значение $\frac{\ddot{R}}{R}$. Далее, снова пользуясь (14.4) и экстраполируя данные (b) до $m=21$, т. е. на всю область данных (c), можно сравнить последние с (14.6) и получить значение $\frac{k}{R^2}$. Входя с полученными значениями в космологические уравнения (5.1) и (5.4), можно найти значения Λ и ρ. Последнее, полученное, как легко видеть, без Предположения E, можно сравнить с известным ранее значением ρ, полученным в этом предположении.

2. Экстраполируя данные (b) на всю область данных (c) и исключая из них m, можно сравнить результаты с (14.7) и (14.8) и получить, таким образом, кроме известных ранее значений $\frac{\dot{R}}{R}$ и ρ, также значение $\frac{\ddot{R}}{R}$. Входя с этими значениями в космологические уравнения (5.1) и (5.4), можно найти значения Λ и $\frac{k}{R^2}$. Пользуясь последним, можно сравнить (14.4) и (14.6) с данными (b) и получить значение для T, входящего в (14.4). Это значение можно сопоставить с данными (a).

Первому пути следовал Хаббл [37], пользовавшийся методом, разработанным им совместно с Толманом [38]. При $T\approx 6000^\circ$ были найдены положительные значения для Λ и $\frac{k}{R^2}$ (полагая $R\approx$ $\approx 1{,}45\times 10^8$ парсек, т. е. порядка радиуса современной области пространства), очень большое значение $\rho\approx 6\times 10^{-27}$ грамм$\times$см$^{-3}$ и тип M_1. Второму пути отвечает ряд работ Мак-Витти*, использовавшего соотношения, выведенные Мак-Кри [43]. При $\rho\sim 10^{-30}$ грамм$\times$см$^{-3}$ были получены отрицательные значения для Λ и $\frac{k}{R^2}$ (где $R\sim 10^8$–10^9 парсек), тип O_1 и $T\approx 7000^\circ$–7500°.

Изложенные результаты показывают расхождение теории однородной Вселенной, при сохранении Предположений C, D, и E, с современными данными наблюдений (и, как следует из работы Хаббла, расхождение не только релятивистской космологической теории, но и классико-механической теории Метагалактики). Это расхождение Мак-Витти объясняет неточностью данных (a), особенно сильно влияющих на количественные оценки. Эддингтон [44] объясняет это неточностью других на-

*Определение значений ρ, $\frac{\ddot{R}}{R}$, $\frac{k}{R^2}$, Λ см. в [39] и [40], оценки T см. в [41, 42], где для определения других величин Мак-Витти пошел промежуточным, логически противоречивым путем.

блюдательных данных. Но для устранения расхождения приходится брать почти крайние из допустимых эмпирических оценок. Поэтому мы обратимся к Предположениям C, D, и E.

Объяснение расхождения ложностью Предположения E требует наличия чрезвычайно больших масс темной межгалактической материи, ничем себя не проявляющей. Отказ от Предположения D, устраняющий обнаруженное расхождение (как было показано в цитированной работе Хаббла), требует наличия гипотетической и физически необъясненной "деградации фотонов". Напротив, объяснение расхождения ложностью Предположения C, предложенное Шепли [45, 46], базируется на опытных данных.

§ 1.15 Неоднородность наблюдаемой области Вселенной

Гарвардские исследования (Шепли и др.) отличаются от исследований обсерватории Моунт Вилсон (Хаббл и др.) меньшим проникновением в глубины пространства, но с привлечением более полного материала, т. е. большего процента галактик, относящихся к исследуемой области. Поэтому Гарвардские исследования дополняют собою Моунт-Вилсоновские данные, а в спорных пунктах, вероятно, обладают большим весом. Из этих результатов мы отметим следующие.

1. Существует большое число скоплений, содержащих от нескольких галактик до нескольких сот их. Эту тенденцию галактик к скучиванию Хаббл считает гораздо менее резко выраженной, чем Шепли. Но самый факт ее существования бесспорен [47, 48].
2. Из числа галактик, находящихся от нас не далее, чем примерно $3{\times}10^6$ парсек, около двух третей лежат в северном галактическом полушарии [35]. Это обстоятельство объясняется наличием в северном полушарии большого скопления галактик в созвездии Девы.
3. Из числа галактик, отстоящих от нас не более, чем приблизительно $3{\times}10^7$ парсек, в северном полушарии находится несколько бо́льшая часть, чем в южном [49, 47, 50, 46]. Как показал Шепли (см. там же), этот результат не противоречит данным Хаббла об одинаковой населенности обоих полушарий галактиками, находящимися от нас не далее 10^8 парсек [47, 36].

4. Вдоль проходящей через южный галактический полюс зоны размером $30^\circ \times 120^\circ$, приходящееся на 1 квадратный градус число галактик, отстоящих о нас не далее $3{\times}10^7$ парсек, изменяется в несколько раз от одного конца зоны до другого [50, 46].
5. Коэффициент пропорциональности между величиной красного смещения и расстоянием несколько различен в двух полушариях [50, 46].

Результаты 1-й и 2-й еще не противоречат Предположению C из §1.11. Они подчеркивают лишь, что уже при рассмотрении Вселенной в несколько меньшем масштабе она оказывается явно неоднородной и анизотропной. Результат 3-й показывает наличие метагалактического градиента плотности в одном из радиальных направлений и производимой этим градиентом некоторой анизотропии, таким образом, Предположение C оказывается весьма грубым. Далее, 4-й результат показывает наличие сильного метагалактического градиента плотности и производимой им резкой анизотропии в наблюдаемом распределении, таким образом, Предположение C оказывается сильно нарушенным. Наконец, 5-й результат показывает: анизотропия в распределении материи сопровождается анизотропией ее деформации.

Учитывая результаты Шепли, особенно 4-й, Мак-Кри [51] поставил следующую задачу: найти теоретические соотношения между наблюдаемыми в данной точке величинами, в первую очередь, между величиной красного смещения и расстоянием, определяемым астрономическими методами (фотометрическим расстоянием), предполагая, что в области, в которой находятся наблюдаемые объекты, справедлива общая теория относительности и выполняются некоторые условия, не требующие однородности и анизотропии. При этом Мак-Кри в уравнениях Эйнштейна полагает $\Lambda = 0$, а в качестве дополнительных условий принимает следующие: материя представляет собой идеальную жидкость, лишенную давления, тогда можно выбрать сопутствующие координаты так, чтобы

$$g_{00} = 1\,, \qquad \frac{\partial g_{0i}}{\partial t} = 0\,; \tag{15.1}$$

помимо (15.1) можно было бы положить, что время всюду ортогонально пространству

$$g_{0i} = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{15.2}$$

Первое дополнительное условие, как указывает Мак-Кри, оправдывается малостью пекулярных скоростей галактик. Для второго дополнительного условия Мак-Кри, по его признанию, не смог найти простой физической интерпретации, это условие вводится им лишь ради математических упрощений*.

При сделанных предположениях Мак-Кри находит приближенное соотношение между величинами красного смещения, “спроецированными длинами”, характеризующими расстояние до наблюдаемых объектов, и плотностью материи в точке наблюдения. Он указывает, что ему не удалось связать “спроецированную длину” с расстоянием, определяемым астрономическими методами, и таким образом довести до конца решение поставленной им задачи†.

Неудача Мак-Кри едва ли случайна или объяснима математическими трудностями. Вообще сомнительно, чтобы предположения Мак-Кри были достаточны для нахождения теоретических соотношений между наблюдаемыми величинами. Эти предположения могут оказаться достаточными для некоторых качественных заключений о поведении наблюдаемой части Вселенной, следовательно, для некоторых шагов в область теории неоднородной Вселенной. Соотношения же, интересующие Мак-Кри, вероятно могут быть получены лишь в достаточно полной теории неоднородной Вселенной.

§ 1.16 Теория неоднородной Вселенной

Итак, исходные предположения теории однородной Вселенной, т. е. предположение §1.1 или Предположения A и B из §1.11, не могут быть оправданы. Далее, модели, получаемые при этих предположениях, обладают свойствами (рассмотренными в §1.12 и §1.13), делающими их непригодными для представления реальной Вселенной. Наконец, предположение об однородности и, следовательно, связанной с нею изотропией известной нам части Вселенной (см. Предположение C в §1.11), просто противоречит данным наблюдений. Еще до обнаружения этого противоречия была понята произвольность существующей теории и необходимость и важность перехода к релятивистской теории

*См. аналогичное заявление Фридмана [5].

†“Спроецированная длина” совпадает с обычным фотометрическим расстоянием в первом приближении, недостаточном для применения полученного Мак-Кри соотношения.

неоднородной Вселенной, задерживаемого, однако, математической сложностью задачи*. При этом молчаливо было сохранено отождествление Вселенной в целом с Метагалактикой. Однако ряд исследователей — астрономы Мэйсон, Фесенков, Эйгенсон, Крат [52, 53, 54, 27, 55] — считают Метагалактику ограниченной в пространстве (населенном множеством метагалактик). Эта точка зрения естественно, но не обязательно, связывается с концепцией Ламберта о иерархической структуре Вселенной с бесконечным множеством ступеней [53, 54, 56].

Представляются целесообразными следующие предположения и путь построения теории неоднородной Вселенной.

Предположения Отказ от предположений, говорящих о Вселенной в целом. Замена их последующими предположениями, касающимися рассматриваемой (на каждой данной стадии исследования) области Вселенной†.

1. В рассматриваемой области справедлива общая теория относительности Эйнштейна. При этом, хотя физическое значение имеет лишь случай $\Lambda = 0$, можно пользоваться случаями $\Lambda \neq 0$ для целей сравнения и в общих уравнениях сохранить космическую постоянную.
2. Рассматриваемая область заполнена материей, состоящей в общем случае из непрерывно распределенных вещества‡ и радиации. Трудность, связанную с тем, что явное выражение для четырехмерного тензора импульса и энергии с учетом потока тепла еще не найдено (см. [1], стр. 330), можно обойти при учете прозрачности межгалактического пространства, предположив, что радиоактивный перенос преобладает над другими видами переноса энергии. Пренебрегая далее энергией взаимодействия двух компонент материи сравнительно с энергией каждой из них, можно

*См., например, [1], стр. 330, 332, 363–364, 482, 486–488. Заметим, что помимо технических трудностей имеется затруднение принципиального характера: отсутствие в релятивистской теории тяготения универсальных граничных условий для бесконечности. При наличии свойств симметрии, например, в однородной Вселенной, учет этих свойств компенсирует отсутствие указанных граничных условий. Но мы не можем приписывать таких свойств неоднородной Вселенной.

†При исследовании элемента Вселенной под “рассматриваемой областью” надо подразумевать любую, сколь угодно малую, но конечную область, содержащую данный элемент.

‡“Жидкость” или, вернее, “газ”, в котором галактики — “молекулы”.

написать

$$T_\mu^\nu = \left(T_\mu^\nu\right)_m + \left(T_\mu^\nu\right)_r \ , \tag{16.1}$$

где первый член правой части относится к веществу, свободному от потока тепла, а второй член — к радиации, так что

$$T = (T)_m \, . \tag{16.2}$$

3. Рассматриваемую область, по крайней мере, кусок за куском можно покрыть координатами, сопутствующими веществу. Иначе говоря, имеют место условия, допускающие такое введение таких координат. Так как именно вещество (галактики) образует как бы "остов" Вселенной и к частицам вещества (галактикам) мы привязываемся при наблюдательной проверке теории, то указанные координаты имеют бóльшее физическое значение, чем координаты, сопутствующие в среднем всей материи*. Не приводя доказательства, отметим, что в выбранных координатах при сделанных выше предположениях

$$\left(T_0^i\right)_m = 0 \, , \tag{16.3}$$

так что

$$T_0^i = \left(T_0^i\right)_r \, . \tag{16.4}$$

Путь построения теории неоднородной Вселенной Отказ от рассмотрения Вселенной в целом в начале исследования. Разделение исследования на следующие стадии.

1. Рассмотрение поведения элемента неоднородной и анизотропной Вселенной. Особое значение имеет здесь вопрос об условиях и самой возможности поведения типа O_2 (т. е. вопрос об условиях и возможности существования осциллирующих моделей, не проходящих через особое состояние бесконечной плотности). Отрицательный ответ на этот вопрос может указывать на неприменимость принятой идеализации к реальной Вселенной.

Наименьший масштаб, при котором еще имеет смысл второе из принятых выше предположений, того же порядка, что и указанный в §1.11. Изучение Вселенной в этом масштабе наиболее желательно. Но можно пользоваться и большим масштабом,

*В однородной Вселенной оба вида сопутствующих координат совпадают.

лишь бы “элементы” Вселенной, отвечающие этому масштабу, были достаточно малы сравнительно с Метагалактикой (если последняя бесконечна, элементы могут быть взяты сколь угодно большими). Тогда результаты уже первой стадии исследования могут быть непосредственно применены к весьма большим областям Вселенной.

От 1-й стадии исследования возможен переход не только ко 2-й, но и минуя ее, непосредственно к 3-й стадии, на которой особое значение приобретает вопрос о кривизне пространства. Поэтому кривизну должно учитывать уже на 1-й стадии исследования.

2. Рассмотрение пространственно-ограниченной Метагалактики. Аналогично предыдущей стадии, особое значение имеет здесь вопрос об условиях и самой возможности поведения типа O_2 во всех элементах Метагалактики, иначе говоря, об отсутствии особых состояний бесконечной плотности во всей четырехмерной области существования Метагалактики. Отрицательный результат может указывать либо на непригодность применения идеализации, либо, вероятно, на невозможность вечной ограниченности Метагалактики.

3. Рассмотрение пространственно-безграничной и бесконечной Метагалактики, т. е. Вселенной. Особое значение имеет здесь вопрос об условиях и самой возможности отсутствия особенностей во всей четырехкратно-бесконечной четырехмерной области существования Вселенной. Отрицательный ответ на этот вопрос может указывать либо на непригодность принятой идеализации, либо, возможно — на справедливость идеи Ламберта. В связи с указанным здесь вопросом о пространственной бесконечности Вселенной, приобретает здесь особое значение также вопрос о кривизне пространства. К сожалению, связь кривизны с топологической структурой пространства в малом недостаточно изучена*: сведения, которыми мы можем воспользоваться, по-видимому исчерпываются некоторыми достаточными условиями бесконечности пространства (см. [57], стр. 234 и 239). Следует также подчеркнуть, что применение всякого результата, полученного в трехмерной геоме-

*Кроме пространств постоянной кривизны, имеющих значение лишь в теории однородной Вселенной.

трии, к случаю, когда время всюду ортогонально к пространству, требует дополнительного исследования.

Естественно, что уже изучение элемента неоднородной Вселенной требует разработки математического аппарата, отвечающего физическому содержанию задачи*. Прежде всего, должен быть установлен характер уравнений, при помощи которых мы намереваемся изучать Вселенную в каждом ее элементе.

§ 1.17 Локальная трактовка космологических уравнений

Обратимся к известным нам космологическим уравнениям однородной Вселенной. Входящие в них величины ρ, p, $D=3\frac{\dot{R}}{R}$ (и их производные) и $C=3\frac{k}{R^2}$ характеризуют не только однородную Вселенную в целом, но, вместе с тем, и любой элемент ее. При такой локальной трактовке космологических уравнений для нас уже не имеет значения смысл величины R как “радиуса Вселенной” и, при посредстве (11.1) и (11.2), мы исключим его из космологических уравнений тяготения (5.1) и (5.4) и из космологического уравнения энергии (4.2). Они примут вид, соответственно

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{1}{3}\,D^2\right)=-\frac{\kappa}{2}\left(\rho+3\,\frac{p}{c^2}\right)+\Lambda\,, \tag{17.1}$$

$$\frac{1}{3c^2}\,D^2+C=\kappa\rho+\Lambda\,, \tag{17.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+D\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)=0\,. \tag{17.3}$$

Явное выражение зависимости кривизны пространства от его расширения или сжатия, заменяющее собою (2.2), можно получить из (17.1–17.3). Исключая из них Λ, ρ, и p, находим

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{2}{3}\,DC=0 \tag{17.4}$$

и, т. к. вследствие (4.4) и (14.2)

$$D=\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial t}\,, \tag{17.5}$$

то получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt[3]{V}\,C\right)=0\,. \tag{17.6}$$

*Разумеется, на каждой последующей стадии исследования он должен получать дальнейшее развитие.

Плотность ρ и давление p описывают:

(a) состояние материи, относительная скорость объемного расширения которой есть D;

(b) поведение (деформацию) вещества или сопутствующего ему пространства;

(c) наконец, кривизна $\frac{1}{3}C$ характеризует геометрические свойства сопутствующего пространства.

Таким образом, при локальной трактовке космологических уравнений мы можем сказать, что:

- космологические уравнения тяготения представляют собой связи, накладываемые непосредственно уравнениями закона тяготения* на величины ρ, p, D и $\frac{1}{3}C$, характеризующие состояние материи, деформацию и геометрические свойства сопутствующего пространства;
- космологическое уравнение энергии представляет собой связь, накладываемую уравнениями закона энергии на ρ, p и D , т. е. на состояние материи и деформацию сопутствующего пространства.

Обратимся теперь к общему случаю уравнений закона тяготения и уравнений закона энергии в сопутствующих координатах.

Величины ρ и p, характеризующие состояние материи, содержатся в $T_{\mu\nu}$, входящих как в уравнение тяготения, так и в уравнение энергии. Величина D, описывающая поведение (деформацию) вещества или сопутствующего ему пространства, очевидно должна быть связана с величинами $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^0}$, входящими также в уравнение тяготения и в уравнение энергии. Кривизна $\frac{1}{3}C$, характеризующая геометрические свойства сопутствующего пространства, связана с величинами $\dfrac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}$, входящими в уравнение тяготения, но отсутствующими в уравнении энергии. Кроме того, и в тех и в других могут появиться величины, связанные с $\dfrac{\partial g_{0\alpha}}{\partial x^\beta}$ и характеризующие силовое поле† сопутствующего пространства.

Таким образом, в общем случае можно получить следующее:

---

*То есть не через посредство уравнений закона энергии, вытекающего из закона тяготения.

†В смысле классической механики.

- связи, накладываемые непосредственно уравнениями тяготения на величины ρ, p, D и $\frac{1}{3}C$, характеризующие состояние материи, деформацию и геометрические свойства сопутствующего пространства, и, возможно, силовое поле;
- связи, накладываемые уравнениями закона энергии на ρ, p и D, описывающие состояние материи, деформацию сопутствующего пространства и, возможно, силовое поле.

По аналогии с уравнениями для однородной Вселенной, мы назовем первые — *космологическими уравнениями тяготения*, вторые — *космологическими уравнениями энергии*. Вообще, связи между величинами, характеризующими состояние материи, деформацию сопутствующего пространства и его геометрические свойства, а также силовое поле, мы будем называть *космологическими уравнениями*. Очевидно, космологические уравнения для неоднородной Вселенной, являясь обобщением космологических уравнений для однородной Вселенной, допускают только локальную трактовку.

Космологическими уравнениями мы и будем пользоваться для изучения элементов неоднородной Вселенной.

§ 1.18 Случай Фридмана в неоднородной Вселенной

В настоящей работе мы лишь начинаем реализацию изложенной выше программы. Мы ограничимся первой стадией (см. §1.16) и ставим своей задачей рассмотрение космологических уравнений, некоторых их следствий и, главным образом, поведение объема элемента Вселенной в предположении, что материя представляет собою вещество (без радиации) положительной плотности, не производящее натяжений или давления и свободное от потока тепла. Тогда, в произвольных координатах, тензор импульса и энергии соответствует идеальной жидкости с исчезающим давлением

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\,, \qquad \rho > 0\,. \tag{18.1}$$

Этот случай отвечает (4.7) в однородной Вселенной* и, подобно ему, может быть назван *случаем Фридмана*.

Чтобы несколько выяснить отношение случая Фридмана в неоднородной Вселенной к одноименному случаю в однородной

*Сравн. (18.1) с формулой (3.6) при (4.7).

Вселенной и к общему случаю неоднородной Вселенной, перечислим факторы, появления которых можно ожидать при переходе от однородной к неоднородной Вселенной.

Факторы, не связанные с наличием давления

1. Анизотропия деформации элементов сопутствующего пространства.
2. Неоднородность плотности*.
3. Поле сил, действующих на пробное тело только при его движении относительно рассматриваемых (сопутствующих веществу) координат.
4. Зависимость римановой кривизны пространства от двумерного направления (анизотропия кривизны).
5. Зависимость средней, по всем двумерным направлениям, кривизны пространства (неоднородность кривизны)†.

Факторы, связанные с наличием давления

6. Вязкость, проявляющаяся при анизотропии деформации‡.
7. Расходимость трехмерного тензора напряжений, иначе, грубо говоря, неоднородность давления, связанная с неоднородностью плотности.
8. Поле сил, уравновешивающих действие неоднородности давления.
9. Поток тепла, связанный с неоднородностью давления.
10. Поток импульса, связанного с потоком тепла.

---

*Заметим, что в космологические уравнения градиент плотности не может входить явно, т. к. исходные релятивистские уравнения не содержат производных от временной компоненты тензора импульса и энергии по пространственным координатам. Физически это можно объяснить тем, что по отношению к отдельному элементу Вселенной понятие “градиент плотности” не имеет смысла.

†Градиент средней кривизны также не может входить в космологические уравнения явно, т. к. должен содержать в своем выражении третьи производные от компонент метрического тензора.

‡Если в теории однородной Вселенной было найдено (см. §1.3), что материю можно считать идеальной жидкостью, то физически это есть следствие отсутствия не вязкости, а проявлений вязкости при изотропии деформации. То есть, это есть следствие факта, имеющего место и в классической гидродинамике (см., например, [58], стр. 544, полагая $a=b=c\neq 0$ и $f=g=h=0$). Заметим, что вязкость “жидкости”, состоящей из “молекул-галактик”, на четыре порядка выше вязкости воды. Это нетрудно подсчитать, зная массы, размеры и пекулярные скорости галактик.

Очевидно, факторы первой группы отличают рассматриваемый случай от случая Фридмана в однородной Вселенной, а факторы второй группы отличают наш случай от общего случая неоднородной Вселенной.

В теории однородной Вселенной случай Фридмана непригоден для термодинамики, вполне достаточен для динамики, геометрии и наблюдательной проверки теории и является единственным случаем, пригодным для строгого сравнения теории с классической механикой. На этом основании, при переходе к теории неоднородной Вселенной, можно сказать только, что случай Фридмана не может быть пригоден для термодинамики и является единственным случаем, в котором мы можем надеяться найти строгую аналогию с уравнениями классической механики. Но, т. к. в неоднородной Вселенной с давлением света связана целая группа факторов, то мы не знаем, насколько сильно отличается случай Фридмана от общего случая по своим следствиям, относящимся к динамике (которая нас здесь интересует), геометрии и наблюдательной проверке теории. И если мы ограничиваемся здесь случаем Фридмана, то главным образом потому, что соображения математической простоты и физической наглядности рекомендуют, по нашему мнению, рассмотреть сначала влияние одной группы факторов, а именно — первой, т. к. эти факторы могут действовать и при отсутствии факторов второй группы (последние же действуют лишь при наличии некоторых факторов первой группы). Соображения о малости давления и слабости связанных с ним факторов в наблюдаемой в настоящее время части Вселенной имеют, как нам кажется, второстепенное значение.

В качестве следующего, после случая Фридмана, приближения к случаю неоднородной Вселенной можно было бы рассмотреть* случай

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{p}{c^2}\,g^{\mu\nu}, \quad \rho > 0\,, \quad p > 0\,, \tag{18.2}$$

т. е. идеальную жидкость — смесь вещества и радиации, с учетом 7-го и 8-го факторов. Этот случай отвечает наиболее общему случаю однородной Вселенной и является наиболее общим, при котором сохраняется условие (4.6).

Получение и анализ космологических уравнений требуют

*Отчасти это уже сделано автором, но результаты в данную работу не включены.

предварительной подготовки математического аппарата и физической интерпретации ряда математических результатов, что, следовательно, также должно быть включено в задачу данной работы.

Выше мы попытались дать краткий обзор существующей теории и изложение задачи настоящей работы (этому посвящено содержание Главы 1). Ниже мы примем следующий план: подготовка математического аппарата (содержание Главы 2); применение его к физическим уравнениям (Глава 3); получение из них космологических уравнений и следствий для случая Фридмана (Глава 4).

Имея в виду изложенную в §1.16 программу, мы в каждую из глав включили материал, больший, чем это необходимо.

§ 1.19 Математические средства

Обращаясь к предмету Главы 2, мы прежде всего должны заняться вопросом о возможности и целесообразности пользования какими-либо специальными координатными системами из числа сопутствующих.

Наиболее просты координаты, удовлетворяющие условиям

$$g_{0\alpha} = \delta_{0\alpha} \,. \tag{19.1}$$

Очень просты и физически рациональны координаты, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\right) = 0 \,, \tag{19.2}$$

впервые указанные Ланцожем [59] и примененные в физических исследованиях Фоком (“гармонические координаты” [60]). Однако, вообще говоря, ни те, ни другие не являются сопутствующими координатами* и из условий (19.1) и (19.2) можно совместить с требованием сопутствия лишь случай $\alpha = 0$, определяющий выбор координаты времени. Следовательно, пользование специальными (среди сопутствующих) координатами в общих уравнениях не может дать очень больших упрощений. Более того, оно математически невыгодно, т. к. сужает круг упрощений, возможных в частных случаях. Наконец, оно нецелесообразно физически, т. к. препятствует выделению величин, инвариант-

*В §4.26 мы воспользуемся гармоническими координатами, движущимися относительно сопутствующих.

ных относительно преобразований, не нарушающих сопутствующего характера координат и включающих в себя не только преобразование пространственных координат вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3)\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{19.3}$$

но и любое преобразование координаты времени

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3)\,, \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3\,. \tag{19.4}$$

Между тем, свойство инвариантности относительно преобразования (19.4), ввиду физической равноправности всех координат времени данного тела отсчета, т. е. свойство "хронометической инвариантности", должно быть присуще всем основным величинам и соотношениям, характеризующим это тело отсчета. Поэтому мы отказываемся от применения каких-либо специальных координат и в Главе 2 ставим своей задачей введение трехмерно-тензорного исчисления, основные величины и операторы которого обладают дополнительным свойством инвариантности относительно преобразований (19.4) — *хронометрически инвариантного тензорного исчисления*, а также *хронометрически инвариантных тензоров*, характеризующих метрику, деформацию и кривизну пространства*.

Все параграфы Главы 2 можно сгруппировать по нескольким разделам. Ниже указано их содержание.

A. В §2.1–§2.4 вводятся трехмерно-тензорные величины, инвариантные и не инвариантные относительно (19.4). Последние также оказываются весьма полезными благодаря своей способности принимать, в результате соответствующего выбора координаты времени, нужные нам значения†.

B. В §2.5–§2.7 вводятся обобщенные операторы дифференцирования по пространственным и временно́й координатам, инвариантные относительно (19.4), и величины, характеризующие некоммутативность этих операторов ("силовые величины" — вектор F_i и антисимметричный тензор A_{jk})‡.

---

*Сокращенно — х.и.-тензоры. Первоначально Зельманов не совсем удачно называл хронометрические инварианты *ин-тензорами*, а математический аппарат хронометрических инвариантов *ин-тензорным исчислением*. — Прим. ред., Д. Р.

†См. метод вариации потенциалов, применяемый в §3.7, §3.12, §3.17 и §3.20.

‡Из §2.7 явствует, что необходимые и достаточные условия для выполнения соотношений $g_{00}=1$, $\dfrac{\partial g_{0i}}{\partial t}=0$ (15.1) и $g_{0i}=0$ (15.2) могут быть записаны, соот-

C. В §2.8–§2.12 вводятся метрический х.и.-тензор и х.и.-тензор деформации пространства, устанавливается связь между ними и следствия из нее. Соотношение (11.22) из Главы 2, выражающее эту связь, представляется нам одним из наиболее существенных результатов всей работы*.

D. В §2.13–§2.15 вводятся обобщенное ковариантное дифференцирование в деформирующемся пространстве, инвариантное относительно (19.4), и соответствующее обобщение тензора Римана-Кристоффеля и тензора Эйнштейна.

E. В §2.16–§2.19 вводятся х.и.-тензорные величины, описывающие вращательные движения, и формулируется связь между деформацией и относительным вращением элементов деформирующегося пространства. Эта связь, см. (19.19) в Главе 2, применительно к пространству выражает тот же факт, что и хорошо известное соотношение

$$\mathrm{rot\,rot}\ \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{grad\,div}\ \vec{\mathrm{v}} - \nabla^2\,\vec{\mathrm{v}}\,, \tag{19.5}$$

если его представить в виде

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{rot\,rot}\ \vec{\mathrm{v}} = \left(\mathrm{grad\,div}\ \vec{\mathrm{v}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{rot\,rot}\ \vec{\mathrm{v}}\right) - \nabla^2\,\vec{\mathrm{v}} \tag{19.6}$$

и под $\vec{\mathrm{v}}$ понимать вектор скорости.

F. В §2.20–§2.22 вводятся х.и.-тензорные величины, характеризующие кривизну деформирующегося пространства (обобщение тензоров кривизны, скаляра кривизны и тензора Риччи).

В Главе 2 мы не вводим никаких физических требований или уравнений, пользуясь лишь релятивистским выражением для четырехмерного интервала ds^2.

§ 1.20 Релятивистские физические уравнения

Имея в виду предстоящее в Главе 4 получение космологических уравнений, мы должны в Главе 3 обратиться к реляти-

---

ветственно, в виде $F_i \equiv 0$ и $A_{jk} \equiv 0$. Кроме того, заметим, что пользование этими операторами позволяет свести два случая, в которых, согласно Эйзенхарту [61], мировые линии тока идеальной жидкости геодезичны, к одному, определяемому условием: в сопутствующих координатах $\frac{^*\partial p}{\partial x^i} \equiv 0$, где p давление.

*При пользовании сопутствующими координатами (не только в релятивистской, но и в классической механике) это соотношение означает возможность третьей, сверх эйлеровой и лагранжевой, трактовки движения сплошных сред.

вистским физическим уравнениям. Прежде всего мы должны, с одной стороны, выяснить физический (механический) смысл "силовых величин" F_i и A_{jk}, полученных в Главе 2, а с другой — найти х.и.-тензорные величины, описывающие силовые поля. И то и другое требует приведения к х.и.-тензорной форме уравнений мировых геодезических и сравнения их с уравнениями классической механики. Далее, нам нужно ввести х.и.-тензорные величины, характеризующие состояние материи, для чего требуется приведение к хронометрически инвариантному виду компонент мирового тензора импульса и энергии. Наконец, вводя х.и.-тензорные величины, характеризующий состояние материи, деформацию и кривизну пространства и действующие в нем силы, мы должны привести к х.и.-тензорной форме уравнения законов энергии и тяготения. Таким образом, задача Главы 3 — дать перевод основных релятивистских величин и уравнений на язык введенного в Главе 2 математического аппарата хронометрических инвариантов, выясняя попутно механический смысл "силовых величин".

Укажем основное содержание разделов, на которые можно разбить Главу 3.

A. В §3.1–§3.3 даются трехмерно-тензорные выражения для компонент мирового метрического тензора и мировых символов Кристоффеля 1-го и 2-го рода. Очень существенно по своим последствиям (см. §3.14–§3.17) то обстоятельство, что упомянутые мировые тензорные величины Q, все индексы которых отличны от нуля, связаны с соответствующими трехмерными тензорными величинами T, носящими те же индексы, линейными соотношениями вида

$$Q = \pm T + a\,, \tag{20.1}$$

где добавочный член a есть трехмерно-тензорная величина или нуль.

B. В §3.4–§3.6 вводится, после рассмотрения скорости света (х.и.-вектор скорости был введен в §2.9), инвариантные относительно (19.4) масса, энергия и импульс точки и обобщенные полные производные от этих величин по времени. Как и можно было ожидать, получаемые при пользовании х.и.-тензорным аппаратом отношения между рассматриваемыми физическими величинами сходны с известными из специальной теории относительности.

C. В §3.7–§3.9 мы приводим к х.и.-тензорной форме уравнения мировых геодезических, получаем из них уравнения динамики и теорему энергии для точки, которые сравниваем с соответствующими уравнениями и теоремой классической механики. Это позволяет установить, что "силовые величины" оправдывают данное нами им название, т. к. они являются искомыми величинами, характеризующими силовые поля: вектор F_i играет роль гравитационно-инерциальной силы, рассчитанной на единицу массы, а тензор A_{jk} (или отвечающий ему вектор Ω^i) — роль мгновенной угловой скорости абсолютного вращения системы в выражении для силы Кориолиса. Легко видеть, что "силовые величины" F_i и Ω^i отвечают следующим из факторов (см. §1.18), появления которых можно ожидать при переходе от однородной к неоднородной Вселенной: F_i отвечает 8-му фактору (поле сил, уравновешивающих действие неоднородности давления), а Ω^i отвечает 3-му фактору (поле сил, действующих на тело только при его движении относительно сопутствующих веществу координат). Этот результат представляется нам весьма существенным*.

D. В §3.10–§3.13 мы, приводя к х.и.-тензорной форме компоненты мирового тензора импульса и энергии, выражаем их через инвариантные относительно (19.4) плотность массы, плотность импульса и тензор кинематических напряжений. Затем, пользуясь этими выражениями, мы приводим к х.и.-тензорной форме мировые уравнения закона энергии. Полученные таким образом уравнения (скалярное — для плотности энергии, векторное — для плотности импульса) содержат лишь х.и.-тензорные величины, характеризующие состояние и поведение материи, деформацию пространства и действующие в нем силы.

E. В §3.14–§3.17 компонентам мирового тензора Эйнштейна придается х.и.-тензорная форма, что требует громоздких формальных преобразований, приводящих, однако, к весьма компактным выражениям. Вследствие отмеченного вы-

*Из него, в частности, следует, что физический смысл предположения о том (см. §1.15), что время всюду ортогонально пространству $g_{0i}=0$ (15.2), оставшийся неизвестным Фридману и Мак-Кри, состоит в отсутствии эффекта Кориолиса (по терминологии Главы 4 — в отсутствии "динамического абсолютного вращения"). Физический смысл выполнимости условий $g_{00}=1$, $\dfrac{\partial g_{0i}}{\partial t}=0$ (15.1) состоит просто в отсутствии сил, уравновешивающих действие градиента давления.

ше обстоятельства (см. темы §3.1–§3.3), чисто пространственные компоненты мирового тензора Эйнштейна оказываются связанными с компонентами соответствующего трехмерного тензора соотношениями вида (20.1).

F. В §3.18–§3.24 мы приводим к х.и.-тензорной форме уравнения закона тяготения Эйнштейна и получаем, таким образом, скалярное, векторное и тензорное уравнения, содержащие только х.и.-тензорные величины, характеризующие состояние и поведение материи, деформацию и кривизну пространства и действующие в нем силы. Интересно отметить, что из полученных уравнений, векторное можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно вектора угловой скорости "геодезической прецессии" в §4.10.

Все изложенное в Главе 3 не связано с какими-либо ограничивающими предположениями о характере материи или об относительном движении используемых координатных систем и имеет совершенно общий характер. Это, как нам кажется, позволяет думать, что намеченный в Главе 2 математический аппарат мог бы служить естественной формой для релятивистских уравнений в случаях, когда особую роль играет совокупность координатных систем, покоящихся друг относительно друга. Один из таких случаев представляет собой релятивистская космология, пользующаяся сопутствующими координатными системами.

§ 1.21 Некоторые космологические следствия

Переходя к Главе 4, собственно космологической части работы, мы прежде всего сделаем несколько замечаний в связи с космологическими уравнениями для случая Фридмана, а именно — о десяти факторах (см. §1.18), отличающих неоднородную Вселенную от однородной.

Отсутствие давления и связанных с ним 6-го, 7-го, 9-го и 10-го факторов должно быть учтено при введении в космологические уравнения величин, описывающих состояние и поведение материи (в сопутствующих веществу координатах). Отсутствие 8-го фактора, т. е. равенство нулю вектора F_i, должно быть получено как следствие из космологических уравнений. Из факторов неоднородности, 2-й и 5-й не могут входить явно в космологические уравнения и, поэтому лишь при рассмотрении конечной или бесконечной области пространства обнаруживают свою связь с остальными факторами неоднородности (1-м, 3-м и 4-м). Последние (из них 3-й фактор характеризуется вектором Ω^i) связаны с неравноправностью двумерных направлений* и могут быть названы факторами анизотропии. Именно они и могут влиять на поведение "изотропных" характеристик элемента Вселенной (объем, плотность и масса, средняя кривизна пространства), связанных с ними и между собою посредством космологических уравнений. Отсюда ясно, что, интересуясь поведением одной из "изотропных" характеристик, необходимо рассматривать не только поведение также и других "изотропных" характеристик (как в теории однородной Вселенной), но и факторы анизотропии. Однако, можно разделить связь этих факторов между собой — с одной стороны, и связь их с поведением "изотропных" характеристик — с другой. Для этого в космологических уравнениях нужно заменить тензорное уравнение, запишем его в виде

$$B_i^k = 0\,, \tag{21.1}$$

равносильной ему совокупностью уравнений: скалярного

$$B = 0\,, \tag{21.2}$$

получающегося в результате свертывания (21.1), и тензорного

$$B_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k B = 0\,, \tag{21.3}$$

обращающегося при свертывании в тождество (см. "основную форму" космологических уравнений).

Теперь мы можем несколько уточнить формулировку нашей космологической задачи, данную в начале §1.18, и сказать, что задачей Главы 4 является получение космологических уравнений для случая Фридмана в неоднородной Вселенной и таких следствий из них, которые: характеризуют несвойственные однородным моделям факторы; учитывают влияние этих несвойственных факторов на поведение основных "изотропных" характеристик элемента Вселенной, особенно — на поведение объема.

Главу 4 также можно разбить на несколько разделов, основное содержание которых мы здесь укажем.

*В трехмерном пространстве неравноправность двумерных направлений равносильна неравноправности одномерных направлений.

A. В §4.1–§4.4 излагаются (отвечающие случаю Фридмана) предположения о характере материи, вводятся сопутствующие координаты и, для описания деформации и относительного вращения элементов вещества, применяются величины, характеризующие аналогичные движения элементов пространства. При этом делается попытка ввести возможность пользования сопутствующими координатами из некоторых общих предположений о характере движения вещества.

B. В §4.5–§4.8 мы получаем космологические уравнения, приводим их к "основной форме" и устанавливаем возможность (вытекающую из равенства нулю вектора F_i) введения некоторой преимущественной координаты времени в любой данной точке. Вид уравнений "основной формы" показывает, что если скалярные космологические уравнения характеризуют элемент Вселенной независимо от направления, а тензорное уравнение — анизотропию элемента, то векторное космологическое уравнение тяготения связывает поведение данного элемента с поведением смежных элементов.

C. В §4.9–§4.13 рассматриваются факторы анизотропии и связь анизотропии с неоднородностью. Отметим следующие результаты: механический смысл векторного космологического уравнения как дифференциальное уравнение относительно вектора угловой скорости "геодезической прецессии"; невозможность исчезновения или появления динамического абсолютного вращения, характерная для этого фактора анизотропии, и закон изменения вектора Ω^i при деформации элемента; возможность существования анизотропии деформации при отсутствии других факторов анизотропии, свойственная только анизотропии деформации; неизбежность однородности при изотропии в конечной области; возможность статической модели, отличной от эйнштейновской, при $\Omega^i \equiv 0$.

D. В §4.14–§4.18 мы рассматриваем скалярные космологические уравнения, являющиеся обобщением уравнений теории однородной Вселенной. Мы получаем из них законы изменения средней кривизны пространства и плотности вещества при изменении объема элемента и проводим некоторую подготовку к рассмотрению типов поведения объема с изменением произвольной координаты времени. Отметим некоторые результаты: анизотропия кривизны не влияет явно на поведение "изотропных" характеристик элемента; масса и энергия элемента неизменны (как и для однородной Вселенной при $\rho = 0$); при наличии факторов анизотропии средняя кривизна пространства может изменять свой знак; при изотропии (в данном элементе) неоднородной Вселенной средняя кривизна изменяется при деформации так же, как в однородной Вселенной.

E. В §4.19–§4.23, по аналогии с §1.7, рассматриваются состояния, между которыми мыслимы монотонные изменения объема элемента. При отсутствии анизотропии в данном элементе мы получаем те же результаты, что и для однородной Вселенной. Факторы анизотропии приводят: к бóльшему разнообразию состояний, возможных при данной космической постоянной и данной средней кривизне пространства; к появлению состояний, неизвестных в теории однородной Вселенной; и, что очень важно, к снятию запрета с изменений, ограниченных снизу и сверху.

F. В §4.24–§4.28 рассматриваются возможные типы поведения объема элемента. Сначала — на интервале монотонного изменения. Затем — на всем интервале, на котором объем и плотность остаются конечными. Факторы анизотропии увеличивают разнообразие типов поведения, возможных при данной космической постоянной, и вызывают появление типов поведения, невозможных в случае однородной Вселенной. В частности, что очень существенно, факторы анизотропии приводят к существованию осциллирующей модели типа O_2, не проходящей через особое состояние бесконечной плотности. Отметим результаты, представляющиеся нам наиболее существенными: при изотропии элемента неоднородной Вселенной типы изменения его объема, возможные при данной космической постоянной и данном знаке (или равенстве нулю) средней кривизны, те же, что и в однородной Вселенной; при анизотропии деформации в отсутствии динамического абсолютного вращения, новые (сравнительно с однородной Вселенной) типы поведения проявляются лишь при $\Lambda > 0$,* причем тип O_2 может

*Отсюда следует, что при предположениях Мак-Кри (см. §1.15) возможны лишь типы M_1 и O_1.

проявиться лишь при всегда положительной средней кривизне; в общем случае анизотропии, включающем также и динамическое абсолютное движение, новые типы (и среди них O_2) возможны при любой космической постоянной и ограничения, накладываемые на знак средней кривизны, теряют силу.

Эти результаты показывают, что динамическое абсолютное вращение (эффект Кориолиса) может играть очень важную роль во Вселенной.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

§ 2.1 Системы отсчета

Общие преобразования координат системы S в координаты системы S'

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3)\,, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} &x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &x^{i'} = x^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3)\,, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

Вообще мы условимся, что греческие индексы могут принимать значения 0, 1, 2, 3, а латинские — лишь 1, 2, 3. Рассмотрим частный случай преобразований (1.2), удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^0} \equiv 0\,, \tag{1.3}$$

т. е. преобразования вида

$$\left.\begin{aligned} &x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

Вследствие (1.3)

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j \tag{1.5}$$

и также

$$dx^j = 0 \tag{1.6}$$

мы получаем, что

$$dx^{i'} = 0\,. \tag{1.7}$$

С другой стороны

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{0'}} dx^{0'} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} dx^{i'}. \tag{1.8}$$

Так как из (1.6) следует (1.7), то и

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^{0'}} \equiv 0\,. \tag{1.9}$$

Условимся различать понятия "система отсчета" и "координатная система". Будем говорить, что координатные системы S и S' принадлежат одной и той же системе отсчета, если выполняются условия (1.3) и (1.9). Пусть, кроме того, системы S' и S'' принадлежат одной и той же системе отсчета, т. е.

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{0'}} \equiv 0\,. \tag{1.10}$$

Так как вообще

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{0}} = \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{0}}\,, \tag{1.11}$$

то, вследствие (1.3) и (1.10),

$$\frac{\partial x^{k''}}{\partial x^{0}} \equiv 0\,, \tag{1.12}$$

т. е. координатные системы S и S'' принадлежат одной и той же системе отсчета. Иначе говоря, если системы S и S' связаны преобразованиями (1.4) и системы S' и S'' связаны преобразованиями (1.4), то системы S и S'' тоже связаны преобразованиями вида (1.4).

Таким образом, мы можем определить систему отсчета как совокупность систем координат, связанных между собой преобразованиями вида (1.4). Механически, смысл системы отсчета легко усматривается в соотношении (1.5): это совокупность координатных систем, покоящихся друг относительно друга. Возьмем любую систему отсчета. Не переходя к другим преобразованиям, мы будем иметь дело с преобразованиями (1.4). Их можно заменить совокупностью преобразований: преобразованиями пространственных координат при сохранении временно́й координаты

$$\left.\begin{aligned} x^{0'} &= x^{0'} \\ x^{i'} &= x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned}\right\}, \tag{1.13}$$

и преобразованием временной координаты при сохранении пространственных координат

$$\left.\begin{aligned} x^{0'} &= x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x^{i'} &= x^{i'} \end{aligned}\right\} . \tag{1.14}$$

Предположим, что мы имеем соотношение, справедливое для данной системы отсчета. Чтобы оно сохраняло свой вид при любых точечных преобразованиях четырех координат “внутри” данной системы отсчета, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло вид, во-первых, при преобразованиях (1.13) и, во-вторых, при преобразованиях (1.14), или, при преобразованиях

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3)\,, \tag{1.15}$$

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3)\,. \tag{1.16}$$

§ 2.2 Пространство и суб-тензоры

Мы будем пользоваться понятием трехмерного пространства системы отсчета, или, короче — *пространства отсчета*, определив точку этого пространства как мировую линию, определенную в данной системе отсчета уравнениями

$$x^i = a^i\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{2.1}$$

где a^i некоторые числа. Тогда преобразования (1.15) можно рассматривать как преобразования координат в этом пространстве и пользоваться исчислением трехмерных тензоров, которые мы, в отличие от четырехмерных тензоров, будем называть *суб-тензорами*. Очевидно, мировые инварианты и чисто временны́е компоненты мировых тензоров являются суб-инвариантами (трехмерными инвариантами), а пространственно-временны́е и чисто пространственные компоненты мировых тензоров — компонентами некоторых суб-тензоров, ранг которых равен числу значащих (т. е. отличных от нуля) индексов. Разумеется, нижние индексы указывают на ковариантность, а верхние — на контравариантность. Вообще можно написать символическое равенство

$$(1+t)^r = t^0 + rt^1 + \frac{r\,(r-1)}{1{\times}2}\,t^2 + \frac{r\,(r-1)\,(r-2)}{1{\times}2{\times}3}\,t^3 + \,\ldots\,, \tag{2.2}$$

читая его так: $(1+t)$-мерный тензор ранга r распадается на t-мерные тензоры, именно — один t-мерный тензор нулевого ранга (инвариант), r тензоров 1-го ранга (векторов), $\dfrac{r(r-1)}{1\times 2}$ тензоров 2-го ранга, $\dfrac{r(r-1)(r-2)}{1\times 2\times 3}$ тензоров 3-го ранга и т. д., в данном случае $t=3$. Разумеется, если исходный $(1+t)$-мерный тензор обладает свойством симметрии, то среди t-мерных тензоров, на которые он распадается, имеются одинаковые. Как легко видеть, например, мировой ковариантный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ распадается на суб-инвариант g_{00}, ковариантный суб-вектор g_{0i} и ковариантный симметричный суб-тензор 2-го ранга g_{ik}, а мировой контравариантный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ распадается на суб-инвариант g^{00}, контравариантный суб-вектор g^{0i} и контравариантный симметричный суб-тензор 2-го ранга g^{ik}. Действительно, при преобразованиях (1.13) мы имеем

$$g'_{00} = g_{00}\,, \qquad g'_{0i} = g_{0j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,, \qquad g'_{ik} = g_{jl}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}}\,, \tag{2.3}$$

$$g^{00'} = g^{00}\,, \qquad g^{0i'} = g^{0j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\,, \qquad g^{ik'} = g^{jl}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,. \tag{2.4}$$

Суб-тензорными величинами являются также некоторые мировые символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода. В самом деле, из общих формул преобразований символов Кристоффеля*

$$\Gamma'_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\alpha\beta,\xi}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\xi}{\partial x^{\sigma'}} + g_{\varepsilon\xi}\frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial x^{\mu'} x^{\nu'}}\frac{\partial x^\xi}{\partial x^{\sigma'}}\,, \tag{2.5}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}{}' = \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\xi} + \frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x^{\mu'} x^{\nu'}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\xi} \tag{2.6}$$

и из (1.13) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma'_{00,0} = \Gamma_{00,0}\,, && \Gamma'_{00,i} = \Gamma_{00,j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,,\\ &\Gamma'_{0i,0} = \Gamma_{0j,0}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,, && \Gamma'_{0i,k} = \Gamma_{0j,l}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^{0}_{00}{}' = \Gamma^{0}_{00}\,, \qquad \Gamma^{i}_{00}{}' = \Gamma^{j}_{00}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\,, \qquad \Gamma^{0}_{0i}{}' = \Gamma^{0}_{0j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\,,\\ &\Gamma^{k}_{0i}{}' = \Gamma^{l}_{0j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\,, \qquad \Gamma^{0}_{ik}{}' = \Gamma^{0}_{jl}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} \end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

*Формулу (2.6) сравн. с (33) из [62], стр. 412. Формула (2.5) получается без труда из (2.6).

То есть, $\Gamma_{00,0}$ и Γ^0_{00} суб-инварианты, $\Gamma_{00,i}$, $\Gamma_{0i,0}$ и Γ^0_{0i} ковариантные суб-векторы, Γ^i_{00} контравариантный суб-вектор, $\Gamma_{0i,k}$, Γ^k_{0i} и Γ^0_{ik} соответственно ковариантный, смешанный и симметричный ковариантные суб-тензоры 2-го ранга. Но $\Gamma_{ik,0}$, $\Gamma_{ik,j}$ и Γ^j_{ik} не принадлежат к числу суб-тензоров.

Мы будем также вводить новые суб-инварианты, суб-векторы и суб-тензоры. Например, суб-инвариант w и суб-вектор v_i, определяемые соотношениями

$$g_{00} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2, \tag{2.9}$$

$$g_{0i} = -\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{v_i}{c}, \tag{2.10}$$

$$1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2} > 0\,. \tag{2.11}$$

§ 2.3 Время, ко-величины и х.и.-величины

Обратимся теперь к преобразованиям времени (1.16). Суб-инварианты, суб-векторы и суб-тензоры, вообще, величины, изменяющиеся при этих преобразованиях времени, мы будем называть *ко-величинами*: *ко-инвариантами*, *ко-векторами*, *ко-тензорами**. Суб-инварианты, суб-векторы и суб-тензоры, вообще, величины, инвариантные относительно преобразований времени (1.16), мы будем называть *хронометрически инвариантными величинами* (короче — хронометрическими инвариантами): *х.и.-инвариантами*, *х.и.-векторами*, *х.и.-тензорами*. Как легко видеть, g_{00}, g_{0i}, g_{ik}, g^{00} и g^{0i} ко-величины, тогда как g^{ik} х.и.-тензор.

Теорема† *Пусть $A^{ij\ldots k}_{00\ldots 0}$ компонента мирового тензора, все верхние индексы которой значащие, а все нижние m индексов — нулевые. Пусть далее, $B_{00\ldots 0}$ чисто временна́я компонента мирового ковариантного тензора n-го ранга. Тогда, вследствие (1.16) или (1.14), мы имеем*

$$A^{ij\ldots k\,\prime}_{00\ldots 0} = A^{ij\ldots k}_{00\ldots 0}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^m, \tag{3.1}$$

*Как видно, приставка "ко" имеет здесь, и в дальнейшем, смысл, отличный от придаваемого ей в геометрии Вейля (см., например, [7], стр. 380).

†Мы называем эту теорему *теоремой Зельманова*. — Прим. ред., Д. Р.

$$B'_{00\ldots 0} = B_{00\ldots 0}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^n , \tag{3.2}$$

так что

$$Q^{ij\ldots k} = \frac{A^{ij\ldots k}_{00\ldots 0}}{(B_{00\ldots 0})^{\frac{m}{n}}} \tag{3.3}$$

представляет собой компоненту контравариантного х.и.-тензора. В качестве $B_{00\ldots 0}$ мы будем в дальнейшем брать g_{00}

$$Q^{ij\ldots k} = \frac{A^{ij\ldots k}_{00\ldots 0}}{(g_{00})^{\frac{m}{2}}} . \tag{3.4}$$

Отметим, что $\dfrac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}}$ также является х.и.-тензорной величиной (х.и.-вектором), как в этом легко убедиться.

§ 2.4 Потенциалы

Ко-инвариант w и ко-вектор v_i мы назовем, соответственно, *скалярным* и *векторным потенциалами*.

Покажем, что во всякой системе отсчета всегда можно преобразовать временну́ю координату так, чтобы в любой наперед заданной мировой точке*

$$x^\sigma = a^\sigma , \qquad a^\sigma = const^\sigma , \qquad \sigma = 0, 1, 2, 3 , \tag{4.1}$$

величины $\widetilde{\mathrm{w}}$, $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}_3$ принимали любую наперед заданную систему значений $(\widetilde{\mathrm{w}})_a$, $(\tilde{v}_1)_a$, $(\tilde{v}_2)_a$, $(\tilde{v}_3)_a$, допускаемую условием (2.11). Пусть

$$\tilde{x}^0 = A_\sigma x^\sigma , \qquad A_\sigma = const_\sigma , \tag{4.2}$$

тогда

$$(g_{00})_a = (\tilde{g}_{00})_a (A_0)^2 , \qquad (g_{0i})_a = \Big[(\tilde{g}_{00})_a A_i + (\tilde{g}_{0i})_a\Big] A_0 , \tag{4.3}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{(g_{00})_a}}{\sqrt{(\tilde{g}_{00})_a}} , \quad A_i = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{g}_{00})_a}}\left[\frac{\sqrt{(g_{0i})_a}}{\sqrt{(g_{00})_a}} - \frac{\sqrt{(\tilde{g}_{0i})_a}}{\sqrt{(\tilde{g}_{00})_a}}\right] , \tag{4.4}$$

или, иначе

$$A_0 = \frac{1}{1 - \dfrac{(\widetilde{\mathrm{w}})_a}{c^2}}\left[1 - \frac{(\mathrm{w})_a}{c^2}\right] , \qquad A_i = \frac{(\tilde{v}_i)_a - (v_i)_a}{c\left[1 - \dfrac{(\widetilde{\mathrm{w}})_a}{c^2}\right]} . \tag{4.5}$$

---

*Тильдой мы будем обозначать преобразованные величины, значком a эти же величины в мировой точке (4.1).

Таким образом, каковы бы ни были значения потенциалов в данной мировой точке при старой временно́й координате и каковы бы ни были допустимые заданные значения их при новой временно́й координате, соответствующие числа A_σ могут быть найдены и, при том, однозначным образом.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться приемом изменения потенциалов, т. е. придания им тех или иных нужных нам (в интересующей нас мировой точке) значений. В частности, обращение потенциалов в нуль — мы будем называть этот прием *методом вариации потенциалов*.

§ 2.5 Х.и.-дифференцирование

Операторы обычного дифференцирования по временно́й координате и по пространственным координатам

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\,, \tag{5.1}$$

вообще говоря, неинвариантны относительно преобразований (1.14). В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial x^{0'}} = \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} \neq \frac{\partial}{\partial x^0}\,, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial x^{i'}} \neq \frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{5.3}$$

Поэтому обычное дифференцирование мы будем называть *ко-дифференцированием*. Но можно ввести *х.и.-дифференцирование* по временно́й и пространственным координатам, которое является обобщением обычного дифференцирования и операторы которого инвариантны относительно преобразований (1.14).

Пусть дана произвольная система координат x^0, x^1, x^2, x^3. Введем новую систему координат $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$, принадлежащую к той же системе отсчета, отличающуюся от старой лишь временно́й координатой

$$\left.\begin{aligned} & x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \\ & x^i = \tilde{x}^i \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

и обращающую потенциалы в нуль в интересующей нас мировой точке (4.1), так что

$$(\tilde{g}_{00})_a = 1\,, \qquad (\tilde{g}_{0i})_a = 0\,, \tag{5.5}$$

следовательно

$$
\begin{aligned}
&(g_{00})_a \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\right)^2_a = 1\,, \\
&(g_{00})_a \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i}\right)_a + (g_{0i})_a = 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Возьмем в мировой точке (4.1) производные по временно́й и пространственным координатам новой системы и преобразуем их к старой системе координат. Получаем

$$
\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^0}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_a \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\right)_a , \tag{5.7}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a + \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_a \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i}\right)_a . \tag{5.8}
$$

Но из (5.6) мы имеем

$$
\left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\right)_a = \frac{1}{\sqrt{(g_{00})_a}}\,, \qquad \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i}\right)_a = -\frac{(g_{0i})_a}{(g_{00})_a}\,, \tag{5.9}
$$

поэтому

$$
\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^0}\right)_a = \frac{1}{\sqrt{(g_{00})_a}} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_a , \tag{5.10}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a - \frac{(g_{0i})_a}{(g_{00})_a} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)_a . \tag{5.11}
$$

Так как (5.10) и (5.11) справедливы для любой мировой точки и при любой системе координат x^0, x^1, x^2, x^3, то операторы дифференцирования

$$
\frac{{}^*\partial}{\partial x^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0}\,, \tag{5.12}
$$

$$
\frac{{}^*\partial}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{5.13}
$$

должны быть инвариантны относительно преобразований (1.14). В этом можно убедиться непосредственно. В самом деле

$$
\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{g'_{00} \left(\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2}} \frac{\partial}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{g'_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^{0'}}\,, \tag{5.14}
$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^{i'}}+\frac{\partial}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i}-$$

$$-\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\frac{\left(g'_{00}\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}+g'_{0i}\right)}{\sqrt{g'_{00}\left(\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2}}\frac{1}{\sqrt{g'_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^{0'}}=\frac{\partial}{\partial x^{i'}}-\frac{g'_{0i}}{g'_{00}}\frac{\partial}{\partial x^{0'}}\,. \tag{5.15}$$

Операторы (5.12) и (5.13) мы и примем как *операторы хронометрически инвариантного дифференцирования* (операторы х.и.-дифференцирования), соответственно, по временно́й и пространственным координатам. Из способа получения операторов х.и.-дифференцирования, т. е. из (5.10) и (5.11), становится ясным и геометрический — в четырехмерном мире — смысл х.и.-дифференцирования. Х.и.-дифференцирование по временно́й координате равносильно дифференцированию по собственному времени данной системы отсчета в данной точке. Х.и.-дифференцирование по пространственной координате представляет собою пространственное дифференцирование вдоль линии, ортогональной к линии времени системы отсчета. Действительно,

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{x^i=const}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_{x^i=const}=\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)_{x^i=const}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,, \tag{5.16}$$

$$\left(\frac{^*\partial}{\partial x^i}\right)_{g_{0i}=0}=\frac{\partial}{\partial x^i}\,. \tag{5.17}$$

Дадим и другие выражения для операторов х.и.-дифференцирования. Очевидно

$$\frac{^*\partial}{\partial x^0}=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,, \tag{5.18}$$

$$\frac{^*\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,. \tag{5.19}$$

Если ввести

$$v_0=\frac{\mathrm{w}}{c}\,, \tag{5.20}$$

тогда

$$\frac{^*\partial}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\sigma}+\frac{v_\sigma}{c-v_0}\frac{\partial}{\partial x^0}\,. \tag{5.21}$$

Если же ввести

$$t=\frac{x^0}{c}\,, \tag{5.22}$$

тогда

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\,, \tag{5.23}$$

$$\frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{v_i}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{5.24}$$

Пусть Q х.и.-величина, т. е. при (1.14)

$$Q' = Q\,. \tag{5.25}$$

Тогда и

$$\frac{{}^*\partial Q'}{\partial x^{\sigma\prime}} = \frac{{}^*\partial Q}{\partial x^{\sigma}}\,, \tag{5.26}$$

т. е. х.и.-производная от х.и.-величины есть х.и.-величина.

Как легко видеть, х.и.-производная по временно́й координате от х.и.-тензора есть х.и.-тензор того же ранга. Х.и.-производная по пространственным координатам от х.и.-инварианта есть ковариантный х.и.-вектор (вопрос об х.и.-дифференцировании тензоров ненулевого ранга по пространственным координатам будет рассмотрен ниже).

§ 2.6 Перемена порядка х.и.-дифференцирования

Предположим, что дифференцируемые величины удовлетворяют условиям, при которых

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x^i}\,, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^i}\,. \tag{6.2}$$

Тогда, соответственно, мы имеем для первого

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial t} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial t\, \partial x^i} = \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{{}^*\partial}{\partial t}\right) - \frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{v_i}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\right) -$$
$$- \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_i}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial}{\partial t}\right) =$$
$$= \frac{c^2}{(c^2 - \mathrm{w})^2} \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial t} + \frac{c^2 v_i}{(c^2 - \mathrm{w})^3} \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} +$$
$$+ \frac{c^2 v_i}{(c^2 - \mathrm{w})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x^i} - \frac{c^2}{(c^2 - \mathrm{w})^2} \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} -$$

$$
-\frac{c^2 v_i}{(c^2-\mathrm{w})^3}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{c^2 v_i}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=
$$

$$
=\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\frac{^*\partial}{\partial t}, \tag{6.3}
$$

и для второго

$$
\frac{^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}-\frac{^*\partial^2}{\partial x^k \partial x^i}=\frac{^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{^*\partial}{\partial x^k}\right)-\frac{^*\partial}{\partial x^k}\left(\frac{^*\partial}{\partial x^i}\right)=
$$

$$
=\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^k}+
$$

$$
+\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\right)-
$$

$$
-\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}-\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t}+
$$

$$
+\frac{v_k}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial t}+\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^k}+
$$

$$
+\frac{v_i}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial v_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_i v_k}{(c^2-\mathrm{w})^3}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_i v_k}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-
$$

$$
-\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{v_i}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial t}- \tag{6.4}
$$

$$
-\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x^i}-\frac{v_k}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{v_k v_i}{(c^2-\mathrm{w})^3}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}-
$$

$$
-\frac{v_k v_i}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left[\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{v_k}{(c^2-\mathrm{w})^2}\times\right.
$$

$$
\left.\times\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)-\frac{v_i}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k}-\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial}{\partial t}=
$$

$$
=\left[\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{v_k}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)-\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\times\right.
$$

$$
\left.\times\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k}-\frac{\partial v_k}{\partial t}\right)\right]\frac{1}{c^2}\frac{^*\partial}{\partial t}.
$$

Введем обозначения

$$
F_i=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right), \tag{6.5}
$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k - F_k v_i\right), \tag{6.6}$$

тогда

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial t} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial t\, \partial x^i} = \frac{1}{c^2} F_i \frac{{}^*\partial}{\partial t}, \tag{6.7}$$

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2} A_{ik} \frac{{}^*\partial}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Из (6.5) и (6.6) видно, что F_i есть ковариантный вектор, а A_{ik} антисимметричный ковариантный тензор 2-го ранга. Нетрудно убедиться, что они являются, соответственно, х.и.-вектором и х.и.-тензором. В самом деле, пусть Q произвольный х.и.-инвариант. Рассмотрим равенства

$$\frac{{}^*\partial^2 Q}{\partial x^i \partial t} - \frac{{}^*\partial^2 Q}{\partial t\, \partial x^i} = \frac{1}{c^2} F_i \frac{{}^*\partial Q}{\partial t}, \tag{6.9}$$

$$\frac{{}^*\partial^2 Q}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2 Q}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2} A_{ik} \frac{{}^*\partial Q}{\partial t}. \tag{6.10}$$

В левых частях этих равенств стоят х.и.-величины, в правых — произведения, соответственно, F_i и $2A_{ik}$ на х.и.-величину $\frac{{}^*\partial Q}{\partial t}$. Следовательно, F_i и A_{ik} суть х.и.-величины. В силу связи их с потенциалами мы будем называть их "силовыми" величинами: *силовым вектором* F_i и *силовым тензором* A_{ik}.

§ 2.7 Силовые величины

Пусть всюду в некоторой четырехмерной области в координатной системе S'

$$\mathrm{w}' = 0. \tag{7.1}$$

Тогда в координатной системе S, (принадлежащей к той же системе отсчета)

$$g_{00}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2 = 1. \tag{7.2}$$

Обратно, из (7.2) следует (7.1). Таким образом, всегда можно обратить скалярный потенциал в нуль во всей заданной четырехмерной области, введя в ней новую временну́ю координату $x^{0'}$, удовлетворяющую условию (7.2).

Обращение в нуль силового вектора в данной четырехмерной области в данной системе отсчета необходимо и достаточно для возможности обращения в нуль скалярного потенциала и производной от векторного потенциала по времени (во всей области). В самом деле, пусть при некотором выборе временно́й координаты

$$\mathrm{w} \equiv 0\,, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} \equiv 0\,, \tag{7.3}$$

тогда

$$F_i \equiv 0\,. \tag{7.4}$$

Обратно, пусть имеет место (7.4). Введя временну́ю координату так, чтобы выполнялось первое из равенств (7.3), мы получим второе из них вследствие (7.4).

Обращение в нуль силового тензора в данной четырехмерной области в данной системе отсчета необходимо и достаточно для возможности обращения в нуль векторного потенциала (во всей области). В самом деле, пусть существует такая координатная система

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}^{i'} = \tilde{x}^{0'}(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &\tilde{x}^{i'} = x^{i'} \end{aligned}\right\}\,, \tag{7.5}$$

при введении которой

$$\tilde{v}_i \equiv 0\,. \tag{7.6}$$

Тогда, и только тогда, всюду в данной области

$$g_{00} = \tilde{g}_{00}\left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\right)^2\,, \qquad g_{0i} = \tilde{g}_{00}\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i}\,, \tag{7.7}$$

так что

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} = \frac{c^2 - \mathrm{w}}{c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}}\,, \qquad \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i} = -\frac{c\,v_i}{c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}}\,. \tag{7.8}$$

С другой стороны

$$d\tilde{x}^0 = \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i}dx^i\,. \tag{7.9}$$

Поэтому мы можем написать

$$d\tilde{x}^0 = \frac{(c^2 - \mathrm{w})dx^0 - cv_i\,dx^i}{c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}} \tag{7.10}$$

или, вводя

$$t = \frac{x^0}{c}\,, \qquad \tilde{t} = \frac{\tilde{x}^0}{c}\,, \tag{7.11}$$

следующее

$$d\tilde{t} = \frac{(c^2 - \mathrm{w})dt - cv_i dx^i}{c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}}\,. \tag{7.12}$$

Для существования $d\tilde{t}$ необходимо и достаточно выполнения точных условий полной интегрируемости пфаффова уравнения

$$-(c^2 - \mathrm{w})dt + v_i dx^i = 0\,. \tag{7.13}$$

В качестве необходимых и достаточных условий полной интегрируемости уравнений Пфаффа

$$N du + P dx + Q dy + R dz = 0 \tag{7.14}$$

можно принять любые три из четырех соотношений (четвертое является их следствием)

$$\left.\begin{aligned} N\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial u}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\equiv 0\\ N\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial u}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\equiv 0\\ N\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial u}\right)+P\left(\frac{\partial R}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\equiv 0 \end{aligned}\right\}, \tag{7.15}$$

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\equiv 0\,. \tag{7.16}$$

Полагая в них

$$N = -(c^2 - \mathrm{w})\,,\quad P = v_1\,,\quad Q = v_2\,,\quad R = v_3\,, \tag{7.17}$$

$$u = t\,,\qquad x = x^1,\qquad y = x^2,\qquad z = x^3, \tag{7.18}$$

после почленного деления на $2(c^2 - \mathrm{w})$ получаем

$$A_{ik} \equiv 0\,. \tag{7.19}$$

Отметим, что последнее (7.16) из упомянутых условий принимает, соответственно, вид

$$A_{12}v_3 + A_{23}v_1 + A_{31}v_2 \equiv 0\,. \tag{7.20}$$

Очевидно, одновременное выполнение условий $F_i \equiv 0$ (7.4) и $A_{ik} \equiv 0$ (7.19) не только необходимо, но и достаточно для возможности обращения в нуль скалярного и векторного потенциалов во всей данной четырехмерной области. Действительно, (7.19) позволяет обратить в нуль векторный потенциал v_i. При этом, вследствие (7.4), скалярный потенциал оказывается функцией только временно́й координаты t. Тогда мы вводим новую временну́ю координату $\tilde{t}$ так, чтобы

$$d\tilde{t} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt\,. \tag{7.21}$$

§ 2.8 Метрика пространства

В любой системе отсчета при произвольной координате времени

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}\,dx^0 dx^i + g_{ik}\,dx^i dx^k. \tag{8.1}$$

Обращая в данной мировой точке потенциалы в нуль переходом к новой координате времени $\tilde{x}^0$, получаем

$$ds^2 = (d\tilde{x}^0)^2 - d\sigma^2, \tag{8.2}$$

причем

$$d\sigma^2 = -\tilde{g}_{ik}\,dx^i dx^k \tag{8.3}$$

есть, очевидно, квадрат пространственного линейного элемента. Преобразуем (8.3) к произвольной координате времени x^0. В данной мировой точке

$$\left.\begin{aligned} & g_{00}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\right)^2 = 1 \\ & g_{00}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i} + g_{0i}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} = 0 \\ & g_{00}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^k} + g_{0i}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^k} + g_{0k}\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i} + g_{ik} = \tilde{g}_{ik} \end{aligned}\right\}. \tag{8.4}$$

Исключая $\dfrac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}$, $\dfrac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i}$, $\dfrac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^k}$ из (8.4), получаем

$$\tilde{g}_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}}\,. \tag{8.5}$$

Следовательно, вообще*

$$d\sigma^2 = \left(-g_{ik} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i dx^k. \tag{8.6}$$

*Это выражение может быть получено также из других соображений — см., например, [64], стр. 200–201.

Таким образом, мы можем ввести ковариантный метрический суб-тензор h_{ik}

$$d\sigma^2 = h_{ik}\,dx^i dx^k, \tag{8.7}$$

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}}\,, \tag{8.8}$$

так что

$$g_{ik} = -h_{ik} + \frac{v_i v_k}{c^2}\,. \tag{8.9}$$

Из (8.5) следует, что h_{ik} должен быть инвариантом относительно преобразований (1.14). В этом можно убедиться и непосредственно

$$\begin{aligned}
&h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}\,g_{0k}}{g_{00}} = \\
&= -\left(g'_{00}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} + g'_{0i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k} + g'_{0k}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i} + g'_{ik}\right) + \\
&+ \frac{\left(g'_{00}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} + g'_{0i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)\left(g'_{00}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} + g'_{0k}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)}{g'_{00}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2} = \\
&= -g'_{00}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k} - g'_{0i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k} - g'_{0k}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i} - g'_{ik} + \\
&+ \frac{1}{g'_{00}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2}\left[\left(g'_{00}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k} + \right. \\
&+ g'_{00}g'_{0i}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k} + g'_{00}g'_{0k}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i} + \\
&\left. + g'_{0i}g'_{0k}\left(\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}\right)^2\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^k}\right] = -\,g'_{ik} + \frac{g'_{0i}g'_{0k}}{g'_{00}} = h'_{ik}\,.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Таким образом, ковариантный метрический суб-тензор h_{ik} представляет собой *метрический х.и.-тензор*. Очевидно, контравариантный метрический суб-тензор h^{ik}, составляющие которого определены как адъюнкты детерминанта

$$h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}, \tag{8.11}$$

деленные на h, есть также х.и.-тензор. Так как детерминанты (8.11) и

$$\tilde{g} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ 0 & \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ 0 & \tilde{g}_{31} & \tilde{g}_{32} & \tilde{g}_{33} \end{vmatrix} \tag{8.12}$$

различаются только знаками, то адъюнкты их, отвечающие элементам с одними и теми же индексами $i, k = 1, 2, 3$, равны. Тогда

$$h^{ik} = -\tilde{g}^{ik}. \tag{8.13}$$

Но и в (8.13) и слева и справа стоят х.и.-тензоры. Следовательно, и вообще

$$h^{ik} = -g^{ik}. \tag{8.14}$$

Мы можем ввести также смешанный метрический суб-тензор h_i^k, являющийся х.и.-тензором

$$h_i^k = +g_i^k\,. \tag{8.15}$$

Найдем также связь h с мировыми величинами. Известно, что

$$\begin{vmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{g}\,, \tag{8.16}$$

$$\begin{vmatrix} h^{11} & h^{12} & h^{13} \\ h^{21} & h^{22} & h^{23} \\ h^{31} & h^{32} & h^{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{h}\,, \tag{8.17}$$

а величины $g_{\mu\nu}$ и h_{ik} равны, соответственно, умноженным на g или h адъюнктам детерминантов (3.16) и (3.17), отвечающим $g^{\mu\nu}$ и h^{ik}. Тогда, вследствие (8.14) мы имеем

$$g_{00} = -\frac{g}{h}\,, \tag{8.18}$$

или, иначе

$$\sqrt{-g} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\sqrt{h}\,, \tag{8.19}$$

где очевидно, что h, не являясь суб-инвариантом, есть х.и.-величина.

Пользуясь метрическими х.и.-тензорами, мы можем производить операции свертывания, подстановки, опускания и поднимания значащих индексов, инвариантные относительно преобразований (1.14) и, следовательно, переводящие х.и.-величины в х.и.-величины, а ко-величины — в ко-величины (исключение составляет случай, когда ко-величина в результате свертывания исчезает). Так, мы можем образовать контравариантный вектор-потенциал (ко-вектор)

$$v^i = h^{ij} v_j \tag{8.20}$$

и квадрат длины векторного потенциала (ко-инвариант)

$$v_i v^i = h_{ik} v^i v^k = h^{ik} v_i v_k \,. \tag{8.21}$$

Так как

$$g_{00} g^{0i} + g_{0j} g^{ji} = g_0^i = 0 \,, \tag{8.22}$$

$$g_{00} g^{00} + g_{0j} g^{j0} = g_0^0 = 1 \,, \tag{8.23}$$

то мы имеем

$$g^{0i} = -\frac{1}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}} \frac{v^i}{c} \,, \tag{8.24}$$

$$g^{00} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2} \left(1 - \frac{v_j v^j}{c^2}\right). \tag{8.25}$$

Можно ввести также операции ковариантного дифференцирования. Однако, эти операции не инвариантны относительно преобразований временно́й координаты. Поэтому введем х.и.-ковариантное дифференцирование, являющееся обобщением обычного ковариантного дифференцирования, и, кроме того, инвариантное относительно указанных преобразований времени. При этом нам придется дифференцировать h_{ik}, h^{ik} и h по временно́й координате. Поэтому мы сначала займемся выяснением кинематического смысла величин, получаемых при этом дифференцировании, для чего введем, прежде всего, х.и.-скорость.

§ 2.9 Х.и.-вектор скорости

Пусть какая-либо точка движется относительно данной системы отсчета. Вектор ее скорости относительно этой системы отсчета

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} = c\,\frac{dx^i}{dx^0} \tag{9.1}$$

есть, как легко видеть, ко-вектор.

На мировой линии движущейся точки возьмем произвольную мировую точку и, соответствующим выбором временно́й координаты $\tilde{x}^0$ обратим в ней потенциалы в нуль.

Ко-вектор скорости

$$\tilde{u}^i = c\,\frac{dx^i}{d\tilde{x}^0}\,, \tag{9.2}$$

отвечающий временно́й координате $\tilde{x}^0$, преобразуем к произвольной временно́й координате x^0. Так как

$$d\tilde{x}^0 = \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^j}dx^j, \tag{9.3}$$

$$g_{00} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\right)^2, \qquad g_{0i} = \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i}\,, \tag{9.4}$$

следовательно

$$d\tilde{x}^0 = \sqrt{g_{00}}\,dx^0 + \frac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}}dx^j, \tag{9.5}$$

$$\frac{dx^i}{d\tilde{x}^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}} + \dfrac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{dx^j}{dx^0}}\frac{dx^i}{dx^0}\,, \tag{9.6}$$

$$\tilde{u}^i = \frac{c^2 u^i}{c^2 - \mathrm{w} - v_j u^j}\,. \tag{9.7}$$

Из (9.6) следует, что правая часть этого равенства и, следовательно, правая часть (9.7) должны быть инвариантны относительно преобразований (1.14).

Действительно, так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x^0}{\partial x^0} &= \frac{\partial x^0}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^0} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} = 1 \\ \frac{\partial x^0}{\partial x^j} &= \frac{\partial x^0}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^{0'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^0}{\partial x^{j'}} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{9.8}$$

$$g'_{00} = g_{00}\left(\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2, \qquad g'_{0j} = g_{00}\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\frac{\partial x^0}{\partial x^{j'}} + g_{0j}\frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\,, \tag{9.9}$$

следовательно

$$\frac{1}{\sqrt{g'_{00}} + \dfrac{g'_{0j}}{\sqrt{g'_{00}}}\dfrac{dx^{j'}}{dx^0}}\frac{dx^{i'}}{dx^{0'}} = \frac{\sqrt{g'_{00}}\,dx^{i'}}{g'_{00}dx^{0'} + g'_{0j}dx^{j'}} =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{00}\left(\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2}\,dx^i}{g_{00}\left(\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)^2\left(\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}dx^0+\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^j}dx^j\right)+\left(g_{00}\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{j'}}+g_{0j}\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\right)dx^j} =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{00}}\,dx^i}{g_{00}\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^0}dx^0 + g_{00}\left(\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{0'}}\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^j}+\dfrac{\partial x^0}{\partial x^{j'}}\right)dx^j + g_{0j}dx^j} =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{00}}\,dx^i}{g_{00}dx^0 + g_{0j}dx^j} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}+\dfrac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}}\dfrac{dx^j}{dx^0}}\frac{dx^i}{dx^0}\,. \tag{9.10}$$

Таким образом, мы можем ввести *х.и.-вектор скорости* или, короче, *х.и.-скорость*

$$^*u^i \equiv \frac{c^2u^i}{c^2 - \mathrm{w} - v_j u^j}\,. \tag{9.11}$$

Х.и.-скорость можно ввести, исходя также из других соображений. Введем ковариантный дифференциал времени*

$$dx_0 = g_{0\alpha}dx^\alpha = g_{00}dx^0 + g_{0j}dx^j. \tag{9.12}$$

Так как $\dfrac{dx_0}{\sqrt{g_{00}}}$ есть х.и.-инвариант (см. §2.3), то величина

$$\sqrt{g_{00}}\,\frac{dx^i}{dx_0} = \frac{\sqrt{g_{00}}\,dx^i}{g_{00}dx^0 + g_{0j}dx^j} \tag{9.13}$$

есть х.и.-вектор, равный введенной нами х.и.-скорости, деленной на c.

§ 2.10 Х.и.-тензор скоростей деформации

Рассматривая деформацию непрерывной среды, отнесенную к какой-либо данной системе отсчета, мы можем ввести обычным образом ковариантный трехмерный тензор скоростей деформации Δ_{ik}

$$2\Delta_{ik} = \nabla_i\, u_k + \nabla_k\, u_i \tag{10.1}$$

или, в развернутом виде

$$2\Delta_{ik} = h_{kl}\frac{\partial u^l}{\partial x^i} + h_{il}\frac{\partial u^l}{\partial x^k} + (\Delta_{il,k} + \Delta_{kl,i})\,u^l, \tag{10.2}$$

*Эта величина, вообще говоря, не является полным дифференциалом.

где $\Delta_{pl,q}$ суть трехмерные символы (суб-символы) Кристоффеля 1-го рода

$$\Delta_{pl,q} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{pq}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{lq}}{\partial x^p} - \frac{\partial h_{pl}}{\partial x^q}\right). \tag{10.3}$$

Этот суб-тензор скоростей деформации является, как легко убедиться, ко-тензором. Но можно ввести *х.и.-тензор скоростей деформации* ${}^*\Delta_{ik}$, заменив ко-скорость соответствующим х.и.-вектором и ко-дифференцирование на х.и.-дифференцирование

$$2{}^*\Delta_{ik} = h_{kl}\frac{{}^*\partial\,{}^*u^l}{\partial x^i} + h_{il}\frac{{}^*\partial\,{}^*u^l}{\partial x^k} + ({}^*\Delta_{il,k} + {}^*\Delta_{kl,i}){}^*u^l, \tag{10.4}$$

где обозначено*

$${}^*\Delta_{pl,q} = \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial h_{pq}}{\partial x^l} + \frac{{}^*\partial h_{lq}}{\partial x^p} - \frac{{}^*\partial h_{pl}}{\partial x^q}\right). \tag{10.5}$$

В дальнейшем нас будет особо интересовать тот частный случай, когда в рассматриваемой точке

$${}^*u^l \equiv 0\,. \tag{10.6}$$

Для этого случая мы введем специальное обозначение х.и.-тензора скоростей деформации

$${}^*\Delta_{ik} = D_{ik}\,. \tag{10.7}$$

В этом случае†

$$u^l \equiv 0\,, \tag{10.8}$$

$$\frac{{}^*\partial\,{}^*u^l}{\partial x^s} = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial u^l}{\partial x^s}\,, \tag{10.9}$$

$$2D_{ik} = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(h_{kl}\frac{\partial u^l}{\partial x^i} + h_{il}\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right). \tag{10.10}$$

---

*Впоследствии Зельманов отказался от упоминания суб-символов Кристоффеля (10.3) как лишнего промежуточного этапа вычислений. Поэтому в последующих публикациях для х.и.-символов Кристоффеля использовалось простое обозначение (без звездочки), например, для х.и.-символов Кристоффеля 1-го рода (10.5) просто $\Delta_{pl,q}$. Здесь старые обозначения оставлены неизменными для наглядности вывода. — Прим. ред., Д. Р.

†Здесь Зельманов полагает, что при $u^i \to 0$ производная этой величины может быть вполне конечна и существенно отлична от нуля. При этом также предполагается стационарность данной величины, т. е. $\dot{u}^i = 0$. — Прим. ред., Д. Р.

Следовательно, ясно, что равенство (10.10) имеет место во всех координатных системах данной системы отсчета.

Вводя такие координаты

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0\,(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &\tilde{x}^i = x^i \end{aligned}\right\}, \tag{10.11}$$

чтобы

$$\widetilde{\mathrm{w}} = 0\,, \tag{10.12}$$

мы будем иметь, очевидно

$$2\widetilde{D}_{ik} = \tilde{h}_{kl}\,\frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial \tilde{x}^i} + \tilde{h}_{il}\,\frac{\partial \tilde{u}^l}{\partial \tilde{x}^k}\,. \tag{10.13}$$

С другой стороны, для ко-тензора скоростей деформации при условии $u^l \equiv 0$ (10.8), вообще говоря, мы имеем

$$2\Delta_{ik} = h_{kl}\,\frac{\partial u^l}{\partial x^i} + h_{il}\,\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\,, \tag{10.14}$$

следовательно

$$\widetilde{D}_{ik} = \widetilde{\Delta}_{ik}\,. \tag{10.15}$$

§ 2.11 Деформация пространства

Рассмотрим некоторую область, окружающую произвольную точку a данного пространства отсчета с координатами

$$x^i = a^i\,, \qquad a^i = const^i. \tag{11.1}$$

Ограничиваясь малым промежутком времени t, мы всегда можем взять область настолько малой, чтобы для любой ее точки в каждый момент времени (в данном промежутке времени) было однозначно определено геодезическое расстояние σ от рассматриваемой точки a. При достаточно малых $x^i - a^i$ величина σ^2 отличается от величины $(h_{pq})_a\,(x^p - a^p)(x^q - a^q)$ малыми высших порядков, так что, беря нашу область вокруг точки a достаточно малой, мы можем написать

$$\sigma^2 = \Big[(h_{pq})_a + \alpha_{pq,j}(x^j - a^j)\Big](x^p - a^p)(x^q - a^q)\,, \tag{11.2}$$

где $\alpha_{pq,j}$ конечны* (как легко видеть, $\alpha_{pq,j}$ можно считать симметричными относительно индексов p и q). Вообще говоря, h_{ik} суть

*Мы предполагаем, что рассматриваемые нами производные существуют и конечны.

функции t (пространство деформируется) и геодезические расстояния фиксированных точек данного пространства от точки a с течением времени меняются. Введем в рассмотрение также вспомогательную систему отсчета, назвав *локально-стационарной* в точке a и определив следующими условиями: (1) в точке a эта система закреплена относительно данной (исходной) системы отсчета так, что, если ${}^*u^i$ есть х.и.-скорость вспомогательной системы отсчета относительно данной (измеренная в данной исходной системе отсчета), то в точке a

$$ {}^*u^i \equiv 0\,; \tag{11.3}$$

(2) измеренные в данной системе отсчета геодезические расстояния от точки a до всех достаточно близких к ней фиксированных точек пространства вспомогательной системы отсчета остаются неизменными, так что для них

$$\frac{{}^*\partial\sigma^2}{\partial t} = 0\,. \tag{11.4}$$

Очевидно, система, локально-стационарная в данной точке, определена неоднозначно, лишь с точностью до произвольного вращения около данной точки. Дальнейшие рассуждения относятся к любой системе отсчета из бесчисленного множества систем, локально-стационарных в данной точке.

Из (11.4), вследствие (11.2), имеем

$$\begin{gathered}\left[\frac{{}^*\partial(h_{pq})_a}{\partial t}+\frac{{}^*\partial\alpha_{pq,j}}{\partial t}(x^j-a^j)+\frac{c^2\alpha_{pq,j}}{c^2-\mathrm{w}}u^j\right](x^p-a^p)(x^q-a^q)+\\ +\,2c^2\,\frac{(h_{pq})_a+\alpha_{pq,j}(x^j-a^j)}{c^2-\mathrm{w}}\,u^p(x^q-a^q)=0\,,\end{gathered} \tag{11.5}$$

где

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{11.6}$$

есть скорость пространства, локально-стационарного в точке a относительно данного пространства, измеренная в данной системе отсчета в точке x^i. Вводя обозначения

$$\Theta_{pq} = \frac{{}^*\partial(h_{pq})_a}{\partial t} + \frac{{}^*\partial\alpha_{pq,j}}{\partial t}(x^j-a^j) + \frac{c^2\alpha_{pq,j}}{c^2-\mathrm{w}}\,u^j, \tag{11.7}$$

$$\Xi_{pq} = 2c^2\,\frac{(h_{pq})_a+\alpha_{pq,j}(x^j-a^j)}{c^2-\mathrm{w}}\,, \tag{11.8}$$

мы можем переписать (11.5) в виде

$$\Theta_{pq}(x^p - a^p)(x^q - a^q) + \Xi_{pq} u^p (x^q - a^q) = 0\,. \tag{11.9}$$

Дифференцируя это равенство почленно дважды — последовательно по x^k и x^i, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \Theta_{pq}}{\partial x^i \partial x^k}(x^p - a^p)(x^q - a^q) + 2\left(\frac{\partial \Theta_{kq}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Theta_{iq}}{\partial x^k}\right)(x^q - a^q) + \\
+ 2\,\Theta_{ik} + \frac{\partial^2 \Xi_{pq}}{\partial x^i \partial x^k}\, u^p (x^q - a^q) + \left(\frac{\partial \Xi_{pq}}{\partial x^k}\frac{\partial u^p}{\partial x^i} + \frac{\partial \Xi_{pq}}{\partial x^i}\frac{\partial u^p}{\partial x^k}\right)\times \\
\times (x^q - a^q) + \Xi_{pq}\frac{\partial^2 u^p}{\partial x^i \partial x^k}(x^q - a^q) + \left(\frac{\partial \Xi_{iq}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Xi_{kq}}{\partial x^i}\right) u^q + \\
+ \left(\Xi_{iq}\frac{\partial u^q}{\partial x^k} + \Xi_{kq}\frac{\partial u^q}{\partial x^i}\right) = 0\,.
\end{gathered} \tag{11.10}$$

Переходя к точке a, мы, в силу первого из равенств (11.3), будем иметь

$$u^i = 0\,, \tag{11.11}$$

тогда

$$2\left(\Theta_{ik}\right)_a + \left(\Xi_{iq}\right)_a \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^k}\right)_a + \left(\Xi_{kq}\right)_a \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^i}\right)_a = 0\,. \tag{11.12}$$

Иначе говоря, т. к.

$$\left(\Theta_{ik}\right)_a = \frac{{}^*\partial\left(h_{ik}\right)_a}{\partial t}\,, \tag{11.13}$$

$$\left(\Xi_{ik}\right)_a = 2\,\frac{c^2\left(h_{ik}\right)_a}{c^2 - (\mathrm{w})_a}\,, \tag{11.14}$$

то мы имеем

$$\frac{{}^*\partial\left(h_{ik}\right)_a}{\partial t} + \frac{c^2}{c^2 - (\mathrm{w})_a}\left[\left(h_{kq}\right)_a \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^i}\right)_a + \left(h_{iq}\right)_a \left(\frac{\partial u^q}{\partial x^k}\right)_a\right] = 0 \tag{11.15}$$

или, окончательно

$$\frac{{}^*\partial\left(h_{ik}\right)_a}{\partial t} = -\left[\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(h_{kq}\frac{\partial u^q}{\partial x^i} + h_{iq}\frac{\partial u^q}{\partial x^k}\right)\right]_a. \tag{11.16}$$

Введем теперь х.и.-тензор скоростей деформации пространства данной системы отсчета относительно пространства, локально-стационарного в точке a, определенный в данной системе отсчета. Будем полагать

$$2^*\Delta_{ik} = h_{kq}\frac{{}^*\partial\, {}^*\bar{u}^q}{\partial x^i} + h_{iq}\frac{{}^*\partial\, {}^*\bar{u}^q}{\partial x^k} + \left({}^*\Delta_{iq,k} + {}^*\Delta_{kq,i}\right) {}^*\bar{u}^q, \qquad (11.17)$$

где ${}^*\bar{u}^q$ измеренная в данной системе отсчета х.и-скорость данного пространства относительно пространства, локально-стационарного в точке a. Очевидно, что

$${}^*\bar{u}^q = -{}^*u^q, \qquad (11.18)$$

где ${}^*u^q$ х.и-скорость пространства, локально-стационарного в точке a, измеренная относительно данного пространства. Следовательно,

$$2^*\Delta_{ik} = -\left(h_{kq}\frac{{}^*\partial\, {}^*u^q}{\partial x^i} + h_{iq}\frac{{}^*\partial\, {}^*u^q}{\partial x^k}\right) - \left({}^*\Delta_{iq,k} + {}^*\Delta_{kq,i}\right) {}^*u^q \qquad (11.19)$$

характеризует деформацию данного пространства в любой точке, достаточно близкой к точке a. В самой точке a выполняются условия (11.3) и, аналогично (10.10), находим

$$2\left({}^*\Delta_{ik}\right)_a = 2D_{ik} = -\left[\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(h_{kq}\frac{\partial u^q}{\partial x^i} + h_{iq}\frac{\partial u^q}{\partial x^k}\right)\right]_a . \qquad (11.20)$$

Мы получили выражение для х.и.-тензора скоростей деформации данного пространства в точке a относительно пространства, локально-стационарного в этой точке. Сравнение (11.20) и (11.16) дает

$$\frac{{}^*\partial\left(h_{ik}\right)_a}{\partial t} = 2\left(D_{ik}\right)_a . \qquad (11.21)$$

Так как точка a произвольная, то вообще*

$$\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t} = 2D_{ik} . \qquad (11.22)$$

Таким образом, в каждой данной точке пространства х.и.-производная по времени от ковариантного метрического х.и.-тензора равна удвоенному ковариантному х.и.-тензору скоростей деформации этого пространства (относительно пространства, локально-стационарного в данной точке).

*Полученное соотношение (11.22) Зельманов впоследствии назвал *теоремой о деформации пространства*, см. §2.13. — Прим. ред., Д. Р.

Рассмотрим $\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t}$. Так как

$$h_{ij}h^{jk} = h_i^k = \delta_i^k\,, \tag{11.23}$$

тогда

$$h_{ij}\frac{{}^*\partial h^{jk}}{\partial t} = -\frac{{}^*\partial h_{ij}}{\partial t}\,h^{jk} \tag{11.24}$$

и, вследствие (11.22)

$$h_{ij}\frac{{}^*\partial h^{jk}}{\partial t} = -2D_i^k\,. \tag{11.25}$$

Поднимая индекс i, получаем

$$\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t} = -2D^{ik}. \tag{11.26}$$

Таким образом, в каждой данной точке пространства х.и.-производная по времени от контравариантного метрического х.и.-тензора равна взятому с обратным знаком и удвоенному контравариантному х.и.-тензору скоростей деформации этого пространства (относительно локально-стационарного, в данной точке, пространства).

Рассмотрим $\frac{{}^*\partial h}{\partial t}$. По правилу дифференцирования определителей и согласно (11.22)

$$\frac{{}^*\partial h}{\partial t} = \begin{vmatrix} 2D_{11} & h_{12} & h_{13} \\ 2D_{21} & h_{22} & h_{23} \\ 2D_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & 2D_{12} & h_{13} \\ h_{21} & 2D_{22} & h_{23} \\ h_{31} & 2D_{32} & h_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & 2D_{13} \\ h_{21} & h_{22} & 2D_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 2D_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 2h\left(D_{i1}h^{i1} + D_{i2}h^{i2} + D_{i3}h^{i3}\right) = 2h\,h^{ik}D_{ik}\,. \tag{11.27}$$

Введя х.и.-инвариант скоростей деформации пространства в данной точке (относительно локально-стационарного, в этой точке, пространства)

$$D = h_{ik}\,D^{ik} = h^{ik}D_{ik} = D_j^j\,, \tag{11.28}$$

мы получаем

$$\frac{1}{h}\frac{{}^*\partial h}{\partial t} = 2D\,. \tag{11.29}$$

Таким образом, в каждой точке пространства логарифмическая производная по времени от фундаментального определителя равна удвоенному х.и.-инварианту скоростей деформации этого пространства (относительно пространства, локально-стационарного в данной точке).

Как видно, на наши выводы не влияет неединственность системы отсчета, локально-стационарной в данной точке.

В дальнейшем, опуская для краткости упоминание о локально-стационарных системе отсчета и пространстве, мы будем говорить просто о деформации пространства.

§ 2.12 Изменения пространственных элементов

Выведем для случая деформации пространства некоторые соотношения, аналогичные соотношениям для случая деформации среды.

Пусть $\delta\mathcal{L}^1_a$ длина элементарного координатного отрезка оси x^1

$$\delta\mathcal{L}^1_a = \sqrt{h_{11}}\,\left|\delta_a x^1\right|, \qquad \delta_a x^1 = const^1_a\,, \tag{12.1}$$

тогда (см., например, [62], стр. 365)

$$\frac{{}^*\partial(\delta\mathcal{L}^1_a)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{h_{11}}}\frac{{}^*\partial h_{11}}{\partial t}\left|\delta_a x^1\right| = \frac{D_{11}}{\sqrt{h_{11}}}\left|\delta_a x^1\right|, \tag{12.2}$$

$$\frac{1}{\delta\mathcal{L}^1_a}\frac{{}^*\partial(\delta\mathcal{L}^1_a)}{\partial t} = \frac{D_{11}}{h_{11}}\,. \tag{12.3}$$

Таким образом, отношение $\dfrac{D_{11}}{h_{11}}$ равно скорости относительного удлинения (вследствие деформации пространства) линейного элемента, направленного по оси x^1. Пусть, далее, δS^{23}_{ab} площадь элемента координатной поверхности x^2, x^3

$$\left.\begin{aligned} &\delta S^{23}_{ab} = \sqrt{\begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}}\left|\delta\Pi^{23}_{ab}\right| \\ &\delta\Pi^{23}_{ab} = \begin{vmatrix} \delta_a x^2 & \delta_a x^3 \\ \delta_b x^1 & \delta_b x^2 \end{vmatrix}, \quad \delta_a x^i = const^i_a\,,\;\; \delta_b x^i = const^i_b \end{aligned}\right\}. \tag{12.4}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{{}^*\partial\left(\delta S^{23}_{ab}\right)}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{hh^{11}}}\left(\frac{{}^*\partial h}{\partial t}h^{11} + h\frac{{}^*\partial h^{11}}{\partial t}\right)\left|\delta\Pi^{23}_{ab}\right| = \\ &= \frac{Dhh^{11} - hD^{11}}{\sqrt{hh^{11}}}\left|\delta\Pi^{23}_{ab}\right|\,, \end{aligned} \tag{12.5}$$

$$\frac{1}{\delta S_{ab}^{23}}\frac{{}^*\partial\left(\delta S_{ab}^{23}\right)}{\partial t}=D-\frac{D^{11}}{h^{11}}\,. \tag{12.6}$$

Таким образом, величина $D-\dfrac{D^{11}}{h^{11}}$ равна скорости относительного растяжения элемента поверхности x^2, x^3 вследствие деформации пространства.

Пусть, наконец, δV_{abc} величина объемного элемента

$$\left.\begin{array}{ll}\delta V_{abc}=\sqrt{h}\left|\delta\Pi_{abc}^{123}\right| & \\ \delta\Pi_{abc}^{123}=\begin{vmatrix}\delta_a x^1 & \delta_a x^2 & \delta_a x^3\\ \delta_b x^1 & \delta_b x^2 & \delta_b x^3\\ \delta_c x^1 & \delta_c x^2 & \delta_c x^3\end{vmatrix} & \begin{array}{l}\delta_a x^i=const_a^i\\ \delta_b x^i=const_b^i\\ \delta_c x^i=const_c^i\end{array}\end{array}\right\}. \tag{12.7}$$

Так как

$$\frac{{}^*\partial\left(\delta V_{abc}\right)}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{{}^*\partial h}{\partial t}\left|\delta\Pi_{abc}^{123}\right|=\frac{hD}{\sqrt{h}}\left|\delta\Pi_{abc}^{123}\right|, \tag{12.8}$$

следовательно (см., например, [62], стр. 366)

$$\frac{1}{\delta V_{abc}}\frac{{}^*\partial\left(\delta V_{abc}\right)}{\partial t}=D\,. \tag{12.9}$$

Таким образом, х.и.-инвариант D равен скорости относительного расширения элемента объема вследствие деформации пространства.

§ 2.13 Х.и.-символы Кристоффеля

Мы будем пользоваться двумя видами суб-символов Кристоффеля 1-го рода, см. (10.3) и (10.5), — ко-символами

$$\Delta_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{13.1}$$

и х.и.-символами

$${}^*\Delta_{ij,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^j}+\frac{{}^*\partial h_{jk}}{\partial x^i}-\frac{{}^*\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right) \tag{13.2}$$

и, аналогично, двумя видами суб-символов Кристоффеля 2-го рода — ко-символами

$$\Delta_{ij}^k=h^{kl}\Delta_{ij,l} \tag{13.3}$$

и х.и.-символами

$${}^*\Delta_{ij}^k=h^{kl}\,{}^*\Delta_{ij,l}\,. \tag{13.4}$$

Найдем выражение для х.и.-символов Кристоффеля, пользуясь теоремой о деформации пространства (11.22). Так как

$$\frac{{}^*\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{v_j}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,, \tag{13.5}$$

тогда

$$\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \frac{2}{c^2}\,D_{ik}\,v_j\,. \tag{13.6}$$

Следовательно

$${}^*\Delta_{ij,k} = \Delta_{ij,k} + \frac{1}{c^2}\left(D_{ik}v_j + D_{jk}v_i - D_{ij}v_k\right), \tag{13.7}$$

$${}^*\Delta^k_{ij} = \Delta^k_{ij} + \frac{1}{c^2}\left(D^k_i\,v_j + D^k_j\,v_i - D_{ij}v^k\right). \tag{13.8}$$

Отметим здесь некоторые свойства х.и.-символов Кристоффеля, сходные с соответствующими свойствами ко-символов, прежде всего, свойство симметрии

$${}^*\Delta_{ij,k} = {}^*\Delta_{ji,k}\,, \tag{13.9}$$

$${}^*\Delta^k_{ij} = {}^*\Delta^k_{ji}\,. \tag{13.10}$$

Далее, из (13.2) мы имеем

$${}^*\Delta_{ij,k} + {}^*\Delta_{kj,i} = \frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^j}\,. \tag{13.11}$$

Наконец, т. к.

$$\Delta^j_{ij} + \frac{1}{c^2}\left(D^j_i\,v_j + D^j_j\,v_i - D_{ij}v^j\right) = \frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i} + \frac{v_i}{c^2}\,D\,, \tag{13.12}$$

то, вследствие (13.8) и (13.5), также получаем

$${}^*\Delta^j_{ij} = \frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^i}\,. \tag{13.13}$$

§ 2.14 Х.и.-ковариантное дифференцирование

Теперь мы введем операции *х.и.-ковариантного дифференцирования*, определив их следующими требованиями*: они должны

*Здесь Зельманов использует два различных названия для хронометрически инвариантных дифференциальных операций: *х.и.-дифференцирование* для хронометрически инвариантных производных по временно́й координате и по пространственным координатам (см. §2.5), и *х.и.-ковариантное дифференцирование* для трехмерного аналога ковариантного четырехмерного дифференцирования, обладающего свойством хронометрической инвариантности. Впоследствии Зельманов отказался от этих раздельных названий, как излишних, и стал называть х.и.-дифференцированием любые дифференциальные операции, обладающие свойством хронометрической инвариантности. — Прим. ред., Д. Р.

быть инвариантны относительно преобразований временнóй координаты и при обращении в нуль потенциалов совпадать с операциями обычного ковариантного дифференцирования. Для этого необходимо и достаточно заменить в последних все копроизводные соответствующими х.и.-производными и, соответственно, обычные символы Кристоффеля — х.и.-символами Кристоффеля. Исходя из обозначения обычного ковариантного дифференцирования символом ∇, мы будем обозначать х.и.-ковариантное дифференцирование символом ${}^*\nabla$. Вследствие сказанного, мы будем иметь для суб-векторов

$$ {}^*\nabla_i\, Q_k = \frac{{}^*\partial Q_k}{dx^i} - {}^*\Delta^l_{ik} Q_l\,, \tag{14.1} $$

$$ {}^*\nabla_i\, Q^k = \frac{{}^*\partial Q^k}{dx^i} + {}^*\Delta^k_{il} Q^l, \tag{14.2} $$

для суб-тензоров 2-го ранга

$$ {}^*\nabla_i\, Q_{jk} = \frac{{}^*\partial Q_{jk}}{dx^i} - {}^*\Delta^l_{ij} Q_{lk} - {}^*\Delta^l_{ik} Q_{jl}\,, \tag{14.3} $$

$$ {}^*\nabla_i\, Q^k_j = \frac{{}^*\partial Q^k_j}{dx^i} - {}^*\Delta^l_{ij} Q^k_l + {}^*\Delta^k_{il} Q^l_j\,, \tag{14.4} $$

$$ {}^*\nabla_i\, Q^{jk} = \frac{{}^*\partial Q^{jk}}{dx^i} + {}^*\Delta^j_{il} Q^{lk} + {}^*\Delta^k_{il} Q^{jl}, \tag{14.5} $$

и так далее. Вообще, как легко видеть, выражения для х.и.-ковариантных производных в написании отличаются от обычных ковариантных производных только наличием звездочек перед символами дифференцирования и символами Кристоффеля.

Ясно, что х.и.-ковариантная производная какой-либо суб-тензорной величины будет х.и.-величиной в том, и, вообще говоря, только в том случае, когда дифференцируемый суб-тензор есть также х.и.-величина.

Дивергенцию можно определить как ковариантную производную, сокращенную по индексу дифференцирования с одним из верхних индексов дифференцируемой величины. Поэтому величину, полученную таким же образом из х.и.-ковариантной производной, мы будем называть *х.и.-дивергенцией*. Например

$$ {}^*\nabla_i\, Q^i = \frac{{}^*\partial Q^i}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} Q^i, \tag{14.6} $$

$$^*\nabla_i\, Q^i = \frac{1}{\sqrt{h}}\frac{^*\partial\left(\sqrt{h}\, Q^i\right)}{\partial x^i}\,, \tag{14.7}$$

$$^*\nabla_i\, Q^i_j = \frac{^*\partial Q^i_j}{\partial x^i} - {^*\!\Delta}^l_{ij} Q^i_l + \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} Q^i_j\,, \tag{14.8}$$

$$^*\nabla_i\, Q^{ji} = \frac{^*\partial Q^{ji}}{\partial x^i} + {^*\!\Delta}^j_{il} Q^{il} + \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} Q^{ji}. \tag{14.9}$$

По отношению к х.и.-ковариантному дифференцированию метрические суб-тензоры ведут себя так же, как и по отношению к обычному ковариантному дифференцированию. В самом деле

$$^*\nabla_j\, h_{ik} = \frac{^*\partial h_{ik}}{\partial x^j} - {^*\!\Delta}^l_{ji} h_{lk} - {^*\!\Delta}^l_{jk} h_{il} = \frac{^*\partial h_{ik}}{\partial x^j} - {^*\!\Delta}_{ji,k} - {^*\!\Delta}_{jk,i} \tag{14.10}$$

и, вследствие (13.11), имеем

$$^*\nabla_j\, h_{ik} = 0\,. \tag{14.11}$$

Далее,

$$^*\nabla_j\, h^k_i = \frac{^*\partial h^k_i}{\partial x^j} - {^*\!\Delta}^l_{ji} h^k_l + {^*\!\Delta}^k_{jl} h^l_i = -\,{^*\!\Delta}^k_{ji} + {^*\!\Delta}^k_{ji}\,, \tag{14.12}$$

так что

$$^*\nabla_j\, h^k_i = 0\,. \tag{14.13}$$

Так как

$$h^k_i = h_{qi}\, h^{qk}, \tag{14.14}$$

то, вследствие (14.11) и (14.13),

$$h_{qi}\, {^*\nabla_j}\, h^{qk} = 0 \tag{14.15}$$

или, поднимая индекс i, имеем

$$h^i_q\, {^*\nabla_j}\, h^{qk} = 0\,. \tag{14.16}$$

Так как

$$h^i_q h^{qk} = h^{ik}, \tag{14.17}$$

то из (14.16), вследствие (14.13), наконец, получаем

$$^*\nabla_j\, h^{ik} = 0\,. \tag{14.18}$$

Таким образом, операция х.и.-ковариантного дифференцирования (подобно операции обычного ковариантного дифференцирования) коммутативна с операциями поднимания, опускания и подстановки индекса.

Пользуясь сказанным в настоящем параграфе, можно (10.4) написать в виде

$$2^*\Delta_{ik} = h_{kl}\,{}^*\nabla_i\,{}^*u^l + h_{il}\,{}^*\nabla_k\,{}^*u^l \tag{14.19}$$

или, иначе

$$2^*\Delta_{ik} = {}^*\nabla_i\,{}^*u_k + {}^*\nabla_k\,{}^*u_i\,. \tag{14.20}$$

Эти выражения отличаются в написании от выражений для ко-тензора скоростей деформации наличием звездочек.

§ 2.15 Х.и.-тензор Римана-Кристоффеля

Обозначим

$${}^*\nabla_{pq} = {}^*\nabla_p\left({}^*\nabla_q\right)\,. \tag{15.1}$$

Возьмем любые суб-векторы Q_k и Q^k и будем менять порядок их х.и.-ковариантного дифференцирования. В результате для Q_k, меняя немые индексы, мы будем иметь

$$\begin{aligned}
&{}^*\nabla_{ij}\,Q_k - {}^*\nabla_{ji}\,Q_k = {}^*\nabla_i\left({}^*\nabla_j\,Q_k\right) - {}^*\nabla_j\left({}^*\nabla_i\,Q_k\right) = \\
&= \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left({}^*\nabla_j\,Q_k\right) - {}^*\Delta^l_{ij}\left({}^*\nabla_l\,Q_k\right) - {}^*\Delta^l_{ik}\left({}^*\nabla_j\,Q_l\right) - \\
&- \frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left({}^*\nabla_i\,Q_k\right) + {}^*\Delta^l_{ji}\left({}^*\nabla_l\,Q_k\right) + {}^*\Delta^l_{jk}\left({}^*\nabla_i\,Q_l\right) = \\
&= \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{{}^*\partial Q_k}{\partial x^j} - {}^*\Delta^l_{jk}Q_l\right) - \frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left(\frac{{}^*\partial Q_k}{\partial x^i} - {}^*\Delta^l_{ik}Q_l\right) - \\
&- {}^*\Delta^l_{ik}\left(\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^j} - {}^*\Delta^m_{jl}Q_m\right) + {}^*\Delta^l_{jk}\left(\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^i} - {}^*\Delta^m_{il}Q_m\right) = \\
&= \left(\frac{{}^*\partial^2 Q_k}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{{}^*\partial^2 Q_k}{\partial x^j\partial x^i}\right) - \left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ik}}{\partial x^j}\right)Q_l\; - \\
&- \left({}^*\Delta^l_{jk}\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^i} - {}^*\Delta^l_{ik}\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^j}\right) - \left({}^*\Delta^l_{ik}\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^j} - {}^*\Delta^l_{jk}\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial x^i}\right) + \\
&+ \left({}^*\Delta^l_{ik}{}^*\Delta^m_{jl} - {}^*\Delta^l_{jk}{}^*\Delta^m_{il}\right)Q_m = \frac{2}{c^2}A_{ij}\frac{{}^*\partial Q_k}{\partial t} + \\
&+ \left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{jk}}{\partial x^i} + {}^*\Delta^m_{ik}{}^*\Delta^l_{jm} - {}^*\Delta^m_{jk}{}^*\Delta^l_{im}\right)Q_l\,.
\end{aligned} \tag{15.2}$$

Аналогично, для контравариантного суб-вектора Q^k имеем

$$\begin{aligned}
&{}^*\nabla_{ij}\,Q^k - {}^*\nabla_{ji}\,Q^k = {}^*\nabla_i\big({}^*\nabla_j\,Q^k\big) - {}^*\nabla_j\big({}^*\nabla_i\,Q^k\big) = \\
&= \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\big({}^*\nabla_j\,Q^k\big) - {}^*\Delta^l_{ij}\big({}^*\nabla_l\,Q^k\big) + {}^*\Delta^k_{il}\big({}^*\nabla_j\,Q^l\big)\; -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left({}^*\nabla_i\, Q^l\right)+{}^*\Delta^l_{ji}\left({}^*\nabla_l\, Q^k\right)-{}^*\Delta^k_{jl}\left({}^*\nabla_i\, Q^l\right)=\\
&=\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{{}^*\partial Q^k}{\partial x^j}+{}^*\Delta^k_{jl}Q^l\right)-\frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left(\frac{{}^*\partial Q^k}{\partial x^i}+{}^*\Delta^k_{il}Q^l\right)+\\
&+{}^*\Delta^k_{il}\left(\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^j}+{}^*\Delta^l_{jm}Q^m\right)-{}^*\Delta^k_{jl}\left(\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^i}+{}^*\Delta^l_{im}Q^m\right)=\\
&=\left(\frac{{}^*\partial^2 Q^k}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{{}^*\partial^2 Q^k}{\partial x^j\partial x^i}\right)-\left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{jl}}{\partial x^i}-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{il}}{\partial x^j}\right)Q^l+ \qquad (15.3)\\
&+\left({}^*\Delta^k_{jl}\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^i}-{}^*\Delta^k_{il}\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^j}\right)+\left({}^*\Delta^k_{il}\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^j}-{}^*\Delta^k_{jl}\frac{{}^*\partial Q^l}{\partial x^i}\right)+\\
&+\left({}^*\Delta^k_{il}\,{}^*\Delta^l_{jm}-{}^*\Delta^k_{jl}\,{}^*\Delta^l_{im}\right)Q^m=\frac{2}{c^2}A_{ij}\frac{{}^*\partial Q^k}{\partial t}-\\
&-\left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{il}}{\partial x^j}-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{jl}}{\partial x^i}+{}^*\Delta^m_{il}\,{}^*\Delta^k_{jm}-{}^*\Delta^m_{jl}\,{}^*\Delta^k_{im}\right)Q^l.
\end{aligned}
$$

Введем обозначения

$$H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}=\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ik}}{\partial x^j}-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{jk}}{\partial x^i}+{}^*\Delta^m_{ik}\,{}^*\Delta^l_{jm}-{}^*\Delta^m_{jk}\,{}^*\Delta^l_{im}\,. \qquad (15.4)$$

Тогда мы сможем написать

$${}^*\nabla_{ij}\,Q_k-{}^*\nabla_{ji}\,Q_k=\frac{2}{c^2}A_{ij}\frac{{}^*\partial Q_k}{\partial t}+H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}\,Q_l\,, \qquad (15.5)$$

$${}^*\nabla_{ij}\,Q^k-{}^*\nabla_{ji}\,Q^k=\frac{2}{c^2}A_{ij}\frac{{}^*\partial Q^k}{\partial t}-H_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k}\,Q^l. \qquad (15.6)$$

Так как Q_k (соответственно, и Q^k) есть произвольный суб-вектор, то, согласно теореме частного, $H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}$ есть суб-тензор 4-го ранга, трижды ковариантный и один раз контравариантный. Полагая, что Q_k (или Q^k) есть произвольный х.и.-вектор, мы убеждаемся, что $H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}$ есть х.и.-тензор. На основании сходства его структуры со структурой смешанного суб-тензора Римана-Кристоффеля (ко-тензора)

$$K_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}=\frac{\partial\Delta^l_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Delta^l_{jk}}{\partial x^i}+\Delta^m_{ik}\,\Delta^l_{jm}-\Delta^m_{jk}\,\Delta^l_{im}\,, \qquad (15.7)$$

мы назовем тензор $H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}$ *смешанным х.и.-тензором Римана-Кристоффеля*. Опуская верхний значок и пользуясь (13.11)

$$
\begin{aligned}
&h_{nl}H_{kji}^{\cdot\cdot\cdot l}=h_{nl}\left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ik}}{\partial x^j}-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{jk}}{\partial x^i}+{}^*\Delta^m_{ik}\,{}^*\Delta^l_{jm}-{}^*\Delta^m_{jk}\,{}^*\Delta^l_{im}\right)=\\
&=\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j}-\left({}^*\Delta_{nj,l}+{}^*\Delta_{lj,n}\right){}^*\Delta^l_{ik}-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i}+
\end{aligned}
$$

$$+ \left({}^*\Delta_{ni,l} + {}^*\Delta_{li,n}\right) {}^*\Delta^l_{jk} + {}^*\Delta^m_{ik}\,{}^*\Delta_{jm,n} - {}^*\Delta^m_{jk}\,{}^*\Delta_{im,n} =$$
$$= \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i} - {}^*\Delta_{nj,l}\,{}^*\Delta^l_{ik} + {}^*\Delta_{ni,l}\,{}^*\Delta^l_{jk}\,, \tag{15.8}$$

получим, перемещая немые значки, *ковариантный х.и.-тензор Римана-Кристоффеля*

$$H_{kjin} = \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i} - {}^*\Delta_{ik,l}\,{}^*\Delta^l_{jn} + {}^*\Delta_{jk,l}\,{}^*\Delta^l_{in}\,, \tag{15.9}$$

который сходен по своей структуре с ковариантным ко-тензором Римана-Кристоффеля*

$$K_{kjin} = \frac{\partial\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Delta_{jk,n}}{\partial x^i} - \Delta_{ik,l}\Delta^l_{jn} + \Delta_{jk,l}\Delta^l_{in}\,. \tag{15.10}$$

Отметим некоторые свойства х.и.-тензора H_{kjin}. Так как

$$\left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i}\right) + \left(\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{in,k}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta_{jn,k}}{\partial x^i}\right) =$$
$$= \frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left({}^*\Delta_{ik,n} + {}^*\Delta_{in,k}\right) - \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left({}^*\Delta_{jk,n} + {}^*\Delta_{jn,k}\right) = \tag{15.11}$$
$$= \frac{{}^*\partial^2 h_{kn}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{{}^*\partial^2 h_{kn}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{2}{c^2} A_{ji} \frac{{}^*\partial h_{kn}}{\partial t} = \frac{4}{c^2} A_{ji} D_{kn}\,,$$

тогда

$$\frac{1}{2}\left(H_{kjin} + H_{njik}\right) = \frac{2}{c^2} A_{ji} D_{kn}\,, \tag{15.12}$$

но, как легко видеть,

$$\frac{1}{2}\left(H_{kjin} + H_{kijn}\right) = 0\,. \tag{15.13}$$

Таким образом, подобно K_{kjin}, х.и.-тензор H_{kjin} антисимметричен относительно внутренней пары индексов, но, в отличие от K_{kjin}, вообще говоря, не антисимметричен относительно внешней пары индексов. Можно показать также, что H_{kjin} не обладает, вообще говоря, и другим свойствами симметрии, характерными для K_{kjin}. Но обращения в нуль одного из двух х.и.-тензоров A_{ik} или D_{ik} достаточно для наличия этих свойств симметрии у H_{kjin}.

Х.и.-тензор 2-го ранга, полученный в результате сокращения х.и.-тензора Римана-Кристоффеля по второй паре индексов

$$H_{kj} = H_{kjl}^{\cdots l} = H_{kjin} h^{in} \tag{15.14}$$

*Расположение и роль различных индексов в обозначениях для тензора Римана-Кристоффеля у разных авторов различны (см., например, [8], стр. 91 и [7], стр. 130). Мы следуем здесь Эддингтону.

мы назовем *х.и.-тензором Эйнштейна*. Вследствие (15.4) мы имеем

$$H_{kj} = \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta^l_{kl}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta^l_{kj}}{\partial x^l} + {}^*\Delta^m_{kl}\, {}^*\Delta^l_{jm} - {}^*\Delta^m_{kj}\, {}^*\Delta^l_{ml}\,, \tag{15.15}$$

или, в иной форме записи,

$$H_{kj} = -\frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta^l_{kj}}{\partial x^l} + {}^*\Delta^m_{kl}\, {}^*\Delta^l_{jm} + \frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^j \partial x^k} - {}^*\Delta^l_{kj} \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^l}\,, \tag{15.16}$$

что сходно с выражениями для ко-тензора Эйнштейна, получаемого в результате сокращения ко-тензора Римана-Кристоффеля по второй паре индексов

$$K_{kj} = K_{kjl}^{\cdots l} = K_{kjin} h^{in}, \tag{15.17}$$

$$K_{kj} = \frac{\partial \Delta^l_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Delta^l_{kj}}{\partial x^l} + \Delta^m_{kl}\Delta^l_{jm} - \Delta^m_{kj}\Delta^l_{ml}\,, \tag{15.18}$$

$$K_{kj} = -\frac{\partial \Delta^l_{kj}}{\partial x^l} + \Delta^m_{kl}\Delta^l_{jm} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^j \partial x^k} - \Delta^l_{kj} \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^l}\,. \tag{15.19}$$

В отличие от K_{kj}, х.и.-тензор H_{kj}, вообще говоря, не симметричен. В самом деле

$$\frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{2}{c^2} A_{jk}\, D\,, \tag{15.20}$$

следовательно

$$\frac{1}{2}\left(H_{kj} - H_{jk}\right) = \frac{1}{c^2} A_{jk}\, D\,. \tag{15.21}$$

Введем также х.и.-инвариант

$$H = h^{kj} H_{kj}\,. \tag{15.22}$$

Пользуясь х.и.-тензором Римана-Кристоффеля и величинами, получающимися из него в результате сокращений индексов, мы рассмотрим вопрос о кривизне пространства и вопрос о вращении пространства. Мы начнем с последнего, для чего нам придется ввести угловую х.и.-скорость, рассмотрев предварительно некоторые х.и.-тензорные соотношения.

§ 2.16 Х.и.-ротор

Введем, как и в обычном трехмерном тензорном исчислении, контравариантный суб-тензор 3-го ранга ε^{ijk}, вполне определяемый своей компонентой

$$\varepsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{h}} \tag{16.1}$$

и условием антисимметрии относительно любой пары двух индексов. Введем также сопряженный ему ковариантный суб-тензор ε_{ijk}. Последний обладает теми же свойствами симметрии (см., например, [8], стр. 78), причем

$$\varepsilon_{123} = \sqrt{h}\,. \tag{16.2}$$

Так как $\sqrt{h}$ есть х.и.-величина, то суб-тензоры ε^{ijk} и ε_{ijk} суть х.и.-тензоры. Отметим здесь некоторые их свойства: связь с операторами подстановки индексов (компонентами метрического х.и.-тензора)

$$\varepsilon^{pqk}\varepsilon_{ijk} = h_i^p h_j^q - h_j^p h_i^q \tag{16.3}$$

и равенство нулю х.и.-ковариантной производной

$${}^*\nabla_p\, \varepsilon_{ijk} = 0\,. \tag{16.4}$$

Равенство (16.3) известно из обычного тензорного анализа (см. [8], стр. 111). Равенство (16.4) следует из равенства нулю обычной ковариантной производной тензора ε_{ijk} (см. [8], стр. 88)

$$\nabla_p\, \varepsilon_{ijk} = 0\,. \tag{16.5}$$

В самом деле, в координатах $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$, обращающих в нуль потенциалы в интересующей нас мировой точке, в этой точке

$${}^*\tilde{\nabla}_p\, \tilde{\varepsilon}_{ijk} = \tilde{\nabla}_p\, \tilde{\varepsilon}_{ijk} \tag{16.6}$$

и, в силу (16.5),

$${}^*\tilde{\nabla}_p\, \tilde{\varepsilon}_{ijk} = 0\,. \tag{16.7}$$

Но левая часть равенства (16.7) есть х.и.-тензор (4-го ранга). Следовательно, имеет место равенство его нулю и в произвольных координатах, т. е. формула (16.4).

Так же, как и в обычной тензорной алгебре, можно, пользуясь х.и.-тензорами ε^{ijk} и ε_{ijk}, каждому антисимметричному суб-тензору 2-го ранга a_{ij} или b^{ij} поставить в соответствие (однозначным образом) суб-вектор ω^k или ψ_k

$$\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk} a_{ij}\,, \tag{16.8}$$

$$\psi_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,b^{ij}. \tag{16.9}$$

И, наоборот, каждому суб-вектору, пользуясь х.и.-тензорами ε^{ijk} и ε_{ijk}, можно однозначным образом поставить в соответствие антисимметричные тензоры 2-го ранга.

Если суб-тензоры a_{ij} и b^{ij} взаимно-сопряженные, то и суб-векторы ω^k и ψ_k взаимно-сопряженные. Если a_{ij} и b^{ij} суть х.и.-тензоры, то ω^k и ψ_k х.и.-векторы. Умножая почленно (16.8) на ε_{pqk} и (16.9) на ε^{pqk}, свертывая, получим, соответственно

$$\varepsilon_{pqk}\,\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{pqk}\,a_{ij}\,, \tag{16.10}$$

$$\varepsilon^{pqk}\psi_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{pqk}\varepsilon_{ijk}\,b^{ij}, \tag{16.11}$$

и, вследствие (16.3), соответственно

$$a_{pq} = \varepsilon_{pqk}\,\omega^k, \tag{16.12}$$

$$b^{pq} = \varepsilon^{pqk}\psi_k\,. \tag{16.13}$$

Очевидно, если суб-векторы ω^k и ψ_k взаимно-сопряженные, то и суб-тензоры a_{pq} и b^{pq} взаимно-сопряженные. Если ω^k и ψ_k х.и.-векторы, то a_{pq} и b^{pq} х.и.-тензоры. Ясно, что (16.8–16.9) и (16.12–16.13) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между суб-векторами и отвечающими им антисимметричными суб-тензорами 2-го ранга.

Обычное определение вектора ротора (вихря) r^p вектора ω_k гласит*

$$r^p\,(\omega) = \varepsilon^{qkp}\,\nabla_q\,\omega_k\,. \tag{16.14}$$

Мы введем *х.и.-ротор*, определив его как

$$^*r^p\,(\omega) = \varepsilon^{qkp}\,{}^*\nabla_q\,\omega_k\,. \tag{16.15}$$

Очевидно, операция образования х.и.-ротора инвариантна относительно преобразований временно́й координаты и совпадает с операцией образования обычного ко-ротора при обращении в нуль потенциалов в данной мировой точке. Очевидно, что х.и.-ротор от х.и.-вектора есть х.и.-вектор.

*Вообще вихрь вектора представляет собою антисимметричный тензор 2-го ранга. Но в случае пространства трех измерений вихрь можно представить также вектором, отвечающим этому тензору. Таковым представлением мы здесь и пользуемся (см. [8], стр. 79–80).

Введем антисимметричный тензор 2-го ранга a^{ij}, отвечающий вектору ω_k. Тогда

$$\omega_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,a^{ij}. \tag{16.16}$$

Подставляя это выражение в (16.15), мы имеем

$$\begin{aligned} {}^*r^p(\omega) &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{qkp}\varepsilon_{ijk}\,{}^*\nabla_q\,a^{ij} + \frac{1}{2}\,\varepsilon^{qkp}a^{ij}\,{}^*\nabla_q\,\varepsilon_{ijk} = \\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{qkp}\varepsilon_{ijk}\,{}^*\nabla_q\,a^{ij} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{qpk}\varepsilon_{ijk}\,{}^*\nabla_q\,a^{ij} = \\ &= -\frac{1}{2}\left(h^q_i h^p_j - h^q_j h^p_i\right){}^*\nabla_q\,a^{ij} = -\frac{1}{2}\left({}^*\nabla_i\,a^{ip} - {}^*\nabla_j\,a^{pj}\right), \end{aligned} \tag{16.17}$$

так что

$${}^*r^p(\omega) = {}^*\nabla_j\,a^{pj}, \tag{16.18}$$

или, иначе,

$$\varepsilon^{qkp}\,{}^*\nabla_q\,\omega_k = {}^*\nabla_j\,a^{pj}. \tag{16.19}$$

Таким образом, х.и.-ротор всякого суб-вектора равен х.и.-дивергенции соответствующего ему антисимметричного суб-тензора 2-го ранга.

§ 2.17 Х.и.-вектор угловой скорости и его х.и.-ротор

Обычное соотношение между контравариантным суб-вектором угловой скорости ω^k элемента объема и ковариантным суб-вектором линейной скорости u_j его точек гласит

$$\omega^k = \frac{1}{2}\,r^k(u) \tag{17.1}$$

или, иначе,

$$\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,\nabla_i\,u_j\,. \tag{17.2}$$

Суб-вектору ω^k отвечает антисимметричный суб-тензор

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i\,u_j - \nabla_j\,u_i\right), \tag{17.3}$$

так что

$$\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}a_{ij}\,. \tag{17.4}$$

Как легко видеть, суб-вектор (17.2) и суб-тензор (17.3) суть, соответственно, ко-вектор и ко-тензор. Но можно ввести х.и.-

вектор угловой скорости $^*\omega^k$ и отвечающий ему х.и.-тензор $^*a_{ij}$, заменив в выражениях (17.2) и (17.3) ко-вектор скорости соответствующим х.и.-вектором и ко-дифференцирование х.и.-дифференцированием

$$^*\omega^k = \frac{1}{2}\,^*r^k\,(^*u)\,, \tag{17.5}$$

то есть

$$^*\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,^*\nabla_i\,^*u_j\,, \tag{17.6}$$

$$^*a_{ij} = \frac{1}{2}\,(^*\nabla_i\,^*u_j - {}^*\nabla_j\,^*u_i)\,, \tag{17.7}$$

так что

$$^*\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\,^*a_{ij}\,. \tag{17.8}$$

Для х.и.-ротора от х.и.-вектора угловой скорости мы, в силу (16.18) или (16.19) и учитывая (17.8), получаем

$$^*r^i\,(^*\omega) = {}^*\nabla_j\,^*a^{ij}, \tag{17.9}$$

или, иначе,

$$\varepsilon^{qki}\,^*\nabla_i\,^*\omega_k = {}^*\nabla_j\,^*a^{qj}, \tag{17.10}$$

где

$$^*a^{ij} = \frac{1}{2}\left(h^{il}\,^*\nabla_l\,^*u^j - h^{jl}\,^*\nabla_l\,^*u^i\right). \tag{17.11}$$

В дальнейшем нас будет особенно интересовать случай, когда в рассматриваемой точке имеет место $^*u^i \equiv 0$ (10.6), а следовательно имеют место $u^i \equiv 0$ (10.8) и $\frac{^*\partial\,^*u^i}{\partial x^k} = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}$ (10.9). В этом случае, очевидно,

$$^*\omega^k = \frac{1}{2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\varepsilon^{ijk}h_{jl}\frac{\partial u^l}{\partial x^i}\,, \tag{17.12}$$

$$\omega^k = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}h_{jl}\frac{\partial u^l}{\partial x^i}\,. \tag{17.13}$$

Вводя координаты (10.11), удовлетворяющие условию $\widetilde{\mathrm{w}} = 0$ (10.12), мы для этого случая получим

$$^*\widetilde{\omega}^k = \widetilde{\omega}^k. \tag{17.14}$$

В рассматриваемом случае мы введем специальные обозначения для х.и.-ротора от вектора угловой скорости

$$^*r^i\,(^*\omega) = R^i\,(^*\omega)\,. \tag{17.15}$$

§ 2.18 Дифференциальное вращение и дифференциальная деформация

Вследствие (17.11) мы имеем

$$^*\nabla_j {}^*a^{ij} = \frac{1}{2}\left(h^{il}\,{}^*\nabla_{jl}{}^*u^j - h^{jl}\,{}^*\nabla_{jl}{}^*u^i\right). \tag{18.1}$$

Согласно (15.6)

$$^*\nabla_{jl}{}^*u^i = {}^*\nabla_{lj}{}^*u^i + \frac{2}{c^2}A_{jl}\frac{^*\partial\,{}^*u^i}{\partial t} - H_{nlj}^{\cdot\cdot\cdot i}\,{}^*u^n \tag{18.2}$$

и, следовательно,

$$^*\nabla_{jl}{}^*u^j = {}^*\nabla_{lj}{}^*u^j + \frac{2}{c^2}A_{jl}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - H_{nl}{}^*u^n. \tag{18.3}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} {}^*\nabla_j{}^*a^{ij} &= \frac{1}{2}\,h^{il}\,{}^*\nabla_{lj}{}^*u^j + \frac{1}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - \frac{1}{2}\,H_n^i\,{}^*u^n - \\ &- \frac{1}{2}\,h^{jl}\,{}^*\nabla_{lj}{}^*u^i = \frac{1}{2}\,{}^*\nabla_l\left(h^{il}\,{}^*\nabla_j{}^*u^j - h^{jl}\,{}^*\nabla_j{}^*u^i\right) + \\ &+ \frac{1}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - \frac{1}{2}\,H_n^i\,{}^*u^n. \end{aligned} \tag{18.4}$$

Однако

$$^*\nabla_j{}^*u^i = h^{il}\,{}^*\nabla_j{}^*u_l = h^{il}\left({}^*\Delta_{jl} + {}^*a_{jl}\right) = {}^*\Delta_j^i + {}^*a_j^i\,, \tag{18.5}$$

где $^*\Delta_{jl}$ определяется по (10.4) и, следовательно,

$$^*\nabla_j{}^*u^j = {}^*\Delta\,, \tag{18.6}$$

где

$$^*\Delta = h^{ik}\,{}^*\Delta_{ik} = h_{ik}{}^*\Delta^{ik} = {}^*\Delta_j^j\,. \tag{18.7}$$

Поэтому

$$^*\nabla_j{}^*a^{ij} = \frac{1}{2}\,{}^*\nabla_l\left(h^{il}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{il} + {}^*a^{il}\right) + \frac{1}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - \frac{1}{2}\,H_n^i\,{}^*u^n, \tag{18.8}$$

$$^*\nabla_j{}^*a^{ij} = {}^*\nabla_j\left(h^{ij}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{ij}\right) + \frac{2}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - H_j^i\,{}^*u^j, \tag{18.9}$$

или, иначе,

$$^*r^i\left({}^*\omega\right) = {}^*\nabla_j\left(h^{ij}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{ij}\right) + \frac{2}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot i}\frac{^*\partial\,{}^*u^j}{\partial t} - H_j^i\,{}^*u^j. \tag{18.10}$$

§ 2.19 Дифференциальное вращение пространства

Пусть ${}^*\Delta^{ij}$ контравариантный х.и.-тензор скоростей деформации пространства, происходящей в окрестностях точки

$$x^i = a^i \,, \tag{19.1}$$

относительно системы отсчета, локально-стационарной в этой точке. Мы можем написать, что

$${}^*\Delta^{ij} = {}^*\Delta^{ij}\,(\,t;\, x^1,\, x^2,\, x^3;\, \xi^1,\, \xi^2,\, \xi^3\,)\,, \tag{19.2}$$

где

$$\xi^k = x^k - a^k. \tag{19.3}$$

Предположим, что при любом значении временно́й координаты на интересующем нас интервале ее изменения найдется такая координатная система (в данной системе отсчета), в которой, в точке (19.1), все функции (19.2) вместе со своими первыми производными по t и по всем x^k непрерывны относительно всех ξ^l. В этой координатной системе*

$$\left(\frac{\partial\, {}^*\Delta^{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = \frac{\partial\left({}^*\Delta^{ij}\right)_0}{\partial x^k}\,, \tag{19.4}$$

$$\left(\frac{\partial\, {}^*\Delta^{ij}}{\partial t}\right)_0 = \frac{\partial\left({}^*\Delta^{ij}\right)_0}{\partial t}\,, \tag{19.5}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta^{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = \frac{{}^*\partial\left({}^*\Delta^{ij}\right)_0}{\partial x^k}\,, \tag{19.6}$$

Но, по определению х.и.-тензора D_{pq},

$$\left({}^*\Delta_{pq}\right)_0 = D_{pq} \tag{19.7}$$

и, следовательно,

$$\left({}^*\Delta^{ij}\right)_0 = D^{ij}. \tag{19.8}$$

Поэтому

$$\left(\frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta^{ij}}{\partial x^k}\right)_0 = \frac{\partial D^{ij}}{\partial x^k}\,. \tag{19.9}$$

Вследствие (19.9) и (19.8), имеем

$$\left({}^*\nabla_k {}^*\Delta^{ij}\right)_0 = {}^*\nabla_k\, D^{ij}. \tag{19.10}$$

*Нуль при скобках означает равенство нулю всех ξ^k.

Равенство (19.10), в силу своего х.и.-тензорного характера, имеет место во всех координатных системах, а не только в той системе, в которой мы до их пор в настоящем параграфе вели рассуждение. Далее, т. к. точка (19.1) произвольная, то равенство (19.10) имеет место во всех точках (при выполнении сформулированных выше требований непрерывности). Из (19.10) немедленно следует, что

$$\left({}^*\nabla_k {}^*\Delta\right)_0 = {}^*\nabla_k\, D\,, \tag{19.11}$$

$$\left({}^*\nabla_j {}^*\Delta^{ij}\right)_0 = {}^*\nabla_j\, D^{ij}. \tag{19.12}$$

Поэтому

$$\left[{}^*\nabla_j \left(h^{ij}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{ij}\right)\right]_0 = {}^*\nabla_j \left(h^{ij} D - D^{ij}\right). \tag{19.13}$$

Рассмотрим снова окрестности любой точки (19.1). Пусть, в произвольной точке в этих окрестностях, ${}^*u^j$ есть х.и.-скорость данного пространства относительно системы, локально-стационарной в точке (19.1). По-прежнему, ${}^*\Delta^{ij}$ есть х.и.-тензор скоростей деформации пространства относительно названной локально-стационарной системы, ${}^*\omega_k$ х.и.-вектор угловой скорости вращения пространства относительно той же системы, наконец, ${}^*a^{ij}$ антисимметричный х.и.-тензор, отвечающий х.и.-вектору ${}^*\omega_k$. Эти величины связаны между собою соотношениями (18.9) и (18.10). В самой точке (19.1)

$$\xi^i \equiv 0\,, \tag{19.14}$$

$${}^*u^i \equiv 0 \tag{19.15}$$

и, следовательно,

$$\left({}^*\nabla_j {}^*a^{ij}\right)_0 = \left[{}^*\nabla_j \left(h^{ij}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{ij}\right)\right]_0, \tag{19.16}$$

$$R^i\left({}^*\omega\right) = \left[{}^*\nabla_j \left(h^{ij}\,{}^*\Delta - {}^*\Delta^{ij}\right)\right]_0. \tag{19.17}$$

Вследствие же (19.13) мы можем написать окончательно

$$\left({}^*\nabla_j {}^*a^{ij}\right)_0 = {}^*\nabla_j \left(h^{ij} D - D^{ij}\right), \tag{19.18}$$

$$R^i\left({}^*\omega\right) = {}^*\nabla_j \left(h^{ij} D - D^{ij}\right). \tag{19.19}$$

Как видно из самого вывода, неединственность системы отсчета, локально-стационарной в данной точке* не влияет на по-

*Как отмечено в §2.11, эта система определена с точностью до произвольного вращения около данной точки.

лученный результат. Этот результат, очевидно, сохранит свою силу и в случае, когда мы возьмем локально-стационарную (в данной точке) систему, невращающуюся в данной точке относительно данного пространства, так что в данной точке

$$^*\omega_k = 0\,, \tag{19.20}$$

$$^*a^{ij} = 0\,. \tag{19.21}$$

§ 2.20 Система локально-независимых величин

При рассмотрении вопроса о кривизне пространства нам придется воспользоваться некоторыми предположениями, которые мы выскажем здесь, впрочем, в несколько более общей форме, чем это нужно для упомянутого вопроса. Согласно §2.4, в любой заданной мировой точке можно придать потенциалам (в данной системе отсчета при данной системе пространственных координат) любые, наперед заданные значения с помощью соответствующего преобразования временно́й координаты*. Легко видеть, что распоряжаться подобным же образом значениями первых производных от потенциалов мы не можем, т. к. 16 производных связаны 6-ю условиями, утверждающими инвариантность силовых величин относительно преобразований временно́й координаты

$$\widetilde{F}_i = F_i\,, \tag{20.1}$$

$$\widetilde{A}_{ik} = A_{ik}\,. \tag{20.2}$$

Очевидно, на 16 производных от потенциалов мы можем наложить лишь 10 дополнительных условий. Поэтому мы введем 10 х.и.-величин, зависящих от потенциалов и их первых производных и могущих, в результате преобразования временно́й координаты, принимать в данной мировой точке любые значения. Так как нас интересуют первые производные от потенциалов, то мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \frac{1}{B}\Big(B_\alpha\xi^\alpha + \frac{1}{2}\,B_{\beta\gamma}\,\xi^\beta\xi^\gamma\Big) \\ \tilde{x}^i &= x^i \end{aligned}\right\}, \tag{20.3}$$

где B, B_α и $B_{\beta\gamma}$ постоянные, причем $B_0 = 1$,

$$\xi^\alpha = x^\alpha - a^\alpha, \tag{20.4}$$

*Мы везде подразумеваем оговорку, что для скалярного потенциала w исключаются значения, большие или равные c^2.

в то время как координаты данной мировой точки

$$x^{\alpha} = a^{\alpha}. \tag{20.5}$$

Очевидно, вообще

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^{\sigma}} = \frac{B_{\sigma}}{B} + \frac{B_{\beta\sigma}}{B}\,\xi^{\beta}\,, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{x}^0}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{B_{\mu\nu}}{B}\,, \tag{20.6}$$

и в данной мировой точке

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^{\sigma}}\right)_a = \frac{B_{\sigma}}{B}\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^0}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\right)_a = \frac{B_{\mu\nu}}{B}\,. \tag{20.7}$$

Так как

$$g_{00} = \tilde{g}_{00}\left(\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\right)^2, \quad g_{0i} = \left(\tilde{g}_{00}\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i} + \tilde{g}_{0i}\right)\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0}\,, \tag{20.8}$$

тогда

$$c^2 - \widetilde{\mathrm{w}} = B\,\frac{c^2 - \mathrm{w}}{1 + B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}\,, \quad \tilde{v}_i = v_i + \frac{1}{c}\left(c^2 - \mathrm{w}\right)\frac{B_i + B_{i\gamma}\,\xi^{\gamma}}{1 + B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}\,, \tag{20.9}$$

$$\left(c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}\right)_a = B\left(c^2 - \mathrm{w}\right)_a\,, \quad \left(\tilde{v}_i\right)_a = \left(v_i\right)_a + \frac{B_i}{c}\left(c^2 - \mathrm{w}\right)_a\,. \tag{20.10}$$

Займемся теперь х.и.-производными и х.и.-ковариантными производными потенциалов

$$\frac{{}^*\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial \tilde{x}^0} = \frac{{}^*\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial x^0} = \frac{B}{1 + B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}\,\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^0} + c^2\,\frac{B B_{00}}{\left(1 + B_{0\beta}\,\xi^{\beta}\right)^2}\,. \tag{20.11}$$

Для данной мировой точки, исключая B, находим

$$\frac{c^2}{\left(c^2 - \widetilde{\mathrm{w}}\right)_a^2}\left(\frac{{}^*\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial \tilde{x}^0}\right)_a = \frac{c^2}{\left(c^2 - \mathrm{w}\right)_a^2}\left(\frac{{}^*\partial \mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a + \frac{c^2}{\left(c^2 - \mathrm{w}\right)_a}\,B_{00}\,. \tag{20.12}$$

Введем обозначение

$$Y = \frac{c^2}{\left(c^2 - \mathrm{w}\right)^2}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^0}\,, \tag{20.13}$$

тогда

$$(\widetilde{Y})_a = (Y)_a + \frac{c^2}{\left(c^2 - \mathrm{w}\right)_a^2}\,B_{00}\,. \tag{20.14}$$

Далее

$$\frac{{}^*\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{{}^*\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial x^i} = \frac{\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial x^i} + \frac{c\,v_i}{c^2 - \mathrm{w}}\,\frac{\partial \widetilde{\mathrm{w}}}{\partial x^0} = \frac{B}{1 + B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} \; +$$

$$+\frac{(c^2-\mathrm{w})BB_{0i}}{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})^2}+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{B}{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}+$$
$$+\frac{cv_iBB_{00}}{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})^2}=\frac{B}{1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)+ \tag{20.15}$$
$$+\frac{(c^2-\mathrm{w})B}{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})^2}\left(B_{0i}+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}B_{00}\right).$$

Так как очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^i}+\frac{c\tilde{v}_i}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^0}\right)=\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{c\,\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}+c\tilde{v}_i\widetilde{Y}\\ \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)=F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{c\,\partial v_i}{\partial x^0}+cv_iY\end{aligned}\right\}, \tag{20.16}$$

тогда

$$\left(\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{c\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}+c\tilde{v}_i\widetilde{Y}\right)_a=$$
$$=\left(F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{c\partial v_i}{\partial x^0}+cv_iY\right)+c^2\left(\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_aB_{00}+c^2B_{0i}\,. \tag{20.17}$$

С другой стороны

$$\frac{{}^*\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}=\frac{{}^*\partial\tilde{v}_i}{\partial x^0}=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x^0}=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_i}{\partial x^0}-\frac{c}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\times$$
$$\times\frac{B_i+B_{i\gamma}\,\xi^{\gamma}}{1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta}}+c\,\frac{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})B_{0i}-B_{00}(B_i+B_{i\gamma}\,\xi^{\gamma})}{(1+B_{0\beta}\,\xi^{\beta})^2}\,. \tag{20.18}$$

Так как очевидно

$$\left.\begin{aligned}\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{c\,\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}&=-\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^i}\\ \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{c\,\partial v_i}{\partial x^0}&=-F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\end{aligned}\right\}, \tag{20.19}$$

тогда

$$\left(-\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^i}\right)_a=\left(-F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\right)_a-$$
$$-\left[\left(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a+c^2B_{00}\right]B_i+c^2B_{0i} \tag{20.20}$$

и, вследствие (20.10), (20.13) и (20.14), получаем

$$\begin{aligned}&\left(-\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^i}+c\tilde{v}_i\widetilde{Y}\right)_a=\\&=\left(-F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+cv_iY\right)_a+c^2\left(\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+c^2B_{0i}\,.\end{aligned}\tag{20.21}$$

Складывая почленно (20.17) и (20.21), получаем

$$\begin{aligned}&\left[\frac{c^2}{c^2-\widetilde{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathrm{w}}}{\partial\tilde{x}^i}+c\,\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}\right)+2c\tilde{v}_iY\right]_a=\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times\right.\\&\left.\times\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+c\,\frac{\partial v_i}{\partial x^0}\right)+2cv_iY\right]_a+2c^2\left[\left(\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+B_{0i}\right].\end{aligned}\tag{20.22}$$

Введем обозначение

$$\Phi_i=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+c\,\frac{\partial v_i}{\partial x^0}\right)+2cv_iY\,,\tag{20.23}$$

тогда

$$\big(\widetilde{\Phi}_i\big)_a=\big(\Phi_i\big)_a+2c^2\left[\left(\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+B_{0i}\right].\tag{20.24}$$

Х.и.-ковариантная производная векторного потенциала

$$\begin{aligned}&{}^*\widetilde{\nabla}_i\,\tilde{v}_k={}^*\nabla_i\,\tilde{v}_k=\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x^i}+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x^0}-{}^*\Delta^l_{ik}\tilde{v}_l=\\&=\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{B_k+B_{k\gamma}\,\xi^\gamma}{1+B_{0\beta}\,\xi^\beta}+\\&+\frac{c^2-\mathrm{w}}{c}\frac{(1+B_{0\beta}\,\xi^\beta)B_{ik}-B_{0i}(B_k+B_{k\gamma}\,\xi^\gamma)}{\left(1+B_{0\beta}\,\xi^\beta\right)^2}+\\&+\frac{cv_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_k}{\partial x^0}-\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\frac{B_k+B_{k\gamma}\,\xi^\gamma}{1+B_{0\beta}\,\xi^\beta}+\\&+v_i\frac{(1+B_{0\beta}\,\xi^\beta)B_{0k}-B_{00}(B_k+B_{k\gamma}\,\xi^\gamma)}{\left(1+B_{0\beta}\,\xi^\beta\right)^2}-\\&-{}^*\Delta^l_{ik}v_l-\frac{1}{c}\left(c^2-\mathrm{w}\right){}^*\Delta^l_{ik}\frac{B_l+B_{l\gamma}\,\xi^\gamma}{1+B_{0\beta}\,\xi^\beta}\,,\end{aligned}\tag{20.25}$$

и, с другой стороны,

$$\left(\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^i}+\frac{c\,\tilde{v}_i}{c^2-\tilde{\mathrm{w}}}\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^0}-{}^*\widetilde{\Delta}^l_{ik}\,\tilde{v}_l\right)_a= \\ =\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_k}{\partial x^0}-{}^*\Delta^l_{ik}v_l\right)_a-\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{c^2}\times \\ \times\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})_a}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a+c^2\left(\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+\right. \\ \left.+\,c^2B_{0i}\right]\frac{B_k}{c}+(v_i)_aB_{0k}+\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{c}\Big[B_{ik}-\left({}^*\Delta^l_{ik}\right)_aB_l\Big]. \tag{20.26}$$

Симметрирование обеих частей равенства дает

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^i}+\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\frac{c^2}{c^2-\tilde{\mathrm{w}}}\left(\tilde{v}_i\frac{c\,\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^0}+\tilde{v}_k\frac{c\,\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}\right)-\right. \\ \left.-\,{}^*\widetilde{\Delta}^l_{ik}\,\tilde{v}_l\right]_a=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times\right. \\ \left.\times\left(v_i\frac{c\,\partial v_k}{\partial x^0}+v_k\frac{c\,\partial v_i}{\partial x^0}\right)-{}^*\Delta^l_{ik}\,v_l\right]_a-\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{2c^2}\times \\ \times\left\{\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})_a}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a+c^2\left(\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_aB_{00}+\right.\right. \\ \left.+\,c^2B_{0i}\right]\frac{B_k}{c}+\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})_a}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\frac{c\,v_k}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a+\right. \\ \left.\left.+\,c^2\left(\frac{c\,v_k}{c^2-\mathrm{w}}\right)_aB_{00}+c^2B_{0k}\right]\frac{B_i}{c}\right\}+\frac{1}{2}\Big[\,(v_i)_a\,B_{0k}+ \\ +\,(v_k)_a\,B_{0i}\Big]+\frac{1}{c}\left(c^2-\mathrm{w}\right)_a\Big[B_{ik}-\left({}^*\Delta^l_{ik}\right)_aB_l\Big]. \tag{20.27}$$

Вследствие (20.10), (20.16) и (20.17), мы имеем

$$-\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{2c^2}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})_a}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^0}\right)_a+\right. \\ \left.+\,c^2\left(\frac{c\,v_i}{c^2-\mathrm{w}}\right)_aB_{00}+c^2B_{0i}\right]\frac{B_k}{c}= \\ =-\frac{1}{2c^2}\,(\tilde{v}_k)_a\left(\widetilde{F}_i+\frac{c^2}{c^2-\tilde{\mathrm{w}}}\frac{c\,\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^0}+c\,\tilde{v}_iY\right)_a+ \\ +\frac{1}{2c^2}\,(v_k)_a\left(F_i+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{c\,\partial v_i}{\partial x^0}+c\,v_iY\right)_a+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{c\,v_i v_k}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+\frac{1}{2}\,(v_k)_a\,B_{0i}\,, \tag{20.28}$$

$$\begin{gathered}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^i}+\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\left[\tilde{v}_k\big(\widetilde{\Phi}_i-c\,\tilde{v}_i\widetilde{Y}\big)+\right.\right.\\ \left.\left.+\,\tilde{v}_i\big(\widetilde{\Phi}_k-c\,\tilde{v}_k\widetilde{Y}\big)\right]-{}^*\widetilde{\Delta}^l_{ik}\,\tilde{v}_l\right\}_a=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\right.\\ \left.+\,\frac{1}{2c^2}\Big[v_k\big(\Phi_i-c\,v_iY\big)+v_i\big(\Phi_k-c\,v_kY\big)\Big]-{}^*\Delta^l_{ik}v_l\right\}_a+\\ +\left(\frac{c\,v_i v_k}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+(v_k)_a\,B_{0i}+(v_i)_a\,B_{0k}+\\ +\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{c}\Big[B_{ik}-\big({}^*\Delta^l_{ik}\big)_a B_l\Big]\,,\end{gathered} \tag{20.29}$$

или, иначе,

$$\begin{gathered}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}^i}+\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\big(\tilde{v}_k\widetilde{\Phi}_i+\tilde{v}_i\widetilde{\Phi}_k\big)-\right.\\ \left.-\,\frac{1}{c}\,\tilde{v}_i\tilde{v}_k\widetilde{Y}-{}^*\widetilde{\Delta}^l_{ik}\,\tilde{v}_l\right]_a=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\right.\\ \left.+\,\frac{1}{2c^2}\big(v_k\Phi_i+v_i\Phi_k\big)-\frac{1}{c}\,v_iv_kY-{}^*\Delta^l_{ik}\,v_l\right]_a+\\ +\left(\frac{c\,v_i v_k}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+(v_k)_a\,B_{0i}+(v_i)_a\,B_{0k}\,+\\ +\frac{(c^2-\mathrm{w})_a}{c}\Big[B_{ik}-\big({}^*\Delta^l_{ik}\big)_a B_l\Big]\,.\end{gathered} \tag{20.30}$$

Введя обозначение

$$\begin{gathered}X_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{2c^2}\big(\,v_i\Phi_k+v_k\Phi_i\,\big)-\\ -\frac{1}{c}\,v_iv_kY-{}^*\Delta^l_{ik}\,v_l\,,\end{gathered} \tag{20.31}$$

можно написать

$$\begin{gathered}\big(\widetilde{X}_{ik}\big)_a=\big(X_{ik}\big)_a+\left(\frac{c\,v_i v_k}{c^2-\mathrm{w}}\right)_a B_{00}+(v_k)_a\,B_{0i}+\\ +\,(v_i)_a\,B_{0k}+\frac{1}{c}\,(c^2-\mathrm{w})_a\Big[B_{ik}-\big({}^*\Delta^l_{ik}\big)_a B_l\Big]\,.\end{gathered} \tag{20.32}$$

Каковы бы ни были в данной мировой точке значения величин w, v_i, Y, Φ_i, X_{ik}, всегда можно, и притом единственным образом, подобрать коэффициенты B, B_i, $B_{\beta\gamma}$ так, чтобы величины $\widetilde{\mathrm{w}}$, $\tilde{v}_i$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{\Phi}_i$, $\widetilde{X}_{ik}$ принимали любые наперед заданные значения. В самом деле: задавая $\widetilde{\mathrm{w}}$, из первого из равенств (20.10) находим B; задавая v_i, из второго из равенств (20.10) находим B_i; задавая $\widetilde{Y}$, из равенства (20.14) находим B_{00}; далее, задавая Φ_i, из (20.24) при любом B_{00} находим B_{0i}; задавая X_{ik}, из (20.32) при любых B_{00}, B_{0l} и B_l находим B_{ik}. Таким образом, в любой данной мировой точке каждой из наших 14-ти ко-величин можно придать любое значение, независимо от значений остальных. Поэтому совокупность этих величин мы можем назвать системой локально-независимых ко-величин.

Как легко видеть, величина Y есть суб-инвариант, 3 величины Φ_i образуют суб-вектор, 6 величин X_{ik} образуют симметричный суб-тензор 2-го ранга.

§ 2.21 Х.и.-тензоры кривизны

Выделим в х.и.-тензоре Римана-Кристоффеля часть, антисимметричную не только относительно индексов внутренней пары, но также относительно индексов внешней пары и, кроме того, симметричную относительно перестановки внешней и внутренней пар индексов. Прежде всего, мы имеем

$$H_{kjin} = \frac{1}{2}\left(H_{kjin} - H_{njik}\right) + \frac{1}{2}\left(H_{kjin} + H_{njik}\right), \tag{21.1}$$

причем, см. (15.12),

$$\frac{1}{2}\left(H_{kjin} + H_{njik}\right) = \frac{2}{c^2} A_{ji} D_{kn}, \tag{21.2}$$

и кроме того

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(H_{kjin} - H_{njik}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(&\frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{in,k}}{\partial x^j} - \\ &- \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{jn,k}}{\partial x^i}\Bigg) - {}^*\Delta_{ik,l}\, {}^*\Delta^l_{jn} + {}^*\Delta_{jk,l}\, {}^*\Delta^l_{in}. \end{aligned} \tag{21.3}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{ik,n}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{in,k}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{jk,n}}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial\, {}^*\Delta_{jn,k}}{\partial x^i}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{kn}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n} - \frac{{}^*\partial^2 h_{nk}}{\partial x^j \partial x^i} - \right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}-\frac{{}^*\partial^2 h_{kn}}{\partial x^i \partial x^j}-\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}+\\
&+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{nk}}{\partial x^i \partial x^j}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\left.\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}-\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}\right),
\end{aligned}
\tag{21.4}
$$

следовательно

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\right.\\
&\left.-\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}-\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}\right)-{}^*\Delta_{ik,l}{}^*\Delta^l_{jn}+{}^*\Delta_{jk,l}{}^*\Delta^l_{in}\,.
\end{aligned}
\tag{21.5}
$$

Из части х.и.-тензора Римана-Кристоффеля, антисимметричной относительно индексов как внутренней, так и внешней пары, выделим часть, симметричную относительно перестановки внешней и внутренней пар индексов. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)+\frac{1}{2}\left(H_{jkni}-H_{iknj}\right)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)-\frac{1}{2}\left(H_{jkni}-H_{iknj}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{21.6}
$$

Как легко видеть

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)-\frac{1}{2}\left(H_{jkni}-H_{iknj}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}-\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}-\right.\\
&\left.-\frac{{}^*\partial^2 h_{ni}}{\partial x^k \partial x^j}-\frac{{}^*\partial^2 h_{kj}}{\partial x^n \partial x^i}+\frac{{}^*\partial^2 h_{nj}}{\partial x^k \partial x^i}+\frac{{}^*\partial^2 h_{ki}}{\partial x^n \partial x^j}\right)=\\
&=\frac{1}{c^2}\left(A_{jk}D_{in}+A_{in}D_{jk}-A_{ik}D_{jn}-A_{jn}D_{ik}\right),
\end{aligned}
\tag{21.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(H_{kjin}-H_{njik}\right)+\frac{1}{2}\left(H_{jkni}-H_{iknj}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^k \partial x^j}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^n \partial x^i}\right)-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^n \partial x^j}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^k \partial x^i}\right)- \\
-{}^*\Delta_{ik,l}{}^*\Delta^l_{jn}+{}^*\Delta_{jk,l}{}^*\Delta^l_{in}\,.
\end{gathered}
\tag{21.8}
$$

Обозначив S_{kjin} выделенную нами часть х.и.-тензора Римана-Кристоффеля

$$
\begin{gathered}
S_{kjin}=\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^k \partial x^j}\right)+ \\
+\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^n \partial x^i}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^n \partial x^j}\right)- \\
-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^k \partial x^i}\right)+{}^*\Delta^l_{in}{}^*\Delta_{jk,l}-{}^*\Delta^l_{ik}{}^*\Delta_{jn,l}\,,
\end{gathered}
\tag{21.9}
$$

мы можем записать

$$
\begin{gathered}
H_{kjin}=S_{kjin}+\frac{1}{c^2}\big(2A_{ji}D_{kn}+A_{in}D_{jk}+ \\
+A_{nj}D_{ik}+A_{jk}D_{in}+A_{ki}D_{jn}\big)\,.
\end{gathered}
\tag{21.10}
$$

Так как H_{kjin}, A_{pq} и D_{pq} суть х.и.-тензоры, то и S_{kjin} есть х.и.-тензор. Мы назовем его *х.и.-тензором кривизны 4-го ранга*. Таким образом, мы будем делать различие между х.и.-тензором Римана-Кристоффеля и х.и.-тензором 4-го ранга, тогда как ко-тензор Римана-Кристоффеля и ко-тензор кривизны 4-го ранга суть различные названия одного и того же субтензора, для которого мы можем написать также выражение

$$
\begin{gathered}
K_{kjin}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}-\frac{\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}\right)+ \\
+\Delta^l_{in}\Delta_{jk,l}-\Delta^l_{ik}\Delta_{jn,l}\,,
\end{gathered}
\tag{21.11}
$$

равносильное (15.9) и сходное с (21.9). Величину S_{kjin} мы определим так, чтобы

$$S_{kjin}=-S_{kijn}\,, \tag{21.12}$$

$$S_{kjin}=-S_{njik}\,, \tag{21.13}$$

$$S_{kjin}=S_{jkni}\,, \tag{21.14}$$

где из (21.9) легко усмотреть, что эти соотношения действительно выполняются.

Введем также *х.и.-тензор кривизны 2-го ранга* (отличный, вообще говоря, от х.и.-тензора Эйнштейна)

$$S_{kj} = S_{kjin} h^{in} = S_{kjl}^{\cdots l} . \tag{21.15}$$

Из (21.14) следует, что

$$S_{kj} = S_{jk} . \tag{21.16}$$

Так как

$$S_{kjin} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (H_{kjin} - H_{njik}) + \frac{1}{2} (H_{jkni} - H_{iknj}) \right] , \tag{21.17}$$

то, вследствие (21.2), имеем

$$S_{kjin} = \frac{1}{2} (H_{kjin} + H_{jkni}) - \frac{1}{c^2} (A_{ji} D_{kn} + A_{kn} D_{ji}) , \tag{21.18}$$

$$S_{kj} = \frac{1}{2} (H_{kj} + H_{jk}) - \frac{1}{c^2} \left(A_{jl} D_k^l + A_{kl} D_j^l \right) . \tag{21.19}$$

Вследствие (15.21)

$$S_{kj} = H_{kj} - \frac{1}{c^2} \left(A_{jk} D + A_{jl} D_k^l + A_{kl} D_j^l \right) , \tag{21.20}$$

$$H_{kj} = S_{kj} + \frac{1}{c^2} \left(A_{jk} D + A_{jl} D_k^l + A_{kl} D_j^l \right) , \tag{21.21}$$

что также можно получить и непосредственно из (21.10).

Введем также *х.и.-инвариант кривизны*

$$S = h^{kj} S_{kj} . \tag{21.22}$$

Из (21.19) следует, что

$$S = H. \tag{21.23}$$

Вследствие свойств симметрии (21.12–21.14), аналогичным свойствам симметрии ко-тензора кривизны 4-го ранга, число существенных (отличных друг от друга) компонент S_{kjin} равно числу существенных компонент K_{kjin}, т. е. равно шести. Поэтому, по аналогии с контравариантным и ковариантным ко-тензорами Риччи (сравн. [8], стр. 110)

$$C^{ab} = \frac{1}{4} \varepsilon^{aij} \varepsilon^{bkn} K_{kjin} , \tag{21.24}$$

$$C_{rs} = h_{ra} h_{sb} C^{ab} \tag{21.25}$$

можно ввести х.и.-тензоры

$$Z^{ab} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^{aij}\varepsilon^{bkn}S_{kjin}\,, \tag{21.26}$$

$$Z_{rs} = h_{ra}h_{sb}\,Z^{ab}, \tag{21.27}$$

которые мы назовем *х.и.-тензорами Риччи*. Ко-тензор Риччи связан с ко-тензором кривизны 2-го ранга и ко-инвариантом кривизны соотношением

$$C_{rq} = K_{rq} - \frac{1}{2}\,h_{rq}K\,. \tag{21.28}$$

Аналогичная связь существует между х.и.-тензором Риччи, х.и.-тензором кривизны 2-го ранга и х.и.-инвариантом кривизны

$$Z_{rq} = S_{rq} - \frac{1}{2}\,h_{rq}S\,. \tag{21.29}$$

В самом деле

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{apq}\,\varepsilon_{brs}\,Z^{ab} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^{aij}\varepsilon_{apq}\,\varepsilon^{bkn}\varepsilon_{brs}S_{kjin} = \\
&= \frac{1}{4}\left(h^i_p h^j_q - h^i_q h^j_p\right)\left(h^k_r h^n_s - h^k_s h^n_r\right)S_{kjin} = \\
&= \frac{1}{4}\left(h^i_p h^j_q - h^i_q h^j_p\right)(S_{rjis} - S_{sjir}) = \\
&= \frac{1}{2}\left(h^i_p h^j_q - h^i_q h^j_p\right)S_{rjis} = \frac{1}{2}\left(S_{rqps} - S_{rpqs}\right) = S_{rqps}\,,
\end{aligned} \tag{21.30}$$

так что

$$S_{rq} = h^{ps}\varepsilon_{apq}\,\varepsilon_{brs}\,Z^{ab}. \tag{21.31}$$

Но, вследствие (16.3),

$$h^{ps} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijp}\varepsilon^{kls}h_{ik}h_{jl}\,, \tag{21.32}$$

таким образом,

$$\begin{aligned}
&S_{rq} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijp}\varepsilon_{apq}\,\varepsilon^{kls}\varepsilon_{brs}\,h_{ik}h_{jl}Z^{ab} = \\
&= -\frac{1}{2}\left(h^i_a h^j_q - h^i_q h^j_a\right)\left(h^k_b h^l_r - h^k_r h^l_b\right)h_{ik}h_{jl}Z^{ab} = \\
&= -\frac{1}{2}\left(h_{ak}h_{ql} - h_{kq}h_{al}\right)\left(h^l_r Z^{ak} - h^k_r Z^{al}\right) = Z_{rq} - h_{rq}Z\,,
\end{aligned} \tag{21.33}$$

$$Z = h^{ik} Z_{ik}\,, \tag{21.34}$$

$$S = -2Z\,. \tag{21.35}$$

Из (21.33) и (21.35) вытекает (21.29).

§ 2.22 Кривизна пространства

Установим связь между х.и.-тензором кривизны 4-го ранга и котензором кривизны 4-го ранга. Прежде всего, имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial h_{in}}{\partial x^k} + \frac{2}{c^2}\, v_k D_{in}\right) = \frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} + \\
&+ \frac{v_j}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial^2 h_{in}}{\partial t\, \partial x^k} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} + \frac{v_j}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial v_k}{\partial t}\right) D_{in} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\, v_k \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{2}{c^2}\frac{v_j}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k}\, D_{in} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\, v_j\left(\frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial x^k} - \frac{v_k}{c^2}\frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}\right) + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} + \frac{v_j}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial v_k}{\partial t}\right) D_{in} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\, v_k \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2} F_k v_j\right) D_{in} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\left(v_j \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial x^k} + v_k \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial x^j}\right) - \frac{2}{c^4}\, v_j v_k \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}\,,
\end{aligned} \tag{22.1}$$

а также

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^k \partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{2}{c^2}\, \Psi_{jk}\, D_{in} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\left(v_j {}^*\nabla_k D_{in} + v_k {}^*\nabla_j D_{in}\right) - \frac{2}{c^4}\, v_j v_k \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t} + \\
&+ \frac{2}{c^2}\left({}^*\Delta^l_{jk} D_{in} v_l + {}^*\Delta^l_{ki} D_{nl} v_j + {}^*\Delta^l_{kn} D_{il} v_j + \right.\\
&\left. + {}^*\Delta^l_{ji} D_{nl} v_k + {}^*\Delta^l_{jn} D_{il} v_k\right),
\end{aligned} \tag{22.2}$$

где

$$\Psi_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) - \frac{1}{2c^2}\left(F_k v_j + F_j v_k\right) - {}^*\Delta^l_{jk} v_l\,. \tag{22.3}$$

Поэтому

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}-\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}-\frac{\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}\right)=
$$

$$
=\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^k \partial x^j}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^n \partial x^i}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^n \partial x^j}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^k \partial x^i}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\left(\Psi_{jk} D_{in}+\Psi_{in} D_{jk}-\Psi_{jn} D_{ik}-\Psi_{ik} D_{jn}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\left(v_j{}^*\nabla_k D_{in}+v_k{}^*\nabla_j D_{in}+v_i{}^*\nabla_n D_{jk}+v_n{}^*\nabla_i D_{jk}-\right.
$$

$$
\left.-v_j{}^*\nabla_n D_{ik}-v_n{}^*\nabla_j D_{ik}-v_i{}^*\nabla_k D_{jn}-v_k{}^*\nabla_i D_{jn}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{c^4}\left(v_j v_k\frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}+v_i v_n\frac{{}^*\partial D_{jk}}{\partial t}-v_j v_n\frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t}-v_i v_k\frac{{}^*\partial D_{jn}}{\partial t}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\left({}^*\Delta^l_{jk} D_{in} v_l+{}^*\Delta^l_{ki} D_{nl} v_j+{}^*\Delta^l_{kn} D_{il} v_j+{}^*\Delta^l_{ji} D_{nl} v_k+\right.
$$

$$
+{}^*\Delta^l_{jn} D_{il} v_k+{}^*\Delta^l_{in} D_{jk} v_l+{}^*\Delta^l_{nj} D_{kl} v_i+{}^*\Delta^l_{nk} D_{jl} v_i+
$$

$$
+{}^*\Delta^l_{ij} D_{kl} v_n+{}^*\Delta^l_{ik} D_{jl} v_n-{}^*\Delta^l_{jn} D_{ik} v_l-{}^*\Delta^l_{ni} D_{kl} v_j-
$$

$$
-{}^*\Delta^l_{nk} D_{il} v_j-{}^*\Delta^l_{ji} D_{kl} v_n-{}^*\Delta^l_{jk} D_{il} v_n-{}^*\Delta^l_{ik} D_{jn} v_l-
$$

$$
\left.-{}^*\Delta^l_{kj} D_{nl} v_i-{}^*\Delta^l_{kn} D_{jl} v_i-{}^*\Delta^l_{ij} D_{nl} v_k-{}^*\Delta^l_{in} D_{jl} v_k\right)=
$$

$$
=\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^j \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{in}}{\partial x^k \partial x^j}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jk}}{\partial x^n \partial x^i}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}+\frac{{}^*\partial^2 h_{ik}}{\partial x^n \partial x^j}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^i \partial x^k}+\frac{{}^*\partial^2 h_{jn}}{\partial x^k \partial x^i}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\left(\Psi_{jk} D_{in}+\Psi_{in} D_{jk}-\Psi_{jn} D_{ik}-\Psi_{ik} D_{jn}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{c^2}\Big[v_j\left({}^*\nabla_k D_{in}-{}^*\nabla_n D_{ik}\right)+v_k\left({}^*\nabla_j D_{in}-{}^*\nabla_i D_{jn}\right)+
$$

$$
+v_i\left({}^*\nabla_n D_{jk}-{}^*\nabla_k D_{jn}\right)+v_n\left({}^*\nabla_i D_{jk}-{}^*\nabla_j D_{ik}\right)\Big]+
$$

$$
+\frac{1}{c^4}\left(v_j v_k\frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}+v_i v_n\frac{{}^*\partial D_{jk}}{\partial t}-v_j v_n\frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t}-v_i v_k\frac{{}^*\partial D_{jn}}{\partial t}\right)+
$$

$$+\frac{1}{c^2}\Big[{}^*\Delta_{jk}^l\left(D_{il}v_n+D_{nl}v_i-D_{in}v_l\right)+{}^*\Delta_{in}^l\left(D_{jl}v_k+\right.$$
$$\left.+D_{kl}v_j-D_{jk}v_l\right)-{}^*\Delta_{jn}^l\left(D_{il}v_k+D_{kl}v_i-D_{ik}v_l\right)- \tag{22.4}$$
$$-{}^*\Delta_{ik}^l\left(D_{jl}v_n+D_{nl}v_j-D_{jn}v_l\right)\Big].$$

Далее

$$\Delta_{in}^l\Delta_{jk,l}-\Delta_{ik}^l\Delta_{jn,l}=\Big[{}^*\Delta_{in}^l-\frac{1}{c^2}\left(D_i^l v_n+D_n^l v_i-D_{in}v^l\right)\Big]\times$$
$$\times\Big[{}^*\Delta_{jk,l}-\frac{1}{c^2}\left(D_{jl}v_k+D_{kl}v_j-D_{jk}v_l\right)\Big]-$$
$$-\Big[{}^*\Delta_{ik}^l-\frac{1}{c^2}\left(D_i^l v_k+D_k^l v_i-D_{ik}v^l\right)\Big]\times$$
$$\times\Big[{}^*\Delta_{jn,l}-\frac{1}{c^2}\left(D_{jl}v_n+D_{nl}v_j-D_{jn}v_l\right)\Big]={}^*\Delta_{in}^l\,{}^*\Delta_{jk,l}-$$
$$-{}^*\Delta_{ik}^l\,{}^*\Delta_{jn,l}-\frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta_{jk,l}\left(D_i^l v_n+D_n^l v_i-D_{in}v^l\right)- \tag{22.5}$$
$$-\frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta_{in}^l\left(D_{jl}v_k+D_{kl}v_j-D_{jk}v_l\right)+\frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta_{jn,\,l}\left(D_i^l v_k+\right.$$
$$\left.+D_k^l v_i-D_{ik}v^l\right)+\frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta_{ik}^l\left(D_{jl}v_n+D_{nl}v_j-D_{jn}v^l\right)+$$
$$+\frac{1}{c^4}\Big[\left(D_{jl}v_k+D_{kl}v_j-D_{jk}v_l\right)\left(D_i^l v_n+D_n^l v_i-D_{in}v^l\right)-$$
$$-\left(D_{jl}v_n+D_{nl}v_j-D_{jn}v_l\right)\left(D_i^l v_k+D_k^l v_i-D_{ik}v^l\right)\Big],$$

следовательно,

$$K_{kjin}=S_{kjin}-\frac{1}{c^2}\left(\Psi_{jk}D_{in}+\Psi_{in}D_{jk}-\right.$$
$$\left.-\Psi_{jn}D_{ik}-\Psi_{in}D_{jk}\right)-\frac{1}{c^2}\Big[v_j\left({}^*\nabla_k D_{in}-{}^*\nabla_n D_{ik}\right)+$$
$$+v_k\left({}^*\nabla_j D_{in}-{}^*\nabla_i D_{jn}\right)+v_i\left({}^*\nabla_n D_{jk}-{}^*\nabla_k D_{jn}\right)+$$
$$+v_n\left({}^*\nabla_i D_{jk}-{}^*\nabla_j D_{ik}\right)\Big]+\frac{1}{c^4}\left(v_j v_k\frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+v_i v_n\frac{{}^*\partial D_{jk}}{\partial t}-v_j v_n\frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t}-v_i v_k\frac{{}^*\partial D_{jn}}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{1}{c^4}\left(-v_j v_k D_{il}D_n^l-v_i v_n D_{jl}D_k^l+v_j v_n D_{il}D_k^l\ +\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ v_i v_k D_{jl} D^l_n\big) + \frac{1}{c^4}\Big[- v^l \big(D_{jl} v_k + D_{kl} v_j - D_{jk} v_l\big) D_{in} - \\
&- v_l \big(D^l_j v_n + D^l_n v_j - D_{jn} v^l\big) D_{ik} + v^l \big(D_{il} v_n + D_{nl} v_i - \\
&- D_{in} v_l\big) D_{jk} + v_l \big(D^l_i v_k + D^l_k v_i - D_{ik} v^l\big) D_{jn}\Big] + \\
&+ \frac{1}{c^4} v^l v_l \left(- D_{jk} D_{in} + D_{jn} D_{ik}\right).
\end{aligned}
\tag{22.6}
$$

Вводя вместо Ψ_{jk}

$$
\Sigma_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) - \frac{1}{2c^2}\left(F_k v_j + F_j v_k\right) - \Delta^l_{jk} v_l\,, \tag{22.7}
$$

так что

$$
\Psi_{jk} = \Sigma_{jk} - \frac{1}{c^2}\left(D^l_j v_k + D^l_k v_j - D_{jk} v^l\right) v_l\,, \tag{22.8}
$$

и решая уравнение (22.6) относительно S_{kjin}, мы можем написать окончательно

$$
\begin{aligned}
&S_{kjin} = K_{kjin} + \frac{1}{c^2}\Big[\Sigma_{jk} D_{in} + \Sigma_{in} D_{jk} - \Sigma_{jn} D_{ik} - \\
&- \Sigma_{ik} D_{jn}\Big] + \frac{1}{c^4} v_l v^l \Big[D_{jk} D_{in} - D_{jn} D_{ik}\Big] + \\
&+ \frac{1}{c^4}\left[v_j v_k \left(D_{il} D^l_n - \frac{{}^*\partial D_{in}}{\partial t}\right) + v_i v_n \left(D_{jl} D^l_k - \frac{{}^*\partial D_{jk}}{\partial t}\right) - \right. \\
&\left. - v_j v_n \left(D_{il} D^l_k - \frac{{}^*\partial D_{ik}}{\partial t}\right) - v_i v_k \left(D_{jl} D^l_n - \frac{{}^*\partial D_{jn}}{\partial t}\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{c^2}\Big[v_k \left({}^*\nabla_j D_{in} - {}^*\nabla_i D_{jn}\right) + v_j \left({}^*\nabla_k D_{in} - {}^*\nabla_n D_{ik}\right) + \\
&+ v_i \left({}^*\nabla_n D_{jk} - {}^*\nabla_k D_{jn}\right) + v_n \left({}^*\nabla_i D_{jk} - {}^*\nabla_j D_{ik}\right)\Big].
\end{aligned}
\tag{22.9}
$$

Сравнивая (22.7) и (20.31), мы убеждаемся, что условия

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{v}_i &= 0 \\
\widetilde{\Sigma}_{jk} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{22.10}
$$

и условия

$$
\left.
\begin{aligned}
\tilde{v}_i &= 0 \\
\widetilde{X}_{jk} &= 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{22.11}
$$

равносильны. Следовательно, существует ∞^5 систем значений коэффициентов B, B_i, $B_{\beta\gamma}$ в (20.3), при которых в данной мировой точке выполняются условия (22.10) и имеет место равенство

$$S_{kjin} = \widetilde{K}_{kjin}\,. \tag{22.12}$$

Заметим, что, как легко сообразить, условия (22.10) или (22.11) равносильны условиям

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{g}_{0i} = 0 \\ &\frac{\partial \tilde{g}_{0k}}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{0j}}{\partial \tilde{x}^k} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{22.13}$$

Теперь мы можем заняться определением понятия кривизны пространства (см. определение пространства в начале §2.2). Пусть дана мировая точка

$$x^\sigma = a^\sigma, \quad \sigma = 0, 1, 2, 3\,. \tag{22.14}$$

Проведем через нее пространственное сечение мира

$$x^0 = a^0. \tag{22.15}$$

На этом сечении индуцируем метрику, определяемую суб-тензором

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}}\,. \tag{22.16}$$

Очевидно, что кривизна этого пространственного сечения будет определяться суб-тензором K_{kjin}. Преобразуя временну́ю координату, мы получим другое пространственное сечение (также проходящее через данную мировую точку), для которого в данной мировой точке значения h_{ik} будут те же, но значения компонент тензора кривизны K_{kjin}, вообще говоря, другие. Будем ограничивать круг рассматриваемых пространственных сечений. Ограничимся сечениями, ортогональными к линии времени данной системы отсчета (в данной мировой точке), т. е. такими, для которых в данной мировой точке

$$\tilde{g}_{0i} = 0\,. \tag{22.17}$$

В этом случае

$$\tilde{v}_i = 0\,, \tag{22.18}$$

и также

$$S_{kjin} = \widetilde{K}_{kjin} + \frac{1}{c^2}\left[\widetilde{\Sigma}_{jk}D_{in} + \widetilde{\Sigma}_{in}D_{jk} - \widetilde{\Sigma}_{jn}D_{ik} - \widetilde{\Sigma}_{ik}D_{jn}\right]. \quad (22.19)$$

Так как при (22.18)

$$\widetilde{\Sigma}_{jk} = \widetilde{X}_{jk}\,, \quad (22.20)$$

следовательно, в данной мировой точке

$$S_{kjin} = K_{kjin} + \frac{1}{c^2}\left[\widetilde{X}_{jk}D_{in} + \widetilde{X}_{in}D_{jk} - \widetilde{X}_{jn}D_{ik} - \widetilde{X}_{ik}D_{jn}\right]. \quad (22.21)$$

Очевидно также, что

$$S = \widetilde{K} + \frac{2}{c^2}\left[\widetilde{X}D - \widetilde{X}^l_j D^j_l\right], \quad (22.22)$$

где

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_{ik}h^{ik}. \quad (22.23)$$

Меняя значения $\widetilde{X}_{ik}$, мы тем самым будем менять значения $\widetilde{K}_{kjin}$ и $\widetilde{K}$. Следовательно, разные пространственные сечения, ортогональные в данной мировой точке к линиям времени, имеют в этой точке, вообще говоря, разные кривизны (причем не только римановы, но и скалярные, т. е. средние кривизны). Ограничимся теперь сечениями, удовлетворяющими в данной мировой точке условиям (22.10). Для всех этих сечений — мы будем называть их *максимально-ортогональными пространственными сечениями* в данной мировой точке, — имеют место (22.10) и (22.12). Следовательно, их кривизны (как римановы, так и средние) одинаковы.

Понимая “пространство” в смысле определения §2.2, мы под его “кривизной” в данной мировой точке* будем понимать кривизну любого пространственного сечения, максимально-ортогонального в данной мировой точке. Такое определение кривизны пространства оправдывает употребляемые нами названия х.и.-тензоров S_{kjin} и S_{kj} как х.и.-тензоров кривизны, х.и.-инварианта S как х.и.-инварианта кривизны, а также х.и.-тензора Риччи Z_{kj}.

Пусть в данной точке U^j есть единичный х.и.-вектор, ортогональный рассматриваемому двумерному направлению. Для римановой кривизны $C_R(U)$ пространственного сечения в указан-

*Римановой кривизной — в данном двумерном направлении, скалярной кривизной — в среднем.

ном направлении мы можем написать

$$C_R(U) = C_{rq}U^rU^q = K_{rq}U^rU^q - \frac{1}{2}K\,, \tag{22.24}$$

учитывая (21.28) и

$$h_{rq}U^rU^q = 1\,. \tag{22.25}$$

Для средней кривизны C_N пространственного сечения в данной точке имеем

$$C_N = \frac{1}{3}C = -\frac{1}{6}K\,, \tag{22.26}$$

где

$$C = h^{ik}C_{ik}\,. \tag{22.27}$$

Поэтому, в силу сказанного выше, для римановой кривизны $^*C_R$ пространства в данной точке (в рассматриваемом двумерном направлении) и для средней кривизны C_N пространства в данной точке мы можем написать

$$^*C_R(U) = Z_{rq}U^rU^q = S_{rq}U^rU^q - \frac{1}{2}S \tag{22.28}$$

и, соответственно,

$$^*C_N = \frac{1}{3}Z = -\frac{1}{6}S\,. \tag{22.29}$$

Глава 3

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3.1 Метрический тензор

Ставя в данном параграфе своей целью приведение уравнений общей теории относительности к хронометрически инвариантному (х.и.-тензорному) виду, мы начнем с мирового метрического тензора.

В Главе 2 мы уже получили: для ковариантного метрического тензора выражения (2.9), (2.10) и (8.9)

$$g_{00}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2, \tag{1.1}$$

$$g_{0i}=-\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{v_i}{c}\,, \tag{1.2}$$

$$g_{ik}=-h_{ik}+\frac{v_i v_k}{c^2}\,, \tag{1.3}$$

для контравариантного метрического тензора (8.25), (8.24), (8.14)

$$g^{00}=\frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{v_j v^j}{c^2}\right), \tag{1.4}$$

$$g^{0i}=-\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{v^i}{c}\,, \tag{1.5}$$

$$g^{ik}=-h^{ik}, \tag{1.6}$$

и, наконец, для фундаментального определителя g (8.19)

$$\sqrt{-g}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\sqrt{h}\,. \tag{1.7}$$

§ 3.2 Символы Кристоффеля первого рода

Так как
$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = -\frac{2}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^0}\,, \tag{2.1}$$
тогда
$$\Gamma_{00,0} = -\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\,. \tag{2.2}$$

Далее
$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\frac{2}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{2.3}$$
$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = \frac{1}{c^3}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^0} - \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x^0} \tag{2.4}$$
и также
$$\begin{gathered}\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \frac{1}{c^3}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^0} + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - c\,\frac{\partial v_i}{\partial x^0}\right) = \\ = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F_i + \frac{1}{c^4}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\end{gathered} \tag{2.5}$$
вследствие (6.5) из §2.6. Таким образом,
$$\Gamma_{00,i} = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F_i + \frac{1}{c^4}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\,. \tag{2.6}$$

Так как
$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\frac{2}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{2.7}$$
тогда
$$\Gamma_{0i,0} = -\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{2.8}$$

Далее,
$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} = \frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\,, \tag{2.9}$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = -\frac{2}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D_{ij} + \frac{1}{c^2}\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x^0} + v_i\frac{\partial v_j}{\partial x^0}\right) \tag{2.10}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}+\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j}\right)=-\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\times\\
&\times\left[D_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)\right]+\frac{1}{2c^2}\,v_j\frac{\partial v_i}{\partial x^0}-\frac{1}{2c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}+\\
&+\frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{1}{2c^2}\,v_i\frac{\partial v_j}{\partial x^0}+\frac{1}{c^2}\,v_i\frac{\partial v_j}{\partial x^0}+\frac{1}{2c^3}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}-\\
&-\frac{1}{c^3}\,v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}=-\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\left[D_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j-F_j v_i\right)+\frac{1}{c^2}F_j v_i\right]+\frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}=\\
&=-\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\Big(D_{ij}+A_{ij}+\frac{1}{c^2}F_j v_i\Big)+\frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Таким образом

$$\Gamma_{0i,j}=-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\Big(D_{ij}+A_{ij}+\frac{1}{c^2}F_j v_i\Big)+\frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,. \tag{2.12}$$

Вследствие (2.9) и (2.10) мы имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right)=\frac{1}{2c^3}\left(v_j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}+v_i\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}\right)-\\
&-\frac{1}{2c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)D_{ij}-\\
&-\frac{1}{2c^2}\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x^0}+v_i\frac{\partial v_j}{\partial x^0}\right)=\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\times\\
&\times\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right],
\end{aligned}\tag{2.13}$$

так что

$$\Gamma_{ij,0}=\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]. \tag{2.14}$$

Наконец, т. к.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=-\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}+\frac{1}{c^2}\left(v_j\frac{\partial v_i}{\partial x^k}+v_i\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right), \tag{2.15}$$

тогда

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k}\right)+\\+\frac{1}{2c^2}\left[v_i\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}-\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right)+v_j\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)+\right.\\\left.+v_k\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)\right]+\frac{1}{2c^4}\Big[v_i\left(F_j v_k-F_k v_j\right)+\\+v_j\left(F_i v_k-F_k v_i\right)-v_k\left(F_i v_j+F_j v_i\right)+2F_k v_i v_j\Big] \tag{2.16}$$

и в результате мы имеем

$$\Gamma_{ij,k}=-\Delta_{ij,k}+\frac{1}{c^2}\left[v_i A_{jk}+v_j A_{ik}+\frac{1}{2}\,v_k\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\right.\\\left.-\frac{1}{2c^2}\,v_k\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]+\frac{1}{c^4}\,F_k v_i v_j\,. \tag{2.17}$$

Соберем формулы (2.2), (2.6), (2.8), (2.12), (2.14) и (2.17) в окончательном виде

$$\Gamma_{00,0}=-\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\,, \tag{2.18}$$

$$\Gamma_{00,i}=\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F_i+\frac{1}{c^4}\,v_i\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\,, \tag{2.19}$$

$$\Gamma_{0i,0}=-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{2.20}$$

$$\Gamma_{0i,j}=-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_{ij}+A_{ij}+\frac{1}{c^2}F_j v_i\right)+\frac{1}{c^3}\,v_j\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{2.21}$$

$$\Gamma_{ij,0}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right], \tag{2.22}$$

$$\Gamma_{ij,k}=-\Delta_{ij,k}+\frac{1}{c^2}\left[v_i A_{jk}+v_j A_{ik}+\frac{1}{2}\,v_k\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\right.\\\left.-\frac{1}{2c^2}\,v_k(F_i v_j+F_j v_i)\right]+\frac{1}{c^4}\,F_k v_i v_j\,. \tag{2.23}$$

§ 3.3 Символы Кристоффеля второго рода

Вследствие (2.18) и (2.19) имеем

$$
\begin{aligned}
& g^{00}\Gamma_{00,0}+g^{0k}\Gamma_{00,k}=-\frac{1}{c^3}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1-\frac{v_j v^j}{c^2}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}- \\
& -\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v^k F_k-\frac{1}{c^5}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v_j v^j\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}= \\
& =-\frac{1}{c^3}\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_k F^k\right],
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

следовательно

$$
\Gamma_{00}^0=-\frac{1}{c^3}\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_k F^k\right].
\tag{3.2}
$$

Кроме того, т. к.

$$
g^{k0}\Gamma_{00,0}+g^{kl}\Gamma_{00,l}=\frac{1}{c^4}\,v^k\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k-\frac{1}{c^4}\,v^k\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\,,
\tag{3.3}
$$

мы имеем

$$
\Gamma_{00}^k=-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k.
\tag{3.4}
$$

Вследствие (2.20) и (2.21)

$$
\begin{aligned}
& g^{00}\Gamma_{0i,0}+g^{0k}\Gamma_{0i,k}=-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1-\frac{v_j v^j}{c^2}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+ \\
& +\frac{1}{c^2}\,v^k\left(D_{ik}+A_{ik}+\frac{1}{c^2}\,F_k v_i\right)-\frac{1}{c^2}\,\frac{v_k v^k}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}= \\
& =-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}\,v_k\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

следовательно

$$
\Gamma_{0i}^0=\frac{1}{c^2}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_k\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\right]
\tag{3.6}
$$

и, кроме того,

$$
g^{k0}\Gamma_{0i,0}+g^{kl}\Gamma_{0i,l}=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right),
\tag{3.7}
$$

$$
\Gamma_{0i}^k=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right).
\tag{3.8}
$$

Вследствие (2.22) и (2.23) мы получаем

$$
\begin{aligned}
& g^{00}\Gamma_{ij,0}+g^{0k}\Gamma_{ij,k}=\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1-\frac{v_k v^k}{c^2}\right)\times\\
& \times\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]+\\
& +\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\Delta_{ij,k}v^k-\frac{1}{c^3}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v^k\left\{v_i A_{jk}+v_j A_{ik}+\right.\\
& \left.+\,v_k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]\right\}-\\
& -\frac{1}{c^5}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v^k F_k v_i v_j=\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1-\frac{v_k v^k}{c^2}\right)D_{ij}-\\
& -\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\Sigma_{ij}-\frac{1}{c^3}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v^k\left(v_i A_{jk}+v_j A_{ik}\right)-\\
& -\frac{1}{c^5}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v^k F_k v_i v_j\,,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

то есть

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij}=-\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\Bigg[&\Sigma_{ij}-\left(1-\frac{v_k v^k}{c^2}\right)D_{ij}+\\
&+\frac{1}{c^2}\,v_k\left(v_i A_{j\cdot}^{\cdot k}+v_j A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)+\frac{1}{c^4}\,v_i v_j v_k F^k\Bigg],
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

где Σ_{ij} определяется из (22.7), §2.22. Далее, получаем

$$
\begin{aligned}
& g^{k0}\Gamma_{ij,0}+g^{kl}\Gamma_{ij,l}=-\frac{1}{c^2}\,v^k\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\right.\\
& \left.+\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]+\Delta^k_{ij}-\frac{1}{c^2}\left\{v_i A_{j\cdot}^{\cdot k}+v_j A_{i\cdot}^{\cdot k}+\right.\\
& \left.+\,v^k\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]\right\}-\frac{1}{c^4}\,F^k v_i v_j=\\
& =\Delta^k_{ij}-\frac{1}{c^2}\,v^k D_{ij}-\frac{1}{c^2}\left(v_i A_{j\cdot}^{\cdot k}+v_j A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)-\frac{1}{c^2}\,F^k v_i v_j\,,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

откуда имеем

$$
\Gamma^k_{ij}=\Delta^k_{ij}-\frac{1}{c^2}\left(D_{ij}v^k+v_i A_{j\cdot}^{\cdot k}+v_j A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^k\right).
\tag{3.12}
$$

Введем Ψ_{ij} вместо Σ_{ij} в (3.10) и ${}^*\Delta^k_{ij}$ вместо Δ^k_{ij} в (3.12). Тогда, согласно (22.8) из §2.22, мы получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} - \left(1 - \frac{v_k v^k}{c^2}\right) D_{ij} = \Psi_{ij} - \left(1 - \frac{v_k v^k}{c^2}\right) D_{ij} + \frac{1}{c^2}\big(D^k_i v_j + \\ + D^k_j v_i - D_{ij} v^k\big) v_k = \Psi_{ij} - D_{ij} + \frac{1}{c^2}\, v_k \big(D^k_j v_i + D^k_i v_j\big)\,,\end{aligned} \tag{3.13}$$

следовательно

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \bigg\{ \Psi_{ij} - D_{ij} + \frac{1}{c^2}\, v_k \Big[\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big) v_i + \\ + \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big) v_j + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k \Big] \bigg\}\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Так как, согласно (13.8) из §2.13,

$$\Delta^k_{ij} - \frac{1}{c^2}\, D_{ij} v^k = {}^*\Delta^k_{ij} - \frac{1}{c^2}\left(D^k_i v_j + D^k_j v_i\right), \tag{3.15}$$

тогда

$$\Gamma^k_{ij} = {}^*\Delta^k_{ij} - \frac{1}{c^2}\left[v_i \big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big) + v_j \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big) + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k \right]. \tag{3.16}$$

Соберем формулы (3.2), (3.4), (3.6), (3.8), (3.14) и (3.16) в окончательном виде

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^3}\left[\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_k F^k \right], \tag{3.17}$$

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k, \tag{3.18}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{c^2}\left[-\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k \left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k \right) \right], \tag{3.19}$$

$$\Gamma^k_{0i} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\, v_i F^k \right), \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}} \bigg\{ -D_{ij} + \frac{1}{c^2}\, v_k \Big[v_i \big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big) + \\ + v_j \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big) + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k \Big] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) - \\ - \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j + F_j v_i\right) - {}^*\Delta^k_{ij}\, v_k \bigg\}\,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = {}^{*}\Delta_{ij}^{k} - \frac{1}{c^2}\left[v_i\left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) + v_j\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k \right]. \qquad (3.22)$$

Первое применение символов Кристоффеля будет заключаться в получении уравнений динамики точки для выяснения механического смысла величин F_i и A_{jk}. Для этого, однако, нам нужно предварительно рассмотреть вопрос о квадрате величины х.и.-скорости света и ввести массу, энергию и импульс точки.

§ 3.4 Скорость света

Как легко видеть, мы можем записать равенство

$$ds^2 = g_{00}\, dx^0 dx^0 + 2\, g_{0i}\, dx^0 dx^i + g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (4.1)$$

в виде

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{00}}\, dx^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i\right)^2 + \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}\, g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^i dx^k, \qquad (4.2)$$

или, иначе,

$$ds^2 = \left(\frac{dx_0}{\sqrt{g_{00}}}\right)^2 - h_{ik}\, dx^i dx^k. \qquad (4.3)$$

Следовательно,

$$\left(\sqrt{g_{00}}\, \frac{ds}{dx_0}\right)^2 = 1 - h_{ik}\left(\sqrt{g_{00}}\, \frac{dx^i}{dx_0}\right)\left(\sqrt{g_{00}}\, \frac{dx^k}{dx_0}\right) \qquad (4.4)$$

и, т. к. согласно §2.9,

$$\sqrt{g_{00}}\, \frac{dx^i}{dx_0} = \frac{{}^{*}u^i}{c}\,, \qquad (4.5)$$

то мы имеем

$$\left(\sqrt{g_{00}}\, \frac{ds}{dx_0}\right)^2 = 1 - h_{ik} \frac{{}^{*}u^i\, {}^{*}u^k}{c^2} \qquad (4.6)$$

или, иначе,

$$\left(\sqrt{g_{00}}\, \frac{ds}{dx_0}\right)^2 = 1 - \frac{{}^{*}u_j\, {}^{*}u^j}{c^2}\,. \qquad (4.7)$$

Для света

$$ds = 0 \qquad (4.8)$$

и, следовательно,

$${}^{*}u_j\, {}^{*}u^j = c^2. \qquad (4.9)$$

Таким образом, квадрат величины х.и.-вектора скорости света в пустоте равен c^2.

§ 3.5 Масса, энергия и импульс точки

Обратив преобразованиями (4.9) из §2.4 потенциалы в нуль в данной мировой точке, мы для движущейся массы m, энергии E и импульса p^i материальной точки можем написать выражения, сходные с соответствующими выражениями специальной теории относительности

$$m = m_0 \frac{d\tilde{x}^0}{ds}\,, \tag{5.1}$$

$$E = mc^2, \tag{5.2}$$

$$p^i = m_0 \frac{c\, d\tilde{x}^i}{ds}\,. \tag{5.3}$$

Так как в выбранных координатах $\tilde{x}^\sigma$ $(\sigma = 0,1,2,3)$ в данной мировой точке

$$\tilde{g}_{00} = 1\,, \qquad \tilde{g}_{0i} = 0 \tag{5.4}$$

и, следовательно,

$$d\tilde{x}^0 = d\tilde{x}_0 = \frac{d\tilde{x}_0}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}}\,, \tag{5.5}$$

то мы имеем

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} \frac{d\tilde{x}_0}{ds}\,. \tag{5.6}$$

Но величина (5.7) есть х.и.-инвариант

$$\frac{d\tilde{x}_0}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} = \frac{dx_0}{\sqrt{g_{00}}} \tag{5.7}$$

для произвольной системы координат x^σ $(\sigma = 0,1,2,3)$ данной системы отсчета. Следовательно, вообще

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx_0}{ds} \tag{5.8}$$

и, вследствие (4.7),

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{{}^*u_i {}^*u^i}{c^2}}}\,. \tag{5.9}$$

Таким образом, мы получили выражения для х.и.-инварианта движущейся массы. Для х.и.-инварианта энергии мы имеем (5.2). На основании предыдущего §3.4 мы можем сказать, что энергия точки равна ее движущейся массе, умноженной на квадрат величины х.и.-векторы скорости света.

Так как $d\tilde{x}^i$ есть х.и.-вектор

$$d\tilde{x}^i = dx^i, \tag{5.10}$$

то вообще

$$p^i = m_0 \frac{c\,dx^i}{ds}\,. \tag{5.11}$$

Таково выражение для х.и.-вектора импульса. Так как

$$\frac{dx^i}{ds} = \left(\sqrt{g_{00}}\,\frac{dx^i}{dx_0}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx_0}{ds}\right), \tag{5.12}$$

то, вследствие (4.5),

$$p^i = m^* u^i. \tag{5.13}$$

§ 3.6 Изменения энергии и импульса точки

На основании наших сведений о х.и.-дифференцировании и х.и.-скорости мы можем утверждать, что оператор, инвариантный относительно преобразований временно́й координаты и, при обращении потенциалов в нуль, совпадающий с оператором полного дифференцирования по временно́й координате

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^j \frac{\partial}{\partial x^j}\,, \tag{6.1}$$

имеет вид

$$\frac{{}^*d}{dt} = \frac{{}^*\partial}{\partial t} + {}^*u^j \frac{{}^*\partial}{\partial x^j}\,. \tag{6.2}$$

Мы можем назвать этот оператор *оператором полного дифференцирования по временно́й координате* (или по времени).

Найдем связь между полной х.и.-производной по времени, с одной стороны, и, с другой стороны, полной ко-производной по времени, производной по собственному времени и частной ко-производной по времени

$$\begin{aligned} \frac{{}^*d}{dt} &= \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2 u^j}{c^2-\mathrm{w}-v_k u^k}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{v_j}{c^2-\mathrm{w}}{}^*u^j\frac{\partial}{\partial t} = \\ &= \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_j{}^*u^j\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{c^2-\mathrm{w}}{c^2-\mathrm{w}-v_k u^k}\,u^j\frac{\partial}{\partial x^j}\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Однако

$$1+\frac{1}{c^2}\,v_j\,{}^*u^j = 1+\frac{v_j u^j}{c^2-\mathrm{w}-v_k u^k} = \frac{c^2-\mathrm{w}}{c^2-\mathrm{w}-v_j u^j}\,. \tag{6.4}$$

следовательно,

$$\frac{{}^*d}{dt} = \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_j\,{}^*u^j\Big)\frac{d}{dt} \tag{6.5}$$

или, иначе

$$\frac{{}^*d}{dt} = \frac{1}{1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_j u^j\right)}\,\frac{d}{dt}\,. \tag{6.6}$$

Так как

$$\begin{gathered}\frac{dx_0}{dx^0} = g_{00}+g_{0j}\frac{dx^j}{dx^0} = \Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}-\frac{v_j u^j}{c^2}\Big) = \\ = \frac{1}{1+\frac{1}{c^2}\,v_j\,{}^*u^j}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)^2,\end{gathered} \tag{6.7}$$

то, вследствие (4.7),

$$\frac{dx^0}{ds} = \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{1+\frac{1}{c^2}\,v_j\,{}^*u^j}{\sqrt{1-\frac{{}^*u_i\,{}^*u^i}{c^2}}}\,. \tag{6.8}$$

Поэтому

$$\frac{{}^*d}{dt} = \sqrt{1-\frac{{}^*u_k\,{}^*u^k}{c^2}}\,\frac{c\,d}{ds}\,. \tag{6.9}$$

Из (6.2) следует также, что

$$\frac{{}^*d}{dt} = \Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_j\,{}^*u^j\Big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial}{\partial t}+{}^*u^j\frac{\partial}{\partial x^j}\,. \tag{6.10}$$

Применяя полученные формулы к энергии точки, мы, в частности, будем иметь

$$\frac{{}^*dE}{dt} = \sqrt{1-\frac{{}^*u_k\,{}^*u^k}{c^2}}\,\frac{c\,dE}{ds}\,. \tag{6.11}$$

Так как E есть х.и.-инвариант, то и $\frac{{}^*dE}{dt}$ тоже х.и.-инвариант. Как известно, полная ко-производная

$$\frac{dQ^k}{dt} = \frac{\partial Q^k}{\partial t}+u^j\frac{\partial Q^k}{\partial x^j} \tag{6.12}$$

любого суб-вектора Q^k не есть суб-вектор, но можно ввести суб-вектор полной производной, равный

$$\frac{dQ^k}{dt} + \Delta^k_{jl} Q^l u^j = \frac{\partial Q^k}{\partial t} + \left(\nabla_j Q^k\right) u^j. \tag{6.13}$$

Полная х.и.-производная от Q^k

$$\frac{{}^*dQ^k}{dt} = \frac{{}^*\partial Q^k}{\partial t} + {}^*u^j \frac{{}^*\partial Q^k}{\partial x^j} \tag{6.14}$$

также не является суб-вектором, но можно ввести инвариантную относительно преобразований временно́й координаты операцию полной х.и.-производной, совпадающую с обычной операцией получения суб-вектора полной производной при обращении потенциалов в данной мировой точке в нуль. Для суб-вектора полной х.и.-производной от Q^k мы будем иметь выражение, отличающееся от (6.13) наличием звездочек

$$\frac{{}^*dQ^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{jl} Q^l\, {}^*u^j = \frac{{}^*\partial Q^k}{\partial t} + \left({}^*\nabla_j Q^k\right) {}^*u^j\,. \tag{6.15}$$

Пользуясь (6.4–6.6), находим, что

$$\begin{gathered}\frac{{}^*dQ^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{jl} Q^l\, {}^*u^j = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(1 + \frac{1}{c^2}\, v_n {}^*u^n\right) \times \\ \times \left[\frac{dQ^k}{dt} + \Delta^k_{jl} Q^l u^j + \frac{1}{c^2}\left(D^k_j v_l + D^k_l v_j - D_{jl} v^k\right) Q^l u^j\right]\end{gathered} \tag{6.16}$$

или, иначе,

$$\begin{gathered}\frac{{}^*dQ^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{jl} Q^l\, {}^*u^j = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_n u^n\right)} \times \\ \times \left[\frac{dQ^k}{dt} + \Delta^k_{jl} Q^l u^j + \frac{1}{c^2}\left(D^k_j v_l + D^k_l v_j - D_{jl} v^k\right) Q^l u^j\right].\end{gathered} \tag{6.17}$$

Сравнивая (5.11) с (5.13) и учитывая (5.9), получаем

$$\frac{c\,dx^i}{ds} = \frac{{}^*u^i}{\sqrt{1 - \dfrac{{}^*u_k {}^*u^k}{c^2}}}\,. \tag{6.18}$$

Вследствие (6.9) и (6.18) мы имеем

$$\frac{{}^*dQ^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{jl} Q^l\, {}^*u^j = c\sqrt{1 - \frac{{}^*u_n {}^*u^n}{c^2}}\left(\frac{dQ^k}{ds} + {}^*\Delta^k_{jl} Q^l \frac{dx^j}{ds}\right). \tag{6.19}$$

Применяя полученные формулы к импульсу точки, мы можем написать, в частности (в предположении неизменности m_0)

$$\frac{{}^*dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{jl}\,p^l\,{}^*u^j=m_0c^2\sqrt{1-\frac{{}^*u_n{}^*u^n}{c^2}}\left(\frac{d^2x^k}{ds^2}+{}^*\Delta^k_{jl}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^l}{ds}\right). \qquad (6.20)$$

Так как суб-вектор импульса есть х.и.-вектор, то и суб-вектор полной производной от импульса по времени — также х.и.-вектор.

§ 3.7 Временнóе уравнение геодезических

Из четырех уравнений геодезических линий

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0\,, \qquad \alpha,\mu,\nu=0,1,2,3 \qquad (7.1)$$

рассмотрим временнóе, т. е. уравнение с $\alpha=0$

$$\frac{d^2x^0}{ds^2}+\Gamma^0_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}+2\Gamma^0_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds}+\Gamma^0_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0\,. \qquad (7.2)$$

Подставляя последовательно (6.8), (5.9), (5.2), (5.12), (6.9) и (6.10), и предполагая, что покоящаяся масса точки остается неизменной, мы имеем

$$\begin{aligned} m_0\frac{d^2x^0}{ds^2}&=\frac{d}{ds}\left(m_0\frac{dx^0}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{mc^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_j{}^*u^j\right)\right]=\\ &=\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{dE}{ds}+v_j\frac{dp^j}{ds}\right)+\frac{mc^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_j{}^*u^j\right)\frac{d\mathrm{w}}{ds}+\\ &+\frac{m}{c^2-\mathrm{w}}{}^*u^j\frac{dv_j}{ds}=\frac{1}{c^3\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\left\{\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{{}^*dE}{dt}+v_j\frac{dp^j}{dt}\right)+\right.\\ &+\frac{mc^2}{c^2-\mathrm{w}}\left[\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right){}^*u^j\frac{\partial v_j}{\partial t}+m\,{}^*u^i\,{}^*u^j\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right]+\\ &\left.+\frac{mc^4}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_j{}^*u^j\right)\left[\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+{}^*u^i\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Вследствие (3.17), (6.8) и (5.9)

$$m_0\Gamma^0_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}=-\frac{m_0}{c^3}\frac{c^4}{(c^2-\mathrm{w})^2}\ \times$$

$$\times\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_l F^l\right]\frac{\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)^2}{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}=$$
$$=-\frac{m}{c^3\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)^2\left[\frac{c^4}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+v_l F^l\right]. \tag{7.4}$$

Аналогично, вследствие (3.19), (6.8), (6.18) и (5.9),

$$2m_0\Gamma^0_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds}=2\,\frac{m_0}{c^2}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D^l_i+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\right]\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n}{\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\frac{{}^*u^i}{c\sqrt{1-\frac{{}^*u_q{}^*u^q}{c^2}}}=$$
$$=2\,\frac{m}{c^3\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)\times$$
$$\times\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}{}^*u^i\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D^l_i+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right){}^*u^i+\frac{1}{c^2}\,v_i{}^*u^i\left(v_l F^l\right)\right]. \tag{7.5}$$

Наконец, вследствие (3.21), (6.18), (5.9) и (22.3) из §2.22,

$$m_0\Gamma^0_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=-\frac{m_0}{c}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left\{\Psi_{ij}-D_{ij}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c^2}\,v_l\left[\left(D^l_j+A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)v_i+\left(D^l_i+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)v_j+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^l\right]\right\}\times$$
$$\times\frac{{}^*u^i{}^*u^j}{c^2\left(1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}\right)}=-\frac{m}{c^3\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times$$
$$\times\left[{}^*u^i{}^*u^j\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-D_{ij}{}^*u^i{}^*u^j-\frac{1}{c^2}\,v_j{}^*u^j\left(F_i{}^*u^i\right)-{}^*\Delta^n_{ij}{}^*u^i{}^*u^j v_n+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{c^2}\,v_j{}^*u^j v_l\left(D^l_i+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right){}^*u^i+\frac{1}{c^4}\left(v_j{}^*u^j\right)^2\left(v_l F^l\right)\right]. \tag{7.6}$$

Следовательно

$$m_0c^3\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{{}^*u_n{}^*u^n}{c^2}}\left(\frac{d^2x^0}{ds^2}+\Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\right)=$$

$$
\begin{gathered}
= \frac{{}^*dE}{dt} + v_k \frac{{}^*dp^k}{dt} + m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)^2\Big(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\Big)^2\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t} + \\
+ m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,{}^*u^j\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^j} + m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\times \\
\times\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,{}^*u^j\,\frac{\partial v_j}{\partial t} - m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)^2\Big(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\Big)^2\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t} + \\
+ m\,{}^*u^i\,{}^*u^j\,\frac{\partial v_j}{\partial x^i} - m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)^2\,\big(v_kF^k\big) - \\
- 2m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,{}^*u^i\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i} + 2m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\times \\
\times\,\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\,v_k{}^*u^i + mD_{ij}{}^*u^i\,{}^*u^j - \,m\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\,{}^*u^i\,{}^*u^j + \\
+ 2m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\frac{1}{c^2}\,v_m{}^*u^m\,\big(v_kF^k\big) + \frac{1}{c^2}\,mv_n{}^*u^n\big(F_i{}^*u^i\big) + \\
+ mv_k{}^*\Delta_{ij}^k{}^*u^i\,{}^*u^j - 2m\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n v_k\,\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i - \\
- \frac{1}{c^4}\,m\,(v_n{}^*u^n)^2\big(v_kF^k\big) = \frac{{}^*dE}{dt} + mD_{ij}{}^*u^i\,{}^*u^j - mF_i{}^*u^i + \\
+ v_k\left[\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta_{ij}^k p^i\,{}^*u^j - mF^k + 2m\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i\right].
\end{gathered}
\tag{7.7}
$$

Поэтому временно́е уравнение геодезических может быть записано в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{{}^*dE}{dt} + mD_{ij}{}^*u^i\,{}^*u^j - mF_i{}^*u^j + \\
+ v_k\left[\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta_{ij}^k\,p^i\,{}^*u^j - mF^k + 2m\,\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i\right] = 0\,.
\end{gathered}
\tag{7.8}
$$

Левая часть уравнения (7.8) есть ко-инвариант. Тем не менее оно сохраняет свой вид при преобразованиях временно́й координаты, т. к. является следствием одного из четырех уравнений геодезических, имеющих в совокупности тензорный характер. Поэтому мы можем применить метод вариации потенциалов (см. §2.4).

Полагая все v_k равными нулю, получаем

$$
\frac{{}^*dE}{dt} + mD_{ij}{}^*u^i\,{}^*u^j - mF_j{}^*u^j = 0\,.
\tag{7.9}
$$

Так как левая часть этого уравнения есть х.и.-инвариант, то оно имеет место при любом выборе временно́й координаты (в любой системе отсчета). В таком случае, при любом выборе временно́й координаты имеет место и равенство

$$v_k\left[\frac{{}^*dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j-mF^k+2m\left(D^k_i+A^{\cdot k}_{i\cdot}\right){}^*u^i\right]=0\,. \tag{7.10}$$

Полагая последовательно

$$\left.\begin{aligned} &v_1\neq 0\,, \quad v_2=v_3=0\\ &v_2\neq 0\,, \quad v_3=v_1=0\\ &v_3\neq 0\,, \quad v_1=v_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

и учитывая, что величины

$$\frac{{}^*dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j-mF^k+2m\big(D^k_i+A^{\cdot k}_{i\cdot}\big){}^*u^i \tag{7.12}$$

суть компоненты х.и.-вектора, мы убеждаемся, что при любом выборе временно́й координаты (в любой системе отсчета) имеют место равенства

$$\frac{{}^*dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j-mF^k+2m\big(D^k_i+A^{\cdot k}_{i\cdot}\big){}^*u^i=0\,. \tag{7.13}$$

Четыре уравнения — одно (7.9) и три (7.13) — мы получили, раскрывая выражение левой части одного, временно́го уравнения геодезических и основываясь на существовании остальных трех уравнений (т. к. только в своей совокупности четыре уравнения геодезических носят тензорный характер). Поэтому уравнения (7.9) и (7.13) должно рассматривать как следствия четырех уравнений геодезических, а не одного из них. Возможность получения их из рассмотрения только одного уравнения показывает пользу метода вариации потенциалов.

§ 3.8 Пространственные уравнения геодезических

Обратимся теперь к пространственным уравнениям геодезических, т. е. к уравнениям (7.1) при $\alpha=1,2,3$

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}+2\Gamma^k_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0\,. \tag{8.1}$$

После полученного в предыдущем §3.7 мы не можем ожидать от них ничего нового. Убедимся в этом непосредственным рассмотрением их.

Применяя последовательно (3.27), (6.18), (6.20) и (5.9), в предположении неизменности покоящейся массы точки, получаем

$$m_0\frac{d^2x^k}{ds^2}+m_0\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=m_0\left(\frac{d^2x^k}{ds^2}+{}^*\Delta^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)-$$
$$-\frac{m_0}{c^2}\left[\left(D^k_j+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)v_i+\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_j+\frac{1}{c^2}\,v_iv_jF^k\right]\times$$
$$\times\frac{{}^*u^i\,{}^*u^j}{c^2\left(1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}\right)}=\frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\left[\frac{dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j-\right. \tag{8.2}$$
$$\left.-\frac{2}{c^2}\,m\,v_n{}^*u^n\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right){}^*u^i-\frac{1}{c^4}\,m\left(v_n{}^*u^n\right)^2F^k\right].$$

Вследствие (3.18), (6.8) и (5.9)

$$m_0\Gamma^k_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds}=$$
$$=-\frac{m_0}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2F^k\left(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\right)^2\frac{\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)^2}{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}= \tag{8.3}$$
$$=-\frac{m}{c^2\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)^2F^k.$$

Аналогично, вследствие (3.20), (6.8), (6.18) и (5.9)

$$2\,m_0\Gamma^k_{0i}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^i}{ds}=2\,\frac{m_0}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_iF^k\right)\times$$
$$\times\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n}{c\left(1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}\right)}{}^*u^i=\frac{2m}{c^2\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}}\times \tag{8.4}$$
$$\times\left(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\right)\left[\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right){}^*u^i+\frac{1}{c^2}\,v_m{}^*u^mF^k\right].$$

Следовательно,

$$m_0c^2\sqrt{1-\frac{{}^*u_p{}^*u^p}{c^2}}\left(\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)=$$
$$=\frac{{}^*dp^k}{dt}+{}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j-\frac{2}{c^2}\,m\,v_n{}^*u^n\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right){}^*u^i-$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c^4}\,m\left(v_n{}^*u^n\right)^2 F^k - m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)^2 F^k + \\
&+ 2m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i + \\
&+ 2m\Big(1+\frac{1}{c^2}\,v_n{}^*u^n\Big)\frac{1}{c^2}\,v_m{}^*u^m F^k = \\
&= \frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta_{ij}^k\, p^i\, {}^*u^j - mF^k + 2m\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Поэтому пространственные уравнения геодезических могут быть записаны в виде

$$
\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta_{ij}^k\, p^i\, {}^*u^j - mF^k + 2m\big(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big){}^*u^i = 0\,, \tag{8.6}
$$

что совпадает с (7.13).

Как известно, вследствие существования тождественного соотношения

$$
g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = 1 \tag{8.7}
$$

из четырех уравнений геодезических независимых — только три. Следовательно, из уравнений (7.9) и (7.13) независимых также только три. Тождественное соотношение, связывающие уравнения (7.9) и (7.13), мы получим из (8.7) или, что то же, из (4.3). В результате имеем

$$
\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - h_{ik}\left(m_0\frac{c\,dx^i}{ds}\right)\left(m_0\frac{c\,dx^k}{ds}\right) = m_0 c^2 \tag{8.8}
$$

и, в силу (5.8), (5.2) и (5.11),

$$
\frac{E^2}{c^2} - h_{ik}\, p^i p^k = m_0^2 c^2 \tag{8.9}
$$

или, иначе

$$
\frac{E^2}{c^2} - p_j\, p^j = m_0^2 c^2. \tag{8.10}
$$

Формулу (7.13) можно рассматривать как основные уравнения динамики точки, а также как теорему импульсов. Уравнение же (7.9) — как теорему энергии, являющуюся следствием основных уравнений (7.13) в силу соотношения (8.9) или (8.10).

Покажем, как можно получить (7.9) из (7.13), пользуясь (8.9) и в предположении неизменности m_0. Из (8.9) в этом предположении следует

$$\frac{2}{c^2}\,E\,\frac{{}^*dE}{dt} - p^i p^k\,\frac{{}^*dh_{ik}}{dt} - 2h_{ik}\,p^i\,\frac{{}^*dp^k}{dt} = 0\,. \tag{8.11}$$

Вследствие (6.2) и (13.11) из §2.13

$$\frac{{}^*dh_{ik}}{dt} = 2D_{ik} + ({}^*\Delta_{ij,k} + {}^*\Delta_{kj,i})\,{}^*u^j\,, \tag{8.12}$$

поэтому

$$\frac{{}^*dE}{dt} = mD_{ij}\,{}^*u^i\,{}^*u^j + \left(\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j\right){}^*u^k. \tag{8.13}$$

Вследствие (8.13) и (7.13) мы получаем (7.9).

§ 3.9 Механический смысл силовых величин

Введем х.и.-вектор Ω_i, определяемый равенством

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,A^{jk}, \tag{9.1}$$

сравн. с формулой (16.9) из §2.16. Тогда, см. (16.13) из §2.16,

$$A^{jk} = \varepsilon^{ijk}\,\Omega_i \tag{9.2}$$

и для векторного произведения Ω_i на ${}^*u_j$ мы можем написать

$$\varepsilon^{ijk}\,\Omega_i\,{}^*u_j = A^{jk}\,{}^*u_j = A_{i\cdot}^{\cdot k}\,{}^*u^i. \tag{9.3}$$

Поэтому (7.13) можно записать также в виде

$$\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j = mF^k - 2m\,\varepsilon^{ijk}\,\Omega_i\,{}^*u_j - 2mD^k_i\,{}^*u^i. \tag{9.4}$$

Уравнения (9.4) и (7.9)

$$\frac{{}^*dE}{dt} = mF_j\,{}^*u^j - mD_{ij}\,{}^*u^i\,{}^*u^j \tag{9.5}$$

сохраняют свою форму во всех системах отсчета, следовательно, и в системе отсчета, локально-стационарной в любой данной точке. Но, по определению х.и.-тензора D_{ik}, он равен нулю в этой системе отсчета, так что в последней (для данной точки) имеем

$$\frac{{}^*dp^k}{dt} + {}^*\Delta^k_{ij}\,p^i\,{}^*u^j = mF^k - 2m\varepsilon^{ijk}\,\Omega_i\,{}^*u_j\,, \tag{9.6}$$

$$\frac{{}^*dE}{dt} = mF_j\,{}^*u^j. \tag{9.7}$$

Обращая, далее, в нуль потенциалы в интересующей нас мировой точке, мы для нее будем иметь

$$\frac{dp^k}{dt}+\Delta^k_{ij}\,p^iu^j=mF^k-2m\varepsilon^{ijk}\,\Omega_i u_j\,, \tag{9.8}$$

$$\frac{dE}{dt}=mF_j u^j. \tag{9.9}$$

С другой стороны, классические уравнения для произвольной системы отсчета имеют вид (в криволинейных координатах)*

$$\frac{dp^k}{dt}+\Delta^k_{ij}\,p^iu^j=\phi^k-2m\varepsilon^{ijk}\,\psi_i u_j\,, \tag{9.10}$$

$$\frac{dE}{dt}=\phi_j u^j, \tag{9.11}$$

где ϕ^k и ϕ_j контравариантный и ковариантный векторы силы (включающей в себя силу инерции), ψ_i ковариантный вектор мгновенной угловой скорости вращения данной системы отсчета. Поэтому мы можем сказать, что F^k и F_j играют роль *напряженности гравитационно-инерциального силового поля* или, что то же, роль рассчитанной на единицу массы *гравитационно-инерциальной силы*, а Ω_i играет роль мгновенной *угловой х.и.-скорости абсолютного вращения* данной системы отсчета в данной точке.

§ 3.10 Тензор импульса и энергии

Рассмотрим мировой тензор импульса и энергии в координатах x^σ ($\sigma=0,1,2,3$), обращающих в нуль потенциалы в интересующей нас мировой точке. Для данной мировой точки, в случае непрерывной среды, мы можем написать

$$\widetilde{T}^{00}=\tilde{\rho}\,, \tag{10.1}$$

$$\widetilde{T}^{0k}=\frac{1}{c}\,\tilde{J}^k, \tag{10.2}$$

$$\widetilde{T}^{ij}=\frac{1}{c^2}\,\widetilde{U}^{ij}, \tag{10.3}$$

где ρ плотность движущейся массы, J^k плотность импульса

*Разумеется, релятивистские и классические определения импульса и энергии, точнее, ее переменной части, совпадают лишь в пределе при $u^k\to 0$.

(или, что то же, плотность потока массы), U^{ij} трехмерный тензор кинематических (абсолютных) напряжений, равный сумме тензора обычных (относительных) напряжений и тензора плотности потока импульса*. Так как в данной мировой точке

$$\tilde{g}_{00} = 1\,, \qquad \tilde{g}_{0i} = 0\,, \tag{10.4}$$

то мы имеем

$$\frac{\widetilde{T}_{00}}{\tilde{g}_{00}} = \frac{\tilde{g}_{0\alpha}\tilde{g}_{0\beta}\,\widetilde{T}^{\alpha\beta}}{\tilde{g}_{00}} = \widetilde{T}^{00} \tag{10.5}$$

и, следовательно,

$$\frac{\widetilde{T}_{00}}{\tilde{g}_{00}} = \tilde{\rho}\,. \tag{10.6}$$

Аналогично, вследствие (10.4),

$$\frac{\widetilde{T}_0^k}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} = \frac{\tilde{g}_{0\alpha}\widetilde{T}^{\alpha k}}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} = \widetilde{T}^{0k} \tag{10.7}$$

и, следовательно,

$$\frac{\widetilde{T}_0^k}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} = \frac{1}{c}\,\tilde{J}^k. \tag{10.8}$$

Но, согласно §2.3, величины, стоящие в левых частях (10.6), (10.8) и (10.3), суть, соответственно, х.и.-инвариант, х.и.-вектор и х.и.-тензор, так что

$$\frac{\widetilde{T}_{00}}{\tilde{g}_{00}} = \frac{T_{00}}{g_{00}}\,. \tag{10.9}$$

$$\frac{\widetilde{T}_0^k}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}} = \frac{T_0^k}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{10.10}$$

$$\widetilde{T}^{ij} = T^{ij}, \tag{10.11}$$

поэтому вообще имеем

$$\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho\,, \tag{10.12}$$

$$\frac{T_0^k}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{c}\,J^k, \tag{10.13}$$

$$T^{ij} = \frac{1}{c^2}\,U^{ij}. \tag{10.14}$$

*См. [8], стр. 231, и [1], стр. 70. Впредь мы будем обозначать буквой ρ собственную плотность. В однородных моделях плотность и давление в сопутствующих координатах совпадают с собственными плотностью и давлением.

Найдем выражения для компонент ковариантного, смешанного и контравариантного тензоров импульса и энергии. Вследствие (10.2)

$$T_{00}=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\rho\,. \tag{10.15}$$

Вследствие (10.13)

$$T_0^k=\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)J^k. \tag{10.16}$$

Так как

$$T_{00}=g_{0\alpha}T_0^\alpha=g_{00}T_0^0+g_{0k}T_0^k\,, \tag{10.17}$$

то, вследствие (10.15) и (10.16), мы имеем

$$\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\rho=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2T_0^0-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2v_kJ^k, \tag{10.18}$$

$$T_0^0=\rho+\frac{1}{c^2}\,v_jJ^j. \tag{10.19}$$

Аналогично, т. к.

$$T_0^k=g_{0\alpha}T^{\alpha k}=g_{00}T^{0k}+g_{0j}T^{jk}, \tag{10.20}$$

то, вследствие (10.16) и (10.14),

$$\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)J^k=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2T^{0k}-\frac{v_j}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\,U^{jk}, \tag{10.21}$$

$$T^{0k}=\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(J^k+\frac{1}{c^2}\,v_jU^{jk}\right). \tag{10.22}$$

С другой стороны,

$$T_0^k=g^{k\alpha}T_{\alpha0}=g^{k0}T_{00}+g^{kj}T_{j0}\,, \tag{10.23}$$

поэтому, вследствие (10.16) и (10.15),

$$\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)J^k=-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v^k\rho-h^{kj}T_{j0}\,, \tag{10.24}$$

$$T_{0i}=-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(J_i+\rho v_i\right). \tag{10.25}$$

Точно так же

$$T^{ij}=g^{i\alpha}T_\alpha^j=g^{i0}T_0^j+g^{ik}T_k^j\,, \tag{10.26}$$

поэтому, вследствие (10.14) и (10.16),

$$\frac{1}{c^2}U^{ij} = -\frac{1}{c^2}\,v^i J^i - h^{ik}T_k^j\,, \tag{10.27}$$

$$T_i^j = -\frac{1}{c^2}\left(v_i J^j + U_i^j\right). \tag{10.28}$$

Обратимся теперь к (10.19), (10.25) и (10.28). Так как

$$T_0^0 = g_{0\alpha}T^{\alpha 0} = g_{00}\,T^{00} + g_{0k}\,T^{k0}, \tag{10.29}$$

то, вследствие (10.19) и (10.22),

$$\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j = \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 T^{00} - \frac{1}{c^2}\,v_k\left(J^k + \frac{1}{c^2}\,v_j\,U^{jk}\right), \tag{10.30}$$

$$T^{00} = \left(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\right)^2\left(\rho + \frac{2}{c^2}\,v_j J^j + \frac{1}{c^4}\,v_j v_k\,U^{jk}\right). \tag{10.31}$$

Так как

$$T_{0i} = g_{0\alpha}T_i^\alpha = g_{00}\,T_i^0 + g_{0j}\,T_i^j\,, \tag{10.32}$$

то, вследствие (10.25) и (10.28),

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(J_i + \rho v_i\right) = \\ &\qquad = \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 T_i^0 + \frac{v_j}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\left(v_i J^j + U_i^j\right), \end{aligned} \tag{10.33}$$

$$T_i^0 = -\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left[J_i + \left(\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j\right)v_i + \frac{1}{c^2}\,v_j\,U_i^j\right]. \tag{10.34}$$

Наконец, т. к.

$$T_i^j = g^{j\alpha}T_{\alpha i} = g^{j0}T_{0i} + g^{jk}T_{ki}\,, \tag{10.35}$$

то, вследствие (10.28) и (10.25),

$$-\frac{1}{c^2}\left(v_i J^j + U_i^j\right) = \frac{1}{c^2}\left(J_i + \rho v_i\right)v^j - h^{jk}\,T_{ki}\,, \tag{10.36}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{c^2}\left(\,\rho v_i v_j + v_i\,J_j + v_j\,J_i + U_{ij}\right). \tag{10.37}$$

Соберем вместе формулы (10.15), (10.25) и (10.37)

$$\left.\begin{aligned} T_{00} &= \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 \rho \\ T_{0i} &= -\frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)(J_i + \rho v_i) \\ T_{ij} &= \frac{1}{c^2}\left(\rho v_i v_j + v_i J_j + v_j J_i + U_{ij}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{10.38}$$

Соберем также формулы (10.19), (10.16), (10.34) и (10.28)

$$\left.\begin{aligned} T^0_0 &= \rho + \frac{1}{c^2}\, v_j J^j \\ T^k_0 &= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) J^k \\ T^0_i &= -\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left[J_i + \left(\rho + \frac{1}{c^2}\, v_j J^j\right) v_i + \frac{1}{c^2}\, v_j U^j_i\right] \\ T^j_i &= -\frac{1}{c^2}\left(v_i J^j + U^j_i\right) \end{aligned}\right\} . \tag{10.39}$$

Соберем, наконец, формулы (10.31), (10.22) и (10.14)

$$\left.\begin{aligned} T^{00} &= \left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\right)^2 \left(\rho + \frac{2}{c^2}\, v_j J^j + \frac{1}{c^4}\, v_j v_k U^{jk}\right) \\ T^{0k} &= \frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(J^k + \frac{1}{c^2}\, v_j U^{jk}\right) \\ T^{ij} &= \frac{1}{c^2}\, U^{ij} \end{aligned}\right\} . \tag{10.40}$$

Найдем также выражение для х.и.-инварианта

$$\rho_0 = T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\nu_\nu\,. \tag{10.41}$$

Так как

$$T^\nu_\nu = T^0_0 + T^j_j\,, \tag{10.42}$$

то, введя обозначение

$$U = U^j_j\,, \tag{10.43}$$

будем иметь

$$T = \rho - \frac{1}{c^2}\, U \tag{10.44}$$

или, иначе,

$$\rho_0 = \rho - \frac{1}{c^2}\, U\,. \tag{10.45}$$

§ 3.11 Временно́е уравнение закона энергии

Возьмем закон энергии в виде равенства нулю расходимости смешанного тензора импульса и энергии

$$\frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma T_\sigma^\nu + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma} T_\mu^\sigma = 0 \tag{11.1}$$

и из четырех уравнений, его выражающих, рассмотрим сначала временно́е, т. е. уравнение с $\mu = 0$

$$\frac{\partial T_0^\nu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{0\nu}^\sigma T_\sigma^\nu + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma} T_0^\sigma = 0\,. \tag{11.2}$$

Вследствие (10.39)

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_0^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T_0^0}{\partial x^0} + \frac{\partial T_0^j}{\partial x^j} = \\ = \frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{c^3} J^j \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{c^3} v_j \frac{\partial J^j}{\partial t} - \frac{1}{c^3} J^j \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} + \\ + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial J^j}{\partial x^j} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \frac{{}^*\partial J^j}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2} F_j J^j\right).\end{gathered} \tag{11.3}$$

Пользуясь, кроме того, (3.17–3.20), находим

$$\begin{gathered}-\Gamma_{0\nu}^\sigma T_\sigma^\nu = -\Gamma_{00}^0 T_0^0 - \Gamma_{00}^k T_k^0 - \Gamma_{0i}^0 T_0^i - \Gamma_{0i}^k T_k^i = \\ = \frac{1}{c^3}\left[\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_l F^l\right]\left(\rho + \frac{1}{c^2} v_j F^j\right) - \\ - \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k \frac{1}{c}\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left[J_k + \left(\rho + \frac{1}{c^2} v_j F^j\right) v_k + \frac{1}{c^2} v_j U_k^j\right] - \\ - \frac{1}{c^2}\left[-\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_l\left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2} v_i F^l\right)\right]\frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) J^i + \\ + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2} v_i F^k\right)\frac{1}{c^2}\left(v_k J^i + U_k^i\right) = \\ = \frac{1}{c^3}\left[\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\left(\rho + \frac{1}{c^2} v_j J^j\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} - \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) F_j J^j + \right. \\ \left. + J^i \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) D_{ik} U^{ik}\right].\end{gathered} \tag{11.4}$$

Наконец

$$\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}\,T_0^\sigma = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^0}\,T_0^0 + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^j}\,T_0^j =$$
$$= \frac{1}{c}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]\left(\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j\right) +$$
$$+ \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}\right)\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)J^j = \tag{11.5}$$
$$= -\left[\frac{1}{c^3}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\left(\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j\right) + J^j\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}\right] +$$
$$+ \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\rho D + J^j\,\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}\right),$$

следовательно

$$\frac{\partial T_0^\nu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{0\nu}^\sigma\,T_\sigma^\nu + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}\,T_0^\sigma =$$
$$= \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + {}^*\nabla_j J^j - \frac{2}{c^2}\,F_j J^j + \frac{1}{c^2}\,D_{ik}U^{ik}\right) \tag{11.6}$$

и (11.2) может быть записано в виде

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D + {}^*\nabla_j J^j - \frac{2}{c^2}F_j J^j + \frac{1}{c^2}\,D_{ik}U^{ik} = 0\,. \tag{11.7}$$

§ 3.12 Пространственные уравнения закона энергии

Займемся теперь пространственными уравнениями закона энергии (11.1), т. е. уравнениями (11.1) при $\mu = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial T_i^\nu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{i\nu}^\sigma\,T_\sigma^\nu + \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}\,T_i^\sigma = 0\,. \tag{12.1}$$

Аналогично предыдущему §3.11, получаем

$$\frac{\partial T_i^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T_i^0}{\partial x^0} + \frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} = -\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left[J_i + \left(\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j\right)v_i +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{c^2}\,v_j U_i^j\right]\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left[\frac{\partial J_i}{\partial t} + \left(\rho + \frac{1}{c^2}\,v_j J^j\right)\frac{\partial v_i}{\partial t} +\right.$$
$$\left.+ v_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2}J^j\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{c^2}v_j\frac{\partial J^j}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}U_i^j\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{1}{c^2}v_j\frac{\partial U_i^j}{\partial t}\right] -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{c^2}\,J^j\,\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-\frac{1}{c^2}\,v_i\,\frac{\partial J^j}{\partial x^j}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial U_i^j}{\partial x^j}=-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\times\\
&\times\left[J_i+\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)v_i+\frac{1}{c^2}\,v_j\,U_i^j\right]\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times\\
&\times\left[\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\,U_i^j\,\frac{\partial v_j}{\partial t}\right]-\frac{1}{c^2}\,\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\,\frac{{}^*\partial U_i^j}{\partial x^j}-\\
&-\frac{1}{c^2}\,v_i\left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\frac{{}^*\partial J^j}{\partial x^j}+\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,J^j\,\frac{{}^*\partial v_j}{\partial t}\right)-\frac{1}{c^2}\,J^j\,\frac{{}^*\partial v_i}{\partial x^j}\,.
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

Далее

$$
\begin{aligned}
&-\Gamma^\sigma_{i\nu}\,T^\nu_\sigma=-\Gamma^0_{i0}\,T^0_0-\Gamma^k_{i0}\,T^0_k-\Gamma^0_{ij}\,T^j_0-\Gamma^k_{ij}\,T^j_k=\\
&=-\frac{1}{c^2}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\times\right.\\
&\times\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)+\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\times\\
&\times\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left[J_k+\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)v_k+\frac{1}{c^2}\,v_j\,U_k^j\right]+\\
&+\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left\{\Psi_{ij}-D_{ij}+\frac{1}{c^2}\,v_l\left[\left(D_j^l+A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)v_i\;+\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)v_j+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j\,F^l\right]\right\}\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)J^j+\left\{{}^*\Delta_{ij}^k-\right.\\
&\left.-\frac{1}{c^2}\left[\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)v_i+\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_j+\frac{1}{c^2}\,v_i\,v_j\,F^k\right]\right\}\times\\
&\times\frac{1}{c^2}\left(v_k\,J^j+U_k^j\right)=\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\\
&+\frac{1}{c}\,J^j\,\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta_{ij}^k\,U_k^j-\frac{1}{c^4}\,v_i\,D_{jk}\,U^{jk}.
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

Наконец

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}\,T_i^\sigma=\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^0}\,T_i^0+\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^j}\,T_i^j=\\
&=\frac{1}{c}\left[-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]\frac{1}{c}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times\\
&\times\left[J_i+\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)v_i+\frac{1}{c^2}\,v_j\,U_i^j\right]-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}+\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}\right)\frac{1}{c^2}\left(v_i\,J^j+U_i^j\right)=\\
&=\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left[J_i+\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)v_i+\frac{1}{c^2}\,v_j\,U_i^j\right]\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\;-\\
&-\frac{1}{c^2}\,DJ_i-\frac{1}{c^2}\,U_i^j\,\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}+\frac{1}{c^4}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,U_i^j\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}\;-\\
&-\frac{1}{c^2}\,v_i\left(\rho D+J^j\,\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,J^j\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j}\right).
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T_i^\nu}{\partial x^\nu}-\Gamma_{i\nu}^\sigma\,T_\sigma^\nu+\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\sigma}\,T_i^\sigma=\frac{1}{c^2}\left[\left(\rho+\frac{1}{c^2}\,v_j\,J^j\right)F_i\;+\right.\\
&\left.+\frac{1}{c^2}\,F_j\,U_i^j-\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}-DJ_i-{}^*\nabla_j\,U_i^j+\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)J^j\right]-\\
&-\frac{1}{c^2}\,v_i\left[\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\nabla_j\,J^j-\frac{1}{c^2}F_j\,J^j+\frac{1}{c^2}\,D_{jk}\,U^{jk}\right]=\\
&=-\frac{1}{c^2}\left\{\left[\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}+DJ_i+{}^*\nabla_j\,U_i^j-2A_{ij}\,J^j-F_j\left(\rho h_i^j+U_i^j\right)\right]+\right.\\
&\left.+\,v_i\left[\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\nabla_j\,J^j-\frac{2}{c^2}\,F_j\,J^j+\frac{1}{c^2}\,D_{jk}\,U^{jk}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

и (12.1) может быть записано в виде

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}+DJ_i+{}^*\nabla_j\,U_i^j-2A_{ij}\,J^j-\rho F_i-\frac{1}{c^2}\,F_j\,U_i^j\right)+\\
&+\,v_i\left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\nabla_j\,J^j-\frac{2}{c^2}\,F_j\,J^j+\frac{1}{c^2}\,D_{jk}\,U^{jk}\right)=0\,.
\end{aligned}
\tag{12.6}
$$

Не прибегая к (11.7), применим метод вариации потенциалов. Уравнение (12.6) не меняет своего вида при преобразованиях временно́й координаты, хотя левая часть его есть ковектор, а не х.и.-вектор. Поэтому мы можем обратить все v_i в нуль. Но тогда

$$
\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}+DJ_i+{}^*\nabla_j\,U_i^j-2A_{ij}\,J^j-\rho F_i-\frac{1}{c^2}\,F_j\,U_i^j=0\,,
\tag{12.7}
$$

причем полученное суб-векторное уравнение справедливо при любом выборе временно́й координаты, т. к. левая часть его есть х.и.-вектор. А в таком случае, при любом выборе временнóй координаты мы имеем

$$v_i\left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\nabla_j J^j-\frac{2}{c^2}F_j J^j+\frac{1}{c^2}D_{jk}U^{jk}\right)=0 \qquad (12.8)$$

и, следовательно,

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}+\rho D+{}^*\nabla_j J^j-\frac{2}{c^2}F_j J^j+\frac{1}{c^2}D_{jk}U^{jk}=0\,, \qquad (12.9)$$

что совпадает с (11.7).

Таким образом, как и в случае уравнений геодезических, метод вариации потенциалов позволил нам найти следствия четырех уравнений, раскрывая выражения лишь части их (объяснение этому обстоятельству содержится в §3.7).

Так как

$$h^{ik}\frac{{}^*\partial J_i}{\partial t}=\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t}-J_i\frac{{}^*\partial h^{ik}}{\partial t}=\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t}+2D^{ik}J_i=\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t}+2D^k_i J^i, \qquad (12.10)$$

то вместо (12.7) мы можем написать

$$\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t}+DJ^k+2\left(D^k_j+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)J^j-\rho F^k-\frac{1}{c^2}F_j U^{jk}+{}^*\nabla_j U^{jk}=0\,. \qquad (12.11)$$

§3.13 Энергия и импульс элемента пространства

В рассматриваемом пространстве возьмем фиксированный элементарный параллелепипед

$$\Pi^{123}_{abc}=\begin{vmatrix}\delta_a x^1 & \delta_a x^2 & \delta_a x^3\\ \delta_b x^1 & \delta_b x^2 & \delta_b x^3\\ \delta_c x^1 & \delta_c x^2 & \delta_c x^3\end{vmatrix}\qquad \left.\begin{array}{c}\delta_a x^i = const^i_a\\ \delta_b x^i = const^i_b\\ \delta_c x^i = const^i_c\end{array}\right\}. \qquad (13.1)$$

Мы можем написать для его объема V, согласно формуле (12.7) из §2.12,

$$V=\sqrt{h}\left|\Pi^{123}_{abc}\right|, \qquad (13.2)$$

и для содержащихся в нем энергии E и импульса p^k, очевидно,

$$E=V\rho c^2, \qquad (13.3)$$

$$p^k=VJ^k. \qquad (13.4)$$

Так как наш элементарный объем фиксирован в пространстве, то можно написать

$$\left(\frac{{}^*dE}{dt}\right)_{\text{fix}} = \frac{{}^*\partial E}{\partial t}\,, \tag{13.5}$$

$$\left(\frac{{}^*dp^k}{dt}\right)_{\text{fix}} = \frac{{}^*\partial p^k}{\partial t}\,. \tag{13.6}$$

С другой стороны, вследствие (12.9) из §2.12,

$$\frac{{}^*\partial E}{\partial t} = \left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D\right)c^2 V\,, \tag{13.7}$$

$$\frac{{}^*\partial p^k}{\partial t} = \left(\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t} + DJ^k\right)V\,. \tag{13.8}$$

Следовательно

$$\left(\frac{{}^*dE}{dt}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D\right)c^2 V\,, \tag{13.9}$$

$$\left(\frac{{}^*dp^k}{dt}\right)_{\text{fix}} = \left(\frac{{}^*\partial J^k}{\partial t} + DJ^k\right)V\,. \tag{13.10}$$

Объем V есть х.и.-инвариант, остающийся неизменным при параллельном переносе х.и.-векторов $\delta_a x^i$, $\delta_b x^i$, $\delta_c x^i$. В самом деле, т. к. х.и.-тензор 3-го ранга Π^{ijk}_{abc} обладает теми же свойствами, что и ε_{ijk}, то

$$V = \frac{1}{6}\left|\varepsilon_{ijk}\,\Pi^{ijk}_{abc}\right|. \tag{13.11}$$

Вследствие (17.4) из §2.17, мы имеем

$${}^*\nabla_p\left(\varepsilon_{ijk}\,\Pi^{ijk}_{abc}\right) = \varepsilon_{ijk}\,{}^*\nabla_p\,\Pi^{ijk}_{abc}\,. \tag{13.12}$$

Так как правило дифференцирования определителей, очевидно, распространяется на ковариантное, следовательно, также и на х.и.-ковариантное дифференцирование, то из равенств

$${}^*\nabla_p\left(\delta_a x^i\right) = 0\,, \quad {}^*\nabla_p\left(\delta_b x^i\right) = 0\,, \quad {}^*\nabla_p\left(\delta_c x^i\right) = 0 \tag{13.13}$$

вытекает равенство

$${}^*\nabla_p\,\Pi^{ijk}_{abc} = 0\,. \tag{13.14}$$

Таким образом,

$$ {}^*\nabla_p V = 0\,. \tag{13.15} $$

В силу (13.3), (13.4), (13.9), (13.10) и (13.15), обозначая m движущуюся массу, заключенную в рассматриваемом элементарном объеме,

$$ m = V\rho\,, \tag{13.16} $$

мы можем вместо (12.11) и (12.9) написать, соответственно,

$$ \begin{gathered} \left(\frac{{}^*dp^k}{dt}\right)_{\text{fix}} - mF^k + 2\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)p^i = \\ = \frac{1}{c^2}\Big[\, F_i\left(VU^{ik}\right) - {}^*\nabla_i\left(VU^{ik}\right)c^2\,\Big]\,, \end{gathered} \tag{13.17} $$

$$ \left(\frac{{}^*dE}{dt}\right)_{\text{fix}} + D_{ij}\left(VU^{ij}\right) - F_j\,p^j = F_j\,p^j - {}^*\nabla_j\,p^j c^2, \tag{13.18} $$

где $p^j c^2$, очевидно, есть поток энергии.

Написанные уравнения относятся к фиксированному *элементу объема*, через который течет непрерывная материя. В этом их существеннейшее отличие от уравнений (7.13) и (7.9), относящихся к свободной *материальной частице*, движущейся относительно данного пространства.

§ 3.14 Временна́я компонента ковариантного тензора Эйнштейна

Перейдем теперь к рассмотрению ковариантного тензора Эйнштейна

$$ G_{\mu\nu} = -\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\,. \tag{14.1} $$

Прежде всего займемся временно́й компонентой этого тензора, т. е. компонентой с индексами $\mu,\nu = 0$

$$ G_{00} = -\frac{\partial\Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^0} + \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{0\beta} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^0 \partial x^0} - \Gamma^\alpha_{00}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\,. \tag{14.2} $$

Вследствие (3.17) и (3.18)

$$ \begin{gathered} -\frac{\partial\Gamma^\alpha_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial\Gamma^k_{00}}{\partial x^k} = \frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{(c^2-\text{w})^2}\left(\frac{\partial \text{w}}{\partial t}\right)^2 + \frac{c^2}{c^2-\text{w}}\frac{\partial^2 \text{w}}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2}\,v_l F^l\frac{\partial \text{w}}{\partial t} + \left(1-\frac{\text{w}}{c^2}\right)F^l\frac{\partial v_l}{\partial t} + \left(1-\frac{\text{w}}{c^2}\right)v_l\frac{\partial F^l}{\partial t}\right] + \end{gathered} $$

$$
+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[-\frac{2}{c^2}F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial F^k}{\partial x^k}\right]=
$$

$$
=\frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right)^2+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}v_lF^l\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right]- \tag{14.3}
$$

$$
-\frac{1}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\left(\frac{1}{c^2}F_kF^k+\frac{{}^*\partial F^k}{\partial x^k}\right).
$$

Вследствие (3.17–3.20)

$$
\Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{0\beta}=\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00}+2\Gamma^k_{00}\Gamma^0_{0k}+\Gamma^k_{0i}\Gamma^i_{0k}=
$$

$$
=\frac{1}{c^6}\left[\frac{c^4}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right)^2+2v_lF^l\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\left(v_lF^l\right)^2\right]-
$$

$$
-\frac{2}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[-F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D^l_k+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)v_lF^k+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(v_lF^l\right)^2\right]+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\times \tag{14.4}
$$

$$
\times\left[D^k_iD^i_k+A_{i\cdot}^{\cdot k}A_{k\cdot}^{\cdot i}+\frac{2}{c^2}\left(D^k_i+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_kF^i+\frac{1}{c^4}\left(v_kF^k\right)^2\right]=
$$

$$
=\frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right)^2+\frac{2}{c^2}v_lF^l\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right]+
$$

$$
+\frac{2}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\left(D^k_iD^i_k+A_{i\cdot}^{\cdot k}A_{k\cdot}^{\cdot i}\right).
$$

Далее, вследствие (1.7)

$$
\frac{\partial^2\ln\sqrt{-g}}{\partial x^0\partial x^0}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]=
$$

$$
=-\frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right)^2+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}\right]+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\frac{{}^*\partial D}{\partial t}. \tag{14.5}
$$

Наконец, вследствие (3.17), (3.18) и (1.7)

$$
-\Gamma^\alpha_{00}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}=-\Gamma^0_{00}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^0}-\Gamma^k_{00}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}=
$$

$$
=\frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_lF^l\right]\left[-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]+
$$

$$
+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2F^k\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right)=
$$

$$= -\frac{1}{c^4}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{1}{c^2}\,v_l F^l - D\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\right] - \\ - \frac{1}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)F^k\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\,. \tag{14.6}$$

Следовательно,

$$G_{00} = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\left(\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^l_j D^j_l + A_{j\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot j} + {}^*\nabla_j F^j - \frac{1}{c^2}F_j F^j\right). \tag{14.7}$$

§ 3.15 Смешанные компоненты ковариантного тензора Эйнштейна

Рассмотрим теперь смешанные, пространственно-временные компоненты тензора Эйнштейна (14.1), т. е. компоненты с индексами $\mu = 0$, $\nu = 1, 2, 3$

$$G_{0i} = -\frac{\partial \Gamma^\alpha_{0i}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{i\beta} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^0 \partial x^i} - \Gamma^\alpha_{0i}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\,. \tag{15.1}$$

Вследствие (3.19) и (3.20)

$$- \frac{\partial \Gamma^\alpha_{0i}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial \Gamma^0_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma^k_{0i}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c^3}\left[-\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \right. \\ - \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t\,\partial x^i} + \left(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\frac{\partial v_l}{\partial t} + \\ \left. + v_l\frac{\partial}{\partial t}\left(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\right] - \frac{1}{c}\left[-\frac{1}{c^2}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\right] = \\ = \frac{1}{c^3}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t\,\partial x^i}\right) + \frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)F_k \times \\ \times\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right) - \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right) = \frac{1}{c^3}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial t\,\partial x^i}\right) - \\ - \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[\frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right) - \frac{1}{c^2}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)F_k + \frac{1}{c^2}F^k\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^4}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v_k F^k\frac{\partial v_i}{\partial t}\right] - \frac{1}{c^3}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(\frac{{}^*\partial F^k}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2}F_k F^k\right). \tag{15.2}$$

Вследствие (3.17–3.22)

$$\Gamma_{0\alpha}^{\beta}\Gamma_{i\beta}^{\alpha} = \Gamma_{00}^{0}\Gamma_{i0}^{0} + \Gamma_{00}^{k}\Gamma_{ik}^{0} + \Gamma_{0k}^{0}\Gamma_{i0}^{k} + \Gamma_{0k}^{j}\Gamma_{ij}^{k} =$$

$$-\frac{1}{c^5}\left[\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_k F^k\right]\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \right.$$

$$\left.+\left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)v_l\right] + \frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)F^k\left\{\Psi_{ik} - D_{ik} + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\,v_l\left[\left(D_k^l + A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)v_i + \left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)v_k + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k F^l\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{c^3}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \left(D_k^l + A_{k\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2}\,v_k F^l\right)v_l\right]\times$$

$$\times\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) + \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times$$

$$\times\left(D_k^j + A_{k\cdot}^{\cdot j} + \frac{1}{c^2}\,v_k F^j\right)\left\{{}^*\Delta_{ij}^k - \frac{1}{c^2}\left[\left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)v_i + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_j + \frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^k\right]\right\} = -\frac{1}{c^3}\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\times$$

$$\times\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l} + \frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)v_l\right]\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{c^5}\,v_n F^n\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{1}{c^5}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_n F^n\left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)v_l -$$

$$-\frac{1}{c^7}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(v_k F^k\right)^2 v_i - \frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[D_{ik}F^k - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)F^k + \frac{1}{2c^2}\left(F_k v_i + F_i v_k\right)F^k +$$

$$\left.+{}^*\Delta_{ik}^l v_l F^k - \frac{1}{c^2}\,v_k F^k\left(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)v_l\right] + \frac{1}{c^5}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times$$

$$\times\left[\left(D_k^l + A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)v_l F^k + \frac{1}{c^2}\left(v_k F^k\right)^2\right] - \frac{1}{c^3}\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} +$$

$$+\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_k^l + A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)v_l + \frac{1}{c^5}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times$$

$$\times\left(D_i^k + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_k v_l F^l + \frac{1}{c^5}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F^k\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)v_l F^k+\frac{1}{c^2}\left(v_k F^k\right)^2\Big]+\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left(D_k^j+A_{k\cdot}^{\cdot j}\right){}^*\Delta_{ij}^k+\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right){}^*\Delta_{ij}^k\, v_k F^j-\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_k^j+A_{k\cdot}^{\cdot j}\right)v_j-\frac{1}{c^5}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)v_k v_j F^j-\frac{1}{c^3}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\Big[D_j^k D_k^j+A_{j\cdot}^{\cdot k}A_{k\cdot}^{\cdot j}+\\
&+\frac{2}{c^2}\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)v_k F^j+\frac{1}{c^4}\left(v_k F^k\right)^2\Big]=-\frac{1}{c^3}\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\times\\
&\times\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\right]\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}-\\
&-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\Big[-{}^*\Delta_{ij}^k\left(D_k^j+A_{k\cdot}^{\cdot j}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)F^k+\\
&+\frac{1}{2c^4}\left(v_k F^k\right)F_i-\frac{1}{c^4}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,v_k F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\times\\
&\times\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\frac{1}{c^2}\,D_{ik}F^k\Big]-\frac{1}{c^3}\,v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left(\frac{1}{2c^2}\,F_k F^k+\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+D_j^k D_k^j+A_{j\cdot}^{\cdot k}A_{k\cdot}^{\cdot j}\right).
\end{aligned}
\tag{15.3}
$$

Вследствие (1.7)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\ln\sqrt{-g}}{\partial x^0\partial x^i}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]=\\
&=-\frac{1}{c^3}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}-\frac{1}{c^3}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial t}-\\
&-\frac{1}{c^3}\,D\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial D}{\partial x^i}\,.
\end{aligned}
\tag{15.4}
$$

Наконец, вследствие (3.19), (3.20) и (1.7)

$$
\begin{aligned}
&-\Gamma_{0i}^{\alpha}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}=-\Gamma_{0i}^{0}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^0}-\Gamma_{0i}^{k}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}=\\
&=-\frac{1}{c^3}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^l\right)\right]\times
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left[-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right]-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}v_iF^k\right)\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}+\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right)=\\
&=\frac{1}{c^3}\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\frac{1}{c^2}v_iF^l\right)\right]\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\\
&+\frac{1}{c^3}D\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{c^2}v_kD\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}\right]-\\
&-\frac{1}{c^3}v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(F^k\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}+\frac{1}{c^2}v_kDF^k-\right.\\
&\left.-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{c^3}\frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\right.\\
&\left.+v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}+\frac{1}{c^2}v_iF^l\right)\right]\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial t}+\frac{1}{c^3}D\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left[\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}\right]-\\
&-\frac{1}{c^3}v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(F^k\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F^k\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^k}\right).
\end{aligned}
\tag{15.5}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
G_{0i}=&-\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[{}^*\nabla_k\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)-\frac{\partial D}{\partial x^i}-\frac{1}{c^2}A_{i\cdot}^{\cdot k}F_k-\right.\\
&\left.-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}-\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)F^k-\frac{1}{2c^4}F_iv_kF^k\right]-\frac{1}{c^3}v_i\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\times\\
&\times\left({}^*\nabla_kF^k-\frac{1}{2c^2}F_kF^k+D_j^kD_k^j+A_{j\cdot}^{\cdot k}A_{k\cdot}^{\cdot j}\right)
\end{aligned}
\tag{15.6}
$$

и окончательно имеем

$$
\begin{aligned}
G_{0i}=&\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[{}^*\nabla_j\left(h_i^jD-D_i^j\right)-{}^*\nabla_jA_{i\cdot}^{\cdot j}+\frac{2}{c^2}A_{ij}F^j-\right.\\
&\left.-\frac{1}{c^2}v_i\left(\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+D_j^lD_l^j+A_{j\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot j}+{}^*\nabla_jF^j-\frac{1}{c^2}F_jF^j\right)\right].
\end{aligned}
\tag{15.7}
$$

§ 3.16 Пространственные компоненты ковариантного тензора Эйнштейна

Займемся теперь пространственными компонентами тензора Эйнштейна (14.1), т. е. компонентами с индексами $\mu, \nu = 1,2,3$

$$G_{ij} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{j\beta} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} \,. \tag{16.1}$$

Ввиду бóльшей, чем для G_{00} и G_{0i}, громоздкости выражений, мы будем суммировать постепенно. Имеем

$$-\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\partial \Gamma^{0}_{ij}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial \Gamma^{k}_{ij}}{\partial x^{k}} \,. \tag{16.2}$$

Вследствие (3.21) и (22.3) из §2.22, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Gamma^{0}_{ij}}{\partial x^{0}} &= \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\Big\{\Psi_{ij} - D_{ij} + \\ &+ \frac{1}{c^2}\,v_l\Big[\big(D^l_j + A^{\cdot l}_{j\cdot}\big)v_i + \big(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\big)v_j + \frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^l\Big]\Big\}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial D_{ij}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^4}\frac{c^2 v_l}{c^2-\mathrm{w}} \times \\ &\times \Big[\big(D^l_j + A^{\cdot l}_{j\cdot}\big)\frac{\partial v_i}{\partial t} + \big(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\big)\frac{\partial v_j}{\partial t}\Big] + \frac{1}{c^4}\frac{c^2 v_i}{c^2-\mathrm{w}} \times \\ &\times \Big[\big(D^l_j + A^{\cdot l}_{j\cdot}\big)\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\frac{\partial}{\partial t}\big(D^l_j + A^{\cdot l}_{j\cdot}\big) + \frac{1}{c^2}\,v_l F^l\frac{\partial v_j}{\partial t}\Big] + \\ &+ \frac{1}{c^4}\frac{c^2 v_j}{c^2-\mathrm{w}}\Big[\big(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\big)\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\frac{\partial}{\partial t}\big(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\big) + \\ &+ \frac{1}{c^2}\,v_l F^l\frac{\partial v_i}{\partial t}\Big] + \frac{1}{c^6}\frac{c^2 v_i v_j}{c^2-\mathrm{w}}\left(F^l\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\frac{\partial F^l}{\partial t}\right) = \\ &= (\alpha_1)_{ij} + (\beta_1)_{ij} + (\gamma_1)_{ij} + (\delta_1)_{ij} + (\varepsilon_1)_{ij} \,, \end{aligned} \tag{16.3}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} (\alpha_1)_{ij} &= \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\Big\{\Psi_{ij} - D_{ij} + \frac{1}{c^2}\,v_l\Big[\big(D^l_j + A^{\cdot l}_{j\cdot}\big)v_i + \\ &+ \big(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\big)v_j + \frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^l\Big]\Big\}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} \,, \end{aligned} \tag{16.4}$$

$$(\beta_1)_{ij} = \frac{1}{c^2}\left\{-\frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} + \frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) - \right.\right.$$
$$- \frac{1}{2c^2}\left(F_j v_i + F_i v_j\right)\Bigg] - {}^*\Delta^l_{ij}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\left[-\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ij}}{\partial t} + \right. \tag{16.5}$$
$$\left.\left. + \frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)\frac{\partial v_j}{\partial t}\right]\right\},$$

$$(\gamma_1)_{ij} = \frac{1}{c^4}\,\frac{c^2 v_i}{c^2-\mathrm{w}}\left[\left(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\,\frac{\partial}{\partial t}\left(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\right) + \frac{1}{c^2}\,v_l F^l\,\frac{\partial v_j}{\partial t}\right], \tag{16.6}$$

$$(\delta_1)_{ij} = \frac{1}{c^4}\,\frac{c^2 v_j}{c^2-\mathrm{w}}\left[\left(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\,\frac{\partial}{\partial t}\left(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\right) + \frac{1}{c^2}\,v_l F^l\,\frac{\partial v_i}{\partial t}\right], \tag{16.7}$$

$$(\varepsilon_1)_{ij} = \frac{1}{c^6}\,\frac{c^2 v_i v_j}{c^2-\mathrm{w}}\left(F^l\,\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_l\,\frac{\partial F^l}{\partial t}\right). \tag{16.8}$$

Вследствие (3.22)

$$-\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}\,v_l\,\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\left[\left(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \right.$$
$$\left. + \left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right] + \frac{1}{c^2}\,v_i\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\,F^k\,\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right] + \tag{16.9}$$
$$+ \frac{1}{c^2}\,v_j\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\,F^k\,\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right] + \frac{1}{c^4}\,v_i v_j\,\frac{\partial F^k}{\partial x^k} =$$
$$= (\beta_2)_{ij} + (\gamma_2)_{ij} + (\delta_2)_{ij} + (\varepsilon_2)_{ij}\,,$$

где обозначено

$$(\beta_2)_{ij} = -\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^k_{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}\,v_l\,\frac{{}^*\partial\,{}^*\Delta^l_{ij}}{\partial t} +$$
$$+ \frac{1}{c^2}\left[\left(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right], \tag{16.10}$$

$$(\gamma_2)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,v_i\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\,F^k\,\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right], \tag{16.11}$$

$$(\delta_2)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,v_j\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right) + \frac{1}{c^2}\,F^k\,\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right], \tag{16.12}$$

$$(\varepsilon_2)_{ij} = \frac{1}{c^4}\, v_i v_j \frac{\partial F^k}{\partial x^k}\,. \tag{16.13}$$

Далее,

$$\Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{j\beta} = \Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{j0} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}\,. \tag{16.14}$$

Вследствие (3.19)

$$\begin{gathered}\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{j0} = \frac{1}{c^4}\Bigg[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - v_l\big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - \\ - \frac{1}{c^2}\, v_i v_l F^l \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \\ - \frac{1}{c^2}\, v_j v_l F^l \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big) + \\ + \frac{1}{c^2}\, v_i v_l F^l v_k\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big) + \frac{1}{c^2}\, v_j v_l F^l v_k\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big) + \\ + \frac{1}{c^4}\, v_i v_j \big(v_l F^l\big)^2\Bigg] = (\beta_3)_{ij} + (\gamma_3)_{ij} + (\delta_3)_{ij} + (\varepsilon_3)_{ij}\,,\end{gathered} \tag{16.15}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}(\beta_3)_{ij} = \frac{1}{c^4}\Bigg[\frac{c^4}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - v_l\big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - \\ - v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)\Bigg],\end{gathered} \tag{16.16}$$

$$(\gamma_3)_{ij} = \frac{1}{c^6}\, v_i v_l F^l \left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} + v_k\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big)\right], \tag{16.17}$$

$$(\delta_3)_{ij} = \frac{1}{c^6}\, v_j v_l F^l \left[-\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + v_k\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\right], \tag{16.18}$$

$$(\varepsilon_3)_{ij} = \frac{1}{c^8}\, v_i v_j \big(v_l F^l\big)^2. \tag{16.19}$$

Вследствие (3.20), (3.21) и (22.3) из §2.22, мы имеем

$$\begin{gathered}\Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} = -\frac{1}{c^2}\Bigg[\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\big(\Psi_{jk} - D_{jk}\big) + \\ + \frac{1}{c^2}\, v_i\,(\Psi_{jk} - D_{jk})F^k + \frac{1}{c^2}\, v_j v_l \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\big(D^l_k + A_{k\cdot}^{\cdot l}\big) + \\ + \frac{1}{c^4}\, v_j v_l F^l v_k\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big) + \frac{1}{c^2}\, v_k v_l \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big) + \\ + \frac{1}{c^4}\, v_i v_j v_l \big(D^l_k + A_{k\cdot}^{\cdot l}\big)F^k + \frac{1}{c^6}\, v_i v_j \big(v_l F^l\big)^2 +\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{c^4}v_i v_l F^l v_k\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)+\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left(\Psi_{ik}-D_{ik}\right)+$$
$$+\frac{1}{c^2}v_j\left(\Psi_{ik}-D_{ik}\right)F^k+\frac{1}{c^2}v_i v_l\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)+$$
$$+\frac{1}{c^4}v_i v_l F^l v_k\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)+\frac{1}{c^2}v_k v_l\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)+ \tag{16.20}$$
$$+\frac{1}{c^4}v_i v_j v_l\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)F^k+\frac{1}{c^6}v_i v_j\left(v_l F^l\right)^2+$$
$$\left.+\frac{1}{c^4}v_j v_l F^l v_k\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\right]=(\beta_4)_{ij}+(\gamma_4)_{ij}+(\delta_4)_{ij}+(\varepsilon_4)_{ij}\,,$$

где обозначено

$$(\beta_4)_{ij}=\frac{1}{c^2}\Big\{2D_i^k D_{jk}+A_{i\cdot}^{\cdot k}D_{jk}+A_{j\cdot}^{\cdot k}D_{ik}-$$
$$-\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_j v_k+F_k v_j\right)\right]-$$
$$-\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k+F_k v_i\right)\right]+ \tag{16.21}$$
$$+{}^*\Delta_{jk}^l v_l\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)+{}^*\Delta_{ik}^l v_l\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)-$$
$$\left.-\frac{2}{c^2}v_k v_l\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_j^l+A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)\right\},$$

$$(\gamma_4)_{ij}=\frac{1}{c^4}v_i\Big\{D_{jk}F^k-$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_j v_k+F_k v_j\right)\right]F^k+{}^*\Delta_{jk}^l v_l F^k- \tag{16.22}$$
$$\left.-\frac{2}{c^2}v_k F^k v_l\left(D_j^l+A_{j\cdot}^{\cdot l}\right)-v_l\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)\right\},$$

$$(\delta_4)_{ij}=\frac{1}{c^4}v_j\Big\{D_{ik}F^k-$$
$$-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k+F_k v_i\right)\right]F^k+{}^*\Delta_{ik}^l v_l F^k- \tag{16.23}$$
$$\left.-\frac{2}{c^2}v_k F^k v_l\left(D_i^l+A_{i\cdot}^{\cdot l}\right)-v_l\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)\right\},$$

$$(\varepsilon_4)_{ij}=\frac{1}{c^6}v_i v_j\left[-2v_l\left(D_k^l+A_{k\cdot}^{\cdot l}\right)F^k-\frac{2}{c^2}\left(v_l F^l\right)^2\right]. \tag{16.24}$$

Вследствие (3.22)

$$\begin{gathered}
\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} = {}^*\!\Delta^l_{ik}\,{}^*\!\Delta^k_{jl} - \\
-\frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^l_{ik}\left[\left(D^k_l + A^{\cdot k}_{l\cdot}\right)v_j + \left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right)v_l + \frac{1}{c^2}\,v_j v_l F^k\right] - \\
-\frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^k_{jl}\left[\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right)v_i + \left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)v_k + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k F^l\right] + \\
+\frac{1}{c^4}\left[\left(D^l_k D^k_l + A^{\cdot l}_{k\cdot}A^{\cdot k}_{l\cdot}\right)v_i v_j + v_i v_l\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right)\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right) + \right. \\
+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j v_l\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right)F^k + v_j v_k\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)\left(D^k_l + A^{\cdot k}_{l\cdot}\right) + \\
+ v_l v_k\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right) + \frac{1}{c^2}\,v_j v_k F^k v_l\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right) + \\
+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j v_k\left(D^k_l + A^{\cdot k}_{l\cdot}\right)F^l + \frac{1}{c^2}\,v_i v_l F^l v_k\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right) + \\
\left. +\frac{1}{c^4}\,v_i v_j\left(v_l F^l\right)^2\right] = (\beta_5)_{ij} + (\gamma_5)_{ij} + (\delta_5)_{ij} + (\varepsilon_5)_{ij}\,,
\end{gathered} \tag{16.25}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}
(\beta_5)_{ij} = {}^*\!\Delta^l_{ik}\,{}^*\!\Delta^k_{jl} - \frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^l_{ik}\,v_l\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right) - \\
-\frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^k_{jl}\,v_k\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right) + \frac{1}{c^4}\,v_l v_k\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right),
\end{gathered} \tag{16.26}$$

$$\begin{gathered}
(\gamma_5)_{ij} = \frac{1}{c^5}\,v_i\left[-{}^*\!\Delta^k_{jl}\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right) - \frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^k_{jl}\,v_k F^l + \right. \\
\left. +\frac{1}{c^2}\,v_l\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right)\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right) + \frac{1}{c^4}\,v_l F^l v_k\left(D^k_j + A^{\cdot k}_{j\cdot}\right)\right],
\end{gathered} \tag{16.27}$$

$$\begin{gathered}
(\delta_5)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,v_j\left[-{}^*\!\Delta^l_{ik}\left(D^k_l + A^{\cdot k}_{l\cdot}\right) - \frac{1}{c^2}\,{}^*\!\Delta^l_{ik}\,v_l F^k + \right. \\
\left. +\frac{1}{c^2}\,v_k\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)\left(D^k_l + A^{\cdot k}_{l\cdot}\right) + \frac{1}{c^4}\,v_k F^k v_l\left(D^l_i + A^{\cdot l}_{i\cdot}\right)\right],
\end{gathered} \tag{16.28}$$

$$\begin{gathered}
(\varepsilon_5)_{ij} = \frac{1}{c^4}\,v_i v_j \times \\
\times\left[D^l_k D^k_l + A^{\cdot l}_{k\cdot}A^{\cdot k}_{l\cdot} + \frac{2}{c^2}\,v_l\left(D^l_k + A^{\cdot l}_{k\cdot}\right)F^k + \frac{1}{c^4}\left(v_l F^l\right)^2\right].
\end{gathered} \tag{16.29}$$

Вследствие (1.7)

$$\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}\right) = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j}\,. \tag{16.30}$$

С другой стороны

$$\frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j}\right) = \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^j} + \frac{1}{c}\,v_j\,D\right) = \\ = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{c^2-\mathrm{w}}\,v_j\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)D\right] + \\ + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{v_j}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)D + \frac{1}{c^2}\,v_i\frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j} - \\ - \frac{1}{c^4}\,v_j\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,D\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\,v_j\frac{\partial D}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\,D\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \\ + \frac{1}{c^4}\,v_j\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,D\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\,v_i\frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j} + \\ + \frac{1}{c^2}D\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2}F_i v_j\right) + \frac{1}{c^2}\left(v_i\frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} + v_j\frac{{}^*\partial D}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{c^4}\,v_i v_j\frac{{}^*\partial D}{\partial t}\,. \tag{16.31}$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^i \partial x^j} + \\ + \frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{c^2}D\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2}F_i v_j\right) - \frac{1}{c^2}\left(v_i\frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} + v_j\frac{{}^*\partial D}{\partial x^i}\right) + \\ + \frac{1}{c^4}\,v_i v_j\frac{{}^*\partial D}{\partial t} = (\beta_6)_{ij} + (\gamma_6)_{ij} + (\delta_6)_{ij} + (\varepsilon_6)_{ij}\,, \tag{16.32}$$

где обозначено

$$(\beta_6)_{ij} = \frac{{}^*\partial^2 \ln\sqrt{h}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^j} + \right. \\ \left. + \frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^i \partial x^j} + D\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{1}{c^2}F_i v_j\right)\right], \tag{16.33}$$

$$(\gamma_6)_{ij} = -\frac{1}{c^2}\,v_i\frac{{}^*\partial D}{\partial x^j}\,, \tag{16.34}$$

$$(\delta_6)_{ij} = -\frac{1}{c^2}\, v_j\, \frac{{}^*\partial D}{\partial x^i}\,, \tag{16.35}$$

$$(\varepsilon_6)_{ij} = \frac{1}{c^4}\, v_i v_j\, \frac{{}^*\partial D}{\partial t}\,. \tag{16.36}$$

Наконец,

$$-\Gamma^{\alpha}_{ij}\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} = -\Gamma^{0}_{ij}\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{0}} - \Gamma^{k}_{ij}\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{k}}\,. \tag{16.37}$$

Вследствие (3.21), (1.7) и (22.3) из §3.22, мы имеем

$$\begin{gathered}-\Gamma^{0}_{ij}\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{0}} = \frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\left\{\Psi_{ij} - D_{ij} + \frac{1}{c^2}\, v_l\Big[\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)v_i +\right.\\ \left.+\big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)v_j + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^l\Big]\right\}\left[-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} + \Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)D\right] =\\ = (\alpha_7)_{ij} + (\beta_7)_{ij} + (\gamma_7)_{ij} + (\delta_7)_{ij} + (\varepsilon_7)_{ij}\,,\end{gathered} \tag{16.38}$$

где обозначено

$$\begin{gathered}(\alpha_7)_{ij} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{(c^2-\mathrm{w})^2}\left\{\Psi_{ij} - D_{ij} +\right.\\ \left.+\frac{1}{c^2}\, v_l\Big[\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)v_i + \big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)v_j + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^l\Big]\right\}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\,,\end{gathered} \tag{16.39}$$

$$\begin{gathered}(\beta_7)_{ij} = \frac{1}{c^2}\, D\,\times\\ \times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) - D_{ij} - \frac{1}{2c^2}\big(F_i v_j + F_j v_i\big) - {}^*\Delta^l_{ij}\, v_l\right],\end{gathered} \tag{16.40}$$

$$(\gamma_7)_{ij} = \frac{1}{c^4}\, v_i\, D\, v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)\,, \tag{16.41}$$

$$(\delta_7)_{ij} = \frac{1}{c^4}\, v_j\, D\, v_l\big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)\,, \tag{16.42}$$

$$(\varepsilon_7)_{ij} = \frac{1}{c^6}\, v_i v_j\, D\, v_l F^l. \tag{16.43}$$

Вследствие (3.22) и (1.7)

$$\begin{gathered}-\Gamma^{k}_{ij}\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{k}} = -\left\{{}^*\Delta^k_{ij} - \frac{1}{c^2}\Big[\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big)\, v_i +\right.\\ \left.+\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)v_j + \frac{1}{c^2}\, v_i v_j F^k\Big]\right\}\left(-\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right) =\\ = (\beta_8)_{ij} + (\gamma_8)_{ij} + (\delta_8)_{ij} + (\varepsilon_8)_{ij}\,,\end{gathered} \tag{16.44}$$

где обозначено

$$(\beta_8)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta^k_{ij}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} - {}^*\Delta^k_{ij}\frac{{}^*\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2}\,D\,{}^*\Delta^k_{ij}\,v_k\,, \qquad (16.45)$$

$$(\gamma_8)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,v_i\left[-\frac{1}{c^2}\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right], \qquad (16.46)$$

$$(\delta_8)_{ij} = \frac{1}{c^2}\,v_j\left[-\frac{1}{c^2}\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + \big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right], \qquad (16.47)$$

$$(\varepsilon_8)_{ij} = \frac{1}{c^4}\,v_i v_j\left(-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F^k\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^k} + F^k\frac{\partial\ln\sqrt{h}}{\partial x^k}\right). \qquad (16.48)$$

Введя обозначения

$$\begin{gathered}(\alpha)_{ij} = (\alpha_1)_{ij} + (\alpha_7)_{ij}\,, \quad (\beta)_{ij} = \sum_{n=1}^{8}(\beta_n)_{ij}\,, \\ (\gamma)_{ij} = \sum_{n=1}^{8}(\gamma_n)_{ij}\,, \quad (\delta)_{ij} = \sum_{n=1}^{8}(\delta_n)_{ij}\,, \quad (\varepsilon)_{ij} = \sum_{n=1}^{8}(\varepsilon_n)_{ij}\,,\end{gathered} \qquad (16.49)$$

мы можем написать

$$G_{ij} = (\alpha)_{ij} + (\beta)_{ij} + (\gamma)_{ij} + (\delta)_{ij} + (\varepsilon)_{ij}\,. \qquad (16.50)$$

Сравнивая $(\alpha_1)_{ij}$ и $(\alpha_7)_{ij}$, убеждаемся, что

$$(\alpha)_{ij} = 0\,. \qquad (16.51)$$

Найдем $(\beta)_{ij}$, $(\gamma)_{ij}$, $(\delta)_{ij}$ и $(\varepsilon)_{ij}$. Вследствие (16.5), (16.10), (16.16), (16.21), (16.26), (16.33), (16.40) и (16.45) имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}(\beta_n)_{ij} &= -\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j + F_j v_i\right)\right] + \frac{1}{c^2}\,{}^*\Delta^k_{ij}F_k - \frac{1}{c^4}\,v_l\big(D^l_j + A_{j\cdot}^{\cdot l}\big)F_i - \\ &- \frac{1}{c^4}\,v_l\big(D^l_i + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)F_j + H_{ij} + \frac{1}{c^2}\big(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \\ &+ \frac{1}{c^2}\big(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\big)\frac{\partial v_j}{\partial x^k} + \frac{2}{c^2}D^k_i D_{jk} + \frac{1}{c^2}A_{i\cdot}^{\cdot k}D_{jk} \; +\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{1}{c^2}A_{j\cdot}^{\cdot k}D_{ik}-\frac{1}{c^2}\left(D_i^k+A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right)-\right.\\
\left.-\frac{1}{2c^2}\left(F_j v_k+F_k v_j\right)\right]-\frac{1}{c^2}\left(D_j^k+A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right)-\right.\\
\left.-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_k+F_k v_i\right)\right]-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{1}{c^2}D\times\\
\times\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-\frac{1}{c^2}F_i v_j\right)-\frac{1}{c^2}DD_{ij}+\frac{1}{c^2}D\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\right.\\
\left.-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]=H_{ij}+\frac{1}{c^2}A_{ij}D-\frac{2}{c^2}A_{i\cdot}^{\cdot k}A_{jk}-\\
-\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t}-2D_i^kD_{jk}+DD_{ij}\right)-\frac{1}{c^2}\left\{\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial x^j}-\right.\\
\left.-\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_i v_j+F_j v_i\right)\right]-\frac{1}{c^2}{}^*\Delta_{ij}^kF_k\right\}.
\end{gathered}
\tag{16.52}
$$

С другой стороны

$$
\begin{gathered}
{}^*\nabla_i F_j-\frac{1}{c^2}F_iF_j=\frac{\partial F_j}{\partial x^i}+\frac{v_i}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial F_j}{\partial t}-{}^*\Delta_{ij}^kF_k-\frac{1}{c^2}F_iF_j=\\
=\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F_j\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)+\\
+\frac{1}{c^2}v_i\frac{{}^*\partial F_j}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}F_j\frac{\partial\mathrm{w}}{\partial x^i}+\frac{1}{c^2}F_j\frac{{}^*\partial v_i}{\partial t}-{}^*\Delta_{ij}^kF_k=\\
=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial x^j}-\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}-\frac{1}{c^2}F_jv_i\right)-{}^*\Delta_{ij}^kF_k\,,
\end{gathered}
\tag{16.53}
$$

таким образом,

$$
\begin{gathered}
\left({}^*\nabla_i F_j+{}^*\nabla_j F_i\right)-\frac{1}{c^2}F_iF_j=\frac{c^2}{c^2-\mathrm{w}}\frac{\partial^2\mathrm{w}}{\partial x^i\partial x^j}-\\
-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)-\frac{1}{2c^2}\left(F_iv_j+F_jv_i\right)\right]-{}^*\Delta_{ij}^kF_k\,.
\end{gathered}
\tag{16.54}
$$

Кроме того, см. (21.21) из §2.21,

$$
H_{ij}=S_{ij}+\frac{1}{c^2}\left(A_{ji}D+A_{jk}D_i^k+A_{ik}D_j^k\right).
\tag{16.55}
$$

Следовательно,

$$(\beta)_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} - 2D_i^k D_{jk} + DD_{ij} - D_i^k A_{jk} - \right.$$
$$\left. - D_j^k A_{ik} + 2A_{i\cdot}^{\cdot k} A_{jk} + \frac{1}{2}\left({}^*\nabla_i F_j + {}^*\nabla_j F_i\right) - \frac{1}{c^2} F_i F_j\right]. \qquad (16.56)$$

Далее, вследствие (16.6), (16.11), (16.17), (16.22), (16.27), (16.34), (16.41) и (16.46)

$$\sum_{n=1}^{8} (\gamma_n)_{ij} = -\frac{1}{c^2} v_i \left\{ -\frac{1}{c^2} F_k \left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) + \right.$$
$$+ \frac{{}^*\partial}{\partial x^k}\left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) - \frac{1}{c^4} F_j v_l F^l + \frac{1}{c^2} F^k \frac{\partial v_j}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} D_{jk} F^k -$$
$$- \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^k}\right) - \frac{1}{2c^2}\left(F_j v_k + F_k v_j\right)\right] F^k - \qquad (16.57)$$
$$\left. - {}^*\Delta_{jl}^k \left(D_k^l + A_{k\cdot}^{\cdot l}\right) - \frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} + \left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} \right\} =$$
$$= \frac{1}{c^2} v_i \left[{}^*\nabla_k \left(D_j^k + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right) - \frac{{}^*\partial D}{\partial x^j} - \frac{2}{c^2} A_{jk} F^k\right]$$

или, окончательно,

$$(\gamma)_{ij} = -\frac{1}{c^2} v_i \left[{}^*\nabla_k \left(h_j^k D - D_j^k\right) - {}^*\nabla_k A_{j\cdot}^{\cdot k} + \frac{2}{c^2} A_{jk} F^k\right]. \qquad (16.58)$$

Аналогичным образом, используя формулы (16.7), (16.12), (16.18), (16.23), (16.28), (16.35), (16.42) и (16.47), находим, что

$$(\delta)_{ij} = -\frac{1}{c^2} v_j \left[{}^*\nabla_k \left(h_i^k D - D_i^k\right) - {}^*\nabla_k A_{i\cdot}^{\cdot k} + \frac{2}{c^2} A_{ik} F^k\right]. \qquad (16.59)$$

Наконец, из (16.8), (16.13), (16.19), (16.24), (16.29), (16.36), (16.43) и (16.48) получаем

$$\sum_{n=1}^{8} (\varepsilon_n)_{ij} = \frac{1}{c^4} v_i v_j \left(-\frac{1}{c^2} F_k F^k + \right.$$
$$\left. + \frac{{}^*\partial F^k}{\partial x^k} + F^k \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^k} + D_k^l D_l^k + A_{k\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} + \frac{{}^*\partial D}{\partial t} \right). \qquad (16.60)$$

Окончательно, имеем

$$(\varepsilon_n)_{ij}=\frac{1}{c^4}\,v_i v_j\left(\frac{^*\partial D}{\partial t}+D_k^l D_l^k+A_{k\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot k}+{}^*\nabla_k F^k-\frac{1}{c^2}F_k F^k\right). \tag{16.61}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} G_{ij} &= S_{ij}-\frac{1}{c^2}\left[\frac{^*\partial D_{ij}}{\partial t}-2D_i^k D_{jk}+DD_{ij}+D_i^k A_{kj}+\right.\\ &\left.+D_j^k A_{ki}-2A_{i\cdot}^{\cdot k}A_{kj}+\frac{1}{2}\left({}^*\nabla_i F_j+{}^*\nabla_j F_i\right)-\frac{1}{c^2}F_i F_j\right]-\\ &-\frac{1}{c^2}\,v_i\left[{}^*\nabla_k\left(h_j^k D-D_j^k\right)-{}^*\nabla_k A_{j\cdot}^{\cdot k}+\frac{2}{c^2}A_{jk}F^k\right]-\\ &-\frac{1}{c^2}\,v_j\left[{}^*\nabla_k\left(h_i^k D-D_i^k\right)-{}^*\nabla_k A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{2}{c^2}A_{ik}F^k\right]+\\ &+\frac{1}{c^4}\,v_i v_j\left(\frac{^*\partial D}{\partial t}+D_k^l D_l^k+A_{k\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot k}+{}^*\nabla_k F^k-\frac{1}{c^2}F_k F^k\right), \end{aligned} \tag{16.62}$$

так как

$$A_{kj}=-A_{jk}\,,\qquad A_{ki}=-A_{ik}\,. \tag{16.63}$$

§ 3.17 Тензор Эйнштейна и х.и.-тензорные величины

Согласно §2.3, величины

$$G=g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}G^{\mu\nu}=G_\nu^\nu\,, \tag{17.1}$$

$$L=c^2\,\frac{G_{00}}{g_{00}}\,, \tag{17.2}$$

$$M^k=-c\,\frac{G_0^k}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{17.3}$$

$$N^{jk}=-c^2G^{jk} \tag{17.4}$$

суть, соответственно, х.и.-инварианты, х.и.-вектор и х.и.-тензор 2-го ранга. Пользуясь (14.7), (15.7) и (16.62), найдем выражение для этих величин, а также выражения — через эти величины — для компонент ковариантного тензора Эйнштейна и для инварианта G.

Из (17.2) и (14.7) следует, что

$$L=\frac{^*\partial D}{\partial t}+D_j^l D_l^j+A_{j\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot j}+{}^*\nabla_j F^j-\frac{1}{c^2}F_j F^j. \tag{17.5}$$

Вследствие (15.7) и (17.5)

$$
\begin{aligned}
&G_{0i} = \frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\times \\
&\times\left[{}^*\nabla_j\big(h_i^j D - D_i^j\big) - {}^*\nabla_j\, A_{i\cdot}^{\cdot j} + \frac{2}{c^2}\,A_{ij}F^j - \frac{1}{c^2}\,v_i L\right].
\end{aligned}
\tag{17.6}
$$

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
G_0^k &= g^{k0}G_{00} + g^{ki}G_{0i} = -\frac{1}{c^3}\,v^k\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)L - \frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\times \\
&\times\left[{}^*\nabla_j\big(h^{kj} D - D^{kj}\big) - {}^*\nabla_j\, A^{kj} + \frac{2}{c^2}\,A^{kj}F_j - \frac{1}{c^2}\,v^k L\right] = \\
&= -\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\left[{}^*\nabla_j\big(h^{kj} D - D^{kj}\big) - {}^*\nabla_j\, A^{kj} + \frac{2}{c^2}\,A^{kj}F_j\right]
\end{aligned}
\tag{17.7}
$$

и, следовательно, см. (17.3)

$$
M^k = {}^*\nabla_j\big(h^{kj} D - D^{kj}\big) - {}^*\nabla_j\, A^{kj} + \frac{2}{c^2}A^{kj}F_j\,. \tag{17.8}
$$

Сравнивая (17.6) с (17.8), получаем

$$
G_{0i} = \frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\Big(M_i - \frac{1}{c^2}\,v_i L\Big). \tag{17.9}
$$

Сравнение (16.62) с (17.8) и (17.5) дает

$$
\begin{aligned}
G_{ij} &= S_{ij} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} - 2D_i^k D_{jk} + DD_{ij} + D_i^k A_{kj} + \right. \\
&\left. + D_j^k A_{ki} - 2A_{i\cdot}^{\cdot k}A_{kj} + \frac{1}{2}\big({}^*\nabla_i\, F_j + {}^*\nabla_j\, F_i\big) - \frac{1}{c^2}\,F_iF_j\right] - \\
&- \frac{1}{c^2}\,v_i M_j - \frac{1}{c^2}\,v_j M_i + \frac{1}{c^4}\,v_i v_j L\,.
\end{aligned}
\tag{17.10}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
&h^{jp}h^{kq}\,\frac{{}^*\partial D_{pq}}{\partial t} = \frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t} - D_{pq}\frac{{}^*\partial\big(h^{jp}h^{kq}\big)}{\partial t} = \\
&= \frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t} + 2D^{jp}D_p^k + 2D^{kq}D_q^j = \frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t} + 4D^{jl}D_l^k\,,
\end{aligned}
\tag{17.11}
$$

тогда

$$\begin{gathered} G^{jk}=g^{j\alpha}g^{k\beta}G_{\alpha\beta}=g^{j0}g^{k0}G_{00}+g^{j0}g^{kq}G_{0q}+g^{jp}g^{k0}G_{p0}+ \\ +g^{jp}g^{kq}G_{pq}=\frac{1}{c^4}\,v^j v^k L+\frac{1}{c^2}\,v^j\Big(M^k-\frac{1}{c^2}\,v^k L\Big)+ \\ +\frac{1}{c^2}\,v^k\Big(M^j-\frac{1}{c^2}\,v^j L\Big)+S^{jk}-\frac{1}{c^2}\bigg[\frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t}+ \\ +2D^{jl}D_l^k+DD^{jk}+D^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+D^{kl}A_{l\cdot}^{\cdot j}-2A^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+ \\ +\frac{1}{2}\left({}^*\nabla^j F^k+{}^*\nabla^k F^j\right)-\frac{1}{c^2}\,F^jF^k\bigg]-\frac{1}{c^2}\,v^j M^k- \\ -\frac{1}{c^2}\,v^k M^j+\frac{1}{c^4}\,v^j v^k L=S^{jk}-\frac{1}{c^2}\bigg[\frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t}+ \\ +2D^{jl}D_l^k+DD^{jk}+D^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+D^{kl}A_{l\cdot}^{\cdot j}-2A^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+ \\ +\frac{1}{2}\left({}^*\nabla^j F^k+{}^*\nabla^k F^j\right)-\frac{1}{c^2}\,F^jF^k\bigg] \end{gathered} \tag{17.12}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} N^{jk}=-c^2S^{jk}+\frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t}+2D^{jl}D_l^k+DD^{jk}+D^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+ \\ +D^{kl}A_{l\cdot}^{\cdot j}-2A^{jl}A_{l\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{2}\left({}^*\nabla^j F^k+{}^*\nabla^k F^j\right)-\frac{1}{c^2}\,F^jF^k. \end{gathered} \tag{17.13}$$

Сравнивая (17.10) с (17.13), находим

$$G_{ij}=-\frac{1}{c^2}\Big(N_{ij}+v_iM_j+v_jM_i-\frac{1}{c^2}\,v_iv_jL\Big). \tag{17.14}$$

Вследствие (17.2), (17.6) и (17.4)

$$G=\frac{1}{c^2}\left(L+N\right), \tag{17.15}$$

где х.и.-инвариант N определяется как

$$N=h^{ij}N_{ij}=h_{ij}N^{ij}=N_j^j\,. \tag{17.16}$$

Так как

$$h_{ij}\frac{{}^*\partial D^{jk}}{\partial t}=\frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}-D^{jk}\frac{{}^*\partial h_{ij}}{\partial t}=\frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}-2D_{ij}D^{jk}, \tag{17.17}$$

то, следовательно,

$$\begin{gathered}N_i^k = -c^2 S_i^k + \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t} + D D_i^k + D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} - \\ - 2 A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{2}\left({}^*\nabla_i F^k + {}^*\nabla^k F_i\right) - \frac{1}{c^2} F_i F^k.\end{gathered} \tag{17.18}$$

Вследствие (17.15), (17.5) и (17.19)

$$N = -c^2 S + \frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 - 2 A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + {}^*\nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j, \tag{17.19}$$

$$G = -S + \frac{1}{c^2}\left(2\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 + D_j^l D_l^j - A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + 2\,{}^*\nabla_j F^j - \frac{2}{c^2} F_j F^j\right). \tag{17.20}$$

Соберем интересующие нас соотношения. Пользуясь (20.18) из §2.20 и введя для краткости обозначения*

$${}^*\widetilde{\nabla}_i = {}^*\nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i\,, \qquad {}^*\widetilde{\nabla}^i = {}^*\nabla^i - \frac{1}{c^2} F^i, \tag{17.21}$$

в итоге мы имеем

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D_j^l D_l^j + A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j \\ M^k &= {}^*\nabla_j\left(h^{kj} D - D^{kj}\right) - {}^*\nabla_j A^{kj} + \frac{2}{c^2} A^{kj} F_j \\ N_i^k &= -c^2 S_i^k + \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t} + D D_i^k + D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} - \\ &\qquad - 2 A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} + \frac{1}{2}\left({}^*\widetilde{\nabla}_i F^k + {}^*\widetilde{\nabla}^k F_i\right) \end{aligned}\right\}, \tag{17.22}$$

$$N = -c^2 S + \frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 - 2 A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j, \tag{17.23}$$

$$G = -S + \frac{1}{c^2}\left(2\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 + D_j^l D_l^j - A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + 2\,{}^*\widetilde{\nabla}_j F^j\right), \tag{17.24}$$

---

*Величины, свернутые по одному индексу с х.и.-оператором ${}^*\widetilde{\nabla}$ (17.21), Зельманов обычно называл *хронометрически инвариантной физической дивергенцией*, чтобы отличить от обычной х.и.-дивергенции (свертки по одному индексу с х.и.-оператором ${}^*\nabla_i$, см. §2.14). Например, ${}^*\nabla_i Q^i$ и ${}^*\nabla_i Q^{ij}$ это простая х.и.-дивергенция трехмерного х.и.-вектора и х.и.-тензора 2-го ранга, в то время как ${}^*\widetilde{\nabla}_i Q^i$ и ${}^*\widetilde{\nabla}_i Q^{ij}$ суть физическая х.и.-дивергенция тех же величин. — Прим. ред., Д. Р.

$$\left.\begin{aligned} G_{00} &= \frac{1}{c^2}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)^2 L \\ G_{0i} &= \frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\Big(M_i-\frac{1}{c^2}\,v_i L\Big) \\ G_{ij} &= -\frac{1}{c^2}\Big(N_{ij}+v_i M_j+v_j M_i-\frac{1}{c^2}\,v_i v_j L\Big) \end{aligned}\right\}, \tag{17.25}$$

$$G = \frac{1}{c^2}\left(L+N\right). \tag{17.26}$$

§ 3.18 Временнóе ковариантное уравнение закона тяготения

Возьмем уравнения тяготения в виде

$$G_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T\right)+\Lambda\,g_{\mu\nu} \tag{18.1}$$

и рассмотрим уравнение с индексами $\mu, \nu = 0$ (временнóе уравнение)

$$G_{00} = -\kappa\left(T_{00}-\frac{1}{2}\,g_{00}T\right)+\Lambda\,g_{00}\,. \tag{18.2}$$

Вследствие (10.38) и (10.44)

$$T_{00}-\frac{1}{2}\,g_{00}T = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)^2\Big(\rho+\frac{1}{c^2}\,U\Big) \tag{18.3}$$

и, в силу (17.25), из исходного уравнения (18.2) получаем

$$L = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho c^2+U\right)+\Lambda c^2. \tag{18.4}$$

§ 3.19 Смешанные ковариантные уравнения закона тяготения

Перейдем к смешанным, пространственно-временны́м уравнениям тяготения (18.1), т. е. к уравнениям с индексами $\mu = 0$ и $\nu = 1, 2, 3$

$$G_{0i} = -\kappa\left(T_{0i}-\frac{1}{2}\,g_{0i}T\right)+\Lambda\,g_{0i}\,. \tag{19.1}$$

Так как, вследствие (10.38) и (10.44),

$$T_{0i}-\frac{1}{2}\,g_{0i}T = -\frac{1}{c}\Big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\Big)\Big[J_i+\frac{v_i}{2c^2}\big(\rho c^2+U\big)\Big], \tag{19.2}$$

то, в силу (17.25) уравнения (19.1) дают

$$M_i - \frac{1}{c^2}\, v_i L = \kappa\left[J_i + \frac{v_i}{2c^2}\big(\rho c^2 + U\big)\right] - \Lambda v_i\,, \tag{19.3}$$

или, иначе

$$M_i - \kappa J_i = \frac{1}{c^2}\, v_i\Big[L + \frac{\kappa}{2}\big(\rho c^2 + U\big) - \Lambda c^2\Big]. \tag{19.4}$$

Так как (19.4) имеет место при любом выборе временно́й координаты, то можно применить метод вариации потенциалов. Обращая все v_i в нуль, получаем

$$M_i = \kappa J_i\,. \tag{19.5}$$

Вследствие своего х.и.-тензорного (х.и.-векторного) характера, (19.5) сохраняется при любом выборе временно́й координаты. А в таком случае из (19.4) следует, кроме того, равенство

$$L = -\frac{\kappa}{2}\big(\rho c^2 + U\big) + \Lambda c^2, \tag{19.6}$$

которое также является х.и.-тензорным и совпадает с (18.4).

§ 3.20 Пространственные ковариантные уравнения закона тяготения

Займемся теперь пространственными уравнениями тяготения (18.1), т. е. уравнениями с индексами $\mu, \nu = 1, 2, 3$

$$G_{ij} = -\kappa\left(T_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, T\right) + \Lambda\, g_{ij}\,. \tag{20.1}$$

Вследствие (10.38) и (10.44)

$$\begin{aligned} T_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, T = \frac{1}{c^2}\Big[\, & U_{ij} - \frac{1}{2}\, h_{ij} U + \frac{1}{2}\, h_{ij}\, \rho c^2 + \\ & + v_i J_j + v_j J_i + \frac{1}{2c^2}\, v_i v_j \big(\rho c^2 + U\big)\Big]. \end{aligned} \tag{20.2}$$

В силу (17.25) и (20.2), выражение (20.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} N_{ij} + v_i M_j + v_j M_i - \frac{1}{c^2}\, v_i v_j L = \kappa\Big[& U_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} U + \frac{1}{2} h_{ij}\, \rho c^2 + \\ & + v_i J_j + v_j J_i + \frac{1}{2c^2}\, v_i v_j \left(\rho c^2 + U\right)\Big] + \Lambda c^2\Big(h_{ij} - \frac{1}{c^2}\, v_i v_j\Big) \end{aligned} \tag{20.3}$$

или, иначе,

$$N_{ij}-\kappa\left(U_{ij}-\frac{1}{2}\,h_{ij}U+\frac{1}{2}\,h_{ij}\rho c^2\right)-\Lambda c^2 h_{ij}+v_i\,(M_j-\kappa J_j)+ \\ +\,v_j\,(M_i-\kappa J_i)-\frac{1}{c^2}\,v_i v_j\left[\,L+\frac{\kappa}{2}\,\big(\rho c^2+U\big)-\Lambda c^2\right]=0\,. \tag{20.4}$$

Так как (20.4) имеет место при любом выборе временно́й координаты, мы можем снова воспользоваться методом вариации потенциалов.

Обращая все v_k в нуль, получаем

$$N_{ij}=\kappa\left(U_{ij}-\frac{1}{2}\,h_{ij}U+\frac{1}{2}\,h_{ij}\rho c^2\right)+\Lambda c^2 h_{ij}\,. \tag{20.5}$$

Полученное равенство, как х.и.-тензорное, имеет место при любом выборе временно́й координаты. Следовательно,

$$v_i\,(M_j-\kappa J_j)+v_j\,(M_i-\kappa J_i)-\frac{1}{c^2}\,v_i v_j\Big[L+\frac{\kappa}{2}\big(\rho c^2+U\big)-\Lambda c^2\Big]=0 \tag{20.6}$$

имеет место при любом выборе временно́й координаты. Далее мы будем полагать компоненты v_k равными

$$v_1\neq 0\,,\qquad v_2=v_3=0\,. \tag{20.7}$$

Тогда (20.6) примут вид (при сокращении на v_1)

$$\left.\begin{aligned} &2\,(M_1-\kappa J_1)-\frac{1}{c^2}\left[\,L+\frac{\kappa}{2}\,\big(\rho c^2+U\big)-\Lambda c^2\right]=0 \\ &M_2-\kappa J_2=0\,,\qquad M_3-\kappa J_3=0 \end{aligned}\right\}. \tag{20.8}$$

Так как (20.8) имеет место при любом $v_1\neq 0$, то

$$M_i=\kappa J_i\,, \tag{20.9}$$

$$L=-\frac{\kappa}{2}\,\big(\rho c^2+U\big)+\Lambda c^2, \tag{20.10}$$

причем эти равенства, в силу своего х.и.-тензорного характера, сохраняются при любом выборе временно́й координаты. Очевидно, что они совпадают, соответственно, с равенствами (19.5) и (18.4).

§ 3.21 Скалярное уравнение тяготения

Рассмотрим также скалярное уравнение

$$G = \kappa T + 4\Lambda\,, \tag{21.1}$$

являющееся следствием тензорных уравнений тяготения. Вследствие (17.26) и (10.44), уравнение (21.1) принимает вид

$$L + N = \kappa\left(\rho c^2 - U\right) + 4\Lambda c^2 \tag{21.2}$$

или, иначе,

$$L + N = \kappa\rho_0 c^2 + 4\Lambda c^2. \tag{21.3}$$

§ 3.22 Первая х.и.-тензорная форма уравнений тяготения

Таким образом, мы получили систему уравнений (18.4), (19.5) и (20.5), представляющую собою х.и.-тензорную форму уравнений тяготения. Мы назовем ее *первой х.и.-тензорной формой уравнений тяготения*. Запишем ее в виде

$$\left.\begin{aligned} & L = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho c^2 + U\right) + \Lambda c^2 \\ & M^k = \kappa J^k \\ & N^{ik} = \kappa\left(U^{ik} - \frac{1}{2}\,h^{ik}U + \frac{1}{2}\,h^{ik}\rho c^2\right) + \Lambda c^2 h^{ik} \end{aligned}\right\}. \tag{22.1}$$

Как легко видеть, первое из этих уравнений (х.и.-инвариант) равносильно уравнению

$$G_{00} = -\kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}\,g_{00}\,T\right) + \Lambda\,g_{00}\,, \tag{22.2}$$

второе (х.и.-векторное уравнение) равносильно уравнениям

$$G_0^k = -\kappa\left(T_0^k - \frac{1}{2}\,g_0^k\,T\right) + \Lambda\,g_0^k\,, \tag{22.3}$$

совпадающим с уравнениями

$$G_0^k = -\kappa\,T_0^k\,, \tag{22.4}$$

а третье (х.и.-тензорное уравнение) равносильно уравнениям

$$G^{ik} = -\kappa\left(T^{ik} - \frac{1}{2}\,g^{ik}\,T\right) + \Lambda\,g^{ik}. \tag{22.5}$$

Перепишем систему (22.1) в развернутой форме, опустив предварительно индекс i в х.и.-тензорном уравнении и воспользовавшись (17.22). В результате имеем

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D_j^l D_l^j + A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho c^2 + U\right) + \Lambda c^2, \tag{22.6}$$

$${}^*\nabla_j\left(h^{kj} D - D^{kj}\right) - {}^*\nabla_j A^{kj} + \frac{2}{c^2} A^{kj} F_j = \kappa J^k, \tag{22.7}$$

$$\begin{gathered} - c^2 S_i^k + \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t} + D D_i^k + D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} - 2 A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} + \\ + \frac{1}{2}\left({}^*\widetilde{\nabla}_i F^k + {}^*\widetilde{\nabla}^k F_i\right) = \kappa\left(U_i^k - \frac{1}{2} h_i^k U + \frac{1}{2} h_i^k \rho c^2\right) + \Lambda c^2 h_i^k . \end{gathered} \tag{22.8}$$

Вследствие (9.2) и (16.3) из §2.16, мы имеем

$$A_{il} = \varepsilon_{jil}\,\Omega^j , \qquad A^{lk} = \varepsilon^{qlk}\,\Omega_q , \tag{22.9}$$

$$\begin{gathered} A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} = A_{il} A^{lk} = \varepsilon_{jil}\,\varepsilon^{qlk}\,\Omega^j \Omega_q = -\varepsilon_{jil}\,\varepsilon^{qkl}\,\Omega_q\,\Omega^j = \\ = -\left(h_j^q h_i^k - h_i^q h_j^k\right)\Omega_q\,\Omega^j = -h_i^k\,\Omega_j\Omega^j + \Omega_i\Omega^k, \end{gathered} \tag{22.10}$$

$$A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} = -2\Omega_j\Omega^j. \tag{22.11}$$

Вследствие (9.2) и также (16.4), (14.18), (16.15) из Главы 2

$${}^*\nabla_j A^{kj} = {}^*\nabla_j\left(\varepsilon^{pkj}\,\Omega_p\right) = \varepsilon^{pkj}\,{}^*\nabla_j\,\Omega_p = \varepsilon^{kjp}\,{}^*\nabla_j\,\Omega_p = {}^*r^k(\Omega)\,. \tag{22.12}$$

Далее, также вследствие (9.2),

$$A^{kj} F_j = \varepsilon^{pkj}\,\Omega_p F_j = -\varepsilon^{pjk}\,\Omega_p F_j = -\varepsilon^{jlk}\,\Omega_j F_l\,, \tag{22.13}$$

$$D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} = D_{il} A^{lk} + D^{lk} A_{li} = \varepsilon^{jlk} D_{il}\Omega_j + \varepsilon_{jli} D^{lk}\Omega^j. \tag{22.14}$$

Пользуясь (22.10–22.14) и (19.18), (19.19) из §2.19, мы можем представить уравнения (22.6), (22.7) и (22.8), соответственно, в следующем виде

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D_j^l D_l^j - 2\Omega_j\Omega^j + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j = -\frac{\kappa}{2}\left(\rho c^2 + U\right) + \Lambda c^2, \tag{22.15}$$

$$R^k\left({}^*\omega\right) = {}^*r^k\left(\Omega\right) - \frac{2}{c^2}\,\varepsilon^{jlk}\,\Omega_j F_l + \kappa J^k, \tag{22.16}$$

$$-c^2 S_i^k+\frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}+D D_i^k+\varepsilon^{jlk} D_{il}\,\Omega_j+\varepsilon_{jli}\,D^{lk}\,\Omega^j-$$
$$-2\left(\Omega_i\,\Omega^k-h_i^k\,\Omega_j\,\Omega^j\right)+\frac{1}{2}\left({}^*\widetilde{\nabla}_i\,F^k+{}^*\widetilde{\nabla}^k F_i\right)= \tag{22.17}$$
$$=\kappa\left(U_i^k-\frac{1}{2}\,h_i^k U+\frac{1}{2}\,h_i^k\rho c^2\right)+\Lambda c^2 h_i^k\,.$$

Уравнение (21.1) можно, вследствие (17.24) и (10.44), переписать в виде

$$-c^2 S+2\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+D^2+D_j^l D_l^j-A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j}+2\,{}^*\widetilde{\nabla}_j F^j=\kappa\left(\rho c^2-U\right)+4\Lambda c^2. \tag{22.18}$$

Снова применяя (22.11), мы придадим уравнению (22.18) вид

$$-c^2 S+2\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+D^2+D_j^l D_l^j+2\Omega_j\Omega^j+2\,{}^*\widetilde{\nabla}_j F^j=\kappa\left(\rho c^2-U\right)+4\Lambda c^2. \tag{22.19}$$

§ 3.23 Вторая х.и.-тензорная форма уравнений тяготения

Рассмотрим совокупность уравнений

$$G_{00}-\frac{1}{2}\,g_{00}\,G=-\kappa\,T_{00}-\Lambda\,g_{00}\,, \tag{23.1}$$

$$G_0^k-\frac{1}{2}\,g_0^k\,G=-\kappa\,T_0^k-\Lambda\,g_0^k\,, \tag{23.2}$$

что совпадает с (22.4)

$$G_0^k=-\kappa\,T_0^k \tag{23.3}$$

и также

$$G^{jk}-\frac{1}{2}\,g^{jk}\,G=-\kappa\,T^{jk}-\Lambda\,g^{jk}. \tag{23.4}$$

Вследствие (17.2) и (17.26),

$$G_{00}-\frac{1}{2}\,g_{00}\,G=\frac{1}{2c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2(L-N)\,, \tag{23.5}$$

поэтому, в силу (10.38), уравнение (23.1) равносильно уравнению

$$\frac{1}{2}\,(N-L)=\kappa\rho c^2+\Lambda c^2. \tag{23.6}$$

Так как, вследствие (17.4) и (17.26),

$$G^{jk}-\frac{1}{2}\,g^{jk}\,G=\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\,h^{jk}(L+N)-N^{jk}\right], \tag{23.7}$$

то, в силу (10.40), уравнения (23.4) равносильны уравнениям

$$N^{jk}-\frac{1}{2}\,h^{jk}\,(L+N)=\kappa\,U^{jk}-\Lambda c^2h^{jk}. \tag{23.8}$$

Как легко видеть, совокупность уравнений (23.1), (23.2) и (23.4) равносильна совокупности уравнений (22.2), (22.3) и (22.5). Следовательно, в этом можно убедиться и непосредственно, система уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,(N-L)=\kappa\rho c^2+\Lambda c^2\\ &M^k=\kappa J^k\\ &N^{jk}-\frac{1}{2}\,h^{jk}\,(L+N)=\kappa\,U^{jk}-\Lambda c^2h^{jk}\end{aligned}\right\} \tag{23.9}$$

равносильна системе (22.1). Систему (23.9) мы назовем *второй х.и.-тензорной формой уравнений тяготения*.

Пользуясь (17.22) и (17.23), перепишем уравнения (23.6) и (23.8), принадлежащие к системе (23.9), в развернутой форме, опустив предварительно индекс i в (23.8). Получаем

$$\frac{1}{2}\left(-c^2S+D^2-D_j^lD_l^j-3A_{j\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot j}\right)=\kappa\rho c^2+\Lambda c^2, \tag{23.10}$$

$$\begin{aligned}&-c^2\Big(S_i^k-\frac{1}{2}\,h_i^kS\Big)+\frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}+DD_i^k+D_i^lA_{l\cdot}^{\cdot k}+D_l^kA_{\cdot i}^{l\cdot}-\\ &-2A_{i\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{2}\big({}^*\widetilde{\nabla}_i\,F^k+{}^*\widetilde{\nabla}^kF_i\big)-h_i^k\bigg[\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+\\ &+\frac{1}{2}\big(D^2+D_j^lD_l^j-A_{j\cdot}^{\cdot l}A_{l\cdot}^{\cdot j}\big)+{}^*\widetilde{\nabla}_j\,F^j\bigg]=\kappa U_i^k-\Lambda c^2h_i^k\,.\end{aligned} \tag{23.11}$$

Пользуясь (22.11), (22.14), (22.10), а также (21.29) и (21.35) из §2.21, придадим уравнениям (23.10–23.11), соответственно, вид

$$c^2Z+\frac{1}{2}\left(D^2-D_j^lD_l^j\right)+3\Omega_j\Omega^j=\kappa\rho c^2+\Lambda c^2, \tag{23.12}$$

$$\begin{aligned}&-c^2Z_i^k+\frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}+DD_i^k+\varepsilon^{jlk}D_{il}\Omega_j+\varepsilon_{jli}\,D^{lk}\Omega^j\,-\\ &-2\Omega_i\Omega^k+\frac{1}{2}\big({}^*\widetilde{\nabla}_i\,F^k+{}^*\widetilde{\nabla}^kF_i\big)-h_i^k\bigg[\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+\\ &+\frac{1}{2}\big(D^2+D_j^lD_l^j\big)-\Omega_j\Omega^j+{}^*\widetilde{\nabla}_j\,F^j\bigg]=\kappa U_i^k-\Lambda c^2h_i^k\,.\end{aligned} \tag{23.13}$$

Перепишем также (22.19), используя (21.35) из §2.21,

$$c^2Z+\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+\frac{1}{2}\Big(D^2+D_j^lD_l^j\Big)+\Omega_j\Omega^j+{}^*\widetilde{\nabla}_jF^j=\frac{\kappa}{2}\big(\rho c^2-U\big)+2\Lambda c^2. \tag{23.14}$$

§ 3.24 Строение уравнений тяготения

Рассматривая х.и.-тензорные формы уравнений тяготения, мы видим, что некоторые величины входят в них не иначе, как в комбинации с другими. Эти комбинации устроены таким образом, что, исключая из уравнений одну из величин, входящих в такую комбинацию, мы тем самым исключаем данную комбинацию целиком.

Таковы комбинации

$$\varphi_i^k = \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t} + \frac{1}{2}\left({}^*\widetilde{\nabla}_i F^k + {}^*\widetilde{\nabla}^k F_i\right) - \kappa\left(U_i^k - \frac{1}{2}\,h_i^k U\right), \tag{24.1}$$

$$\varphi = \frac{{}^*\partial D}{\partial t} + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j + \frac{\kappa}{2}\,U\,, \tag{24.2}$$

$$\sigma_i^k = -c^2 S_i^k + D D_i^k\,, \tag{24.3}$$

$$\sigma = -c^2 S + D^2, \tag{24.4}$$

$$\omega_i^k = D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} = \varepsilon^{jlk} D_{il}\Omega_j + \varepsilon_{jli} D^{lk}\Omega^j. \tag{24.5}$$

Введем также обозначения*

$$\alpha_i^k = -A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} = -\Omega_i\Omega^k + h_i^k\Omega_j\Omega^j, \tag{24.6}$$

$$\alpha = -A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} = 2\Omega_j\Omega^j, \tag{24.7}$$

$$\delta = D_j^l D_l^j\,, \tag{24.8}$$

$$\begin{aligned} \theta^k &= {}^*\nabla_j\left(h^{kj} D - D^{kj}\right) - {}^*\nabla_j A^{kj} + \frac{2}{c^2} A^{kj} F_j - \kappa J^k = \\ &= R^k\left({}^*\omega\right) - {}^*r^k\left(\Omega\right) + \frac{2}{c^2}\,\varepsilon^{jlk}\Omega_j F_l - \kappa J^k. \end{aligned} \tag{24.9}$$

Очевидно также, что

$$\varphi_j^j = \varphi\,, \quad \sigma_j^j = \sigma\,, \quad \omega_j^j = 0\,, \quad \alpha_j^j = \alpha\,. \tag{24.10}$$

Тогда уравнения тяготения принимают вид: первая х.и.-тензорная форма

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + \Lambda c^2 = \delta + \varphi + \frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 \\ &\theta^k = 0 \\ &2\alpha_i^k + \sigma_i^k + \varphi_i^k + \omega_i^k = \frac{\kappa}{2}\,h_i^k\rho c^2 + \Lambda c^2 h_i^k \end{aligned}\right\}, \tag{24.11}$$

*Определение х.и.-ротора ${}^*r^k(\Omega) = \varepsilon^{qpk}\,{}^*\nabla_q\Omega_p = {}^*\nabla_j a^{kj}$ см. в §2.16. — Прим. ред., Д. Р.

вторая х.и.-тензорная форма

$$\left.\begin{aligned} & 3\alpha+\sigma=\delta+2\kappa\rho c^2+2\Lambda c^2 \\ & \theta^k=0 \\ & \left(2\alpha_i^k-\frac{1}{2}\,h_i^k\alpha\right)+\left(\sigma_i^k-\frac{1}{2}\,h_i^k\sigma\right)+\left(\varphi_i^k-h_i^k\varphi\right)+ \\ & +\omega_i^k+\Lambda c^2h_i^k=\frac{1}{2}\,h_i^k\delta \end{aligned}\right\}, \tag{24.12}$$

скалярное уравнение тяготения

$$\alpha+\delta+\sigma+2\varphi=\kappa\rho c^2+4\Lambda c^2. \tag{24.13}$$

Рассмотрим переменные х.и.-инварианты, входящие в уравнения тяготения: ρ, α, δ, φ, σ. Из физических соображений мы принимаем, что

$$\rho\geqslant 0\,. \tag{24.14}$$

Введем пространственные координаты, локально-декартовы и ортогональные в данной мировой точке. Тогда

$$\Omega_j=\Omega^j, \qquad D_i^k=D_k^i \tag{24.15}$$

и, следовательно, как легко видеть,

$$\alpha\geqslant 0\,, \tag{24.16}$$

$$\delta\geqslant 0\,. \tag{24.17}$$

Так как α и δ суть суб-инварианты, то (24.16) и (24.17) имеют место в любых координатах.

Из первого уравнения (24.11) мы видим, что, вообще говоря,

$$\varphi \gtreqless 0\,. \tag{24.18}$$

Аналогично, из первого уравнения (24.12) усматриваем, что, вообще говоря,

$$\sigma \gtreqless 0\,. \tag{24.19}$$

Глава 4

НЕКОТОРЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

§4.1 Локально-сопутствующие системы отсчета

Мы будем рассматривать вещество как непрерывную среду. В любой точке A вещества, не являющейся точкой разрыва для его скорости (относительно произвольной исходной системы отсчета), можно, в таком случае, ввести *локально-сопутствующую систему отсчета*, определяемую следующим образом:

> Система отсчета, локально-сопутствующая веществу в данной точке A, есть такая система отсчета, которая в данной точке A (в точке вещества) для всех моментов рассматриваемого интервала времени t: (1) локально-стационарна; (2) не вращается относительно пространства.

Пусть ${}^*u^i$ х.и.-скорость вещества относительно системы отсчета, которая локально-сопутствует веществу в точке A. Тогда для точки A

$$\left({}^*u^i\right)_A \equiv 0\,, \tag{1.1}$$

$$\left({}^*\omega_k\right)_A \equiv 0\,. \tag{1.2}$$

Так как в Главе 2 из (10.6) следует (10.8), (17.12) и (17.13), то, вследствие (1.1) и (1.2), имеем также

$$\left(u^i\right)_A \equiv 0\,, \tag{1.3}$$

$$\left(\omega_k\right)_A \equiv 0\,. \tag{1.4}$$

§4.2 Сопутствующая система отсчета

Систему отсчета, которая в каждой мировой точке данной четырехмерной области Q движется вместе с веществом, мы, в согласии с §1.10 и §1.19, будем называть *сопутствующей системой отсчета*. Если ${}^*u^i$ х.и.-скорость вещества относительно данной системы отсчета, то в сопутствующей системе, очевидно,

$$^*u^i \equiv 0 \tag{2.1}$$

и, следовательно,

$$u^i \equiv 0\,. \tag{2.2}$$

Ясно, что во всякой области, не содержащей точек разрыва скорости вещества (относительно произвольной исходной системы отсчета), можно ввести сопутствующую систему отсчета. В самом деле, пусть в четырехмерной области Q в системе $\widetilde{S}$ компоненты скорости вещества $\tilde{u}^i$ суть конечные, однозначные и непрерывные функции* своих аргументов ($\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$). Тогда существует система функций

$$x^{i'} = x^{i'}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{2.3}$$

конечных, однозначных, непрерывных и дифференцируемых в области Q и удовлетворяющих в ней уравнениям

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^0} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^j}\,\tilde{u}^j = 0\,. \tag{2.4}$$

Введем координатную систему S', связанную с системой $\widetilde{S}$ преобразованиями

$$\left.\begin{aligned} x^{0'} &= \tilde{x}^0 \\ x^{i'} &= x^{i'}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

Найдем скорость $\tilde{\mathrm{v}}^i$ движения системы S' в системе $\widetilde{S}$. Так как

$$\left.\begin{aligned} d\tilde{x}^0 &= dx^{0'} \\ d\tilde{x}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{0'}}dx^{0'} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{j'}}dx^{j'} \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

то мы имеем

$$\tilde{\mathrm{v}}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^{0'}}\,. \tag{2.7}$$

С другой стороны, т. к.

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{0'}} \equiv 0\,, \tag{2.8}$$

*Выше в §4.1 и §4.2 конечность и однозначность скорости, как следующие из физических соображений, не были специально оговорены.

то мы имеем

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^0} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^{0'}} = 0\,. \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^0} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^j}\,\tilde{\mathrm{v}}^j = 0\,. \tag{2.10}$$

Вычитая (2.4) почленно из (2.10), получаем

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial \tilde{x}^j}\left(\tilde{\mathrm{v}}^j - \tilde{u}^j\right) = 0 \tag{2.11}$$

и, так как

$$\frac{\partial\left(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}\right)}{\partial\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right)} \not\equiv 0\,, \tag{2.12}$$

следовательно

$$\tilde{\mathrm{v}}^i \equiv \tilde{u}^i\,, \tag{2.13}$$

т. е. координатная система S' движется вместе с веществом, следовательно, принадлежит системе отсчета, сопутствующей области Q.

§4.3 Характер материи и ее движения

Пусть всюду в рассматриваемой четырехмерной области Q находится материя, удовлетворяющая следующим требованиям.

1. Материя представляет собою непрерывно-распределенное вещество (непрерывную среду), не производящее давления или натяжений, свободное от потока тепла и имеющее положительную собственную плотность.
2. В любой мировой точке области Q компоненты u^i скорости вещества относительно произвольной системы (x^0,x^1,x^2,x^3), покрывающей действительными значениями своих координат окрестности упомянутой мировой точки, суть конечные, однозначные и дифференцируемые функции временнóй координаты и пространственных координат.

Из 1-го условия следует, что материю можно рассматривать как свободную от потока тепла идеальную жидкость с положительной собственной плотностью ρ_{00} и равным нулю собственным давлением p_0, так что

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho_{00} + \frac{p_0}{c^2}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{p_0}{c^2}\,g^{\mu\nu}, \quad \rho_{00} > 0\,, \quad p_0 = 0 \tag{3.1}$$

или, иначе,

$$T^{\mu\nu} = \rho_{00}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\,, \quad \rho_{00} > 0\,. \tag{3.2}$$

Очевидно

$$T_{00} = \rho_{00}\frac{dx_0}{ds}\frac{dx_0}{ds}\,, \tag{3.3}$$

$$T_0^i = \rho_{00}\frac{dx_0}{ds}\frac{dx^i}{ds}\,, \tag{3.4}$$

$$T^{ik} = \rho_{00}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\,. \tag{3.5}$$

Из 2-го условия, вследствие найденного в предыдущем §4.2, вытекает, что мы можем, шаг за шагом, покрыть сопутствующими координатными системами всю область Q, — иначе говоря, ввести во всей этой области сопутствующую систему отсчета.

§4.4 Материя в сопутствующей системе отсчета

Отнесем рассматриваемую материю к сопутствующей системе отсчета. В такой системе отсчета для всякой точки вещества

$$dx^i = 0\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \tag{4.1}$$

откуда следует

$$dx_0 = g_{00}\,dx^0, \tag{4.2}$$

$$ds^2 = g_{00}\,dx^0 dx^0. \tag{4.3}$$

Поэтому, из (3.3) и (3.5), получаем

$$\rho = \rho_{00}\,, \tag{4.4}$$

$$J^i = 0\,, \tag{4.5}$$

$$U^{ik} = 0\,. \tag{4.6}$$

Очевидно, равенства (4.4–4.6) существенным образом связаны с предположениями о характере материи. Напротив, рассуждения, излагаемые в этом §4.4 ниже, не зависят от этих предположений, изложенных в 1-м условии предыдущего §4.3, и связаны лишь со 2-м условием, содержащим только предположения о характере движения вещества.

По самому определению сопутствующей системы отсчета, вещество покоится относительно нее. Но, в окрестностях каждой точки сопутствующего пространства, оно, вообще говоря, движется относительно системы отсчета, локально-сопутствующей веществу в этой точке. В каждой точке сопутствующего пространства можно ввести х.и.-тензоры (ковариантный, смешанный и контравариантный) и х.и.-инвариант скоростей деформации вещества относительно системы отсчета, локально-сопутствующей в этой точке, а также х.и.-ротор х.и.-вектора угловой скорости вращения вещества относительно той же локально-сопутствующей системы. Так как сопутствующее пространство движется вместе с веществом, то эти величины совпадают с х.и.-тензорами и х.и.-инвариантом скоростей деформации сопутствующего пространства и, соответственно, с х.и.-ротором х.и.-вектора угловой скорости вращения сопутствующего пространства относительно системы отсчета, локально-сопутствующей веществу в данной точке. Но, в то же время, локально-сопутствующая система отсчета принадлежит к числу локально-стационарных. Поэтому мы можем отождествить указанные величины со следующими величинами D_{ik}, D_i^k, D^{ik}, D и $R^i(^*\omega) = {}^*\nabla_j \left(h^{ij} D - D^{ij}\right)$, соответственно*.

Таким образом, величины D_{ik}, D_i^k, D^{ik}, D и $R^i(^*\omega)$, характеризуя скорость деформации и относительное вращение элементов сопутствующего пространства, тем самым характеризуют скорость деформации и относительное вращение элемента вещества.

В частности, х.и.-инвариант скорости относительного расширения элементарного объема пространства D дает в каждой точке скорость относительного расширения элемента вещества.

Мы можем сказать также, что в сопутствующей системе отсчета относительные движения элементов вещества характеризуются функциональной зависимостью величин h_{ik} (следовательно, и величин h^{ik} и h) от временно́й координаты.

В частности, изменения объема элемента вещества со временем t (по мере изменения временной координаты) описываются функцией, дающей зависимость $\sqrt{h}$ от t, см. (12.7) из §2.12.

---

*В своем месте мы отмечали множественность систем, локально-стационарных в любой данной точке. Мы видели также, что произвол в выборе локально-стационарных систем отсчета не влияет на выделенные нами соотношения, содержащие величины D_{ik}, D_i^k, D^{ik}, D и $R^i(^*\omega)$. Теперь мы, как видно из содержания данного абзаца, специализируем выбор локально-стационарных систем, беря в качестве таковых локально-сопутствующие системы отсчета.

§4.5 Космологические уравнения тяготения

Обратимся к системе уравнений тяготения. В случае (3.2) ее можно рассматривать как систему 10 уравнений относительно 10 величин: 1-й величины ρ, 3-х величин u^k и 6-ти из 10-ти независимых величин $g_{\mu\nu}$ (остальные 4 компоненты $g_{\mu\nu}$ мы можем задать соответствующим выбором координатной системы, см., например, [64], стр. 237). Но можно также рассматривать эти уравнения, как определяющие ρ и 9 из величин $g_{\mu\nu}$ при заданных u^k и одной из величин $g_{\mu\nu}$. Введение сопутствующей системы отсчета предполагает именно такой подход к уравнениям тяготения. Поэтому систему уравнений тяготения для сопутствующей системы отсчета можно рассматривать, например, как систему, определяющую величину ρ, 3 величины v_i и 6 величин h_{ik} (задавая величину w определенным выбором временнóй координаты).

Уравнения тяготения для сопутствующей системы отсчета можно написать в виде (24.11–24.13) из §3.24: первая х.и.-форма

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + \Lambda c^2 = \delta + \varphi + \frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 \\ &\theta^k = 0 \\ &2\alpha_i^k + \sigma_i^k + \varphi_i^k + \omega_i^k = \frac{\kappa}{2}\,h_i^k \rho c^2 + \Lambda c^2 h_i^k \end{aligned}\right\}, \tag{5.1}$$

вторая х.и.-тензорная форма

$$\left.\begin{aligned} &3\alpha + \sigma = \delta + 2\kappa\rho c^2 + 2\Lambda c^2 \\ &\theta^k = 0 \\ &\left(2\alpha_i^k - \frac{1}{2}\,h_i^k\alpha\right) + \left(\sigma_i^k - \frac{1}{2}\,h_i^k\sigma\right) + \left(\varphi_i^k - h_i^k\varphi\right) + \\ &+ \omega_i^k + \Lambda c^2 h_i^k = \frac{1}{2}\,h_i^k\delta \end{aligned}\right\}, \tag{5.2}$$

скалярное уравнение тяготения

$$\alpha + \delta + \sigma + 2\varphi = \kappa\rho c^2 + 4\Lambda c^2, \tag{5.3}$$

причем выражения (24.3–24.8) из §3.24 сохраняют свой вид, а выражения (24.1), (24.2) и (24.9), вследствие (4.5) и (4.6) из предыдущего §4.4, упрощаются, так что

$$\varphi_i^k = \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t} + \frac{1}{2}\left({}^*\widetilde{\nabla}_i\, F^k + {}^*\widetilde{\nabla}^k F_i\right), \tag{5.4}$$

$$\varphi = \frac{{}^*\partial D}{\partial t} + {}^*\widetilde{\nabla}_j F^j\,, \tag{5.5}$$

$$\sigma_i^k = -c^2 S_i^k + D D_i^k\,, \tag{5.6}$$

$$\sigma = -c^2 S + D^2, \tag{5.7}$$

$$\omega_i^k = D_i^l A_{l\cdot}^{\cdot k} + D_l^k A_{\cdot i}^{l\cdot} = \varepsilon^{jlk} D_{il}\Omega_j + \varepsilon_{jli} D^{lk}\Omega^j, \tag{5.8}$$

$$\alpha_i^k = -A_{i\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot k} = -\Omega_i\Omega^k + h_i^k\Omega_j\Omega^j, \tag{5.9}$$

$$\alpha = -A_{j\cdot}^{\cdot l} A_{l\cdot}^{\cdot j} = 2\Omega_j\Omega^j, \tag{5.10}$$

$$\delta = D_j^l D_l^j\,, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \theta^k &= {}^*\nabla_j\big(h^{kj}D - D^{kj}\big) - {}^*\nabla_j A^{kj} + \frac{2}{c^2}A^{kj}F_j = \\ &= R^k({}^*\omega) - {}^*r^k(\Omega) + \frac{2}{c^2}\,\varepsilon^{jlk}\Omega_j F_l\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Очевидно также, что (24.15) и (24.17–24.19) из §3.24 сохраняют силу, а в (24.14) знак равенства исчезает, так что

$$\rho > 0\,, \tag{5.13}$$

$$\alpha \geqslant 0\,, \tag{5.14}$$

$$\delta \geqslant 0\,, \tag{5.15}$$

$$\varphi \gtreqless 0\,, \tag{5.16}$$

$$\sigma \gtreqless 0\,. \tag{5.17}$$

Мы видим, что уравнения (5.1–5.3), вследствие (5.4–5.12), устанавливают связь между:

- величинами, характеризующими состояние материи;
- величинами, характеризующими поведение сопутствующего пространства;
- величинами, характеризующими геометрические свойства пространства.

То есть, уравнения (5.1–5.3) являются *космологическими уравнениями*. Согласно §1.17, они представляют собою *космологические уравнения тяготения*. Если пользоваться ими для нахождения ρ, v_i и h_{ik}, их нужно предварительно дополнить 18-ю уравнениями, определяющими D_{ik} (6 величин), Z_{ik} (6 величин), Ω_i (3 величины) и F_i (3 величины) в зависимости от w, v_i и h_{ik} и рассматривать систему 28 уравнений относительно такого же числа неизвестных функций.

§ 4.6 Космологические уравнения энергии

Уравнения закона энергии, см. (12.9) и (12.11) из §3.12, вследствие (4.3) и (4.6) принимают вид, соответственно,

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D = 0\,, \tag{6.1}$$

$$F^k\rho = 0\,. \tag{6.2}$$

Из (6.2), вследствие (5.13), следует, что

$$F_i = 0\,. \tag{6.3}$$

Согласно §1.17, уравнения (6.1) и (6.2) или (6.3) суть *космологические уравнения энергии*.

Как известно, уравнения закона энергии суть следствия уравнений тяготения в том смысле, что они вытекают, в силу этих уравнений, из 4 тождественных соотношений между их левыми частями. Поэтому уравнениями энергии можно пользоваться вместо упомянутых 4 соотношений.

§ 4.7 Основная форма космологических уравнений

Вследствие третьего из уравнений (5.1) получаем

$$2\alpha + \sigma + \varphi = \frac{3\kappa}{2}\,\rho c^2 + 3\Lambda c^2 \tag{7.1}$$

и далее

$$2\left(\alpha_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\alpha\right) + \left(\sigma_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\sigma\right) + \left(\varphi_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\varphi\right) + \omega_i^k = 0\,. \tag{7.2}$$

Складывая почленно первое из уравнений (5.1) и уравнение (7.1), получаем первое из уравнений (5.2). Это последнее, в соединении в первым из уравнений (5.1), дает (7.1), которое, в соединении с (7.2), приводит к третьему уравнению из (5.1). Поэтому система

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha + \Lambda c^2 = \delta + \varphi + \frac{\kappa}{2}\,\rho c^2\\
&3\alpha + \sigma = \delta + 2\kappa\rho c^2 + 2\Lambda c^2\\
&2\left(\alpha_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\alpha\right) + \left(\sigma_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\sigma\right) + \left(\varphi_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\varphi\right) + \omega_i^k = 0\\
&\theta^k = 0
\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

равносильна системе (5.1), а следовательно — и системе (5.2). Как легко видеть, третье из уравнений (7.3), вследствие свойств симметрии и тождественного обращения в нуль при сокращении, дает всего лишь 5 независимых соотношений.

Так как

$$\varepsilon_{j}^{\cdot lk} h_{il} + \varepsilon_{jli} h^{lk} = \varepsilon_{ji\cdot}^{\cdot\cdot k} + \varepsilon_{j\cdot i}^{\cdot k\cdot} = h^{kq}\left(\varepsilon_{jiq} + \varepsilon_{jqi}\right) = 0\,, \tag{7.4}$$

то (5.8) можно записать в виде

$$\omega_{i}^{k} = \varepsilon^{jlk}\,\Omega_j\left(D_{il} - \frac{1}{3}\,h_{il}D\right) + \varepsilon_{jli}\,\Omega^j\left(D^{lk} - \frac{1}{3}\,h^{lk}D\right). \tag{7.5}$$

Пользуясь (21.33) и (21.35) из §2.21, можно вместо (5.6) и (5.7) написать, соответственно,

$$\sigma_i^k = -c^2\left(Z_i^k - h_i^k Z\right) + DD_i^k\,, \tag{7.6}$$

$$\sigma = 2c^2 Z + D^2. \tag{7.7}$$

Введя обозначение

$$\Pi = D_j^l D_l^j - \frac{1}{3}\,D^2, \tag{7.8}$$

можно (5.11) переписать в виде

$$\delta = \frac{1}{3}\,D^2 + \Pi\,. \tag{7.9}$$

Воспользуемся уравнением (6.3). Тогда равенства (5.4), (5.5) и (5.12) упростятся

$$\varphi_i^k = \frac{{}^*\partial D_i^k}{\partial t}\,, \tag{7.10}$$

$$\varphi = \frac{{}^*\partial D}{\partial t}\,, \tag{7.11}$$

$$\theta^k = {}^*\nabla_j\left(h^{kj}D - D^{kj}\right) - {}^*\nabla_j A^{kj} = R^k({}^*\omega) - {}^*r^k(\Omega)\,. \tag{7.12}$$

Перепишем вместе уравнения (6.1), (6.3) и, пользуясь равенствами (5.9), (5.10), (7.5–7.7), (7.9–7.12), систему (7.3)

$$\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t} + \rho D = 0\,, \tag{7.13}$$

$$F_i = 0\,, \tag{7.14}$$

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + \frac{1}{3}\,D^2 + \Pi - 2\Omega_j\Omega^j = -\frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{7.15}$$

$$\frac{1}{3}D^2 - \frac{1}{2}\Pi + 3\Omega_j\Omega^j + c^2 Z = \kappa\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{7.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{{}^*\partial}{\partial t}\Big(D_i^k - \frac{1}{3}h_i^k D\Big) + D\Big(D_i^k - \frac{1}{3}h_i^k D\Big) + \\ + \varepsilon^{jlk}\Omega_j\Big(D_{il} - \frac{1}{3}h_{il}D\Big) + \varepsilon_{jli}\Omega^j\Big(D^{lk} - \frac{1}{3}h^{lk}D\Big) = \\ = 2\Big(\Omega_i\Omega^k - \frac{1}{3}h_i^k\Omega_j\Omega^j\Big) + c^2\Big(Z_i^k - \frac{1}{3}h_i^k Z\Big),\end{gathered} \tag{7.17}$$

$$R^k\big({}^*\omega\big) = {}^*r^k\big(\Omega\big), \tag{7.18}$$

где последнее равенство (7.18) можно также записать иначе

$$^*\nabla_j\big(h^{kj}D - D^{kj}\big) = {}^*\nabla_j A^{kj}. \tag{7.19}$$

Совокупность уравнений (7.13–7.17) и (7.18) мы примем как *основную х.и.-форму космологических уравнений*.

§4.8 Свободное падение и преимущественная координата времени

Равенство (7.14) означает, что вещество свободно падает в поле гравитационно-инерциальных сил. Это и понятно, т. к. при (4.5) и (4.6) другие силы отсутствуют. Из равенства (7.14) вытекает ряд следствий*, из которых мы рассматриваем сейчас одно: возможность выбора преимущественной координаты времени в любой точке пространства.

Пусть условие (7.14) выполняется всюду в некоторой четырехмерной области Q. Введем такую координату времени, чтобы всюду в этой области

$$\mathrm{w} = 0\,. \tag{8.1}$$

Тогда, вследствие (7.14),

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0\,. \tag{8.2}$$

Из (8.1) и (8.2) следует, что в области Q

$$Y = 0\,, \tag{8.3}$$

$$\Phi_i = 0\,, \tag{8.4}$$

*Этим равенством, под номером (6.3), мы пользовались уже в §4.7.

см. (23.18) и (23.28) из §2.23. Таким образом, значения 5-ти величин ($\widetilde{w}$, Y, Φ_i) из 14-ти локально-независимых величин, рассмотренных в §2.20, определены и притом по всей области Q. Но значениями остальных 9-ти величин (v_i и X_{ik}) в любой точке области Q мы можем распорядиться. Положим, что в пространственной точке A при $t=t_0$

$$v_i = 0\,, \tag{8.5}$$

$$X_{ik} = 0\,. \tag{8.6}$$

Так как во всей области Q имеет место (8.2), то (8.5) сохраняется в точке A для всех значений t в упомянутой области. Далее, вследствие (8.5) выражение (8.6) может быть записано в виде (см. (23.31) из §2.23)

$$\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = 0\,. \tag{8.7}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_q}{\partial x^p}\right) = \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial v_q}{\partial t}\right), \tag{8.8}$$

а (8.2) выполняется во всей области Q, то всюду в этой области

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) = 0\,. \tag{8.9}$$

Следовательно, (8.7) сохраняется в точке A для всех значений t в области Q. Очевидно, и (8.6) сохраняется в точке A для всех значений t в области Q.

Таким образом, при выполнении в области Q условий (7.14), в любой точке A этой области оказывается возможным выбрать такую координату времени, что для всех значений ее в этой области в данной точке A имеют место условия (8.1) и (8.3–8.6). Согласно §2.22, пространственное сечение, отвечающее этому выбору временно́й координаты, является одним из максимально-ортогональных (в данной точке A для всех значений t в данной области Q), так что

$$K_{kjin} = S_{kjin} \tag{8.10}$$

и, следовательно,

$$H_{ik} = S_{ik}\,, \qquad C_{ik} = Z_{ik}\,. \tag{8.11}$$

Если всюду в области Q, помимо условия (8.1), выполняется также условие

$$A_{ik} = 0\,, \tag{8.12}$$

то, согласно §2.7, можно ввести “космическое время” (см. §1.2), т. е. такую координату времени, чтобы всюду в Q выполнялись равенства (8.1) и (8.5), и, следовательно, также (8.3), (8.4), (8.6), (8.10) и (8.11).

§4.9 Характеристики анизотропии

Теперь мы займемся вопросом об анизотропии элементов объема в механическом и геометрическом отношениях. Прежде всего рассмотрим вопрос о математических характеристиках анизотропии механического или геометрического фактора, характеризуемого некоторым симметричным суб-тензором 2-го ранга B_{ik}. Если этот фактор обладает пространственной изотропией в некоторой мировой точке, то в последней, мы имеем: в локально-декартовых пространственных координатах

$$B_{ik} = B_i^k = B^{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{3}\,B\,, & i = k \\ 0\,, & i \neq k \end{array} \right\}, \tag{9.1}$$

где обозначено

$$B = B_j^j\,. \tag{9.2}$$

В произвольных координатах мы имеем

$$B_{ik} = \frac{1}{3}\,h_{ik}B\,, \qquad B_i^k = \frac{1}{3}\,h_i^k B\,, \qquad B^{ik} = \frac{1}{3}\,h^{ik}B\,. \tag{9.3}$$

Введем суб-инвариант

$$\Gamma = \Big(B_j^l - \frac{1}{3}\,h_j^l B\Big)\Big(B_l^j - \frac{1}{3}\,h_l^j B\Big) = B_j^l B_l^j - \frac{1}{3}\,B^2\,. \tag{9.4}$$

В локально-декартовых координатах он, очевидно, равен сумме квадратов величин $B_l^j - \frac{1}{3}\,h_l^j B$ и, следовательно, равен нулю при выполнении условий изотропии (9.3) и положителен при их невыполнении. Таким образом, суб-инвариант Γ может служить *мерой анизотропии*. Из сказанного следует, в частности, что х.и.-инвариант $\Pi = D_j^l D_l^j - \frac{1}{3}\,D^2$ (7.8) неотрицателен и характеризует *анизотропию деформации* элемента объема (сравн., например, [58], стр. 612).

Рассмотрим случай, когда

$$B_{ik} = \beta_i\,\beta_k\,, \tag{9.5}$$

где β_j некоторый суб-вектор. Тогда

$$B = \beta_j \beta^j, \qquad \Gamma = \frac{2}{3}\left(\beta_j \beta^j\right)^2 = \frac{2}{3}B^2 \tag{9.6}$$

и, следовательно (что, впрочем, очевидно), изотропия имеет место при равенстве нулю суб-вектора β_j и только в этом случае. Отсюда следует, в частности, что х.и.-тензор $\Omega_i\Omega^k - \frac{1}{3}h_i^k\Omega_j\Omega^j$ обращается в нуль только вместе с х.и.-вектором Ω_j.

Можно сказать, что х.и.-инварианты $\Pi = D_j^l D_l^j - \frac{1}{3}D^2$ и $\Omega_j\Omega^j$, х.и.-вектор Ω_i, и х.и.-тензоры $D_i^k - \frac{1}{3}h_i^k D$ и $\Omega_i\Omega^k - \frac{1}{3}h_i^k\Omega_j\Omega^j$ характеризуют *механическую анизотропию* элемента объема (кинематическую и динамическую), а х.и.-тензор $Z_i^k - \frac{1}{3}h_i^k Z$ характеризует его *геометрическую анизотропию*. Займемся прежде всего х.и.-вектором Ω_i.

§ 4.10 Абсолютное вращение

В §3.9 мы видели, что Ω_i в релятивистских уравнениях динамики играет роль, аналогичную роли мгновенной угловой скорости абсолютного вращения системы отсчета в классических уравнениях динамики. Поэтому мы можем назвать х.и.-векторы Ω_i и Ω^k *х.и.-векторами угловой скорости динамического абсолютного вращения*. Это, очевидно, та угловая скорость, которая — если рассматривать не Метагалактику, а поведение тел у поверхности Земли — может быть найдена из механических опытов, например, при помощи маятника Фуко. Она, как известно (см., например, [7], стр. 183), отличается от угловой скорости кинематического "абсолютного" вращения на величину, являющуюся, вообще говоря, функцией точки. Очевидно, угловую скорость кинематического абсолютного вращения можно, с точностью до х.и.-вектора с исчезающей х.и.-ковариантной производной, характеризовать х.и.-вектором $^*\omega$, входящим в левую часть уравнения $R^k(^*\omega) = {}^*r^k(\Omega)$ (7.18). Поэтому можно сказать, что уравнение (7.18) связывает динамическое абсолютное вращение с кинематическим абсолютным вращением*. Оно утвер-

*Геометрический смысл уравнения (7.18), которое связывает динамическое абсолютное вращение с кинематическим абсолютным вращением, лучше видно из его "развернутой" записи $^*\nabla_j\left(h^{kj}D - D^{kj}\right) = {}^*\nabla_j A^{kj}$ (7.19), которая получается после подстановки $R^i(^*\omega) = {}^*\nabla_j(h^{ij}D - D^{ij})$ и $^*r^k(\Omega) = {}^*\nabla_j A^{kj}$ в (7.18). Здесь и в других случаях Зельманов использует $R^k(^*\omega)$ как альтернативное обозначение х.и.-ротора $^*r^k(^*\omega)$ от х.и.-вектора $^*\omega$, см. (17.15) в §2.17. — Прим. ред., Д. Р.

ждает, в частности, что разность х.и.-векторов угловых скоростей динамического и кинематического абсолютных вращений есть безвихревой х.и.-вектор.

Займемся теперь угловой скоростью динамического абсолютного вращения. Воспользуемся условием $F_i = 0$ (7.14). Во всей четырехмерной области, где оно выполняется, также выполняются два следующих условия.

1. Имеет место равенство
$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right). \tag{10.1}$$

2. Можно выбрать координату времени так, чтобы всюду в упомянутой области имело место равенство (8.2). Вследствие (8.2), (8.8) и (10.1)
$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial t} = 0 \tag{10.2}$$
и, следовательно,
$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} = 0\,. \tag{10.3}$$

В силу х.и.-тензорного характера, последнее равенство, и, следовательно, ко-тензорное равенство (10.2), равносильное ему, выполняется при любом выборе координаты времени.

Вследствие (9.1) из §3.9
$$\Omega^i = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk} A_{jk}\,. \tag{10.4}$$

Так как
$$\varepsilon^{ijk} = 0\,, \tag{10.5}$$
или, иначе,
$$\varepsilon^{ijk} = \pm\frac{1}{\sqrt{h}}\,. \tag{10.6}$$
то, соответственно,
$$\frac{{}^*\partial\varepsilon^{ijk}}{\partial t} = 0\,, \tag{10.7}$$
или, иначе,
$$\frac{{}^*\partial\varepsilon^{ijk}}{\partial t} = \mp\frac{1}{h}\frac{{}^*\partial\sqrt{h}}{\partial t} = -D\left(\pm\frac{1}{\sqrt{h}}\right). \tag{10.8}$$

Следовательно, вообще
$$\frac{{}^*\partial\varepsilon^{ijk}}{\partial t} = -\varepsilon^{ijk} D\,. \tag{10.9}$$

Поэтому из (10.4), вследствие (10.3), получаем

$$\frac{{}^*\partial\Omega^i}{\partial t} = -\Omega^i D\,. \tag{10.10}$$

Вследствие (10.10)

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^i\right) = \Omega^i\frac{{}^*\partial\sqrt{h}}{\partial t} + \sqrt{h}\,\frac{{}^*\partial\Omega^i}{\partial t} = \sqrt{h}\,\Omega^i D - \sqrt{h}\,\Omega^i D\,. \tag{10.11}$$

Таким образом,

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\Omega^i\right) = 0\,, \tag{10.12}$$

а также, вследствие (13.2) из §3.13,

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(V\Omega^i\right) = 0\,, \tag{10.13}$$

где V объем элемента сопутствующего пространства. Из (10.13) следует, что в каждом элементе сопутствующего пространства х.и.-вектор Ω^i сохраняет свое направление и изменяет отличную от нуля компоненту обратно пропорционально объему элемента.

Вследствие (10.12) мы можем написать

$$\Omega^i = \frac{\xi^i}{\sqrt{h}}\,, \qquad \xi^i \not\parallel t\,. \tag{10.14}$$

Для квадрата х.и.-вектора Ω^i имеем, вследствие (10.10),

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(h_{jl}\,\Omega^j\Omega^l\right) = 2\left(D_{jl}\,\Omega^j\Omega^l - Dh_{jl}\,\Omega^j\Omega^l\right). \tag{10.15}$$

Выберем координатные оси в данной точке так, чтобы в некоторый момент времени

$$\Omega^2 = \Omega^3 = 0\,. \tag{10.16}$$

Вследствие (10.10) это будет иметь место и во все моменты времени. Следовательно, в данной точке

$$D_{jl}\,\Omega^j\Omega^l = h_{11}\left(\Omega^1\right)^2, \tag{10.17}$$

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[h_{11}\left(\Omega^1\right)^2\right] = 2\left[D_{11}\left(\Omega^1\right)^2 - Dh_{11}\left(\Omega^1\right)^2\right] = 2\left(\frac{D_{11}}{h_{11}} - D\right)h_{11}\left(\Omega^1\right)^2. \tag{10.18}$$

Направим теперь оси x^2 и x^3 так, чтобы в рассматриваемой точке в интересующий нас момент времени они были ортогональны к оси x^1. Тогда для этого момента времени

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}, \tag{10.19}$$

и, следовательно,

$$D_{11} = \left(h_{11}\right)^2 D^{11}, \tag{10.20}$$

$$h_{11} = \frac{1}{h^{11}}\,, \tag{10.21}$$

так что

$$\frac{D_{11}}{h_{11}} = \frac{D^{11}}{h^{11}}\,. \tag{10.22}$$

Мы можем (10.18) переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{h_{11}\left(\Omega^1\right)^2}}\frac{{}^*\partial\sqrt{h_{11}\left(\Omega^1\right)^2}}{\partial t} = -\left(D - \frac{D^{11}}{h^{11}}\right) \tag{10.23}$$

и, на основании §2.12, прочесть его так:

> В каждой точке во всякий момент времени скорость относительного изменения величины х.и.-вектора угловой скорости Ω^k (или Ω_i) абсолютного динамического вращения равна по величине и противоположна по знаку скорости относительного изменения площади элемента поверхности, ортогонального к направлению данного вектора Ω^k.

Полученное равенство (10.23) является некоторым аналогом теоремы классической механики о сохранении напряженности вихря во времени (см., например, [58], стр. 187).

§4.11 Механическая и геометрическая анизотропия

В предыдущем §4.10 мы видели, что космологическое уравнение (7.14) позволяет выделить для рассмотрения один из факторов анизотропии — динамическое абсолютное вращение. Но невозможно разделить *анизотропию деформации* и *анизотропию кривизны*. Это следует, в частности, из невозможности разделить величины S_i^k и DD_i^k, см. §3.24. Связь обеих друг с другом и с динамическим абсолютным вращением дает космологическое уравнение (7.17). Рассмотрим некоторые его следствия.

A. Пусть в некоторый момент времени в данной точке

$$D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D = 0\,, \tag{11.1}$$

тогда, вообще говоря,

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\Big(D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D\Big) \neq 0\,. \tag{11.2}$$

Таким образом, в отличие от динамического абсолютного вращения, которое не может исчезнуть или возникнуть, анизотропия деформации, при наличии абсолютного вращения или анизотропии кривизны (или и той и другой) может на мгновение исчезнуть и вновь возникнуть.

B. Если в данной точке

$$\Omega_j = 0\,, \tag{11.3}$$

$$Z_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k Z \equiv 0\,, \tag{11.4}$$

то в этой точке

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\Big(D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D\Big) + D\Big(D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D\Big) \equiv 0\,, \tag{11.5}$$

или, вследствие (12.9) из §2.12,

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[V\Big(D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D\Big)\right] \equiv 0\,. \tag{11.6}$$

Таким образом, при отсутствии динамического абсолютного вращения и сохранении анизотропии кривизны, анизотропия деформации ослабевает с расширением объема элемента и усиливается с его сжатием.

C. Если в данной точке имеет место условие (11.3) и

$$D_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k D \equiv 0\,, \tag{11.7}$$

то в ней выполняется и (11.4). Таким образом, при отсутствии динамического абсолютного вращения и сохранении изотропии деформации имеет место также изотропия кривизны: из механической изотропии вытекает изотропия геометрическая.

D. Если в данной точке имеют место условия (11.4) и (11.7), то в ней выполняется и (11.3). Таким образом, если деформация и кривизна сохраняют свойство изотропии, то динамическое абсолютное вращение отсутствует.

§ 4.12 Изотропия и однородность

Предположим, что всюду в некоторой четырехмерной области выполняются условия (11.3), (11.4) и (11.7). Тогда

$$\Pi \equiv 0\,, \tag{12.1}$$

$$A^{kj} \equiv 0\,, \qquad {}^*\nabla_j A^{kj} \equiv 0 \tag{12.2}$$

и космологические уравнения (7.15), (7.16) и (7.19) принимают, соответственно, вид

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + \frac{1}{3}\,D^2 = -\frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{12.3}$$

$$\frac{1}{3}\,D^2 + c^2 Z = \kappa\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{12.4}$$

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial x^i} = 0\,, \tag{12.5}$$

а космологическое уравнение (7.17) обращается в тождество. Вследствие первого из равенств (12.2), можно ввести такие координаты

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &\tilde{x}^i = x^i\,, \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned}\right\}, \tag{12.6}$$

что всюду в упомянутой четырехмерной области

$$\tilde{v}_i \equiv 0\,, \tag{12.7}$$

следовательно, также

$$\widetilde{\Sigma}_{jk} \equiv 0\,. \tag{12.8}$$

В таком случае, согласно §2.22

$$\widetilde{C}_i^k \equiv Z_i^k \tag{12.9}$$

и, в силу (11.4)

$$\widetilde{C}_i^k - \frac{1}{3}\,\tilde{h}_i^k\widetilde{C} \equiv 0\,. \tag{12.10}$$

Применяя теорему Шура, находим, что

$$\frac{\partial\widetilde{C}}{\partial\tilde{x}^i} \equiv 0 \tag{12.11}$$

и, переходя к произвольным координатам, вследствие (12.9), всюду в упомянутой области имеем

$$\frac{{}^*\partial Z}{\partial x^i} = 0\,. \tag{12.12}$$

Из (12.4), в силу (12.5) и (12.2), следует, что также

$$\frac{{}^*\partial \rho}{\partial x^i} = 0\,. \tag{12.13}$$

Таким образом, мы получили уравнения для однородной модели. Мы можем привести их к виду (17.1) и (17.2) из §1.17, пользуясь космической координатой времени, которую можно ввести вследствие (7.14) и (11.3). Тогда

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{12.14}$$

и, следовательно, см. (7.13),

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{3}\,D^2 = -\frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{12.15}$$

$$\frac{1}{3}\,D^2 + c^2 C = \kappa \rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{12.16}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x^i} = 0\,, \qquad \frac{\partial C}{\partial x^i} = 0\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = 0\,, \tag{12.7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + D\rho = 0\,. \tag{12.18}$$

Итак, при условиях (4.4–4.6), связанных с предположениями о характере материи, изотропия в конечной четырехмерной области влечет за собой однородность в этой области.

§4.13 Статичность в конечной области

Пусть в некоторой конечной области пространства вещество не деформируется

$$D_{ik} \equiv 0\,, \tag{13.1}$$

тогда очевидно, что

$$h_{ik} \not\parallel t\,. \tag{13.2}$$

Вследствие (7.13) и (10.10) находим, соответственно,

$$\rho \not\parallel t\,, \qquad \Omega^k \not\parallel t\,. \tag{13.3}$$

Мы имеем дело, таким образом, со статическим случаем. Космологические уравнения тяготения в этом случае могут быть записаны в виде

$$\frac{\kappa}{2}\,\rho c^2 = 2\Omega_j\Omega^j + \Lambda c^2, \tag{13.4}$$

$$3\Omega_j\Omega^j + c^2 Z = \kappa\rho c^2 + \Lambda c^2, \tag{13.5}$$

$$2\Big(\Omega_i\Omega^k - \frac{1}{3}\,h_i^k\Omega_j\Omega^j\Big) + \Big(Z_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k Z\Big) = 0\,, \tag{13.6}$$

$$^*r^k\big(\Omega\big) = 0\,. \tag{13.7}$$

Пусть всюду в рассматриваемой области выполняется также условие

$$\Omega^k = 0\,. \tag{13.8}$$

Тогда уравнение (13.7) обращается в тождество, а уравнения (13.4), (13.5) и (13.6) принимают, соответственно, вид

$$\frac{\kappa}{2}\,\rho = \Lambda\,, \tag{13.9}$$

$$Z = \kappa\rho + \Lambda\,, \tag{13.10}$$

$$Z_i^k - \frac{1}{3}\,h_i^k Z = 0\,. \tag{13.11}$$

Вследствие (13.8) можно ввести такие координаты (12.6), чтобы выполнялось условие (12.7). Тогда также будут иметь место условия (12.8), (12.9) и, вследствие (13.11), также равенства (12.10–12.13), из коих последние два вытекают непосредственно из (13.9) и (13.10). Пользуясь космическим временем, мы можем в (13.10) и (13.11) выразить Z и Z_i^k через C и C_i^k. Сравнение с уравнениями (7.1) и (7.2) из §1.7 убеждает нас в том, что рассматриваемую область можно трактовать как принадлежащую модели Эйнштейна.

Таким образом, при условиях (4.4–4.6), связанных с предположениями о характере материи, и при условии отсутствия абсолютного динамического вращения (13.8) требование статичности приводит к модели Эйнштейна. Следовательно, если при (4.4–4.6) возможны непустые статические модели, отличные от эйнштейновской, то лишь при наличии динамического абсолютного вращения.

§ 4.14 Изменение средней кривизны пространства

Прежде, чем перейти к рассмотрению изменения во времени объема любого элемента, мы в данном §4.14 и в следующем §4.15 выведем некоторые следствия из космологических уравнений (7.13), (7.15) и (7.16). Исключая из двух последних космическую постоянную, мы можем написать

$$-\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+c^2Z-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j=\Pi-2\Omega_j\Omega^j+\frac{3\kappa}{2}\,\rho c^2. \tag{14.1}$$

Дифференцируя почленно (7.16), имеем

$$\frac{2}{3}\,D\frac{{}^*\partial D}{\partial t}+\frac{{}^*\partial}{\partial t}\Big(c^2Z-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j\Big)=\kappa c^2\frac{{}^*\partial\rho}{\partial t}\,. \tag{14.2}$$

В результате почленного умножения (14.1) на $\frac{2}{3}D$ и последующего сложения с (14.2), вследствие (7.13), получаем

$$\left(\frac{{}^*\partial}{\partial t}+\frac{2}{3}\,D\right)\Big(c^2Z-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j\Big)=\frac{2}{3}\,D\big(\Pi-2\Omega_j\Omega^j\big)\ . \tag{14.3}$$

Если в данной точке

$$\Pi-2\Omega_j\Omega^j\equiv 0\,, \tag{14.4}$$

то в ней, очевидно,

$$\left(\frac{{}^*\partial}{\partial t}+\frac{2}{3}\,D\right)\Big(c^2Z-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j\Big)=0\,, \tag{14.5}$$

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left[\sqrt[3]{h}\Big(c^2Z-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j\Big)\right]=0\,, \tag{14.6}$$

или, при пользовании преимущественной координатой времени (см. §4.8),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt[3]{h}\Big(c^2C-\frac{1}{2}\,\Pi+3\Omega_j\Omega^j\Big)\right]=0\,. \tag{14.7}$$

В случае, когда (14.4) является следствием равенств

$$\Pi\equiv 0\,,\qquad \Omega_j\Omega^j\equiv 0\,, \tag{14.8}$$

означающих изотропию в данной точке (см. §3.11), уравнения (14.6) и (14.7) превращаются, соответственно, в

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\big(\sqrt[3]{h}\,Z\big)=0\,, \tag{14.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt[3]{h}\, C\right) = 0\,. \tag{14.10}$$

Мы видим, таким образом, что равенства (14.5) и (14.6) суть обобщения равенств (17.4) и (17.6) из §1.17, и что для выполнения последних в любой данной точке достаточно наличия и сохранения изотропии в этой точке.

§4.15 Сохранение массы и энергии элемента

Из (7.13) вытекает, что

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t}\left(\sqrt{h}\,\rho\right) = 0 \tag{15.1}$$

и, вследствие (12.7) и (12.8) из §2.12,

$$\frac{{}^*\partial M}{\partial t} = 0\,, \tag{15.2}$$

где M масса элемента объема сопутствующего пространства, или, что то же, элемента вещества.

В силу сопутствующего характера пространства, см. (6.2) из §3.6, имеем

$$\frac{{}^*dM}{dt} = \frac{{}^*\partial M}{\partial t}\,, \tag{15.3}$$

так что

$$\frac{{}^*dM}{dt} = 0\,. \tag{15.4}$$

Так как для энергии того же элемента имеем

$$E = Mc^2, \tag{15.5}$$

то и

$$\frac{{}^*dE}{dt} = 0\,. \tag{15.6}$$

Вместо равенства (7.13), являющегося частным случаем (12.9) из §3.12, мы можем взять равенство

$$\left(\frac{{}^*dE}{dt}\right)_{\text{fix}} = 0\,. \tag{15.7}$$

являющееся соответствующим частным случаем равенства (13.18) из §3.13, следующего из (12.9) той же Главы 3. Так как теперь рассмотрение ведется в сопутствующем пространстве, то мы можем отбросить индекс “fix” и написать (15.6), а в следствие (15.5) — написать и (15.4).

Из (15.4) и (15.6) следует, что, при любом выборе координаты времени

$$\frac{dM}{dt} = 0\,, \tag{15.8}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0\,, \tag{15.9}$$

т. е. масса и энергия элемента вещества остаются неизменными.

Для плотности в данной точке мы можем, вследствие (13.2) и (13.3) из §3.13, написать

$$\rho = \frac{\mu}{\sqrt{h}}\,, \qquad \mu \not\parallel t\,. \tag{15.10}$$

§4.16 Признаки экстремумов объема

Из равенства (12.7) §2.12 явствует, что величина элемента пространства отличается от $\sqrt{h}$ множителем, не зависящим от временно́й координаты. Поэтому, желая изучить поведение во времени величины объема элемента пространства, мы можем ограничиться рассмотрением изменения $\sqrt{h}$ в зависимости от t. Рассмотрим признаки экстремумов* объема любого данного элемента при его изменении с течением времени. Выбрав пространственные координаты так, чтобы в интересующей нас точке имело место условие

$$\sqrt{h} \not\equiv 0\,, \tag{16.1}$$

мы можем признаки экстремумов записать в следующем виде: необходимые признаки минимума

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} \geqslant 0\,, \tag{16.2}$$

достаточные признаки минимума

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} > 0\,, \tag{16.3}$$

необходимые признаки максимума

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} \leqslant 0\,, \tag{16.4}$$

достаточные признаки максимума

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} < 0\,. \tag{16.5}$$

---

*Здесь и везде, если не оговорено противное, имеются в виду регулярные экстремумы.

С одной стороны, мы имеем

$$\frac{{}^*\partial\sqrt{h}}{\partial t} = \frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t}\,,$$
$$\frac{{}^*\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} = \left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\right)^2\left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} + \frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2}\right). \tag{16.6}$$

С другой стороны

$$\frac{{}^*\partial\sqrt{h}}{\partial t} = \sqrt{h}\,D\,, \qquad \frac{{}^*\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} = \sqrt{h}\left(\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2\right), \tag{16.7}$$

поэтому

$$\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial t} = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\sqrt{h}\,D\,,$$
$$\frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} = \sqrt{h}\left[\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2\left(\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2\right) - D\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\right]. \tag{16.8}$$

Ограничиваясь рассмотрением экстремумов, имеющих место при конечном объеме данного элемента (следовательно, при конечной плотности), мы убеждаемся, что условия (16.2–16.5) равносильны, соответственно, условиям

$$D = 0\,, \qquad \frac{{}^*\partial D}{\partial t} \geqslant 0\,, \tag{16.9}$$

$$D = 0\,, \qquad \frac{{}^*\partial D}{\partial t} > 0\,, \tag{16.10}$$

$$D = 0\,, \qquad \frac{{}^*\partial D}{\partial t} \leqslant 0\,, \tag{16.11}$$

$$D = 0\,, \qquad \frac{{}^*\partial D}{\partial t} < 0\,. \tag{16.12}$$

Эти признаки, а следовательно — понятия минимума и максимума — не зависят от выбора временной координаты. Заметим, что признак неускоренного изменения объема (необходимый признак точки перегиба функции $\sqrt{h}$ от t) имеет вид

$$\frac{\partial^2\sqrt{h}}{\partial t^2} = 0 \tag{16.13}$$

или, иначе,

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 - \left(\frac{c^2}{c^2 - \mathrm{w}}\right)^2 D\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t} = 0\,, \tag{16.14}$$

следовательно, понятия ускоренного и неускоренного изменения тоже зависят от выбора координаты времени. Выбирая координату времени так, чтобы

$$\mathrm{w} = 0\,, \tag{16.15}$$

мы приведем (16.14) к совпадению с х.и.-условием

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D^2 = 0\,, \tag{16.16}$$

где, как и в случае экстремумов, предполагается конечность $\sqrt{h}$.

§4.17 Поведение объема элемента

Рассматривая космологические уравнения, мы видим, что функция $\sqrt{h}$ от t связана явной зависимостью лишь с ρ, Π, $\Omega_j\Omega^j$ и Z через уравнения (7.13), (7.15) и (7.16). В последующих параграфах мы постараемся выяснить некоторые ограничения, накладываемые этими уравнениями на изменения объема элемента при неизменности пространственных координат и при изменении произвольной координаты времени. При этом, однако, мы будем рассматривать поведение не величины $\sqrt{h}$, а величины*

$$\eta = \sqrt[6]{h}\,. \tag{17.1}$$

Обозначая звездочкой над буквой х.и.-дифференцирование по времени, мы можем написать

$$D = \frac{{}^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t} = 3\,\frac{\overset{*}{\eta}}{\eta}\,, \tag{17.2}$$

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} = 3\left(\frac{\overset{**}{\eta}}{\eta} - \frac{\overset{*}{\eta}{}^2}{\eta^2}\right). \tag{17.3}$$

Нетрудно установить, что при конечных $\sqrt{h}$, следовательно, при конечных η, при минимуме или максимуме одной из этих величин имеет место минимум или, соответственно, максимум и другой. Следовательно, условия (16.9–16.12) равносильны, соответственно

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \geqslant 0\,, \tag{17.4}$$

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} > 0\,, \tag{17.5}$$

*Сравн. с R в обычных уравнениях для однородной модели.

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \leqslant 0\,, \tag{17.6}$$

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} < 0\,. \tag{17.7}$$

Введем вспомогательные величины τ и ξ (последнюю мы условимся называть показателем кривизны) так, чтобы

$$\Pi - 2\Omega_j\Omega^j = \frac{3}{2}\frac{\tau}{\eta}\,, \tag{17.8}$$

$$c^2 Z - \frac{1}{2}\,\Pi + 3\Omega_j\Omega^j = 3\frac{\xi}{\eta^2}\,. \tag{17.9}$$

Тогда уравнения (7.13), (7.15) и (7.16) примут вид, соответственно*

$$\overset{*}{\rho} + 3\frac{\overset{*}{\eta}}{\eta}\,\rho = 0\,, \tag{17.10}$$

$$3\frac{\overset{**}{\eta}}{c^2\eta} + \frac{3}{2c^2}\frac{\tau}{\eta} = -\frac{\kappa}{2}\,\rho + \Lambda\,, \tag{17.11}$$

$$3\frac{\overset{*}{\eta}{}^2}{c^2\eta^2} + 3\frac{\xi}{c^2\eta^2} = \kappa\rho + \Lambda\,, \tag{17.12}$$

а уравнение (14.3), после почленного умножения на η^2,

$$\overset{*}{\xi} = \tau\,\overset{*}{\eta}\,. \tag{17.13}$$

Любое из четырех уравнений (17.10–17.13) может быть получено как следствие остальных трех. Так, уравнение (17.12), в силу уравнений (17.10) и (17.13), является первым интегралом уравнения (17.11). Поэтому мы можем, в частности, принять за исходные уравнения (17.10), (17.12) и (17.13). Вместо последнего мы можем взять также

$$\xi = \int \tau\dot{\eta}\,dt\,, \tag{17.14}$$

где точка на символом означает обычное дифференцирование по произвольной временно́й координате. Исключая показатель кривизны, мы приходим к двум космологическим уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\overset{*}{\rho} + 3\frac{\overset{*}{\eta}}{\eta}\,\rho = 0 \\ &3\frac{\overset{*}{\eta}{}^2}{c^2\eta^2} + \frac{3}{c^2\eta^2}\int \tau\dot{\eta}\,dt = \kappa\rho + \Lambda \end{aligned}\right\}, \tag{17.15}$$

*Сравн. с уравн. (4.2), (5.1) и (5.4) для однородной модели из §1.4 и §1.5.

аналогичным (6.1) из §1.6. Исключая далее ρ, мы получим уравнение относительно η

$$3\,\frac{\overset{*}{\eta}^{2}}{c^2\eta^2}+\frac{3}{c^2\eta^2}\int \tau\,\dot{\eta}\,dt=\frac{\kappa\mu}{\eta^3}+\Lambda\,, \tag{17.16}$$

см. (15.10), откуда следует

$$\rho=\frac{\mu}{\eta^3}\,,\qquad \mu\nparallel t\,. \tag{17.17}$$

Для решения этого уравнения необходимо знать τ как функцию t или η. Но можно, делая различные предположения относительно величин τ и ξ, получить некоторые сведения о поведении η. В последующих параграфах мы этим и займемся. При этом мы будем предполагать, что η не остается неизменной на конечном интервале изменения t. Разобьем весь интервал изменения t, на котором определена существенно-положительная функция

$$\eta=\eta\,(t)\,, \tag{17.18}$$

на наименьшее число интервалов, на каждом из которых эта функция монотонна. Тогда на одной границе каждого (конечного или бесконечного) интервала мы будем иметь наименьшее, для данного интервала, значение функции и на другой границе — наибольшее. Будем предполагать, что эта функция непрерывна всюду и что ее производная непрерывна при всяком значении функции, неравном нулю (иначе говоря, при всяком конечном значении плотности). Тогда наименьшие значения функции $\eta=\eta\,(t)$ могут быть 6-ти типов, которые мы обозначим как a, m, p, q, r, s. Наибольшие значения могут быть 3-х типов, обозначаемых нами как A, D, M. Под этими обозначениями мы подразумеваем следующее:

- a — отличное от нуля асимптотическое значение, к которому функция приближается сверху (при изменении координаты времени в положительном или отрицательном направлении);
- m — отличный от нуля минимум функции;
- p — равное нулю асимптотическое значение;
- q — равное нулю значение функции с равной нулю производной;
- r — равное нулю значение функции с неравной нулю конечной производной;

s — равное нулю значение функции с производной, обращающейся в бесконечность;

A — конечное асимптотическое значение, к которому функция приближается снизу (при изменении координаты времени в положительном или отрицательном направлении);

D — бесконечность;

M — конечный максимум функции.

Соответствующие состояния элемента объема мы будем именовать следующим образом. Состояния конечной плотности:

D — предельное состояние бесконечного разрежения;

M — состояние максимального объема;

A — состояние неизменного объема;

a — состояние неизменного объема;

m — состояние минимального объема.

Состояния бесконечной плотности (p, q, r и s):

p — асимптотическое состояние бесконечной плотности;

q — минимальное состояние бесконечной плотности;

r — коллаптическое состояние бесконечной плотности;

s — особое состояние бесконечной плотности.

Из перечисленных состояний в теории непустых однородных моделей (см. §1.7) встречаются все, кроме состояний p, q и r.

§4.18 Изменения показателя кривизны

Мы фиксируем пространственные координаты и рассматриваем x^i, τ и η как функции только временно́й координаты. Но временна́я координата на каждом интервале монотонного изменения η связана с этой функцией взаимно-однозначным соответствием. Поэтому на каждом из указанных интервалов удобно также рассматривать ξ и τ как функции η. Из (17.13) очевидно, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \tau \,, \qquad \xi = \int \tau d\eta \,. \tag{18.1}$$

Мы будем пользоваться уравнениями

$$\frac{3}{c^2}\overset{**}{\eta} + \frac{3}{2c^2}\tau = -\frac{\kappa}{2}\frac{\mu}{\eta^2} + \Lambda\eta \,, \tag{18.2}$$

$$\frac{3}{c^2}\overset{*}{\eta}{}^2 + \frac{3}{c^2}\xi = \kappa\frac{\mu}{\eta} + \Lambda\eta^2, \tag{18.3}$$

равносильными, для конечных значений η, уравнениям, получаемым в результате исключения ρ из (17.10–17.12). В силу (18.1) уравнение (18.3) есть первый интеграл уравнения (18.2), так что можно было бы ограничиться рассмотрением уравнения (18.3). Но некоторые следствия удобнее получать из (18.2), поэтому мы будем рассматривать также и это уравнение.

Из ограничений, наложенных в предыдущем §4.17 на функцию η и ее производную, в силу (17.12), (18.3) и непрерывности $\mathrm{w} < c^2$ следует, что при $\eta \neq 0$ величина ξ есть непрерывная функция от t. Следовательно, показатель кривизны есть непрерывная функция от η на любом конечном интервале изменения η, не содержащем нуля. Мы будем, как сказано, рассматривать интервалы, на которых η есть монотонная функция t. Рассмотрим различные случаи.

Случай I:

$$\tau \equiv 0\,. \tag{18.4}$$

Этот случай реализуется, в частности, при условиях

$$\Pi \equiv 0\,, \qquad \Omega_j\Omega^j \equiv 0\,, \tag{18.5}$$

т. е. при наличии и сохранении в данной точке механической и, следовательно, также и геометрической изотропии (см. §4.11). Из (18.4), вследствие (18.1), получаем

$$\xi = const \gtreqless 0\,. \tag{18.6}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\tau \equiv 0$, т. е. при условиях (18.5), возможны три следующих случая показателя кривизны:

(1) показатель кривизны положителен;

(2) показатель кривизны равен нулю;

(3) показатель кривизны отрицателен.

Эти случаи мы будем, для краткости, обозначать I_1, I_2, I_3. Мы можем ввести

$$R = R(t) \tag{18.7}$$

таким образом, чтобы в рассматриваемой точке

$$\frac{\overset{*}{\eta}}{\eta} = \frac{\overset{*}{R}}{R}\,, \qquad \frac{\xi}{c^2\eta^2} = \frac{k}{R^2}\,, \qquad k = 0; \pm 1\,. \tag{18.8}$$

Выбирая, кроме того, координаты времени так, чтобы в данной точке

$$\mathrm{w} \equiv 0\,, \tag{18.9}$$

мы приводим космологические уравнения (7.10–7.12) для данного элемента к виду, принятому в теории однородной Вселенной.

Случай II:

$$\tau \geqslant 0\,. \tag{18.10}$$

Этот случай реализуется, в частности, при условиях

$$\Pi \not\equiv 0\,, \qquad \Omega_j \Omega^j = 0\,, \tag{18.11}$$

т. е. при анизотропной (вообще говоря) деформации в отсутствии динамического абсолютного вращения в данной точке.

Из (18.10), вследствие (18.1), находим, что показатель кривизны с возрастанием η не убывает, а с убыванием η не возрастает. Очевидно возможны следующие случаи:

(1) показатель кривизны положителен при наименьшем значении η, следовательно показатель кривизны положителен и при всех значениях η на рассматриваемом интервале;

(2) показатель кривизны равен нулю на одной из границ или внутри интервала и, в частности, при переходе от меньших значений η к бо́льшим, показатель кривизны может стать из отрицательного положительным;

(3) показатель кривизны отрицателен при наибольшем значении η, следовательно, он также отрицателен и при всех значениях η на рассматриваемом интервале.

Для этих случаев мы примем обозначения II_1, II_2, II_3.

Случай III (общий случай):

$$\tau \gtreqless 0\,. \tag{18.12}$$

И здесь мы будем различать три различных случая, которые мы условимся обозначать III_1, III_2, III_3:

(1) показатель кривизны положителен на всем интервале η (с границами);

(2) показатель кривизны принимает значения, равные нулю, и, в частности, может менять знак;

(3) показатель кривизны остается отрицательным на всем интервале значений η, включая границы.

§4.19 Состояния бесконечной плотности

При приближении элемента объема к асимптотическому состоянию бесконечной плотности

$$\eta \to \eta_p = 0\,, \qquad \overset{*}{\eta} \to \overset{*}{\eta}_p = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \to \overset{**}{\eta}_p = 0\,. \tag{19.1}$$

При приближении элемента к минимальному состоянию бесконечной плотности

$$\eta \to \eta_q = 0\,, \qquad \overset{*}{\eta} \to \overset{*}{\eta}_q = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \to \overset{**}{\eta}_q \geqslant 0\,. \tag{19.2}$$

В обоих случаях из (18.2) и (18.3) следует, что

$$\tau \to -\infty\,, \tag{19.3}$$

$$\xi \to +\infty\,. \tag{19.4}$$

Нетрудно убедиться, что вследствие конечности и непрерывности показателя кривизны при $\eta \neq 0$, из условия (19.4) вытекает (19.3).

При приближении элемента к коллаптическому состоянию бесконечной плотности

$$\eta \to \eta_r = 0\,, \qquad \overset{*}{\eta} \to \overset{*}{\eta}_r \neq 0 \tag{19.5}$$

и из условия (18.3) мы получаем (19.4), а следовательно и также (19.3).

Из полученного следует, что в случаях I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_3 асимптотическое, минимальное и коллаптическое состояния бесконечной плотности невозможны, а в случаях III_1 и III_2 возможны при соответствующем поведении показателя кривизны. О возможности состояний и типов, не запрещаемых результатами данного исследования, см. также §4.25.

При приближении элемента объема к особому состоянию бесконечной плотности мы имеем

$$\eta \to 0\,, \qquad \overset{*}{\eta} \to \pm\infty\,. \tag{19.6}$$

Очевидно, при соответствующем порядке стремления величины $\overset{*}{\eta}$ к бесконечности особые состояния бесконечной плотности мыслимы при всех различаемых в §4.18 случаях (подробнее см. §4.25).

§4.20 Предельные состояния бесконечного разрежения

Пусть
$$\eta \to \infty\,. \tag{20.1}$$

Рассмотрим отдельно случаи положительной, равной нулю и отрицательной космической постоянной.

Если космическая постоянная положительна, то (18.2) и (18.3) при условии (20.1) дают, соответственно,

$$\left(\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\,\tau\right) \to +\infty\,, \tag{20.2}$$

$$\left(\overset{*}{\eta}{}^2 + \xi\right) \to +\infty\,. \tag{20.2}$$

Следовательно, при соответствующем характере изменения $\overset{*}{\eta}$ и $\overset{**}{\eta}$, элемент может стремиться к предельному состоянию бесконечного разрежения во всех девяти случаях, рассмотренных в §4.18 (см. также §4.25 и §4.26).

Если космическая постоянная равна нулю, то (18.2) и (18.3) при условии (20.1) дают

$$\left(\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\,\tau\right) \to 0\,, \tag{20.4}$$

$$\left(\overset{*}{\eta}{}^2 + \xi\right) \to 0\,. \tag{20.5}$$

Таким образом, показатель кривизны стремится к неположительному значению, тогда как производная показателя кривизны, в зависимости от характера изменения $\overset{**}{\eta}$, может вести себя различным образом. Следовательно, стремление элемента к предельному состоянию бесконечного разрежения невозможно в случаях I_1, II_1, III_1.

Если, наконец, космическая постоянная отрицательна, то из (18.2) и (18.3) при условии (20.1) имеем, соответственно,

$$\left(\overset{**}{\eta} + \frac{1}{2}\,\tau\right) \to -\infty\,, \tag{20.6}$$

$$\left(\overset{*}{\eta}{}^2 + \xi\right) \to -\infty\,. \tag{20.7}$$

Из (20.7) находим, что
$$\xi \to -\infty\,, \tag{20.8}$$

откуда следует, что τ не может оставаться неотрицательным. Следовательно, стремление элемента к предельному состоянию бесконечного разрежения невозможно в случаях I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1.

§ 4.21 Состояния неизменного и минимального объема

При приближении элемента к состоянию неизменного объема мы имеем

$$\overset{*}{\eta} \to 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \to 0\,, \tag{21.1}$$

так что, в пределе (18.2) и (18.3) дают

$$\frac{3}{2c^2}\,\tau = -\frac{\kappa\mu}{\eta^2} + \Lambda\eta\,, \tag{21.2}$$

$$\frac{3}{c^2}\,\xi = \frac{\kappa\mu}{\eta} + \Lambda\eta^2. \tag{21.3}$$

В состоянии минимального объема

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \geqslant 0 \tag{21.4}$$

и, следовательно, (18.2) переходит в

$$\frac{3}{2c^2}\,\tau \leqslant -\frac{\kappa\mu}{\eta^2} + \Lambda\eta\,, \tag{21.5}$$

а (18.3) переходит в (21.3). Следовательно, как при неизменном, так и при минимальном объеме

$$\frac{3}{2c^2}\,\tau < \Lambda\eta\,, \tag{21.6}$$

$$\frac{3}{c^2}\,\xi > \Lambda\eta^2. \tag{21.7}$$

Рассмотрим отдельно, как и в §4.20, случаи положительной, равной нулю и отрицательной космической постоянной.

При положительной космической постоянной из (21.7) следует, что прохождение через состояние минимального объема и асимптотическое приближение сверху к состоянию неизменного объема невозможны в случаях I_2, I_3, II_2, II_3, III_3, а асимптотическое приближение снизу невозможно в случаях I_2, I_3, II_3, III_3.

При космической постоянной, равной нулю, из соотношений (21.6) и (21.7) следует, что прохождение через состояние минимального объема и асимптотическое приближение (сверху или снизу) к состоянию неизменного объема невозможны в случаях I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_3.

Наконец, при отрицательной космической постоянной из (21.6) и (21.7) следует, что прохождение через состояние минимального объема и асимптотическое приближение к состоянию неизменного объема невозможно в случаях I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3.

§4.22 Состояния максимального объема

В состоянии максимального объема

$$\overset{*}{\eta} = 0\,, \qquad \overset{**}{\eta} \leqslant 0 \tag{22.1}$$

и из (18.2) и (18.3) следует

$$\frac{3}{2c^2}\,\tau \geqslant -\frac{\kappa\mu}{\eta^2} + \Lambda\eta\,, \tag{22.2}$$

$$\frac{3}{c^2}\,\xi = \frac{\kappa\mu}{\eta} + \Lambda\eta^2, \tag{22.3}$$

так что

$$\frac{3}{c^2}\,\tau \gtreqless \Lambda\eta\,, \tag{22.4}$$

$$\frac{3}{c^2}\,\xi > \Lambda\eta^2. \tag{22.5}$$

Из (22.5) следует, что при неотрицательной космической постоянной состояние максимального объема невозможно в случаях I_2, I_3, II_3, III_3. При отрицательной космической постоянной уравнения (18.2) и (18.3) допускают состояние максимального объема во всех девяти случаях, перечисленных в §4.18 (см. также §4.25 и §4.26).

§4.23 Изменения, ограниченные снизу и сверху

Обратимся к случаям, когда монотонное изменение η ограничено снизу и сверху. Снизу — ограничено конечным асимптотическим или конечным минимальным значением η_1. Сверху — ограничено асимптотическим или максимальным значением η_2. Тогда очевидно, что

$$\eta_1 < \eta_2\,, \tag{23.1}$$

$$\overset{*}{\eta}_1 = 0 = \overset{*}{\eta}_2\,, \tag{23.2}$$

$$\overset{**}{\eta}_1 \geqslant 0 \geqslant \overset{**}{\eta}_2\,. \tag{23.3}$$

При неотрицательной космической постоянной из (18.2) получаем

$$\tau_1 < \tau_2\,. \tag{23.4}$$

При неположительной космической постоянной (18.3) дает

$$\xi_1 > \xi_2\,. \tag{23.5}$$

Вследствие (23.4) и (23.5) рассматриваемые типы изменения η невозможны в случаях I_1, I_2, I_3 при положительной космической постоянной и в случаях I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3 при неположительной космической постоянной.

§ 4.24 Область действительных деформаций элемента

В предшествующих пяти §4.19–§4.23 мы получали ряд запретов или ограничений, накладываемых на поведение элемента уравнениями (18.1) и (18.3) или равносильными им уравнениями (7.13), (7.15) и (7.16). Таким образом, мы выполнили задачу, поставленную в §4.17. Эти запреты, как легко видеть, представляют собою обобщение запретов, налагаемых космологическими уравнениями на поведение любого элемента однородной Вселенной (при давлении, равном нулю).

Полученные запреты могут быть найдены также из рассмотрения в плоскости η, ξ области действительных деформаций элемента, т. е. области, в которой

$$\eta \geqslant 0\,, \tag{24.1}$$

$$\overset{*}{\eta}{}^2 \geqslant 0\,. \tag{24.2}$$

В силу уравнения (18.3), из (24.2) следует

$$\xi \leqslant \frac{c^2}{3}\left(\frac{\kappa\mu}{\eta} + \Lambda\eta^2\right). \tag{24.3}$$

Таким образом, область действительных деформаций ограничена осью ординат и критической кривой

$$\xi = \frac{c^2}{3}\left(\frac{\kappa\mu}{\eta} + \Lambda\eta^2\right), \qquad \eta \geqslant 0\,. \tag{24.4}$$

Рассмотрим ход этой кривой. При положительной космической постоянной эта кривая целиком расположена в первой четверти, всюду выпукла к оси абсцисс и имеет минимум при

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{\kappa\mu}{2\Lambda}}\,. \tag{24.5}$$

При стремлении η к нулю (ось ординат служит асимптотой)

$$\xi \to +\infty\,, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \to -\infty\,, \tag{24.6}$$

при стремлении η к бесконечности

$$\xi \to +\infty\,, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \to +\infty\,. \tag{24.7}$$

При космической постоянной, равной нулю, критическая кривая также лежит целиком в первой четверти и выпукла по оси абсцисс. Как легко видеть, она представляет собою ветвь равнобочной гиперболы, асимптотами которой служат оси координат, так что при стремлении η к нулю выполняются соотношения (24.6), а при стремлении η к бесконечности

$$\xi \to 0\,, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \to 0\,. \tag{24.8}$$

Наконец, при отрицательной космической постоянной критическая кривая изображает, как и в предыдущем случае, монотонно убывающую функцию. Кривая всюду выпукла к оси абсцисс и пересекает ее в точке

$$\eta = -\sqrt[3]{\frac{\kappa\mu}{\Lambda}}\,, \tag{24.9}$$

являющейся, следовательно, точкой перегиба. При стремлении η к нулю, как и в предыдущих случаях, имеют место соотношения (24.6), ось ординат служит асимптотой. При стремлении η к бесконечности

$$\xi \to -\infty\,, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \to -\infty\,. \tag{24.10}$$

В случае положительной космической постоянной действительные состояния бесконечного разрежения изображаются точками бесконечно удаленной прямой

$$\eta = +\infty\,. \tag{24.11}$$

В случае космической постоянной, равной нулю, эти состояния изображаются полупрямой

$$\eta = +\infty, \qquad \xi \leqslant 0. \tag{24.12}$$

Наконец, в случае отрицательной космической постоянной эти состояния изображаются точкой

$$\eta = +\infty, \qquad \xi = -\infty. \tag{24.13}$$

Особые состояния бесконечной плотности изображаются всеми точками оси ординат. Асимптотические, минимальные и коллаптические состояния бесконечной плотности изображаются одной точкой этой оси

$$\eta = 0, \qquad \xi = +\infty. \tag{24.14}$$

Состояния неизменного, минимального и максимального объема изображаются точками на критической кривой. Асимптотическое приближение к состоянию неизменного объема изображается, как легко сообразить, приближением к точке, изображающей это состояние, по кривой, имеющей в этой точке касательную, общую с критической кривой.

§ 4.25 Типы монотонных изменений объема

Каждый тип поведения элемента мы условимся обозначать последовательностью букв, указывающих на проходимую элементом в течение времени последовательность состояний, ограничивающих интервалы монотонного изменения его объема. Согласно этому условию, типы, рассматриваемые в теории непустой однородной Вселенной, должны быть обозначены следующим образом:

A_1 — sA (расширение) или As (сжатие);
A_2 — aD (расширение) или Da (сжатие);
M_1 — sD (расширение) или Ds (сжатие);
M_2 — DmD;
O_1 — sMs;
O_2 — $\ldots mMmM \ldots$

Очевидно, число мыслимых типов поведения элемента на интервале монотонного изменения его объема равно 18 для случая расширения и такому же числу для случая сжатия (соответственно, 6 типов наименьшего значения и 3 типа наибольшего значения). Перечислим типы расширения (меняя местами буквы, мы получим обозначения соответствующих типов сжатия).

1. Изменения, ограниченные конечным значением только снизу: aD, mD.
2. Изменения, ограниченные конечными значениями снизу и сверху: aA, aM, mA, mM.
3. Изменения, ограниченные конечным значением только сверху: pA, pM, qA, qM, rA, rM, sA, sM.
4. Неограниченные изменения: pD, qD, rD, sD.

Типы aD и mD и соответствующие типы сжатия невозможны в случаях (см. §4.20 и §4.21)

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda > 0: & \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda = 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_1, \mathrm{III}_3 \\ \Lambda < 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_1, \end{array}\right\}. \tag{25.1}$$

Типы aA, aM, mA, mM и соответствующие типы сжатия невозможны в случаях (см. §4.21, §4.22 и §4.23)

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda > 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda = 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda < 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3 & \end{array}\right\}. \tag{25.2}$$

Типы pA, pM, qA, qM, rA, rM и соответствующие типы сжатия невозможны в случаях (см. §4.19, §4.21 и §4.22)

$$\Lambda \gtreqless 0: \quad \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; \quad \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; \quad \mathrm{III}_3\ . \tag{25.3}$$

Тип sA и соответствующий тип сжатия невозможны в случаях (см. §4.19 и §4.21)

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda > 0: & \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda = 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda < 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3 & \end{array}\right\}. \tag{25.4}$$

Тип sM и соответствующий тип сжатия невозможен в случаях (см. §4.19 и §4.22)

$$\Lambda \geqslant 0: \quad \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; \quad \mathrm{II}_3; \quad \mathrm{III}_3\ . \tag{25.5}$$

Типы pD, qD, rD и соответствующие типы сжатия невозможны в случаях (см. §4.19 и §4.20)

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda > 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_3 \\ \Lambda \leqslant 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_1, \mathrm{III}_3 \end{array}\right\}. \tag{25.6}$$

Типы sD и соответствующий тип сжатия невозможны в случаях (см. §4.19 и §4.20)

$$\left.\begin{array}{llll} \Lambda = 0: & \mathrm{I}_1; & \mathrm{II}_1; & \mathrm{III}_1 \\ \Lambda < 0: & \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3; & \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2, \mathrm{II}_3; & \mathrm{III}_1 \end{array}\right\}. \tag{25.7}$$

Мы перечислили здесь для каждого типа случаи, в которых он запрещен ограничениями, вытекающими из соотношений (7.13), (7.15) и (7.16) и изложенными в §4.19–§4.23. Рассмотрение критической кривой в области действительных деформаций (см. §4.24) позволяет без труда установить, что каждый тип возможен (точнее, допустим) уравнениями (7.13), (7.15) и (7.16) во всех случаях, в которых он не запрещен упомянутыми ограничениями.

Мы приводим здесь таблицы, в которых для каждого случая указаны типы (для краткости – только типы расширения), допускаемые уравнениями (7.13), (7.15) и (7.16) или, что то же, допускаемые уравнениями (18.1) и (18.3). О значении подчеркивания и скобок см. §4.27.

§4.26 Возможность произвольного поведения элемента объема

Выше мы рассмотрели ограничения, накладываемые уравнениями (7.13), (7.15) и (7.16) на поведение η с изменением временно́й координаты при фиксированных пространственных координатах. Приведем здесь некоторые соображения, позволяющие заключить, что остальные космологические уравнения не накладывают дополнительных ограничений на поведение η в данной точке с течением времени.

Известно [59], что всегда* можно ввести такие координаты ($\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$), в которых выполняются условия (гармонические координаты)

$$\frac{\partial\left(\tilde{g}^{\mu\nu}\sqrt{-\tilde{g}}\,\right)}{\partial \tilde{x}^{\nu}} = 0\,. \tag{26.1}$$

*Но, вообще говоря, не во всякой системе отсчета.

	I_1	I_2	I_3
$\Lambda > 0$	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2)$, $mD\,[\mathrm{M}_2]$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ $sM\,[\mathrm{O}_1]$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda = 0$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda < 0$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$

Таблица 4.1 Типы эволюции элемента для случая I, т. е. при наличии и сохранении механической и геометрической изотропии

	II_1	II_2	II_3
$\Lambda > 0$	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2)$, mD $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ $sM\,[\mathrm{O}_1]$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda = 0$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda < 0$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$	$sM\,[\mathrm{O}_1]$

Таблица 4.2 Типы эволюции элемента для случая II, т. е. при наличии анизотропной деформации в отсутствии динамического абсолютного вращения

	III_1	III_2	III_3
$\Lambda > 0$	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2),\ mD$ $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{pD}, \underline{qD}, \underline{rD}$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2),\ mD$ $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{pD}, \underline{qD}, \underline{rD}$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda = 0$	$\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2),\ mD$ $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{pD}, \underline{qD}, \underline{rD}$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$
$\Lambda < 0$	$\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM	$\underline{aD}\,(\mathrm{A}_2),\ mD$ $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{pA}, pM, \underline{qA}, qM, \underline{rA}, rM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{pD}, \underline{qD}, \underline{rD}$ $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$	$\underline{aD}\,(A_2), mD$ $\underline{aA}, aM, mA, mM$ $\underline{sA}\,(\mathrm{A}_1)$ sM $\underline{sD}\,(\mathrm{M}_1)$

Таблица 4.3 Типы эволюции элемента для случая III (общий случай)

В этих координатах уравнения тяготения могут быть представлены в форме

$$\frac{1}{2}\,\widetilde{\Box}\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \widetilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}\,\widetilde{\Gamma}^{\nu}_{\varepsilon\zeta}\,\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\tilde{g}^{\beta\zeta} + \Lambda\,\tilde{g}^{\mu\nu} = \kappa\left(\widetilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\widetilde{T}\right), \qquad (26.2)$$

где обозначено

$$\Box \equiv g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\,, \qquad (26.3)$$

и, следовательно, уравнения тяготения могут быть приведены к нормальному виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^3\partial\tilde{x}^3} = F^{\mu\nu}\Big(&\tilde{x}^0,\,\tilde{x}^1,\,\tilde{x}^2,\,\tilde{x}^3;\quad \tilde{g}^{00},\,\tilde{g}^{01},\,\ldots,\,\tilde{g}^{33};\\ &\frac{\partial\tilde{g}^{00}}{\partial\tilde{x}^0},\frac{\partial\tilde{g}^{00}}{\partial\tilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial\tilde{g}^{33}}{\partial\tilde{x}^3};\quad \frac{\partial^2\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^0\partial\tilde{x}^0},\frac{\partial^2\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^0\partial\tilde{x}^1},\ldots,\frac{\partial^2\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^3\partial\tilde{x}^1}\Big).\end{aligned} \qquad (26.4)$$

В таком случае* можно воспользоваться общей теоремой существования интегралов, удовлетворяющих заданным начальным условиям при

$$\tilde{x}^3 = \tilde{a}^3 = const\,, \qquad (26.5)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{f}^{\mu\nu}(\tilde{x}^0,\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)\,, \qquad \frac{\partial\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial\tilde{x}^3} = \tilde{f}^{\mu\nu}_3(\tilde{x}^0,\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)\,. \qquad (26.6)$$

Все 20 функций, стоящих в правых частях равенств (26.6), должны удовлетворять† лишь 4-м условиям гармоничности (26.1). Таким образом, 16 из этих функций, а следовательно — не менее 6-ти из 10-ти функций $\tilde{f}^{\mu\nu}$ могут быть заданы нами произвольно.

Свяжем интересующую нас сопутствующую координатную систему (x^0, x^1, x^2, x^3) общими преобразованиями

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= x^0\,(\tilde{x}^0,\,\tilde{x}^1,\,\tilde{x}^2,\,\tilde{x}^3)\\ x^i &= x^i\,(\tilde{x}^0,\,\tilde{x}^1,\,\tilde{x}^2,\,\tilde{x}^3)\end{aligned}\right\} \qquad (26.7)$$

с некоторой гармонической координатной системой. Выберем в последней координаты, а в сопутствующей координатной системе — точку

$$x^i = a^i = const^i \qquad (26.8)$$

*Мы предполагаем, что все требования непрерывности и дифференцируемости, нужные для этого, выполнены.

†Сверх обычных требований непрерывности и существования непрерывных первых производных.

так, чтобы эта точка всегда оставалась на поверхности (26.5). Тогда, очевидно, для этой точки мы будем иметь

$$g^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta}(x^0)\,, \tag{26.9}$$

где обозначено*

$$f^{\alpha\beta} = \left(\tilde{f}^{\mu\nu}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\right)_a. \tag{26.10}$$

Таким образом, 10 величин $f^{\alpha\beta}$ суть линейные функции 10-ти величин $\left(\tilde{f}^{\mu\nu}\right)_a$, из которых по крайней мере 6 могут быть заданы произвольно. Поэтому мы можем задать вместо $\left(\tilde{f}^{\mu\nu}\right)_a$ по крайней мере 6 из величин $f^{\alpha\beta}$.

Из сказанного следует, что, задав в данной точке пространства величины w, v^1, v^2, v^3 как функции временно́й координаты, мы можем задать в этой же точке в виде функций координаты времени еще, по крайней мере, две из величин h^{ik} или h_{ik}. Или мы можем задать две функции этих величин h^{ik} или h_{ik}, причем в качестве одной из этих функций можно, как легко видеть, выбрать величину η. В таком случае:

- смысл ограничений, накладываемых космологическими уравнениями (7.13), (7.15) и (7.16) на поведение величины η, состоит в установлении зависимости между характером поведения этой величины и характером поведения показателя кривизны;
- остальные космологические уравнения не могут давать дополнительных связей между η и ξ, т. к. тогда для этих величин существовало бы не менее двух независимых уравнений и произвольное задание $\eta\,(t)$ было бы невозможно;
- при переходе η с течением времени из одного интервала монотонного изменения в другой, любой тип монотонного изменения η может смениться любым, допустимым при данной космической постоянной и заданном характере поведения показателя кривизны.

Из сказанного выше следует также, что произвольное задание η для всех элементов некоторого конечного объема, вообще говоря, невозможно.

---

*Индекс a означает, что взятые в скобки функции рассматриваются вдоль мировой линии, описываемой точкой (26.8) сопутствующего пространства в гармонической системе.

В заключение перечислим сведения, могущие быть полученными из космологических уравнений, рассматриваемых как уравнения для данной точки.

Предположим, что в данной точке заданы

$$\mathrm{w} = 0\,, \tag{26.11}$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} = 0\,, \tag{26.12}$$

$$v_i = 0\,, \tag{26.13}$$

значения величин μ, ν^1, ν^2, ν^3 и 5 из 6-ти величин h^{ik} как функции координаты времени (иначе говоря, известны 5 функций f^{ik} для данной точки). Тогда:

- уравнение (7.14) будет удовлетворено вследствие условий (26.11) и (26.13);
- уравнения (7.13) и (7.15) определят 6-ю величину* из всех величин h^{ik} и ρ;
- уравнение (7.15) определит величину Z;
- уравнение (7.17), вследствие (10.14), определит 5 величин $Z_i^k - \frac{1}{3} h_i^k Z$;
- уравнение (7.19) связывает поведение данного элемента с поведением смежных элементов при знании зависимости величин ν^i от пространственных координат.

§4.27 Типы поведения элемента

Рассмотрим теперь типы поведения элемента на всем интервале изменения η, на котором эта величина и плотность остаются конечными. Очевидно, ограничивающими состояниями при этом могут быть все, кроме m и M, и из 18-ти типов монотонного расширения (и, соответственно, сжатия) 10 являются типами поведения на всем интересующем нас интервале. В Таблице 4.1, Таблице 4.2 и Таблице 4.3 эти типы подчеркнуты. Из них 7 невозможны для однородной Вселенной (типы aA, pA, qA, rA, pD, qD, rD), в то время как 3 типа (aA, sA, sD) совпадают, соответственно, с типами A_2, A_1, M_1, которые возможны для однородной Вселенной (в таблицах эти типы обозначены в круглых скобках).

*Мы видим, таким образом, что задание всех 6-ти величин f^{ik} при задании (26.11) не допускается космологическими уравнениями для данной точки.

Мыслимы случаи, когда из состояния m или M для элемента возможен переход (в результате монотонного изменения объема) только к одному состоянию и, притом, к состоянию из числа состояний бесконечной плотности, неизменного объема или бесконечного разрежения. В таких случаях тип монотонного изменения объема элемента вполне определяет тип поведения его на всем интересующем нас интервале. Так, например, если из состояния m возможен переход только в состояние D, то наличие типа mD означает наличие типа DmD, совпадающего с типом M_2. Если из состояния M возможен переход только в состояние s, то наличие типа sM указывает на тип sMs, совпадающий с типом O_1. Это действительно имеет место в ряде случаев, рассматриваемых в Таблице 4.1 и Таблице 4.2 и отмечено обозначениями, заключенными в прямые скобки.

Изложенные в данном §4.27 соображения достаточны для нахождения всех типов поведения:

- в случаях I_1, I_2, I_3, II_2, II_3 при $\Lambda \lesseqgtr 0$;
- в случае II_1 при $\Lambda \leqslant 0$;
- в случае III_3 при $\Lambda \geqslant 0$.

Для нахождения типов поведения

- в случае II_1 при $\Lambda > 0$,
- в случаях III_1 и III_2 при $\Lambda \gtreqless 0$,
- в случае III_3 при $\Lambda < 0$

нужно воспользоваться сделанным в предыдущем §4.26 указанием на возможность комбинирования типов монотонного изменения объема. Это указание позволяет сделать следующие заключения:

- в случаях II_1, $\Lambda > 0$ и III_3, $\Lambda < 0$ возможен переход от любого из состояний a, m, s к любому из состояний A, M, D и обратно;
- в случаях III_1, $\Lambda > 0$ и III_2, $\Lambda \gtreqless 0$ возможен переход от любого из состояний a, m, p, q, r, s к любому из состояний A, M, D и обратно;
- наконец, в случае III_1, $\Lambda \leqslant 0$ возможен переход от любого из состояний a, m, p, q, r, s к любому из состояний A, M и обратно.

Отметим, что во всех этих случаях возможно существование типа $\ldots mMmMmM\ldots$, т. е. типа O_2.

§4.28 Роль динамического абсолютного вращения и анизотропии деформации

Для выяснения влияния, оказываемого динамическим абсолютным вращением и анизотропией деформации, рассмотрим следующие случаи: (1) отсутствие динамического абсолютного вращения при изотропии деформации; (2) отсутствие динамического абсолютного вращения при анизотропии деформации; (3) наличие динамического абсолютного вращения при анизотропии деформации.

Отсутствие абсолютного вращения при изотропии деформации

Пусть в данной точке сохраняется механическая, а следовательно, и геометрическая изотропия. Как легко увидеть из §4.11, необходимые и достаточные условия этого могут быть представлены в виде

$$\Pi \equiv 0\,, \qquad \Omega_j \Omega^j = 0\,. \tag{28.1}$$

Тогда, очевидно, с одной стороны

$$\tau \equiv 0\,, \qquad \xi = const\,, \tag{28.2}$$

с другой стороны

$$c^2 Z = 3\,\frac{\xi}{\eta^2}\,. \tag{28.3}$$

В §4.14 мы видели, это следует также из (28.3), что при наличии и сохранении изотропии в данной точке средняя кривизна в ней меняется с изменением объема элемента так же, как и в однородной Вселенной. Из (28.2), см. Таблицу 4.1, с учетом (28.3) мы находим, что типы поведения объема элемента, возможные при данной космической постоянной и данной (в смысле знака или равенства нулю) средней кривизне, являются теми же, что и в случае однородной Вселенной. Более того, в §4.18 мы видели, что при (28.2) уравнения (7.13), (7.15) и (7.16) могут быть для данной точки пространства приведены к виду, свойственному уравнениям для однородной Вселенной.

Отсутствие абсолютного вращения при анизотропии деформации

Пусть в данной точке динамическое абсолютное вращение по-прежнему отсутствует, но имеет место анизотропия деформации

$$\Pi \geqslant 0\,, \qquad \Omega_j \Omega^j = 0\,. \tag{28.4}$$

Тогда, как легко видеть,

$$\tau \geqslant 0\,, \tag{28.5}$$

$$c^2 Z \geqslant 3\,\frac{\xi}{\eta^2}\,. \tag{28.6}$$

Анизотропия деформации, вообще говоря, усложняет зависимость поведения средней кривизны от поведения объема элемента (см. §4.14) и, в частности, делает возможным изменение знака средней кривизны.

При отсутствии динамического абсолютного вращения анизотропия деформации вызывает появление новых, сравнительно со случаем однородной Вселенной, типов поведения элемента (см. Таблицу 4.2). При положительной космической постоянной и всегда, при положительном показателе кривизны*, оказываются возможными ограниченные и сверху и снизу монотонные изменения объема элемента (типы aA, aM, mA, mM). Следовательно, при этом оказывается возможным и тип O_2. Отметим также, что при всякой космической постоянной и при всегда неположительной средней кривизне возможны те и только те типы поведения, которые при той же космической постоянной и при неположительной кривизне возможны в случае однородной Вселенной.

Наличие абсолютного вращения при анизотропии деформации

Пусть в данной точке имеют место анизотропия деформации и динамическое абсолютное вращение. Рассмотрим общий случай, когда Π может быть больше, равно и меньше, чем $2\Omega_j\Omega^j$. Тогда, очевидно

$$\tau \gtreqqless 0\,, \tag{28.7}$$

$$c^2 Z \gtreqqless 3\,\frac{\xi}{\eta^2}\,. \tag{28.8}$$

Вследствие (28.7), см. Таблицу 4.3, типы aA, aM, mA, mM и, следовательно, тип O_2, оказываются возможными не только при положительной космической постоянной, но и когда космическая постоянная равна нулю или отрицательна. Причем, в случае неотрицательной космической постоянной показатель кривизны не должен оставаться всегда положительным, в то время как при отрицательной космической постоянной это ограниче-

*Следовательно, в силу (28.6), при всегда положительной средней кривизне.

ние не имеет места*.

При наличии динамического абсолютного вращения становятся также возможными новые состояния p, q, r и связанные с ними типы pA, qA, rA, pM, qM, rM, pD, qD, rD.

Таковы некоторые следствия анизотропии деформации и динамического абсолютного вращения.

*Какой бы знак ни имел показатель кривизны, условие (28.8) допускает при этом и положительную, и равную нулю, и отрицательную среднюю кривизну.

Литература

1. **Tolman R. C.** Relativity, thermodynamics, and cosmology. Clarendon Press, Oxford, 1934.
2. **Milne E. A.** Relativity, gravitation, and world-structure. Clarendon Press, Oxford, 1935.
3. **Robertson H. P.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 15, 822, 1929.
4. **Einstein A.** *Berlinere Berichte*, 142, 1917
5. **Friedmann A.** *Zeitschrift für Physik*, 10, 377, 1922.
6. **Einstein A.** *Berlinere Berichte*, 235, 1931.
7. **Эддингтон А.** Теория относительности. ГТТИ, Москва, 1934.
8. **Levi-Civita T.** Das absolute Differentialkalkül. Springer, Berlin, 1928.
9. **de Sitter W.** *Kon. Ned. Acad. Amsterdam Proc.*, 19, 1217, 1917.
10. **de Sitter W.** *Monthly Notices*, 78, 3, 1917.
11. **Lemaître G.** *Journal of Mathematical Physics*, 4, 188, 1925.
12. **Friedmann A.** *Zeitschrift für Physik*, 21, 326, 1924.
13. **Lanczos K.** *Physikalische Zeitschrift*, 23, 539, 1922.
14. **Weyl H.** *Physikalische Zeitschrift*, 24, 230, 1923.
15. **Lemaître G.** *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 47A, 49, 1927; *Monthly Notices*, 91, 483, 1931.
16. **Lemaître G.** *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 5, 273, 1930.
17. **Heckmann O.** *Göttingene Nachrichten*, 97, 1932.
18. **Robertson H. P.** *Review of Modern Physics*, 5, 62, 1933.
19. **Eddington A. S.** *Monthly Notices*, 90, 668, 1930.
20. **Tolman R. C.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 14, 268, 1928.
21. **Tolman R. C.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 14, 701, 1928.
22. **Tolman R. C.** *Physical Review*, 37, 1639, 1931.
23. **Tolman R. C.** *Physical Review*, 38, 797, 1931.
24. **Tolman R. C.** *Physical Review*, 39, 320, 1932.
25. **Milne E. A.** *Quart. Journal of Math.*, 5, 64, 1934.
26. **McCrea W. H. and Milne E. A.** *Quart. Journal of Math.*, 5, 73, 1934.
27. **Eigenson M. S.** *Zeitschrift für Astrophysik*, 4, 224, 1932.
28. **Eddington A. S.** Relativity theory of protons and electrons. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1936.
29. **Einstein A. and de Sitter W.** *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, 18, 213, 1932.
30. **Tolman R. C.** *Physical Review*, 38, 1758, 1931.

31. **Lanczos K.** *Zeitschrift für Physik*, 17, 168, 1923.
32. **Hubble E. P.** *Astrophysical Journal*, 64, 321, 1926.
33. **Hubble E. P.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 15, 168, 1929.
34. **Hubble E. P. and Humason M. L.** *Astrophysical Journal*, 74, 43, 1931.
35. **Shapley H. and Ames A.** *Harvard Annals*, 88, 43, 1932.
36. **Hubble E. P.** *Astrophysical Journal*, 79, 8, 1934.
37. **Hubble E. P.** *Astrophysical Journal*, 84, 517, 1936.
38. **Hubble E. P. and Tolman R. C.** *Astrophysical Journal*, 82, 302, 1935.
39. **McVittie G. C.** *Monthly Notices*, 97, 163, 1937.
40. **McVittie G. C.** Cosmological theory. Ch. IV. Methuen Monographs, London, 1937.
41. **McVittie G. C.** *Monthly Notices*, 98, 384, 1938.
42. **McVittie G. C.** *Zeitschrift für Astrophysik*, 14, 274, 1937.
43. **McCrea W. H.** *Zeitschrift für Astrophysik*, 9, 290, 1935.
44. **Eddington A. S.** *Monthly Notices*, 97, 156, 1937.
45. **Shapley H.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 24, 148, 1938.
46. **Shapley H.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 24, 527, 1938.
47. **Shapley H.** *Monthly Notices*, 94, 791, 1934.
48. **Shapley H.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 21, 587, 1935.
49. **Shapley H.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 19, 389, 1933.
50. **Shapley H.** *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 24, 282, 1938.
51. **McCrea W. H.** *Zeitschrift für Astrophysik*, 9, 98, 1939.
52. **Mason W. R.** *Philosophical Magazine*, 14, 386, 1932.
53. **Фесенков В. Г.** *Доклады АН СССР*, нов. сер., 15, 125, 1937.
54. **Фесенков В. Г.** *Астрономический Журнал*, 14, 413, 1937.
55. **Крат В. А.** *Изв. Ф.–М. О. при КГУ*, сер. 3, 1936–37, отд. оттиск.
56. **Эйгенсон М. С.** *Доклады АН СССР*, нов. сер., 26, 759, 1940.
57. **Картан Э.** Геометрия римановых пространств. ОНТИ, Москва–Ленинград, 1936.
58. **Lamb H.** Hydrodynamics. 5th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1930.
59. **Lanczos K.** *Physikalische Zeitschrift*, 23, 537, 1922.
60. **Фок В. А.** *Журнал Эксперим. и Теор. Физики*, 9, 375, 1939.
61. **Eisenhart L. P.** *Trans. Amer. Math. Soc.*, 26, 205, 1924.
62. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 6-е изд., ГОНТИ, Москва–Ленинград, 1938.
63. **Картан Э.** Интегральные инварианты. ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1940.
64. **Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.** Теория поля. ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1939.

Предметный указатель