

УДК 541.12
ББК 30.13
350

Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. **Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.** — 3-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 656 с. — ISBN 978-5-9221-0938-3.

В книге рассматривается обширный круг вопросов из различных областей физики, физической химии, астрофизики, с которыми имеет дело газо- и гидродинамика. Излагаются основы газовой динамики и теория ударных волн, теория переноса излучения. Рассматриваются термодинамические и оптические свойства вещества при высоких температурах и давлениях, кинетика диссоциации, ионизации и других неравновесных процессов, явления, связанные с излучением света и лучистым теплообменом в ударных волнах и при взрывах, вопросы распространения ударных волн в твердых телах и т.д. Авторам монографии принадлежит большое число оригинальных работ в рассматриваемой области науки, которые нашли свое отражение в книге.

Книга послужит ценным практическим пособием для широких кругов физиков, механиков и инженеров, занимающихся прикладной физикой и новой техникой. Она будет полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей, а также всем физикам и механикам, желающим познакомиться с основами науки об ударных волнах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	8
Предисловие ко второму изданию	9
Предисловие к первому изданию	10
Глава I. Элементы газодинамики и классическая теория ударных волн	12
1. Непрерывное течение невязкого и нетеплопроводного газа	12
§ 1. Уравнения газовой динамики (12). § 2. Лагранжевы координаты (15). § 3. Звуковые волны (17). § 4. Сферические звуковые волны (22). § 5. Характеристики (23). § 6. Плоское изэнтропическое течение. Инварианты Римана (27). § 7. Плоское изэнтропическое течение газа в ограниченном пространстве (30). § 8. Простые волны (32). § 9. Искажение профилей в бегущей волне конечной амплитуды. Некоторые свойства простых волн (34). § 10. Волна разрежения (37). § 11. Центрированная волна разрежения как пример автомодельного движения газа (41). § 12. О невозможности существования центрированной волны сжатия (45).	
2. Ударные волны	46
§ 13. Введение в газодинамику понятия об ударной волне (46). § 14. Ударная адиабата (49). § 15. Ударные волны в идеальном газе с постоянной теплоемкостью (50). § 16. Геометрическая интерпретация закономерностей ударного сжатия (54). § 17. Невозможность существования ударной волны разрежения в веществе с нормальными свойствами (57). § 18. Ударные волны слабой интенсивности (60). § 19. Ударные волны в веществе с аномальными термодинамическими свойствами (63).	
3. Вязкость и теплопроводность в газодинамике	65
§ 20. Уравнения одномерного движения газа (65). § 21. Замечания о второй вязкости (67). § 22. Замечания о поглощении звука (68). § 23. Структура и ширина фронта ударной волны слабой интенсивности (69).	
4. Некоторые задачи	76
§ 24. Распространение произвольного разрыва (76). § 25. Сильный взрыв в однородной атмосфере (82). § 26. Приближенное рассмотрение сильного взрыва (85). § 27. Замечания о точечном взрыве с учетом противодействия (87). § 28. Адиабатический разлет в пустоту газового шара (88). § 29. Автомодельные режимы разлета шара в пустоту (91).	
Глава II. Тепловое излучение и лучистый теплообмен в среде	93
§ 1. Введение и основные понятия (93). § 2. Механизмы испускания, поглощения и рассеяния света в газах (96). § 3. Равновесное излучение и абсолютно черное тело (100). § 4. Вынужденное испускание (102). § 4а. Вынужденное излучение в классической и квантовой теориях и лазерный эффект (104). § 5. Уравнение переноса излучения (109). § 6. Интегральные выражения для интенсивности излучения (111). § 7. Излучение плоского слоя (113). § 8. Эффективная или яркостная температура поверхности неравномерно нагретого тела (117). § 9. Движение вещества с учетом лучистого теплообмена (119). § 10. Диффузионное приближение (122). § 11. Приближение «вперед-назад» (125). § 12. Локальное равновесие и приближение лучистой теплопроводности (127). § 13. Взаимоотношение диффузионного приближения и приближения лучистой теплопроводности (129). § 14. Лучистое равновесие в звездных фотосферах (131). § 15. Решение задачи о плоской фотосфере (135). § 16. Потери энергии нагретого тела на излучение (137). § 17. Уравнения гидродинамики с учетом энергии и давления излучения и лучистого теплообмена (140). § 18. Число квантов как инвариант классического электромагнитного поля (144).	
Глава III. Термодинамические свойства газов при высоких температурах	147
1. Газ из невзаимодействующих частиц.	147

§1. Идеальный газ с постоянной теплоемкостью и неизменным числом частиц (147).	
§2. Расчеты термодинамических функций методом статистических сумм (149).	
§3. Диссоциация двухатомных молекул (153).	
§4. Химические реакции (157).	
§5. Ионизация и электронное возбуждение (160).	
§6. Электронная статистическая сумма и роль энергии возбуждения атомов (165).	
§7. Приближенный метод расчета в области многократной ионизации (167).	
§8. Интерполяционные формулы и эффективный показатель адиабаты (172).	
§9. Ударная адиабата в условиях диссоциации и ионизации (174).	
§10. Ударная адиабата с учетом равновесного излучения (177).	
2. Газ из частиц с кулоновским взаимодействием	178
§11. Разреженный ионизованный газ (178).	
§12. Плотный газ. Элементы квантовой статистики Ферми–Дирака для электронного газа (181).	
§13. Модель атома по Томасу–Ферми и сильное сжатие холодного вещества (184).	
§14. Вычисление термодинамических функций высоконагретого плотного газа методом Томаса–Ферми (189).	
Глава IV. Ударные трубы.	192
§1. Использование ударной трубы для изучения физико-химической кинетики (192).	
§2. Принцип действия (193).	
§3. Элементарная теория ударной трубы (193).	
§4. Электромагнитные ударные трубки (197).	
§5. Методы измерений различных величин (200).	
Глава V. Поглощение и испускание излучения в газах при высоких температурах	202
§1. Введение. Типы электронных переходов (202).	
1. Непрерывный спектр	204
§2. Тормозное излучение электрона в кулоновском поле иона (204).	
§2а. Тормозное излучение электрона при рассеянии нейтральным атомом (209).	
§3. Свободно-свободные переходы в нагретом ионизованном газе (211).	
§4. Эффективное сечение захвата электрона ионом с испусканием кванта (214).	
§5. Эффективное сечение связанно-свободного поглощения света атомами и ионами (216).	
§6. Коэффициент непрерывного поглощения в газе из водородоподобных атомов (219).	
§7. Непрерывное поглощение света в одноатомном газе в области первой ионизации (222).	
§8. Средние пробеги излучения при многократной ионизации атомов газа (226).	
§8а. Поглощение света в слабоионизованном газе (229).	
2. Линейчатый спектр атомов	232
§9. Классическая теория спектральных линий (232).	
§10. Квантовая теория спектральных линий. Силы осцилляторов (235).	
§11. Спектр поглощения водородоподобных атомов. Замечания о влиянии линий на росселандов пробег (239).	
§12. Силы осцилляторов для континуума. Теорема сумм (242).	
§13. Излучение спектральных линий (244).	
3. Полосатый спектр молекул	247
§14. Энергетические уровни двухатомных молекул (247).	
§15. Структура молекулярных спектров (251).	
§16. Принцип Франка–Кондона (254).	
§17. Вероятности молекулярных переходов с испусканием света (256).	
§18. Коэффициент поглощения света в линиях (260).	
§19. Молекулярное поглощение при высоких температурах (262).	
§20. Уточненный расчет коэффициента молекулярного поглощения при высоких температурах (264).	
4. Воздух	267
§21. Оптические свойства нагретого воздуха (267).	
5. Пробой и нагревание газа под действием сфокусированного лазерного луча.	274
§22. Пробой (274).	
§23. Поглощение лазерного луча и нагревание газа после первичного пробоя (277).	
Глава VI. Скорости релаксационных процессов в газах	282
1. Молекулярные газы	282

§ 10. Насыщение паров и возникновение центров конденсации (429). § 11. Термодинамика и кинетика процесса конденсации (431). § 12. Конденсация в облаке испаренного вещества, разлетающегося в пустоту (433). § 13. К вопросу о механизме образования космической пыли. Замечания о лабораторном исследовании конденсации (436).

Глава IX. Световые явления в ударных волнах и при сильном взрыве в воздухе 438

1. Яркость фронта ударных волн большой амплитуды в газах 438
 - § 1. Качественная зависимость яркостной температуры от истинной температуры за фронтом (438). § 2. Поглощение световых квантов в холодном воздухе (442).
 - § 3. Максимальная яркостная температура для воздуха (444). § 4. Предельная яркость очень сильной волны в воздухе (446).
2. Оптические явления, наблюдаемые при сильном взрыве, и охлаждение воздуха излучением. 448
 - § 5. Общее описание световых явлений (448). § 6. Отрыв фронта ударной волны от границы огненного шара (452). § 7. Эффект минимума яркости огненного шара (455). § 8. Охлаждение воздуха излучением (459). § 9. Возникновение температурного уступа — волны охлаждения (460). § 10. Энергетический баланс и скорость распространения волны охлаждения (462). § 11. Стягивание волны охлаждения к центру (464). § 12. Искровой разряд в воздухе (466).
3. Структура фронта волны охлаждения 467
 - § 13. Постановка задачи (467). § 14. Поток излучения с поверхности фронта волны (470). § 15. Распределение температуры во фронте сильной волны (473). § 16. Учет адиабатического охлаждения (475).

Глава X. Тепловые волны 478

§ 1. Теплопроводность вещества (478). § 2. Нелинейная (лучистая) теплопроводность (479). § 3. Особенности распространения тепла при линейной и нелинейной теплопроводностях (482). § 4. Закон распространения тепловой волны от мгновенного плоского источника (486). § 5. Автомодельная тепловая волна от мгновенного плоского источника (487). § 6. Распространение тепла от мгновенного точечного источника (490). § 7. Некоторые автомодельные плоские задачи (493). § 8. Замечания о проникновении тепла в среду при учете движения (496). § 9. Автомодельное решение как предельное решение неавтомодельной задачи (498). § 10. О переносе тепла неравновесным излучением (500).

Глава XI. Ударные волны в твердых телах 503

- § 1. Введение (503).
1. Термодинамические свойства твердых тел при высоких давлениях и температурах § 2. Сжатие холодного вещества (506). § 3. Тепловое движение атомов (509). § 4. Уравнение состояния тела, атомы которого совершают малые колебания (512). § 5. Тепловое возбуждение электронов (516). § 6. Трехчленное уравнение состояния (518).
2. Ударная адиабата. 519
 - § 7. Ударная адиабата конденсированного вещества (519). § 8. Аналитические представления ударной адиабаты (521). § 9. Ударные волны слабой интенсивности (523). § 10. Ударное сжатие пористого вещества (524). § 11. Выход не очень сильной ударной волны на свободную поверхность тела (527). § 12. Экспериментальные методы отыскания ударной адиабаты твердых тел (531). § 13. Извлечение кривой холодного сжатия из результатов опытов по ударному сжатию (537).
3. Акустические волны и расщепление волн. 538
 - § 14. Статическая деформация твердого тела (538). § 15. Переход твердого тела в текучее состояние (542). § 16. Скорость распространения акустических волн (545). § 17. Расщепление волн сжатия и разгрузки (547). § 18. Измерение скорости звука в веществе, сжатом ударной волной (549). § 19. Фазовые пре-

вращения и расщепление ударных волн (552). § 20. Ударная волна разрежения в среде, испытывающей фазовый переход (556).	
4. Явления при выходе мощной ударной волны на свободную поверхность тела	560
§ 21. Предельные случаи твердого и газообразного состояний разгруженного вещества (560). § 22. Критерий полного испарения вещества при разгрузке (563). § 23. Опытное определение температуры и энтропии в мощной ударной волне при помощи исследования разгруженного вещества в газовой фазе (566). § 24. Свечение паров металла при разгрузке (569). § 25. Замечания о принципиальной возможности измерения энтропии в ударной волне по свечению при разгрузке (573).	
5. Некоторые другие явления	573
§ 26. Электропроводность неметаллических тел в ударных волнах (573). § 27. Измерение показателя преломления вещества, сжатого в ударной волне (575).	
Глава XII. Некоторые автомодельные процессы в газовой динамике	578
1. Введение	578
§ 1. Группы преобразований, допускаемые уравнениями газовой динамики (578). § 2. Автомодельные движения (580). § 3. Условия автомодельности движений (582). § 4. Два типа автомодельных решений (583).	
2. Схождение к центру сферической ударной волны и захлопывание пузырьков в жидкости	585
§ 5. Постановка задачи о сходящейся ударной волне (585). § 6. Основные уравнения (586). § 7. Исследование уравнений (588). § 8. Результаты решения (592). § 9. Захлопывание пузырьков. Задача Рэлея (595). § 10. Захлопывание пузырьков. Учет сжимаемости и вязкости (597).	
3. Выход ударной волны на поверхность звезды	599
§ 11. Распространение ударной волны при степенном законе уменьшения плотности (599). § 12. К вопросу о вспышках сверхновых звезд и происхождении космических лучей (602).	
4. Движение газа под действием кратковременного удара	605
§ 13. Постановка задачи и общий характер движения (605). § 14. Автомодельное решение и законы сохранения энергии и импульса (607). § 15. Решение уравнений (610). § 16. Ограничение показателя автомодельности законами сохранения импульса и энергии (614). § 17. Выход неавтомодельного движения на предельный режим и «бесконечность» энергии в автомодельном решении (615). § 18. Сосредоточенный удар по поверхности газа (взрыв на поверхности) (618). § 19. Результаты упрощенного рассмотрения автомодельного движения при сосредоточенном и нитевом ударах (621). § 20. Удар при падении очень быстрого метеорита на поверхность планеты (622). § 21. Сильный взрыв в неограниченной пористой среде (624).	
5. Распространение ударных волн в неоднородной атмосфере с экспоненциальным распределением плотности	626
§ 22. Сильный точечный взрыв (626). § 23. Автомодельное движение ударной волны в сторону возрастания плотности (628). § 24. Приложение автомодельного решения к взрыву (632). § 25. Автомодельное движение ударной волны в сторону уменьшения плотности. Приложение к взрыву (633).	
ПРИЛОЖЕНИЕ	636
Некоторые часто употребляемые константы, соотношения между единицами, формулы	636
Список литературы	639

Предисловие к третьему изданию

Второе, дополненное, русское издание «Физики ударных волн» вышло в 1966 г. вскоре после быстро разошедшегося первого. Почти одновременно издательство «Academic Press» (США) выпустило в двух томах перевод второго издания, выполненный под редакцией В.Хейса и Р.Пробстейна — известных ученых в области гидрогазодинамики.

С тех пор прошло 40 лет. Книга давно и повсюду стала библиографической редкостью. Она продолжает пользоваться большим спросом. Поэтому в 2002 г. издательство «Dover Publication» (США) переиздало без изменений английский перевод в виде сравнительно дешевого однотомника в мягком переплете, чтобы сделать книгу доступной студентам.

Первыми изданиями книги была заложена новая, активно развивавшаяся в течение всего этого времени, область знания — ее теперь называют физической газодинамикой. Конечно, за 40 лет появилось много такого, что могло бы найти отражение в современном издании. Но чтобы полноценным образом отразить все новое, что было сделано, без существенного увеличения и так большого объема, книгу пришлось бы переписать заново. До этого у меня просто не дошли руки, я писал другие книги, на другие темы.

Третье русское издание также выходит практически без изменений. Подавляющая часть материала не устарела и составляет фундамент физической газодинамики. Поэтому книга и в прежнем виде будет полезной студентам и научным работникам.

Ю. П. Райзер

Предисловие ко второму изданию

Общая структура книги и большая часть текста во втором издании оставлены без изменений. Вместе с тем некоторые разделы подверглись существенной переработке и добавлено значительное количество нового материала. В гл. V включен раздел, посвященный процессам пробоя (бурной ионизации) и нагревания газов под действием сфокусированного лазерного луча. Это — одно из интереснейших явлений в сфере взаимодействия интенсивного светового потока с веществом. Оно было обнаружено на опыте несколько лет назад, вскоре после создания лазеров, дающих огромные импульсные мощности в десятки мегаватт и выше, и сразу же привлекло к себе внимания многих физиков (в том числе и авторов книги, которые опубликовали работы по теории явления).

В связи с вопросами ионизации газа под действием лазерного излучения в гл. V добавлены параграфы, в которых рассматриваются излучение и поглощение света свободными электронами при столкновениях с нейтральными атомами. Живейший интерес, который сейчас проявляется к лазерам, побудил нас написать специальный параграф (в гл. II), посвященный полуклассической трактовке индуцированного испускания и лазерного эффекта.

Большим изменениям подвергся разд. 3 гл. VI, в котором рассматриваются вопросы ионизации, рекомбинации, электронного возбуждения. Этот раздел по существу написан заново и сильно расширен с учетом современных взглядов, согласно которым в этих процессах большую роль играют ступенчатая ионизация атомов (сначала возбуждение, потом ионизация) и захват электрона при тройных столкновениях на верхних уровнях атомов с последующей дезактивацией возбужденных атомов за счет электронных ударов и радиационных переходов. Подробнее рассмотрена ионизация воздуха. Изменилось и изложение близких вопросов ионизации газа в ударной волне (в гл. VII).

Заново написаны параграфы гл. VIII, касающиеся кинетики изменения степени ионизации и «закалки» при разлете ионизованного газа в пустоту. Этот вопрос был недавно пересмотрен с учетом вышеизложенного.

В гл. XII на основе материала первого издания и новых результатов выделен специальный раздел о распространении ударных волн в неоднородной атмосфере с экспоненциальным распределением плотности. Добавлено Приложение, где собраны некоторые константы, соотношения между атомными постоянными, соотношения между единицами и формулы, часто встречающиеся при практической работе по тематике книги. Библиография пополнена ссылками на работы последних лет.

Здесь упомянуты лишь основные, но далеко не все изменения и дополнения; разумеется, были также исправлены ошибки и опечатки, замеченные в первом издании.

Разделы физики и механики, затронутые в книге, развиваются исключительно быстро, причем открываются все новые и новые объекты их приложений (пример тому — явление пробоя и нагревания газов в фокусе лазерного луча).

Одним из свидетельств интереса, который проявляется к этим областям науки, служит то, что сразу же после выхода книги (в первом издании) ее начало переводить на английский язык американское издательство. Мы надеемся, что второе, переработанное и дополненное издание окажется полезным как специалистам, работающим в областях науки и техники, близких к профилю книги, так и тем, кто вступает в эти области. Мы благодарны нашим коллегам, указавшим на неточности и опечатки в первом издании книги.

Предисловие к первому изданию

Проблемы современной техники потребовали от науки проникновения в область «высоких параметров» состояния вещества, больших концентраций энергии высоких температур и давлений, больших скоростей. На практике такие условия осуществляются в сильных ударных волнах, при взрывах, при очень быстрых сверхзвуковых движениях тел в атмосфере, в мощных электрических разрядах и т. д.

При высоких температурах в газах протекают разнообразные физические и физико-химические процессы: возбуждение молекулярных колебаний, диссоциация, химические реакции, ионизация, излучение света. Эти процессы влияют на термодинамические свойства газов, а при достаточно быстрых движениях и достаточно быстрых изменениях состояния вещества на движение оказывает влияние и кинетика указанных процессов. Особенно важную роль при очень высоких температурах играют процессы, связанные с испусканием и поглощением излучения, и лучистый теплообмен. Перечисленные выше процессы часто представляют интерес и не только с точки зрения их энергетического влияния на движение газа: они вызывают изменения состава газа, его электрических свойств, приводят к свечению газа и возникновению многих оптических эффектов и т. д. Изучению всех этих вопросов, всему тому, что составляет содержание вновь возникшей ветви науки — «физической газодинамики», и посвящена значительная часть книги.

Большой научный и практический интерес представляет изучение сильных ударных волн в твердых телах. Недавние достижения, позволившие при помощи ударных волн сжать твердые тела до миллионов атмосфер, открыли новые пути исследования состояния твердого вещества при сверхвысоких давлениях. Этим вопросам также уделено в книге большое внимание.

В описываемой области тесно переплетаются многие разделы науки: газовая динамика, теория ударных волн, термодинамика и статистическая физика, молекулярная физика, физическая и химическая кинетики, физическая химия, спектроскопия, теория излучения, элементы астрофизики, физика твердого тела и др. Многие из рассматриваемых здесь физических явлений и процессов имеют различный характер и никак не связаны между собой. Следствием такой разнородности материала явилось отсутствие цельности в содержании книги. Некоторые главы имеют самостоятельный характер, относятся к совершенно различным областям физики или механики, и не все главы связаны между собой. Поэтому читателю, интересующемуся тем или иным вопросом, достаточно познакомиться только с соответствующими главами.

При рассмотрении самых различных вопросов, даже математического характера, мы стремились прежде всего разъяснить физическую сущность явлений при помощи простейших математических средств, широко пользуясь оценками и полукачественным анализом. Вместе с тем мы стремились помочь тем физикам, механикам и инженерам, которые работают в соответствующих областях прикладной физики и техники, и дать им практические средства для самостоятельного анализа сложных и многообразных физических явлений.

С этой целью рассмотрение большинства явлений доведено до численных результатов, формулы для расчета и оценок различных величин записаны в удобной для практической работы форме, приводится много полезных экспериментальных данных и сведений справочного характера и т. д.

Книга имеет теоретический характер, и описание экспериментальных установок и методов сведено к минимуму. Однако изложению результатов эксперимента и со-

поставлению их с результатами теоретических расчетов и оценок уделяется должное внимание.

Периодическая литература по «физической газодинамике» огромна. Однако, насколько нам известно, ни в нашей, ни в зарубежной литературе еще не делалось попыток систематизировать, обобщить и изложить с единой точки зрения в одной книге материал, относящийся к этой новой области науки. По-видимому, книга представляет собой первый опыт в этом направлении.

Книга была написана в течение 1960–1961 гг., чем определяется основной уровень использованной литературы. Однако в разделы, касающиеся вопросов, представления по которым совершенствуются особенно быстрыми темпами, позднее были внесены краткие дополнения и ссылки на новейшую литературу. Это относится в основном к гл. V, VI, VII.

Многообразие явлений и обширность материала заставили нас ограничиться рассмотрением далеко не всех вопросов, которые имеют отношение к изучаемой области. Мы не рассматриваем математической стороны гидродинамики, такой проблемы как обтекание тел сверхзвуковым потоком, почти не затрагиваем электромагнитных явлений, совершенно не касаемся вопросов термоядерного синтеза, поведения плазмы в магнитном поле, всего, что относится к магнитной гидро- и газодинамике, вопросов горения и детонации и т. п. По всем этим разделам уже имеется немало книг.

Выбор материала книги в известной степени субъективен. Значительное место уделяется рассмотрению явлений, которые авторы исследовали в своих собственных работах. Так, на оригинальных работах почти полностью основаны гл. VIII и IX, в большой степени — VII, X, XII, частично — гл. XI. Гл. I представляет собой результат коренной переработки ранней книги одного из авторов «Теория ударных волн и введение в газодинамику», которая была издана в 1946 г. в Издательстве АН СССР.

Нам хотелось бы выразить особую признательность А. С. Компанейцу, которому принадлежит разработка ряда вопросов, затрагиваемых в книге, за многие полезные обсуждения и замечания, сделанные при чтении рукописи. Мы благодарны Л. В. Альтшулеру и С. Б. Кормеру, на работах которых в значительной степени основана гл. XI книги, за замечания, сделанные при чтении рукописи этой главы. Мы благодарны также М. А. Ельяшевичу, который внимательно прочел рукопись и сделал ценные замечания.

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОДИНАМИКИ И КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Непрерывное течение невязкого и нетеплопроводного газа

§ 1. Уравнения газовой динамики. Для значительного сжатия жидкостей (и твердых тел) нужны давления в сотни тысяч атмосфер и выше. Поэтому в обычных условиях жидкость можно рассматривать как несжимаемую среду. Скорости течения жидкости при малых изменениях плотности гораздо меньше скорости звука, которая является масштабом скорости, характеризующим сплошную среду. При небольших изменениях плотности и движениях, медленных по сравнению со скоростью звука, газ также можно считать несжимаемым и описывать его движение при помощи гидродинамики несжимаемой жидкости. Однако заметные изменения плотности и скорости течения, сравнимые со скоростью звука, в газах, в отличие от жидкостей, достигаются сравнительно легко: при перепадах давления порядка величины самого давления, т. е. при $\Delta p \sim 1$ атм, если начальное давление газа атмосферное. В таких условиях необходимо учитывать сжимаемость вещества. Уравнения газовой динамики тем и отличаются от уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости, что в них учтена возможность больших изменений плотности веществ.

Состояние движущегося газа с известными термодинамическими свойствами определяется заданием скорости, плотности и давления, как функций координат и времени. Для нахождения этих функций служит система уравнений газодинамики, которая представляет собой выраженные в дифференциальной форме общие законы сохранения массы, импульса и энергии вещества.

Выпишем эти уравнения без вывода, который можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]. Будем пренебрегать действием массовых сил (силы тяжести), а также вязкостью и теплопроводностью вещества ¹⁾. Обозначим через $\partial/\partial t$ частную производную по времени, относящуюся к данной точке пространства, локальную производную, а через d/dt — субстанциональную производную, характеризующую изменение во времени какой-либо величины, связанной с данной движущейся частицей вещества. Если $\mathbf{u}$ — вектор скорости частицы с компонентами

¹⁾ Уравнения газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности будут рассмотрены ниже, в § 20.

u_x, u_y, u_z или u_i , где $i = 1, 2, 3$, то

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla). \quad (1.1)$$

Первое уравнение — уравнение непрерывности — свидетельствует о сохранении массы вещества, т.е. о том, что изменение плотности ϱ в данном элементе объема происходит за счет втекания (или вытекания) вещества в этот элемент:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

С помощью определения (1.1) уравнение непрерывности можно записать в форме

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.3)$$

В частном случае несжимаемой жидкости, когда $\varrho = \text{const}$, уравнение непрерывности упрощается:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.4)$$

Второе уравнение выражает закон Ньютона и не отличается от уравнения движения несжимаемой жидкости (p — давление):

$$\varrho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p \quad (1.5)$$

или, в форме уравнения Эйлера,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p. \quad (1.6)$$

Как легко проверить путем непосредственного вычисления, уравнение движения вместе с уравнением непрерывности эквивалентно закону сохранения, записанному в форме, аналогичной уравнению (1.2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho u_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.7)$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса

$$\Pi_{ik} = \varrho u_i u_k + p \delta_{ik}. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) выражает тот факт, что изменение i -й компоненты импульса в данной точке пространства связано с вытеканием (втеканием) импульса вместе с веществом (первое слагаемое в (1.8)) и работой сил давления (второе слагаемое)¹⁾.

Третье уравнение является существенно новым по сравнению с гидродинамикой несжимаемой жидкости и эквивалентно первому закону термодинамики — закону сохранения энергии. Его можно прочесть так: изменение удельной внутренней энергии ε данной частицы вещества происходит за счет работы сжатия, которую производит над нею окружающая среда, а также вследствие выделения энергии от посторонних источников:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = Q. \quad (1.9)$$

¹⁾ В правой части формулы (1.7) производится суммирование по дважды встречающемуся индексу k ($k = 1, 2, 3$); $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Здесь $V = 1/\rho$ — удельный объем, а Q — энерговыделение в 1 с на 1 г вещества от внешних источников (Q может быть и отрицательным, если имеются немеханические потери энергии, например на излучение).

С помощью уравнений непрерывности и движения уравнение энергии также можно привести к форме, подобной (1.2), (1.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{\rho u^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \mathbf{u} \right] + \rho Q. \quad (1.10)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что изменение полной энергии единицы объема в данной точке пространства происходит за счет вытекания (втекания) энергии при движении вещества, работы сил давления и энерговыделения от внешних источников.

Уравнения непрерывности, движения и энергии образуют систему пяти уравнений (уравнение движения векторное и эквивалентно трем координатным) относительно пяти неизвестных функций координат и времени: ρ , u_x , u_y , u_z , p . Внешние источники энергии Q считаются заданными, а внутреннюю энергию ε можно выразить через плотность и давление, поскольку термодинамические свойства вещества предполагаются известными: $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$.

Если энергия, как это часто бывает, известна не как функция давления и плотности, а как функция температуры T и плотности или температуры и давления, то к системе следует присоединить уравнение состояния вещества $p = f(T, \rho)$. Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$pV = AT, \quad p = A\rho T, \quad (1.11)$$

где A — газовая постоянная, рассчитанная на 1 г ¹⁾.

Уравнение энергии (1.9) имеет общее значение и справедливо даже тогда, когда вещество не находится в термодинамическом равновесии. В том частном и практически важнейшем случае, когда вещество термодинамически равновесно, его можно записать в иной форме с помощью второго закона термодинамики:

$$TdS = d\varepsilon + pdV, \quad (1.12)$$

где S — удельная энтропия. В отсутствие внешних источников тепла третье уравнение газодинамики эквивалентно уравнению постоянства энтропии частицы, т. е. условию адиабатичности движения

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (1.13)$$

В идеальном газе с постоянной теплоемкостью энтропия особенно просто выражается через удельный объем или давление (плотность)

$$S = c_V \ln p V^\gamma + \text{const}, \quad (1.14)$$

где γ — показатель адиабаты, равный отношению удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, $\gamma = c_p/c_V = 1 + A/c_V$. В этом случае уравнение адиабатичности (1.13) (или энергии) можно непосредственно записать в форме дифференциального уравнения, связывающего давление и объем (давление и плотность),

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \gamma \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0. \quad (1.15)$$

¹⁾ $A = R/\mu$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молярная масса.

К системе дифференциальных уравнений газодинамики добавляются соответствующие начальные и граничные условия.

§ 2. Лагранжевы координаты. Уравнения, в которых газодинамические величины рассматриваются как функции пространственных координат и времени, называют уравнениями в эйлеровой форме или уравнениями в эйлеровых координатах.

В случае одномерных движений, т. е. плоских, цилиндрических и сферически-симметричных, часто пользуются другими, лагранжевыми координатами. В отличие от эйлеровой, лагранжева координата связана не с определенной точкой пространства, а с определенной частицей вещества. Газодинамические величины, выраженные как функции лагранжевых координат, характеризуют изменения плотности, давления, скорости каждой частицы вещества с течением времени. Лагранжевы координаты особенно удобны при рассмотрении внутренних процессов (не выходящих за рамки данной частицы), протекающих в веществе скажем, химической реакции, ход которой с течением времени зависит от изменения температуры и плотности частицы. Введение лагранжевых координат в ряде случаев позволяет также более коротким и легким путем находить точные решения уравнений газодинамики или делает более удобным численное интегрирование последних.

Производная по времени в лагранжевых координатах эквивалентна просто субстанциональной производной d/dt . Частицу можно характеризовать массой вещества, которое отделяет ее от какой-то другой, фиксированной частицы, или ее координатой в начальный момент времени.

Особенно просто введение лагранжевых координат в плоском случае, когда движение зависит только от одной декартовой координаты x . Обозначим текущую эйлерову координату рассматриваемой частицы через x , а координату какой-то фиксированной частицы — через x_1 (в качестве фиксированной может быть, например, выбрана частица около твердой стенки или около границы газа с пустотой, если таковые имеются в задаче). Тогда масса столба единичного сечения между рассматриваемой частицей и фиксированной равна

$$m = \int_{x_1}^x \varrho dx, \quad (1.16)$$

а приращение массы при переходе от частицы к соседней равно

$$dm = \varrho dx. \quad (1.17)$$

Величину m можно выбрать в качестве лагранжевой координаты.

Если в начальный момент, как это часто бывает, газ покоится и плотность его постоянна, $\varrho(x, 0) = \varrho_0$, то в качестве лагранжевой удобно взять начальную координату частицы, отсчитываемую от точки x_1 ; обозначим ее через a . Тогда

$$a = \int_{x_1}^x \frac{\varrho}{\varrho_0} dx, \quad da = \frac{\varrho}{\varrho_0} dx. \quad (1.18)$$

Уравнения плоского движения газа в лагранжевых координатах приобретают простую форму. Уравнение непрерывности, записанное относительно удельного объема $V = 1/\varrho$ и единственной, x -й, компоненты скорости u , есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m} \quad \text{или} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial a}. \quad (1.19)$$

Здесь, как и в последующих уравнениях, производная по времени представляет собой субстанциональную производную d/dt , но ее лучше записать в виде частной производной $\partial/\partial t$, чтобы подчеркнуть, что она берется при m и $a = \text{const}$, т. е. для заданной частицы с определенной лагранжевой координатой m или a . Уравнение движения в лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial p}{\partial a}. \quad (1.20)$$

Что же касается уравнения энергии, записанного в форме (1.9) или в форме условия адиабатичности (1.13) (при отсутствии внешних источников тепла и диссипативных процессов — вязкости и теплопроводности), то они сохраняют свою форму; следует лишь заменить обозначение d/dt на $\partial/\partial t$. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью условие адиабатичности (1.13) дает

$$pV^\gamma = f[S(m)], \quad (1.21)$$

где функция f зависит только от энтропии данной частицы m . В так называемом изэнтропическом движении, когда энтропии всех частиц одинаковы и не меняются со временем, $f = \text{const}$, причем уравнение $pV^\gamma = \text{const}$ справедливо как в лагранжевых, так и в эйлеровых координатах.

Существенно, что в плоском случае в уравнение не входит в явном виде эйлерова координата x . После того как лагранжевы уравнения решены и найдена функция $V(m, t)$, к зависимости газодинамических величин от эйлеровой координаты можно перейти с помощью квадратуры, интегрируя уравнение (1.17),

$$dx = V(m, t)dm, \quad x(m, t) = \int_0^m V(m, t)dm + x_1(t). \quad (1.22)$$

В цилиндрическом и сферическом случаях уравнения газодинамики в лагранжевых координатах несколько более сложны, чем в плоском, так как теперь в уравнения в явном виде входит эйлерова координата и в систему уравнений включается дополнительное уравнение, связывающее лагранжеву и эйлерову координаты. Например, в сферическом случае лагранжеву координату можно определить как массу, заключенную внутри сферического объема около центра симметрии:

$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \varrho dr, \quad dm = 4\pi r^2 \varrho dr. \quad (1.23)$$

Если в начальный момент плотность газа была постоянной, то можно в качестве лагранжевой координаты взять начальный радиус r_0 «частицы», рассматриваемой как элементарный сферический слой:

$$\frac{4\pi r_0^3}{3} \varrho_0 = \int_0^r 4\pi r^2 \varrho dr, \quad dr_0 = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\varrho}{\varrho_0} dr. \quad (1.24)$$

Уравнение непрерывности в сферических лагранжевых координатах есть

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} 4\pi r^2 u \quad \text{или} \quad \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r_0} r^2 u. \quad (1.25)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial m} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\partial p}{\partial r_0}. \quad (1.26)$$

Уравнения энергии или адиабатичности остаются такими же, как и в плоском случае.

В качестве дополнительного уравнения в систему включается дифференциальное (или интегральное) соотношение (1.23) или (1.24), связывающее m и r или r_0 и r .

Уравнения для цилиндрического случая составляются вполне аналогично сферическому.

Следует отметить, что в двумерных и трехмерных течениях переход к лагранжевым координатам, как правило, невыгоден, так как уравнения при этом сильно усложняются.

§ 3. Звуковые волны. Скорость звука входит в уравнения газовой динамики, как скорость распространения малых возмущений. В предельном случае, когда изменения плотности $\Delta \varrho$ и давления Δp при движении вещества очень малы по сравнению со средними значениями плотности и давления ϱ_0 и p_0 , а скорости движения малы по сравнению со скоростью звука c , уравнения газовой динамики превращаются в уравнения акустики и описывают распространение звуковых волн.

Запишем плотность и давление в виде $\varrho = \varrho_0 + \Delta \varrho$, $p = p_0 + \Delta p$ и будем рассматривать величины $\Delta \varrho$, Δp , а также скорость u как малые. Пренебрегая величинами второго порядка малости, преобразуем эйлеровы уравнения непрерывности и движения для плоского случая. Уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial \Delta \varrho}{\partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.27)$$

Уравнение движения приобретает вид

$$\varrho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial x}. \quad (1.28)$$

При последнем преобразовании принято во внимание, что движение в звуковой волне является адиабатическим. Поэтому малое изменение давления связано с малым изменением плотности через адиабатическую производную: $\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \Delta \varrho$. Эта производная подставляет собой, как мы сейчас увидим, квадрат скорости звука,

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s, \quad (1.29)$$

и соответствует невозмущенному состоянию вещества.

Дифференцируя первое из написанных уравнений по времени, а второе по координате, исключим смешанную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x}$. Получим волновое уравнение для изменения плотности:

$$\frac{\partial^2 \Delta \varrho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Delta \varrho}{\partial x^2}. \quad (1.30)$$

Такому же уравнению удовлетворяет и пропорциональная $\Delta \varrho$ величина изменения давления, $\Delta p = c^2 \Delta \varrho$, а также скорость движения u и все другие параметры ве-

щества, например, температура ¹⁾. Волновое уравнение типа (1.30) допускает две группы решений:

$$\Delta \varrho = \Delta \varrho(x - ct), \quad \Delta p = \Delta p(x - ct), \quad u = u(x - ct) \quad (1.31)$$

и

$$\Delta \varrho = \Delta \varrho(x + ct), \quad \Delta p = \Delta p(x + ct), \quad u = u(x + ct) \quad (1.32)$$

(под c подразумеваем положительный корень $c = +\sqrt{(\partial p / \partial \varrho)_s}$).

Первая группа описывает возмущение, распространяющееся в сторону положительной оси x , а вторая — в противоположную сторону. Действительно, в первом случае, например, заданное значение плотности соответствует определенному значению аргумента $x - ct$, т. е. с течением времени бежит в сторону положительных x со скоростью c . Таким образом, c есть скорость распространения звуковых волн.

Замечая, что $\partial u(x \mp ct) / \partial x = \mp (1/c) \partial u(x \mp ct) / \partial t$, и принимая во внимание, что в невозмущенном газе перед волной $u = 0$, $\Delta \varrho = 0$ (см. сноску), найдем с помощью уравнения (1.27) связь между массовой скоростью газа u и изменениями плотности или давления:

$$u = \pm \frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho = \pm \frac{\Delta p}{\varrho_0 c}, \quad \Delta \varrho = c^2 \Delta \varrho = \pm \varrho_0 c u. \quad (1.33)$$

Верхний знак относится к волне, бегущей в сторону положительных x , а нижний — в сторону отрицательных.

В обоих случаях массовая скорость направлена в сторону распространения волны там, где вещество сжато, и в противоположную сторону там, где оно разрежено.

Общее решение волновых уравнений для $\Delta \varrho$ и u складывается из двух частных, соответствующих волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях оси x . Согласно (1.31), (1.32), (1.33), решения для плотности и скорости можно записать в следующем виде:

$$\Delta \varrho = \frac{\varrho_0}{c} f_1(x - ct) + \frac{\varrho_0}{c} f_2(x + ct), \quad (1.34)$$

$$u = f_1(x - ct) - f_2(x + ct), \quad (1.35)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции своих аргументов, которые определяются начальными распределениями плотности и скорости:

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho(x, 0) + u(x, 0) \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c}{\varrho_0} \Delta \varrho(x, 0) - u(x, 0) \right].$$

Например, если в начальный момент имеется прямоугольное возмущение плотности, а газ везде неподвижен, то вправо и влево побегут прямоугольные возмущения, как показано на рис. 1.1.

Если в начальный момент распределения плотности и скорости имели вид, изображенный на рис. 1.2, причем $u = (c/\varrho_0) \Delta \varrho$, так что $f_2 = 0$, то прямоугольные им-

¹⁾ Чтобы получить волновое уравнение для скорости, продифференцируем уравнение (1.30) по времени и воспользуемся уравнениями (1.27), (1.28):

$$\frac{\partial^3 \Delta \varrho}{\partial t^3} = c^2 \frac{\partial^3 \Delta \varrho}{\partial x^2 \partial t} = -\varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \varrho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

откуда $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t)$. Замечая, что перед волной в невозмущенном веществе $u = 0$, найдем, что $f(t) = 0$.

пульсы побегут только в одну сторону. (Такое возмущение может быть создано поршнем, который в начальный момент начал вдвигаться в покоящийся газ с постоянной скоростью u , а через некоторое время «мгновенно» остановился. Если длина прямоугольного импульса равна L , то, очевидно, время действия поршня $t_1 = L/c$.)

Особую важность для акустики представляют монохроматические звуковые волны, в которых все величины являются периодическими функциями времени типа

$$f = A \cos \left(\frac{\omega}{c}x - \omega t \right),$$

или, в комплексной форме,

$$f = A \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

$\nu = \omega/2\pi$ есть частота звука, а $\lambda = c/\nu$ — длина волны. Всякое возмущение можно разложить в интеграл Фурье, т.е. представить в виде совокупности монохроматических волн с различными частотами.

Воспринимаемые человеческим ухом звуки имеют частоты ν от 20 до 20000 Гц (колебаний в 1 с) и длины волн, соответствующие скорости звука в атмосферном воздухе $c = 330$ м/с¹⁾, от 15 м до 1,5 см.

Для характеристики численных значений различных величин в звуковой волне укажем, что для сильнейшего звука, в 10^5 раз более интенсивного²⁾, чем оркестр фортиссимо, амплитуда изменения плотности воздуха в волне составляет 0,4 % от нормальной плотности; амплитуда изменения давления — 0,56 % от атмосферного; амплитуда скорости — 0,4 %, от скорости звука, т.е. 1,3 м/с. Амплитуда смещения частиц воздуха порядка $\Delta x \approx u/2\pi\nu = (u/c)(\lambda/2\pi) \approx 6 \cdot 10^{-4} \lambda$ ($\Delta x \approx 0,036$ см для $\nu = 500$ Гц).

Найдем энергию, связанную с малым возмущением, которое распространяется по покоящемуся газу. Приращение удельной внутренней энергии возмущенного вещества с точностью до членов второго порядка малости относительно $\Delta \rho$ (или Δp ,

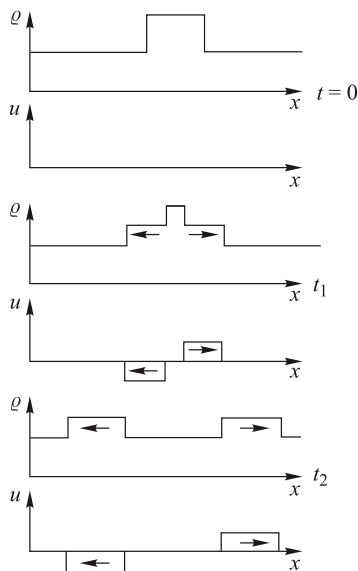


Рис. 1.1. Распространение прямоугольного импульса плотности и скорости по одной координате в линейной акустике

¹⁾ Показатель адиабаты воздуха при нормальных условиях

$$\gamma = 1,4; \quad c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{1/2} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = (\gamma A T_0)^{1/2}$$

(так как при $S = \text{const}$ $p \sim \rho^\gamma$).

²⁾ Как будет показано ниже, энергия или интенсивность звука пропорциональна квадрату амплитуды изменений давления или плотности. Громкость звука измеряется в децибеллах, в логарифмической шкале. За нуль принимается средний порог чувствительности человеческого уха. Увеличение громкости на n децибел означает увеличение энергии звука в $10^{n/10}$ раз. Увеличение громкости от шелеста листьев или шепота (~ 10 дБ) до оркестра фортиссимо (~ 80 дБ) соответствует увеличению энергии звука в 10^7 раз.

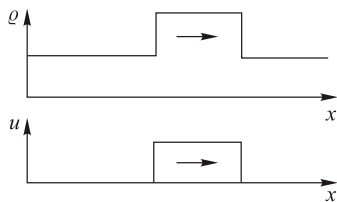


Рис. 1.2

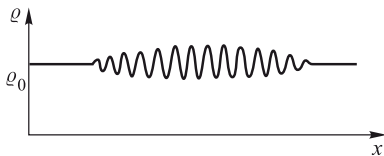


Рис. 1.3

или u) есть:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho} \right)_0 \Delta \varrho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varrho^2} \right)_0 (\Delta \varrho)^2.$$

В силу адиабатичности движения производные берутся при постоянной энтропии. Их можно вычислить с помощью термодинамического соотношения: $d\varepsilon = TdS - pdV = (p/\varrho^2) d\varrho$. Получим

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{p_0}{\varrho_0^2} \Delta \varrho + \frac{c^2}{2\varrho_0^2} (\Delta \varrho)^2 - \frac{p_0}{\varrho_0^3} (\Delta \varrho)^2.$$

Приращение внутренней энергии в 1 см^3 с той же точностью равно

$$\begin{aligned} \varrho \varepsilon - \varrho_0 \varepsilon_0 &= (\varrho_0 + \Delta \varrho)(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \Delta \varrho = \\ &= \left(\varepsilon_0 + \frac{p_0}{\varrho_0} \right) \Delta \varrho + \frac{c^2}{2\varrho_0} (\Delta \varrho)^2 = w_0 \Delta \varrho + \frac{c^2}{2\varrho_0} (\Delta \varrho)^2, \end{aligned}$$

где $w = \varepsilon + p/\varrho$ — удельная энтальпия.

Плотность внутренней энергии, связанной с возмущением, в первом приближении пропорциональна $\Delta \varrho$. Плотность кинетической энергии $\varrho u^2/2 \approx \varrho_0 u^2/2$ есть величина второго порядка малости. Из соотношения (1.33), справедливого для бегущей плоской волны, видно, что член второго порядка в плотности внутренней энергии и кинетическая энергия в точности равны друг другу, так что полная плотность энергии возмущения есть

$$E = w_0 \Delta \varrho + \frac{c^2}{2\varrho_0} (\Delta \varrho)^2 + \frac{\varrho_0 u^2}{2} = w_0 \Delta \varrho + \varrho_0 u^2. \quad (1.36)$$

Член первого порядка малости в энергии связан с изменением объема всего газа, которое произошло в результате возмущения. Если возмущение было создано таким образом, что объем газа в целом не изменился, то энергия возмущения всего газа есть величина второго порядка по $\Delta \varrho$, так при интегрировании по объему член, пропорциональный $\Delta \varrho$, исчезает.

Таково, например, положение в волновом пакете, который распространяется по газу, занимающему бесконечное пространство, причем на бесконечности газ не возмущен (рис. 1.3). Изменения плотности в областях сжатия с точностью до членов второго порядка компенсируются изменениями в областях разрежения.

Таким образом, энергия звука есть величина второго порядка малости, пропорциональная квадрату амплитуды ¹⁾:

$$E_{\text{зв}} = \rho_0 u^2. \quad (1.37)$$

Если возмущение было создано таким образом, что объем газа при этом изменился, то в энергии возмущения остается член, пропорциональный первой степени $\Delta \rho$. Однако эта, основная, доля энергии, пропорциональная $\Delta \rho$, может быть «возвращена газом обратно», если источник возмущения возвращается в свое исходное положение. Энергия, оставшаяся при этом в возмущенном газе, составит только величину второго порядка малости. Поясним это положение на простом примере.

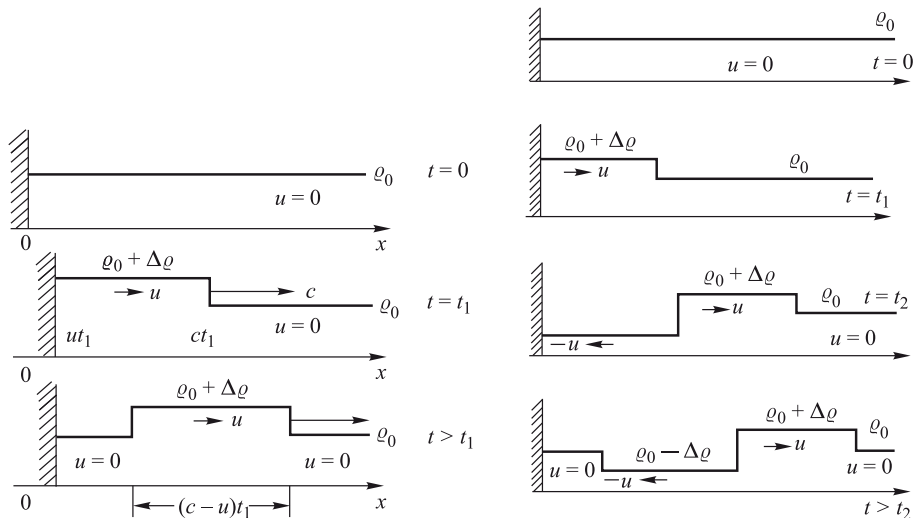


Рис. 1.4. Распространение импульса сжатия от поршня, который вдвинулся в газ

Рис. 1.5. Распространение импульса разрежения от поршня, который сначала вдвинулся в газ, а затем вернулся на место

Пусть в начальный момент в покоящийся газ начал вдвигаться поршень с постоянной скоростью u (гораздо меньшей скорости звука $u \ll c$). В момент t_1 поршень «мгновенно» останавливается. По газу побежит импульс сжатия длиной $(c-u)t_1 \approx ct_1$, энергия которого равна работе, затраченной внешней силой, вдвигающей поршень, $p_{\text{ср}}ut_1 = (p_0 + \Delta p)ut_1 \approx p_0ut_1$ (этот случай был рассмотрен выше и иллюстрируется рис. 1.4). Энергия в первом приближении пропорциональна «амплитуде» волны u , $\Delta \rho$, Δp и времени сжатия (т.е. длине возмущения). Предоставим теперь газу возможность вернуть поршень на место, причем таким образом, что в момент t_1 скорость поршня u «мгновенно» меняется на противоположную, $(-u)$, а в момент $t_2 = 2t_1$ поршень, возвратившись в исходное положение, «мгновенно» останавливается. Возмущение будет теперь иметь вид, изображенный на рис. 1.5, где показаны состояния в моменты $t = 0, t_1, t_2$ и $t > t_2$. Легко проверить непосред-

¹⁾ Выражение (1.37) следует усреднить по времени или по пространству:

$$E_{\text{зв}} = \rho_0 u^2 (\overline{u^2} \sim \overline{\Delta \rho} \sim \overline{\Delta p}, \text{ тогда как } \overline{u^2} \sim (\overline{\Delta \rho})^2 \sim (\overline{\Delta p})^2 > 0).$$

ственным вычислением, что за второй период от t_1 до t_2 газ совершает над поршнем работу, в первом приближении в точности равную работе, которую совершил поршень над газом за первый период от нуля до t_1 . Длины положительной и отрицательной областей импульса в первом приближении также одинаковы и равны

$$ct_1 = c(t_2 - t_1).$$

Таким образом, если просуммировать энергии в сжатой и разреженной областях импульса, то члены первого порядка сократятся. Если производить все вычисления с учетом членов следующего порядка ¹⁾, то в энергии останется член второго порядка, причем плотность энергии возмущения выразится общей формулой (1.37).

§ 4. Сферические звуковые волны. В отсутствие поглощения (т.е. без учета вязкости и теплопроводности; см. § 22) амплитуда и плотность энергии плоских волн не уменьшаются с течением времени. Например, импульсы, изображенные на рис. 1.4 и 1.5, уходят на «бесконечность», не изменяя своей формы и амплитуды.

В сферической волне это уже не так. Линеаризируя уравнение непрерывности в сферически-симметричном случае, получаем

$$\frac{\partial \Delta \varrho}{\partial t} = -\frac{\varrho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u.$$

Линеаризованное уравнение движения не отличается от уравнения (1.28):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0} \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial r}.$$

Отсюда, как и в плоском случае, получим волновое уравнение для $\Delta \varrho$, решение которого, описывающее волну, расходящуюся от центра, имеет вид

$$\Delta \varrho = \frac{f(r - ct)}{r}. \quad (1.38)$$

Если рассматривать короткие импульсы, длиной гораздо меньше r , то можно сказать, что форма импульса, задаваемая функцией $f(r - ct)$, не меняется, а амплитуда волны падает пропорционально $1/r$. Это вполне естественно. Предположим, что из центра бежит импульс конечной ширины Δr . По мере распространения импульса масса вещества, вовлеченного в движение, равная примерно $\varrho_0 4\pi r^2 \Delta r$, растет пропорционально r^2 . Звуковая энергия единицы объема пропорциональна $(\Delta \varrho)^2$. Поскольку энергия не меняется, т.е. $(\Delta \varrho)^2 r^2 = \text{const}$, то амплитуда должна убывать как $\Delta \varrho \sim 1/r$.

Сферическая волна отличается от плоской еще в одном отношении. Подставим решение (1.38) в уравнение движения,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varrho_0} \left[\frac{f'(r - ct)}{r} - \frac{f(r - ct)}{r^2} \right],$$

и проинтегрируем полученное выражение по времени. Получим решение для скорости:

$$u = \frac{c}{\varrho_0} \left[\frac{f(r - ct)}{r} - \frac{\int_{r-ct}^{r} f(\xi) d\xi}{r^2} \right] = \frac{c}{\varrho_0} \left[\Delta \varrho - \frac{\varphi(r - ct)}{r^2} \right], \quad (1.39)$$

¹⁾ В частности, длины импульсов сжатия и разрежения будут отличаться на величину $2ut_1$ (при $t_2 - t_1 = t_1$).

которое отличается от формулы для плоского случая (1.33) наличием дополнительного члена. В плоской волне в области возмущения вещество может быть только сжато, как это имеет место в случае, изображенном на рис. 1.4. В сферической волне это невозможно: за областью сжатия обязательно следует область разрежения.

В самом деле, за областью возмущения $\Delta \rho$ и u обращаются в нуль. В плоском случае в силу пропорциональности $u \sim \Delta \rho$ это условие выполняется автоматически, независимо от формы импульса. В сферической же волне для этого необходимо, чтобы за областью возмущения $\varphi(r - ct) = 0$, т. е. чтобы был равен нулю интеграл по всей области возмущения:

$$\varphi(r - ct) = \int f(\xi) d\xi = \int r \Delta \rho dr = 0.$$

Отсюда видно, что $\Delta \rho$ в сферической волне меняет знак, т. е. за областью сжатия следует область разрежения.

Дополнительное количество вещества, заключенного в волне, равно $\int \Delta \rho 4\pi r^2 dr$. Но $\Delta \rho \sim 1/r$, поэтому дополнительная масса в волне сжатия возрастает при расхождении волны от центра. Растущее в процессе распространения количество сжатого вещества и вызывает появление следующей за волной повышенной плотности волны пониженной плотности.

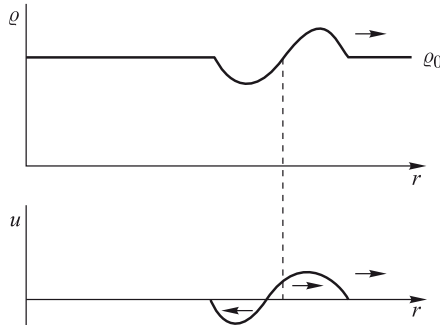


Рис. 1.6. Распределение плотности и скорости в сферической звуковой волне

Изменение давления в сферической волне пропорционально изменению плотности, как и в плоской. Скорость же, как видно из формулы (1.39), не пропорциональна $\Delta \rho$ или Δp . В частности, скорость и изменение плотности меняют знак в разных точках, так что в волне, бегущей от центра, профили плотности и скорости имеют вид, изображенный на рис. 1.6.

§ 5. Характеристики. § 3 было показано, что если в начальный момент t_0 в какой-либо точке x_0 неподвижного газа, плотность и давление которого везде одинаковы, создать произвольные малые возмущения скорости и давления (или плотности¹⁾), то от этой точки в обе стороны со скоростью звука побегут две волны, несущие возмущения. В волне, распространяющейся в сторону положительных x ,

¹⁾ В силу изэнтропичности течения изменения плотности и давления не независимы, а всегда связаны между собой термодинамическим соотношением $\Delta p = c^2 \Delta \rho$.

направо, малые изменения всех величин связаны между собою соотношениями

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c} = \frac{c}{\rho_0} \Delta_1 \varrho = f(x - ct)^1).$$

В волне, распространяющейся налево,

$$\Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c} = -\frac{c}{\rho_0} \Delta_2 \varrho = -f_2(x + ct).$$

Произвольные возмущения Δu и Δp , возникшие в начальный момент, всегда можно разложить на две составляющие: $\Delta u = \Delta_1 u + \Delta_2 u$, $\Delta p = \Delta_1 p + \Delta_2 p$, подчиненные указанным соотношениям, так что в общем случае начальное возмущение распространяется в разные стороны в виде двух волн.

Если начальные возмущения Δu , Δp не произвольны, а уже связаны между собой одним из соотношений, то возмущение бежит в одну из сторон (это соответствует обращению в нуль одной из функций, f_1 или f_2).

Если газ не покоится, а движется как целое с постоянной скоростью u , то картина не меняется, за тем лишь исключением, что теперь волны сносятся потоком, так что скорости их распространения относительно неподвижного наблюдателя становятся равными $u + c$ (направо) и $u - c$ («налево»²⁾). В этом легко убедиться, если перейти в уравнениях газодинамики к новой системе координат, движущейся вместе с газом со скоростью u .

Предположим теперь, что в произвольном плоском изэнтропическом течении газа, описываемом функциями $u(x, t)$, $p(x, t)$ (или $\varrho(x, t)$, см. первую сноску на с. 24), в момент t_0 в точке x_0 возникли произвольные малые возмущения скорости и давления. Рассматривая небольшую область около точки x_0 и малые промежутки времени (небольшую окрестность точки x_0 , t_0 на плоскости x, t), можно в первом приближении пренебречь изменениями невозмущенных функций $u(x, t)$, $p(x, t)$, а следовательно, $\varrho(x, t)$ и $c(x, t)$ в этой окрестности, и считать их постоянными, равными значениям в точке x_0 , t_0 . Вся описанная выше картина распространения возмущений переносится и на этот случай. Если возмущения $\Delta u(x_0, t_0)$, $\Delta p(x_0, t_0)$ произвольны, то они также распадаются на две составляющие, одна из которых начнет распространяться вправо со скоростью $u_0 + c_0$, а другая «налево» со скоростью $u_0 - c_0$, причем под u_0 и c_0 здесь следует понимать локальные значения этих величин в точке x_0 , t_0 .

Поскольку u и c меняются от точки к точке, то на протяжении длительного промежутка времени пути распространения возмущений на плоскости x, t , описываемые уравнениями $dx/dt = u + c$ и $dx/dt = u - c$, будут искривляться. Эти линии на плоскости x, t , вдоль которых распространяются малые возмущения, называются характеристиками. При плоском изэнтропическом течении газа, как видим, существуют два семейства характеристик, которые описываются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = u + c, \quad \frac{dx}{dt} = u - c$$

и называются, соответственно, C_+ - и C_- -характеристиками.

Через каждую точку на плоскости x, t можно провести две характеристики, принадлежащие C_+ - и C_- -семействам. В общем случае характеристики криволинейны,

¹⁾ Мы пишем здесь Δu вместо u в целях единства обозначений.

²⁾ Мы заключаем слово «налево» в кавычки: если $u > c$, то волна также бежит направо, но, разумеется, медленнее, чем первая.

как показано на рис. 1.7. В области постоянного течения, где u, p, c, ρ постоянны в пространстве и во времени, характеристики обоих семейств — прямые линии.

Если течение не изэнтропично, а только адиабатично, т.е. энтропии различных частиц газа не меняются во времени, но отличаются друг от друга, возможны и возмущения энтропии. В силу адиабатичности движения $dS/dt = 0$, т.е. всякое возмущение энтропии, не сопровождающееся возмущениями других величин (p, ρ, u), остается локализованным в частице и перемещается вместе с частицей вдоль линии тока. Линии тока, следовательно, в случае неизэнтропического течения также являются характеристиками. Они описываются уравнением $dx/dt = u$ и называются C_0 -характеристиками.

В неизэнтропическом течении через каждую точку x, t проходят три характеристики и плоскость x, t покрывается сеткой трех семейств характеристик C_+, C_-, C_0 (рис. 1.8).

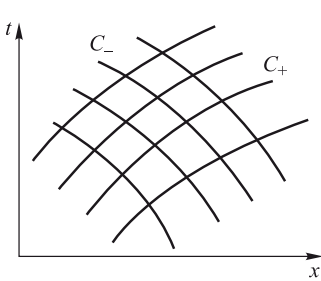


Рис. 1.7. Сетка двух семейств характеристик в изэнтропическом случае

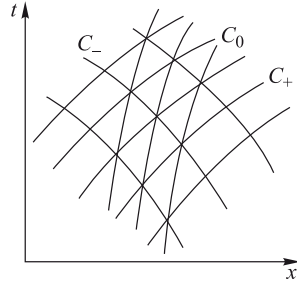


Рис. 1.8. Сетка трех семейств характеристик в неизэнтропическом случае

До сих пор мы говорили о характеристиках как о линиях на плоскости x, t , вдоль которых распространяются малые возмущения. Однако этим не исчерпывается значением характеристик.

Уравнения газовой динамики можно преобразовать к такому виду, чтобы они содержали производные от газодинамических величин только вдоль характеристик. Как будет показано в следующем параграфе, в изэнтропическом течении вдоль характеристик переносятся не только малые возмущения, но и определенные комбинации газодинамических величин.

Как известно, функцию двух переменных $f(x, t)$ можно дифференцировать по времени вдоль определенной кривой $x = \varphi(t)$ на плоскости x, t . Производная по времени от функции $f(x, t)$ вдоль произвольной кривой $x = \varphi(t)$ определяется наклоном касательной к кривой в данной точке $dx/dt = \varphi'$ и равна

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi'.$$

С двумя частными случаями дифференцирования вдоль кривой мы уже знакомы: это — частная производная по времени $\partial/\partial t$ (вдоль кривой $x = \text{const}$, $\varphi' = 0$) и субстанциональная производная $d/dt = \partial/\partial t + u(\partial/\partial x)$ (вдоль пути движения частицы или вдоль линии тока: $dx/dt = \varphi' = u$).

Преобразуем уравнения плоского адиабатического движения к такому виду, чтобы они содержали производные от газодинамических величин только вдоль характери-

стик. Для этого исключим из уравнения непрерывности,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

производную от плотности, заменив ее на производную от давления. Поскольку плотность термодинамически связана с давлением и энтропией, $\rho = \rho(p, S)$, а $dS/dt = 0$, имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p \frac{dS}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt}.$$

Подставляя это выражение в уравнение непрерывности и умножая уравнение на c/ρ , найдем, что

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Сложим это уравнение с уравнением движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0.$$

Вычитая одноуравнение из другого, найдем аналогично

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0.$$

Первое из этих уравнений содержит производные только вдоль C_+ -характеристик, а второе — только вдоль C_- -характеристик. Замечая, что уравнение адиабатичности $dS/dt = 0$ можно рассматривать как уравнение вдоль C_0 -характеристик, запишем уравнения газодинамики в виде

$$du + \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c, \quad (1.40)$$

$$du - \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_- : \frac{dx}{dt} = u - c, \quad (1.41)$$

$$dS = 0 \quad \text{вдоль} \quad C_0 : \frac{dx}{dt} = u. \quad (1.42)$$

В лагранжевых координатах уравнения характеристик приобретают вид (см. (1.18))

$$C_+ : \frac{da}{dt} = c \frac{\rho}{\rho_0}, \quad C_- : \frac{da}{dt} = -c \frac{\rho}{\rho_0}, \quad C_0 : \frac{da}{dt} = 0.$$

Уравнения вдоль характеристик не отличаются от уравнений (1.40)–(1.42).

В сферически-симметричном течении уравнения характеристик в эйлеровых координатах таковы же, как и в плоском случае (только координату x следует заменить на радиус r). Уравнения же вдоль характеристик $C_{\pm}$ содержат дополнительные члены, зависящие от самих функций, но не от их производных:

$$du \pm \frac{1}{\rho c} dp = \mp \frac{2uc}{r} dt \quad \text{вдоль} \quad C_{\pm} : \frac{dr}{dt} = u \pm c.$$

В ряде случаев уравнения газодинамики, записанные в характеристической форме, для численного интегрирования удобнее, чем обычные.

§ 6. Плоское изэнтропическое течение. Инварианты Римана. В изэнтропическом течении энтропия, будучи постоянной в пространстве и во времени, вообще выпадает из уравнений. Все течение описывается двумя функциями: скоростью $u(x, t)$ и какой-нибудь одной из термодинамических переменных: $\varrho(x, t)$, $p(x, t)$ или $c(x, t)$. Последние однозначно связаны между собою в каждой точке чисто термодинамическими соотношениями: $\varrho = \varrho(p)$, $c = c(\varrho)$ или $p = p(\varrho)$, $c = c(\varrho)$; $c^2 = dp/d\varrho$.

Дифференциальные выражения $du + dp/\varrho c$ и $du - dp/\varrho c$ теперь представляют собой полные дифференциалы величин

$$\begin{aligned} J_+ &= u + \int \frac{dp}{\varrho c} = u + \int c \frac{d\varrho}{\varrho}, \\ J_- &= u - \int \frac{dp}{\varrho c} = u - \int c \frac{d\varrho}{\varrho}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

которые называются инвариантами Римана¹⁾. С помощью термодинамических соотношений интегральные величины $\int \frac{dp}{\varrho c} = \int c \frac{d\varrho}{\varrho}$, в принципе, можно выразить через одну из термодинамических переменных, скажем, скорость звука c . Например, в идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$p = \text{const } \varrho^\gamma, \quad c^2 = \gamma \text{const } \varrho^{\gamma-1}$$

и

$$J_\pm = u \pm \frac{2}{\gamma-1} c. \quad (1.44)$$

Инварианты Римана определяются с точностью до произвольной постоянной, которую в тех случаях, когда это удобно, можно вообще опустить, как это сделано в формуле (1.44).

Уравнения (1.40), (1.41) свидетельствуют о том, что в изэнтропическом течении инварианты Римана постоянны вдоль характеристик:

$$\begin{aligned} dJ_+ &= 0, \quad J_+ = \text{const} \quad \text{вдоль} \quad C_+ : \frac{dx}{dt} = u + c; \\ dJ_- &= 0, \quad J_- = \text{const} \quad \text{вдоль} \quad C_- : \frac{dx}{dt} = u - c. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Это положение можно рассматривать как обобщение соотношений, справедливых для случая распространения акустических волн по газу с постоянными скоростью, плотностью и давлением. Последние получаются из общих уравнений в качестве первого приближения. Если положить $u = u_0 + \Delta u$, $p = p_0 + \Delta p$, то в первом приближении

$$J_\pm = u_0 + \Delta u \pm \int \frac{d\Delta p}{\varrho_0 c_0} = \Delta u \pm \frac{\Delta p}{\varrho_0 c_0} + \text{const}. \quad (1.46)$$

Уравнения характеристик в первом приближении записываются в виде

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \pm c_0, \quad x = (u_0 \pm c_0)t + \text{const}.$$

¹⁾ При неизэнтропическом течении ϱ и c зависят от двух переменных: p и S , и выражения $du \pm dp/\varrho c$ уже не являются полными дифференциалами. Комбинации (1.43) в этом случае не имеют определенного смысла.

Таким образом, вдоль пути $x = (u_0 + c_0)t + \text{const}$ сохраняется величина $\Delta u + \Delta p / \rho_0 c_0$, откуда видно, что она может быть представлена в виде функции от константы в уравнении $x = (u_0 + c_0)t + \text{const}$:

$$\Delta u + \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = 2f_1[x - (u_0 + c_0)t].$$

Вдоль пути $x = (u_0 - c_0)t + \text{const}$ сохраняется величина

$$\Delta u - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0} = -2f_2[x - (u_0 - c_0)t].$$

Изменения скорости и давления представляются в виде суперпозиции двух волн f_1 и f_2 , бегущих в противоположных направлениях: $\Delta u = f_1 - f_2$, $\Delta p = \rho_0 c_0(f_1 + f_2)$, причем в каждой из них величины связаны между собой уже известными нам соотношениями:

$$\Delta_1 u = \frac{\Delta_1 p}{\rho_0 c_0} = f_1, \quad \Delta_2 u = -\frac{\Delta_2 p}{\rho_0 c_0} = -f_2.$$

Инварианты Римана J_+ и J_- можно рассматривать как новые функции, описывающие движение газа, взамен старых переменных: скорости газа u и одной из термодинамических величин, например, скорости звука c . Они однозначно связаны с переменными u и c уравнениями (1.43). Разрешая эти уравнения относительно u и c , можно вернуться от функций J_+ , J_- к функциям u и c , например, для идеального газа с постоянной теплоемкостью по формулам (1.44):

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2}; \quad c = \frac{\gamma - 1}{4}(J_+ - J_-).$$

Рассматривая инварианты как функции независимых переменных x и t , уравнения характеристик можно записать в форме

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = F_+(J_+, J_-); \quad C_- : \frac{dx}{dt} = F_-(J_+, J_-), \quad (1.47)$$

где F_+ и F_- — известные функции, вид которых определяется только термодинамическими свойствами вещества.

В идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$F_+ = \frac{\gamma + 1}{4}J_+ + \frac{3 - \gamma}{4}J_-; \quad F_- = \frac{3 - \gamma}{4}J_+ + \frac{\gamma + 1}{4}J_-.$$

Как видно из уравнений (1.45), характеристики обладают свойством переносить постоянные значения одного из инвариантов. Поскольку вдоль определенной C_+ -характеристики $J_+ = \text{const}$, изменение наклона характеристики определяется изменением только одной величины — инварианта J_- . Точно так же вдоль C_- -характеристики постоянно J_- , и изменение наклона при переходе от одной точки плоскости x, t к другой определяется изменением инварианта J_+ .

Уравнения, записанные в характеристической форме, делают весьма наглядной причинную связь явлений в газовой динамике. Рассмотрим какое-нибудь плоское изэнтропическое течение газа в бесконечном пространстве. Пусть в начальный момент $t = 0$ заданы распределения газодинамических величин по координате x : $u(x, 0)$, $c(x, 0)$, или же, что эквивалентно, заданы распределения инвариантов $J_+(x, 0)$, $J_-(x, 0)$. На плоскости x, t (рис. 1.9) существует сетка C_+ - и C_- -характеристик, выходящих из различных точек оси x ¹⁾. Значения газодинамических величин в ка-

¹⁾ Построить эту сетку можно после того как найдено решение задачи.

кой-нибудь точке $D(x, t)$ (в координатной точке x в момент времени t) определяются только значениями величин в начальных точках $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$:

$$J_+(x, t) = J_+(x_1, 0); \quad J_-(x, t) = J_-(x_2, 0).$$

Например, для идеального газа с постоянной теплоемкостью, разрешив эти уравнения относительно u и c , можно записать физические переменные в точке D в явном виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_1 - c_2}{2}, \\ c(x, t) &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_2}{2}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где u_1, c_1 — значения в точке $A(x_1, 0)$, а u_2, c_2 — значения в точке $B(x_2, 0)$.

Нельзя, конечно, утверждать, что состояние газа в точке D зависит от задания начальных условий только в двух начальных точках A и B , так как само положение точки D , как места, где пересекаются C_+ - и C_- -характеристики, выходящие из точек A и B , зависит от пути этих характеристик. Эти пути определяются заданием начальных условий на всем отрезке AB оси x . Например, наклон C_+ -характеристики AD в промежуточной точке N (см. рис. 1.9) определяется не только инвариантом $J_+(A)$, но и значением инварианта $J_-(M)$, перенесенного в N из промежуточной точки M отрезка AB .

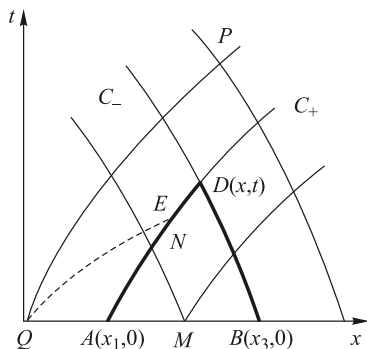


Рис. 1.9. Диаграмма x, t , иллюстрирующая область зависимости

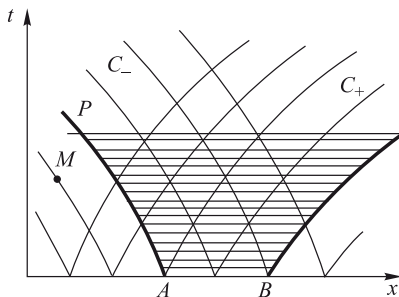


Рис. 1.10. Диаграмма x, t , иллюстрирующая область влияния

Но состояние газа в D полностью определяется заданием начальных условий на отрезке AB оси x и совершенно не зависит от начальных значений величин вне этого отрезка. Если, скажем, немного изменить начальные значения в точке Q , то это никак не скажется на состоянии газа в D просто потому, что возмущение от этого изменения не успеет добежать в координатную точку x к моменту t . Оно придет в эту координатную точку позднее (в точку P вдоль C_+ -характеристики QP).

Аналогично, начальное состояние газа на отрезке AB оси x влияет на состояние газа в последующие моменты времени только в тех точках, которые расположены внутри области, ограниченной C_- -характеристикой AP и C_+ -характеристикой BQ (рис. 1.10). Оно не влияет на состояние в M , так как «сигналы» от начальных условий на отрезке AB не успеют добежать до координатной точки x_M к моменту t_M .

Подчеркнем, что изложенные соображения о причинной связи явлений имеют силу лишь при условии, что характеристики одного семейства не пересекаются

друг с другом. Например, если бы C_+ -характеристика из Q (см. рис. 1.9) пошла по пунктирному пути QE , то состояние газа в Q повлияло бы на состояние в D . Но в области непрерывного течения характеристики, принадлежащие одному семейству, действительно никогда не пересекаются. Пересечение привело бы к неоднозначности газодинамических величин. В самом деле, в точке x, t пересечения двух C_+ -характеристик инварианты J_+ имели бы два различных значения, соответствующих той и другой характеристике. Между тем каждой точке плоскости x, t принадлежит только по одному значению J_+ и J_- , которые связаны с единственными значениями скорости газа и скорости звука в этой точке. Как мы увидим ниже,

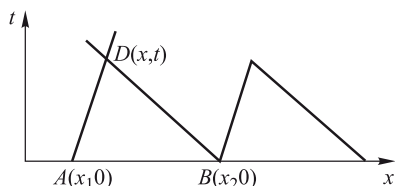


Рис. 1.11. Выпрямление характеристик на малых участках

пересечение характеристик одного семейства приводит к нарушению непрерывности течения и возникновению разрывов газодинамических величин, т. е. ударных волн.

Провести линии характеристик на всей плоскости x, t можно, только зная решение газодинамической задачи. Если решение неизвестно, то нельзя указать точно положение точки D на рис. 1.9, в которой пересекаются характеристики, выходящие из A и B .

Однако приближенно найти место пересечения можно, заменяя истинные криволинейные

пути AD и BD прямыми линиями, наклоны которых отвечают начальным значениям u_1, c_1 и u_2, c_2 в точках A и B (или $J_+(A), J_-(B)$) (рис. 1.11). Выбрав точки A и B достаточно близко друг от друга так, чтобы ошибка от замены истинных путей характеристик прямыми линиями была небольшой, находим положение точки пересечения из уравнений

$$x - x_1 = (u_1 + c_1)t, \quad x - x_2 = (u_2 - c_2)t.$$

Значения u и c в месте пересечения определяются формулами (1.48). Такая операция, в сущности, представляет собой простейшую схему численного интегрирования уравнений (1.45). Покрывая плоскость x, t сеткой треугольников, аналогичных ADB , можно последовательно, шаг за шагом, продвигать решение уравнений вперед по времени, исходя из начальных условий $u(x, 0), c(x, 0)$ или $J_+(x, 0), J_-(x, 0)$.

§ 7. Плоское изэнтропическое течение газа в ограниченном пространстве.

Рассмотрим какое-нибудь плоское изэнтропическое течение газа в ограниченном пространстве. Пусть газ занимает пространство между двумя плоскими поверхностями — поршнями, которые движутся по заданным законам $x_1 = \psi_1(t), x_2 = \psi_2(t)$, причем в начальный момент $t = 0$ координаты поршней равны x_{10} и x_{20} . В начальный момент задаются распределения скорости u и термодинамической переменной c по координате x на отрезке $x_{10} < x < x_{20}$: $u(x, 0), c(x, 0)$ или же, что эквивалентно, задаются распределения инвариантов $J_+(x, 0), J_-(x, 0)$.

Проведем на плоскости x, t сетку характеристик и линии поршней (рис. 1.12). Точки типа F , через которые проходят C_+ - и C_- -характеристики, выходящие из точек, лежащих внутри отрезка O_1O_2 оси x , ничем не отличаются от точек при движении газа в неограниченном пространстве. Как и там, в эти точки переносятся начальные значения инвариантов J_+ и J_- .

Рассмотрим точку, лежащую на линии поршня, для определенности, точку D у левого поршня.

В точку D из «прошлого» переносится только один инвариант J_- ; он переносится вдоль C_- -характеристики, выходящей из точки A начального отрезка O_1O_2 так, что $J_-(D) = J_-(A)$. Второй инвариант J_+ не приносится в D , так как в D не

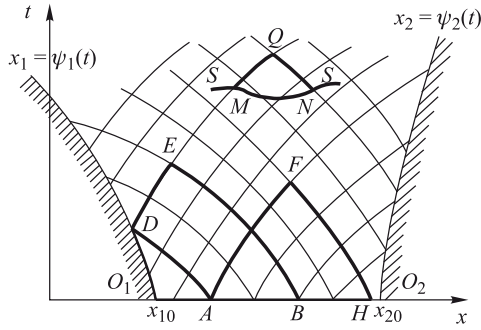


Рис. 1.12. Схема характеристик для плоского изэнтропического течения газа между двумя поршнями

приходит C_+ -характеристика (из «прошлого»). C_+ -характеристика только выходит из D (в «будущее»), унося с собою «образовавшееся» в этой точке значение инварианта J_+ . Состояние газа в точке D определяется значением привнесенного инварианта J_- и второй величиной — скоростью u , которая в силу граничного условия совпадает с известной скоростью поршня в точке D : $u_1(D)$. Эта пара величин $J_-(D) = J_-(A)$ и $u = u_1(D)$ и заменяет теперь пару величин J_+ , J_- , приходящих в точки газа, не соприкасающиеся с поршнями. Второй инвариант J_+ составляется в D из величин $J_-(D)$ и $u_1(D)$: $J_+(D) = 2u_1(D) - J_-(D)$ и уносится C_+ -характеристикой. Например, в точку E приходит C_- -характеристика, выходящая из точки B начального отрезка оси x и несущая инвариант $J_-(B)$: $J_-(E) = J_-(B)$. C_+ -характеристика приходит с линии поршня, из D , и приносит инвариант J_+ , равный $J_+(D)$: $J_+(E) = J_+(D)$. Состояние газа в E зависит от $J_-(B)$, $u_1(D)$ и $J_-(A)$, т.е. от условий в точках A, B, D . Положение точки E зависит от условий на отрезках O_1D , O_1B .

Таким образом, при течении в ограниченном пространстве состояние газа в какой-то точке может зависеть не только от начальных, но и от граничных условий.

Вообще состояние в произвольной точке плоскости x, t определяется заданием значений u и s или J_+ , J_- на отрезке произвольной кривой, отсекаемом C_+ - и C_- -характеристиками, проходящими через рассматриваемую точку. Например, состояние в Q определяется состоянием на отрезке MN кривой SS (см. рис. 1.12).

Аналогично предыдущему, на правый поршень из «прошлого» вдоль C_+ -характеристик переносятся инварианты J_+ , а C_- -характеристики сами начинаются из точек линии поршня и уносят в «будущее» инварианты J_- , которые составляются из привнесенных инвариантов J_+ и значений скорости поршня u_2 , с которыми совпадают скорости прилегающего к поршню слоя газа.

Давление на поршне однозначно определяется привнесенным одним инвариантом и скоростью поршня. Рассмотрим для примера точку D на левом поршне. Пусть газ — идеальный с постоянной теплоемкостью. Обозначим через u_A c_A , начальные скорости газа и звука в точке A , а через u_{1D} — скорость поршня в точке D . Имеем для скоростей газа и звука в D

$$u_D = u_{1D}, \quad J_- = u_D - \frac{2}{\gamma - 1} c_D = u_A - \frac{2}{\gamma - 1} c_A,$$

откуда

$$c_D = c_A + (u_{1D} - u_A) \frac{\gamma - 1}{2},$$

или через инвариант

$$c_D = [u_{1D} - J_-(A)] \frac{\gamma - 1}{2}.$$

Давление на поршне p_D связано со скоростью звука c_D чисто термодинамически, $p_D = \text{const} \cdot c_D^{2\gamma/(\gamma-1)}$.

Изложенные соображения позволяют придать наглядный физический смысл инвариантам Римана.

Поставим такой эксперимент. Внесем в определенный момент t в точку x параллельную поверхности поршня плоскую пластинку. Пусть на одной, левой, стороне пластинки имеется индикатор давления, реагирующий на давление газа слева от пластинки. К моменту t в x слева на индикатор приносится инвариант

$$J_+ = u + \int dp/\varrho c = u + w(p),$$

где u и p — скорость и давление невозмущенного пластинкой газа ($w(p)$ — функция давления, зависящая только от термодинамических свойств газа и его энтропии). В момент t газ тормозится около пластинки и останавливается, поскольку пластинка покоится. Новое давление слева от пластинки, соответствующее остановившемуся газу ($u = 0$), обозначим через p_1 . Тогда $J_+ = u + w(p) = w(p_1)$. Индикатор зарегистрирует давление отражения — p_1 . Поскольку функция w известна, шкалу индикатора можно проградуировать так, чтобы показание индикатора давало непосредственно инвариант J_+ . Аналогично, индикатор давления, помещенный на правой стороне пластинки, измерит инвариант J_- , приходящий справа.

Если расположить очень тонкую пластинку перпендикулярно к поверхностям поршней, параллельно скорости течения так, чтобы газ свободно обтекал пластинку, не меняя своей скорости, индикатор регистрирует давление невозмущенного потока p . Будучи проградуированным так, чтобы давать непосредственно величину $w(p)$, индикатор измерит комбинацию инвариантов

$$w(p) = \frac{1}{2}(J_+ - J_-).$$

§ 8. Простые волны. Из формулы (1.46) для инвариантов Римана, относящейся к случаю распространения по газу малых возмущений — акустических волн, видно, что если волна распространяется только в одну сторону, то один из инвариантов постоянен в пространстве и во времени. Так, если волна бежит направо и $\Delta u(x, t) = \Delta p(x, t)/\varrho_0 c_0 = f_1[x - (u_0 + c_0)t]$, то постоянен инвариант J_- :

$$J_- = \Delta u - \frac{\Delta p}{\varrho_0 c_0} + \text{const} = \text{const}.$$

Если же волна бежит налево, то постоянен инвариант J_+ .

Покажем, что возможность существования волн, бегущих в одну сторону, не ограничивается предположением о малости амплитуды, причем и в общем случае бегущей волны остается постоянным один из инвариантов Римана. Прежде всего укажем, как можно практически осуществить постоянство одного из инвариантов, например J_- . Если газ занимает безграничное пространство, то для этого достаточно задать начальные распределения $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ таким образом, чтобы в начальный момент было $J_-(x, 0) = \text{const}$. Поскольку это постоянное значение J_- переносится вдоль C_- -характеристик, выходящих из всех точек оси x , то и в последующие моменты времени инвариант J_- останется постоянным: $J_-(x, t) = \text{const}$.

Пусть газ занимает полупространство, ограниченное слева поршнем, движущимся по закону $x_1 = \psi_1(t)$. Если в начальный момент $J_-(x, 0) = \text{const}$ во всей области,

занимаемой газом, $x > x_{10}$ (x_{10} — начальная координата поршня), то в последующие моменты J_- также останется постоянным во всем пространстве, ограниченном поршнем, $x > x_1 = \psi_1(t)$. Действительно, левый поршень, как было показано в предыдущем параграфе, «возбуждает» только C_+ -характеристики; C_- -характеристики приходят к линии поршня из «прошлого» и на этом «заканчивают свое существование», так что поршень посылает в «будущее» только J_+ -инварианты, но не J_- .

Значения J_- -инвариантов во всей той части плоскости x, t , которая соответствует газу (эта часть ограничивается линией поршня $x_1 = \psi_1(t)$), определяются начальными значениями J_- на оси x , т.е. постоянны.

Наоборот, если газ занимает полупространство, ограниченное справа движущимся поршнем (линия поршня $x_2 = \psi_2(t)$, $x_{20} = \psi_2(0)$), и в начальный момент $J_+(x, 0) = \text{const}$ при $x < x_{20}$, то во всей физической части плоскости x, t ($x < x_2 = \psi(t)$) постоянен инвариант J_+ .

Итак, вернемся к поставленной задаче и предположим для определенности, что $J_-(x, t) = \text{const}$. Из уравнения характеристик, записанного в форме (1.47), следует, что при этом C_+ -характеристики представляют собой семейство прямых линий ($F_+ = \text{const}$, так как $J_+ = \text{const}$ вдоль характеристики, а $J_- = \text{const}$ вообще). Интегрируя уравнения для C_+ -характеристик, можем записать, что

$$x = F_+(J_+, J_-)t + \varphi(J_+), \quad (1.49)$$

где $\varphi(J_+)$ — постоянная интегрирования, которую можно рассматривать как функцию того значения J_+ , которое переносится вдоль характеристики. Она определяется начальными и граничными условиями задачи. Например, если данная характеристика выходит из начального отрезка оси x , то φ есть координата той точки оси x , из которой выходит характеристика и на которой задано значение J_+ , стоящее в качестве аргумента в φ .

Формула (1.49) совместно с условием, наложенным на одну из искоемых функций,

$$J_-(x, t) = \text{const}, \quad (1.50)$$

представляет собой общее решение уравнений газодинамики для рассматриваемого случая. Она определяет в неявном виде другую искоемую функцию $J_+(x, t)$. (Напомним, что функция F_+ известна, поскольку известны термодинамические свойства вещества.)

Решение (1.49), (1.50) можно записать в виде формул для обычных газодинамических переменных, скорости газа и скорости звука. Из уравнения (1.50),

$$J_- = u - \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const},$$

следует, что скорость звука или какая-нибудь иная термодинамическая переменная, скажем, давление, являются функциями скорости u , не содержащими в явном виде независимых переменных x и t : $c = c(u)$, $p = p(u)$.

Уравнение (1.49) эквивалентно уравнению

$$x = [u + c(u)]t + \varphi(u), \quad (1.51)$$

где постоянная интегрирования φ выражена как функция u . Это уравнение определяет в неявном виде u в зависимости от x и t .

Из формулы (1.51) видно, что данные значения u и $c(u)$ переносятся по газу вдоль оси x с постоянной скоростью $u + c(u)$. Другими словами, решение представляет собой волну, бегущую направо:

$$u = f\{x - [u + c(u)]t\}, \quad c = g\{x - [u + c(u)]t\},$$

причем вид функций f и g определяется начальными и граничными условиями задачи.

Однако, в отличие от бегущей волны малой амплитуды, различные значения скорости газа и термодинамических переменных переносятся с разными скоростями, так что начальные профили $u(x, 0)$, $c(x, 0)$ искажаются с течением времени. Это является следствием нелинейности уравнений газодинамики.

Полученное решение в виде бегущей волны называется простой волной.

Аналогичным путем можно получить простую волну, бегущую в другую сторону. В ней постоянен инвариант J_+ и прямыми являются C_- -характеристики. Общее решение в этом случае имеет вид

$$J_+ = \text{const}, \quad x = F_-(J_+, J_-)t + \varphi_1(J_-),$$

или

$$J_+ = u + \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const}, \quad x = [u - c(u)]t + \varphi_1(u),$$

$$u = f_1\{x + [c(u) - u]t\}, \quad c = g_1\{x + [c(u) - u]t\}.$$

Заметим, что решение для простой волны является особым интегралом уравнений одномерного изэнтропического течения. Можно найти и общий интеграл этих уравнений для произвольного течения (см. [1]). Особое решение не содержится непосредственно в общем.

§ 9. Искажение профилей в бегущей волне конечной амплитуды. Некоторые свойства простых волн. Воспользуемся полученным решением для простой волны и выясним, что происходит с волной типа акустической, если не ограничиваться первым приближением, как это было сделано в § 3, а исходить из точных уравнений газодинамики. Мы не будем приводить здесь аналитического решения, а выясним качественный характер явлений при помощи графического построения. Газ будем считать идеальным с постоянной теплоемкостью.

Пусть начальные профили скорости $u(x, 0)$ и скорости звука $c(x, 0)$ имеют вид, изображенный на рис. 1.13, причем эти функции связаны между собою таким образом, что $J_-(x, 0) = \text{const}$ (рассматриваем волну, бегущую направо). По формуле (1.44) имеем $c = \frac{\gamma - 1}{2}u + c_0$, где постоянное значение инварианта J_- выбрано в соответствии с условием, что в невозмущенном газе $u = 0$, $c = c_0$. Поскольку $p \sim c^{2\gamma/(\gamma-1)}$, $\rho \sim c^{\gamma/(\gamma-1)}$ (при $c = c_0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$), профили давления и плотности в качественном отношении вполне аналогичны профилю скорости звука.

Будучи постоянным в начальный момент, инвариант $J_-(x, t)$ постоянен и во все последующие моменты времени, так что движение представляет собой простую волну, бегущую направо. Характеристики C_+ -семейства представляют собой прямые линии, $dx/dt = u + c = (\gamma + 1)u/2 + c_0$. Они изображены на рис. 1.13. Из точек A_0 , B_0 и D_0 , где $u = 0$, они выходят параллельно друг другу: $dx/dt = c_0$ (и параллельно C_+ -характеристикам, выходящим из точек оси x , соответствующих невозмущенной области газа). Для того чтобы не усложнять рис. 1.13, проведем, кроме того, еще только две C_+ -характеристики, из точек E_0 и F_0 , соответствующих минимумам и максимумам начальных распределений $u(x, 0)$ и $c(x, 0)$.

Построим профили u и c в момент t_1 : $u(x, t_1)$, $c(x, t_1)$. Поскольку вдоль C_+ -характеристик переносятся постоянные значения u и c , величины u и c в точках A_1 , E_1 и т. д. равны соответствующим величинам в точках A_0 , E_0 и т. д.

Выполняя построение, как показано на рис. 1.13, найдем профили u и c в момент t_1 . Мы видим, что «голова» (D) и «хвост» (A) волны, соприкасающиеся с областями постоянного течения, где $u = 0$, а $c = c_0$, сместились вдоль оси x на отрезки,

равные $c_0 t_1$ (распространялись по характеристикам $D_0 D_1$, $A_0 A_1$ на плоскости x, t). Высоты максимумов и минимумов u и c не изменились, но относительные положения максимумов и минимумов стали иными: профили исказились.

В акустической теории, где уравнения газодинамики линейризуются, такого искажения не происходит: профили сдвигаются в виде застывшей картины. Искажение профилей есть следствие нелинейности уравнений газовой динамики. Физическая причина искажения состоит в том, что гребни волны бегут относительно скорее как за счет большей скорости распространения их по веществу (большей скорости звука), так и за счет более быстрого сноса вперед вместе с веществом (большей скорости газа). Наоборот, впадины бегут относительно медленнее, так как обе скорости в них меньше.

С течением времени профили искажаются все сильнее и сильнее, как показано на рис. 1.14. Если формально продолжить аналитическое решение на достаточно большие времена, то произойдет «перехлестывание» волны, показанное на рис. 1.14, *г*. Эта, последняя, картина физически бессмысленна, так как в ней решение неоднозначно. Например, в точке $x = x'$ в один и тот же момент времени имеются три значения скорости u : $u = 0, u_1$ и u_2 . Возникновение такой неоднозначности математически связано с пересечением характеристик одного семейства (C_+), тенденцию к которому можно усмотреть на рис. 1.13. На самом деле «перехлестывания», конечно, не происходит, а когда передняя и задняя части профилей становятся очень крутыми, образуются разрывы — ударные волны, как показано на рис. 1.14, *д* (об этом реч пойдет ниже).

Таким образом, решение в виде простой волны в данном случае справедливо лишь в течение ограниченного времени, до момента образования разрывов. Решение никогда не теряет силы только в том случае, если волна повсюду имеет характер волны разрежения, т. е. не содержит участков, где скорость газа, давление и плотность уменьшаются в направлении распространения волны. Такие участки (AE и FD) на рис. 1.13 представляют собой волны сжатия.

Простая волна разрежения будет рассмотрена в следующем параграфе.

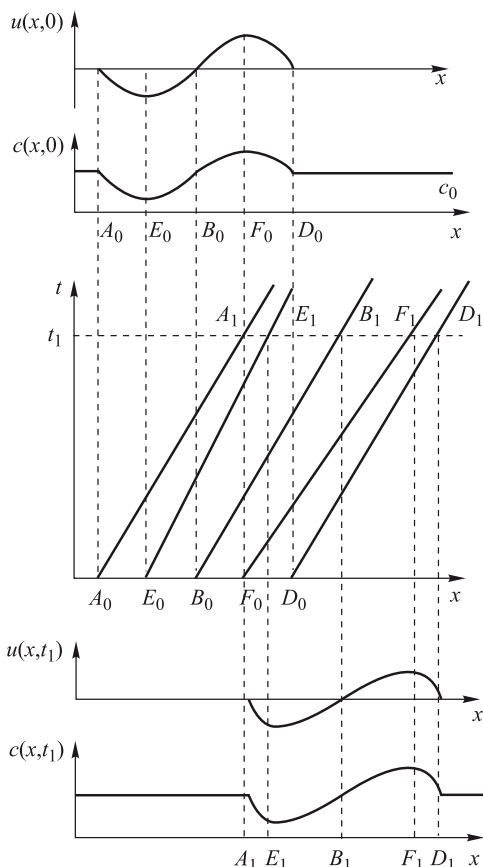


Рис. 1.13. Распространение вправо бегущей волны. Построение, позволяющее определить искажение профилей в волне. Наверху — профили скорости и скорости звука в начальный момент. Внизу — искаженные профили в момент t_1 . В середине — схема C_+ -характеристик

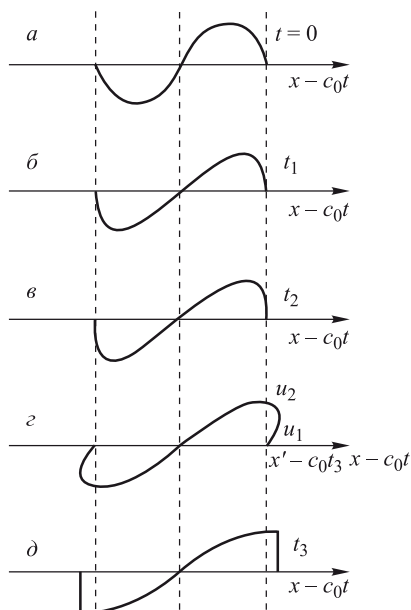


Рис. 1.14. Схема, иллюстрирующая нарастание крутизны и «перехлест» волны конечной амплитуды в нелинейной теории. Показаны профили скорости в последовательные моменты времени. Чтобы совместить волны в различные моменты времени, по оси абсцисс отложена комбинация $x - c_0 t$. Профиль $г$ отвечает физически нереальному состоянию. На самом деле в момент t_3 профиль имеет вид $д$ с разрывами

Отметим одно важное свойство простой волны, которое иллюстрируется рассмотренным примером. Голова простой волны всегда распространяется по характеристике (в нашем примере по характеристике $D_0 D_1$). На переднем краю простой волны, в точке D , сами величины u и s непрерывны, но их производные по координате x терпят разрыв (это видно из рис. 1.13, где профили u и s испытывают излом). Такой разрыв, в котором величины непрерывны, но разрывны их производные, называется слабым. Слабый разрыв можно представить себе как малое возмущение по отношению к непрерывному ходу газодинамических величин. Это показано на рис. 1.15, на котором изображены два профиля, один сглаженный, а другой — с разрывом производной. Заштрихованный участок можно рассматривать как малое возмущение.

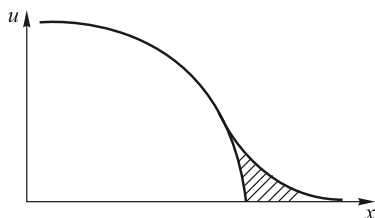


Рис. 1.15. К вопросу о слабом разрыве

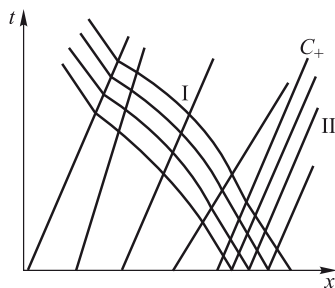


Рис. 1.16. Схема двух семейств характеристик для волны, изображенной на рис. 1.13

Но мы знаем, что малые возмущения распространяются по веществу со скоростью звука. Поэтому слабые разрывы всегда распространяются по характеристикам.

Если изэнтропическое течение граничит с областью постоянного течения, то это течение обязательно является простой волной, и обратно, с областью постоянного течения может граничить только простая волна. Действительно, в области постоянного течения C_+ - и C_- -характеристики представляют собой семейства параллельных прямых и инварианты $J_+(x, t)$ и $J_-(x, t)$ постоянны. Границей соприкосновения области какого-то изэнтропического течения I с областью постоянного течения II (рис. 1.16) служит одна из характеристик, скажем, C_+ -характеристика. Тогда C_- -характеристики, продолжаясь из области II в область I, переносят постоянное значение J_- , так что и в области I $J_-(x, t) = \text{const}$. Следовательно, эта область есть простая волна, бегущая направо. На рис. 1.16 проведены характеристики для случая импульса протяженностью в одну «длину волны», рассмотренного выше в качестве примера.

§ 10. Волна разрежения. Рассмотрим движение газа под действием выдвигającego поршня. Пусть вначале покоящийся газ с постоянными плотностью, давлением и скоростью звука, ϱ_0, p_0, c_0 , занимает полупространство $x > 0$, слева ограниченное неподвижным поршнем, начальная координата которого есть $x = 0$. В момент $t = 0$ поршень начинает двигаться влево, постепенно ускоряясь от нулевой скорости до некоторой постоянной, которую обозначим через $-U$. Закон движения поршня есть $x = X(t)$. Когда скорость поршня становится постоянной, линия $X(t)$ превращается в прямую $X(t) = -Ut + \text{const}$.

Как было показано в предыдущем параграфе, движение газа при $t > 0$ представляет собой простую волну, бегущую направо. Голова волны, т. е. начальное возмущение от поршня, распространяется вправо со скоростью звука вдоль C_+ -характеристики OA ; $x = c_0 t$ (рис. 1.17). Проведем на этом рисунке линию движения поршня $X(t)$ и характеристики C_+ - и C_- -семейств. В области I между осью x и C_+ -характеристикой OA газ невозмущен: характеристики в этой области представляют собой прямые линии с наклонами $(dx/dt)_+ = c_0$; $(dx/dt)_- = -c_0$. Пересекая прямую OA , C_- -характеристики продолжают до линии поршня и на ней заканчивают свое существование. Для наглядности рассуждений будем считать газ идеальным с постоянной теплоемкостью, однако подчеркнем, что в качественном отношении вся картина движения остается в силе и для газа с другими термодинамическими свойствами. J_- -инвариант постоянен во всей физической части плоскости x, t и равен

$$J_- = u - \frac{2}{\gamma - 1}c = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$

Отсюда

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1}(c_0 - c), \quad c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}u.$$

На границе с поршнем скорость газа совпадает со скоростью поршня $w(t)$, которая отрицательна. Поэтому скорость звука, а также давление и плотность газа у поршня меньше начальных, притом тем меньше, чем скорее движется поршень. C_+ -характеристики, которые являются прямыми линиями, выходят с линии поршня, имея наклоны:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = u + c = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u = c_0 - \frac{\gamma + 1}{2}|w|.$$

Поскольку поршень только ускоряется, но не замедляется, C_+ -характеристики, начинающиеся на линии поршня, только расходятся, но нигде не сходятся, как показано на рис. 1.17. C_+ -характеристики, выходящие с того участка линии поршня, на котором скорость поршня уже постоянна, имеют одинаковые наклоны,

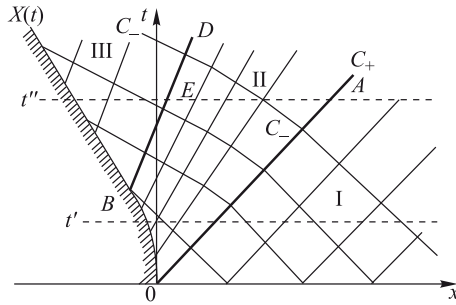


Рис. 1.17. x, t -диаграмма со схемой характеристик для волны разрежения, возникающей под действием поршня, который выдвигается из газа, сначала ускоряясь, а потом с постоянной скоростью

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = c_0 - \frac{\gamma+1}{2}U$, и идут параллельно друг другу. Пусть, например, скорость поршня становится строго постоянной и равной $w = -U (U > 0)$, начиная с момента t_1 (точка B на линии поршня). В области III на плоскости x, t , заключенной между линией поршня и C_+ -характеристикой BD , все газодинамические величины постоянны: $u = -U$, $c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}U = c_1$ ¹⁾. В самом деле, в этой области $J_- = \text{const}$ в силу общего постоянства, а $J_+ = \text{const}$, поскольку скорость газа на линии поршня, с которой выходят все C_+ -характеристики, одинакова:

$$J_+ = u + \frac{2}{\gamma-1}c = \frac{2}{\gamma-1}c_0 + 2u = \frac{2}{\gamma-1}c_0 - 2U.$$

В области II, заключенной между C_+ -характеристиками OA и BD и участком OB линии поршня, газодинамические величины зависят от x и t в соответствии с решением для простой волны. C_+ -характеристики, выходящие с участка OB линии поршня, во все более поздние моменты времени несут все меньшие значения скоростей звука и газа (все большие по абсолютной величине скорости газа). Поэтому распределение u и c по газу в какой-то определенный момент времени $t' < t_1$, соответствующий горизонтальной прямой $t = \text{const} = t'$ на плоскости x, t , имеет вид, изображенный на рис. 1.18, а.

Распределения плотности и давления в качественном отношении подобны распределению скорости звука.

Распределения газодинамических величин в более поздний момент $t'' > t_1$ (прямая $t = \text{const} = t''$ на плоскости x, t) показаны на рис. 1.18, б. В этом случае к поршню прилегает область постоянного течения, $u = -U$, $c = c_1$. Координата точки разделяющей области постоянного и переменного течений III и II, X_E , соответствует точке E характеристики BD .

Задаваясь конкретным законом движения поршня, можно найти решение задачи в аналитическом виде. Положим для примера, что скорость поршня с течением вре-

¹⁾ Для справедливости этих формул необходимо, чтобы c_1 было положительной величиной, что накладывает ограничение на конечную скорость поршня: $U < \frac{2}{\gamma-1}c_0$. Случай, когда $U > \frac{2}{\gamma-1}c_0$, будет рассмотрен в § 11.

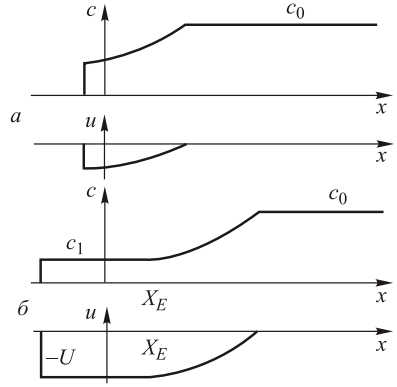


Рис. 1.18. Профили скорости звука и скорости в волне разрежения, возникающей под действием поршня (см. рис. 1.17): *а*) до момента, когда скорость поршня стала постоянной, $t' < t_1$; *б*) после момента, когда скорость поршня стала постоянной, $t'' > t_1$

мени меняется плавно по закону

$$w = -U \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad \tau > 0,$$

и стремится к постоянной величине $-U$ асимптотически при $t \rightarrow \infty$. Линия движения поршня описывается уравнением

$$X(t) = \int_0^t w dt = -U\tau \left[\frac{t}{\tau} - \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \right].$$

Она асимптотически переходит в прямую $X = -U(t - \tau)$.

Для нахождения искомого решения подчиним общее решение (1.51) граничному условию: $u = w(t)$ при $x = X(t)$. Это условие определяет произвольную функцию $\varphi(u)$:

$$\varphi(w) = X(t) - [w + c(w)]t,$$

причем

$$c(w) = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}w \quad \text{и} \quad w = w(t).$$

Подставляя сюда $X(t)$ и выражая время через w с помощью закона движения поршня $t = -\tau \ln(1 + w/U)$, найдем вид функции φ :

$$\varphi(w) = -w\tau + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}w + U \right) \ln \left(1 + \frac{w}{U} \right).$$

Распределения скорости по координате в разные моменты времени даются неявной функцией,

$$x = \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u \right)t - u\tau + \tau \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2}u + U \right) \ln \left(1 + \frac{u}{U} \right),$$

справедливой в интервале $X(t) < x < c_0 t$.

Предположим снова, что скорость поршня становится строго постоянной в определенный момент t_1 . Зададимся постоянным значением конечной скорости поршня $-U$ и предположим, что начальные ускорения поршня становятся все больше и больше и постоянная скорость достигается все быстрее и быстрее ($t_1 \rightarrow 0$). Участок OB линии поршня, где скорость поршня переменна, становится все меньше и меньше (см. рис. 1.17). Точки B и O , откуда выходят C_+ -характеристики BD и OA ,

между которыми заключена область переменного течения II, при этом сближаются. В пределе $t_1 = 0$, когда точки B и O совпадают, что соответствует мгновенному достижению поршнем постоянной скорости $w = -U$, обе характеристики BD и OA выходят из одной точки: из начала координат $x = 0$, $t = 0$ на плоскости x, t . Все C_+ -характеристики, заполняющие область переменного течения II, также выходят из начала O в виде веера. Таким образом, в предельном случае, когда поршень в момент $t = 0$ начинает двигаться с постоянной скоростью $w = -U$, картина на плоскости x, t приобретает вид, изображенный на рис. 1.19.

Все характерные линии: линия «головы» волны разрежения OA , линия «хвоста» волны OD , за которым параметры газа принимают постоянные конечные значения, и линия поршня выходят из «центра» O . Из этого же «центра» выходят и все C_+ -характеристики, расположенные между C_+ -характеристиками OA и OD .

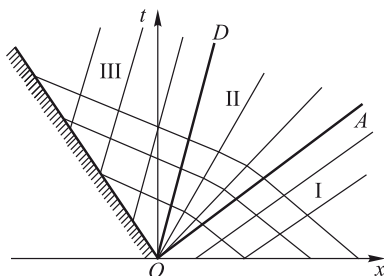


Рис. 1.19. x, t -диаграмма со схемой характеристик для централизованной волны разрежения

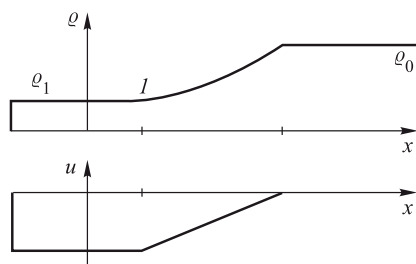


Рис. 1.20. Профили плотности и скорости в централизованной волне разрежения

Такая волна называется централизованной простой волной. Поскольку все C_+ -характеристики в централизованной простой волне, т.е. в области переменного течения II, выходят из точки $x = 0$, $t = 0$, функция $\varphi(u)$ в решении (1.51), представляющем собой в то же время и уравнение этих характеристик, обращается в нуль. Решение для централизованной волны имеет вид

$$x = [u + c(u)]t. \quad (1.52)$$

Формально это решение можно получить и путем предельного перехода $\tau \rightarrow 0$ в примере, рассмотренном выше. Функция φ пропорциональна τ , так что при $\tau \rightarrow 0$ $\varphi(u) \rightarrow 0$.

Выпишем в явном виде решение для централизованной волны разрежения в случае идеального газа с постоянной теплоемкостью. Связь термодинамических переменных со скоростью газа u дается уже известной формулой, следующей из условия постоянства инварианта J_- :

$$c = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2}|u|, \quad u < 0. \quad (1.53)$$

Поскольку $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, $c^2 = \gamma p/\rho = c_0^2(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}$, то

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{2/(\gamma-1)}, \quad (1.54)$$

$$p = p_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|u|}{c_0} \right]^{2/(\gamma-1)}. \quad (1.55)$$

Чтобы получить зависимость этих величин от x и t , надо подставить сюда $|u|$, найденное из решения (1.52) и (1.53):

$$|u| = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right). \quad (1.56)$$

Скорость газа в центрированной волне разрежения зависит от координаты x по линейному закону. Голова волны, где $u = 0$, движется вдоль линии $x = c_0 t$, хвост волны, где $u = w = -U$, движется вдоль линии

$$x = (c_1 - U)t = \left(c_0 - \frac{\gamma+1}{2} U \right) t.$$

Профили плотности и скорости показаны на рис. 1.20.

§ 11. Центрированная волна разрежения как пример автомоделного движения газа. Рассмотренное в предыдущем параграфе одномерное плоское движение газа, возникающее при выдвигании поршня с постоянной скоростью, обладает одной характерной особенностью. Все газодинамические величины, описывающие движение $u(x, t)$, $c(x, t)$, $\varrho(x, t)$, $p(x, t)$, зависят от координаты и времени не порознь, а только в комбинации x/t . Для области II, где величины переменны, это видно непосредственно из формул (1.53)–(1.56). Что же касается областей постоянного течения I и III, то они ограничены в плоскости x, t прямыми линиями $x/t = c_0 = \text{const}$ (область I) и $x/t = w = \text{const}$, $x/t = w + c_1 = \text{const}$ (область III), которые также описываются уравнениями, содержащими x и t только в комбинации x/t . Иными словами, с течением времени распределения всех величин по координате x , изображенные на рис. 1.20, лишь растягиваются в пространстве, не меняя своей формы, т. е. оставаясь подобными самим себе. Если нарисовать распределения u, c, ϱ, p , отложив по оси абсцисс не x , а отношение x/t (или одну из безразмерных величин $x/c_0 t$, $x/w t$), то мы получим застывшую картину, неизменную во времени. Такое движение, в котором профили газодинамических величин с течением времени остаются подобными самим себе, меняясь только за счет изменения масштабов величин (в данном случае масштаба длины $c_0 t$ или $w t$), называется самоподобным или автомоделным. В § 25 мы познакомимся с более сложным примером автомоделного движения, в котором меняются не только масштабы длины, но и масштабы самих газодинамических величин, причем автомоделная переменная ξ имеет более общий вид, $\xi = x t^\alpha$, где $\alpha = \text{const}$. Рассмотренная выше центрированная волна разрежения представляет собой простейший случай автомоделного движения, в котором $\alpha = -1$, $\xi = x/t$, и масштабы газодинамических величин остаются неизменными: с течением времени профили их $u(x, t)$, $c(x, t)$ самоподобно растягиваются только по оси абсцисс, но не изменяются по оси ординат (масштабы u, c, ϱ, p остаются неизменными).

Физическую причину автомоделного характера центрированной волны разрежения можно пояснить, воспользовавшись размерностными соображениями.

Если отвлечься от диссипативных процессов вязкости и теплопроводности, то уравнения газовой динамики, так же как и формулы, описывающие термодинамические свойства вещества, не содержат никаких характерных длин и времен. Единственные масштабы длины и времени у газа — это длина и время свободного пробега молекул, с которыми связаны коэффициенты вязкости и теплопроводности. Однако этими масштабами могут характеризоваться лишь микропроцессы, протекающие на расстояниях и за времена свободного пробега молекул, но не макроскопические движения. Вещество обладает размерным параметром — скоростью звука, которая входит наряду со скоростью вещества в описание газодинамических течений. Таким образом, если начальные и граничные условия задачи не содержат характерных длин и времен, движение может зависеть от координаты и времени, взятых только

в комбинации x/t , имеющей размерность скорости. Именно такова рассматриваемая задача о волне разрежения, возникающей под действием поршня, выдвигающегося из газа с постоянной скоростью w . Начальные и граничные условия вносят только масштабы скоростей: c_0 и w (и, конечно, масштабы плотности ρ_0 и давления p_0 , но не масштабы длины или времени¹⁾).

Автомодельные движения имеют большое значение для газовой динамики. Поскольку в этом случае газодинамические величины не зависят от координат и времени в отдельности, но зависят только от их определенных комбинаций, — это уменьшает на единицу число независимых переменных в системе уравнений. В частности, при одномерных движениях вместо двух переменных x и t (или r и t в случае сферической или цилиндрической симметрии) появляется одна независимая переменная ($\xi = x/t$ в нашей задаче). Течение описывается уравнениями не в частных производных, а обыкновенными дифференциальными уравнениями, что в огромной степени упрощает задачу с математической точки зрения.

Ввиду принципиальной важности автомодельного течения, представляющего собой центрированную простую волну, мы еще раз найдем решение задачи о поршне, исходя из общих уравнений газодинамики и воспользовавшись изложенными соображениями об уменьшении числа независимых переменных. Преобразуем эйлеровы уравнения газодинамики к новой независимой переменной $\xi = x/t$. Если $f(x, t)$ — некоторая функция x и t , зависящая только от комбинации этих величин $\xi = x/t$, то путем непосредственного вычисления получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{t} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{x}{t^2} \frac{df}{d\xi} = -\frac{\xi}{t} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u - \xi}{t} \frac{df}{d\xi}.\end{aligned}$$

Преобразуем с помощью этих формул уравнения непрерывности, движения и адиабатичности, записанные для плоского случая:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \frac{d\rho}{d\xi} = -\rho \frac{du}{d\xi}, \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow (u - \xi) \rho \frac{du}{d\xi} = -\frac{dp}{d\xi}, \\ \frac{dS}{dt} &= 0 \rightarrow (u - \xi) \frac{dS}{d\xi} = 0.\end{aligned}\tag{1.57}$$

¹⁾ Если скорость поршня не постоянна, а зависит от времени, то сразу появляются масштабы времени или длины. При этом задача о волне разрежения перестает быть автомодельной: математически это следует из формулы (1.51): если $\varphi(u) \neq 0$, то u зависит от x и t в отдельности. Однако если скорость поршня с течением времени становится постоянной, как в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе, то истинное решение асимптотически стремится к автомодельному. При $t \gg \tau$ ($t/\tau \rightarrow \infty$) функцию $\varphi(u) \sim \tau$ в решении можно опустить. Физически это соответствует тому, что при $t \gg \tau$ параметр τ становится малым по сравнению с характерным временем задачи t и роль его становится все менее и менее существенной. Подробнее об асимптотическом стремлении истинных решений к автомодельным см. в гл. X и XII.

Как и следовало ожидать, сами величины x и t исключались из уравнений. Написанные уравнения допускают прежде всего тривиальное решение, $u = \text{const}$, $p = \text{const}$, $\varrho = \text{const}$, $S = \text{const}$, соответствующее движению однородного газа как целого. Для получения нетривиального решения исключим из первой пары уравнений $du/d\xi$ и заметим, что третье уравнение дает $S = \text{const}$ ¹⁾ т.е. что автомодельное движение изэнтропично.

Заменяя во втором из уравнений (1.57) производную от давления на производную от плотности, $dp/d\xi = (dp/d\varrho)(d\varrho/d\xi) = c^2 d\varrho/d\xi$ (поскольку движение изэнтропично $dp/d\varrho = (\partial p/\partial \varrho)_S = c^2$), получим

$$[(u - \xi)^2 - c^2] \frac{d\varrho}{d\xi} = 0,$$

откуда

$$u - \xi = \pm c, \quad \xi = \frac{x}{t} = u \mp c. \quad (1.58)$$

Подставляя это соотношение в уравнения (1.57), найдем

$$du \pm c \frac{d\varrho}{\varrho} = du \pm \frac{dp}{\varrho c} = 0$$

или

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{dp}{\varrho c} = \text{const}. \quad (1.59)$$

Мы пришли, таким образом, к уже найденному в предыдущем параграфе решению задачи о центрированной волне разрежения. Для волны, бегущей вправо, следует взять нижний знак в формулах (1.58), (1.59), для волны, бегущей влево — верхний.

Как и раньше, всю картину течения можно сконструировать с помощью решений (1.58), (1.59) и тривиальных решений $u = \text{const}$, $c = \text{const}$, также удовлетворяющих автомодельным уравнениям. При этом комбинировать эти решения следует так, чтобы удовлетворялось граничное условие $u = w$ у поршня.

Остановимся на некоторых особенностях волны разрежения. Характер решения свидетельствует о том, что для его справедливости не обязательно, чтобы газ простирался от поршня до бесконечности. До тех пор, пока голова волны разрежения, которая бежит по невозмущенному газу вправо со скоростью звука c_0 , не доходит до правой границы газа, $x = x_1 > 0$, т.е. до момента $t_1 = x_1/c_0$, наличие границы никак не сказывается на движении²⁾. Поэтому полученное решение всегда описывает начальную стадию движения газа при выдвигании поршня, даже если газ занимает конечную область.

Проследим за судьбой определенной частицы газа, начальная координата которой была x_0 . До момента $t = t_0 = x_0/c_0$, пока к ней не подойдет голова волны разрежения, частица покоится. Затем она начинает двигаться влево, с ускорением, и при этом расширяется. Когда плотность в ней упадет до конечного значения ϱ_1 , а скорость станет равной скорости поршня w , дальнейшее ускорение и расширение прекратятся, а частица начнет двигаться с постоянной скоростью w . Пути нескольких частиц на

¹⁾ Предположение о том, что не $dS/d\xi = 0$, а $u - \xi = 0$, противоречит первому из уравнений (1.57).

²⁾ Вспомним рассуждения в § 6 об области влияния.

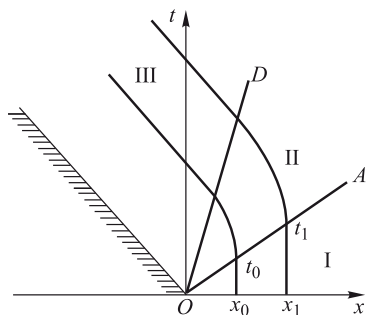


Рис. 1.21. Пути частиц на x, t -диаграмме для централизованной волны разрежения; OA — голова волны; OD — хвост волны

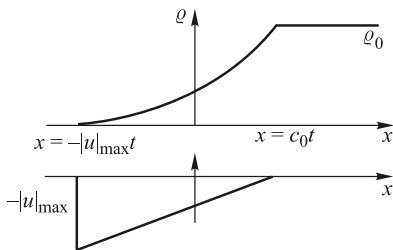


Рис. 1.22. Профили плотности и скорости при плоском нестационарном истечении газа в вакуум

плоскости x, t изображены на рис. 1.21. Уравнения этих линий в области разрежения II легко получить, интегрируя уравнение для линии тока,

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{2}{\gamma - 1} \left(c_0 - \frac{x}{t} \right),$$

с начальным условием $x = x_0$ при $t = t_0 = x_0/c_0$.

Посмотрим теперь, что происходит, если переходить к движениям со все большими и большими абсолютными скоростями поршня $|w|$. Из формул (1.53)–(1.56) видно, что чем больше $|w|$, тем ниже скорость звука, плотность, давление и температура ($T \sim \sqrt{c}$) газа в конечном состоянии ($c_1 = c(w)$, $\rho_1 = \rho(w)$ и т. д.). Наконец, при некоторой скорости поршня $|w|_m = \frac{2}{\gamma - 1} c_0$, конечные значения c_1 , ρ_1 , p_1 обращаются в нуль. Если поршень выдвигается еще быстрее, то формально решения (1.53)–(1.56) становятся бессмысленными, так как при $|u| > |w|_m$ c_1 , отрицательно, а ρ_1 и p_1 комплексны.

Фактически это означает, что при $|w| > |w|_m$ между поршнем и левой границей газа образуется область вакуума. Течение происходит таким образом, как будто поршень в начальный момент $t = 0$ вообще «убирается», и газ вытекает в пустоту. При этом газ расширяется до нулевых плотности, давления и температуры (скорости звука), и граница его движется влево со скоростью

$$u = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0, \quad |u|_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} c_0. \quad (1.60)$$

Профили скорости и плотности при нестационарном истечении в вакуум изображены на рис. 1.22. Например, для воздуха при обычных температурах $\gamma = 7/5$ и $|u|_{\max} = 5c_0$. Эта величина более чем в два раза превышает скорость стационарного истечения в вакуум из большого резервуара, когда справедливо уравнение Бернулли:

$h + u^2/2 = h_0 = c_0^2/(\gamma - 1)$ и $u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_0 \approx 2,2c_0$ при $\gamma = 1,4$ (здесь через h мы обозначили удельную энтальпию $h = \varepsilon + p/\rho$). При стационарном истечении частица приобретает кинетическую энергию $u_{\max}^2/2$ на грамм только за счет ее начального теплосодержания h_0 . При нестационарном истечении в пустоту кинетическая энергия больше ее начального теплосодержания h_0 (в пять раз при $\gamma = 1,4$).

Дополнительная кинетическая энергия приобретается за счет отбора тепла от соседних частиц: полная энергия, равная сумме кинетической и внутренней энергий

в области, охваченной волной разрежения, естественно, сохраняется и равна исходной внутренней энергии этой области.

Аналогично плоскому случаю можно рассматривать сферически или цилиндрически симметричные волны разрежения, которые образуются, если «сферический» или «цилиндрический» поршни в начальный момент $t = 0$ начинают выдвигаться из газа, занимающего пространство $r > r_0$ или $r < r_0$. При этом также образуется волна разрежения, голова которой бежит по невозмущенному газу со скоростью звука c_0 . Однако в этих случаях не существует областей постоянного течения между поршнем и хвостом волны разрежения. Заметим, что сферическая и цилиндрическая волны разрежения, в отличие от плоской, не автомодельны: в задаче имеется характерный масштаб длины — начальный радиус поршня r_0 .

§ 12. О невозможности существования центрированной волны сжатия. Казалось бы, решение задачи о поршне, движущемся с постоянной скоростью, в равной степени применимо, независимо от того, выдвигается ли поршень из газа или вдвигается в газ, производит ли он разрежение или сжатие. И то и другое движение автомодельно, т. е. решения для них можно конструировать из тривиальных, соответствующих областям постоянного течения, и нетривиального, соответствующего простой центрированной волне. Попробуем формально построить непрерывное решение для автомодельной волны сжатия, образующейся, если в начальный момент поршень начинает вдвигаться в газ с постоянной скоростью $w > 0$ (газ находится справа от поршня). «Голова» волны бежит по газу со скоростью звука c_0 вдоль линии $x = c_0 t$ на плоскости x, t . К поршню примыкает область постоянного течения, где $u = w$, а $c = c_1$, причем обе эти области постоянного течения (I и III, согласно терминологии, принятой в предыдущих параграфах) разделены областью простой центрированной волны II, где

$$J_- = u - \frac{2}{\gamma - 1}c = \text{const} = -\frac{2}{\gamma - 1}c_0.$$

Отсюда следует, что $c_1 = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2}w$, так что «хвост» волны бежит вдоль линии

$$x = (w + c_1)t = \left(\frac{\gamma + 1}{2}w + c_0\right)t.$$

Распределение скорости по координате x в области II описывается решением, аналогичным (1.56):

$$u = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right).$$

Получается, что «хвост» волны распространяется быстрее, чем «голова»:

$$\frac{\gamma + 1}{2}w + c_0 > c_0,$$

и профили скорости и плотности имеют вид, изображенный на рис. 1.23.

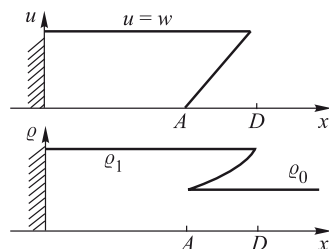


Рис. 1.23. Профили скорости и плотности, отвечающие непрерывному решению для автомодельной (центрированной) волны сжатия. A — голова волны; D — хвост волны. Решение неоднозначно и физически бессмысленно

Картина физически бессмысленна, решение неоднозначно в области II. Но полученное решение есть единственное непрерывное решение, которое следует из уравнений газодинамики. Следовательно, в данном случае непрерывного решения не существует. Эта трудность исторически являлась одним из исходных пунктов для построения разрывных решений уравнений газодинамики, т. е. для построения теории ударных волн.

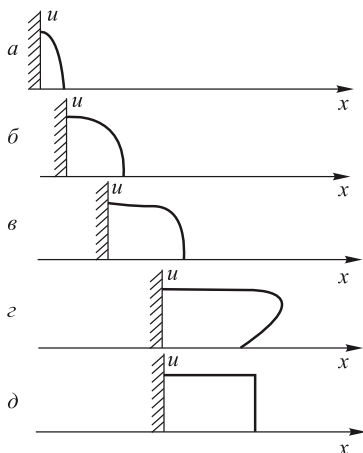


Рис. 1.24. Постепенное нарастание крутизны профиля скорости в волне сжатия, которая распространяется под действием ускоряющегося поршня. Рис. г соответствует физически бессмысленному непрерывному решению с «перехлестом» волны; рис. д показывает фактический профиль с разрывом после момента «перехлеста»

Отметим, что если поршень начинает двигаться в газ не с постоянной скоростью, а постепенно, ускоряясь от состояния покоя, то можно найти непрерывное решение для простой (но уже не центрированной) волны сжатия, которое описывает начальную стадию движения. Положение в этом случае вполне аналогично тому, которое имеет место в звуковой волне не малой амплитуды (см. § 7). Характеристики C_+ -семейства (если поршень находится слева от газа) сближаются и стремятся пересечься, крутизна профиля волны сжатия нарастает с течением времени (как показано на рис. 1.24) и в некоторый момент происходит «перехлестывание», возникает неоднозначность решения, аналогичная описанным в § 7 и в этом параграфе. На самом деле это означает, что образуется разрыв — ударная волна.

2. Ударные волны

§ 13. Введение в газодинамику понятия об ударной волне. Рассмотрим покоящийся газ с постоянными плотностью и давлением ϱ_0, p_0 , слева ограниченный плоским поршнем, и предположим, что в начальный момент поршень начал

сжимать газ с постоянной скоростью, которую будем теперь обозначать через u .

Как было показано в предыдущем параграфе, попытка найти непрерывное решение для этой задачи приводит к физически бессмысленному результату. Поскольку задача автомодельна (не содержит никаких характерных масштабов длины и времени), единственные решения, удовлетворяющие уравнениям газовой динамики, — это тривиальное решение, в котором все величины u, ϱ, p постоянны, и решение типа центрированной простой волны. Таким образом, остается одна-единственная возможность построить решение, удовлетворяющее граничным условиям задачи — в невозмущенном газе $u = 0, p = p_0, \varrho = \varrho_0$; в области, прилегающей к поршню, скорость газа равна скорости поршня, — это выбросить физически бессмысленную область II и непосредственно сомкнуть области постоянного течения I и III, предположив, что в точке смыкания газодинамические величины терпят разрыв, как показано на рис. 1.25.

Вообще говоря, законы сохранения массы, импульса и энергии, которые положены в основу уравнений динамики невязкого и нетеплопроводного газа не предусматривают обязательную непрерывность газодинамических величин. Эти законы были сформулированы ранее в форме дифференциальных уравнений просто потому, что с самого начала предполагалась непрерывность течения. Но эти же законы можно применить и к областям, в которых газодинамические величины испытывают разрыв.

С математической точки зрения разрыв можно рассматривать как предельный случай очень больших градиентов газодинамических величин, когда толщина слоя, в котором происходит конечное изменение этих величин, стремится к нулю. Поскольку в динамике невязкого и нетеплопроводного газа, т.е. при условии, что мы отвлекаемся от молекулярной структуры вещества, нет никаких характерных длин, постольку не ограничены возможности существования сколь угодно тонких переходных слоев, в пределе сводящихся к разрыву. Эти разрывы и представляют собой ударные волны.

Найдем неизвестные величины: плотность и давление газа в сжатой области ϱ_1, p_1 , а также скорость D распространения разрыва по невозмущенному веществу, исходя из общих законов сохранения массы, импульса и энергии, выполнение которых не подлежит сомнению. Параметры невозмущенного газа ϱ_0, p_0 и скорость поршня u , с которой совпадает скорость газа, будем считать известными. К моменту t в столбе с сечением в 1 см движение охватывает массу газа, равную $\varrho_0 Dt$. Эта масса занимает объем $(D - u)t$, т.е. плотность сжатого газа ϱ_1 удовлетворяет условию

$$\varrho_1(D - u)t = \varrho_0 Dt.$$

Масса $\varrho_0 Dt$ приобретает количество движения $\varrho_0 Dtu$, которое по закону Ньютона равно импульсу сил давления. Результирующая сила, действующая на сжатый газ, равна разности давлений со стороны поршня и со стороны невозмущенного вещества, т.е.

$$\varrho_0 Dut = (p_1 - p_0)t.$$

Наконец, приращение суммы внутренней и кинетической энергий сжатого газа равно работе внешней силы, толкающей поршень $p_1 ut$:

$$\varrho_0 Dt \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \frac{u^2}{2} \right) = p_1 ut.$$

Сокращая в этих равенствах время t , получим систему трех алгебраических уравнений для определения трех неизвестных величин p_1, ϱ_1, D через известные u, ϱ_0, p_0 (термодинамическая связь $\varepsilon(p, \varrho)$, конечно, предполагается известной).

Преобразуем эти уравнения таким образом, чтобы с правой стороны равенств стояли только величины, относящиеся к области перед разрывом, а с левой — параметры газа за разрывом. Для этого заметим, что если D — скорость распространения разрыва по неподвижному газу, то $u_0 = -D$ — скорость, с которой невозмущенный газ втекает в разрыв, а $D - u$ — скорость распространения разрыва относительно движущегося за ним газа, т.е. $u_1 = -(D - u)$ — это скорость, с которой газ вытекает из разрыва. Вводя эти обозначения в уравнения, запишем закон сохранения массы:

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_0 u_0. \quad (1.61)$$

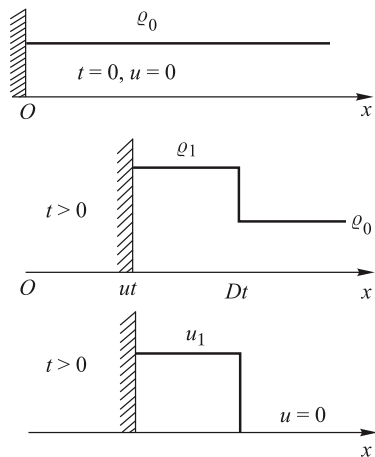


Рис. 1.25. Профили плотности и скорости в ударной волне. Волна возникает под действием поршня, который в начальный момент начал вдвигаться в газ с постоянной скоростью. На верхнем рисунке — исходное состояние

Закон сохранения импульса при помощи (1.61) приобретает вид

$$p_1 + \varrho_1 u_1^2 = p_0 + \varrho_0 u_0^2. \quad (1.62)$$

Закон сохранения энергии при помощи уравнений (1.61) и (1.62) преобразуется к виду

$$\varepsilon_1 = \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \varepsilon_0 = \frac{p_0}{\varrho_0} + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.63)$$

Вводя удельную энтальпию $w = \varepsilon + p/\varrho$, можно переписать его иначе:

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_0 + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.64)$$

Полученные уравнения представляют собой записанные в наиболее общей форме соотношения между газодинамическими величинами на поверхности разрыва, в который газ втекает по направлению, нормальному к самой поверхности.

Замечательно, что они не содержат никаких предположений о свойствах вещества и являются выражением лишь общих законов сохранения массы, импульса и энергии.

Уравнения (1.61)–(1.63) можно вывести и непосредственно, рассматривая разрыв в системе координат, в которой он покоится. Поскольку разрыв является бесконечно тонким, внутри него не происходит накопления массы, импульса и энергии. Следовательно, потоки этих величин со стороны невозмущенного газа равны потокам по другую сторону разрыва. Если на разрыв нормально к поверхности набегаёт газ с плотностью ϱ_0 и скоростью u_0 , то поток массы есть $\varrho_0 u_0$; он равен массе, вытекающей через 1 см^2 в 1 с с другой стороны разрыва, т.е. $\varrho_1 u_1$. Таким образом, получаем уравнение (1.61). Втекающая через 1 см^2 в 1 с масса $\varrho_0 u_0$ обладает количеством движения $\varrho_0 u_0 \cdot u_0$. Приращение импульса при переходе через разрыв, $\varrho_1 u_1^2 - \varrho_0 u_0^2$, равно импульсу сил давления за 1 с, $p_0 - p_1$, или, что то же самое, потоки импульса $p + \varrho u^2$ по обе стороны разрыва равны друг другу (то, что величина $p + \varrho u^2$ представляет собой плотность потока импульса при плоском движении, видно из формул (1.7), (1.8)). Так получается уравнение (1.62).

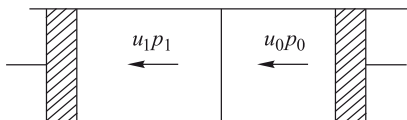


Рис. 1.26. Опыт, поясняющий вывод выражения для работы

Приращение полной (внутренней и кинетической) энергии газа, протекающего в 1 с через 1 см^2 поверхности разрыва $\varrho_0 u_0 [(\varepsilon_1 + (u_1^2/2)) - (\varepsilon_0 + (u_0^2/2))]$, равно работе сил давления, совершаемой в 1 с из расчета на 1 см^2 поверхности. Эта работа равна $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Для того чтобы пояснить происхождение этой величины, представим себе трубу, по которой течет газ справа налево, протекая через разрыв, находящийся где-то посередине (рис. 1.26). Справа и слева в трубе помещены поршни, которые движутся со скоростями u_0 и u_1 таким образом, чтобы поверхность разрыва покоилась. Правый поршень, к которому приложено давление p_0 , гонит газ через трубу, совершая работу $p_0 u_0$ в 1 с на 1 см^2 . Над левым поршнем газ совершает работу $p_1 u_1$ (поршень «совершает» над газом отрицательную работу $-p_1 u_1$). Таким образом, полная работа, совершенная над газом, равна $p_0 u_0 - p_1 u_1$. Приравнявая ее приращению энергии газа, получим уравнение (1.63). Его можно истолковать и иначе: полные потоки энергии по обе стороны разрыва $\varrho u \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} \right)$, выражение

для которых следует из уравнения энергии, записанного в форме (1.10), равны друг другу.

Формально соотношения (1.61)–(1.63), свидетельствующие о равенстве потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва, можно получить и из дифференциальных уравнений (1.2), (1.7), (1.10), которые являются выражением тех же законов. Запишем эти уравнения для плоского случая:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varrho u), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) &= -\frac{\partial}{\partial x}(p + \varrho u^2), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho \varepsilon + \frac{(\varrho u^2)}{2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\varrho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho}\right)\right].\end{aligned}\tag{1.65}$$

Будем сначала формально рассматривать разрыв как некий тонкий слой с большими градиентами всех величин и проинтегрируем уравнения по этому слою от x_0 до x_1 . Например,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x}(p + \varrho u^2) dx.$$

Теперь произведем предельный переход, устремив толщину слоя $x_1 - x_0$ к нулю. Интегралы в левых частях, пропорциональные $x_1 - x_0 \rightarrow 0$, исчезают (что и соответствует отсутствию накопления массы, импульса и энергии в разрыве). Интегралы же в правых частях дают разности потоков соответствующих величин по обе стороны разрыва, т. е. мы приходим к уравнениям (1.61)–(1.63).

Следует подчеркнуть формальный характер последнего вывода соотношений на ударном разрыве (1.61)–(1.63). Он свидетельствует только о том, что выражения для потоков массы, импульса и энергии, стоящие под знаками дивергенции в дифференциальных уравнениях, являются совершенно общими, независимо от того, непрерывно течение или нет. Если считать разрыв не математической поверхностью, а неким тонким слоем конечной толщины, где газодинамические величины меняются очень резко, но непрерывным образом, то применять к этому слою уравнения (1.65), в которых не учтены вязкость и теплопроводность, нельзя. Ниже мы увидим, что энтропии газа по обе стороны разрыва различны, тогда как в дифференциальных уравнениях (1.65) заложено условие постоянства энтропии (адиабатичности движения). Отметим внешнее сходство энергетического соотношения на ударном разрыве (1.64) с интегралом Бернулли для стационарного потока,

$$w + \frac{u^2}{2} = \text{const},$$

справедливого вдоль линии тока.

§ 14. Ударная адиабата. Уравнения (1.61)–(1.63), связывающие между собой параметры газа по обе стороны разрыва, представляют собой систему трех алгебраических уравнений относительно шести величин: $u_0, \varrho_0, p_0, u_1, \varrho_1, p_1$ (термодинамические свойства вещества, т. е. функции $\varepsilon(p, \varrho)$ или $w(p, \varrho)$ предполагаются известными). Зная термодинамические параметры газа перед разрывом ϱ_0, p_0 и задаваясь какой-нибудь из величин, характеризующих амплитуду ударной волны, например, давлением за фронтом волны p_1 или скоростью «поршня», создающего волну, $|u| = u_0 - u_1$, можно вычислить все остальные неизвестные величины. Выпишем некоторые общие соотношения, следующие из законов сохранения (1.61)–(1.63).

Введем вместо плотностей удельные объемы $V_0 = 1/\rho_0$, $V_1 = 1/\rho_1$. Из уравнения (1.61) получим

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{u_0}{u_1}. \quad (1.66)$$

Исключая из первых двух уравнений (1.61), (1.62) сначала одну, а потом другую скорость, найдем

$$u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}, \quad (1.67)$$

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}. \quad (1.68)$$

Если ударная волна создается в покоящемся газе движением поршня, то для скорости движения сжатого газа относительно невозмущенного, равной скорости «поршня», получим формулу

$$|u| = u_0 - u_1 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)}. \quad (1.69)$$

Отметим полезную формулу для разности кинетических энергий газа по обе стороны разрыва в системе координат, в которой разрыв покоится:

$$\frac{1}{2}(u_0^2 - u_1^2) = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1). \quad (1.70)$$

Подставляя выражения для квадратов скоростей (1.67), (1.68) в уравнение энергии (1.63), получим соотношение, связывающее давления с удельными объемами по обе стороны разрыва:

$$\varepsilon_1(p_1 V_1) - \varepsilon_0(p_0 V_0) = \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(V_0 - V_1). \quad (1.71)$$

Заменяя удельные внутренние энергии на удельные энтальпии по формуле $w = \varepsilon + pV$, перепишем эту формулу в другом виде:

$$w_1 - w_0 = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 + V_1). \quad (1.72)$$

По аналогии с соотношением, связывающим начальные и конечные давления и объемы при адиабатическом сжатии вещества, выражения (1.71) или (1.72) носят название ударной адиабаты или адиабаты Гюгонио.

Ударная адиабата представляется функцией

$$p_1 = H(V_1, p_0, V_0), \quad (1.73)$$

которая в ряде конкретных случаев, когда термодинамические связи $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$ выражаются простыми формулами, может быть найдена в явной форме.

Ударная адиабата имеет существенное отличие от обычной адиабаты (адиабаты Пуассона в идеальном газе с постоянной теплоемкостью). В то время как последняя представляет собой однопараметрическое семейство кривых $p = P(V, S)$, где параметром служит только значение энтропии S , адиабата Гюгонио зависит от двух параметров: давления и объема в начальном состоянии p_0, V_0 . Чтобы исчерпать все кривые $p = P(V, S)$, достаточно пройти одномерный ряд значений энтропии S . Чтобы исчерпать все кривые $p = H(V, p_0, V_0)$, надо построить «бесконечность в квадрате» кривых, отвечающих всем возможным p_0 и V_0 .

§ 15. Ударные волны в идеальном газе с постоянной теплоемкостью. Особо простым вид преобразуют формулы для ударной волны в случае идеального газа с постоянной теплоемкостью. На этом примере удобно выяснить все основные

закономерности изменения величин в ударной волне. Подставим в уравнения ударной адиабаты (1.71) или (1.72) соотношения

$$\varepsilon = c_V T = \frac{1}{\gamma - 1} pV; \quad w = c_P T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pV. \quad (1.74)$$

Это дает возможность найти в явном виде уравнение ударной адиабаты:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma + 1)V_0 - (\gamma - 1)V_1}{(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V_0}. \quad (1.75)$$

Для отношения объемов получим формулу

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}. \quad (1.76)$$

Отношение температур равно

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0}. \quad (1.77)$$

С помощью (1.76) скорости по формулам (1.67) и (1.68) можно представить через давления и начальный объем:

$$u_0^2 = \frac{V_0}{2} [(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1], \quad (1.78)$$

$$u_1^2 = \frac{V_0}{2} \frac{[(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_1]^2}{[(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1]}. \quad (1.79)$$

Выясним на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью некоторые закономерности для ударных волн. Ударная адиабата представляет собой кривую на плоскости p, V , которая проходит через точку начального состояния p_0, V_0 .

Эта кривая изображена на рис. 1.27. В принципе формулу (1.75) можно распространить и на давления, меньшие начального $p_1 < p_0$. Как мы увидим ниже, в § 17, эта часть кривой соответствует физически неосуществимым состояниям. Поэтому она проведена на рис. 1.27 пунктиром. Из формулы (1.76) видно, что в случае ударной волны очень высокой амплитуды, когда давление за фронтом гораздо больше начального, плотность газа при возрастании амплитуды увеличивается не беспредельно, а стремится к определенному значению. Это предельное сжатие в ударной волне зависит только от показателя адиабаты и равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (1.80)$$

Для одноатомного газа с $\gamma = 5/3$ предельное сжатие равно 4. Для двухатомного газа в предположении, что колебания не возбуждены, $\gamma = 7/5$ и предельное сжатие равно 6; если считать, что колебания возбуждены, $\gamma = 9/7$ и сжатие равно 8. В действительности, при высоких давлениях и температурах теплоемкость и показатель адиабаты в газах уже не являются постоянными, так как в газе происходят диссоциация молекул и ионизация атомов. Ударная адиабата с учетом этих процессов будет рассмотрена в гл. III. Однако и в этом случае сжатие всегда остается ограниченной величиной

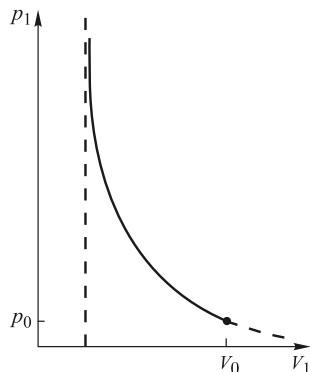


Рис. 1.27. Ударная адиабата

и чаще всего не превышает 11–13. Сжатие газа в ударной волне при данном большом отношении давлений тем сильнее, чем выше теплоемкость и меньше показатель адиабаты.

Поскольку при больших давлениях p_1 плотность возрастает очень медленно с ростом давления, температура сжатого газа растет пропорционально давлению (см. формулу (1.77) при $V_1 \approx \text{const}$). В пределе сильной волны, когда $p_1/p_0 \gg 1$ и $V_1/V_0 \approx (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_1}{p_0}. \quad (1.81)$$

Скорости в пределе при $p_1/p_0 \rightarrow \infty$ растут пропорционально корню из давления. Как видно из формул (1.67) и (1.68), при $p_1 \gg p_0$

$$u_0 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} p_1 V_0, \quad u_1 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)}} p_1 V_0. \quad (1.82)$$

Очень важные следствия можно получить, сопоставляя скорости газа по обе стороны разрыва с соответствующими скоростями звука. В идеальном газе с постоянной теплоемкостью

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S = \gamma \frac{p}{\varrho} = \gamma p V.$$

Составим отношения скоростей газа относительно разрыва к скоростям звука:

$$\left(\frac{u_0}{c_0} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_1}{p_0}}{2\gamma}, \quad (1.83)$$

$$\left(\frac{u_1}{c_1} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_0}{p_1}}{2\gamma}. \quad (1.84)$$

В предельном случае ударной волны малой амплитуды, когда давления по обе стороны разрыва близки друг к другу, $p_1 \approx p_0$, $(p_1 - p_0)/p_0 \ll 1$, согласно формуле (1.76), также мало и сжатие газа: $V_1 \approx V_0$; близки друг к другу и скорости звука $c_1 \approx c_0$. Из формул (1.83) и (1.84) видно, что в этом случае $u_0 \approx c_0 \approx c_1 \approx u_1$. Но u_0 есть скорость распространения разрыва по невозмущенному газу. Таким образом, слабая ударная волна бежит по газу со скоростью, очень близкой к скорости звука, т. е. практически не отличается от акустической волны сжатия. Это не удивительно, ибо при малом отличии p_1 от p_0 мы имеем дело с малым возмущением.

Далее, из формул (1.83) и (1.84) видно, что в ударной волне, в которой происходит сжатие газа ($V_1 < V_0$, $p_1 > p_0$), газ втекает в разрыв со сверхзвуковой скоростью $u_0 > c_0$, а вытекает из него с дозвуковой $u_1 < c_1$ (то, что $V_1 < V_0$, $\varrho_1 > \varrho_0$ при $p_1 > p_0$, следует и из общих формул (1.67), (1.68)). Можно сказать иначе: ударная волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому газу, находящемуся за нею, с дозвуковой. Чем выше амплитуда ударной волны, т. е. чем больше отношение p_1/p_0 , тем больше скорость фронта волны u_0 по сравнению со скоростью звука в невозмущенном газе c_0 . Отношение же u_1/c_1 в пределе сильной волны, $p_1 \gg p_0$, стремится к постоянной величине: $u_1/c_1 \rightarrow \sqrt{(\gamma - 1)/2\gamma} < 1$.

Рассмотрим, что происходит с энтропией газа при сжатии его ударной волной. Энтропия идеального газа с постоянной теплоемкостью с точностью до константы равна $S = c_V \ln p V^\gamma$. Разность энтропии по обе стороны фронта ударной волны

с помощью формулы (1.76) можно представить в виде

$$S_1 - S_0 = c_V \ln \frac{p_1 V_1^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} = c_V \ln \left\{ \frac{p_1}{p_0} \frac{\left[(\gamma - 1) \frac{p_1}{p_0} + (\gamma + 1) \right]^\gamma}{\left[(\gamma + 1) \frac{p_1}{p_0} + (\gamma - 1) \right]^\gamma} \right\}. \quad (1.85)$$

В предельном случае слабой волны ($p_1 \approx p_0$) выражение в фигурных скобках близко к единице и $S_1 \approx S_0$. При возрастании амплитуды волны, т. е. при увеличении отношения p_1/p_0 , начиная от единицы, выражение в фигурных скобках, как легко проверить, монотонно растет, стремясь к бесконечности при $p_1/p_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, энтропия газа, испытывающего ударное сжатие, возрастает, причем тем сильнее, чем выше амплитуда ударной волны. Возрастание энтропии свидетельствует о том, что в ударной волне происходят необратимые, диссипативные процессы, связанные с существованием вязкости и теплопроводности вещества. Теория, в которой эти процессы не учитываются, естественно, не может описать сам механизм ударного сжатия, не может описать структуру того тонкого, но в действительности конечного слоя, в котором происходит переход газа из начального состояния в конечное. Именно поэтому в теории, где вязкость и теплопроводность не приняты во внимание, ударный разрыв представляется математической поверхностью с нулевой толщиной. Как было отмечено выше, в такой теории нет характерной длины, которая могла бы послужить масштабом для толщины разрыва. При учете молекулярной структуры газа, т. е. процессов вязкости и теплопроводности, такой масштаб появляется. Это — длина свободного пробега молекул, которой пропорциональны коэффициенты вязкости и теплопроводности и которая, в действительности, служит мерой реальной ширины разрыва.

Существенно, однако, что сама величина возрастания энтропии при ударном сжатии совершенно не зависит от механизма диссипации и определяется исключительно законами сохранения массы, импульса и энергии. От механизма диссипации зависит только ширина разрыва, т. е. скорость, с которой происходит необратимое нагревание газа, испытывающего ударное сжатие. Так, стакан горячей воды непременно остывает до вполне определенной, комнатной температуры, совершенно независимо от механизма теплообмена с окружающей средой, которым определяется лишь скорость остывания.

От механизма диссипации зависят градиенты газодинамических величин в переходном слое, но не скачки этих величин между конечным и начальным состояниями, которые определяются только законами сохранения. Например, если $\Delta p = p_1 - p_0$ есть скачок давления в ударной волне, а Δx — ширина переходного слоя, то при изменении коэффициентов вязкости и теплопроводности меняются Δx и $dp/dx \sim \Delta p/\Delta x$, но произведение $\Delta x(dp/dx) \approx \Delta p$ остается неизменным. В пределе, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности устремляются к нулю, $\Delta x \rightarrow 0$, а $dp/dx \sim 1/\Delta x \rightarrow \infty$, градиенты становятся бесконечными, что и соответствует разрыву.

Дифференциальные уравнения газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности лишь допускают возможность существования разрывов, но не могут описать непрерывным образом переход из начального в конечное состояние, ибо в уравнениях автоматически заложено условие адиабатичности процесса, $dS/dt = 0$, эквивалентное уравнению энергии. Дифференциальные уравнения содержат четыре закона сохранения: массы, импульса, энергии и энтропии, тогда как в разрыве выполняются только три из них, все, кроме закона сохранения энтропии.

К вопросу о толщине фронта ударной волны, который может быть решен лишь при учете молекулярной структуры вещества, т. е. при «микроскопическом» рассмот-

рении процесса ударного сжатия, мы вернемся ниже, в § 23. Теперь же продолжим «макроскопическое» описание явления ударного сжатия, исходя только из законов сохранения массы, импульса и энергии.

§ 16. Геометрическая интерпретация закономерностей ударного сжатия.

Для лучшего уяснения различных закономерностей в теории ударной волны и свойств ударной адиабаты очень полезны графические построения на диаграмме p, V . Проведем на плоскости p, V через точку A начального состояния вещества p_0, V_0 ударную адиабату HH (рис. 1.28). Будем считать, что характер этой кривой аналогичен ударной адиабате идеального газа с постоянной теплоемкостью, т. е. что кривая везде обращена выпуклостью вниз: вторая производная d^2p/dV^2 в каждой точке положительна. В целях наглядности мы будем иллюстрировать некоторые положения конкретными вычислениями на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью, однако можно показать, что закономерности являются общими и справедливы для веществ с другими термодинамическими свойствами. Единственное условие, которое накладывается на эти свойства, — это чтобы ударная адиабата во всех точках была обращена выпуклостью вниз. Пусть вещество после ударного сжатия из состояния $A(p_0, V_0)$ переходит в состояние $B(p_1, V_1)$, изображаемое точкой B , лежащей на ударной адиабате.

По формуле (1.67) скорость распространения ударной волны по невозмущенному веществу дается выражением

$$D^2 = u_0^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Графически эта скорость определяется наклоном прямой AB , проведенной из начального состояния в конечное $((p_1 - p_0)/(V_0 - V_1))$ равно тангенсу угла наклона прямой). Из рис. 1.28 видно, что чем выше конечное давление (чем мощнее ударная волна), тем больше наклон прямой и тем больше скорость волны. (Для иллюстрации на рис. 1.28 проведены две прямые, AB и AC .)

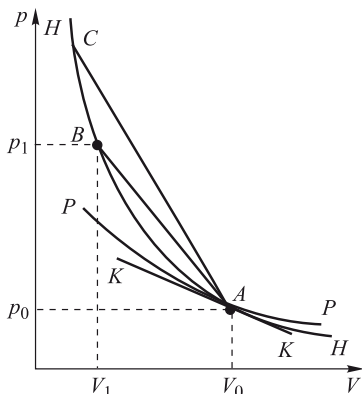


Рис. 1.28. p, V -диаграмма. HH — адиабата Гюгонио; PP — адиабата Пуассона; KK — касательная к обеим адиабатам в точке начального состояния $A(V_0, p_0)$

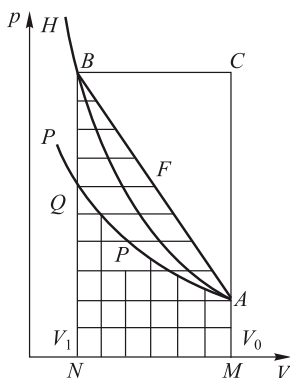


Рис. 1.29. К геометрической интерпретации приращения энергии в ударной волне. H — ударная адиабата; P — адиабата Пуассона

Посмотрим, чем определяется начальный наклон ударной адиабаты в точке A . Вычислим производную dp_1/dV_1 с помощью формулы (1.75) для идеального газа

с постоянной теплоемкостью:

$$\frac{dp_1}{dV_1} = -\frac{(\gamma-1)p_0}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0} - \frac{p_0[(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1](\gamma+1)}{[(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0]^2}.$$

Взяв производную в точке A , т.е. положив $V_1 = V_0$, получим $(dp_1/dV_1)_0 = -\gamma p_0/V_0$. Но эта величина есть не что иное, как наклон адиабаты Пуассона $p \sim V^{-\gamma}$, проходящей через точку A : $(\partial p/\partial V)_S = -\gamma p/V$. Таким образом, в точке A ударная адиабата касается адиабаты Пуассона, проходящей через эту точку. Обычная адиабата PP , соответствующая начальной энтропии газа $S_0 = S(p_0, V_0)$, также проведена на рис. 1.28. Касание адиабат в начальной точке иллюстрируется и общей формулой (1.67) для скорости ударной волны. В пределе слабой волны, когда $(p_1 - p_0)/p_0 \rightarrow 0$, ударная волна не отличается от звуковой, изменение энтропии стремится к нулю, и скорость волны D совпадает со скоростью звука:

$$D^2 = V_0^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1} \rightarrow -V_0^2 \left(\frac{\Delta p}{\Delta V} \right)_S \rightarrow c_0^2.$$

Вообще же наклон прямой AB всегда больше наклона касательной к адиабате в точке A , так что всегда $D = u_0 > c_0$.

Начальный наклон ударной адиабаты определяется скоростью звука в исходном состоянии. Строго это будет доказано для общего случая произвольного вещества в § 18. Непосредственным вычислением по формулам для идеального газа с постоянной теплоемкостью можно убедиться в том, что в точке A совпадают не только первые, но и вторые производные от адиабат Гюгонио и Пуассона, т.е. в точке A имеет место касание второго порядка. Это положение также является общим (см. § 18).

Адиабата Гюгонио везде проходит выше обычной адиабаты, проведенной из начальной точки, как показано на рис. 1.28. В самом деле, при ударном сжатии от объема V_0 до объема $V_1 < V_0$ энтропия повышается, а при адиабатическом — остается неизменной. Но при одинаковом объеме давление тем выше, чем больше энтропия.

Приращение удельной внутренней энергии при ударном сжатии $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ от состояния A до состояния B , как видно из выражения (1.71) для ударной адиабаты, численно равно площади трапеции $MABN$, покрытой на рис. 1.29 горизонтальной штриховкой.

Если газ сжать адиабатически из состояния A до того же самого объема V_1 (до состояния Q), то для этого нужно совершить работу, численно равную площади фигуры $MAQN$, ограниченной сверху обычной адиабатой P и заштрихованной вертикально. Эта площадь дает и приращение внутренней энергии газа,

$$\varepsilon' - \varepsilon_0 = - \int_{V_0}^{V_1} p dV$$

(интегрирование ведется при $S = S_0$). Для того чтобы привести газ в конечное состояние B , необходимо его еще нагреть при постоянном объеме V_1 , сообщив ему количество тепла, численно равное разности площадей, заштрихованных горизонтально и вертикально, т.е. равное площади фигуры ABQ . Эта площадь и определяет возрастание энтропии газа при ударном сжатии. Она равна

$$\varepsilon_1 - \varepsilon' = \int_{S_0}^{S_1} T dS = \bar{T}(S_1 - S_0),$$

где $\bar{T}$ — некоторая средняя температура на отрезке прямой QB (при $V = V_1 = \text{const}$).

В системе координат, в которой исходный газ покоится, он после сжатия приобретает кинетическую энергию (на 1 г), равную, согласно общей формуле (1.69),

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(u_0 - u_1)^2}{2} = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(V_0 - V_1).$$

Эта энергия численно равна площади треугольника ABC на рис. 1.29, дополняющего трапецию $MABN$, площадь которой соответствует $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$, до прямоугольника $MCBN$.

Площадь этого прямоугольника $p_1(V_0 - V_1)$ представляет собой полную энергию, сообщенную «поршнем» 1 г первоначально покоящегося газа. В сильной ударной волне, когда $p_1 \gg p_0$, она поровну делится между приращениями внутренней и кинетической энергий: площ. $MABN \approx$ площ. ABC :

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 \approx \frac{u^2}{c} \approx \frac{1}{2}p_1(V_1 - V_0).$$

Разберем на диаграмме p, V соотношение между скоростями газа и звука в конечном состоянии (рис. 1.30). Проведем через точку B на адиабате H_A , соответствующей начальному состоянию A , новую адиабату H_B , для которой точка B является

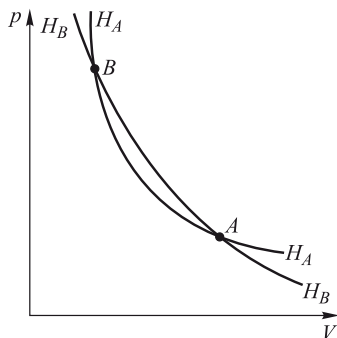


Рис. 1.30. p, V -диаграмма, поясняющая соотношение между скоростями газа и звука в ударной волне

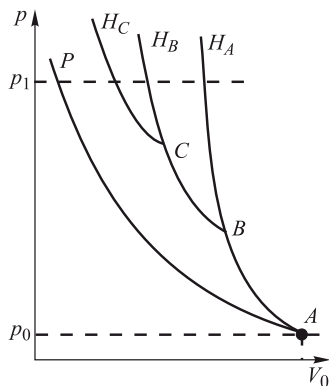


Рис. 1.31. К вопросу об однократном и многократном ударном и адиабатическом сжатиях газа до одинакового давления p_1 . H_A , H_B , H_C — ударные адиабаты, для которых точки A, B, C являются начальными; P — адиабата Пуассона

начальной. Из симметрии уравнения адиабаты относительно перестановки индексов «0» и «1» следует, что если $p_1 = H(V_1, p_0, V_0)$, то $p_0 = H(V_0, p_1, V_1)$. Другими словами, адиабата H_B , формально продолженная в сторону давлений, меньших начального, пересекает адиабату H_A в точке A . Взаимное расположение адиабат H_A и H_B таково, как это показано на рис. 1.30, в чем легко убедиться на примере идеального газа с постоянной теплоемкостью ¹⁾. Скорость распространения волны относительно

¹⁾ То, что адиабата H_B проходит левее H_A при давлениях более высоких, чем p_B , можно пояснить следующим образом. Если точка B соответствует сжатию газа из состояния A очень сильной ударной волной, то адиабата H_A проходит при $p > p_B$ почти вертикально, отвечая

сжатого газа определяется формулой (1.68):

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1 - p_0}{V_0 - V_1}.$$

Квадрат скорости звука в сжатом газе в точке B равен

$$c_1^2 = -V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S.$$

Первая величина пропорциональна тангенсу угла наклона прямой BA , а вторая — тангенсу угла наклона касательной к ударной адиабате H_B в точке B (ударная адиабата H_B и адиабата Пуассона, проходящая через B , касаются друг друга). Взаимное расположение прямой BA и адиабаты H_B соответствует тому, что $u_1 < c_1$.

В конце § 12 было отмечено, что, в отличие от адиабаты Пуассона, адиабата Гюгонио зависит от двух параметров. Благодаря этому нельзя путем сжатия газа несколькими ударными волнами, исходя из данного начального состояния, прийти к тому же самому конечному состоянию, что и путем сжатия одной волной.

Так, например, если пропустить по одноатомному газу сильную ударную волну, газ сожмется в четыре раза, а если пропустить одну за другой две сильные волны, оставляя неизменным конечное давление, получим сжатие в 16 раз.

В то же время, разбивая адиабатический процесс на сколько угодно этапов, приходим к одной и той же плотности, если задано конечное давление.

Это положение иллюстрируется диаграммой p, V , рис. 1.31, где изображены адиабата Пуассона и несколько адиабат Гюгонио, отвечающих сжатию газа последовательными ударными волнами.

§ 17. Невозможность существования ударной волны разрежения в веществе с нормальными свойствами. В § 15 были выписаны формулы для вычисления различных величин, связанных с ударной волной, для случая идеального газа с постоянной теплоемкостью. Из этих формул непосредственно следовало, что в ударной волне, в которой происходит сжатие вещества, выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} p_1 > p_0, \quad \varrho_1 > \varrho_0, \quad V_1 < V_0, \\ u_0 > c_0, \quad u_1 < c_1, \quad S_1 > S_0. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Одновременно со сжатием вещества и повышением его давления растет и энтропия; волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому газу за нею — с дозвуковой. Этот режим схематически изображен на рис. 1.32, *a*. Распространим теперь выражения (1.75) для ударной адиабаты на давления, меньшие начального, и допустим, что существуют такие разрывы, в которых происходит не сжатие, а разрежение газа: $V_1 > V_0$, $p_1 < p_0$. Законы сохранения массы, импульса и энергии, с помощью которых были получены формулы, связывающие скорости, плотности и давления по обе стороны разрыва, никак не ограничивают возможности существования таких разрывов. Из формул (1.83), (1.84) видно, что в этом случае $u_0 < c_0$, а $u_1 > c_1$. Формула (1.85) для скачка энтропии в разрыве свидетельствует о том, что энтропия газа при этом уменьшается (выражение в фигурных скобках меньше единицы при $p_1 < p_0$).

предельному сжатию до объема, равного $[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]V_A$. В то же время, пропуская вторую ударную волну по газу из состояния B , мы можем его сжимать вплоть до объема

$$[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]V_B = [(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]^2 V_A.$$

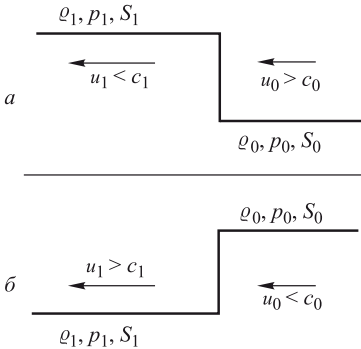


Рис. 1.32. Схематические изображения ударных волн сжатия (а) и разрежения (б). Газ втекает в разрыв справа налево

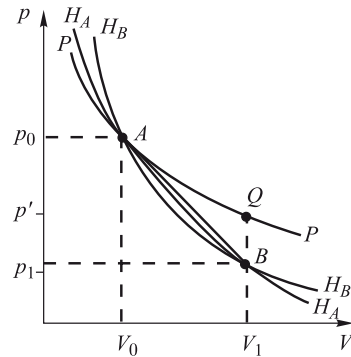


Рис. 1.33. К геометрической интерпретации неравенств в «ударной волне разрежения». H_A — ударная адиабата; P — адиабата Пуассона, проходящая через точку A начального состояния; H_B — ударная адиабата, проведенная из точки конечного состояния B

Мы приходим, таким образом, к режиму ударной волны разрежения, в котором одновременно выполняются следующие неравенства:

$$p_1 < p_0, \quad \rho_1 < \rho_0, \quad V_1 > V_0, \quad u_0 < c_0, \quad u_1 > c_1, \quad S_1 < S_0, \quad (1.87)$$

и который схематически изображен на рис. 1.32, б.

Геометрическая интерпретация этих неравенств, подобная изложенной в § 16, представлена на рис. 1.33. Наклон прямой AB меньше наклона касательной к ударной адиабате H_A в точке начального состояния A ($u_0 < c_0$) и больше наклона касательной ко второй ударной адиабате H_B , проведенной через точку конечного состояния B ($u_1 > c_1$).

Адиабата Пуассона P , проходящая через точку A в области $p_1 < p_0$, стелется выше ударной адиабаты H_A . Этим и объясняется уменьшение энтропии при ударном разрежении. При адиабатическом разрежении до того же объема V_1 давление p' выше конечного p_1 . Для того чтобы прийти из Q в B , надо охладить газ при постоянном объеме, т. е. уменьшить его энтропию.

Но по второму закону термодинамики, за счет одних только внутренних процессов, без отбора тепла наружу, энтропия вещества не может уменьшаться. Отсюда следует невозможность распространения волны разрежения в виде разрыва, и из двух режимов, существование которых допускается законами сохранения массы, импульса и энергии, требование возрастания энтропии выбирает только один — ударную волну сжатия. Это положение носит совершенно общий характер и известно под названием теоремы Цемплена. В следующем параграфе будет показано, что в волнах слабой интенсивности при условии положительности второй производной $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$ совокупности неравенств (1.86) или (1.87) выполняются одновременно, совершенно независимо от конкретных термодинамических свойств вещества. Это положение можно доказать и для волн не малой амплитуды и произвольного вещества. Единственное условие, которое накладывается на свойства вещества, — это чтобы ударная адиабата во всех точках была обращена выпуклостью вниз: $(\partial^2 p / \partial V^2)_H > 0$, подобно тому как это имеет место для идеального газа с постоянной теплоемкостью. Подавляющее большинство реальных веществ обладает именно такими свойствами, так

что утверждение о невозможности существования ударных волн разрежения имеет весьма общий характер (о некоторых исключениях речь пойдет ниже).

Невозможность существования ударной волны разрежения можно пояснить следующим образом. Такая волна распространялась бы по невозмущенному газу с дозвуковой скоростью $u_0 < c_0$. Значит, если в какой-то момент времени и возникнет состояние, подобное изображенному на рис. 1.32, б, то возмущение от скачка плотности и давления побежит вправо со скоростью звука c_0 , обгоняя «ударную волну»; через некоторое время разрежение охватит газ перед «разрывом», и разрыв попросту размоется. Иными словами, ударная волна разрежения механически неустойчива. Наоборот, ударная волна сжатия распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью $u_0 > c_0$; состояние за фронтом этой волны никак не может повлиять на состояние газа перед волною и разрыв остается устойчивым. Относительно сжатого газа ударная волна сжатия распространяется с дозвуковой скоростью $u_1 < c_1$, поэтому газодинамический режим за фронтом ударной волны влияет на амплитуду волны.

Если, скажем, подогреть или сжимать газ за фронтом, то ударная волна будет усиливаться, и наоборот, если за фронтом ударной волны происходит охлаждение газа или его разрежение, то возмущения, несущие разрежение, догоняют ударную волну и ослабляют ее.

В ударной волне разрежения положение было бы обратное: поскольку она распространялась бы по разреженному газу со сверхзвуковой скоростью, она не была бы подвержена воздействию каких-либо процессов, происходящих за нею — была бы «неуправляемой».

Весьма существенно, что условие механической устойчивости ударной волны совпадает с термодинамическим условием возрастания энтропии. Механическая устойчивость может иметь место только тогда, когда волна распространяется по невозмущенному веществу со сверхзвуковой скоростью, иначе возмущение, вызываемое ударной волной; проникло бы в исходный газ со скоростью звука, опередило бы ударную волну, размывая тем самым резкий фронт волны. В то же время с условием возрастания энтропии совпадает и условие, позволяющее представить себе причинную связь явлений. Именно при возрастании энтропии ударная волна сжатия распространяется по испытывавшему превращению газу с дозвуковой скоростью, т. е. внешние факторы, такие, например, как поршень, вдвигающийся в газ, могут вызывать появление ударной волны и в дальнейшем воздействовать на ее распространение.

Таким образом, в веществе с нормальными термодинамическими свойствами, когда $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$, ударные волны сжатия, соответствующие возрастанию энтропии, оказываются механически устойчивыми и подверженными воздействию внешних причин. Возникновение ударной волны разрежения невозможно как с термодинамической точки зрения, так и с точки зрения устойчивости: возникший однажды крутой фронт разрежения размылся бы с течением времени.

Приведем в заключение этого параграфа таблицу, иллюстрирующую возможности осуществления различных режимов:

	Волна сжатия	Волна разрежения
Разрыв	Возможна; энтропия растет; механическая устойчивость	Невозможна; энтропия уменьшается; механическая неустойчивость
Плавное распределение	Невозможна; неограниченное нарастание крутизны фронта, переходящее в «перехлестывание»	Возможна; распределения становятся с течением времени все более плавным

§ 18. Ударные волны слабой интенсивности. Рассмотрим ударную волну слабой интенсивности, в которой скачки всех газодинамических параметров можно рассматривать как малые величины. При этом пока не будем делать никаких предположений о термодинамических свойствах вещества, исходя только из законов сохранения.

Рассматривая внутреннюю энергию как функцию энтропии и удельного объема, запишем приращение энергии в ударной волне в виде разложения по малым приращениям независимых переменных около точки начального состояния:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial V^3} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

Все производные в этом разложении берутся в точке начального состояния $V_0 S_0$. Как мы сейчас увидим, приращение энтропии в волне $S_1 - S_0$ есть величина третьего порядка малости, если рассматривать приращение $V_1 - V_0$ как малую первого порядка. Поэтому, ограничиваясь разложением внутренней энергии до величин третьего порядка, можно опустить члены, пропорциональные $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0)$, $(S_1 - S_0)^2$ и т. д. Согласно термодинамическому тождеству $d\varepsilon = TdS - pdV$,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S} \right)_V = T, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_S = -p.$$

Поэтому

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = T_0(S_1 - S_0) - p_0(V_1 - V_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

Подставим это выражение в уравнение адиабаты Гюгонио (1.71) и разложим в правой части ее давление p_1 . Поскольку левую часть равенства можно разложить до величин третьего порядка, в разложении давления достаточно ограничиться членами второго порядка по разности $V_1 - V_0$ и опустить член, содержащий приращение энтропии, так как он даст в правой части слагаемое, пропорциональное $(S_1 - S_0)(V_1 - V_0)$, которое есть величина более высокого порядка малости, чем $(V_1 - V_0)^3$:

$$p_1 = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2.$$

Производя сокращения в уравнении адиабаты Гюгонио с подставленными разложениями, получим связь приращения энтропии с приращением объема:

$$T_0(S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_0 - V_1)^3. \quad (1.88)$$

Если исходить из уравнения адиабаты Гюгонио, записанного в форме (1.72), где вместо внутренней энергии стоит энтальпия, то получим аналогичным путем

$$T_0(S_1 - S_0) = \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_S (p_1 - p_0)^3. \quad (1.89)$$

В тождественности обеих формул легко убедиться, подставляя разложение $(p_1 - p_0) = (\partial p / \partial V)_S (V_1 - V_0)$ в формулу (1.89) и замечая, что

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{\partial p / \partial V} \right) \frac{1}{\partial p / \partial V} = - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)^3 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right).$$

Формулы (1.88) и (1.89) показывают, что приращение энтропии в ударной волне слабой интенсивности есть величина третьего порядка малости относительно приращений $p_1 - p_0$ или $V_0 - V_1$, которыми характеризуется амплитуда волны.

Из формул (1.88) и (1.89) видно, что знак приращения энтропии в ударной волне определяется знаками вторых производных $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ или $(\partial^2 V / \partial p^2)_S$. Если адиабатическая сжимаемость вещества $-(\partial V / \partial p)_S$ уменьшается с увеличением давления, т. е. $(\partial^2 V / \partial p^2)_S > 0$ и $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$, то обычная адиабата на плоскости p, V изображается кривой, обращенной выпуклостью вниз (как в идеальном газе с постоянной теплоемкостью). В этом случае энтропия растет ($S_1 > S_0$) в ударной волне сжатия, когда $p_1 > p_0$, $V_1 < V_0$ и уменьшается в ударной волне разрежения. Если же $(\partial^2 V / \partial p^2)_S < 0$, $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$, положение обратное: энтропия растет в ударной волне разрежения, когда $p_1 < p_0$, $V_1 > V_0$, и уменьшается в ударной волне сжатия. Поскольку для подавляющего большинства реальных веществ $(\partial^2 V / \partial p^2)_S > 0$, то из условия невозможности уменьшения энтропии и следует невозможность существования ударных волн разрежения. Это положение уже было сформулировано выше и продемонстрировано на конкретном примере идеального газа с постоянной теплоемкостью.

Запишем разложение давления $p = p(S, V)$ около начальной точки S_0, V_0 вплоть до членов третьего порядка по $V_1 - V_0$ и первого порядка по $S_1 - S_0$:

$$p_1 - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S (V_1 - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3} \right)_S (V_1 - V_0)^3 + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0).$$

Опишем этим разложением начальные участки ударной и обычной адиабат, проведенных через точку S_0, V_0 . Члены первого и второго порядков малости относительно $V_1 - V_0$ у обеих адиабат совпадают, т. е. ударная и обычная адиабаты имеют в начальной точке общие касательные и общие центры кривизны (имеет место касание второго порядка). Члены третьего порядка малости у адиабат отличаются. Третий член в правой части разложения у обеих адиабат общий. Последний же, четвертый, у обычной адиабаты исчезает, так как $S_1 - S_0 = 0$ ($S = \text{const}$), а у ударной адиабаты, согласно (1.88), равен

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (S_1 - S_0) = - \frac{1}{12T_0} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S (V_1 - V_0)^3.$$

У всех нормальных веществ давление с ростом энтропии при постоянном объеме (во время нагревания при постоянном объеме) увеличивается, т. е. $(\partial p / \partial S)_V > 0$; $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ также положительна. Следовательно, при $V_1 > V_0$ последний член отрицателен, а при $V_1 < V_0$ положителен: при $V_1 > V_0$ ударная адиабата проходит ниже обычной, а при $V_1 < V_0$ — выше обычной. Таким образом, в начальной точке для обеих адиабат имеет место касание второго порядка с пересечением.

Взаимное расположение ударной адиабаты H и обычной P показано на рис. 1.34. Для ясности отметим, что отрезок CD — величина первого порядка малости относительно $V_0 - V_1$, DE — второго, а EF — третьего.

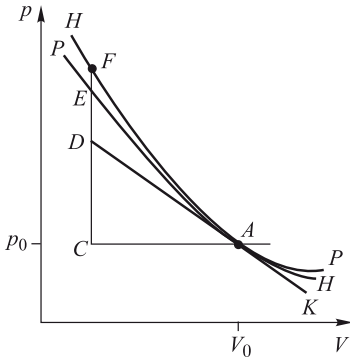


Рис. 1.34. Взаимное расположение ударной H и обычной P адиабат. DK — касательная к адиабатам в точке начального состояния A . В ударной волне слабой интенсивности отрезок CD — величина первого порядка малости; DE — второго; EF — третьего

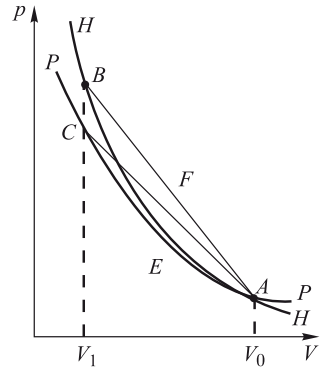


Рис. 1.35. К геометрической интерпретации приращения энтропии в ударной волне

Вернемся к геометрической интерпретации приращения энтропии в ударной волне (рис. 1.35). Как было показано в § 16, величина $\bar{T}\Delta S$ изображается площадью фигуры $AFBCEA$. Разобьем ее прямой AC на две части: сегмент $ACEA$ и треугольник ABC . Площадь треугольника ABC равна половине произведения основания BC на высоту $V_0 - V_1$. Отрезок BC при небольших изменениях всех величин, т. е. в волне слабой интенсивности, равен $(\partial p / \partial S)_V \Delta S$, т. е.

$$\bar{T}\Delta S = F_{\text{сегм}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (V_0 - V_1) \Delta S,$$

где $F_{\text{сегм}}$ — площадь сегмента $ACEA$. Отсюда

$$\Delta S = \frac{F_{\text{сегм}}}{\bar{T} - \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V (V_0 - V_1).$$

При малых изменениях объема $\alpha \rightarrow 0$ и $\bar{T}\Delta S \rightarrow F_{\text{сегм}}$, т. е. поправка на площадь треугольника мала. И действительно, она более высокого порядка малости, чем площадь сегмента, которая имеет порядок $\bar{T}\Delta S$. Составляя выражение для площади сегмента,

$$\bar{T}\Delta S = \frac{p_0 + p'}{2} (V_0 - V_1) - \int_{V_1}^{V_0} (pdV)_{S=S_0},$$

и подставляя разложения для слабых волн, придем, как и следовало ожидать, к формуле (1.88).

Таким образом, и из геометрического построения видно, что знак ΔS зависит от знака площади сегмента, т. е. от того, проходит ли секущая AC выше или ниже обычной адиабаты или, что то же самое, обращена ли адиабата выпуклостью вниз или вверх.

Сопоставим скорости u_0, u_1 со скоростями звука c_0, c_1 . Как мы знаем, отношение u_0/c_0 определяется соотношением наклонов прямой AB (см. рис. 1.28) и касательной к адиабате Пуассона в точке A . Отношение u_1/c_1 определяется соотношением

наклонов прямой AB и касательной к адиабате Пуассона, проведенной через точку B . Запишем выражения для наклонов всех трех прямых:

$$\frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} (V_1 - V_0) - \text{прямая } AB,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} - \text{касательная к адиабате в точке } A,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_B} = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} (V_1 - V_0) - \text{касательная к адиабате в точке } B.$$

Последняя формула следует из того факта, что адиабата $S_1 = \text{const}$ вплоть до членов третьего порядка относительно $V_1 - V_0$ параллельна адиабате $S_0 = \text{const}$. Замечая, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_0} < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_0} > 0, \quad V_1 - V_0 < 0,$$

видим, что прямая AB проходит более круто, чем касательная в точке A , но менее круто, чем касательная в точке B , откуда $u_0 > c_0$, $u_1 < c_1$. Это непосредственно видно и из рис. 1.30.

Существенна внутренняя связь условий возрастания энтропии и условия механической устойчивости разрыва $u_0 > c_0$. Оба условия непосредственно вытекают из того факта, что адиабаты при уменьшении объема, начиная от A , идут все круче и круче.

Итак, из рассмотрения ударных волн слабой интенсивности в веществе с произвольными термодинамическими свойствами мы получили все те следствия из законов сохранения, которые были выше продемонстрированы на частном примере идеального газа с постоянной теплоемкостью. Единственное условие, которое нам при этом потребовалось, — это положительность второй производной $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$.

§ 19. Ударные волны в веществе с аномальными термодинамическими свойствами. Представим себе теперь вещество с аномальными термодинамическими свойствами, такими, что вторая производная $(\partial^2 p / \partial V^2)_S$ хотя бы в некоторой части адиабаты отрицательна. Обычная адиабата для такого вещества в соответствующей области давлений и объемов обращена выпуклостью вверх, как показано на рис. 1.36.

Из рассмотрения предыдущего параграфа следует, что при небольших изменениях давления адиабата Гюгонио почти совпадает с адиабатой Пуассона (с точностью до малых третьего порядка по $V_1 - V_0$ или $p_1 - p_0$).

В этом случае площадь фигуры $APBMNA$, ограниченной сверху адиабатой Пуассона, больше площади трапеции $AEBMNA$, ограниченной сверху секущей AEB , т.е. энтропия в ударной волне сжатия убывает (это видно и из формулы (1.88)). В то же время благодаря тому, что наклон секущей меньше наклона касательной в точке A , скорость распространения ударной волны по невозмущенному газу меньше скорости звука, а поскольку наклон секущей AEB больше наклона касательной в точке B , скорость за разрывом сверхзвуковая.

Наоборот, в ударной волне разрежения энтропия растет (см. формулу (1.88)). Как видно из сопоставления наклонов секущей AC и касательных в точках A и C , скорость перед разрывом сверхзвуковая, а за разрывом — дозвуковая.

Таким образом, и в веществе с аномальными свойствами условие возрастания энтропии совпадает условием механической устойчивости $u_0 > c_0$ и условием, допускающим причинную связь между внешними факторами и распространением волны: $u_1 < c_1$. В аномальном веществе невозможны ударные волны сжатия, но возможны ударные волны разрежения. Вызванное движением поршня сжатие в таком, веществе

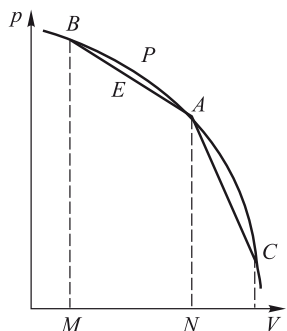


Рис. 1.36. Адиабата Пуассона вещества с аномальными свойствами и геометрическая интерпретация соотношений для ударных волн сжатия и разрежения

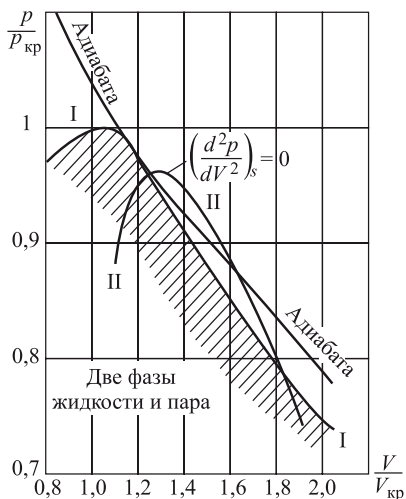


Рис. 1.37. Адиабата с аномальной выпуклостью в ван-дер-ваальсовом газе с теплоемкостью $c_V = 40$ кал/К·моль. Заштрихована область двухфазных систем. Кривая II ограничивает область состояний с аномальной выпуклостью адиабат. Под кривой II $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$

будет распространяться в виде волны, постепенно расширяющейся наподобие волн разрежения в обычном газе. Ударный разрыв вообще не возникнет и движение будет адиабатическим. Волна же разрежения будет распространяться в виде крутого фронта, который не будет расширяться с течением времени и толщина которого будет определяться значениями вязкости и теплопроводности.

В обычных условиях все вещества — газообразные, твердые и жидкие — обладают нормальными свойствами: адиабатическая сжимаемость их уменьшается с возрастанием давления. Аномального поведения вещества можно ожидать вблизи критической точки жидкость—газ. Действительно, еще задолго до критической точки изотермы газа имеют перегиб (в критической точке перегиб становится горизонтальным). Для вещества с достаточно большой, молекулярной теплоемкостью, у которого показатель адиабаты близок к единице, адиабаты и изотермы отличаются мало, и можно ожидать, что вне области двухфазных состояний адиабаты также будут иметь перегиб, т.е. обладать областью, с аномальным знаком второй производной, как это показано на рис. 1.37, взятом из книги Я. Б. Зельдовича [2].

Кривая I на этом рисунке ограничивает область двухфазной системы, а кривая II есть геометрическое место точек перегиба адиабат $(\partial^2 p / \partial V^2)_S = 0$. Она отделяет область, в которой $(\partial^2 p / \partial V^2)_S < 0$. На рис. 1.37 проведена также одна адиабата, обладающая аномальностью. Кривые рассчитаны с помощью модельного уравнения состояния Ван-дер-Ваальса для случая теплоемкости $c_V = 40$ кал/К·моль.

Связь знака приращения энтропии и неравенств, касающихся скоростей газа и звука, отвечающая обязательному совпадению условия возрастания энтропии с условием механической устойчивости, может нарушиться только в том случае, если в рассматриваемом интервале изменения давления осуществляются оба знака $\partial^2 p / \partial V^2$, так что адиабата Пуассона имеет больше двух точек пересечения с секу-

щей. При этом могут возникать сложные режимы с одновременным существованием и разрывов и примыкающих к ним размытых волн.

Еще один случай аномального поведения вещества будет рассмотрен в гл. XI; аномалии в этом случае связаны с полиморфными превращениями (фазовыми переходами) твердых тел при тех высоких давлениях, которые достигаются в ударных волнах. Там же будут рассмотрены и указанные сложные режимы.

3. Вязкость и теплопроводность в газодинамике

§ 20. Уравнения одномерного движения газа. Диссипативные процессы — вязкость (внутреннее трение) и теплопроводность — связаны с существованием молекулярной структуры вещества. Они создают дополнительный, негидродинамический перенос импульса и энергии и приводят к неадиабатичности движения, к термодинамически необратимому превращению механической энергии в тепло.

Вязкость и теплопроводность проявляются только при наличии больших градиентов гидродинамических величин, которые имеют место, например, в пограничном слое при обтекании тел или внутри фронта, ударной волны. В этой книге вязкость и теплопроводность нас будут интересовать в основном с точки зрения их влияния на внутреннюю структуру фронта ударных волн в газах. При изучении этой структуры течение можно считать зависящим от одной координаты x (плоским), так как толщина фронта ударной волны всегда намного меньше радиуса кривизны его поверхности. Поэтому мы не будем останавливаться на выводе общего уравнения движения вязкой жидкости (газа), который можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1], и поясним только, как можно получить уравнения для одномерно-го, плоского, случая.

Запишем уравнение сохранения импульса для невязкого газа (1.7) в плоском случае, когда все величины зависят только от одной координаты x и скорость имеет только одну x -компоненту u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = -\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \rho u^2.$$

Примем во внимание теперь, что газ состоит из сталкивающихся друг с другом молекул. Представим себе площадку единичного сечения, перпендикулярную к оси x . Эту площадку с обеих сторон пронизывают молекулы, летящие в определенных направлениях после того, как они испытали последнее столкновение. Молекулы выходят после последнего столкновения из слоев толщиной порядка среднего свободного пробега молекул l , граничащих с площадкой с обеих сторон (рис. 1.38). Если n — число молекул в 1 см^3 , а $\bar{v}$ — их средняя тепловая скорость, то в 1 с площадку пересекает слева направо порядка $n\bar{v}$ молекул. Каждая из них переносит через площадку гидродинамический импульс mu , где m — масса молекулы, т. е. плотность потока гидродинамического импульса слева направо по порядку величины равна $n\bar{v} \cdot mu$. Аналогично, поток гидродинамического импульса справа налево равен примерно $n\bar{v}m(u + \Delta u)$, где Δu — приращение гидродинамической скорости при переходе от левого слоя к правому: $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}l$. Связанная с молекулярным переносом плотность потока x -й компоненты импульса в x -направлении равна разности потоков

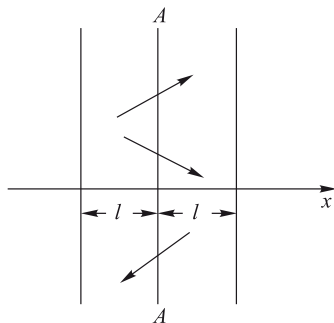


Рис. 1.38. Схема, поясняющая вывод формулы для молекулярного переноса импульса

слева направо и справа налево, т.е. $-n\bar{v}ml\frac{\partial u}{\partial x}$. Эта величина и соответствует дополнительному переносу импульса за счет внутреннего трения; она должна быть добавлена к плотности потока импульса $\Pi_{xx} = p + \varrho u^2$.

Более строгое рассмотрение, основанное на изучении трехмерного движения, показывает, что в написанное выражение следует ввести численный коэффициент порядка единицы. А именно, уравнение сохранения импульса с учетом вязкости в плоском случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) = -\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad \Pi_{xx} = p + \varrho u^2 - \sigma', \quad \sigma' = \frac{4}{3}\eta\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.90)$$

где η — коэффициент вязкости, который для газов (при отсутствии релаксационных процессов; см. ниже) по порядку величины равен

$$\eta \sim n\bar{v}ml = \varrho\bar{v}l.$$

Величина σ' представляет собой xx -компоненту тензора вязких напряжений. Появление ее в формуле для потока импульса эквивалентно возникновению добавочного «давления», обязанного силам внутреннего трения. От уравнения (1.90) с помощью уравнения непрерывности легко перейти к уравнению движения:

$$\varrho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}(p - \sigma'); \quad (1.91)$$

$\partial\sigma'/\partial x$ есть сила внутреннего трения, рассчитанная на 1 см³ газа.

При наличии диссипативных процессов дополнительные члены появляются и в уравнении энергии. С добавочным, «вязким» давлением связан дополнительный поток энергии. К выражению плотности потока энергии, которое стоит под знаком дивергенции в формуле (1.10), надо прибавить величину $-\sigma'u$, аналогичную pu . Кроме того, в это выражение следует ввести еще и поток энергии, переносимой механизмом теплопроводности:

$$J = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.92)$$

где κ — коэффициент теплопроводности. Выражение (1.92) легко получить таким же путем, каким был найден вязкий поток импульса. При этом оказывается, что в газах коэффициент теплопроводности по порядку величины равен $\kappa \sim \varrho c_p \bar{v}l$.

С учетом обоих диссипативных членов уравнение энергии (1.10), записанное для плоского случая, приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho\varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\varrho u\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) + pu - \sigma'u + J\right]. \quad (1.93)$$

Преобразуя это уравнение с помощью уравнений непрерывности, движения и термодинамического тождества $TdS = d\varepsilon + pdV$, получим уравнение для скорости изменения энтропии частицы вещества:

$$\varrho T\frac{dS}{dt} = \sigma'\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial x} = \frac{4}{3}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right). \quad (1.94)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет собой механическую энергию, диссипируемую в 1 см³ в 1 с за счет вязкости. Он всегда положителен, так как $\eta > 0$ и $(\partial u/\partial x)^2 > 0$; следовательно, силы внутреннего трения приводят к локальному повышению энтропии вещества. Второй член соответствует нагреванию или охлаждению вещества вследствие теплопроводности. Он может быть как

положительным, так и отрицательным, так как теплопроводность приводит к перекачиванию тепла из более нагретых областей в менее нагретые. Однако энтропия всего вещества в целом вследствие теплопроводности только возрастает. В этом можно убедиться, если поделить уравнение (1.94) на T и проинтегрировать по всему объему. Изменение энтропии вещества, занимающего объем, ограниченный поверхностями x_1 и x_2 , вследствие теплопроводности равно

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \frac{1}{T} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\kappa}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Если вещество теплоизолировано на границах x_1 и x_2 , то потоки тепла на границах исчезают и остается только второй член в правой части, который всегда положителен ($\kappa > 0$).

Уравнения газодинамики, записанные с учетом вязкости и теплопроводности, позволяют судить о том, при каких условиях роль этих диссипативных процессов может оказаться существенной.

Сравним инерционные силы в уравнении движения с силами вязкостными. Если U — масштаб скорости движения, а d — характерные размеры области, охваченной движением, то масштаб времени порядка d/U и инерционный член $\rho \, du/dt$ порядка $\rho U^2/d$. Член вязкости $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ в уравнении (1.94) порядка $\eta U/d^2$, и отношение его к инерционному — порядка

$$\frac{1}{Re} = \frac{\eta}{\rho U d} = \frac{\nu}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U}.$$

Обратная величина этого отношения носит название числа Рейнольдса ($\nu = \eta/\rho \sim \sim l \bar{v} \sim l c$ — кинематическая вязкость, $c \sim \bar{v}$ — скорость звука). Аналогичным путем, сравнивая перенос тепла путем теплопроводности с механическим переносом энергии, найдем, что отношение их порядка

$$\frac{1}{Pe} = \frac{\kappa}{\rho c_p U d} = \frac{\chi}{U d} \sim \frac{l}{d} \frac{c}{U},$$

где Pe — число Пекле, близкое в газах к числу Рейнольдса, так как коэффициент молекулярной температуропроводности $\chi = \kappa/\rho c_p$ близок к коэффициенту кинематической вязкости ν . (Например, в воздухе при нормальных условиях $\nu \approx \chi \approx 0,15 \text{ см}^2/\text{с}$.)

Таким образом, вязкостью и теплопроводностью можно пренебречь при $Re \approx \approx Pe \gg 1$. Если рассматривать движение со скоростями, меньшими или сравнимыми со скоростью звука, размеры системы для этого должны быть гораздо больше длины пробега молекул $d/l \gg 1$. Это условие, как мы увидим, не выполняется, в частности, в области фронта ударной волны, толщина которой сравнима с длиной пробега молекул. Поэтому внутри фронта ударной волны диссипативные процессы оказываются существенными. Именно они и приводят к возрастанию энтропии в ударной волне.

§ 21. Замечания о второй вязкости. При написании уравнений газодинамики и использовании термодинамической связи между давлением и другими термодинамическими характеристиками вещества молчаливо предполагалось, что давление p , определяющее силы в движущемся газе, не отличается от статического давления $p_{\text{ст}}$, измеренного в покоящемся газе в тех же условиях (т.е. при таких же составе газа, его плотности, внутренней энергии, температуре). Давление есть величина скалярная, не зависящая от выбора системы координат, от направлений скорости движения и градиента скорости. Требование скалярности давления, инвариантности

его по отношению к преобразованиям координат, допускает предположение более общее, чем предположение о зависимости только от термодинамического состояния вещества. Давление, вообще говоря, может зависеть от скаляра — дивергенции скорости. При небольших градиентах, ограничиваясь первыми членами разложения, как и при выводе вязких сил, можно записать общее выражение

$$p = p_{\text{ст}} - \xi \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.95)$$

где коэффициент ξ характеризует зависимость сил, действующих в веществе, от скаляра $\operatorname{div} \mathbf{u}$. Коэффициент ξ называется второй вязкостью. В отличие от нее, коэффициент η , первая вязкость, характеризует силы, зависящие от направленной скорости и ее градиента. Коэффициент первой вязкости в газе связан с поступательным тепловым движением молекул. Если время установления статического давления порядка времени свободного пробега молекул l/c , то ξ имеет такой же порядок, как и η . В плоском случае оба члена с первой и второй вязкостью при этом объединяются вместе. В некоторых случаях, однако, ξ имеет аномально большое значение. Согласно уравнению непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$, т. е. коэффициент ξ характеризует зависимость давления от скорости изменения плотности.

При наличии внутренних, медленно возбуждающихся степеней свободы в веществе (например, колебаний в молекулах) и быстрых изменений состояния вещества, давление не успевает «следить» за изменением плотности и отличается от термодинамически равновесной величины. Влияние этого эффекта может быть описано с помощью коэффициента второй вязкости (см. [1]), причем чем труднее возбуждаются внутренние степени свободы, тем больше «несогласованность» изменений давления и изменений плотности и внутреннего состояния вещества, тем больше вторая вязкость. В очень быстрых процессах, когда эта «несогласованность» (отклонение от термодинамического равновесия) особенно велика, линейная зависимость (1.95) может оказаться недостаточной и в уравнения газодинамики приходится вводить в явном виде описание релаксационных процессов — кинетики возбуждения внутренних степеней свободы. Мы познакомимся с этим явлением в гл. VI, VII, VIII при рассмотрении релаксационных процессов, их влияния на структуру фронта ударных волн и поглощение ультразвука.

§ 22. Замечания о поглощении звука. В качестве примера влияния вязкости и теплопроводности на гидродинамическое движение рассмотрим процесс распространения звуковых волн с учетом этих явлений.

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн, необратимому превращению ее в тепло, т. е. поглощению звука и уменьшению его интенсивности. Формально коэффициент поглощения звука можно получить, если искать решение одномерных линеаризованных уравнений газодинамики с учетом вязкости и теплопроводности в виде плоской гармонической волны типа $\exp[i(kx - \omega t)]$, где k — волновой вектор. При этом для k получается комплексное значение, действительная часть которого дает длину волны, а мнимая — коэффициент поглощения: $k = k_1 + ik_2$, $\exp[i(kx - \omega t)] = \exp(-k_2 x) \exp[i(k_1 x - \omega t)]$. Коэффициент поглощения можно оценить и из физических соображений. Согласно формуле (1.94), энергия, диссипируемая в 1 см^3 в 1 с , складывается из двух частей, отвечающих вязкости и теплопроводности. В звуковой волне с длиной волны λ эти величины — порядка $\eta u^2/\lambda^2$ и $\kappa \Delta T/\lambda^2$. Здесь u — амплитуда скорости, а ΔT — амплитуда изменения температуры в волне (последняя пропорциональна u). Энергия звука в 1 см^3 есть $\rho_0 u^2$. Доля энергии, которая поглощается в 1 с , состоит из двух слагаемых. Член, связанный с вязкостью, — порядка $(\eta u^2 \lambda^2)/\rho_0 u^2 \sim \eta/\rho_0 \lambda^2 \sim \eta \omega^2/c^2 \rho_0$.

Но за 1 с звук проходит расстояние c , так что коэффициент поглощения на единице длины — порядка $\gamma_1 \sim \eta \omega^2 / c^3 \varrho_0$. Коэффициент поглощения на единице длины, связанный с теплопроводностью, — порядка $\gamma_2 \sim (\kappa / c_p) \times (\omega^2 / c^3 \varrho_0)$ (в случае газов это легко понять, если учесть, что $\kappa / c_p \approx \eta$, в силу приближенного равенства кинематической вязкости $\nu = \eta / \varrho$ и температуропроводности $\chi = \kappa / \varrho c_p$; в газах $\gamma_1 \approx \gamma_2$). Эти выражения справедливы при малом поглощении звука, когда мало убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны, т. е. $\gamma \lambda \ll 1$ ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$). В газах это условие означает, что

$$\gamma \lambda \sim \frac{\eta \omega^2 \lambda}{c^3 \varrho_0} \sim \frac{\nu}{\lambda^2} \frac{\lambda}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \frac{\bar{\nu}}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1,$$

т. е. выражение для коэффициента поглощения справедливо для длин волн, значительно больших пробега молекул, что фактически всегда имеет место.

В веществе с замедленным возбуждением внутренних степеней свободы (при большой второй вязкости) возникают дополнительное, аномально большое поглощение, а также дисперсия звука (зависимость скорости звука от частоты). Этот вопрос будет рассмотрен в гл. VIII.

§ 23. Структура и ширина фронта ударной волны слабой интенсивности.

Рассмотрим, каковы внутренняя структура и толщина того тонкого слоя в ударной волне, в котором происходит переход газа из начального состояния в конечное и который называется фронтом ударной волны. В этом слое происходят резкое сжатие вещества, изменения его давления, скорости и, как показали вычисления, основанные только на применении законов сохранения массы, импульса и энергии, — возрастание энтропии. Последнее свидетельствует о том, что в переходном слое имеет место диссипация механической энергии, необратимое превращение ее в тепло. Поэтому, чтобы понять, как происходит ударное сжатие, необходимо привлечь к рассмотрению диссипативные процессы — вязкость и теплопроводность.

Рассмотрим плоское одномерное течение вязкого и теплопроводного газа в системе координат, в которой фронт ударной волны покоится. Ширина фронта очень мала по сравнению с характерными масштабами длины для всего газодинамического процесса в целом, например, по сравнению с расстоянием от фронта ударной волны до поршня, толкающего газ и создающего волну.

Даже если поршень движется с переменной скоростью и амплитуда ударной волны меняется со временем, за то малое время Δt , в течение которого фронт проходит расстояние порядка своей ширины Δx , амплитуда волны остается практически неизменной. Поэтому на протяжении некоторого времени, малого по сравнению с общим временным масштабом газодинамического процесса, но большого по сравнению с Δt , вся картина распределения газодинамических величин во фронте волны распространяется по газу в «застывшем» виде как целое. Другими словами, в системе координат, в которой фронт покоится, течение газа можно в каждый данный момент считать стационарным.

Запишем уравнения непрерывности, импульса и энтропийное с учетом вязкости и теплопроводности для плоского стационарного случая. Поскольку процесс стационарен, частную производную по времени $\partial / \partial t$ можно опустить, а частную производную по координате $\partial / \partial x$ заменить полной d / dx :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\varrho u) &= 0, & \frac{d}{dx} \left(p + \varrho u^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} \right) &= 0, \\ \varrho u T \frac{dS}{dx} &= \frac{4}{3} \eta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1.96)$$

С помощью второго закона термодинамики $TdS = dw - Vdp$ и уравнений непрерывности и импульса энтропийное уравнение можно записать в форме уравнения энергии:

$$\frac{d}{dx} \left(\varrho u \left(w + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} \right) = 0. \quad (1.97)$$

Подчиним решение этих уравнений граничным условиям, согласно которым градиенты всех величин перед фронтом, при $x = -\infty$, и за фронтом, при $x = +\infty$, исчезают, а сами величины принимают свои начальные и конечные значения, которым мы по-прежнему приписываем индексы «0» и «1» (рис. 1.39).

Первые интегралы системы уравнений массы, импульса и энергии получаются сразу же:

$$\varrho u = \varrho_0 u_0, \quad (1.98)$$

$$p + \varrho u^2 - \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} = p_0 + \varrho_0 u_0^2, \quad (1.99)$$

$$\varrho u \left(w + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \eta u \frac{du}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = \varrho_0 u_0 \left(w_0 + \frac{u_0^2}{2} \right). \quad (1.100)$$

Постоянные интегрирования здесь выражены через начальные значения величин p, ϱ, T, u рассматриваются как функции текущей координаты x ¹⁾.

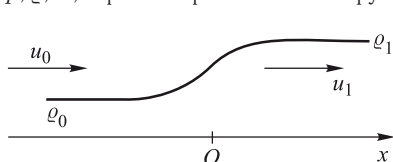


Рис. 1.39. Схема, иллюстрирующая постановку задачи о структуре фронта ударной волны

Из уравнения (1.99) видно, что благодаря наличию вязкости, т.е. члена, содержащего du/dx , распределение величин по x во фронте волны должно быть непрерывным (в противном случае градиент du/dx обращался бы в бесконечность, что несовместимо с конечностью самих величин).

В целях лучшего понимания ролей каждого из процессов, вязкости и теплопроводности, мы рассмотрим прежде два частных случая структуры фронта: 1) когда нет вязкости и существует одна теплопроводность; 2) когда существует одна лишь вязкость, но нет теплопроводности. Мы не будем здесь искать точные решения уравнений (этот вопрос будет рассмотрен в гл. VII, специально посвященной изучению структуры фронта ударных волн). Ограничимся лишь выяснением качественной картины явления и оценками ширины фронта.

1) *Есть теплопроводность, а вязкости нет: $\eta = 0$.*

Этот случай замечателен тем, что уравнение импульса (1.99) приобретает форму

$$p + \varrho u^2 = p_0 + \varrho_0 u_0^2,$$

аналогичную той, которая связывает конечные и начальные значения величин. Однако теперь это уравнение описывает и все промежуточные состояния во фронте волны. С помощью уравнения непрерывности (1.98) получим

$$p = p_0 + \varrho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right). \quad (1.101)$$

¹⁾ При $x = +\infty$, $du/dx = 0$, $dT/dx = 0$, $p = p_1$, $\varrho = \varrho_1$, $u = u_1$ и мы приходим к законам сохранения массы, импульса и энергии на разрыве (1.61), (1.62), (1.64).

Таким образом, точка, описывающая состояние газа внутри фронта ударной волны, пробегает на плоскости p, V из начальной точки A в конечную точку B вдоль прямой AB , о которой уже много говорилось при исследовании ударной адиабаты.

Проведем через точки начального и конечного состояния на плоскости p, V адиабаты Пуассона (рис. 1.40; адиабата Гюгонио на нем не показана). Если нанести на плоскость целый ряд адиабат Пуассона с разными значениями энтропии, то мы увидим, что одна из них коснется прямой AB в некоторой точке M , как показано на рис. 1.40. В этой точке энтропия вдоль прямой AB максимальна ($S_0 < S_1 < S_M$). Из уравнений (1.98) и (1.101) следует, что скорость газа u в точке касания M в точности равна местной скорости звука ($u = c$ в точке M ; напоминаем, что в точке A $u_0 > c_0$, а в точке B $u_1 < c_1$).

Найдем величину максимума энтропии $S_{\max}$ из условия касания адиабаты Пуассона с $S = S_{\max}$ и прямой AB . Как мы сейчас увидим, величина $S_{\max} - S_0$ пропорциональна $(V_1 - V_0)^2$ или $(p_1 - p_0)^2$, поэтому уравнения семейства адиабат $p(V, S)$ и прямой запишем в виде разложения около точки A , опуская члены третьего порядка малости (в таком приближении адиабаты S_0 и S_1 совпадают; см. § 18). Уравнение адиабаты имеет вид

$$p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V - V_0)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{V_A} (S - S_0).$$

Уравнение прямой:

$$p - p_0 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} (V - V_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{S_A} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)(V - V_0).$$

Условие касания выражается равенством $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\text{адиаб}} = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\text{прям}}$, которое дает уравнение для определения объема V_M в точке касания M .

Вычисление показывает, что точка M находится как раз посередине между точками A и B : $V_M - V_0 = \frac{1}{2}(V_1 - V_0)$. Подставляя это выражение в уравнение прямой, найдем давление в точке M , а подставляя затем найденное значение давления p_M и объем V_M в уравнение адиабаты и разрешая его относительно энтропии, получим энтропию в точке M :

$$S_M - S_0 = S_{\max} - S_0 = \frac{1}{8} \frac{(\partial^2 p / \partial V^2)_{S_A}}{(\partial p / \partial S)_{V_A}} (V_1 - V_0)^2.$$

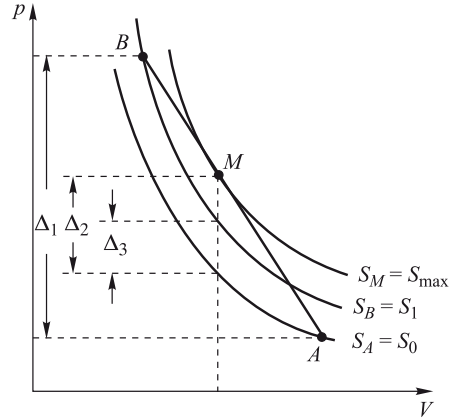


Рис. 1.40. Диаграмма p, V применительно к задаче о структуре фронта ударной волны без учета вязкости. Состояние в волне меняется вдоль прямой AB . Отрезки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — первого, второго и третьего порядков малости относительно амплитуды волны

Таким образом, максимальное изменение энтропии внутри фронта ударной волны при учете одной лишь теплопроводности есть величина второго порядка малости

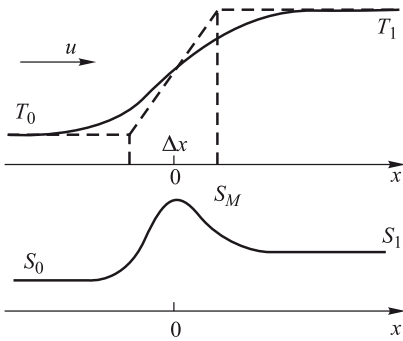


Рис. 1.41. Распределения температуры и энтропии во фронте слабой ударной волны без учета вязкости. Δx — эффективная ширина фронта

относительно амплитуды $V_0 - V_1$ или $p_1 - p_0$, в отличие от полного скачка энтропии $S_1 - S_0$, который третьего порядка малости относительно амплитуды. Это ясно и из геометрических соображений: наибольшее удаление прямой AB от адиабаты Пуассона $S = S_0$ на плоскости p, V пропорционально $(V_1 - V_0)^2$ или $(p_1 - p_0)^2$. Так, разность между давлениями в точке M и на адиабате S_A (или S_B) при том же самом объеме V_M равна

$$\begin{aligned} p_M(V_M) - p_{S_A}(V_M) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_M - V_0)(V_1 - V_M) = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2 \quad (1.102) \end{aligned}$$

(разность давлений между точками на адиабатах S_B и S_A при одинаковом объеме V_M есть величина третьего порядка малости).

Наличие максимума энтропии внутри фронта свидетельствует о том, что профиль температуры $T(x)$ в точке, где энтропия максимальна, имеет перегиб, так что распределения температуры и энтропии в слабой ударной волне с одной лишь теплопроводностью изображаются кривыми, показанными на рис. 1.41. Это следует из энтропийного уравнения (1.97), которое в отсутствие вязкости принимает вид

$$\varrho u T = \frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx} \kappa \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (1.103)$$

(в слабой волне температура меняется мало, так что коэффициент теплопроводности можно считать постоянным). Существование максимума энтропии связано с тем, что теплопроводность перекачивает тепло из области с более высокой температурой в область с более низкой. Поэтому газ, втекающий в волну, сначала нагревается за счет теплопроводности (с возрастанием энтропии), а затем охлаждается (с убыванием энтропии). В конечном счете, по сравнению с начальным значением, энтропия, конечно, возрастает. Это иллюстрируется рис. 1.41: продвижение вдоль оси x со скоростью $u(x)$ соответствует тому, что мы следим за изменением состояния заданной частицы газа во времени.

Оценим теперь ширину фронта волны. Для этого разделим уравнение (1.103) на T и проинтегрируем его по x от начального состояния $A(x = -\infty)$, где $dT/dx = 0$, до какой-либо точки x в волне (при этом воспользуемся тем, что $\varrho u = \varrho_0 u_0 = \text{const}$):

$$\varrho_0 u_0 (S - S_0) = \kappa \int_{-\infty}^x \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} dx = \kappa \left\{ \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \int_{T_0}^T \frac{dT}{dx} \frac{1}{T^2} dT \right\}. \quad (1.104)$$

Применим это уравнение к точке конечного состояния $B(x = +\infty)$, где $dT/dx = 0$. При этом первый член в фигурных скобках исчезает и

$$\varrho_0 u_0 (S_1 - S_0) = \kappa \int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dx} dT.$$

Определим эффективную ширину фронта ударной волны Δx при наличии одной лишь теплопроводности равенством

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = \left| \frac{dT}{dx} \right|_{\max},$$

геометрический смысл которого ясен из рис. 1.41.

Полагая для оценки интеграла $dT/dx \sim (T_1 - T_0)/\Delta x$, найдем

$$\varrho_0 u_0 (S_1 - S_0) \sim \kappa \frac{1}{T_0^2} \frac{(T_1 - T_0)^2}{\Delta x}.$$

Выражая скачок температуры через скачок давления, получим

$$T_1 - T_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S (p_1 - p_0) = \frac{V_0}{c_p} (p_1 - p_0),$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении; воспользовавшись формулой (1.89) для скачка энтропии и имея ввиду приближенные равенства для газов $(\partial^2 V / \partial p^2)_S \sim \sim V_0 / p_0^2$, $\kappa \sim \varrho_0 c_p l c_0$, а также то, что $u_0 \approx c_0$, получим из (1.104) оценку ширины фронта:

$$\Delta x \sim l \frac{p_0}{p_1 - p_0}. \quad (1.105)$$

Ширина фронта обратно пропорциональна амплитуде волны, причем масштабом ее служит длина пробега молекул l .

Из уравнения (1.104) можно оценить и величину максимального приращения энтропии. В точке максимума энтропии $dS/dx = 0$ градиент dT/dx максимален. При этом основную роль в фигурной скобке (1.104) играет первый член, который пропорционален $\Delta T / \Delta x \sim \Delta p / \Delta x \sim (\Delta p)^2$, тогда как второй член пропорционален $(\Delta T)^2 / \Delta x \sim (\Delta p)^3$. Отсюда видно, что $S_{\max} - S_0 \sim (\Delta p)^2$, тогда как $S_1 - S_0 \sim (\Delta p)^3$.

Рассматривая внутреннюю структуру фронта ударной волны с учетом одной лишь теплопроводности, можно утверждать только то, что температура в волне меняется непрерывным образом. Что касается других величин: плотности, скорости, давления, то они, вообще говоря, могут испытывать разрыв. И действительно, рассмотрение структуры ударных волн без учета вязкости показывает, что при достаточно большой амплитуде построить непрерывное распределение для всех величин в волне невозможно. Эта трудность была отмечена еще Рэлеем (подробно об этом см. § 3, гл. VII). Она указывает на принципиальную роль вязкости в осуществлении необратимого ударного сжатия вещества в волне. Рассмотрим теперь второй частный случай.

2) *Есть вязкость, а теплопроводности нет:* $\kappa = 0$.

При этом следует сохранить общее уравнение импульса (1.99). На плоскости p, V точка, описывающая состояние в волне, пробегает путь от точки A до точки B уже не вдоль прямой AB , а вдоль некоторой кривой линии, изображенной на рис. 1.42 пунктиром.

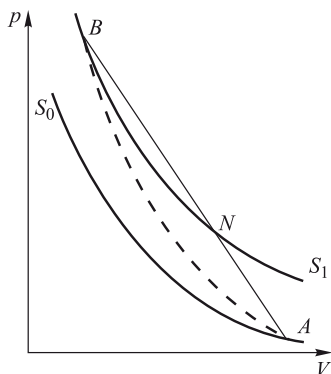


Рис. 1.42. Диаграмма p, V применительно к задаче о структуре фронта ударной волны без учета теплопроводности. Состояние в волне меняется вдоль пунктирной кривой AB

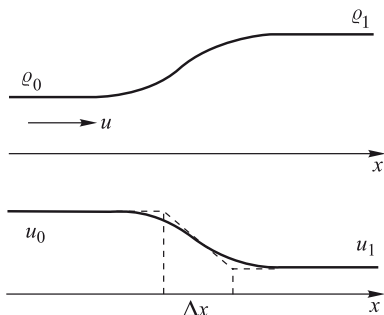


Рис. 1.43. Профили плотности и скорости во фронте ударной волны; Δx — эффективная ширина волны

Из энтальпийного уравнения без члена теплопроводности,

$$\rho u T \frac{dS}{dx} = \eta \left(\frac{du}{dx} \right)^2, \quad (1.106)$$

следует, что энтропия в волне монотонно возрастает от начального значения $S_0 = S_A$ до конечного $S_1 = S_B$, так что пунктирная линия целиком заключена между адиабатами Пуассона S_0 и S_1 (см. рис. 1.42).

Поскольку адиабаты обращены выпуклостью вниз ($(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$), пунктирная линия лежит целиком ниже прямой AB ¹⁾.

Уравнение кривой, вдоль которой происходит переход от точки A в точку B , есть

$$p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) + \frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx}. \quad (1.107)$$

Поскольку кривая целиком лежит ниже прямой, во всех точках внутри волны $du/dx < 0$. Если ось x направлена в сторону движения газа, то $u > 0$, т.е. газ в волне только тормозится, а следовательно, монотонно сжимается. Таким образом, и рассмотрение структуры фронта ударной волны с учетом вязкости приводит к тому, что при $(\partial^2 p / \partial V^2)_S > 0$ возможно только сжатие газа в ударной волне. Профили скорости и плотности в волне имеют вид, изображенный на рис. 1.43.

Определим эффективную ширину фронта Δx ²⁾ равенством

$$\frac{u_0 - u_1}{\Delta x} = \left| \frac{du}{dx} \right|_{\max}, \quad (1.108)$$

аналогично предыдущему. Геометрический смысл его ясен.

¹⁾ В самом деле, вертикальное расстояние между адиабатами S_1 и S_0 пропорционально $S_1 - S_0 \sim (p_1 - p_0)^3$, тогда как вертикальное расстояние между точками A и B есть $p_1 - p_0$. Поэтому участок прямой AN , на котором пунктирная линия в принципе могла бы пройти выше прямой, есть величина малая по сравнению с основной частью прямой NA .

²⁾ Δx называют иногда шириной фронта по Прандтлю.

Максимальная абсолютная величина градиента $|du/dx|_{\max}$ определяется согласно (1.107) максимальным вертикальным отклонением прямой AB от пунктирной линии, т. е. от адиабат Пуассона S_0 или S_1 . Это отклонение, как мы уже знаем, соответствует середине отрезка AB и дается формулой (1.102). Таким образом,

$$\frac{4}{3}\eta \left| \frac{du}{dx} \right|_{\max} = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{S_A} (V_1 - V_0)^2.$$

Подставляя это выражение для $|du/dx|_{\max}$ в (1.108), замечая, что $\eta = \varrho_0 \nu \sim \varrho_0 l \bar{v} \sim \varrho_0 l c_0$ (ν — кинематическая вязкость), а также, что

$$u_0 - u_1 = \sqrt{(p_1 - p_0)(V_0 - V_1)} \sim \sqrt{(p_1 - p_0)^2 \left| \frac{\partial V}{\partial p} \right|} \sim \frac{p_1 - p_0}{p_0} c_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_S \sim \frac{p_0}{V_0^2},$$

придем к формуле (1.105) для ширины фронта:

$$\Delta x \sim l \frac{V_0}{V_0 - V_1} \approx l \frac{p_0}{p_1 - p_0}.$$

Ширину фронта можно оценить и с помощью энтропийного уравнения (1.106) аналогично тому, как это было сделано в первом случае:

$$\varrho_0 u_0 T_0 \frac{S_1 - S_0}{\Delta x} \sim \eta \frac{(u_0 - u_1)^2}{\Delta x^2}.$$

Подставляя сюда выражение (1.89) для скачка энтропии и проделывая простые преобразования, придем к прежней формуле для Δx . При построении непрерывного решения с одной только вязкостью никаких трудностей, подобных тем, которые появляются при учете одной лишь теплопроводности, не возникает. Это обстоятельство, как уже отмечалось, имеет глубокое физическое основание и свидетельствует о принципиальной роли вязкости в осуществлении ударного сжатия. Именно вязкость является тем механизмом, благодаря которому происходит необратимое превращение в тепло части кинетической энергии набегающего на разрыв потока, т. е. трансформация энергии направленного движения молекул газа в энергию хаотического движения за счет рассеяния их импульса. Теплопроводность в этом отношении играет косвенную роль, так как она приводит лишь к переносу энергии хаотического движения молекул из одного места, в другое, но не влияет непосредственно на направленное движение.

Если рассматривать ударные волны не слишком большой амплитуды в обычном газе, в котором транспортные коэффициенты — кинематическая вязкость ν и температуропроводность χ — примерно одинаковы и определяются одной и той же длиной пробега молекул l ($\nu \approx \chi \sim lc$), то мы по-прежнему получим формулу (1.105) для ширины фронта. В этом легко убедиться, рассматривая общее энтропийное уравнение (1.98) с учетом как вязкости, так и теплопроводности.

Формула (1.105) показывает, что, при скачке давления в волне порядка величины самого давления перед фронтом, ширина фронта порядка длины пробега молекул. При дальнейшем увеличении амплитуды волны, если пользоваться той же формулой, ширина становится меньше пробега. Этот результат, конечно, не имеет физического смысла. Если газодинамические величины сильно меняются на расстояниях порядка пробега молекул, то теряет силу гидродинамическое рассмотрение вязкости и теплопроводности, в основе которого лежит предположение о малости градиентов.

Ширина сколь угодно сильной ударной волны, конечно, не может стать меньше пробега молекул, о чем свидетельствует рассмотрение, основанное на использовании кинетического уравнения для газа (см. гл. VII).

В некоторых условиях возможно значительное уширение фронта сильных ударных волн до расстояний, измеряемых многими пробегами, и разделение его на области плавного и резкого изменения величин. В частности, это происходит в газе с замедленным возбуждением некоторых степеней свободы молекул или при протекании обратимой химической реакции в волне. Эти вопросы, так же как и целый ряд других, возникающих при более детальном изучении внутреннего строения фронта ударных волн, будут рассмотрены подробно в гл. VII.

4. Некоторые задачи

§ 24. Распространение произвольного разрыва. Газодинамические величины по обе стороны фронта ударной волны не независимы. Они связаны определенными соотношениями, выражающими законы сохранения массы, импульса и энергии. При этом разрыв, ударная волна сжатия в веществах с нормальными термодинамическими свойствами, распространяется по веществу как некое устойчивое образование, не расплываясь.

Между тем возможна такая постановка задачи, когда в начальный момент в газе имеется поверхность разрыва, по обе стороны которой газодинамические величины никак не связаны между собою, совершенно произвольны. Такие разрывы называют произвольными. Приведем несколько практических примеров, показывающих, как возникают произвольные разрывы.

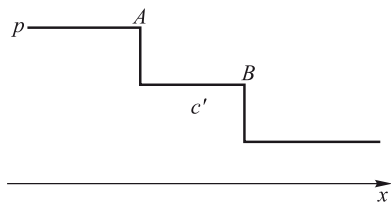
Представим себе трубу, разделенную тонкой перегородкой (заслонкой). Труба наполнена газом, причем плотность и давление, а вообще говоря, и сорт газа по правую сторону заслонки, — одни, а по левую — другие. Пусть в некоторый момент заслонка быстро удаляется. В этот момент в месте, где была заслонка, соприкасаются две области, два покоящихся газа с совершенно произвольно задаваемыми плотностями и давлениями. Если давления в обоих газах различны, то после удаления заслонки газы под действием перепада давления придут в движение.

Второй пример. Предположим, что до трубы, наполненной газом, с обоих концов запущены ударные волны с произвольно задаваемыми амплитудами. В момент столкновения обеих волн где-то посередине трубы возникает поверхность, разделяющая газы с произвольными давлениями, скоростями и температурами (возможные различия в плотностях в этом примере несколько ограничены; скажем, если обе волны очень сильные, то плотности в них одинаковы и равны предельным). После столкновения волн движение газа как-то изменится.

Третий пример. К теории ударных волн мы подошли, рассматривая движение газа под действием поршня, начавшего вдвигаться в газ с постоянной скоростью. В этом случае ударная волна образуется непосредственно у поршня, в начальный момент, и распространяется по газу с постоянной скоростью. В действительности, конечно, поршень, обладая конечной массой, не может мгновенно приобрести конечную скорость и набирает ее, постепенно ускоряясь под действием приложенной к нему силы. При этом ударная волна образуется не сразу и вдаль от поршня.

Можно заменить плавный закон изменения скорости поршня со временем $U(f)$ некой ступенчатой кривой, разбивая время на мельчайшие промежутки и полагая, что в каждом таком промежутке времени скорость поршня постоянна, а по истечении его меняется скачком на небольшую величину. При этом линия движения поршня на плоскости x, t изобразится ломаной кривой, состоящей из маленьких прямолинейных отрезков. В течение каждого небольшого отрезка времени, на протяжении которого

Рис. 1.44. Профиль давления в системе следующих друг за другом двух небольших скачков сжатия. Волна A бежит по газу, находящемуся перед ней, со скоростью, большей скорости звука c' в этом газе. Волна B бежит по газу, находящемуся за нею, с дозвуковой скоростью, меньшей c' . Поэтому скачок A в конце концов догоняет скачок B



скорость поршня постоянна, поршень посылает вперед возмущение — волну сжатия, т. е. слабую ударную волну. Эта волна бежит по газу со скоростью, чуть превышающей скорость звука, тогда как предыдущая слабая ударная волна, возникшая от предыдущего скачка скорости поршня, распространяется относительно движущегося за нею газа со скоростью чуть меньше звуковой, как показано на рис. 1.44. Поэтому каждая последующая ударная волна нагоняет предыдущую и несомые ими сжатия накапливаются. Если провести на плоскости x, t характеристики, выходящие с линии движения поршня, то они будут пересекаться (рис. 1.45). Можно задать такой закон ускорения поршня, чтобы все эти слабые ударные волны нагоняли друг друга в один момент и в одной точке. При этом все многочисленные маленькие импульсы сжатия кумулируются в один большой скачок. (Все характеристики пересекаются в одной точке.)

Состояние газа в этом скачке-разрыве меняется от невозмущенного до конечного почти адиабатически. В самом деле, если все сжатие исходного газа до давления p мы разбили на n этапов — n слабых ударных волн со скачком давления $\Delta p = (p - p_0)/n$, то в каждом из них прирост энтропии ΔS пропорционален $(\Delta p)^3 \sim 1/n^3$ и полное приращение энтропии при кумуляции n волн пропорционально $n\Delta S \sim 1/n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, состояния газа по обе стороны возникшего в результате кумуляции разрыва связаны адиабатой Пуассона. Между тем в ударной волне состояния по обе стороны разрыва связаны между собою не адиабатой Пуассона, а адиабатой Гюгонио. Следовательно, величины по обе стороны разрыва не удовлетворяют законам сохранения и разрыв является произвольным.

Обобщая случаи, представленные приведенными примерами, поставим идеализированную задачу об отыскании движения газа, в котором возник произвольный разрыв. Пусть в начальный момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ терпят разрыв все величины: давление, плотность, скорость, температура. По обе стороны разрыва все эти величины постоянны. Сорта газов по обе стороны также могут различаться. Чем больше то расстояние от поверхности разрыва, на котором параметры газа можно еще считать постоянными, тем дольше в времени будет справедливо решение, к которому мы придем (эта задача была впервые решена Н. Е. Кочиным [3]).

Поскольку в условиях задачи не содержится характерных длин и времен, следует искать движение, зависящее только от отношения x/t . В § 11 было показано, что автомодельное плоское течение газа может описываться решениями только двух типов: возможны центрированные простые волны разрежения и движения, в которых

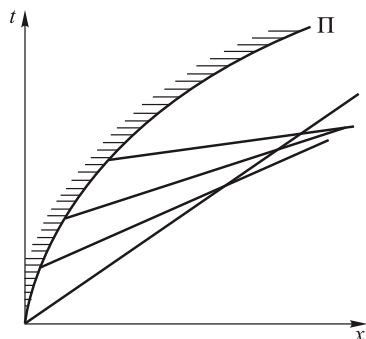


Рис. 1.45. Пересечение характеристик при сжатии газа ускоряющимся поршнем. П — линия поршня

все газодинамические величины постоянны. Кроме того, могут возникать разрывы — ударные волны.

Таким образом, искомое движение следует конструировать из трех элементов: волн разрежения, областей постоянного течения и ударных разрывов. Совокупность возможных движений ограничивается тем, что в одну сторону не может двигаться более одной волны (все равно какой — разрежения или ударной).

В самом деле, ударная волна распространяется по невозмущенному газу со сверхзвуковой скоростью, а по сжатому в ней — с дозвуковой. Волна разрежения бежит по газу со скоростью звука. Если, например, по газу вправо идет ударная волна, то следующая за нею в том же направлении волна разрежения, а тем более ударная волна, непременно догонит ее через некоторое время. Но в силу автомодельности обе волны выходят из одной точки $x = 0$ в один и тот же момент $t = 0$. Поэтому одна волна как бы уже догнала другую в самый начальный момент и обе они распространяются в виде одной. Точно так же невозможно следование второй волны за волной разрежения. Ударная волна догнала бы волну разрежения, а вторая волна разрежения двигалась бы за первой на фиксированном расстоянии, которое в силу автомодельности равно нулю, так что различие между обеими волнами исчезает.

Итак, искомое решение может быть построено только в виде какой-либо комбинации из двух волн, ударных и разрежения, распространяющихся в противоположные стороны от начального разрыва и разделенных областями постоянного течения. Этих областей, вообще говоря, две. Они разграничены плоскостью, разделяющей те газы, которые в начальный момент располагались по обе стороны произвольного разрыва. Поскольку в гидродинамике идеальной жидкости диффузия молекул не принимается во внимание, взаимного проникновения газов друг в друга нет, и граница между ними будет сохраняться, как-то передвигаясь в пространстве вместе с газами. Случай, когда газы одного сорта, очевидно, не представляет принципиального отличия (представим себе мысленно, что молекулы газа по одну сторону начального разрыва «окрашены»). Эта плоская граница между двумя газами, которая может быть названа контактной границей или контактным разрывом, обладает особыми свойствами. Очевидно, давления и скорости газов по обе стороны контактного разрыва совпадают друг с другом. В противном случае около него возникло бы движение и области газа по обе стороны перестали бы быть областями постоянного течения. Плотности же, температуры и энтропии газов по обе стороны контактного разрыва могут оставаться произвольными в соответствии с произволом в начальных значениях. Различие этих величин при равенстве давлений и скоростей никак не может привести газы в относительное движение (разумеется, в предположении об отсутствии диффузии и теплопроводности, к влиянию которых мы вернемся несколько ниже).

Контактный разрыв покоится относительно газов и не посылает возмущений, которые могли бы повлиять на бегущие в обе стороны от него волны (ударные и разрежения).

Перечислим возможные движения газа после возникновения произвольного разрыва, как говорят, случаи распада разрыва, составляя различные комбинации из волн разрежения и ударных. Именно, может представиться три типичных случая: 1) в обе стороны от разрыва распространяются ударные волны, 2) в одну сторону бежит ударная волна, а в другую — волна разрежения, и 3) в обе стороны бегут волны разрежения.

Разберем эти случаи более подробно. Для этого удобно воспользоваться диаграммой p, V (рис. 1.46). Прежде всего зафиксируем на диаграмме начальные состояния газов. Точка A представляет газ слева от разрыва, точка B — справа. Пусть для определенности давление в точке $A(p_a)$ меньше, чем p_b . Проведем из этих точек

вверх адиабаты Гюгоннио, описывающие сжатие газов в ударных волнах, а вниз — адиабаты Пуассона, вдоль которых происходит расширение газов в волнах разрежения. После распада разрыва давления в обоих газах в областях, подвергшихся воздействию волн, выравниваются.

1. Пусть это новое давление p_0 больше начальных p_a и p_b .

В этом (первом) случае и вправо и влево от произвольного разрыва (или от контактной поверхности) идут ударные волны сжатия (рис. 1.47, а). Газы за ними находятся в состояниях a_0 и b_0 с одинаковыми давлениями p_0 и скоростями. Газ в состоянии a_0 движется относительно исходного газа в состоянии A влево, а газ b_0 относительно газа B — вправо. Поскольку газы a_0 и b_0 движутся с одинаковой скоростью, необходимо, чтобы газы A и B в начальный момент двигались навстречу друг другу. Две ударные волны образуются при столкновении двух газов, движущихся навстречу друг другу с большой скоростью (вспомним второй пример). Чем меньше скорость столкновения, тем ниже получается давление p_0 в ударных волнах.

2. При некоторой малой скорости столкновения возникает новый режим, в котором давление p_1 еще больше давления p_a , но меньше, чем p_b . В этом (втором) случае по газу A после распада разрыва распространяется ударная волна, а по газу B — волна разрежения (рис. 1.47, б). В частности, такой режим осуществляется, когда начальные скорости обоих газов, A и B , одинаковы и равны нулю, т. е. когда в начальный момент в покоящихся газах имеется разрыв давления, как в примере с заслонкой. Вещество начинает двигаться в сторону падения давления. Этот случай имеет важные практические применения. На этом принципе основано устройство ударной трубы, в которой получают в лаборатории сильные ударные волны, нагревающие исследуемый газ A до высокой температуры. Ударная труба разделена тонкой перегородкой (диафрагмой). По одну сторону диафрагмы в трубе содержится исследуемый газ A при низком давлении, по другую — в так называемую камеру высокого давления нагнетается рабочий газ B . После разрыва диафрагмы газ B расширяется в сторону камеры низкого давления, посылая в газ A сильную ударную волну. Возникающий режим, изображенный на рис. 1.47, б, будет более подробно рассмотрен в гл. IV при изучении работы ударной трубы.

Соответствующим выбором газов A и B и перепада давлений добиваются получения возможно более сильной ударной волны и нагревания исследуемого газа до весьма высоких температур. Одним из способов получения еще более высоких температур служит осуществление первого режима — столкновения двух ударных волн. Частным случаем первого режима является отражение ударной волны от торца ударной трубы, которое также используется для достижения в лаборатории высоких температур. Отражение ударной волны от твердой стенки действительно представляет собой частный случай столкновения двух газовых потоков. Если друг на друга налетают два совершенно одинаковых потока, то после столкновения контактный разрыв покоится, т. е. положение такое же, как будто вместо контактного разрыва имеется неподвижная твердая стенка. Вопросы столкновения ударных волн и отражения их от стенки также будут рассмотрены в гл. IV.

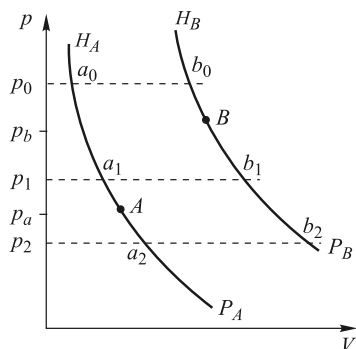


Рис. 1.46. p, V -диаграмма, иллюстрирующая различные случаи распада произвольного разрыва. Точки A и B описывают начальные состояния газов A и B ; $H_A A$ и $H_B B$ — ударные адиабаты; $A P_A$, $B P_B$ — адиабаты Пуассона газов A и B

3. Если после распада давление p_2 меньше p_a и p_b , то получим две волны разрежения, разбегающиеся вправо и влево по обоим газам. Этот режим, изображенный на рис. 1.47, в, осуществляется, если в начальный момент газы A и B двигались в противоположные стороны от разрыва с достаточно большой скоростью.

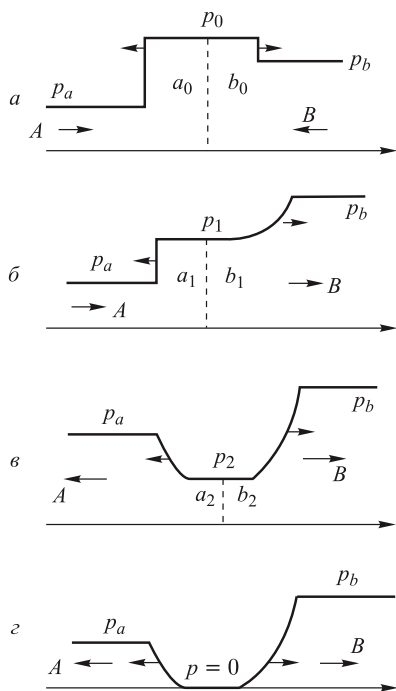


Рис. 1.47. Профили давления в различных случаях распада разрыва. Большие стрелками с буквами A и B указаны начальные скорости газов A и B до распада разрыва. Маленькие стрелки показывают направления распространения волн по массе газа (направление распространения в пространстве может быть в некоторых случаях и иным)

Если относительная скорость, с которой в начальный момент двигались друг от друга газы A и B , очень велика, а именно, больше суммы максимальных скоростей истечения газов A и B в вакуум, $\frac{2c_a}{(\gamma_a - 1)} + \frac{2c_b}{(\gamma_b - 1)}$, где c_a и c_b — начальные скорости звука, а γ_a и γ_b — показатели адиабаты газов A и B (см. § 11, формулу (1.60)), то между газами образуется пустота, $p = 0$. Этот режим, который можно рассматривать как предел третьего случая, изображен на рис. 1.47, г.

При конкретных расчетах, связанных с распадами произвольных разрывов, наряду с p, V -диаграммами очень удобны так называемые p, u -диаграммы, на которых по осям отложены давления p и скорости газов u в лабораторной системе координат. Ударную адиабату газа $p_H(V)$ можно представить в виде зависимости давления за фронтом волны от скачка скорости газа, т. е. от скорости движения сжатого газа относительно невозмущенного. Аналогичным образом, в волне разрежения давление однозначно связано со скоростью условием постоянства инварианта Римана (см. § 10, 11). Удобство p, u -диаграмм в задаче о распаде разрыва связано с тем, что в конечном состоянии давление и скорость обоих газов одинаковы, т. е. конечные состояния изображаются одной и той же точкой на p, u -диаграммах.

p, u -диаграммы для случаев распада, изображенных на рис. 1.47, а–г, показаны на рис. 1.48, а–г, соответственно.

Выяснив характер движений, возникающих при распаде произвольного разрыва, можно проверить исходное допущение о том, что движение зависит только от комбинации x/t . При рассмотрении волны разрежения в § 11 это допущение обосновывалось тем, что с течением времени ширина волны разрежения, которая является масштабом длины в задаче без учета диссипативных процессов, растет как $x \sim ct$. Роль вязкости и теплопроводности, пропорциональная l/x , с течением времени уменьшается и в макроскопических течениях, когда $x \gg l$, ничтожно мала. Следовательно, исчезает и единственный постоянный масштаб размерности длины в газе — длина пробега молекул.

При течениях с ударными волнами вязкость и теплопроводность, вносящие в уравнение масштаб длины l , действуют фактически только в тонком слое фронта волны, ширина которого порядка l . Мала также и ширина контактного разрыва.

Размытие его происходит вследствие процессов диффузии молекул и теплопроводности. Оба процесса приводят к ширине разрыва порядка $\Delta x \sim \sqrt{\chi t} \sim \sqrt{Dt}$, где D — коэффициент диффузии, который близок к коэффициенту температуропроводности $D \sim \chi \sim lc$.

Расстояние, пробегаемое ударными волнами и волнами разрежения за время t , — порядка $x \sim ct$, так что $\Delta x \sim \sqrt{lx}$. Таким образом, отношение размеров области, в которой действуют диссипативные силы, к размерам всей области, охваченной движением для ударной волны, — порядка l/x , а для контактного разрыва — порядка $\sqrt{l/x}$. Обе величины малы в макроскопическом течении с $x \gg 1$. Вернемся к третьему примеру, приведенному в начале этого параграфа, и посмотрим, какой режим возникает при распаде разрыва, который образуется в результате кумуляции волн сжатия, посылаемых ускоряющимся поршнем. В момент соединения отдельных волн с одной стороны разрыва будем иметь невозмущенный газ A , с другой — газ в состоянии B , подвергшийся практически адиабатическому сжатию.

Можно показать, что скорость движения, которую приобретает газ при последовательном сжатии большим числом ударных волн, меньше скорости, приобретаемой при однократном ударном сжатии до того же давления. Отсюда следует, что разрыв распадается как в случае 2. По сжатому газу к поршню пойдет волна разрежения, а по невозмущенному — ударная волна. Давление p окажется ниже, чем созданное на поршне давление p_b . Однако вследствие роста энтропии в ударной волне это более низкое давление отвечает более высокой температуре, так что газ в ударной волне нагреется по сравнению с почти адиабатическим нагреванием от кумуляции слабых волн.

На рис. 1.49 представлены распределения p и T после распада разрыва, образовавшегося в результате кумуляции волн при сжатии воздуха поршнем, скорость которого постепенно достигла $4,44c_0 = 1500$ м/с, так что давление на поршне достигло $p_b = 50$, $p_a = 50$ атм. Координата и время на рисунке отсчитываются от точки и момента кумуляции.

Рассмотренный случай представляет значительный интерес для теории возникновения детонации, ибо полученный результат объясняет, каким образом пламя, действуя на газ подобно поршню, может постепенным сжатием вызвать появление ударной волны на большом расстоянии от пламени (поршня). Постепенно сжимая газ до невысокой температуры (630°C на рисунке), можно осуществить

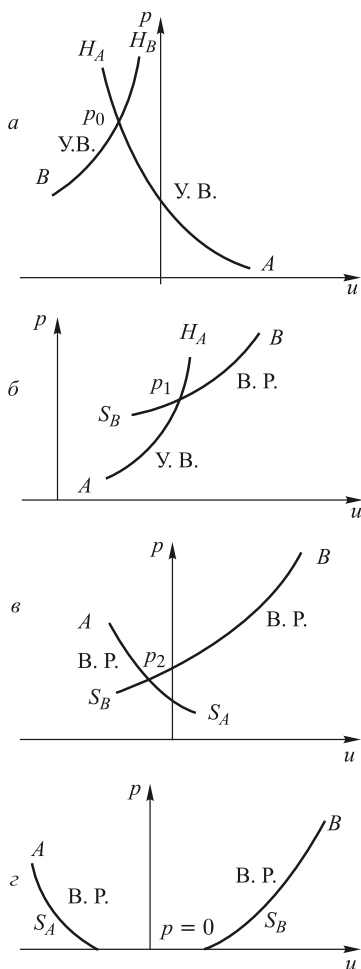


Рис. 1.48. p, u -диаграммы для различных случаев распада разрыва, изображенных на рис. 1.47. Кривые H — ударные адиабаты в переменных p, u ; кривые S — адиабаты Пуассона в переменных p, u . У.В. означает ударную волну; В.П. — волну разрежения

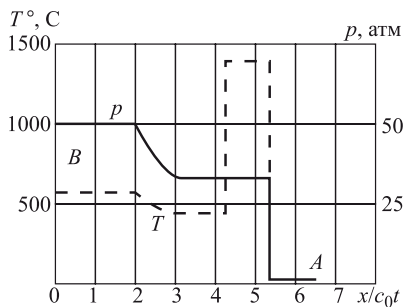


Рис. 1.49. Распространение разрыва, возникшего после столкновения совокупности последовательных волн сжатия. Температура в возникающей ударной волне значительно выше максимальной температуры, достигнутой при наложении мелких волн сжатия, а давления ниже, так как навстречу волнам сжатия идет волна разрежения. Профиль давления показан сплошной линией, профиль температуры — пунктиром

резкое нагревание до 1450°C на значительном расстоянии в момент кумуляции, т. е. осуществить «дистанционное зажигание».

По-видимому, таков механизм возникновения детонации в газах в ряде случаев.

§ 25. Сильный взрыв в однородной атмосфере. Идеализированная задача о сильном взрыве в однородной атмосфере представляет собой типичный пример класса движений газа, называемых автомодельными, когда газодинамические величины меняются с течением времени таким образом, что распределения их по координате остаются всегда подобными самим себе.

Автомодельная задача о сильном взрыве была сформулирована и решена Л. И. Седовым. Остроумным способом, путем использования интеграла энергии, Л. И. Седову удалось найти точное аналитическое решение уравнений автомодельного движения [4, 5]. Задачу рассматривали также К. П. Станюкович (в диссертации; см. [151] и Тэйлор [6]), которые сформулировали и исследовали уравнения, но не получили их аналитического решения.

Мы остановимся на постановке и результатах решения этой задачи, так как они понадобятся нам в дальнейшем, в гл. VIII и IX, при изучении некоторых физико-химических и оптических явлений, сопровождающих сильный взрыв в воздухе.

Пусть в газе плотности ϱ_0 который будем считать идеальным, с постоянной теплоемкостью, в небольшом объеме в течение короткого промежутка времени выделяется большая энергия E . От места энерговыделения по газу распространяется ударная волна. Будем рассматривать ту стадию процесса, когда ударная волна уходит на расстояния, очень большие по сравнению с размерами области, где произошло энерговыделение, и движение охватывает массу газа, большую по сравнению с массой продуктов взрыва. При этом энерговыделение с большой точностью можно считать точечным и мгновенным.

В то же время будем считать, что стадия процесса и не слишком поздняя, так что ударная волна уходит от источника не слишком далеко и ее амплитуда еще столь высока, что можно пренебречь начальным давлением газа p_0 по сравнению с давлением в ударной волне. Это эквивалентно тому, что можно пренебречь начальной внутренней энергией газа, охваченного движением, по сравнению с энергией взрыва E , и пренебречь начальной скоростью звука c_0 по сравнению со скоростями газа и фронта волны.

Движение газа определяется двумя размерными параметрами: энергией взрыва E и начальной плотностью ϱ_0 . Из этих параметров нельзя составить масштабов с размерностями длины или времени. Следовательно, движение будет автомодельным, т. е. будет зависеть только от определенной комбинации координаты r (расстояния от центра взрыва) и времени t . В отличие от автомодельного движения, рассмотренного в § 11, в задаче нет характерной скорости. Начальная скорость звука c_0 не может

характеризовать процесс: в том же приближении, в котором начальное давление p_0 полагается равным нулю, равна нулю и скорость звука c_0 ¹⁾. Поэтому автомодельная переменная не есть величина r/t , как в автомодельной волне разрежения (см. § 11).

Единственная размерная комбинация, содержащая длину и время, в данном случае есть E/ϱ_0 : $[E/\varrho_0] = \text{см}^5 \cdot \text{с}^{-2}$. Поэтому автомодельной переменной служит безразмерная величина

$$\xi = r \left(\frac{\varrho_0}{Et^2} \right)^{1/5}. \quad (1.109)$$

Фронту ударной волны соответствует определенное значение независимой переменной ξ_0 ; закон движения фронта волны $R(t)$ описывается формулой

$$R = \xi_0 \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (1.110)$$

Скорость распространения ударной волны равна:

$$D = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R}{t} = \xi_0 \frac{2}{5} \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} \xi_0^{5/2} \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/2} R^{-3/2}.$$

Параметры фронта выражаются через скорость фронта с помощью предельных формул для сильной ударной волны:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \varrho_0 D^2, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D. \quad (1.111)$$

Плотность на фронте остается неизменной и равной своему предельному значению. Давление уменьшается с течением времени по закону

$$p_1 \sim \varrho_0 D^2 \sim \varrho_0 \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{2/5} t^{-6/5} \sim \frac{E}{R^3}. \quad (1.112)$$

Легко понять физический смысл закономерностей распространения сильной взрывной волны. К моменту t волна достигает радиуса R , охватывает объем газа $4\pi R^2/3$ и массу $M = \varrho_0 4\pi R^3/3$. Давление пропорционально средней энергии единицы объема, т.е. $p \sim E/R^3$. Скорости фронта и газа пропорциональны $D \sim u \sim \sqrt{p/\varrho} \sim \sqrt{E/\varrho_0 R^3}$. Интегрируя уравнение $dR/dt = D$, найдем зависимость радиуса фронта от времени, $R \sim (E/\varrho_0)^{1/5} t^{2/5}$ (с точностью до численного коэффициента ξ_0).

Формула (1.112) демонстрирует закон подобия для перехода от одних энергий взрыва к другим. Давление на фронте имеет заданную величину на расстояниях, пропорциональных $E^{1/3}$, или же в моменты времени, пропорциональные $E^{1/3}$.

Распределения давления, плотности и скорости газа по радиусу определяются зависимостью от одной безразмерной переменной ξ , которую можно представить в виде $\xi = \xi_0 r/R$. Форма распределений в силу автомодельности не меняется с течением времени, масштабы же величин p, ϱ, u зависят от времени точно так же, как и

¹⁾ Это условие фактически определяет границы применимости решения задачи. Предъявляя определенные требования к точности решения, мы сравниваем полученные давления во фронте волны p_1 и скорость распространения волны D с реальными значениями p_0, c_0 и находим момент, когда приближение $p_1 \gg p_0$ становится слишком грубым. Следует отметить, что на самом деле условие справедливости пренебрежения начальным давлением несколько более жесткое, а именно: $p_1 \gg [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)]p_0$. Это видно из формулы (1.76): при этом условии сжатие в ударной волне равно предельной величине $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$.

значения этих величин на фронте ударной волны. Другими словами, решение можно представить в форме

$$p = p_1(t)\tilde{p}(\xi), \quad u = u_1(t)\tilde{u}(\xi), \quad \varrho = \varrho_1\tilde{\varrho}(\xi),$$

где $p_1(t), u_1(t), \varrho_1$ — давление, скорость и плотность на фронте ударной волны, которые зависят от времени по законам, описываемым формулами (1.111) и (1.112), а $\tilde{p}(\xi), \tilde{u}(\xi), \tilde{\varrho}(\xi)$ — новые, безразмерные функции.

Подставляя эти выражения в уравнения газодинамики, записанные для сферически-симметричного случая, и переходя от дифференцирования по r и t к дифференцированию по ξ с помощью соотношения (1.109), подобно тому как это было сделано в § 11, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций $\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{\varrho}$. Решение этой системы должно удовлетворять условиям на фронте волны: при $\xi = \xi_0$, $\tilde{p} = \tilde{u} = \tilde{\varrho} = 1$.

Мы не будем здесь излагать ход решения и выписывать окончательные формулы, это можно найти в книгах Л. И. Седова [5] и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1].

Отметим только, что единственный безразмерный параметр ξ_0 , вошедший в решение, определяется из условия сохранения энергии,

$$E = \int_0^R 4\pi r^2 \varrho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right), \quad (1.113)$$

если в него подставить найденное решение. Он зависит, так же, как и все решение, от показателя адиабаты γ .

В реальном воздухе показатель адиабаты не является постоянной величиной, он зависит от температуры и плотности вследствие протекающих при высокой температуре процессов диссоциации и ионизации (см. об этом гл. III). Однако приближенно всегда можно выбрать некоторое эффективное значение показателя, считая его постоянным, с тем, чтобы описать решением идеализированной задачи о сильном взрыве реальный процесс. Для воздуха можно принять значения γ равными примерно 1,2–1,3. На рис. 1.50 изображены распределения относительных величин p/p_1 , ϱ/ϱ_1 , u/u_1 , T/T_1 по относительной координате r/R для $\gamma = 1,23$; (фактически на графике отложено не T/T_1 , а $0,1 T/T_1$); параметр ξ_0 при этом равен $\xi_0 = 0,930$.

Характерно, что при сильном взрыве плотность газа чрезвычайно резко падает от фронта ударной волны к центру. Практически вся масса газа, ранее равномерно заполнявшая сферу радиуса R , теперь собрана

в тонкий слой около поверхности фронта. Давление вблизи фронта уменьшается при удалении от фронта к центру в два-три раза, а затем почти во всей сфере остается постоянным. Температура возрастает от фронта к центру, сначала менее резко, пока давление уменьшается, а затем в области постоянного давления — очень быстро. Возрастание температуры к центру связано с тем, что вблизи центра находятся частицы, которые были нагреты очень сильной ударной волной и обладают большой энтропией. При адиабатическом расширении до одинакового давления температура тем выше, чем больше энтропия частиц, т. е. чем ближе к центру они находятся.

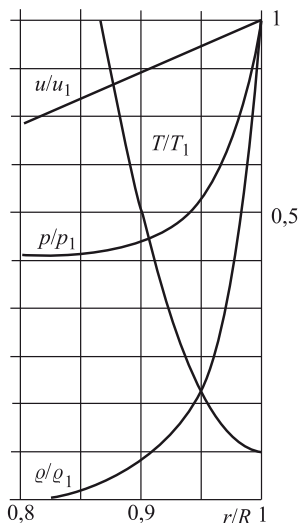


Рис. 1.50. Профили давления, плотности, скорости и температуры для сильного точечного взрыва в газе с $\gamma = 1,23$

Резкое уменьшение плотности при приближении к центру связано с возрастанием температуры (давление постоянно).

Воспользовавшись условием постоянства давления по радиусу в области, не слишком близкой к фронту, можно найти асимптотическое распределение газодинамических величин при $r \rightarrow 0$. Из уравнения движения с $p(r) = \text{const}$, $\partial p / \partial r = 0$, следует, что $du/dt + u(\partial u / \partial r) = 0$, т. е. $u = r/t$.

Чтобы найти асимптотический закон для плотности, перейдем к лагранжевой координате (см. § 2). Будем характеризовать данную частицу газа ее начальным радиусом r_0 (под «частицей» подразумеваем элементарный сферический слой объемом $4\pi r_0^2 dr_0$). В момент прохождения фронта ударной волны давление в ней пропорционально $p_1 \sim R^{-3} = r_0^{-3}$. Начиная с этого момента, частица r_0 расширяется адиабатически, так что в момент t ее плотность равна

$$\varrho(r_0, t) = \varrho_1 \left[\frac{p(r_0, t)}{p_1(r_0)} \right]^{1/\gamma}.$$

Но в данный момент t давления во всех частицах, находящихся в «полости» вблизи центра, одинаковы и пропорциональны $p_c(t) \sim t^{-6/5}$. Поэтому асимптотический закон для плотности в лагранжевых координатах есть $\varrho \sim r_0^{3/\gamma} t^{-6\gamma/5}$. Перейдем к эйлеровой координате при помощи определения (1.24): $\varrho r^2 dr = \varrho_0 r_0^2 dr_0$. Подставляя сюда функцию для плотности и интегрируя, получим зависимость эйлерова радиуса данной частицы от времени: $r \sim r_0^{(\gamma-1)/\gamma} t^{2/5\gamma}$. Исключая из этого выражения r_0 при помощи функции $\varrho(r_0, t)$, получим искомым асимптотический закон:

$$\varrho \sim r^{3/(\gamma-1)} t^{-(6/5)(\gamma-1)}, \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Асимптотический закон для температуры:

$$T \sim \frac{p_c}{\varrho} \sim r^{-3/(\gamma-1)} t^{6(2-\gamma)/5(\gamma-1)}, \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

§ 26. Приближенное рассмотрение сильного взрыва. Основные закономерности процесса сильного взрыва можно установить с помощью простого приближенного метода, предложенного Г. Г. Черным [7].

Предположим, что вся масса газа, охваченного взрывной волной, собрана в тонкий слой у поверхности фронта, плотность в котором постоянна и равна плотности на фронте $\varrho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \varrho_0$. Толщина слоя Δr определяется из условия сохранения массы:

$$4\pi R^2 \Delta r \varrho_1 = \frac{4\pi R^3}{3} \varrho_0; \quad \Delta r = \frac{R}{3} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \frac{R}{3} \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Например при $\gamma = 1,3$, отношение $\Delta r/R = 0,0435$.

Поскольку слой очень тонкий, скорость в нем почти не меняется и совпадает со скоростью газа на фронте u_1 . Положим приближенно, что плотность в слое бесконечно велика, а толщина соответственно бесконечно мала; масса же конечна и равна массе M , первоначально находившейся в сфере радиуса R : $M = \varrho_0 4\pi R^3/3$. Обозначим давление на внутренней стороне слоя через p_c . Пусть оно составляет долю α от давления на фронте волны $p_c = \alpha p_1$.

Запишем второй закон Ньютона для массы M :

$$\frac{d}{dt} M u_1 = 4\pi R^2 p_c = 4\pi R^2 \alpha p_1.$$

Масса $M = 4\pi R^3 \varrho_0/3$ сама зависит от времени, так что по времени дифференцируется не скорость, а количество движения Mu_1 . На массу изнутри действует сила $4\pi R^2 p_c$, так как p_c есть сила, действующая на 1 см^2 поверхности; сила, действующая извне, равна нулю, так как начальным давлением газа пренебрегаем. Выражая u_1 и p_1 через скорость фронта $D = dR/dt$ по формулам (1.111), получим

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} R^3 D = \alpha D^2 R^2.$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dR} \frac{dR}{dt} = D \frac{d}{dR}$$

и интегрируя уравнение, найдем

$$D = aR^{-3(1-\alpha)},$$

где a — постоянная интегрирования. Для определения величин a и α воспользуемся законом сохранения энергии. Кинетическая энергия газа равна $E_{\text{кин}} = Mu_1^2/2$. Внутренняя энергия сосредоточена в «полости», ограниченной нашим бесконечно тонким слоем, давление в которой равно давлению p_c (фактически это означает, что не строго вся масса заключена в слое, а в «полости» также имеется небольшое количество вещества). Внутренняя энергия равна $E_T = \frac{1}{\gamma-1} \frac{4\pi R^3}{3} p_c$. Таким образом,

$$E_T = \frac{1}{\gamma-1} \frac{4\pi R^3}{3} p_c + M \frac{u_1^2}{2}.$$

Снова выразив $p_c = \alpha p_1$ и u_1 через D и подставляя D , получим

$$E = \frac{4\pi}{3} \varrho_0 a^2 \left[\frac{2a}{\gamma^2 - 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)^2} \right] R^{3-6(1-\alpha)}.$$

Поскольку энергия взрыва E есть константа, показатель степени у переменной величины R должен обратиться в нуль. Это дает $\alpha = 1/2$. Получающееся уравнение определяет постоянную a ,

$$a = \left[\frac{3}{4\pi} \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{(3\gamma-1)} \right]^{1/2} \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/2}.$$

Из формулы $D \sim R^{-3(1-\alpha)}$ с $\alpha = 1/2$ и формул (1.111) следуют уже известные нам законы:

$$D \sim R^{-3/2}, \quad p_1 \sim R^{-3}, \quad u_1 \sim R^{-3/2}, \quad R \sim t^{2/5}.$$

С помощью выражения для a найдем коэффициент пропорциональности в законе $R \sim t^{2/5}$:

$$R = \left(\frac{5}{2} a \right)^{2/5} t^{2/5} = \left[\frac{75}{16\pi} \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{(3\gamma-1)} \right]^{1/5} \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/5} t^{2/5} = \xi_0 \left(\frac{E}{\varrho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}.$$

Сопоставим полученное приближенное решение с точным. В приближенном решении давление в центре равно половине давления на фронте, независимо от показателя адиабаты. В точном — $p_c = 0,35p_1$ при $\gamma = 1,4$; $p_c = 0,41p_1$ при $\gamma = 1,2$. Численные коэффициенты ξ_0 в законе распространения ударной волны (1.110) в приближенном решении равны: $\xi_0 = 1,014$ при $\gamma = 1,4$ и $\xi_0 = 0,89$ при $\gamma = 1,2$. В точном решении при тех же значениях γ , $\xi_0 = 1,033$ и $0,89$, соответственно.

Как видим, приближенное решение дает неплохие результаты.

Соображения, по духу близкие приведенным выше, были использованы А. С. Компанейцем [13] для приближенного рассмотрения сильного взрыва в неоднородной атмосфере. См. об этом разд. 5 гл. XII.

§ 27. Замечания о точечном взрыве с учетом противодействия. На поздней стадии распространения взрывной волны, когда давление во фронте ударной волны становится сравнимым с начальным давлением газа (точнее, когда p_1 становится порядка $\left[\frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \right] p_0$; см. сноску на с. 84), автомодельное решение задачи о сильном взрыве теряет силу.

Процесс на этой стадии уже не автомоделен, так как в задаче имеются характерные масштабы длины и времени, которые можно составить из величины полной энергии взрыва E и начальных параметров газа. Масштабом длины служит радиус сферы, начальная энергия которой сравнима с энергией взрыва, $r_0 = (E/p_0)^{1/3}$. Масштабом времени — время, за которое звук пробегает это расстояние, $t_0 = r_0/c_0$, где $c_0 = (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$. Так, например, при взрыве в воздухе нормальной плотности ($\rho_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $p_0 = 1$ атм, $c_0 = 330$ м/с) для энергии $E = 10^{21}$ эрг, соответствующей примерно энергии, выделяющейся при взрыве 20 000 т тротила, масштабы равны $r_0 = 1$ км, $t_0 = 3$ с.

Решение задачи о распространении ударной волны точечного взрыва с учетом противодействия было получено в ряде работ [8–10] путем численного интегрирования уравнений газодинамики в частных производных. Все результаты расчетов, подробные таблицы и графики распределений газодинамических величин на разные моменты времени можно найти в указанных работах, а также в четвертом издании книги Л. И. Седова [5].

Мы ограничимся здесь лишь некоторыми замечаниями по поводу качественного характера процесса.

С течением времени амплитуда ударной волны становится все меньше и меньше, давление на фронте асимптотически приближается к начальному давлению газа — атмосферному. Соответственно уменьшаются сжатие газа во фронте волны и скорость ее распространения, которая асимптотически приближается к скорости звука c_0 . Закон распространения $R \sim t^{2/5}$ постепенно переходит в закон $R = c_0 t$. Когда давление в центральной области взрывной волны становится близким к атмосферному, расширение газа в этой области прекращается и газ останавливается. Область движения газа выносится вперед, ближе к фронту ударной волны, которая постепенно превращается в сферическую волну типа акустической. За областью сжатия в такой волне следует область разрежения, после чего воздух приходит к своему конечному состоянию. Конечное состояние слоев, далеких от центра, по которым ударная волна прошла, будучи слабой, мало отличается от начального. Распределения давления, скорости и плотности по радиусу в какой-то поздний момент t имеют вид, изображенный на рис. 1.51. Если проследить за изменением во времени давления на определенном расстоянии от центра взрыва, то получится картина, показанная

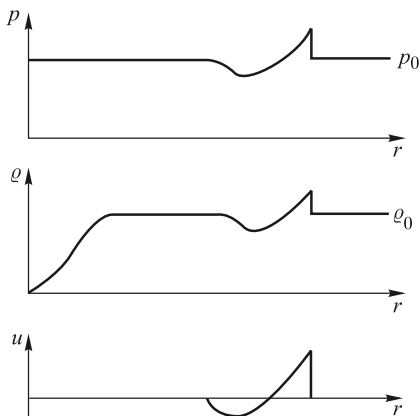


Рис. 1.51. Профили давления, плотности и скорости на поздней стадии взрыва, когда ударная волна становится слабой

на рис. 1.52. В момент t_1 , когда к данному месту подходит фронт ударной волны, давление скачком возрастает, затем уменьшается, причем падает до величины ниже атмосферного (положительная и отрицательная фазы давления), а затем возвращается к начальной величине.

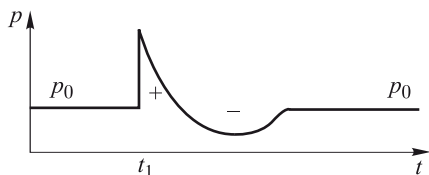


Рис. 1.52. Зависимость давления от времени в определенной точке на большом расстоянии от центра взрыва

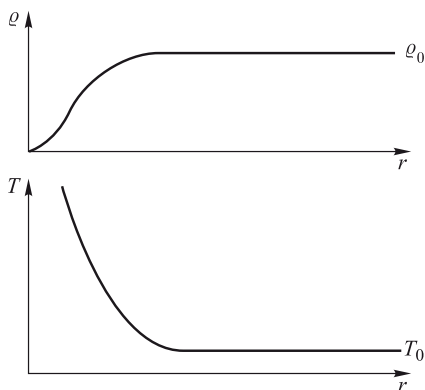


Рис. 1.53. Конечные распределения плотности и температуры ($t \rightarrow \infty$) при сильном взрыве (в предположении адиабатичности процесса)

Как уже было сказано, конечное состояние газа на больших расстояниях от центра взрыва почти не отличается от начального. На малых же расстояниях газ в конечном состоянии оказывается сильно разреженным и высоконагретым. Это связано с тем, что через частицы, находящиеся вблизи центра, ударная волна прошла будучи очень сильной, и энтропия этих частиц гораздо выше начальной.

Асимптотические распределения конечных плотности и температуры по радиусу вблизи центра можно найти из условия адиабатического расширения до атмосферного давления частиц, нагретых во фронте сильной ударной волны. Повторяя вычисления, сделанные в конце § 25, но теперь уже без зависимости p_c от t , а полагая $p_c = p_0 = \text{const}$, найдем те же самые распределения по радиусу при $r \rightarrow 0$, что и в задаче о сильном взрыве: $\rho \sim r^{3/(\gamma-1)}$, $T \sim r^{-3/(\gamma-1)}$.

Конечные распределения $\rho(r)$ и $T(r)$ в показаны на рис. 1.53. В нагретой области сосредоточена довольно значительная доля энергии взрыва, порядка нескольких десятков процентов (она зависит от γ). Это — та энергия, которая пошла на необратимое нагревание газа, связанное с необратимостью процесса ударного сжатия. Остальная энергия уносится вперед вместе с ударной волной и рассеивается в пространстве. О судьбе энергии, «застывшей» в области центра, речь пойдет в гл. IX (воздух в этой области остывает за счет светового излучения).

Поздняя стадия распространения взрывной волны изучалась теоретически и экспериментально многими авторами. Предельные законы распространения волны на больших расстояниях были найдены Л. Д. Ландау [11]. Большое практическое значение имеет эмпирическая формула М. А. Садовского [12] для давления на фронте в зависимости от расстояния от центра взрыва. Заметим, что закон подобия $p_1 = f(E^{1/3}/R)$ справедлив и на поздней стадии распространения ударной волны, когда $p_1 - p_0 \lesssim p_0$.

§ 28. Адиабатический разлет в пустоту газового шара. Познакомимся еще с одной газодинамической задачей, с которой нам придется иметь дело в дальнейшем (в гл. VIII), задачей о разлете газа в пустоту.

Представим себе газовый шар, занимающий в начальный момент сферический объем радиуса R_0 . Пусть, для определенности, в начальный момент газ покоится и заполняет объем равномерно с плотностью ϱ_0 (полная масса газа $M = \varrho_0 4\pi R_0^3/3$). Начальное давление газа также считаем постоянным и равным p_0 , так что полная энергия газа есть $E = \frac{1}{\gamma-1} p_0 \frac{4\pi R_0^3}{3}$ (газ предполагается идеальным с постоянной теплоемкостью). В момент $t = 0$ убирается заслонка, сдерживающая газ, и последний начинает беспрепятственно расширяться в пустоту.

После удаления заслонки происходит распад разрыва и по газу к центру распространяется волна разрежения. Передние слои газа расширяются в пустоту с максимальной скоростью истечения $u_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} c_0$. Когда волна разрежения доходит до центра, движение — разлет — охватывает все вещество. В процессе адиабатического разлета, благодаря совершаемой газом работе расширения, вещество разгоняется и его начальная внутренняя энергия E постепенно переходит в кинетическую энергию радиального движения. Можно показать (см. [15]), что при изэнтропическом разлете (а наша задача изэнтропична, так как в начальный момент в силу постоянства давления и плотности по радиусу энтропии всех частиц одинаковы), возмущения из внутренних областей шара не достигают передней границы, так что она движется с постоянной скоростью $u_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} c_0$. Закон движения границы газового шара есть $R = \frac{2}{\gamma-1} c_0 t + R_0$. Найти точное аналитическое решение поставленной задачи не удастся, так как задача не автомодельна и необходимо решать систему дифференциальных уравнений в частных производных, что удастся сделать аналитически лишь в очень редких случаях. В том, что задача не автомодельна, легко убедиться, замечая, что имеется характерный масштаб длины — начальный радиус шара R_0 .

Однако эта задача обладает той особенностью, что с течением времени движение асимптотически переходит в автомодельное. В самом деле, в стадии большого расширения при $R \gg R_0$ роль начального параметра длины R_0 становится все менее и менее существенной, так как масштаб длины R_0 становится очень малым по сравнению с характерным масштабом течения — фактическим радиусом шара R . Движение газа с течением времени как бы «забывает» о начальном радиусе R_0 . Все же движение не полностью «забывает» о начальных условиях, и в этом проявляется существенная неавтомодельность, заложенная в рассматриваемом процессе.

Рассмотрим асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$.

Сила, действующая на единицу массы газа, при этом стремится к нулю. В самом деле, эта сила — $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r}$ по порядку величины равна $-\frac{p}{\varrho R}$, где p и ϱ — некоторые средние по массе давление и плотность в момент t . Но среднее давление p пропорционально отношению тепловой энергии всего газа к его объему $p \sim E_{\text{теп}}/R^3$ и во всяком случае меньше, чем E/R^3 . Средняя плотность $\varrho \sim 1/R^3$, поэтому сила стремится к нулю во всяком случае не медленнее, чем $1/R$. На самом деле сила убывает при $R \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/R$, так как тепловая часть энергии уменьшается при адиабатическом расширении: $E_{\text{теп}} \sim M\varepsilon \sim M^{\frac{p}{\varrho}} \sim \varrho^{\gamma-1} \sim R^{-3(\gamma-1)}$. Отсюда $p \sim E_{\text{теп}}/R^3 \sim R^{-3\gamma}$, и сила убывает как $R^{-3\gamma+2} = R^{-\frac{2}{1-3(\gamma-1)}}$. Уравнение движения

в пределе $t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ приобретает асимптотический вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{1}{R^{1+3(\gamma-1)}} \rightarrow 0, \quad (1.114)$$

т. е. скорости всех частиц стремятся к постоянным значениям, причем $u = r/t$.

При $t \rightarrow \infty$ разлет приобретает инерционный характер. Это следует и непосредственно из условия сохранения полной энергии газа E . Полная энергия складывается из тепловой и кинетической, но тепловая часть энергии при расширении асимптотически стремится к нулю, следовательно, кинетическая энергия стремится к E , и средняя скорость газовой массы асимптотически стремится к постоянному предельному значению $u_\infty = \sqrt{2E/M}$, которое находится в определенном отношении со скоростью границы:

$$u_{\max} = \frac{2}{\gamma-1} c_0 = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\varrho_0}} = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{4\gamma}{\gamma-1} \frac{E}{M}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} u_\infty.$$

(например в одноатомном газе $\gamma = 5/3$ и $u_{\max} = 2,9u_\infty$). Подставляя асимптотическое решение для скорости $u = r/t$ в уравнение непрерывности, мы убеждаемся в том, что ему удовлетворяет следующая функция плотности:

$$\varrho = \frac{f(r/t)}{t^3}, \quad (1.115)$$

где f — совершенно произвольная функция r/t . Поскольку радиус границы шара равен $R = u_{\max} t$, эту формулу можно переписать в виде

$$\varrho = \frac{\varphi(r/R)}{R^3}.$$

Асимптотическое распределение плотности по радиусу не меняется с течением времени; оно лишь растягивается в соответствие с возрастанием R , оставаясь подобным самому себе, автомодельным. Действительно, если в газе не действуют никакие силы и каждая частица летит с постоянной скоростью по инерции, то никакого перераспределения массы не происходит, и профиль плотности остается неизменным.

Однако внутренняя неавтомодельность задачи сказывается в том, что это асимптотическое распределение плотности не может быть найдено из уравнений асимптотического движения, которые допускают любое распределение.

Распределение плотности складывается в ранней стадии, когда в газе действуют силы давления. Ко времени, когда газ сильно расширяется, оно как бы «застывает». Распределение плотности зависит от начальных условий и может быть найдено лишь на основе полного решения задачи.

Как уже отмечалось, точное решение задачи с начальными условиями $\varrho_0(r) = \text{const}$, $p_0(r) = \text{const}$, $u = 0$ нельзя найти в аналитическом виде. Приближенное решение можно сконструировать, исходя из рассмотрения аналогичной плоской задачи о разлете в пустоту газового слоя конечной массы с постоянными начальными распределениями, которую можно решить. Это приближенное решение приведено в книге К. П. Станюковича [15]; оно имеет вид

$$\varrho = \frac{A}{R^3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}, \quad R = u_{\max} t,$$

причем решение справедливо только для целочисленных значений $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$, которые соответствуют следующему ряду значений показателя адиабаты $\gamma = 3, 5/3, 7/5, 9/7, \dots$

Константу A можно определить из условия сохранения массы, если проинтегрировать функцию плотности по всему объему шара. Соответствующая формула приведена в работе [15].

§ 29. Автомодельные режимы разлета шара в пустоту. Существует класс решений задачи о разлете газового шара в пустоту, в котором распределения всех газодинамических величин строго автомодельны, т. е. с самого начала зависят от радиуса r в виде отношения r к радиусу границы шара R и не содержат какой-либо иной зависимости от r . К этим решениям приводят не любые начальные распределения величин по радиусу, а только такие, которые удовлетворяют определенному соотношению.

Указанный класс решений характеризуется линейным распределением скорости по радиусу (такие решения были исследованы Л. И. Седовым [5]):

$$u = rF(t) = \dot{R} \frac{r}{R}, \quad (1.116)$$

где функция времени $F(t)$ выражена через скорость границы шара $\dot{R} = dR/dt$. Подставляя эту формулу в уравнение движения, получим соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\varrho r(\dot{R} + F^2), \quad (1.117)$$

которому должны удовлетворять распределения p и ϱ по радиусу в течение всего процесса, в том числе и в начальный момент времени. Только при этом условии решение будет принадлежать к рассматриваемому классу.

Рассмотрим два конкретных примера таких решений.

1. Пусть плотность ϱ постоянна по всему объему и не зависит от радиуса,

$$\varrho = f(t) = \frac{M}{4\pi R^3/3}. \quad (1.118)$$

Легко проверить, что задание функций плотности и скорости в виде (1.118), (1.116) автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности при произвольной зависимости $R(t)$. Подставляя (1.118) в (1.117) и интегрируя, получим параболическое распределение давления по радиусу,

$$p = p_0(t) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (1.119)$$

которое должно быть задано с самого начала для того, чтобы выполнялось условие (1.117). Как видим, задача не изэнтропична, так как плотности у всех частиц одинаковые, а давления разные. Подстановка p и ϱ в энтропийное уравнение дает связь между неизвестными функциями: давлением в центре $p_0(t)$ и радиусом шара $R(t)$:

$$p_0(t) = A\varrho^\gamma = A \left(\frac{3M}{4\pi} \right)^\gamma \frac{1}{R^{3\gamma}}, \quad (1.120)$$

где A — константа, зависящая от начальной энтропии в центре шара. Подставляя, наконец, (1.118), (1.119), (1.120) в уравнение движения (1.117), получим дифференциальное уравнение второго порядка для закона движения границы шара $R(t)$. Решая его с начальным условием $t = 0$, $R = R_0$, $\dot{R} = \dot{R}_0$, найдем и полное решение задачи. В частности, можно считать, что в начальный момент газ покоится: $\dot{R}_0 = 0$.

Если интересоваться асимптотикой $t \rightarrow \infty$, можно сразу положить $\dot{R} = \text{const} = u_1$, где u_1 — предельная скорость границы шара (решение дифференциального уравнения, естественно, дает $\dot{R} \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$). Величину u_1 можно с помощью

радиальных распределений ϱ и u вычислить из условия сохранения энергии, имея в виду, что при $t \rightarrow \infty$ вся энергия превращается в кинетическую. Получим, таким образом:

$$u_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{2E}{M}} = \sqrt{\frac{5}{3}} u_\infty, \quad (1.121)$$

где u_∞ по-прежнему определяется как корень из среднего по массе квадрата скорости $u_\infty = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{2E/M}$.

2. Пусть энтропии всех частиц одинаковы (изэнтропическое движение), т.е. $S(r, t) = \text{const}$, $p/\varrho^\gamma = A = \text{const}$ (A — энтропийная константа). Подстановка $p = A\varrho^\gamma$ в соотношение (1.117) приводит к следующим профилям плотности и давления:

$$\varrho = \varrho_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (1.122)$$

$$p = A\varrho_c^\gamma \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (1.123)$$

которые, естественно, должны быть заданы с самого начала.

Плотность в центре ϱ_c можно определить, интегрируя плотность по объему и приравнявая интеграл массе: это дает, как обычно, $\varrho_c \sim M/R^3$, с численным коэффициентом пропорциональности, зависящим от γ . Соотношение (1.117) приводит после подстановки (1.122), (1.123) к уравнению второго порядка для $R(t)$. Предельное значение скорости границы u_1 можно получить из условия сохранения энергии:

$$E = \int_0^R \frac{\varrho u^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

если подставить в интеграл ϱ по формуле (1.122) и $u = u_1 r/R$.

Это дает связь u_1 с $u_\infty = \sqrt{2E/M}$, причем коэффициенты пропорциональности также зависят от γ . Оба коэффициента выражаются определенными интегралами, которые вычисляются при помощи гамма-функций.

Приведем численные результаты. При $\gamma = 5/3$, $\varrho_c = 3,4\bar{\varrho}$, $u_1 = 1,64 u_\infty$; при $\gamma = 4/3$, $\varrho_c = 6,6\bar{\varrho}$, $u_1 = 1,92 u_\infty$, где $\bar{\varrho} = M/(4\pi R^3/3)$ — плотность, средняя по объему. В пределе, при $t \rightarrow \infty$, $R \approx u_1 t$ ¹⁾.

Отметим работу В. С. Имшенника [16], в которой рассматривается задача об изотермическом разлете газа в пустоту, и работы И. В. Немчинова [18], исследовавшего разлет в пустоту газа, в котором происходит постепенное выделение энергии. Отметим также работу И. В. Немчинова [19], в которой рассматривается разлет в пустоту трехосного эллипсоида.

¹⁾ В работе [17] сообщаются некоторые результаты численного решения уравнений газодинамики для задачи об изэнтропическом разлете шара в пустоту при однородных начальных условиях и $\gamma = 5/3$ (при $t = 0$ газ в сфере покоится, плотность и давление его постоянны по радиусу). К сожалению, в работе не приводится асимптотический профиль плотности, но дается график $\varrho_c(t)$. Видно, что с течением времени зависимость стремится к $\varrho_c \sim 1/t^3$, причем коэффициент в этом предельном законе оказывается всего в 1,22 раза больше, чем в описанном здесь автомодельном решении.

Глава II

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН В СРЕДЕ

§ 1. Введение и основные понятия. До недавнего времени высокими температурами порядка десятков и сотен тысяч или миллионов градусов интересовались главным образом астрофизики. Теория переноса излучения и лучистого теплообмена создавалась и развивалась как необходимый элемент для понимания процессов, протекающих в звездах, и объяснения наблюдаемого свечения звезд. В значительной мере эта теория переносится и на другие высокотемпературные объекты, с которыми имеет дело физика и техника сегодняшнего дня. В этой главе мы познакомимся с основами теорий теплового излучения, лучистого переноса энергии, теории свечения нагретых тел и сформулируем уравнения, описывающие гидродинамическое движение вещества в условиях интенсивного излучения. В изложении этих вопросов мы будем ориентироваться на «земные» приложения, останавливаясь на некоторых моментах, не столь важных для астрофизики и даже не возникающих в этой области ¹⁾).

Напомним основные положения и определения теории теплового излучения. Излучение характеризуется частотой колебаний электромагнитного поля ν или длиной волны λ , связанной с частотой через скорость света c : $\lambda = c/\nu$. В дальнейшем мы всегда будем иметь дело со средами, в которых показатель преломления очень близок к единице, так что под c будем подразумевать скорость света в вакууме, равную $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. С квантовой точки зрения излучение рассматривается как совокупность неких частиц, фотонов или световых квантов, энергия которых связана с частотой эквивалентного поля посредством постоянной Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с. Обычно энергию кванта $h\nu$ ²⁾ измеряют в электронвольтах. Один электронвольт — это энергия, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов в 1 вольт; 1 электронвольт (1 эВ) равен $1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг. Часто в электронвольтах измеряют и температуру. Температуре T в 1 электронвольт соответствует энергия $kT = 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг, где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К есть постоянная Больцмана:

$$T_{\text{эВ}} = \frac{kT}{1,6 \cdot 10^{-12}} = \frac{T}{11600},$$

т. е. температура в 1 эВ равна 11 600 К.

¹⁾ Более подробно с вопросами теории переноса излучения и ее приложениями к астрофизике можно познакомиться в книгах В. А. Амбарцумяна и др. [1], Унзольда [2], Э. Р. Мустеля [3].

²⁾ В квантовой теории принято пользоваться вместо частоты ν «круговой» частотой $\omega = 2\pi\nu$ и, соответственно, постоянной Планка $\hbar = h/2\pi$. В этой книге мы будем употреблять величины ν и h , как это принято в теории переноса излучения и астрофизике.

В электромагнитной шкале частот (длин волн) или, как говорят, в спектре излучения, обычно выделяют несколько весьма нечетко ограниченных интервалов, которые носят определенные названия: радиоволны, инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое, рентгеновское излучения, γ -кванты. Это деление сложилось исторически и не имеет какого-то строгого физического обоснования. Некоторые промежуточные между интервалами частоты даже трудно отнести к той или иной рубрике. Исключение составляет только более или менее определенная, видимая часть спектра: $\lambda \sim 7500\text{--}4000 \text{ \AA}$, $h\nu \sim 1,7\text{--}3,13 \text{ эВ}$. В теории теплового излучения доказывается, что в состоянии термодинамического равновесия излучения с веществом максимум энергии спектра по частоте приходится на частоту ν , связанную с температурой формулой $h\nu = 2,82 kT$. Можно сказать, что частота ν наиболее характерна для тела с температурой $T = h\nu/2,82 k$, поэтому сопоставление частотных и температурных диапазонов сразу дает представление о том, каким температурам свойственна данная область спектра. Видимое излучение характерно для тел с температурами порядка $7000\text{--}13\,000 \text{ К}$.

Электромагнитное поле или световые кванты обладают не только энергией, но и импульсом. Импульс кванта $h\nu$ по абсолютной величине равен $h\nu/c$. Направление движения кванта совпадает с вектором потока энергии поля — вектором Пойнтинга.

Поле излучения, заполняющего пространство, описывается распределением интенсивности излучения по частотам, в пространстве и по направлениям переноса лучистой энергии. Если говорить об излучении как о совокупности частиц — световых квантов, то поле можно охарактеризовать функцией распределения квантов, которая вполне аналогична функции распределения любых частиц. Пусть $f(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\nu d\mathbf{r} d\mathbf{\Omega}$ есть число световых квантов в спектральном интервале от ν до $\nu + d\nu$, находящихся в момент t в элементе объема $d\mathbf{r}$ ¹⁾ около точки $\mathbf{r}$ и имеющих направление движения в элементе телесного угла $d\mathbf{\Omega}$ около единичного вектора $\mathbf{\Omega}$. Функция f называется функцией распределения.

Каждый квант обладает энергией $h\nu$ и движется со скоростью c , поэтому величина

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\nu d\mathbf{\Omega} = h\nu c f(\nu, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) d\nu d\mathbf{\Omega}$$

есть количество лучистой энергии в спектральном интервале $d\nu$, протекающей в 1 с через площадку в 1 см^2 , помещенную в точке $\mathbf{r}$ перпендикулярно к направлениям распространения энергии, которые лежат в элементе телесного угла $d\mathbf{\Omega}$ около вектора $\mathbf{\Omega}$. I_ν называют спектральной интенсивностью излучения. Задание функций I_ν или f полностью определяет поле излучения. Количество лучистой энергии частоты ν , заключенной в единичном интервале частот и находящейся в 1 см^3 пространства в точке $\mathbf{r}$ в момент t , или спектральная плотность излучения, равно

$$U_\nu(\mathbf{r}, t) = h\nu \int_{(4\pi)} f d\mathbf{\Omega} = \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu d\mathbf{\Omega}. \quad (2.1)$$

Представим себе единичную площадку с направлением нормали $\mathbf{n}$. Кванты пересекают ее слева направо и справа налево. Количество лучистой энергии в интервале $d\nu$, протекающей в 1 с через площадку слева направо, равно $h\nu c \int_{(2\pi)} f \cos \theta d\mathbf{\Omega}$, где

θ — угол между направлением движения квантов $\mathbf{\Omega}$ и нормалью $\mathbf{n}$; интеграл берется по правой полусфере, основанием которой служит площадка (рис. 2.1). Интеграл по

¹⁾ Линейные размеры элементарного объема $d\mathbf{r}$ предполагаются гораздо большими, чем длина волны λ .

левой полусфере равен количеству энергии, протекающей справа налево. Разность односторонних потоков слева направо и справа налево дает полный спектральный поток энергии через указанную площадку. Поскольку $\cos \theta$ имеет различные знаки в правой и левой полусферах, спектральный поток энергии через площадку с нормалью $\mathbf{n}$ равен

$$S_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) = h\nu c \int_{(4\pi)} f \cos \theta d\Omega = \int_{(4\pi)} I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (2.2)$$

где интеграл берется по всему телесному углу.

Поток есть величина векторная. Выписанное выражение (2.2) представляет собой проекцию вектора потока на направление $\mathbf{n}$. Сам же вектор спектрального потока равен

$$\mathbf{S}_\nu = \int I_\nu \boldsymbol{\Omega} d\Omega, \quad (2.3)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — единичный вектор направления движения квантов.

При изотропном распределении излучения, когда функция распределения f и интенсивность I_ν не зависят от направления $\boldsymbol{\Omega}$, плотность излучения равна

$$U_\nu = 4\pi h\nu f = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad (2.4)$$

а потока нет: $\mathbf{S}_\nu = 0$ и проекции на все направления также равны нулю (так как в каждом направлении энергии переносится ровно столько, сколько и в противоположном).

Полные интенсивность, плотность и поток излучения получаются из спектральных интегрированием их по всему спектру частот:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad U = \int_0^\infty U_\nu d\nu, \quad \mathbf{S} = \int_0^\infty \mathbf{S}_\nu d\nu. \quad (2.5)$$

Введем теперь понятие об оптических характеристиках вещества ¹⁾.

Количество энергии частоты ν самопроизвольно (спонтанно) излучаемой в 1 см^3 вещества в 1 с в единичном интервале частот называют спектральной лучеиспускательной способностью или *коэффициентом излучения* J_ν . Обычно газы излучают свет во всех направлениях одинаково, изотропно, так как атомы, молекулы и т. д. ориентированы и движутся в пространстве хаотическим образом. Поэтому количество энергии, излучаемой в телесный угол $d\Omega$ в каком-либо направлении, равно просто $j_\nu d\Omega = J_\nu d\Omega / 4\pi$ (j_ν рассчитано на единицу телесного угла).

Иногда лучеиспускательную способность относят не к единице объема, а к единице массы. Чтобы получить соответствующие величины, следует, очевидно, поделить J_ν или j_ν на плотность вещества ρ .

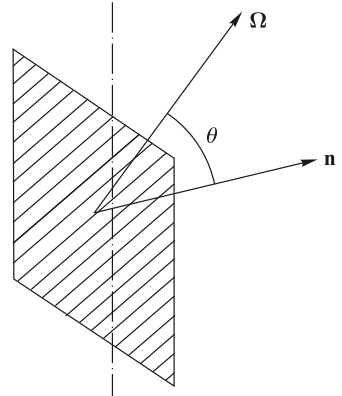


Рис. 2.1. К выводу формулы для потока энергии излучения

¹⁾ Здесь и в дальнейшем, употребляя термины «свет», «световые кванты», «оптические» свойства, мы не будем ограничиваться, как это принято в обиходе, только видимой частью спектра, но будем относить эти термины к любым частотам.

Если через вещество проходит пучок света, он ослабляется на своем пути. Ослабление происходит как вследствие поглощения квантов, так и вследствие их рассеяния, т. е. отклонения от первоначального направления. Относительное ослабление параллельного пучка на элементе пути dx пропорционально этому элементу, т. е.

$$dI_\nu = -\mu_\nu I_\nu dx. \quad (2.6)$$

Интенсивность пучка уменьшается после прохождения расстояния x от точки $x = 0$ до точки x по экспоненциальному закону:

$$I_\nu = I_{\nu 0} \exp \left[- \int_0^x \mu_\nu dx \right]. \quad (2.7)$$

Коэффициент ослабления μ_ν складывается из коэффициента поглощения $\kappa_{\nu a}$ ¹⁾ и коэффициента рассеяния $\kappa_{\nu s}$. Обратные величины есть длины пробега света: полная $l_\nu = 1/\mu_\nu$, по отношению к поглощению $l_{\nu a} = 1/\kappa_{\nu a}$ и по отношению к рассеянию $l_{\nu s} = 1/\kappa_{\nu s}$ ($l_\nu = (l_{\nu a}^{-1} + l_{\nu s}^{-1})^{-1}$). Длины пробега характеризуют ослабление пучка света по отношению к соответствующему процессу на единице пути. О коэффициентах, отнесенных не к единице пути, а к единице массы, говорят как о массовых коэффициентах. Массовые коэффициенты равны соответственно μ_ν/ρ , $\kappa_{\nu a}/\rho$, $\kappa_{\nu s}/\rho$.

Длина пробега представляет собой среднее расстояние, которое проходит квант прежде, чем он поглотится, рассеется и т. д. Но квант летит со скоростью c , и поэтому среднее время «жизни» кванта по отношению к данному акту равно длине пробега, поделенной на скорость света l/c . Например, если на элементе пути dx поглощается доля $dx/l_{\nu a}$ квантов, то за время dt поглощается доля $c dt/l_{\nu a}$.

Ослабление пучка света характеризуется произведением коэффициента ослабления на длину пути. Безразмерная величина

$$\tau_\nu = \int_0^x \mu_\nu dx, \quad d\tau_\nu = \mu_\nu dx, \quad (2.8)$$

называется оптической толщиной слоя x по отношению к свету частоты ν . Пучок света ослабляется в e раз на оптической толщине, равной единице. В случае, когда рассеянием можно пренебречь, оптическая толщина есть

$$\tau_\nu = \int_0^x \kappa_{\nu a} dx, \quad d\tau_\nu = \kappa_{\nu a} dx. \quad (2.9)$$

§ 2. Механизмы испускания, поглощения и рассеяния света в газах. Световые кванты излучаются и поглощаются при переходах электронов в атомных системах: атомах, молекулах, ионах, электронно-ионной плазме, из одного энергетического состояния в другое. При поглощении кванта происходит возбуждение атома, молекулы и т. д. Для того чтобы произошло испускание кванта, необходимо предварительно возбудить атом; атом теряет энергию возбуждения, передавая ее испускаемому кванту. Лучеиспускаемость тем выше, чем больше число возбужденных атомов, т. е. чем выше температура.

¹⁾ Мы сейчас отвлекаемся от процессов вынужденного испускания, о которых речь пойдет ниже, и подразумеваем под $\kappa_{\nu a}$ коэффициент истинного поглощения.

На рис. 2.2 изображена схема энергетических уровней простейшей атомной системы, состоящей из протона и электрона, которые в связанном состоянии образуют атом водорода. За нуль энергии принята, как обычно, граница между свободным и связанным состояниями электрона, так что в связанном состоянии энергия отрицательна. В связанном состоянии электрон может находиться только на определенных, дискретных энергетических уровнях. Основное состояние системы протон–электрон имеет энергию $E_1 = -13,5$ эВ, равную по абсолютной величине потенциалу ионизации атома водорода. В свободном состоянии с положительной энергией (ионизованный атом водорода) электрон может обладать любой энергией, так что энергетический спектр непрерывен.

В качественном отношении энергетический спектр сложных атомных систем не отличается от спектра простейшей.

Все электронные переходы можно, как это принято в астрофизике, подразделить на три группы по признаку непрерывности или дискретности энергетического спектра начального и конечного состояний атомной системы: на связанно-связанные, связанно-свободные и свободно-свободные (все возможные переходы показаны на рис. 2.2 стрелками).

К связанно-связанным относятся переходы электронов в атомах, молекулах и ионах с одного дискретного уровня на другой. В силу дискретности энергетических уровней связанного состояния электронов при таких переходах испускаются и поглощаются линейчатые спектры. В молекулах, когда одновременно с электронным переходом происходит изменение состояния колебательного и вращательного движений, получаются полосатые спектры¹⁾.

При связанно-свободных переходах электрон в результате поглощения кванта приобретает энергию, превышающую энергию связи его в атоме, молекуле, ионе и становится свободным — происходит фотоионизация. Избыточная по сравнению с энергией связи энергия кванта превращается в кинетическую энергию свободного электрона. Обратные переходы — захват свободных электронов ионами в ионизованном газе (фоторекомбинация) — приводят к испусканию квантов. Поскольку свободный электрон может обладать произвольной (положительной) энергией, связанно-свободные переходы дают непрерывный спектр поглощения и излучения.

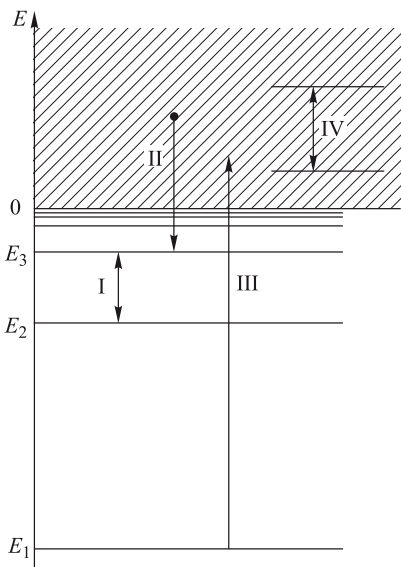


Рис. 2.2. Схема энергетических уровней системы протон–электрон. $E_1 = -13,5$ эВ — основное состояние атома водорода; E_2, E_3 — уровни с главными квантовыми числами $n = 2, 3$. $E = 0$ соответствует границе между дискретным и непрерывным спектрами. Стрелками показаны возможные типы переходов: I — связанно-связанный; II — захват электрона протоном; III — ионизация атома; IV — свободно-свободный

¹⁾ В молекулах иногда происходят переходы, сопровождающиеся изменением только колебательного и вращательного состояний без изменения электронного состояния. При этом испускаются или поглощаются кванты очень малой энергии, лежащие в инфракрасной области спектра, которые при температурах порядка нескольких тысяч градусов и выше играют незначительную роль.

Следует отметить, что не любой квант может вызвать фотоэффект в атоме, находящемся в определенном состоянии. Энергия кванта должна превышать энергию связи электрона в этом состоянии. Однако любой, даже самый маленький квант может вырвать электрон из достаточно сильно возбужденного атома, так как с возрастанием возбуждения электрон становится связанным все слабее и слабее.

В ионизованном газе (плазме) свободный электрон, пролетая в электрическом поле иона, может испустить квант, не потеряв при этом всей своей кинетической энергии и оставаясь свободным, либо же поглотить квант, приобретая дополнительную кинетическую энергию. Эти свободно-свободные переходы часто называют тормозными, так как при испускании электрон как бы тормозится в поле иона, теряя часть своей энергии на излучение. Тормозные процессы дают также непрерывный спектр излучения и поглощения.

Тормозные процессы могут происходить и при пролете электрона в поле нейтрального атома. В отличие от поля иона, поле нейтрального атома очень быстро спадает с расстоянием, поэтому для процесса испускания или поглощения света необходимо тесное сближение электрона и атома. Вероятность тормозного процесса с участием нейтрального атома гораздо меньше, чем с участием иона.

Коэффициенты связанно-связанного и связанно-свободного поглощения пропорциональны числу поглощающих атомов N , находящихся в 1 см^3 газа. Величина коэффициента, отнесенная к одному поглощающему атому, зависит только от свойств атома, степени его возбуждения, частоты кванта, т.е. является характеристикой самого атома. Эта величина $\kappa_{\nu a}/N = \sigma_{\nu}$ имеет размерность см^2 (размерность $\kappa_{\nu a} - \text{см}^{-1}$, размерность $N - \text{см}^{-3}$) и носит название *эффективного сечения поглощения*. Ее физический смысл легко понять путем следующего рассуждения. Пусть параллельный пучок света частоты ν с сечением в 1 см^2 проходит через поглощающий газ. Поглощение можно представить себе таким образом, будто каждый атом заменен неким маленьким непрозрачным диском, перпендикулярным к направлению пучка, попадая в который квант застревает (поглощается).

Если площадь каждого диска равна σ_{ν} , а число дисков — атомов в см^3 есть N , то полная площадь всех дисков, расположенных в слое газа с площадью 1 см^2 и толщиной dx , равна $1 \text{ см}^2 N \sigma_{\nu} dx$. Выберем dx настолько малым, чтобы находящиеся в слое диски не перекрывались. Тогда, очевидно, при прохождении света через такой слой «застрянет» доля квантов, равная отношению непрозрачной площади $N \sigma_{\nu} dx \text{ см}^2$ к полной — 1 см^2 , т.е.

$$dI_{\nu} = -I_{\nu} N \sigma_{\nu} dx.$$

Вспоминая определение коэффициента поглощения (см. формулу (2.6)), получаем, что $\kappa_{\nu} = N \sigma_{\nu}$, т.е. эффективное сечение σ_{ν} есть как бы площадь «непрозрачного» (для частоты ν) диска, соответствующего одному поглощающему атому. Точно так же можно говорить и об эффективном сечении атома или какой-либо другой частицы для рассеяния квантов.

Связанно-связанные переходы вызываются квантами строго определенной энергии $h\nu$, лежащей в чрезвычайно узких пределах. Эта энергия должна соответствовать разности энергий двух уровней в атоме. Поэтому о таком поглощении говорят о как селективном. Эффективные сечения поглощения «изолированных» атомов для этих «избранных» квантов чрезвычайно велики. Для квантов видимого света они порядка 10^{-9} см^2 в центре линии (в середине узкого интервала селективного поглощения)¹⁾.

¹⁾ Эффективное сечение поглощения в центре линии, обладающей естественной шириной, порядка λ^2 , где λ — длина волны кванта. В шкале длин волн естественная ширина линий в видимой части спектра порядка $10^{-4} \text{ Å} = 10^{-12} \text{ см}$ (1 ангстрем (Å) равен 10^{-8} см). Обычно

Такие сечения отвечают очень малым длинам пробега квантов. Например, при плотности $N \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ (порядка плотности атмосферного воздуха) длина пробега была бы порядка $l = 1/\kappa = 1/N\sigma \sim 10^{-10} \text{ см}$.

Эффективные сечения для связанно-свободного поглощения, т. е. для фотоэффекта, гораздо меньше, порядка $10^{-17} - 10^{-20} \text{ см}^2$ ($l \sim 10^{-2} - 10 \text{ см}$ при $N \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Эти величины относятся, конечно, только к таким квантам, которые вообще в состоянии вырвать электрон из атома, т. е. энергия которых больше энергии связи электрона.

Что касается свободно-свободных переходов, то для поглощения кванта необходимо, чтобы электрон пролетел в момент поглощения очень близко от иона — «столкнулся» с ионом (свободный электрон не в состоянии поглотить квант, он может только рассеять его). Поэтому коэффициент тормозного поглощения пропорционален как числу ионов, так и числу свободных электронов в 1 см^3 : $\kappa_{\text{тор}} \sim N_+ N_e$. Говорить об эффективном сечении иона $\sigma_{\text{тор}} = \kappa_{\text{тор}}/N_+ \sim N_e$ можно только в условном смысле, так как это сечение пропорционально плотности свободных электронов. Оказывается, однако, что в случае неполной ионизации коэффициент тормозного поглощения пропорционален только первой степени плотности газа, так как плотности пропорционально само произведение $N_+ N_e$. Для квантов, наиболее распространенных при данной температуре, коэффициент тормозного поглощения примерно на порядок меньше коэффициента связанно-свободного поглощения.

В случае же полной ионизации, когда в газе присутствуют только ядра и электроны (и связанно-свободного поглощения вообще нет), коэффициент тормозного поглощения пропорционален квадрату плотности газа.

Рассеивают кванты главным образом свободные электроны¹⁾ (если энергия кванта велика по сравнению с энергией связи электрона в атоме, то такой электрон тоже может рассматриваться как «свободный»).

Кванты не слишком больших энергий, гораздо меньших, чем собственная энергия электрона, $m_e c^2 = 500 \text{ эВ}$, с которыми только и приходится иметь дело при обозримых температурах, рассеиваются без изменения энергии. Эффективное сечение рассеяния определяется классическим радиусом электрона r_0 и равно

$$\sigma_s = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$$

(это так называемое томсоновское сечение рассеяния).

Это сечение очень маленькое, оно соответствует длине пробега для рассеяния $l_s \sim 10^5 \text{ см}$ при плотности электронов $N_e \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$. При оценке длины рассеяния больших квантов, для которых все электроны атомов и молекул могут рассматриваться как свободные, под N_e следует понимать полное число электронов, имеющих в атомах. Например, в воздухе нормальной плотности $N_{\text{мол}} = 2,67 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, а полное число электронов в 14,4 раза больше. Длина пробега для рассеяния равна 37 м. Следует отметить, что эффективное сечение очень больших, мегаэлектронвольтных квантов отличается от томсоновского.

В неполностью ионизованном газе длина пробега для рассеяния квантов в непрерывном спектре всегда гораздо больше длины пробега для поглощения. Только в пол-

в газах ширина линий больше естественной, а сечение в центре линии соответственно меньше, чем λ^2 . Подробнее см. об этом в § 9 гл. V.

¹⁾ Отметим существование эффекта резонансного рассеяния, в котором связанный электрон поглощает квант с переходом в связанное же возбужденное состояние, а затем испускает его в произвольном направлении. Эффективное сечение резонансного рассеяния в центре линии, как и сечение поглощения, порядка λ^2 .

ностью ионизованном и очень сильно разреженном газе, когда тормозное поглощение, пропорциональное N^2 , становится малым, рассеяние существенно.

В «земных» условиях рассеянием света практически всегда можно пренебречь по сравнению с поглощением¹⁾. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индекс «а» у величин κ_ν , l_ν , подразумевая под ними коэффициент поглощения и длину пробега для поглощения.

На этом мы закончим общий обзор механизмов взаимодействия излучения с веществом. Подробному изложению этих вопросов будет посвящена гл. V. Здесь же нам нигде не понадобятся конкретные выражения для коэффициентов поглощения.

§ 3. Равновесное излучение и абсолютно черное тело. Представим себе неограниченную среду, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре T . В стационарных условиях поле излучения также равновесно. Термодинамическое равновесие излучения характеризуется тем, что число квантов или количество лучистой энергии, испускаемых веществом в 1 с в 1 см³ в данном интервале частот $d\nu$ и в данном интервале направлений $d\Omega$, в точности равно числу поглощаемых квантов или количеству поглощаемой веществом лучистой энергии в тех же интервалах $d\nu$, $d\Omega$. Поле равновесного излучения изотропно, т. е. не зависит от направления и не зависит от конкретных свойств среды, являясь универсальной функцией частоты и температуры.

Спектральная функция плотности равновесного излучения $U_{\nu p}$ была выведена Планком на заре развития квантовой теории. Наиболее естественным путем ее можно получить с помощью квантовой статистики, которой подчиняется «фотонный газ» (см., например, [4]). Количество энергии равновесного излучения частоты ν в 1 см³, приходящееся на единичный интервал частот, равно

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.10)$$

В силу изотропии спектральная интенсивность равновесного излучения равна

$$I_{\nu p} = \frac{cU_{\nu p}}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.11)$$

Распределение энергии равновесного излучения по частотам, даваемое функцией Планка (2.10), изображено на рис. 2.3. Максимум этого распределения лежит при энергии квантов $h\nu_{\max} = 2,822 kT$. При повышении температуры максимум смещается в сторону больших частот. В области малых частот $h\nu \ll kT$ формула Планка сводится к классической формуле Рэлея–Джинса:

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi kT}{c^3} \nu^2, \quad h\nu \ll kT. \quad (2.12)$$

В области больших частот $h\nu \gg kT$ получаем формулу Вина:

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}, \quad h\nu \gg kT. \quad (2.13)$$

Полная плотность равновесного излучения получается интегрированием по частотам от нуля до ∞ спектральной плотности (2.10). Вычисление дает известное

¹⁾ В астрофизических условиях рассеяние иногда даже больше поглощения.

²⁾ В астрофизической литературе вместо $I_{\nu p}$ обычно употребляют обозначение B_ν .

выражение:

$$U_p = \int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu = \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (2.14)$$

где $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15h^3 c^2 = 5,67 \cdot 10^{-5}$ эрг/см² · с · К⁴ — постоянная Стефана–Больцмана ($U_p = 7,57 \cdot 10^{-15} T^4$ эрг/см³).

Пропорциональность полной плотности равновесного излучения четвертой степени температуры следует непосредственно из второго начала термодинамики и известного из классической электродинамики положения о том, что давление изотропного поля излучения равно одной трети от плотности энергии: $p_{\nu} = U_p/3$. Подставляя это выражение в общее термодинамическое соотношение $TdS = d\varepsilon + pdV$ ¹⁾, где под удельной энергией подразумевается произведение плотности излучения на объем $\varepsilon = U_p V$, и замечая, что dS есть полный дифференциал, получим $U_p = \text{const } T^4$. Кстати сказать, соотношение $p_{\nu} = U_p/3$ свидетельствует о том, что равновесное излучение можно рассматривать с термодинамической точки зрения как идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$.

Поскольку поле равновесного излучения изотропно, поток излучения в любой точке тела равен нулю. Это значит, что если мысленно провести в теле плоскую поверхность, то односторонние потоки излучения через поверхность справа налево и слева направо будут в точности равны друг другу по абсолютной величине и противоположны по направлению. Саму величину одностороннего потока, т.е. количество лучистой энергии, протекающей, скажем, слева направо в 1 с через единичную площадку, получим, подставляя в формулу (2.2) выражение (2.11) для равновесной интенсивности и интегрируя не по всему телесному углу, а только по полусфере. Односторонний спектральный поток равен

$$S_{\nu p} = \frac{cU_{\nu p}}{4} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.15)$$

Интегральный по спектру односторонний поток есть

$$S_p = \int_0^{\infty} S_{\nu p} d\nu = \frac{cU_{\nu p}}{4} = \sigma T^4. \quad (2.16)$$

Представим себе тело постоянной температуры T , в котором имеется полость, заполненная равновесным излучением. На 1 см² поверхности вещества в 1 с из полости падает поток излучения $S_{\nu p}$. Этот поток, вообще говоря, частично отражается от стенки полости, а частично проходит внутрь и поглощается веществом (предположим, что насквозь через тело он не проходит — тело не ограничено). Обозначим коэффициент отражения через R_{ν} , а поглощательную способность веще-

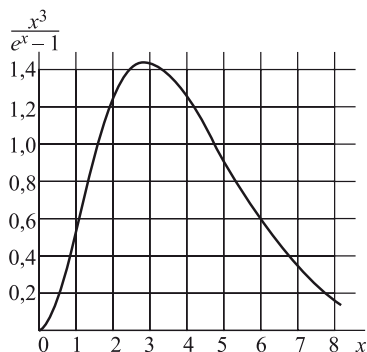


Рис. 2.3. Функция Планка $\frac{x^3}{e^x - 1}$, где $x = h\nu/kT$

¹⁾ Здесь S — энтропия излучения.

ства через A_ν ; $A_\nu = 1 - R_\nu$. Количество излучения, проходящего из полости внутрь тела и поглощающегося в веществе, равно $S_{\nu p} \cdot A_\nu$. В силу равновесия такое же количество излучения J'_ν испускается в 1 с с 1 см² поверхности тела в сторону полости, т. е. $J'_\nu = S_{\nu p} \cdot A_\nu$. Поглощательная способность, коэффициент отражения, величина испускания с поверхности являются характеристиками тела и состояния вещества, однако отношение

$$\frac{J'_\nu}{A_\nu} = S_{\nu p} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.17)$$

не зависит от конкретных свойств тела и является универсальной функцией частоты и температуры. Это положение называется законом Кирхгофа.

Тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение, называется абсолютно черным. Для абсолютно черного тела, по определению, $R_\nu = 0$, $A_\nu = 1$. Из формулы (2.17) следует, что с поверхности его выходит спектральный поток, равный $S_{\nu p}$; интегральный по спектру поток равен $S_p = \sigma T^4$.

Рассмотрим неограниченную сплошную среду с постоянной температурой T , в которой излучение находится в равновесии с веществом, и снова разделим ее воображаемой плоской поверхностью. Односторонние потоки через поверхность равны $S_{\nu p}$. Кванты, пересекающие поверхность слева направо, «рождаются» слева от поверхности, а идущие справа налево — справа от поверхности. Уберем мысленно вещество с одной стороны от поверхности, скажем, справа, предположив при этом, что температура вещества слева не изменилась. Кроме того, предположим, что среда обладает показателем преломления, равным единице, как и пустота, которая образуется справа, т. е. граница раздела не отражает света. Тогда, после «изъятия» вещества справа, со стороны пустоты кванты не приходят вообще, поток же квантов слева направо со стороны вещества, очевидно, не изменится и будет по-прежнему равным $S_{\nu p}$. Таким образом, плоское полупространство, заполненное веществом с показателем преломления, равным единице, и постоянной температурой T , посылает с поверхности поток излучения $S_{\nu p}$, т. е. излучает как абсолютно черное тело температуры T .

§ 4. Вынужденное испускание. Рассмотрим баланс поглощения и испускания света в веществе, находящемся в поле излучения I_ν . Количество лучистой энергии в интервале частот $d\nu$ и интервале направлений $d\Omega$, поглощаемой в 1 см³ в 1 с, равно

$$I_\nu d\nu d\Omega \kappa_\nu = \text{поглощение в 1 с в 1 см}^3. \quad (2.18)$$

Количество энергии, самопроизвольно (спонтанно) испускаемой веществом в 1 см³ в 1 с в том же интервале $d\nu d\Omega$, равно

$$j_\nu d\nu d\Omega = \text{самопроизвольное испускание в 1 с в 1 см}^3.$$

Величина самопроизвольного испускания (коэффициент излучения j_ν) определяется только свойствами вещества и его состоянием: родом атомов, температурой, от которой зависит степень возбуждения атомов и т. д., и совершенно не зависит от того, имеется ли в пространстве излучение или нет. Этим, однако, не исчерпывается полное количество излучения, испускаемого веществом.

Существует так называемое вынужденное, или индуцированное, испускание. Вероятность вынужденного испускания кванта данной частоты и данного направления пропорциональна имеющейся в данной точке пространства интенсивности излучения той же частоты и того же направления. Присутствующие кванты как бы способствуют переходам возбужденных атомных систем, сопровождающимся испусканием таких же самых квантов. В квантовой теории показывается, что полная вероятность испускания данных квантов пропорциональна величине $1 + n$, где n — число фотонов

с определенным направлением поляризации, находящихся в той же фазовой ячейке, в которую попадает испущенный квант. Это число равно $n = c^2 I_\nu / 2h\nu^3$ ¹⁾. Таким образом, полное количество излучения, испускаемого в 1 с в 1 см³ в интервале $d\nu d\Omega$, равно

$$j_\nu d\nu d\Omega \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) = \text{полное испускание в 1 с в 1 см}^3. \quad (2.19)$$

Первое слагаемое в скобках соответствует спонтанному испусканию, а второе — вынужденному.

В состоянии термодинамического равновесия испускание и поглощение квантов данных частоты и направления в точности компенсируют друг друга, так что выражения (2.18) и (2.19) следует приравнять, причем интенсивность излучения I_ν заменить при этом равновесной величиной $I_{\nu p}$.

Принимая во внимание формулу (2.11) для равновесной интенсивности, найдем, что отношение лучеиспускательной способности любого вещества к его коэффициенту поглощения есть универсальная функция частоты и температуры:

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{I_{\nu p}}{1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{\nu p}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp \left(-\frac{h\nu}{kT} \right). \quad (2.20)$$

Это соотношение представляет собой одну из форм закона Кирхгофа.

Формулу (2.20) удобно переписать в виде

$$j_\nu = I_{\nu p} \kappa_\nu \left(1 - \exp \left(-\frac{h\nu}{kT} \right) \right). \quad (2.21)$$

Испускательная способность во всех направлениях равна

$$J_\nu = 4\pi j_\nu = cU_{\nu p} \kappa_\nu \left(1 - \exp \left(-\frac{h\nu}{kT} \right) \right). \quad (2.22)$$

Закон Кирхгофа представляет собой выражение общего принципа детального равновесия применительно к процессам испускания и поглощения света. Он позволяет вычислять лучеиспускательную способность вещества, если известен его коэффициент поглощения (и наоборот).

Существование процессов вынужденного испускания, т.е. таких переходов возбужденного атома, вероятность которых зависит от числа «частиц» — фотонов, уже имеющихся в конечном состоянии системы атом плюс фотон, характерно для процессов с участием фотонов — «частиц», подчиняющихся квантовой статистике Бозе. Именно благодаря существованию таких процессов функция распределения фотонного газа отличается от функции распределения газа, подчиняющегося классической статистике Больцмана, где число частиц с энергией ε пропорционально $e^{-\varepsilon/kT}$, а не $(e^{\varepsilon/kT} - 1)^{-1}$, как для фотонов ($\varepsilon = h\nu$).

Чтобы пояснить это положение, рассмотрим простейший случай, когда атом обладает двумя энергетическими уровнями, ε_1 и ε_2 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), переход из верхнего энер-

¹⁾ Фазовый объем, соответствующий элементу $d\nu d\Omega d\mathbf{r}$, в котором находится $f d\nu d\Omega d\mathbf{r}$ квантов, есть $d\mathbf{p} d\mathbf{r}$, где $d\mathbf{p}$ — элемент объема в пространстве импульсов. Поскольку импульс кванта равен $\mathbf{p} = h\nu\boldsymbol{\Omega}/c$, $d\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega = h^3 \nu^2 d\nu d\Omega / c^3$. Число фазовых ячеек в элементе фазового пространства $d\mathbf{p} d\mathbf{r}$ равно $d\mathbf{p} d\mathbf{r} / h^3$ и, следовательно, число фотонов в одной ячейке равно $f d\nu d\Omega d\mathbf{r} h^3 / d\mathbf{p} d\mathbf{r} = c^3 f / \nu^2 = c^2 I_\nu / h\nu^3$. Число фотонов с определенным направлением поляризации равно половине этого числа, т.е. $c^2 I_\nu / 2h\nu^3$.

гетического состояния в нижнее сопровождается испусканием кванта $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, а переход из нижнего в верхнее — поглощением кванта $h\nu$. Вероятность поглощения, т. е. κ_ν , пропорциональна числу атомов в нижнем энергетическом состоянии, которое по закону Больцмана пропорционально $e^{-\varepsilon_1/kT}$. Вероятность самопроизвольного испускания j_ν пропорциональна числу атомов в верхнем энергетическом состоянии, т. е. $e^{-\varepsilon_2/kT}$.

Предположим, что вынужденного испускания не существует. Тогда в равновесии число актов самопроизвольного испускания квантов $h\nu$ было бы равно числу актов поглощения, т. е. вместо формул (2.20) или (2.21) имели бы место равенства

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = I_{\nu p}, \quad j_\nu = I_{\nu p} \kappa_\nu, \quad (2.23)$$

но $j_\nu \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_2}{kT}\right)$, $\kappa_\nu \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon_1}{kT}\right)$, так что

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = I_{\nu p} = \text{const} \exp\left(-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT}\right) = \text{const} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Иначе говоря, для интенсивности равновесного излучения, или, что то же самое, для функции распределения квантов мы получили бы закон Больцмана, как и для «обычных» частиц. На самом деле, закон Больцмана справедлив только для больших квантов $h\nu \gg kT$ в виновской области.

Только с учетом процессов вынужденного испускания рассмотрение баланса испускания и поглощения квантов приводит к формуле Планка для функции распределения фотонов. В нашем примере атома с двумя энергетическими уровнями мы получим при этом

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{I_{\nu p}}{1 + \frac{c^2 I_{\nu p}}{2h\nu^3}} = \text{const} \exp\left(-\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{kT}\right) = \text{const} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right),$$

откуда и следует формула Планка для интенсивности $I_{\nu p}$ (при $\text{const} = 2h\nu^3/c^2$).

Из проведенного рассуждения следует, что роль вынужденного испускания по сравнению с самопроизвольным в условиях равновесия стремится к нулю при $h\nu/kT \rightarrow \infty$, т. е. в виновской области спектра. Это видно и непосредственно из формулы (2.19), если учесть, что при равновесии, в пределе $h\nu/kT \rightarrow \infty$,

$$I_\nu = I_{\nu p} \sim \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \rightarrow 0.$$

Наоборот, в рэлей-джинсовской области спектра, где $h\nu \ll kT$, относительная роль вынужденного испускания велика: в формуле (2.19)

$$1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_{\nu p} = 1 + \frac{1}{\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \approx 1 + \frac{kT}{h\nu},$$

так что отношение вероятностей вынужденного и спонтанного испусканий равно $kT/h\nu \gg 1$.

Следует отметить, что в случае, когда поле излучения неравновесно, изложенные соображения о сравнительной роли самопроизвольного и вынужденного испусканий, вообще говоря, несправедливы, так как вынужденное испускание пропорционально фактической интенсивности излучения, которая в отсутствие равновесия может быть произвольной.

§ 4а. Вынужденное излучение в классической и квантовой теориях и лазерный эффект. Явление вынужденного излучения в последние годы привлекает большое внимание потому, что оно лежит в основе действия мазеров и лазеров. Для того чтобы пояснить физический смысл этого явления, остановимся кратко на его классической трактовке. Как известно, в классике излучающий атом представляется упруго связанным электроном — гармоническим осциллятором. Пусть на осциллятор действует вынуждающая сила — электрическое поле световой волны, причем частота волны совпадает с собственной частотой осциллятора. Если в начальный момент осциллятор покоился, то под действием поля осциллятор начнет резонансно раскачиваться, амплитуда колебаний будет возрастать $\sim t$, а энергия $\sim t^2$. Однако если в начальный момент осциллятор обладал определенной энергией, то сила, действующая с резонансной частотой, может раскачивать осциллятор еще сильнее, а может и, наоборот, гасить его колебания, так что осциллятор будет терять энергию. Это зависит от соотношения фаз колебания и переменной силы. Подчеркнем при этом, что для отбора энергии от осциллятора резонансный характер силы также необходим, как и для раскачки осциллятора.

В этом, классическом по существу явлении резонансного отбора энергии от осциллятора, и лежит основа для понимания индуцированного излучения.

Осциллятор, обладающий энергией и помещенный в поле световой волны в соответствующей фазе, будет отдавать свою энергию, которая пойдет именно на усиление проходящей световой волны; такой осциллятор будет увеличивать энергию когерентной волны. На классическом языке можно сказать, что электрическое поле осциллятора E_s складывается с полем волны E_0 . Поле осциллятора соответствующим образом распределено по углам. Но поток энергии пропорционален квадрату поля. Поэтому поток энергии осциллятора в направлении проходящей волны пропорционален $E_s E_0$ и тем больше, чем больше E_0 : этот результат соответствует тому, что интенсивность индуцированного излучения растет с увеличением интенсивности вызывающей его волны. Однако в этой классической картине есть изъян, который и приводит к неправильному виду формул. В классической теории совокупность осцилляторов с произвольными фазами в среднем всегда больше поглощает энергии, чем индуцировано испускает ее.

Правильные результаты дает только квантовомеханическое рассмотрение вопроса. Обратимся к квантовой трактовке воздействия на гармонический осциллятор. Чрезвычайно важен тот факт, что энергетические уровни гармонического осциллятора находятся друг от друга на одинаковом расстоянии (равном $h\nu$, где ν — собственная частота). Осциллятор, находящийся на n -м уровне, под действием резонансной силы может перейти и на $(n+1)$ -й и на $(n-1)$ -й уровни. При этом переход в верхнее $(n+1)$ -е состояние с поглощением энергии более вероятен, чем переход в нижнее $(n-1)$ -е состояние с отдачей энергии. Как известно из квантовой механики, отношение вероятностей этих переходов равно $(n+1)/n$. Это и означает, что совокупность гармонических осцилляторов в среднем поглощает свет.

Для лазерного действия, т.е. для преобладания индуцированного излучения, решающую роль играет ангармоничность осциллятора, т.е. нарушение эквидистантности уровней, когда энергетические расстояния между соседними уровнями становятся неодинаковыми. Если расстояния между уровнями разные, то существует такая частота, которая является резонансной для перехода $n \rightarrow n-1$, но не резонансна для перехода $n \rightarrow n+1$. Тогда ясно, что осциллятор в n -м состоянии под действием света частоты ν будет только отдавать энергию.

Это и есть та ситуация, когда при инверсной заселенности уровней (заполнен n -й уровень, но не заполнен $(n - 1)$ -й) возникает отдача энергии, или отрицательное поглощение волны, т. е. возникают условия для генерации лазера ¹⁾.

Совокупность N атомов с двумя уровнями каждый (и не взаимодействующих между собой, например атомов хрома в решетке рубина) тоже можно рассматривать как единую систему с эквидистантными уровнями: энергия $E_n = nh\nu$, где n — число возбужденных атомов.

В отличие от осциллятора, у которого спектр энергетических состояний не ограничен сверху (и статистический вес всех состояний одинаков), здесь спектр ограничен не только снизу ($n = 0, E_n = 0$), но и сверху: $E_{\max} = Nh\nu$.

Статистический вес различных n различен, максимум статистического веса достигается посередине, при $n = N/2$. Этим и объясняется тот факт, что у такой системы поглощение преобладает при $n < N/2$, а индуцированное излучение преобладает при $n > N/2$ ²⁾.

Как говорилось в начале этого параграфа, само понятие индуцированного излучения имеет вполне наглядный классический смысл. Как и следовало ожидать, индуцированное излучение может быть полностью описано уравнениями Ньютона и Максвелла: недаром формула Рэлея–Джинса (2.12) для спектральной плотности в области низких частот не содержит постоянной Планка, а ведь для квантового вывода формулы Рэлея–Джинса учет индуцированного излучения необходим.

После открытия лазеров, приковавших внимание физиков к явлению индуцированного излучения, оказалось, что в терминах поглощения и индуцированного излучения удобно описывать ряд процессов.

Замечательный пример представляет собой рассеяние электронов на стоячей световой волне. Это явление было предсказано П. Л. Капицей и П. А. М. Дираком [11] более 30 лет назад. Монохроматическая световая волна, отражаясь от зеркала, создает в пространстве периодически расположенные области, в которых электрическое поле мало (узлы) и в которых оно велико (пучности). Электроны должны рассеиваться под определенными «брэгговскими» углами так же, как электроны рассеиваются периодическим полем кристаллической решетки. Этот эффект удалось наблюдать [12] лишь в самое последнее время благодаря использованию мощного монохроматического светового импульса от лазера. Рассеяние электрона полем стоячей волны можно описать количественно в новых терминах как «индуцированный комптон-эффект».

В самом деле, комптон-эффект есть процесс взаимодействия кванта γ с электроном e :

$$\gamma + e = \gamma' + e'.$$

¹⁾ Любопытно, что с вопросом о роли ангармоничности мы встречаемся при рассмотрении излучения электронов в магнитном поле. В нерелятивистском приближении электрон вращается с постоянной частотой. Этому соответствует тот факт, что квантовые уровни энергии поперечного движения электрона в магнитном поле эквидистантны.

Ни при каком распределении по энергии в магнитном поле в этом приближении не могут возникнуть отрицательный коэффициент поглощения и генерация когерентного света.

Учет релятивистских поправок создает отклонения от эквидистантности и одновременно появляется возможность таких энергетических распределений электронов, которые дают генерацию.

²⁾ Укажем работу [9], в которой лазерный эффект рассматривается на основе полуклассических представлений и работу [10], где сопоставляются квантовая и полуклассическая точки зрения.

При заданных значениях энергии и импульса кванта и электрона до рассеяния законы сохранения допускают любое направление (в системе центра инерции) кванта γ' и электрона e' после рассеяния. Таким образом, в обычных условиях комптон-эффекта получается статистическое распределение электронов по направлениям. Вернемся к рассеянию электрона на стоячей волне. Стоячая волна представляет собой суперпозицию падающей γ_1 и отраженной γ_2 волн. Значит, комптоновское рассеяние может происходить:

$$\gamma_1 + e = e' + \gamma_3, \quad \gamma_2 + e = e'' + \gamma_4.$$

Но при большой мощности светового потока в соответствии с законом индуцированного излучения появляется вероятность излучить квант, совпадающий с уже имеющимися квантами, т. е. возможны процессы

$$\gamma_1 + e = e_{12} + \gamma_2, \quad \gamma_2 + e = e_{21} + \gamma_1,$$

которые естественно назвать индуцированным комптон-эффектом. Поскольку заданы направление и частота обоих квантов, т. е. их энергия и импульс (и до и после рассеяния), то полностью определено изменение направления электрона. Энергия электрона, очевидно, не изменяется. Более того, из законов сохранения следует, что процесс возможен лишь при определенном импульсе падающего электрона. Таким образом, все закономерности дифракционного рассеяния необычайно наглядно получаются из представления об индуцированном комптон-эффекте.

В этом примере реализуется важный общий принцип: всякое воздействие на систему внешней периодической силы в терминах квантовой механики обязательно нужно рассматривать как совокупность процессов поглощения и индуцированного испускания системой соответствующих квантов энергии. Это относится и к задачам, в которых внешнюю силу можно рассматривать как классическую: мы можем в этом случае игнорировать обратное воздействие системы на силу (в приведенном выше примере — воздействие электрона на поле стоячей волны). Однако и при классическом понимании силы ее действие на квантовую систему надо — или можно — рассматривать как поглощение и испускание квантов ¹⁾. Классичность силы означает, что индуцированное излучение квантов с частотой, заданной внешней силой, гораздо больше спонтанного излучения любых других квантов, отличающихся по частоте, направлению или поляризации.

При периодическом внешнем воздействии гамильтониан системы уже нельзя считать не зависящим от времени, однако он обладает свойством периодичности $H(t) = H(t + nT)$, а значит, должны существовать и такие решения, которые по истечении каждого периода действующей силы снова превращаются в такие же решения, умноженные на фазовый множитель:

$$\psi_k(t + T) = a_k \psi(t), \quad |a_k| = 1, \quad a_k = e^{i\alpha_k}.$$

Введем понятие квазиэнергии ε_k :

$$\alpha_k = 2\pi\varepsilon_k T/h, \quad \psi_k(t + nT) = \exp(i2\pi\varepsilon_k nT/h) \psi(t).$$

Это понятие находится в таком же соотношении с энергией, как квазиимпульс электрона в пространственно-периодической решетке и импульс электрона в собственном смысле.

¹⁾ Отметим работу Л. В. Келдыша [13], в которой используются точные волновые функции электрона в поле классической световой волны.

Таким образом, можно развить стройную теорию систем, находящихся под воздействием периодических внешних сил. Согласно сказанному выше это одновременно будет теорией явлений поглощения и индуцированного испускания.

Второй пример применения понятия об индуцированном излучении представляет собой теория гармонического осциллятора.

Хорошо известно, что ширина спектральной линии, излучаемой при переходе из состояния A в состояние B , есть сумма ширин Γ_A и Γ_B общих этих состояний. Применительно к осциллятору, у которого матричный элемент перехода из n -го в $(n-1)$ -е состояние пропорционален $\sqrt{n}$, найдем $\Gamma_n = kn$, $\Gamma_{n-1} = k(n-1)$. Отсюда следует вывод, что ширина линии, испускаемой при переходе из n -го в $(n-1)$ -е состояние, пропорциональна $(2n-1)$. Между тем в классической теории ширина линии, испускаемой гармоническим осциллятором, не зависит от его амплитуды. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды ¹⁾, следовательно, энергия осциллятора убывает экспоненциально: $E \sim e^{-\gamma t}$, амплитуда его колебаний также убывает экспоненциально: $x = a_0 e^{-\gamma t/2} \cos 2\pi \nu t$. Разложение этого выражения в интеграл Фурье дает лоренцовскую форму линии (см. гл. V)

$$|b(\nu)|^2 \sim \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma_0/4\pi)^2}$$

с шириной, не зависящей от амплитуды. Парадокс, заключающийся в кажущемся несогласии выводов классической и квантовой теорий для больших квантовых чисел, был замечен еще Вайсскопфом и Вигнером, а также Паули на рубеже 30-х годов (см. [14]). В работе [14] показано, что парадокс связан со специфическим свойством гармонического осциллятора — с эквидистантностью его уровней, т. е. со строгим совпадением частот, излучаемых при переходах между любой парой соседних уровней. В [14] рассматриваются три состояния A, B, C , каскадно испускающие два кванта $A \xrightarrow{h\nu_1} B \xrightarrow{h\nu_2} C$. Если эквидистантности нет: $E_A - E_B \neq E_B - E_C$, то $\nu_1 \neq \nu_2$ и для линии ν_1 получается обычный ответ: ее ширина пропорциональна $\Gamma_A + \Gamma_B$.

Однако в случае эквидистантности (например, если C есть нижний нулевой, B — первый и A — второй уровни гармонического осциллятора) положение осложняется, испускание двух квантов, не отличающихся по частоте, может пойти и по второму каналу:

$$A \xrightarrow{h\nu_2} B \xrightarrow{h\nu_1} C.$$

Для вычисления вероятности всего процесса испускания двух квантов нужно сложить амплитуды по обоим каналам; при этом меняются ширина и форма линии. По современной терминологии можно сказать, не различая номера (1-й, 2-й) квантов, что квант, испущенный при переходе $A \rightarrow B$, вызывает индуцированное излучение при переходе $B \rightarrow C$ ²⁾. Гармонический осциллятор в состоянии с большими квантовыми числами излучает каскад квантов; при этом роль индуцированного излучения по сравнению со спонтанным тем больше, чем больше средний номер состояния n . Здесь речь идет об излучении, индуцированном не внешним излучением, а собственным излучением осциллятора.

Только такое рассмотрение всего каскада с учетом индуцированного излучения приведет к результатам, согласующимся с классической теорией.

¹⁾ Следовательно, время, нужное для излучения одного кванта энергии, обратно пропорционально энергии самого осциллятора; вывод из величины матричного элемента, относящийся к вероятности излучения, не подвергается сомнению.

²⁾ Эту точку зрения подтверждает и тот факт, что согласно [14] спектр меняется, когда оба кванта испущены в одном направлении.

В каждый данный момент состояние осциллятора представляется суперпозицией многих возбужденных уровней. Существенно также, что при индуцированных переходах получаются определенные фазовые соотношения между последовательными уровнями, состояние системы нельзя задать одними вероятностями разных уровней. Это и естественно: в классической картине электрон локализован. Очевидно, что для описания локализованного электрона нужно взять суперпозицию некоторого числа собственных функций (притом тем большего числа, чем точнее локализация) и обязательно в определенных фазовых соотношениях. Является ли эта ситуация только логически-математическим курьезом, относящимся к идеализированному случаю строго гармонического осциллятора? Каков критерий применения привычных представлений о дискретных квантовых скачках? Сами дискретные уровни можно рассматривать постольку, поскольку ширина уровня Γ_n , связанная со спонтанным излучением, меньше расстояния между уровнями, т. е. меньше частоты перехода:

$$\Gamma_n < \nu_{n,n-1} = \frac{E_n - E_{n-1}}{h}.$$

Критерий применимости обычных представлений о ширине без учета индуцированного излучения имеет иной вид — ширина должна быть меньше разности частот:

$$\Gamma_n < \nu_{n,n-1} - \nu_{n-1,n-2} = \frac{E_n - 2E_{n-1} + E_{n-2}}{h}.$$

Было бы весьма интересно экспериментально наблюдать эффекты «внутреннего» индуцированного излучения на высоких колебательных уровнях молекул.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что понятие индуцированного излучения помогает по-новому интерпретировать многие факты и парадоксы; это понятие является неотъемлемой частью интерпретации квантовой механики.

§ 5. Уравнение переноса излучения. Составим кинетическое уравнение для функции распределения квантов данной частоты. Поскольку эта функция с точностью до постоянного множителя $h\nu c$ совпадает с интенсивностью излучения, можно писать уравнение прямо для интенсивности. В такой форме кинетическое уравнение обычно называют уравнением переноса излучения.

Будем интересоваться излучением частоты ν в единичном интервале частот, распространяющимся внутри единичного телесного угла в определенном направлении Ω . Рассмотрим баланс излучения в элементарном цилиндре с площадью основания $d\sigma$ и высотой ds , расположенном в данной точке пространства таким образом, что направление Ω совпадает с образующей цилиндра и перпендикулярно к его основаниям (рис. 2.4). За время dt в левое основание втекает количество излучения, равное $I_\nu(\Omega, r, t) d\sigma dt$. Из правого основания за тот же промежуток времени dt вытекает количество излучения $(I_\nu + dI_\nu) d\sigma dt$.

Интенсивность I_ν есть функция координат и времени. Приращение интенсивности пучка света при переходе от левого основания к правому складывается из локального приращения за время прохождения светом пути ds и из приращения при переходе от координаты s к координате $s + ds$ в данный момент времени:

$$dI_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{ds}{c} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds.$$

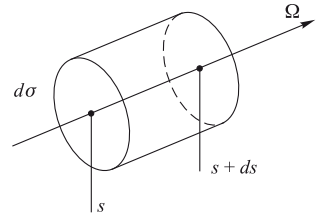


Рис. 2.4. К выводу уравнения переноса излучения

Изменение интенсивности пучка происходит вследствие испускания и поглощения света с рассматриваемыми характеристиками в нашем цилиндре. (В соответствии с замечанием, сделанным в конце § 2, рассеянием света мы пренебрегаем.) Количество излучения, испущенного в цилиндре за время dt , согласно формуле (2.19) равно

$$j_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) d\sigma ds dt.$$

Поглощается в нем за то же время количество излучения $\kappa_\nu I_\nu d\sigma ds dt$. Составляя баланс и поделив полученное выражение на произведение дифференциалов $d\sigma ds dt$, получим уравнение

$$\frac{1}{c} \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c \mathbf{\Omega} \nabla I_\nu \right) = j_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa_\nu I_\nu. \quad (2.24)$$

Мы здесь заменили в левой части частную производную вдоль направления $\partial I_\nu / \partial s$ эквивалентным векторным выражением $\mathbf{\Omega} \nabla I_\nu$.

Комбинация в скобках в левой части представляет собой просто «субстанциональную» производную от интенсивности по времени, т. е. производную по времени от интенсивности данного пакета квантов (ср. с уравнением движения в гидродинамике (1.6)).

Преобразуем правую часть уравнения (2.24), объединив вместе члены, отвечающие поглощению и вынужденному испусканию, поскольку они оба пропорциональны неизвестной функции координат и времени — интенсивности излучения. Введем при этом в множитель перед I_ν в члене вынужденного испускания вместо коэффициента излучения j_ν его выражение через коэффициент поглощения (2.21), в которое подставим формулу (2.11) для равновесной интенсивности. Правая часть уравнения примет вид

$$j_\nu - \kappa_\nu \left(1 - e^{-h\nu/kT} \right) I_\nu. \quad (2.25)$$

Отсюда видно, что вынужденное испускание можно трактовать как некое уменьшение поглощения: часть квантов как бы поглощается и тут же испускается снова с той же частотой и в том же направлении, причем вероятность этого «переизлучения» равна $e^{-h\nu/kT}$. Физически такие акты «переизлучения» никак себя не проявляют и их можно вообще исключить из рассмотрения, если считать, что коэффициент поглощения имеет несколько меньшую величину:

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu \left(1 - e^{-h\nu/kT} \right). \quad (2.26)$$

Взаимодействие излучения с веществом можно представлять так, как будто существуют только спонтанное испускание и эффективное поглощение, описываемое коэффициентом κ'_ν , исправленным на вынужденное испускание.

В новой трактовке закон Кирхгофа (2.21) приобретает форму

$$j_\nu = \kappa'_\nu I_{\nu p}, \quad \kappa'_\nu = \kappa_\nu \left(1 - e^{-h\nu/kT} \right). \quad (2.27)$$

Вводя это выражение в правую часть уравнения переноса (2.24), запишем уравнение в следующей, окончательной форме:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \nabla I_\nu = \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu). \quad (2.28)$$

Проинтегрируем уравнение (2.28) по всем направлениям Ω (по телесному углу). Вспомяная определения плотности и потока излучения (2.1), (2.2), получим

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}_\nu = c\kappa'_\nu (U_{\nu p} - U_\nu). \quad (2.29)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение непрерывности для излучения данной частоты. Оно выражает закон сохранения энергии излучения и вполне аналогично уравнению энергии в гидродинамике, записанному в «дивергентной» форме (1.10).

Уравнение переноса излучения (2.28) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных относительно интенсивности, как функции координат, времени и направления $I_\nu(r, t, \Omega)$ и описывает поле неравновесного излучения. Обычно термодинамическое равновесие в самом веществе устанавливается весьма быстро, так что вещество можно считать термодинамически равновесным в каждой точке пространства и в каждый момент времени. Состояние вещества при этом характеризуется двумя параметрами, например температурой и плотностью. Уравнение переноса излучения включает в себя величины, зависящие от рода и состояния вещества: коэффициент поглощения κ'_ν , который зависит от свойств вещества, его температуры и плотности, и равновесную интенсивность $I_{\nu p}$, которая есть функция только температуры. Уравнение (2.28) описывает, в частности, и процесс установления равновесия излучения с веществом во времени.

Представим себе неограниченную среду с постоянной плотностью, первоначально холодную, так что излучения нет. Пусть в начальный момент $t = 0$ вещество «мгновенно» было нагрето до постоянной температуры T , которая затем поддерживается неизменной во времени. Посмотрим, как меняется со временем интенсивность излучения. Очевидно, пространственные градиенты в этом случае равны нулю, $\kappa'_\nu = \text{const}$, $I_{\nu p} = \text{const}$. Решение уравнения (2.28) в этом случае имеет вид

$$I_\nu(t) = I_{\nu p} (1 - e^{-c\kappa'_\nu t}), \quad (2.30)$$

т.е. интенсивность излучения асимптотически стремится к равновесной, причем время релаксации для установления равновесия излучения с веществом равно $t_p = 1/c\kappa'_\nu = l'_\nu/c = l_\nu/(1 - e^{-h\nu/kT})c$. Например, при $l_\nu = 1$ см в максимуме планковского спектра $h\nu = 2,8kT$, $t_p = 3 \cdot 10^{-11}$ с.

§ 6. Интегральные выражения для интенсивности излучения. Найдем формальное решение уравнения переноса излучения, рассматривая величины, зависящие только от состояния вещества $I_{\nu p}(T)$, $\kappa'_\nu(T, \rho)$, как известные функции координат и времени. Рассмотрим сначала для простоты стационарный случай, когда распределения температуры и плотности, а также поле излучения не зависят от времени. Будем интересоваться излучением в точке $\mathbf{r}$ тела с направлением распространения Ω (рис. 2.5). Проведем луч через данную точку в данном направлении и обозначим координату вдоль луча через s . Замечая, что дифференциальное выражение в левой части уравнения переноса (2.28) представляет собой полную производную от интенсивности данного пакета квантов вдоль луча их распространения, перепишем уравнение в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} + \kappa'_\nu I_\nu = \kappa'_\nu I_{\nu p}. \quad (2.31)$$

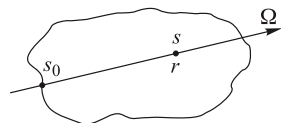


Рис. 2.5. Схема, поясняющая пределы интегрирования в формуле (2.32)

Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное линейное уравнение относительно интенсивности вдоль луча. Решение его есть

$$I_\nu(s) = \int_{s_0}^s \mathcal{K}'_\nu I_{\nu p} \exp \left[- \int_{s'}^s \mathcal{K}'_\nu ds'' \right] ds' + I_{\nu 0} \exp \left[- \int_{s_0}^s \mathcal{K}'_\nu ds'' \right]. \quad (2.32)$$

Здесь $I_\nu(s)$ — интенсивность $I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)$, которая рассматривается как функция координаты s вдоль луча. Интегрирование по лучу ведется, вообще говоря, от « $-\infty$ », а фактически от границы тела s_0 (как показано на рис. 2.5). Через $I_{\nu 0}$ обозначена константа интегрирования. Выясним физический смысл полученного решения.

Излучение, протекающее в единицу времени через площадку единичного сечения в точке s луча (на единицу телесного угла), складывается из всех квантов, рожденных в трубке единичного сечения вдоль луча. В точке s' на отрезке луча ds' рождается количество излучения $j_\nu ds' = \mathcal{K}'_\nu I_{\nu p} ds'$, которое распространяется вдоль луча Ω в единице телесного угла. От точки s' до точки s доходит только

доля $\exp \left[- \int_{s'}^s \mathcal{K}'_\nu ds'' \right]$ этого излучения; остальное поглощается по пути. Полная

интенсивность $I_\nu(s)$ складывается из квантов, рожденных на всех элементарных отрезках ds' , т.е. равна интегралу по лучу. Если излучающее тело имеет ограниченные размеры, то интегрировать следует фактически от границы тела s_0 до точки s . Таким образом, получается первое слагаемое в (2.32). Второе слагаемое представляет собой излучение, вошедшее в тело на границе s_0 извне, от каких-то внешних, посторонних источников. Постоянная интегрирования $I_{\nu 0}$ есть интенсивность этого входящего

в тело излучения. Множитель $\exp \left[- \int_{s_0}^s \mathcal{K}'_\nu ds'' \right]$ учитывает ослабление его по пути от

s_0 до s вследствие поглощения. Коэффициент поглощения $\mathcal{K}'_\nu$ и равновесная интенсивность $I_{\nu p}$ зависят от точки вдоль луча благодаря зависимости от температуры и плотности вещества, которые каким-то образом распределены вдоль луча. Если эти функции известны, то нахождение интенсивности в любой точке тела сводится, как видно из формулы (2.32), просто к квадратуре — интегрированию вдоль луча.

Обобщим решение (2.32) на нестационарный случай, когда температура и плотность, а следовательно, $I_{\nu p}$, $\mathcal{K}'_\nu$ и искомая интенсивность I_ν зависят от времени. Очевидно, к моменту t в точку s приходят из точки s' кванты, рожденные в более ранний момент времени $t - \frac{s-s'}{c}$. Точно так же на своем пути они поглощаются веществом в точке s'' в соответствии со значением коэффициента поглощения в момент прохождения этой точки $t - \frac{s-s''}{c}$. Поэтому нестационарное решение уравнения переноса можно записать в виде

$$I_\nu(s, t) = \int_{s_0}^s (\mathcal{K}'_\nu I_{\nu p})_{s', t - \frac{s-s'}{c}} \exp \left[- \int_{s'}^s (\mathcal{K}'_\nu)_{s'', t - \frac{s-s''}{c}} ds'' \right] ds' + (I_{\nu 0})_{s_0, t - \frac{s-s_0}{c}} \exp \left[- \int_{s_0}^s (\mathcal{K}'_\nu)_{s'', t - \frac{s-s''}{c}} ds'' \right], \quad (2.33)$$

причем само значение граничной координаты s_0 берется в момент $t - \frac{s - s_0}{c}$. Легко проверить непосредственной подстановкой, что выражение (2.33) действительно удовлетворяет нестационарному уравнению переноса. Из формул (2.32) или (2.33) видно, что вклад далеких источников в сильно поглощающей среде в интенсивность в данной точке экспоненциально падает с возрастанием расстояния. До точки s доходят кванты, рожденные только в ближайшей окрестности точки на расстояниях не более нескольких пробегов излучения или, точнее, на оптических расстояниях не более нескольких единиц. Это утверждение делается особенно наглядным, если коэффициент поглощения постоянен вдоль луча. Тогда экспоненциальные множители приобретают вид

$$\exp \left[- \int_{s'}^s \kappa'_{\nu} ds'' \right] = \exp [-\kappa'_{\nu}(s - s')] = \exp \left[-\frac{s - s'}{l'_{\nu}} \right]; \quad l'_{\nu} = \frac{l}{\kappa'_{\nu}}.$$

Исключение, в принципе, может составить лишь случай чрезвычайно резкого хода температуры, когда возрастание лучеиспускательной способности $j_{\nu} = \kappa'_{\nu} I_{\nu p}$ при удалении от точки сказывается сильнее, чем поглощение по пути при увеличении пройденного расстояния. Однако практически это почти никогда не случается, и основной вклад в интегралы (2.32), (2.33) дает отрезок луча около рассматриваемой точки величиной порядка нескольких (двух-трех) пробегов излучения. Но свет проходит такое расстояние за весьма малое время l'_{ν}/c , которое, как правило, намного меньше характерных времен, в течение которых происходит заметное изменение состояния вещества (температуры и плотности); например, при длине пробега $l'_{\nu} = 3$ см время $l'_{\nu}/c = 10^{-10}$ с. Оно гораздо меньше характерных времен, с которыми приходится иметь дело в обычных гидродинамических течениях. Это связано с тем, что обычно скорости вещества гораздо меньше, чем скорость света.

Отмеченное обстоятельство является весьма существенным. Оно означает, что практически во всех случаях поле излучения в каждый момент времени можно рассматривать как квазистационарное, соответствующее мгновенному распределению источников испускания и поглощения, т. е. распределению температуры и плотности вещества.

В уравнении переноса излучения, следовательно, можно опустить производную от интенсивности по времени и рассматривать время как параметр, от которого зависят температура и плотность вещества, т. е. $I_{\nu p}$ и κ'_{ν} . В дальнейшем мы всегда будем исходить из такого упрощенного уравнения переноса,

$$\Omega \nabla I_{\nu} = \kappa'_{\nu}(I_{\nu p} - I_{\nu}), \quad (2.34)$$

или его решения в форме (2.32).

§ 7. Излучение плоского слоя. Вообще говоря, перенос излучения и лучистый теплообмен влияют на состояние вещества, на его движение или на распределение температуры в стационарном состоянии. Это влияние связано с тем, что, испуская и поглощая свет, вещество теряет или приобретает энергию, охлаждается или нагревается. В общем случае состояние вещества описывается уравнениями гидродинамики, которые при наличии лучистого теплообмена следует обобщить, учитывая взаимодействие излучения с веществом. Поскольку перенос излучения сам зависит от состояния вещества, его температуры и плотности, то в общем случае система уравнений, описывающих вещество и излучение, состоит из соответствующим образом обобщенных уравнений гидродинамики и уравнения переноса излучения.

Во многих случаях, однако, «обратное» влияние излучения на состояние вещества невелико, либо же может быть учтено каким-нибудь приближенным способом.

Например, при достаточно низких температурах лучистый теплообмен или потери энергии тела на излучение несущественны. При этом состояние вещества практически не зависит от излучения, задачи нахождения поля излучения и описание состояния вещества разделяются. Состояние вещества описывается, например, уравнениями гидродинамики, а поле излучения можно найти в каждый момент на основании известных распределений температуры и плотности и известных коэффициентов поглощения.

Как правило, практический интерес в этом случае представляет определение не всего поля излучения в среде (поскольку оно все равно не влияет на состояние среды), а нахождение излучения, выходящего с поверхности тела, т. е. вопрос о свечении нагретого тела, о яркости его поверхности, спектре излучения, распределении потока по углам и т. д.

Если известны оптические свойства вещества, т. е. коэффициент поглощения κ'_ν ¹⁾ как функция частоты, температуры и плотности и распределения температуры и плотности в теле, то ответ на все эти вопросы содержится в интегральной формуле для интенсивности (2.32).

Интересуясь излучением, выходящим с поверхности тела, можно, не нарушая общности, отсчитывать координату вдоль луча s от поверхности в глубь тела и распространить интегрирование по лучу до бесконечности:

$$I_\nu(\Omega) = \int_0^\infty I_{\nu p}[T(s)] \exp\left(-\int_0^s \kappa'_\nu ds'\right) \kappa'_\nu(s) ds. \quad (2.35)$$

Если тело ограничено, то вне его пределов коэффициент поглощения равен нулю и соответствующий отрезок интегрирования выпадает. Если тело ограничено, но извне с «задней» стороны в него проникает поток излучения, то, распространяя интегрирование по лучу до бесконечности, мы тем самым включаем в интеграл эти «посторонние» источники света.

Рассмотрим несколько простых примеров, представляющих практический интерес. Пусть тело занимает бесконечное полупространство $x > 0$ ограничено плоской поверхностью. Температура тела постоянна, коэффициент же поглощения может меняться произвольным образом от точки к точке (но так, чтобы оптическая толщина тела $\int_0^\infty \kappa'_\nu ds$ была бесконечной).

В этом случае интенсивность излучения у поверхности тела равна просто $I_{\nu p}(T)$, так как

$$I_\nu(\Omega) = \int_0^\infty I_{\nu p} e^{-z} dz = I_{\nu p}; \quad dz = \kappa'_\nu ds, \quad z = \int_0^s \kappa'_\nu ds.$$

Тело излучает как абсолютно черное температуры T .

Интенсивность I_ν есть количество лучистой энергии, проходящей в 1 с в единице телесного угла через единичную площадку, помещенную перпендикулярно к направлению движения квантов²⁾. Для черного излучателя она не зависит от угла. Количество лучистой энергии, выходящей в 1 с через 1 см² поверхности под углом

¹⁾ Напоминаем, что мы рассматриваем здесь только среды с показателем преломления, равным единице, каковыми являются газы.

²⁾ Размерность I_ν есть энергия/см² · с · ср · частота = эрг/см² · ср.

θ к нормали, на единицу телесного угла (назовем эту величину испускательной способностью тела i_ν ¹⁾ равно

$$i_\nu = I_\nu(\theta) \cos \theta. \quad (2.36)$$

Для черного излучателя

$$i_\nu = I_{\nu p} \cos \theta. \quad (2.37)$$

Рассмотрим излучение плоского слоя конечной толщины d с постоянными температурой T и коэффициентом поглощения κ'_ν .

Интенсивность излучения у поверхности в направлении, образующем угол θ с нормалью (рис. 2.6), равна

$$\begin{aligned} I_\nu(\theta) &= \int_0^{d/\cos \theta} I_{\nu p} \exp\left(-\frac{\kappa'_\nu x}{\cos \theta}\right) \kappa'_\nu \frac{dx}{\cos \theta} = \int_0^{\kappa'_\nu d/\cos \theta} I_{\nu p} \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau_\nu}{\cos \theta} = \\ &= I_{\nu p} \left(1 - \exp\left(-\frac{\kappa'_\nu d}{\cos \theta}\right)\right) = I_{\nu p} \left(1 - \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\cos \theta}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $\tau_\nu = \int_0^d \kappa'_\nu dx$ — оптическая толщина слоя в направлении нормали к поверхности.

Из формулы (2.38) видно, что интенсивность излучения слоя конечной толщины всегда меньше равновесной. Спектр отличается от планковского $I_{\nu p}(T)$ множителем $1 - \exp(-\tau_\nu/\cos \theta)$. Этот множитель зависит от частоты благодаря частотной зависимости коэффициента поглощения. Он стремится к 1 лишь при $d \rightarrow \infty$. Наиболее резко выражено отличие интенсивности от планковской в направлении нормали к поверхности, в котором отрезок луча с источниками минимален (равен d). Спектр стремится к планковскому при больших углах к нормали, когда $\theta \rightarrow \pi/2$, $\cos \theta \rightarrow 0$. В зависимости от толщины слоя d наибольшее отличие спектра от планковского должно наблюдаться в пределе оптически тонкого слоя, т.е. под такими углами, что $\kappa'_\nu d/\cos \theta \ll 1$. Разлагая в этом случае экспоненту, найдем с точностью до членов второго порядка малости:

$$I_\nu = I_{\nu p} \frac{\kappa'_\nu d}{\cos \theta} \ll I_{\nu p}. \quad (2.39)$$

Интенсивность у поверхности пропорциональна $1/\cos \theta$, а испускательная способность слоя при этом не зависит от угла:

$$i_\nu = I_\nu \cos \theta = I_{\nu p} \kappa'_\nu d \quad \text{при} \quad \cos \theta \gg \tau_\nu. \quad (2.40)$$

Следует отметить, что понятие «оптической тонкости» слоя зависит от угла: всегда найдутся столь большие углы $\theta \approx \pi/2$, $\cos \theta \ll 1$, что слой для этих направлений будет «оптически толстым», так что слой с $\tau_\nu \ll 1$ под большими углами $\theta \approx \pi/2$ все равно излучает как черное тело. Под небольшими углами, когда $\tau_\nu/\cos \theta \ll 1$ и слой оптически тонок, он испускает как объемный излучатель; кванты, рожденные

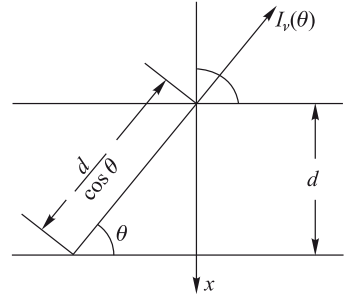


Рис. 2.6. Схема к задаче об излучении плоского слоя

¹⁾ Не следует путать ее с испускательной способностью среды j_ν или J_ν .

в любой точке, выходят из слоя практически без поглощения по пути. В слое нет «самопоглощения» и каждый элемент объема вносит одинаковый вклад в излучение, выходящее с поверхности. Это и служит основанием для термина «объемный излучатель». Оптически толстое тело излучает «с поверхности», так как кванты, рожденные в глубине, не выходят из тела, поглощаясь по пути.

Во многих случаях интерес представляет не интенсивность излучения под данным углом, а поток излучения с поверхности тела, т. е. количество энергии, выходящей в 1 с с 1 см² поверхности тела во всех направлениях. Эту величину называют яркостью поверхности (спектральной или интегральной).

Спектральная яркость поверхности, очевидно, равна

$$S_\nu = \int_{\text{по полусфере}} (\cos \theta) I_\nu(\Omega) d\Omega, \quad (2.41)$$

где $I_\nu(\Omega)$ дается формулой (2.35); θ — угол между направлением распространения излучения и нормалью к поверхности.

Найдем яркость поверхности плоского слоя; при этом будем считать температуру и коэффициент поглощения переменными, но зависящими только от координаты x (см. рис. 2.6). Заменяем в формуле (2.35) ds на $dx/\cos \theta$ и введем оптическую толщину:

$$d\tau'_\nu = \kappa'_\nu dx, \quad \tau'_\nu = \int_0^x \kappa'_\nu dx. \quad (2.42)$$

Тогда

$$I_\nu(\theta) = \int_0^\infty I_{\nu p} \exp\left(-\frac{\tau'_\nu}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'_\nu}{\cos \theta}, \quad \frac{\pi}{2} > \theta > 0. \quad (2.43)$$

Подставим это выражение в (2.41) и проинтегрируем по углам ($d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$):

$$S_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty I_{\nu p} \exp\left(-\frac{\tau'_\nu}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'_\nu}{\cos \theta} = 2\pi \int_{\nu} I_{\nu p} d\tau'_\nu \int_0^1 d(\cos \theta) \exp\left(-\frac{\tau'_\nu}{\cos \theta}\right).$$

Вводя переменную $w = 1/\cos \theta$ и принимая во внимание определение табулированных функций — интегральных экспонент,

$$E_n(z) = \int_1^\infty e^{-zw} \frac{dw}{w^n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.44)$$

а также заменяя равновесную интенсивность равновесной плотностью излучения по формуле $I_{\nu p} = cU_{\nu p}/4\pi$, получим

$$S_\nu = \frac{c}{2} \int_0^\infty U_{\nu p} [T(\tau'_\nu)] E_2(\tau'_\nu) d(\tau'_\nu), \quad (2.45)$$

или, для слоя конечной оптической толщины $\tau_\nu = \int_0^d \kappa'_\nu dx$,

$$S_\nu = \frac{c}{2} \int_0^{\tau_\nu} U_{\nu p} E_2(\tau'_\nu) d(\tau'_\nu). \quad (2.46)$$

Воспользовавшись известным свойством интегральных экспонент,

$$\int_0^{\infty} E_2(z) dz = \frac{1}{2},$$

получим для полубесконечного тела постоянной температуры

$$S_{\nu} = \frac{cU_{\nu p}}{4} = S_{\nu p}. \quad (2.47)$$

Как и следовало ожидать, спектральная яркость равна яркости абсолютно черного тела.

Яркость слоя конечной толщины и постоянной температуры равна

$$S_{\nu} = \frac{cU_{\nu p}}{2} = \int_0^{\tau_{\nu}} E_2(\tau'_{\nu}) d\tau'_{\nu} = \frac{cU_{\nu p}}{4} [1 - 2E_3(\tau_{\nu})] = S_{\nu p} [1 - 2E_3(\tau_{\nu})]. \quad (2.48)$$

Она всегда меньше яркости абсолютно черного тела той же температуры и стремится к последней при $\tau_{\nu} \rightarrow \infty$.

Для оптически тонкого слоя

$$\tau_{\nu} \ll 1, \quad E_2(\tau'_{\nu}) \approx E_2(0) = 1, \quad 2E_3(\tau_{\nu}) \approx 1 - 2\tau_{\nu} \quad (2.49)$$

и

$$S_{\nu} = \frac{cU_{\nu p}}{2} \tau_{\nu} = S_{\nu p} \cdot 2\tau_{\nu}, \quad 2\tau_{\nu} \ll 1. \quad (2.50)$$

§ 8. Эффективная или яркостная температура поверхности неравномерно нагретого тела. Спектральную яркость поверхности неравномерно нагретого тела очень удобно характеризовать эффективной или яркостной температурой $T_{\nu \text{эф}}$. Под последней понимается температура абсолютно черного тела, посылающего с поверхности в данном участке спектра точно такой же поток излучения, как и рассматриваемое реальное тело.

Сопоставляя формулы (2.46) и (2.47), получим выражение, определяющее эффективную температуру в плоском случае:

$$U_{\nu p}(T_{\nu \text{эф}}) = 2 \int_0^{\tau_{\nu}} U_{\nu p}[T(\tau'_{\nu})] E_2(\tau'_{\nu}) d\tau'_{\nu}, \quad (2.51)$$

или, подставляя функцию Планка для $U_{\nu p}$,

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_{\nu \text{эф}}}\right) - 1} = 2 \int_0^{\tau_{\nu}} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} E_2(\tau'_{\nu}) d\tau'_{\nu}. \quad (2.52)$$

Эффективная температура зависит от частоты. Лишь в случае абсолютно черного тела она одинакова для всех частот и равна температуре вещества.

Можно ввести и эффективную температуру интегрального по спектру излучения тела, согласно определению

$$S = \sigma T_{\text{эф}}^4, \quad (2.53)$$

где S — интегральный поток, выходящий с поверхности тела. Очевидно, эффективная температура интегрального излучения является некоторой средней величиной по

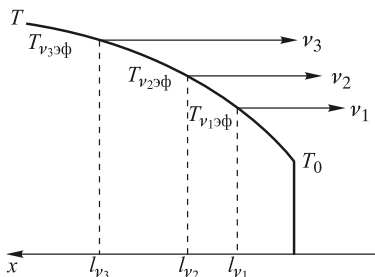


Рис. 2.7. К вопросу об излучении тела с температурой, спадающей к поверхности

интеграл дает слой порядка пробега l'_ν около поверхности (с оптической толщиной τ'_ν порядка единицы). Иными словами, кванты, выходящие с поверхности тела, рождаются в основном в слое около поверхности с оптической толщиной порядка единицы (точнее, двух-трех единиц). Этот слой может быть назван излучающим. Кванты, рожденные в более глубоких слоях, практически полностью поглощаются до выхода из тела. Эффективная температура, как это следует из формулы (2.52), равна некоторой средней температуре излучающего слоя.

Выходящие с поверхности кванты тех частот, для которых поглощение сильнее, а длина пробега меньше, излучаются в слоях, более близких к поверхности и менее нагретых. Наоборот, слабее поглощаемые частоты выходят из более глубоких и более нагретых слоев. Таким образом, если температура вещества спадает к поверхности (как это обычно и бывает), эффективная температура сильнее поглощаемых частот меньше, чем у слабее поглощаемых. Это схематически изображено на рис. 2.7, на котором стрелками указаны «места», из которых излучаются кванты различных частот. «Места» ориентировочно отнесены от поверхности на расстояния, равные пробегу квантов.

Спектр излучения неравномерно нагретого тела отличается от планковского и притом тем больше, чем сильнее частотная и температурная зависимости коэффициента поглощения и чем круче ход температуры около поверхности на расстояниях порядка пробегов квантов.

На рис. 2.8 схематически изображен спектр излучения тела со спадающей к поверхности температурой и обратной зависимостью коэффициента поглощения от частоты, при которой малые частоты поглощаются сильнее, чем большие.

На непрерывный спектр нанесены дискретные линии, соответствующие связанным переходам в атомах или ионах. Коэффициенты поглощения в линиях всегда очень велики, намного больше, чем в непрерывном спектре. Поэтому эффективная температура в линиях практически точно совпадает с температурой у самой поверхности тела (линии «вырезаны» в спектре излучения тела).

Для сопоставления на рис. 2.8 пунктиром показан планковский спектр, соответствующий интегральной эффективной температуре, которая является средней по отношению к спектральным. В силу самого определения интегральной эффективной температуры площади, ограниченные сплошной и пунктирной кривыми, в точности равны.

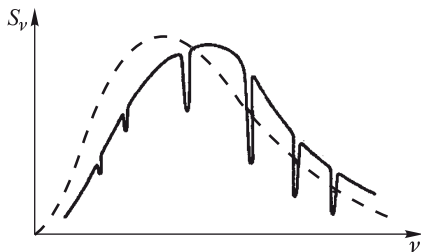
В гл. V мы увидим, что коэффициенты непрерывного поглощения при высоких температурах не являются гладкими функциями частоты, а испытывают скачки.

отношению к спектральным эффективным температурам. Посмотрим, какова связь спектра излучения тела с частотной зависимостью коэффициента поглощения.

Рассмотрим оптически толстое тело; радиус кривизны поверхности пусть будет большим по сравнению с длинами пробега излучения, так что тело можно рассматривать как плоское. Пусть температура спадает к поверхности, как изображено на рис. 2.7.

Поток излучения частоты ν , выходящий с поверхности, определяется интегралом по источникам (2.45). Вследствие самопоглощения, учитываемого быстро спадающей с τ'_ν интегральной экспонентой, основной вклад в инте-

Рис. 2.8. Схематическое изображение спектра излучения тела с температурой, уменьшающейся к поверхности. Малые частоты поглощаются сильнее, чем большие. Пунктиром показан планковский спектр, отвечающий средней эффективной температуре излучения. В спектре вырезаны линии селективного поглощения. Поток в центрах линий практически равен планковскому потоку, отвечающему температуре поверхности тела



Соответственно возникают скачки и в спектре излучения тела. (Это не показано на рис. 2.8, который относится к гладкой зависимости $\varkappa'_\nu$ от ν .)

Часто при оптических измерениях свечения нагретых тел употребляют понятие цветовой температуры. Цветовой температурой называют температуру абсолютно черного тела, которое дало бы отношение яркостей в двух различных спектральных участках (например, в красной и синей областях спектра), равное измеренному на опыте. Пользуясь определениями эффективных и цветовой температур, легко записать соотношение между ними. Пусть яркостные температуры в частотах ν_1 и ν_2 есть T_1 и T_2 , а цветовой температура — T_{12} . Полагая для простоты, что обе линии, ν_1 и ν_2 , лежат в виновой области спектра, т. е. $h\nu_1/kT_1 \gg 1$, $h\nu_2/kT_2 \gg 1$, получим

$$S_{\nu_1} \sim \nu_1^3 \exp\left(-\frac{h\nu_1}{kT_1}\right), \quad S_{\nu_2} \sim \nu_2^3 \exp\left(-\frac{h\nu_2}{kT_2}\right),$$

$$\frac{S_{\nu_1}}{S_{\nu_2}} = \frac{\nu_1^3}{\nu_2^3} \exp\left[-\left(\frac{h\nu_1}{kT_1} - \frac{h\nu_2}{kT_2}\right)\right] = \frac{\nu_1^3}{\nu_2^3} \exp\left[-\left(\frac{h\nu_1 - h\nu_2}{kT_{12}}\right)\right],$$

откуда

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{T_{12}} = \frac{\nu_1}{T_1} - \frac{\nu_2}{T_2}. \quad (2.54)$$

Если температура тела более или менее постоянна в излучающих слоях для всего основного спектра вблизи поверхности, цветовая температура часто бывает ближе к истинной температуре тела, чем яркостные; это обстоятельство и используется в пирометрии при оптических измерениях температуры тел.

Заметим, что в случае неравномерно нагретого «серого» тела, у которого коэффициент поглощения $\varkappa'_\nu$ не зависит от частоты, $\varkappa'_\nu \equiv \varkappa'$, эффективная температура различных частот все равно зависит от частоты. Лишь для очень маленьких квантов, лежащих в рэлей-джинсовской области спектра $h\nu/kT \ll 1$, частота выпадает из формулы (2.52) и эффективная температура оказывается для всех этих частот одинаковой.

§ 9. Движение вещества с учетом лучистого теплообмена. Выше было показано, как можно найти поле излучения в теле или излучение, выходящее с поверхности тела, если состояние вещества, т. е. распределение температуры и плотности в среде, известны. Рассмотрим, как формулируется задача совместного определения состояния и движения вещества и поля излучения в случае, когда перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом оказывают существенное влияние на состояние и движение среды (газа). При этом движение вещества всегда будем предполагать нерелятивистским, т. е. считать, что скорости гораздо меньше скорости света.

Если температура не слишком высока, а плотность газа не слишком низка, то плотность энергии и давление излучения пренебрежимо малы по сравнению с энер-

гией и давлением вещества. Сравним для оценки плотность равновесного излучения $U_p = \frac{4\sigma T^4}{c}$ с тепловой энергией единицы объема одноатомного газа $E = \frac{3}{2}nkT$ (n — число частиц в 1 см^3). Например, при $n = 2,67 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, что соответствует числу молекул в воздухе нормальной плотности, обе энергии совпадают при температуре 900 000 К. В действительности энергия излучения становится сравнимой с энергией вещества при еще более высоких температурах, так как при нагревании атомы ионизируются, что, во-первых, приводит к возрастанию числа частиц в 1 см^3 и, во-вторых, добавляет к тепловой энергии энергию, затраченную на ионизацию¹⁾. Так, в реальном воздухе нормальной плотности энергия излучения сравнивается с внутренней энергией вещества только при температуре около 2 700 000 К. В сильно разреженном газе энергия равновесного излучения становится сравнимой с энергией вещества при более низких температурах (грубо говоря, температура, при которой обе энергии равны, пропорциональна $n^{1/3}$). Однако в этом случае при сопоставлении энергии следует проявлять осторожность, так как в очень разреженном газе велика длина пробега излучения и если размеры газового тела недостаточно велики, плотность излучения может оказаться гораздо меньше равновесной (см. об этом ниже).

Давления излучения и вещества находятся примерно в таком же соотношении, что и энергии. В самом деле, давление излучения (при изотропии поля излучения) $p_\nu = U/3$, а давление вещества $p = (\gamma - 1)E$, причем при высоких температурах показатель адиабаты γ имеет обычно значение в интервале от 5/3 до приблизительно 1,15 в зависимости от элементного состава газа, температуры и плотности.

Таким образом, при не слишком высоких температурах и не слишком малых плотностях вещества плотность энергии и давление излучения практически не сказываются на энергетическом балансе и газодинамическом движении вещества. Влияние излучения на энергетический баланс и движение газа проявляется в ином: существенными могут оказаться потери энергии нагретым телом за счет излучения и вообще лучистый теплообмен в среде. Эти эффекты часто играют роль при гораздо более низких температурах, когда энергия и давление излучения заведомо очень малы.

Причина указанного явления состоит в резком различии скоростей движения вещества u в обычных условиях и скорости света c ; $u \ll c$. Вследствие различия скоростей потоки энергии вещества и излучения могут оказаться сравнимыми между собой, даже если плотность энергии излучения много меньше плотности энергии вещества. Например, в крайнем случае, когда все кванты движутся в одну сторону, поток энергии излучения равен $S = Uc$; поток же энергии вещества порядка Eu , т. е. Uc может быть порядка и больше Eu даже при $U \ll E$ за счет того, что $c \gg u$. Потоки энергии излучения и вещества часто бывают сравнимыми и в более реальном случае, когда поле излучения относительно изотропно и результирующий поток излучения S , равный разности односторонних потоков, значительно меньше своей предельной величины Uc , соответствующей резко выраженной анизотропии поля излучения.

Как будет сейчас показано, величина потерь энергии или, наоборот, энерговыделение в веществе за счет взаимодействия с излучением определяются дивергенцией потока излучения, так что сопоставление потоков энергии излучения и вещества может характеризовать и роль лучистого теплообмена в среде.

Найдем количество энергии q , теряемой единицей объема вещества в 1 с на излучение. Оно представляет собой разность между энергией, испускаемой веществом, и энергией излучения, поглощаемой веществом.

¹⁾ О термодинамических функциях газов при высоких температурах см. гл. III.

Разность между испусканием и поглощением излучения частоты ν (на единичный интервал частот) и направления Ω (на единицу телесного угла) в 1 с в 1 см³ стоит в правой части уравнения переноса излучения (2.28). Чтобы получить полную результирующую потерю энергии веществом q в 1 см³ в 1 с, надо проинтегрировать эту величину по всему телесному углу и по всему спектру, т. е.

$$q = \int_0^\infty d\nu \int d\Omega \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) = c \int_0^\infty d\nu \kappa'_\nu (U_{\nu p} - U). \quad (2.55)$$

Первый член в скобках соответствует спонтанному испусканию, а второй — поглощению за вычетом «переизлучения».

С помощью уравнения непрерывности для излучения (2.29), в котором согласно ранее сделанному замечанию о квазистационарности переноса излучения можно опустить производную по времени, найдем, что результирующая потеря энергии равна дивергенции интегрального потока излучения:

$$q = \int_0^\infty \operatorname{div} \mathbf{S}_\nu d\nu = \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (2.56)$$

Если вещество испускает больше, чем поглощает, оно теряет энергию на излучение (охлаждается излучением), и $q > 0$; если поглощается энергии больше, чем испускается, вещество нагревается излучением и «потеря энергии» отрицательна, $q < 0$ (т. е. энерговыделение, равное $-q$, положительно).

Составим уравнения газодинамики с учетом лучистого теплообмена, но пренебрегая энергией и давлением излучения.

Первое уравнение — уравнение непрерывности — остается неизменным. Не меняется и уравнение движения, поскольку давлением излучения мы пренебрегаем. Лишь в уравнение энергии следует ввести член потерь энергии на излучение (плотностью энергии излучения и работой сил лучевого давления пренебрегаем). Уравнение энергии (1.10) запишется в виде ¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left[\varrho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] - q, \quad (2.57)$$

или, заменяя q на дивергенцию потока $\mathbf{S}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \left[\varrho \mathbf{u} \left(\varepsilon + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{S} \right]. \quad (2.58)$$

Таким образом, к полному гидродинамическому потоку энергии добавляется поток энергии излучения. Если преобразовать газодинамическое уравнение энергии к энтропийному виду (см. § 1 гл. I), получим

$$\varrho T \frac{d\Sigma}{dt} = -q = -\operatorname{div} \mathbf{S}, \quad (2.59)$$

где Σ — удельная энтропия вещества.

Нахождение поля излучения и распределения температуры в среде в условиях, когда лучистый теплообмен существенным образом сказывается на энергетическом балансе вещества, связано с большими математическими трудностями. Дифферен-

¹⁾ Предполагается, что, кроме лучистого теплообмена, никаких источников энергии, а также никаких иных необратимых процессов нет.

циальное по координатам уравнение переноса (2.34), описывающее поле излучения, формулируется для спектральной интенсивности излучения, распространяющегося в определенном направлении. В уравнение же энергетического баланса (2.57) входят величины q или S , интегральные как по спектру, так и по направлениям.

Таким образом, система уравнений переноса и энергии имеет интегродифференциальный характер, причем включает в себя двукратное интегрирование: по спектру и по углам.

Математические упрощения интегродифференциальной системы идут по пути приближенного описания спектрального и углового распределений, с тем чтобы избавиться от ее «интегральности». Влияние спектрального распределения на энергетический баланс возникает в связи с зависимостью от частоты коэффициента поглощения. Исключить из рассмотрения спектральные характеристики удастся, только если коэффициент поглощения κ'_ν не зависит от частоты: $\kappa'_\nu \equiv \kappa'$. В этом случае «серой материи» уравнение переноса (2.34) после интегрирования по частотам записывается

$$\text{непосредственно для интегральной по спектру интенсивности, } I = \int_0^\infty I_\nu d\nu,$$

$$\Omega \nabla I = \kappa' (I_p - I), \quad (2.60)$$

а в формуле (2.55) для потерь энергии веществом также можно произвести интегрирование по спектру:

$$q = \kappa' \int (I_p - I) d\Omega = c\kappa' (U_p - U). \quad (2.61)$$

Вообще говоря, коэффициенты поглощения в газах при высоких температурах весьма сильно зависят от частоты, и понятие «серой материи» представляет собой значительную идеализацию. Она очень полезна в том отношении, что позволяет выяснить закономерности явлений, не связанные со спектральным распределением излучения. Однако в некоторых важных предельных случаях, о которых речь пойдет ниже, введение соответствующим образом усредненного по частотам коэффициента поглощения κ' , позволяющее исключить из рассмотрения спектральные характеристики излучения и перейти к формулам (2.60), (2.61), отвечает и существу дела.

Вопросу о приближенном описании углового распределения поля излучения будут посвящены два следующих параграфа.

§ 10. Диффузионное приближение. Потери энергии вещества на излучение q , как видно из формул (2.55), (2.56), в явной форме не зависят от углового распределения излучения и определяются только интегральными по направлениям величинами: плотностью излучения или потоком. Если бы удалось вместо уравнения переноса для интенсивности излучения, зависящей от направления, составить какие-то другие уравнения, которым непосредственно подчинялись бы интегральные по направлениям величины, плотность и поток излучения, то вопрос об угловом распределении излучения при рассмотрении влияния излучения на состояние и движение вещества вообще бы не возникал. Одно такое уравнение уже есть: это — точное уравнение непрерывности (2.29), которое в квазистационарном случае гласит:

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_\nu = c\kappa'_\nu (U_{\nu p} - U_\nu). \quad (2.62)$$

Второе соотношение, связывающее поток и плотность излучения и замыкающее систему уравнений, можно получить только приближенно. Уравнение (2.62) было найдено путем интегрирования уравнения переноса по углам. Умножим теперь уравнение переноса (2.34) на единичный вектор направления Ω и снова проинтегрируем

по углам. Замечая, что интеграл от члена $\kappa'_\nu I_\nu$, не зависящего от направления, обращается в нуль, и принимая во внимание определение потока (2.3), получим

$$\int \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \nabla I_\nu d\mathbf{\Omega} = -\kappa'_\nu \mathbf{S}_\nu. \quad (2.63)$$

В изотропном поле излучения поток $\mathbf{S}_\nu = \int \mathbf{\Omega} I_\nu d\mathbf{\Omega}$ обращается в нуль. Интеграл в левой части равенства при не зависящей от угла интенсивности I_ν легко вычислить¹⁾:

$$\int \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega} \nabla I_\nu d\mathbf{\Omega} = \frac{1}{3} \int \nabla I_\nu d\mathbf{\Omega} = \frac{c}{3} \nabla U_\nu. \quad (2.64)$$

Равенство нулю этого выражения свидетельствует о том, что изотропия поля излучения связана с постоянством плотности в пространстве. Если поле излучения анизотропно, поток и интеграл (2.63) отличны от нуля. Однако в случае слабой анизотропии в первом приближении интеграл можно, по-прежнему, представить в форме (2.64), полагая слабо зависящую от углов интенсивность постоянной. Это дает приближенную связь потока с плотностью излучения:

$$\mathbf{S}_\nu = -\frac{l'_\nu c}{3} \nabla U_\nu, \quad (2.65)$$

где $l'_\nu = 1/\kappa'_\nu$ — длина пробега для поглощения излучения (исправленная на вынужденное испускание).

Если разделить обе части равенства (2.65) на энергию кванта $h\nu$, получим связь потока квантов $\mathbf{J}_\nu$ данной частоты с их плотностью N_ν , обычную для процесса диффузии частиц,

$$\mathbf{J}_\nu = -D_\nu \nabla N_\nu, \quad D_\nu = l'_\nu c/3.$$

Коэффициент «диффузии» квантов D_ν аналогичен коэффициенту диффузии атомов или молекул; c — скорость «движения» квантов, l'_ν — их длина пробега.

Однако между диффузией атомов и «диффузией» квантов имеется существенное различие. Атом при столкновении не исчезает, а лишь меняет направление своего движения (произвольным образом, в случае изотропного рассеяния); длина пробега, входящая в коэффициент диффузии, есть длина пробега по отношению к столкновениям. Квант же, пройдя в среднем расстояние l'_ν , поглощается веществом, и в условиях термодинамического равновесия вещества его энергия вследствие столкновений атомов, электронов и т. д. распределяется в веществе в соответствии с законами статистического равновесия. В месте поглощения испускаются новые кванты разных частот и в произвольных направлениях. Рассматривая процесс «диффузии» квантов данной частоты, мы выделяем среди вновь рожденных только кванты той же самой частоты. Процесс идет так, как будто бы квант летел, поглотившись, а затем снова «родился», причем после «рождения» с равной вероятностью может лететь в любом

¹⁾ Найдем i -ю компоненту векторного интеграла, заменяя векторный оператор $\mathbf{\Omega} \nabla$ координатным выражением $\Omega_k \partial/\partial x_k$ и имея в виду суммирование по дважды встречающимся индексам:

$$\int \Omega_i \Omega_k \frac{\partial I_\nu}{\partial x_k} d\mathbf{\Omega} = \frac{\partial I_\nu}{\partial x_k} \int \Omega_i \Omega_k d\mathbf{\Omega} = \frac{\partial I_\nu}{\partial x_k} \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial I_\nu}{\partial x_i} = \frac{c}{3} \frac{\partial U_\nu}{\partial x_i},$$

так как $\int I_\nu d\mathbf{\Omega} = 4\pi I_\nu = cU_\nu$; отсюда и следует (2.64).

направлении, что и соответствует процессу изотропного рассеяния атомов при столкновениях ¹⁾.

Так же как и при диффузии атомов, условием применимости диффузионного приближения является малость градиента плотности излучения. Последняя должна мало меняться на расстоянии порядка пробега излучения l'_ν . При небольших градиентах поле излучения почти изотропно, а это условие и было положено в основу вывода диффузионного уравнения (2.65). В самом деле, в данную точку кванты приходят в основном из области с размерами порядка пробега. Если плотность излучения в этой области почти постоянна, то кванты приходят в данную точку со всех сторон одинаково, что и приводит к изотропии поля излучения в ней.

Вблизи же границы среды с пустотой плотность меняется сильно на расстоянии порядка пробега и анизотропия углового распределения квантов велика — кванты преимущественно летят из тела в сторону пустоты, так как из пустоты они не поступают. Поэтому вблизи границы с пустотой диффузионное приближение может приводить к заметным ошибкам.

Градиенты плотности малы и диффузионное приближение справедливо в случае оптически толстых тел. Если x — характерный масштаб, на котором заметно меняется плотность излучения (x — порядка размеров тела), то диффузионный поток по порядку величины равен

$$S_\nu = -\frac{l'_\nu c}{2} \nabla U_\nu \sim \frac{l'_\nu}{x} c U_\nu.$$

Чем больше оптическая толщина тела x/l'_ν , тем меньше меняется плотность излучения на длине пробега (это изменение порядка $l'_\nu \nabla U_\nu \sim (l'_\nu/x) U_\nu$), тем меньше поток S_ν , по сравнению с величиной $U_\nu c$, и тем точнее диффузионное приближение.

Если оптическая толщина тела порядка единицы, то $l'_\nu/x \sim 1$ и $S_\nu \sim c U_\nu$. В случае оптически тонкого тела $l'_\nu/x > 1$, и поток, оцененный по диффузионной формуле, должен был бы стать больше, чем $c U_\nu$. В действительности это невозможно и свидетельствует о неприменимости диффузионной формулы к оптически тонким телам.

Поток S_ν никогда не может быть больше, чем $c U_\nu$. Равенство $S_\nu = c U_\nu$ соответствует случаю, когда все кванты летят строго в одном направлении, т.е. соответствует наиболее резко выраженной анизотропии. Величину $c U_\nu$ иногда называют кинетическим потоком. Отношение потока к кинетическому $S_\nu/c U_\nu$, которое в рамках диффузионного приближения порядка обратной оптической толщины тела l'_ν/x , является мерой анизотропии поля излучения: при полной изотропии $S_\nu/c U_\nu = 0$, если все кванты летят в одном направлении $S_\nu/c U_\nu = 1$. Отношение $S_\nu/c U_\nu$ всегда заключено в пределах $0 \leq S_\nu/c U_\nu \leq 1$. Зависимость потока от степени анизотропии углового распределения излучения при данной плотности его схематически иллюстрируется полярной диаграммой для интенсивности (рис. 2.9).

Площади всех фигур одинаковы и соответствуют плотности излучения, а длины стрелок соответствуют потокам. К одному и тому же потоку могут приводить и поля излучения разной плотности. Чем больше плотность при данном потоке, тем меньше $S_\nu/c U_\nu$, тем изотропнее должно быть поле излучения.

Уравнения диффузионного приближения (2.62), (2.65) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций

¹⁾ Если рассматривать перенос излучения с учетом рассеяния квантов, то при слабой анизотропии по-прежнему получается диффузионное соотношение типа (2.65), в котором стоит длина пробега, соответствующая полному коэффициенту ослабления, равному сумме коэффициентов поглощения и рассеяния. Если рассеяние анизотропно, то так же, как и при диффузии атомов, вместо коэффициента рассеяния появляется транспортный коэффициент $\kappa_\nu (1 - \cos \theta)$, где $\cos \theta$ — средний косинус угла рассеяния.

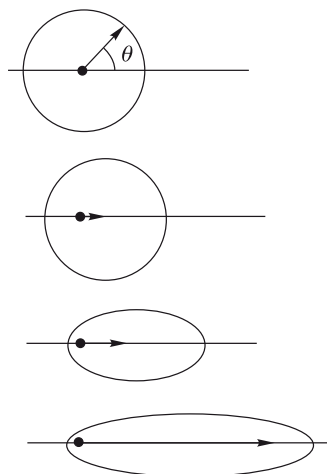


Рис. 2.9. Полярные диаграммы для распределения интенсивности излучения по углу при разных степенях анизотропии. Величина интенсивности под данным углом θ характеризуется длиной радиуса-вектора, проведенного из центра. Длина стрелки характеризует величину потока. Равенство плотностей излучения во всех случаях схематически описывается равенством площадей всех фигур

координат: плотности и потока излучения. К ним нужно присоединить граничные условия на границах сред с различными оптическими свойствами (с различными «коэффициентами диффузии»). Из условия непрерывности интенсивности излучения следует непрерывность плотности и потока на границах раздела. Разрыв в плотности в диффузионном приближении (2.65) повлек бы за собой бесконечность потока, а разрыв в потоке свидетельствовал бы о накоплении излучения, т. е. о нестационарности (см. уравнение (2.29)).

Особого рассмотрения требует случай границы раздела среды с пустотой. Поскольку из пустоты кванты не поступают, поле излучения на границе с пустотой сильно анизотропно (все кванты летят только в сторону пустоты) и, строго говоря, диффузионное приближение здесь неприменимо. Приближенное условие на границе можно написать, исходя из следующего соображения. Предположим (и это для оптически толстых тел не очень далеко от истины), что излучение, выходящее с поверхности тела в полусфере, направленной в сторону пустоты, распределено по углам изотропно; в другой полусфере интенсивность равна нулю: из пустоты кванты не приходят (соответствующая полярная диаграмма показана на рис. 2.10). Получим тогда, что на границе с пустотой

$$S_\nu = \frac{cU_\nu}{2}, \quad (2.66)$$

причем поток направлен по внешней нормали к поверхности. Множитель $1/2$ появляется как средний косинус угла направлений движения квантов при их изотропном распределении в полусфере¹⁾.

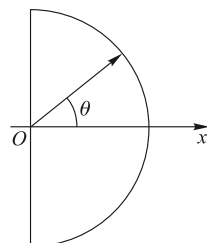


Рис. 2.10. Полярная диаграмма для распределения интенсивности на границе $x = 0$ тела с пустотой. Пустота — справа, среда — слева

¹⁾ В самом деле,

$$S_\nu = \int_{\text{полусфера}} \Omega I_\nu d\Omega; \quad S_\nu = \int_0^{\pi/2} \cos \theta I_\nu(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi I_\nu \cdot \frac{1}{2} = \pi I_\nu,$$

§ 11. Приближение «вперед–назад». Рассмотрим еще один способ приближенного рассмотрения углового распределения излучения, который иногда применяется в плоских задачах переноса излучения. Этот способ известен как приближение Шварцшильда или приближение «вперед–назад». Объединим все кванты, движущиеся в сторону положительного направления оси x , под углами θ от 0 до $\pi/2$ («вперед») в одну группу, а движущиеся в противоположную сторону («назад») под углами θ от $\pi/2$ до π — в другую (рис. 2.11). Будем приближенно считать угловые распределения в каждой из двух полусфер изотропными и обозначим интенсивности в направлениях «вперед» и «назад» через I_1 и I_2 (индекс частоты ν для краткости опустим). Плотность и поток излучения при этом равны

$$U = \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_0^{\pi/2} I_1 \sin \theta d\theta + \frac{2\pi}{c} \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{c} (I_1 + I_2), \quad (2.68)$$

$$S = \int \cos \theta I d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_1 \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi(I_1 - I_2). \quad (2.69)$$

Отсюда, кстати сказать, наглядно представляется степень анизотропии:

$$\frac{S}{cU} = \frac{I_1 - I_2}{2(I_1 + I_2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad I_1 \approx I_2.$$

На границе среды с пустотой, если ось x направлена по внешней нормали к поверхности, имеем $I_2 = 0$ и $S/cU = 1/2$, т. е. условие (2.66).

но

$$cU_\nu = \int_{\text{полусфера}} I_\nu d\Omega = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \theta d\theta I_\nu = 2\pi I_\nu,$$

откуда и следует формула (2.66).

Формула (2.66) формально вытекает и из соотношений диффузионного приближения. Легко проверить, что к диффузионным уравнениям (2.62), (2.65) приводит следующее выражение для интенсивности:

$$I_\nu(\Omega) = \frac{cU_\nu}{4\pi} \left[1 + \frac{3\Omega \mathbf{S}_\nu}{cU_\nu} \right] = \frac{cU_\nu}{4\pi} \left[1 + 3 \cos \theta \frac{S_\nu}{cU_\nu} \right],$$

где θ — угол между направлением Ω и направлением потока $\mathbf{S}_\nu$. Располагая ось x в направлении потока, вычислим односторонние потоки в положительном и отрицательном направлениях оси x . Получим

$$S_{\nu+} = \frac{cU_\nu}{4} + \frac{S_\nu}{2}, \quad S_{\nu-} = -\frac{cU_\nu}{4} + \frac{S_\nu}{2} \quad (2.67)$$

(видно, что $S_\nu = S_{\nu+} + S_{\nu-}$, как и должно быть). Применяя эти формулы к границе тела с вакуумом (ось x направлена в сторону вакуума) и полагая, что односторонний поток из вакуума $S_{\nu-} = 0$, получим $S_\nu = S_{\nu+} = cU_\nu/2$, т. е. формулу (2.66). Формулы (2.67) имеют большую силу, чем выражение для интенсивности. В этом легко убедиться, если распространить формулу для интенсивности на точку у границы.

В направлении отрицательной оси x , например, $\cos \pi = -1$ и $I_\nu = -cU_\nu/8\pi < 0$, что физически бессмысленно. Все дело в том, что диффузионная формула для интенсивности годится только при слабой анизотропии, когда второй член в скобках много меньше единицы.

Чтобы составить уравнение для средних «односторонних» интенсивностей I_1 и I_2 , усредним уравнение переноса для плоского случая,

$$\cos \theta \frac{dI}{dx} = \kappa'(I_p - I), \quad (2.70)$$

по одной и по другой полусферам. Получим при этом (средний косинус $\overline{\cos \theta} = \pm 1/2$):

$$\frac{1}{2} \frac{dI_1}{dx} = \kappa'(I_p - I_1); \quad -\frac{1}{2} \frac{dI_2}{dx} = \kappa'(I_p - I_2). \quad (2.71)$$

Эта пара уравнений и служит для определения средних интенсивностей в обеих полусферах. Складывая и вычитая их, легко перейти к уравнениям для плотности и потока ($I_p = cU_p/4\pi$):

$$\frac{dS}{dx} = \kappa'c(U_p - U); \quad S = -\frac{l'c}{4} \frac{dU}{dx}. \quad (2.72)$$

Первое из уравнений есть точное уравнение непрерывности (2.62), а второе почти совпадает с приближенным уравнением диффузионного приближения (2.65), с той лишь разницей, что здесь «коэффициент диффузии» равен $l'c/4$ вместо $l'c/3$.

Рассматривая уравнения (2.71) как линейные дифференциальные уравнения относительно функций I_1 и I_2 , можно записать их решение в интегральной форме:

$$I_1 = \int_0^\tau I_p \exp[-2(\tau - \tau')] 2d\tau'; \quad I_2 = \int_\tau^\infty I_p \exp[-2(\tau' - \tau)] 2d\tau'.$$

Здесь координата x заменена оптической толщиной по формулам

$$d\tau = \kappa' dx, \quad \tau = \int_0^x \kappa' dx.$$

Складывая и вычитая выражения для I_1 и I_2 и подставляя $I_p = cU_p/4\pi$, получим приближенные интегральные формулы для плотности и потока в приближении «вперед-назад»:

$$U = \frac{1}{2} \int_\tau^\infty U_p \exp[-2(\tau' - \tau)] 2d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^\tau U_p \exp[-2(\tau - \tau')] 2d\tau', \quad (2.73)$$

$$S = -\frac{c}{4} \int_\tau^\infty U_p \exp[-(\tau' - \tau)] 2d\tau' + \frac{c}{4} \int_0^\tau U_p \exp[-2(\tau - \tau')] 2d\tau'.$$

Вообще говоря, диффузионное приближение в случае слабой анизотропии является более обоснованным, чем мало отличающееся от него приближение «вперед-назад».

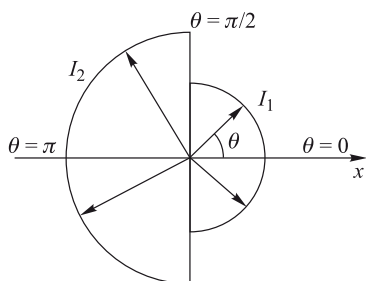


Рис. 2.11. Полярная диаграмма для распределения интенсивности излучения в приближении «вперед-назад». В данном случае поток направлен влево

§ 12. Локальное равновесие и приближение лучистой теплопроводности.

В бесконечной среде с постоянной температурой в установившемся состоянии излучение термодинамически равновесно. Интенсивность его не зависит от направления и определяется формулой Планка. В какую-нибудь точку пространства приходят кванты, рожденные в окрестности этой точки на расстояниях не более нескольких пробегов; кванты, рожденные вдали, не доходят, поглощаясь по пути. Следовательно, в создании равновесной интенсивности в данной точке участвует только непосредственная ее окрестность. Даже если температура вдали и отлична от температуры этой окрестности, это практически не сказывается на интенсивности излучения в рассматриваемой точке. Значит, если в достаточно протяженной, оптически толстой среде температура не постоянна, но меняется достаточно медленно с расстоянием так, что изменения ее малы на расстояниях порядка пробега излучения, интенсивность в какой-либо точке пространства будет очень близка к равновесной, соответствующей температуре данной точки. При этом интенсивность будет тем ближе к равновесной, чем меньше меняется температура на расстояниях порядка пробега. В частности, излучение будет ближе, к равновесному в тех частотах, которые поглощаются сильнее и для которых длина пробега l'_ν меньше. Если градиент температуры настолько мал, что изменения температуры малы на расстояниях порядка наибольшего из пробегов l'_ν для всех частот, играющих значительную роль в равновесном излучении данной температуры, то излучение будет равновесным практически во всем спектральном интервале, характерном для температуры данной точки. Интенсивность излучения в зависимости от частоты будет описываться при этом функцией Планка с температурой этой точки.

О таком состоянии, когда излучение в каждой точке среды с переменной температурой весьма близко к равновесному, соответствующему температуре точки, говорят как о локальном термодинамическом равновесии излучения с веществом.

Условие существования локального равновесия — малость градиентов в протяженной, оптически толстой среде — служит в то же время и оправданием диффузионного приближения при рассмотрении переноса излучения. В диффузионном приближении поток излучения пропорционален градиенту плотности излучения. Но если плотность излучения близка к равновесной, то приближенно можно заменить истинную плотность в формуле для потока равновесной плотностью в данной точке. Таким образом, в условиях локального равновесия спектральный поток приближенно равен

$$\mathbf{S}_\nu = -\frac{l'_\nu c}{3} \nabla U_{\nu p}. \quad (2.74)$$

Полный поток есть

$$\mathbf{S} = \int_0^\infty \mathbf{S}_\nu d\nu = -\frac{c}{3} \int_0^\infty l'_\nu \nabla U_{\nu p} d\nu. \quad (2.75)$$

Вынесем из-под знака интеграла некоторое среднее значение длины пробега, которое обозначим через l . Если учесть, что $\int_0^\infty U_{\nu p} d\nu = U_p = 4\sigma T^2/c$, то формула (2.75) дает

$$\mathbf{S} = -\frac{lc}{3} \nabla U_p = -\frac{16\sigma l T^3}{3} \nabla T. \quad (2.76)$$

Поток энергии излучения в условиях локального равновесия пропорционален градиенту температуры, т. е. перенос излучения носит характер теплопроводности или, как говорят, лучистой теплопроводности, причем коэффициент теплопроводности равен $(16\sigma l T^3)/3$ и зависит от температуры.

Потеря энергии вещества на излучение q по формуле (2.56) равна дивергенции потока лучистой теплопроводности точно так же, как и в случае обычной молекулярной теплопроводности, и определяется только температурой вещества в данной точке, средней длиной пробега, которая для данного вещества есть функция температуры и плотности, и их производными по координатам.

Сопоставление формул (2.75) и (2.76) дает закон усреднения длины пробега по спектру, приводящий к правильному значению потока лучистой энергии в условиях, когда лучистый теплообмен имеет характер теплопроводности. Замечая, что $U_{\nu p}$ и U_p зависят от координат только через зависимость от температуры, получим

$$l = \frac{\int_0^{\infty} l'_{\nu} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}{\frac{dU_p}{dT}} = \frac{\int_0^{\infty} l'_{\nu} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}. \quad (2.77)$$

Дифференцируя по температуре равновесную плотность излучения, взятую по формуле Планка, и переходя в интеграле к безразмерной переменной интегрирования и $u = h\nu/kT$, найдем закон усреднения пробега:

$$l = \int_0^{\infty} l'_{\nu} G(u) du, \quad (2.78)$$

где весовой множитель $G(u)$ равен

$$G(u) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^4 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2}. \quad (2.79)$$

Величина l , полученная путем усреднения пробега l'_{ν} с весовым множителем $G(u)$, называется росселандовым средним длины пробега или просто росселандовым пробегом. Если выразить длину пробега l'_{ν} , исправленную на вынужденное испускание, через коэффициент истинного поглощения $l'_{\nu} = 1/\kappa'_{\nu} = 1/\kappa(1 - e^{-u})$, то формулы (2.78), (2.79) можно переписать в виде

$$l = \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} G'(u) du, \quad G'(u) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{u^4 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3}. \quad (2.80)$$

Росселандов весовой множитель имеет максимум при $h\nu \approx 4kT$, т.е. основную роль в переносе энергии играют большие кванты с энергией, в несколько раз большей, чем kT .

Согласно формуле (2.76), поток излучения тем больше, чем больше коэффициент теплопроводности, т.е. чем длиннее пробег. Не следует забывать, что эта зависимость справедлива только до тех пор, пока длина пробега не слишком велика, чтобы не нарушалось условие локального равновесия и формула (2.76) имела смысл. Как мы увидим в дальнейшем, в противоположном предельном случае, когда длина пробега излучения больше характерных размеров тела, поток излучения, наоборот, уменьшается с увеличением длины пробега.

§ 13. Взаимоотношение диффузионного приближения и приближения лучистой теплопроводности. Обычно в астрофизике принято отождествлять понятия диффузионного приближения и лучистой теплопроводности. Это связано с тем, что

в оптически толстых телах с малыми градиентами, каковыми и являются звезды и звездные фотосферы, всегда одновременно выполняются условия, приводящие к слабой анизотропии поля излучения, т. е. к диффузионной связи потока с градиентом плотности излучения, и к существованию локального равновесия, т. е. возможности замены U_ν на $U_{\nu p}$. Оценка показывает, что вообще при малых градиентах в оптически толстых телах отклонение от локального равновесия даже меньше, чем степень анизотропии, т. е. если справедливо диффузионное приближение, то локальное равновесие тем более существует. В самом деле, пусть тело имеет размеры порядка x , являющиеся характерным масштабом для градиентов температуры, плотности и потока излучения. Из уравнений диффузионного приближения (2.62), (2.65) следует, что по порядку величины

$$\frac{S_\nu}{x} \sim \frac{c(U_{\nu p} - U_\nu)}{l'_\nu}, \quad S_\nu \sim \frac{l'_\nu}{x} c U_\nu,$$

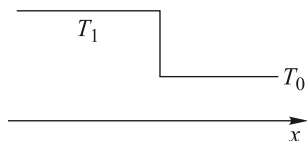
откуда

$$\frac{U_{\nu p} - U_\nu}{U_\nu} \sim \left(\frac{l'_\nu}{x} \right)^2.$$

Если степень анизотропии, которая характеризуется отношением диффузионного потока к кинетическому, $S_\nu/cU_\nu \approx l'_\nu/x$, мала и $l'_\nu/x \ll 1$, то относительное отклонение плотности излучения от равновесной есть величина второго порядка малости.

Однако имея в виду задачи с более сложными условиями, чем в звездных фотосферах, удобно все же провести четкую грань между приближениями диффузионным и лучистой теплопроводности, подразумевая под диффузионным приближением только способ приближенного описания углового распределения излучения, в котором поток излучения предполагается пропорциональным градиенту истинной плотности, даже если она сильно отличается от равновесной. Это можно рассматривать как прием, позволяющий выяснять особенности явлений переноса сильно неравновесного излучения, не связанные с характером углового распределения квантов, так как строгий учет последнего связан с большими математическими трудностями. Диффузионное приближение, приводя в некоторых случаях к значительным ошибкам, как правило, все же не искажает качественной картины явлений переноса излучения, даже когда распределение по углам сильно анизотропно. Это и позволяет пользоваться им для приближенного решения различных задач, в которых излучение существенно неравновесно и использование приближения лучистой теплопроводности, которое подчиняет соответствующим уравнениям температуру вещества, часто противоречит физическому смыслу.

Рис. 2.12. Схематический профиль температуры в ударной волне



Приведем пример. Предположим, что мы интересуемся полем излучения в теле с резким скачком температуры на поверхности, разделяющей высоконагретую и холодную области, как показано на рис. 2.12 (случай, типичный для ударной волны). В области с высокой температурой плотность излучения U_1 велика и порядка равновесной, $U_{p1} = 4\sigma T_1^4/c$. В области низкой температуры кванты практически не испускаются и плотность излучения в ней определяется потоком, выходящим с поверхности нагретой области, т. е. плотность излучения также пропорциональна U_1 и гораздо больше равновесной, $U_{p0} = 4\sigma T_0^4/c$, так как $T_1 \gg T_0$. Случай, как мы видим, чрезвычайно далекий от локального равновесия и лучистой теплопроводности. Между тем диффузионное приближение для описания углового распределения приводит к качественно правильному результату,

который состоит в том, что если холодная среда поглощает свет, то плотность и поток излучения падают по мере удаления от нагретой поверхности в глубь холодной среды, причем масштабом расстояния для заметного ослабления этих величин является длина пробега для поглощения квантов в холодной среде. Так, в данном случае диффузионные уравнения в холодной среде, не испускающей квантов, принимают вид

$$\frac{dS_\nu}{dx} = -\frac{cU_\nu}{l'_\nu}, \quad S_\nu = -\frac{l'_\nu c}{3} \frac{dU_\nu}{dx}$$

или, в терминах оптической толщины, отсчитываемой от скачка температуры $\tau_\nu = \int_0^x \kappa'_\nu dx$,

$$\frac{dS_\nu}{d\tau_\nu} = -cU_\nu, \quad S_\nu = -\frac{c}{3} \frac{dU_\nu}{d\tau_\nu}.$$

Эти уравнения дают решения для плотности и потока,

$$S_\nu = \frac{cU_\nu}{\sqrt{3}} \sim e^{-\sqrt{3}\tau_\nu},$$

качественно правильно отражающие спадание этих величин.

Точный учет углового распределения, возможный в данном простейшем случае, приводит к несколько иному закону спадания потока и плотности излучения в холодной области, содержащему не обычные, а интегральные экспоненты (см. работу [5]):

$$S_\nu \sim E_3(\tau_\nu), \quad U_\nu \sim E_2(\tau_\nu).$$

На оптических расстояниях от скачка температуры порядка одной или нескольких единиц точные формулы дают величины того же порядка, что и диффузионные. Если бы мы в рассматриваемой задаче воспользовались приближением лучистой теплопроводности, то у нас, в частности, размазался бы скачок температуры вещества, так как при скачке температуры поток $S \sim dT/dx$ оказывается бесконечным.

Вообще диффузионное приближение всегда дает качественно разумные результаты. Например, в таком крайне «недиффузионном» случае, когда имеется предельно выраженная анизотропия углового распределения квантов, и все кванты движутся в холодной среде в одном направлении, поток равен $S_\nu = cU_\nu$. Из точного уравнения непрерывности (2.62) получается при этом, что поток, как и при диффузии, пропорционален градиенту плотности $S_\nu = -l'_\nu c \frac{dU_\nu}{dx}$ (ось x направлена вдоль светового луча) с коэффициентом пропорциональности, вдвое большим обычного коэффициента диффузии. Этот случай чистого поглощения параллельного пучка света в неизлучающей среде имеет точное решение,

$$S_\nu = cU_\nu \sim e^{-\tau_\nu}, \quad \tau_\nu = \int_0^x \kappa'_\nu dx,$$

отличающееся от решения в диффузионном приближении только численным коэффициентом $\sqrt{3}$ в показателе экспоненты и коэффициентом $1/\sqrt{3}$ в связи потока с плотностью.

Конечно, количественное различие при больших $\tau_\nu \gg 1$ огромно, но качественно диффузионное приближение дает правильный физический результат, а при $\tau_\nu \sim 1$ и численная ошибка не столь велика.

§ 14. Лучистое равновесие в звездных фотосферах. Изучение распределений температуры и поля излучения в периферийных слоях (фотосферах) стационарных звезд с целью вычисления светимости звезд явилось классической задачей, на основе которой была построена теория переноса излучения и разработаны методы решения уравнения переноса ¹⁾.

Для нас эта задача интересна не только как классический объект применения теории переноса излучения, но и как модель, к которой, как это будет показано в гл. IX, в какой-то мере сводится задача об охлаждении большого объема нагретого воздуха путем излучения. Стационарные звезды представляют собой огромные газовые массы, нагретые до высоких температур, изменяющихся от десятка тысяч градусов на поверхности до миллионов и десятков миллионов градусов в центральных областях. Механическое равновесие газа достигается благодаря уравновешиванию сил давления, стремящихся привести к разлету газового шара, гравитационными силами, препятствующими разлету.

Нагретый газовый шар — звезда — излучает с поверхности. Потеря энергии восполняется энерговыделением за счет ядерных реакций, которые протекают в центральных областях звезды. Вещество в стационарных звездах неподвижно, никакого гидродинамического движения нет. Выделяющаяся в центре энергия переносится к периферии звезды только излучением и уходит в пространство в виде излучения. Поскольку в периферийных слоях ядерных реакций и энерговыделения нет, стационарность в них достигается благодаря полной компенсации испускания и поглощения света в каждом элементе объема: потеря энергии вещества на излучение q равна нулю и температура в каждой точке неизменна во времени ²⁾.

О равенстве испускания и поглощения света и отсутствии потерь на излучение говорят как о лучистом равновесии звезды. Из условия лучистого равновесия $q = 0$ следует, что дивергенция потока излучения $\operatorname{div} \mathbf{S}$ также равна нулю. Полный поток излучения через сферическую поверхность любого радиуса r , $4\pi r^2 S$, постоянен и равен количеству энергии, выделяющейся в центре в единицу времени ($S \sim 1/r^2$). Распределение температуры и плотности газа по радиусу звезды определяется путем совместного рассмотрения механического равновесия и переноса излучения. Однако при рассмотрении распределений в фотосфере задача в какой-то степени разделяется на два этапа. Распределение температуры по оптической координате можно найти только из рассмотрения переноса излучения, не зная распределения плотности по радиусу. Затем в случае необходимости можно перейти к распределению температуры по радиусу, привлекая условия механического равновесия и коэффициент поглощения света как функцию температуры и плотности.

Сформулируем задачу о распределении температуры и переносе излучения в фотосфере звезды. Интересуясь поверхностными слоями, толщина которых много меньше радиуса звезды, можно пренебречь их кривизной и считать фотосферу плоской. Направим ось x по внешней нормали к поверхности звезды (рис. 2.13) и запишем

¹⁾ Подробное изложение этих вопросов и ссылки на литературу см. в книгах В. А. Амбарцумяна [1] и Унзоляда [2].

²⁾ Стационарность звезды и неизменность во времени распределений температуры и других величин по радиусу не означает, что звезды не эволюционируют. Когда говорят о стационарности применительно к задаче о переносе излучения, то имеют в виду неизменность состояния за время порядка времени теплопередачи от центра звезды к поверхности.

Заметим, что условие лучистого равновесия $q = 0$ заменяет в данной конкретной задаче энергетическое уравнение гидродинамики (2.57).

уравнение переноса излучения для плоского случая:

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{dx} = \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu), \quad (2.81)$$

где θ — угол между направлением распространения излучения и осью x . К этому уравнению добавляется условие лучистого равновесия:

$$q = \int_0^\infty d\nu \int d\Omega \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu) = c \int_0^\infty d\nu \kappa'_\nu (U_{\nu p} - U_\nu) = 0, \quad (2.82)$$

а также граничное условие на поверхности, при $x = 0$, которое заключается в том, что из пустоты кванты не поступают:

$$I_\nu(x = 0, \theta) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \quad (2.83)$$

Если коэффициент поглощения разных частот $\kappa_\nu(T, \rho)$ зависит от плотности газа одинаковым образом, т. е. может быть представлен в виде

$$\kappa_\nu(T, \rho) = \varphi(\nu, T) f(\rho),$$

что обычно и имеет место в действительности, то путем введения вместо x новой координаты, дифференциал которой есть $dy = dx f(\rho)$ и которая соответствует оптической координате, можно исключить из задачи вопрос о распределении плотности газа по x и искать распределения температуры и интенсивности излучения по этой, новой, оптической координате y . Система (2.81)–(2.83) полностью описывает эти распределения. Задача обладает одним произвольным параметром — потоком излучения S , который в плоском случае постоянен ($q = \operatorname{div} \mathbf{S} = dS/dx = 0$). Поток S равен потоку энергии, подаваемому из бесконечности $x = -\infty$, изнутри звезды, и фактически определяется энерговыделением в центре звезды. В то же время поток S представляет собой поток энергии излучения, выходящий с поверхности звезды, т. е. интегральную яркость поверхности.

Сформулированная задача в общем случае представляет очень большие математические трудности. Основная из них состоит в том, что уравнение переноса записывается для спектральной интенсивности I_ν , тогда как условие лучистого равновесия имеет интегральный по спектру характер. Для упрощения задачи введем в рассмотрение некоторый средний по спектру коэффициент поглощения κ' (что эквивалентно предположению «о серости» среды) и проинтегрируем по спектру

уравнение переноса (2.81). Получим для интегральной интенсивности, $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$,

уравнение

$$\cos \theta \frac{dI}{dx} = \kappa' (I_p - I), \quad I_p = \int_0^\infty I_{\nu p} d\nu = \frac{cU_p}{4\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}. \quad (2.84)$$

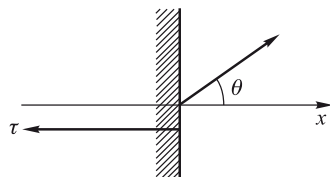


Рис. 2.13. К задаче о переносе излучения в звездных фотосферах

Переходя к оптической координате, отсчитываемой от поверхности в глубь фотосферы,

$$d\tau = -\mathcal{K}' dx, \quad \tau = -\int_0^x \mathcal{K}' dx,$$

получим

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - I_p(T). \quad (2.85)$$

Граничное условие (2.83) теперь принимает вид

$$I(\tau = 0, \theta) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \quad (2.86)$$

а условие лучистого равновесия (2.82) имеет вид

$$\int I d\Omega = \int I_p d\Omega, \quad U = U_p = \frac{4\sigma T^4}{c} \quad (2.87)$$

(постоянный поток равен $S = \int (\cos \theta) I d\Omega$).

Несмотря на анизотропию излучения, интеграл от интенсивности по углам, т. е. плотность излучения в каждой точке, равен равновесной величине U_p . Вернее, температура вещества в каждой точке, регулируемая переносом излучения, устанавливается в соответствии с плотностью излучения в данной точке $U = U_p$. Даже в упрощенной постановке задача решения системы (2.85)–(2.87) (так называемая проблема Милна) с математической точки зрения весьма сложна. Приближенное решение ее будет изложено в следующем параграфе. Сейчас же мы выведем эквивалентное этой системе интегральное уравнение, которое послужило основой для нахождения точного решения.

Воспользуемся интегральным выражением для интенсивности типа (2.32), которое в плоском случае можно записать в виде, непосредственно следующем из уравнения (2.85), если рассматривать его как линейное дифференциальное уравнение относительно I :

$$I(\theta, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} I_p[T(\tau')] \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'}{\cos \theta}, \quad \frac{\pi}{2} > \theta > 0, \quad (2.88)$$

$$I(\theta, \tau) = -\int_0^{\tau} I_p[T(\tau')] \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'}{\cos \theta}, \quad \pi > \theta > \frac{\pi}{2}. \quad (2.89)$$

Первая формула дает интенсивность излучения, распространяющегося в сторону поверхности. Интегрирование ведется от $\tau = \infty$, поскольку фотосфера предполагается полубесконечной. Вторая формула соответствует излучению, идущему вглубь; при этом учтено, что из пустоты кванты не приходят.

Вычислим плотность излучения $U = \frac{1}{c} \int I d\Omega$, воспользовавшись при интегрировании по θ от 0 до $\pi/2$ первой формулой, а в интервале $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ — второй:

$$cU = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{\tau}^{\infty} I_p \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'}{\cos \theta} - 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\tau} I_p \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\cos \theta}\right) \frac{d\tau'}{\cos \theta}.$$

Переставляя порядок интегрирования, вводя в первом интеграле новую переменную $w = 1/\cos \theta$, а во втором $w = -1/\cos \theta$, принимая во внимание определение интегральных экспонент (2.44) и заменяя $I_p = cU_p/4\pi$, получим

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} U_p E_1(\tau' - \tau) d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} U_p E_1(\tau - \tau') d\tau'. \quad (2.90)$$

Принимая во внимание условие лучистого равновесия $U = U_p \sim T^4$, получаем окончательно интегральное уравнение для равновесной плотности U_p или, что то же самое, для T^4 :

$$U_p(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} U_p(\tau') E_1(|\tau' - \tau|) d\tau'. \quad (2.91)$$

Выпишем для справочных целей интегральное выражение для потока в плоском случае, который вычисляется аналогично плотности ¹⁾:

$$S = \frac{c}{2} \int_{\tau}^{\infty} U_p E_2(\tau' - \tau) d\tau' - \frac{c}{2} \int_0^{\tau} U_p E_2(\tau - \tau') d\tau'. \quad (2.92)$$

Из уравнения (2.91) видно, что решение $U_p(\tau)$ определяется с точностью до постоянного множителя. Этот множитель и соответствует произвольной величине потока S .

§ 15. Решение задачи о плоской фотосфере. Найдем решение сформулированной в предыдущем параграфе задачи в диффузионном приближении. Усредняя уравнение диффузионного приближения по спектру и вводя средние коэффициент поглощения κ' и длину пробега $l' = 1/\kappa'$, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{dS}{dx} = c\kappa'(U_p - U), \quad (2.93)$$

$$S = -\frac{l'c}{3} \frac{dU}{dx}, \quad (2.94)$$

или, заменяя координату x оптической толщиной τ : $d\tau = -\kappa' dx$,

$$\frac{dS}{d\tau} = c(U - U_p), \quad (2.95)$$

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU}{d\tau}. \quad (2.96)$$

Уравнение (2.95) демонстрирует эквивалентность условий лучистого равновесия $U = U_p$ и постоянства потока $S = \text{const}$. В данном случае условие лучистого равновесия приводит к строгой эквивалентности диффузионного приближения и приближения лучистой теплопроводности, так как благодаря равенству $U = U_p$:

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU_p}{d\tau} = \frac{4}{3} \sigma \frac{dT^4}{d\tau}. \quad (2.97)$$

¹⁾ Для точки $\tau = 0$ эта формула уже была получена выше, в § 8 (2.45).

Любопытно сравнить точные формулы для плотности и потока в плоском случае (2.90), (2.92) с полученными в приближении «вперед-назад» (2.73). Последние отличаются от первых заменой интегральных экспонент на обычные и численными коэффициентами.

Решая это уравнение и воспользовавшись граничным условием (2.66) для того, чтобы выразить поток S через температуру поверхности T_0 ,

$$S = 2\sigma T_0^4, \quad (2.98)$$

получим распределение температуры и плотности излучения по оптической толщине:

$$U = U_p = \frac{4\sigma T^4}{c} = \frac{4\sigma T_0^4}{c} \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \quad (2.99)$$

Эффективная температура поверхности по определению $S = \sigma T_{\text{эф}}^4$ равна $T_{\text{эф}} = \sqrt[4]{2T_0} \approx 1,2T_0$.

Эффективная температура несколько выше истинной температуры поверхности T_0 . Это и понятно: кванты, выходящие с поверхности, рождаются в излучающем слое около поверхности толщиной порядка пробега (оптической толщиной порядка единицы). Температура излучающего слоя несколько выше, чем температура поверхности (рис. 2.14), поэтому и «температура» выходящего излучения также несколько выше. Температура среды совпадает с эффективной температурой излучения на оптической глубине $\tau = 2/3$. Можно сказать, что эта глубина соответствует примерно середине излучающего слоя.

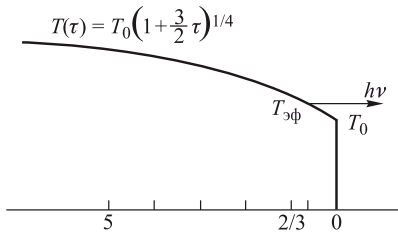


Рис. 2.14. Распределение температуры по оптической координате в плоской фотосфере в диффузионном приближении

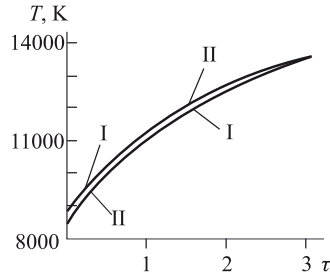


Рис. 2.15. Сопоставление распределений температуры в плоской фотосфере, вычисленных в диффузионном приближении (I) и точно (II). Для определенности эффективная температура выбрана равной $T_{\text{эф}} = 10\,500$ К (график взят из книги [1])

Для задачи о лучистом равновесии фотосферы, рассматриваемой как «серая материя», которая сводится к интегральному уравнению (2.91), было найдено точное аналитическое решение. Задача также решалась различными приближенными методами, более точными, чем диффузионное приближение. (Эта задача, одна из немногих задач теории переноса излучения, которые удастся решить точно, служит обычно эталоном для проверки различных приближенных методов.)

В точном решении температура поверхности T_0 при том же самом потоке S , т.е. при той же эффективной температуре $T_{\text{эф}}$, оказывается несколько меньше,

чем в диффузионном приближении. А именно, в точном решении $T_0^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} T_{\text{эф}}^4$,

$T_0 = 0,811 T_{\text{эф}}$, тогда как в диффузионном приближении $T_0^4 = \frac{1}{2} T_{\text{эф}}^4$, $T_0 = 0,841 T_{\text{эф}}$.

Распределения температуры по оптической толщине в точном и диффузионном решениях весьма близки друг к другу (они изображены на рис. 2.15), что свидетельствует о хорошей точности диффузионного приближения. Ошибка, даваемая диффузионным

приближением, тем меньше, чем больше оптическая толщина, т.е. чем дальше от границы, что вполне естественно. При $\tau \rightarrow \infty$ точное решение $U_p(\tau)$ асимптотически переходит в диффузионное (2.99). В этом можно убедиться и непосредственно на основе интегральных выражений для плотности и потока (2.91), (2.92). Этот вывод полезен тем, что показывает, как диффузионное приближение и приближение лучистой теплопроводности асимптотически заложены в точном уравнении.

Как следует из диффузионного решения (2.99), относительное изменение равновесной плотности U_p на длине пробега уменьшается при удалении от поверхности:

$$\frac{\Delta U_p}{U_p} \approx \frac{l'}{U_p} \frac{dU_p}{dx} = \frac{1}{U_p} \frac{dU_p}{d\tau} = \frac{1}{(2/3) + \tau} \approx \frac{1}{\tau}$$

при $\tau \rightarrow \infty$.

Интегральные экспоненты E_1 и E_2 быстро убывают с возрастанием аргумента, так что практически в интегралах (2.91), (2.92) играет роль лишь область $|\tau' - \tau| \sim 1$ около точки τ . Поэтому интегрирование по τ' от нуля до τ во вторых интегралах в формулах (2.90), (2.92) при $\tau \gg 1$ можно распространить до $-\infty$ или, что то же самое, интегрирование по $\tau - \tau'$ от нуля до $\tau \gg 1$ распространить на интервал от 0 до ∞ . Ошибка от этого будет тем меньше, чем больше τ .

Разложим $U_p(\tau')$ около точки τ :

$$U_p(\tau') = U_p(\tau) + \frac{dU_p}{d\tau}(\tau' - \tau) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_p}{d\tau^2}(\tau' - \tau)^2 + \dots$$

Поскольку $U_p(\tau)$ — медленная функция при $\tau \rightarrow \infty$, высшие производные ее становятся все меньше и меньше. Подставляя это разложение в (2.90), (2.91) и вычисляя интегралы, получим из (2.92) с точностью до членов, пропорциональных высшим производным от U_p до τ : $S = \frac{c}{3} \frac{dU_p}{d\tau}$, а из (2.91): $\frac{d^2 U_p}{d\tau^2} = 0$, т.е. уравнения диффузионного приближения и лучистой теплопроводности.

Тот факт, что интегральная плотность излучения в каждой точке равна равновесной, соответствующей температуре вещества, вовсе не означает, что то же самое относится и к спектральным плотностям¹⁾. Однако чем дальше от поверхности в глубь фотосферы, тем меньше относительные изменения температуры на расстояниях порядка среднего пробега, а следовательно, и пробегов разных частот. Поэтому вдали от поверхности имеет место локальное равновесие и в каждой частоте и под средним пробегом $l' = 1/\kappa'$ следует понимать росселандово среднее. Практически росселандов способ усреднения можно распространить на всю фотосферу вплоть до самой поверхности. Зная распределение температуры по средней оптической толщине и задаваясь зависящими от частоты коэффициентами поглощения, точнее, их отношениями к среднему κ'_ν/κ' , можно по формулам § 9 найти спектр излучения звезды (см. [1–3]). Спектр, вообще говоря, не совпадает с планковским, соответствующим $T_{\text{эф}}$, но в ряде случаев близок к нему.

§ 16. Потери энергии нагретого тела на излучение. Рассмотрим потери энергии на излучение всего тела в целом. При этом мы будем иметь в виду обычные тела конечных размеров, нагретые в общем случае неравномерным образом. Полная

¹⁾ Точно так же из того, что $S = \text{const}$, не следует, что $S_\nu = \text{const}$:

$$\frac{dS_\nu}{dx} = \kappa'_\nu(U_{\nu p} - U_\nu) \neq 0.$$

потеря энергии всем телом в 1 с, Q , равна, очевидно, интегралу по объему от потери энергии 1 см³ в 1 с, q . Замечая, что $q = \operatorname{div} \mathbf{S}$, можно записать ¹⁾, что

$$Q = \int q dV = \int S_0 d\Sigma, \quad (2.100)$$

где dV — элемент объема тела, а $d\Sigma$ — элемент поверхности; S_0 — нормальная составляющая потока излучения на поверхности тела. Ее можно представить в виде $S_0 = \sigma T_{\text{эф}}^4$, где $T_{\text{эф}}$ — эффективная температура поверхности тела.

Совсем не обязательно, чтобы эффективная температура была близка к средней температуре неравномерно нагретого тела T . В случае оптически толстого тела, размеры которого x гораздо больше средней длины пробега l (скажем, соответствующей средней температуре), поток по порядку величины равен

$$S_0 \sim lc \frac{U_p}{x} \sim \frac{l}{x} \sigma T^4 \ll \sigma T^4; \quad T_{\text{эф}} \sim \left(\frac{l}{x} \right)^{1/4} T.$$

При $(l/x)^{1/4} \ll 1$, $T_{\text{эф}} \ll T$. Эффективная температура скорее близка к температуре на поверхности. Лишь в случае не слишком толстых (оптически) тел эффективная температура может быть близка к средней температуре тела (температуры $T_{\text{эф}}$ и T могут быть близки и в том случае, когда в теле каким-то специальным образом поддерживается постоянная температура).

Рассмотрим теперь оптически тонкое тело, размеры которого малы по сравнению с некоторым средним пробегом квантов ²⁾.

Если оптическая толщина тела x/l мала, то кванты, рожденные в любой точке тела, почти беспрепятственно выходят наружу. По пути поглощается только доля квантов порядка $x/l \ll 1$. Плотность излучения в теле составляет долю порядка x/l от равновесной, т. е. значительно меньше равновесной (излучение существенно неравновесно). В самом деле, интенсивность излучения в какой-то точке равна согласно формуле (2.32) интегралу по лучу в пределах тела от плотности источ-

ников. Поскольку тело оптически тонкое, $\int_{s'}^s x'_\nu ds \sim x''/l_\nu \ll 1$, и экспоненциальный

множитель в формуле, учитывающий поглощение квантов, близок к единице. Тогда интенсивность $I_\nu \sim (x/l_\nu) I_{\nu p}$, а плотность излучения после интегрирования по углам $U_\nu \sim (x/l_\nu) U_{\nu p}$. Если проинтегрировать U_ν по спектру, введя некоторый средний пробег l_1 получим, что $U \sim (x/l_1) U_p \ll U_p$. Количество энергии, поглощаемой в 1 см³ в 1 с, также составляет долю порядка x/l_1 от энергии, испускаемой в 1 см³ в 1 с, так как обе величины относятся как U/U_p , что видно из формулы для q (2.61).

Таким образом, в случае оптически тонкого тела потеря энергии веществом в 1 см³ в 1 с сводится с точностью до малой величины порядка x/l_1 к испускаемой

¹⁾ q может менять знак на протяжении тела, т. е. отдельные объемы могут охлаждаться, а другие — нагреваться излучением.

²⁾ Мы обозначаем средний пробег в случае оптически тонкого тела через l_1 для того, чтобы не путать его с росселандовым средним пробегом l , характерным для оптически толстого тела. Как мы увидим ниже, закон усреднения поглощения по спектру в случае оптически тонкого тела отличается от росселандова.

энергии, т. е. к интегральной лучеиспускательной способности:

$$J = \int_0^{\infty} J_{\nu} d\nu = c \int_0^{\infty} \kappa'_{\nu} U_{\nu p} d\nu. \quad (2.101)$$

Если вынести за знак интеграла среднее значение коэффициента поглощения, которое обозначим через κ_1 , равное по определению обратной величине среднего пробега l_1 , то получим для интегрального испускания формулу

$$J = \kappa_1 U_p c = \frac{4\sigma T^4}{l_1}. \quad (2.102)$$

Сопоставление формул (2.102) и (2.101) дает закон усреднения длины пробега для случая оптически тонкого тела:

$$\kappa_1 = \frac{1}{l_1} = \frac{\int_0^{\infty} \kappa'_{\nu} U_{\nu p} d\nu}{\int_0^{\infty} U_{\nu p} d\nu} = \int_0^{\infty} \kappa'_{\nu} G_1(u) du, \quad (2.103)$$

$$G_1(u) = \frac{15}{\pi^4} \frac{u^3}{e^u - 1}, \quad u = \frac{h\nu}{kT}, \quad (2.104)$$

или через коэффициент истинного поглощения:

$$\kappa_1 = \frac{1}{l_1} = \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} G'_1(u) du, \quad (2.105)$$

$$G'_1(u) = (1 - e^{-u})G_1(u) = \frac{15}{\pi^4} e^{-u} u^3. \quad (2.106)$$

Этот способ усреднения, как видим, отличается от росселандова: при росселандовом усреднении по формуле (2.77) усредняется пробег, т.е. обратная величина коэффициента поглощения, причем весовая функция пропорциональна производной от функции Планка по температуре. Интегральная лучеиспускательная способность характеризуется пробегом, который получается путем усреднения самого коэффициента поглощения с весом, пропорциональным функции Планка.

Полная потеря энергии нагретым оптически тонким телом определяется интегралом от лучеиспускательной способности по объему тела:

$$Q = \int q dV = \int J dV. \quad (2.107)$$

В отличие от оптически толстого тела, которое охлаждается излучением «с поверхности», охлаждение оптически тонкого тела имеет существенно объемный характер. Можно, конечно, и в этом случае ввести понятие потока излучения с поверхности и записать уравнение (2.107) в форме интеграла по поверхности, так как формула $q = \operatorname{div} \mathbf{S}$ сохраняет силу всегда. Однако в случае объемного охлаждения такая интерпретация потерь имеет чисто формальный характер, тогда как в случае оптически толстого тела вылетающие кванты на самом деле рождаются в поверхностном слое. В соответствии с этим и спектр излучения оптически толстого тела в какой-то степени близок к планковскому спектру, соответствующему эффективной температуре

$T_{\text{эф}}$ или температуре у поверхности. Спектр излучения оптически тонкого тела может существенным образом отличаться от планковского, соответствующего температуре тела, если коэффициент поглощения вещества сильно зависит от частоты. Спектр в этом случае характеризуется частотной функцией $\chi'_\nu U_{\nu p}$.

Сопоставим лучистые потери энергии, отнесенные к единице объема тела (скорость охлаждения единицы объема), и отнесенные к единице поверхности (поток с поверхности) для случаев оптически толстого и оптически тонкого тела. Если размеры тела порядка x , то поверхность его порядка x^2 , а объем — порядка x^3 . Для оптически толстого тела скорость охлаждения, отнесенная к поверхности, порядка

$$\frac{Q}{x^2} \sim S \sim \frac{l}{x} \sigma T^4 \ll \sigma T^4, \quad \frac{l}{x} \ll 1, \quad (2.108)$$

а скорость охлаждения, отнесенная к объему,

$$\frac{Q}{x^3} \sim \frac{S}{x} \sim \frac{1}{x} \frac{l}{x} \sigma T^4 \sim \left(\frac{l}{x}\right)^2 \frac{\sigma T^4}{l} \ll \frac{\sigma T^4}{l}. \quad (2.109)$$

В случае же оптически тонкого тела

$$\frac{Q}{x^2} \sim \frac{Jx^3}{x^2} \sim \frac{x}{l_1} \sigma T^4 \ll \sigma T^4 \quad \text{при} \quad \frac{x}{l_1} \ll 1, \quad (2.110)$$

$$\frac{Q}{x^3} \sim J \sim \frac{\sigma T^4}{l_1} \quad \text{при} \quad \frac{x}{l_1} \ll 1. \quad (2.111)$$

Сравним относительные лучистые потери двух тел примерно одинаковой средней температуры, одно из которых имеет большие размеры (оптически толстое), а другое — малые (оптически тонкое). Плотности вещества, так же как и температуры, будем считать близкими, так что средние пробеги l и l_1 , которые есть функции только температуры и плотности вещества, — одного порядка (различие в способах усреднения по спектру, как правило, не вносит очень больших численных различий в величины пробегов; l и l_1 обычно различаются не более, чем в несколько раз).

Из соотношений (2.108) и (2.110) видно, что в обоих случаях потери, отнесенные к поверхности, т.е. потоки с поверхности, меньше σT^4 . Лишь тело, размеры которого порядка пробега (оптическая толщина порядка единицы) $x \sim l \sim l_1$, испускает с поверхности поток излучения, соответствующий абсолютно черному телу с температурой порядка средней температуры тела.

Что же касается потерь, отнесенных к объему, или, что то же самое, к массе, то в случае оптически толстого тела массовая скорость охлаждения гораздо меньше, чем в случае оптически тонкого, для которого она порядка средней по объему интегральной лучеиспускающей способности $J \sim \sigma T^4 / l_1$ и не зависит от размеров (в силу объемного характера излучения).

Физическая причина этого ясна: кванты, испущенные внутри оптически толстого тела, «заперты» в теле и не в состоянии выйти наружу, поглощаясь по пути внутри тела.

§ 17. Уравнения гидродинамики с учетом энергии и давления излучения и лучистого теплообмена. В § 10 было показано, как следует учитывать взаимодействие излучения с веществом, которое сводится к испусканию и поглощению света. При этом предполагалось, что энергия и давление излучения малы по сравнению с энергией и давлением вещества.

При очень высоких температурах или в сильно разреженном газе (но при больших размерах газового тела, больших длины пробега излучения) пренебрегать энергией и давлением излучения нельзя. Довольно очевидно, что в случае локального

равновесия излучения с веществом, когда $U = U_p = 4\sigma T^4/c$, а давление излучения $p_\nu = U_p/3 = 4\sigma T^4/3c$, то в уравнениях гидродинамики следует везде к внутренней энергии и давлению вещества, добавить энергию и давление излучения, а также ввести член лучистой теплопроводности. Покажем, как этот вывод следует из общих уравнений, описывающих систему: вещество плюс излучение.

Для того чтобы записать в полной форме уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии системы, состоящей из вещества и излучения (в общем случае неравновесного), удобно исходить из дивергентной формы уравнений, эквивалентных уравнениям «непрерывности» для соответствующих величин. Для движения идеального газа без учета излучения эти уравнения были сформулированы в гл. I (см. формулы (1.7), (1.10)). Уравнения для системы вещество плюс излучение легко записать путем непосредственного обобщения уравнений (1.7), (1.10) (заметим, что мы рассматриваем только нерелятивистские движения). Именно, к плотности импульса вещества добавим плотность импульса излучения $\mathbf{G}$, а к тензору плотности потока импульса вещества добавим тензор плотности потока импульса излучения T_{ik} . Как известно, последняя величина эквивалентна тензору максвелловских напряжений электромагнитного поля. Точно так же к плотности энергии вещества добавим плотность энергии излучения U , а к плотности потока энергии — поток энергии излучения $\mathbf{S}$, представляющий собой вектор Пойнтинга (импульс излучения связан с вектором Пойнтинга соотношением $\mathbf{G} = \mathbf{S}/c^2$).

Получим таким образом уравнения импульса и энергии системы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_i + G_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\Pi_{ik} - T_{ik}) = 0, \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho\varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2} + U\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\varrho u_k\left(\varepsilon + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2}\right) + S_k\right\} = 0. \quad (2.113)$$

Уравнение непрерывности остается, очевидно, неизменным, так как излучение «не обладает» массой ¹⁾,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho u_k) = 0.$$

Уравнения (2.112) и (2.113), сформулированные выше путем простого обобщения уравнений гидродинамики и имеющие ясный физический смысл, можно получить и строгим формальным путем, исходя из уравнения сохранения, записанного для четырехмерного тензора энергии — импульса системы вещество плюс излучение, если в слагаемом тензора, относящемся к веществу, перейти к нерелятивистскому приближению (мы не будем здесь проделывать этот весьма элементарный вывод).

Величины, характеризующие излучение и входящие в уравнения (2.112), (2.113), можно расшифровать двояким образом. В электромагнитной, полевой трактовке они выражаются через напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а именно:

$$\begin{aligned} U &= \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \\ \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] = c^2\mathbf{G}, \\ T_{ik} &= \frac{1}{4\pi}\left\{-E_i E_h - H_i H_k + \frac{1}{2}\delta_{ik}(E^2 + H^2)\right\}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

¹⁾ Если $U \sim \varepsilon \ll \varrho c^2$.

Следует только иметь в виду, что излучение представляет собою быстропеременное электромагнитное поле; период электромагнитных колебаний ничтожно мал по сравнению с макроскопическими временами процесса, поэтому подразумевается, что в приведенных выше формулах произведено усреднение по времени за период, большой по сравнению с периодом колебаний поля.

В квантовой трактовке макроскопические величины $U, \mathbf{S}, T_{ik}$ выражаются через функцию распределения квантов. Если $f(\nu, \Omega, \mathbf{r}, t)$ — функция распределения в точке $\mathbf{r}$ в момент t в зависимости от частоты ν и направления движения квантов Ω , то, как мы уже знаем (см. § 1 этой главы),

$$\begin{aligned} U &= \int h\nu f d\Omega d\nu, \\ S &= \int h\nu c \Omega f d\Omega d\nu, \\ T_{ik} &= \int \Omega_i \Omega_k h\nu f \Omega d\nu^2. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Путем разложения быстропеременных электромагнитных полей в интегралы Фурье поля можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний различных частот. При усреднении по времени членов, квадратичных по составляющим полей, которые содержатся в формулах для U, S_i, T_{ik} , произведения величин, относящихся к различным частотам, исчезают, и остаются только квадратичные члены с произведениями компонент Фурье, отвечающих одной и той же частоте. Поэтому энергия, импульс, потоки энергии и импульса излучения представляются в виде линейной суперпозиции членов, соответствующих разным частотам. Это позволяет ввести понятие интенсивности излучения данной частоты $I_\nu, (\Omega, \mathbf{r}, t)$ и выразить макроскопические величины через интегралы от интенсивности по спектру и направления распространения излучения:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega d\nu, \\ \mathbf{S} &= \int \Omega I_\nu d\Omega d\nu, \\ T_{ik} &= \frac{1}{c} \int \Omega_i \Omega_k I_\nu d\Omega d\nu, \end{aligned} \quad (2.116)$$

а также перейти к квантовой трактовке интенсивности как произведения энергии кванта на функцию распределения, $I_\nu = h\nu c f$.

Известно, что электромагнитные поля, частоты и направления распространения электромагнитных волн, а следовательно, и интегральные величины $U, \mathbf{S}, T_{ik}$ зависят от того, в какой системе координат они измеряются.

Интегральные величины, фигурирующие в уравнениях (2.112) и (2.113), относятся к покоящейся, «лабораторной» системе координат, в которой данная частица вещества движется со скоростью $\mathbf{u}$. Между тем существу дела скорее отвечают параметры излучения, измеренные в «собственной» системе координат, в которой частица покоится. В самом деле, в состоянии полного термодинамического равновесия именно плотность энергии излучения в покоящемся веществе равна равновесной величине

²⁾ Энергия кванта есть $h\nu$, импульс $\Omega h\nu/c$, поток i -й составляющей импульса в k -м направлении $\Omega_i \Omega_k \frac{h\nu}{c}$, откуда и получается формула для тензора потока импульса T_{ik} .

$U_p = 4\sigma T^4/c$; диффузионный характер имеет поток излучения относительно неподвижного вещества, так как излучение «сносится» вместе с движущимся веществом и полный поток включает в себя этот «снос».

Перейдем в уравнениях (2.112) и (2.113) от величин $U, \mathbf{S}, T_{ik}$ к штрихованным величинам $U', \mathbf{S}', T'_{ik}$, связанным с движущимися частицами среды. При движении среды с нерелятивистскими скоростями $u/c \ll 1$, когда можно пренебречь членами, пропорциональными u/c , соответствующее преобразование к движущейся системе координат дает (см. [6]):

$$U = U', \quad S_i = S'_i + u_i U' + u_k T'_{ik}, \quad T_{ik} = T'_{ik}. \quad (2.117)$$

Введем преобразованные величины в уравнения (2.112) и (2.113). При этом заметим, что импульс излучения G_i чрезвычайно мал по сравнению с импульсом вещества ϱu_i , и им можно пренебречь¹⁾. Записывая в явном виде тензор потока импульса вещества $\Pi_{ik} = \varrho u_i u_k + p \delta_{ik}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho u_i u_k) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T'_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2} + U' \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \varrho u_k \left(\varepsilon + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} \right) + S'_k + u_k U' + u_i T'_{ik} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.118)$$

(эти уравнения были получены С. З. Беленьким [7]).

Рассмотрим случай локального термодинамического равновесия излучения с веществом. Плотность излучения равна при этой равновесной величине $U' = 4\sigma T^4/c$. Поток энергии излучения относительно вещества S'_k приблизительно пропорционален градиенту равновесной плотности излучения. По формуле (2.76) для лучистой теплопроводности получим

$$S'_k = -\frac{lc}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{4\sigma T^4}{c} \right) = -\frac{16\sigma l T^3}{3} \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Тензор потока импульса проще всего получить из формулы (2.116), если заметить, что в условиях локального равновесия поле излучения почти изотропно и интенсивность очень слабо зависит от угла. Найдем

$$T'_{ik} = \frac{U'_p}{3} \delta_{ik} = p_\nu \delta_{ik},$$

где $p_\nu = U'_p/3 = 4\sigma T^4/3c$ — давление излучения. Подставляя все эти величины в уравнения (2.118), найдем для случая локального равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho u_i u_k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(p + p_\nu) = 0, \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \varepsilon + \frac{\varrho u^2}{2} + U_p \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ u_k \left(\varrho \varepsilon + U_p + \frac{\varrho u^2}{2} + p + p_\nu \right) - \frac{lc}{3} \frac{\partial U_p}{\partial x_k} \right\} = 0, \quad (2.120)$$

где $U_p = 3p_\nu = 4\sigma T^4/c$.

¹⁾ В самом деле, если энергия излучения сравнима с энергией вещества, т. е. $U \sim \varrho u^2$, то импульс излучения, который порядка $G \sim U/c$, в c/u раз меньше импульса вещества ϱu :

$$G \sim \frac{U}{c} \sim \frac{U}{c} \varrho u.$$

Уравнения импульса и энергии системы принимают замкнутую форму, так как все величины, характеризующие излучение, выражаются через температуру (и оптические свойства вещества).

Если излучение не находится в локальном термодинамическом равновесии с веществом, то к уравнениям (2.118) нужно добавить уравнение переноса излучения. Об уравнении переноса излучения в движущейся среде с учетом членов порядка u/c см. [8].

§ 18. Число квантов как инвариант классического электромагнитного поля.

Поле излучения характеризуется плотностью и потоком энергии (последней пропорциональна плотность импульса); эти величины определяются формулами (2.114).

Замечательно, что в классической теории можно ввести еще одну характерную величину, которая (с точностью до произвольного множителя) совпадает с числом квантов в поле [15]. На первый взгляд число квантов по определению есть квантовое понятие и не играет роли, не может быть определено в классической теории. Напомним, однако, что в классической механике номер квантового состояния осциллятора является адиабатическим инвариантом. Подобно этому число квантов в заданном электромагнитном поле должно быть адиабатическим инвариантом. Вдобавок к этому оно должно быть величиной, сохраняющейся во времени, и релятивистским инвариантом.

Величина, пропорциональная числу квантов, дается выражением

$$N \sim \iint \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \mathbf{H}(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (2.121)$$

где интегрирование производится по пространствам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ ($d\mathbf{r}, d\mathbf{r}'$ обозначают элементы объемов). Структуру этого выражения легко понять, если перейти к переменным интегрирования $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Фиксируем точку $\mathbf{r}$ и выпишем интеграл по объему $d\mathbf{q}$ в полярных координатах с центром в точке $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \int \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{q}) \frac{q^2 d\mathbf{q} d\Omega_{\mathbf{q}}}{q^2},$$

где $d\Omega_{\mathbf{q}}$ — элемент телесного угла около точки $\mathbf{r}$.

Выписанное выражение по порядку величины равно $\mathbf{E}^2(\mathbf{r})\bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}$ — то среднее расстояние, на котором сохраняется корреляция между полем в данной точке $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и полем в окрестности этой точки. Составляя аналогичное выражение с $\mathbf{H}$, получим, что по порядку величины

$$N \sim \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \bar{\lambda} d\mathbf{r} \sim \int U(\mathbf{r}) \bar{\lambda} d\mathbf{r}.$$

Выведем теперь выражение (2.121) для числа квантов¹⁾. Рассмотрим поле в отсутствие зарядов, как свободных, так и связанных. При этом $\text{div } \mathbf{E} = 0$; $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Число квантов в данном интервале частот $d\nu$ равно энергии поля, которая заключена в этом интервале, поделенной на $h\nu$. Чтобы определить спектральную энергию, разложим поле в интеграл Фурье по пространству,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

¹⁾ Мы благодарны А. С. Компанейцу за обсуждение этого вопроса.

причем в силу уравнений поля при указанных условиях компоненты Фурье $\mathbf{E}_k$ зависят от времени как $e^{-i\omega_k t}$, где $\omega_k = ck$ ($\omega_k = 2\pi\nu_k$). Введем для каждого направления волнового вектора $\mathbf{k}$ направления поляризации света $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, перпендикулярные к $\mathbf{k}$. Компоненты Фурье поля с данной поляризацией равны

$$E_{k1} = \int (\mathbf{E}\mathbf{n}_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Аналогично определяются E_{k2}, H_{k1}, H_{k2} .

Энергия волн (с данной поляризацией), распространяющихся в направлении $\mathbf{k}$, пропорциональна

$$\varepsilon_{k1} \sim |E_{k1} + H_{k2}|^2, \quad \varepsilon_{k2} \sim |E_{k2} - H_{k1}|^2.$$

Соответствующее число квантов данной частоты пропорционально

$$f_k = f_{k1} + f_{k2} = \frac{\varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2}}{h\nu_k} \sim \frac{\varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2}}{k}.$$

Полное число квантов в поле пропорционально величине $N \sim \int f_k d\mathbf{k}$. Подставляя выражения для E_{k1} и т. д. и производя несложные преобразования, найдем

$$N \sim \int [(\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}_1) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}] [(\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{n}_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} d\mathbf{r}'] \frac{d\mathbf{k}}{k} + \dots;$$

к этому интегралу добавляются аналогичные члены с $(\mathbf{E}\mathbf{n}_2)$, $(\mathbf{H}\mathbf{n}_1)$, $(\mathbf{H}\mathbf{n}_2)$. Это выражение можно записать как один интеграл:

$$N \sim \iint [(\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}_1)(\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{n}_1) + (\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}_2)(\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{n}_2)] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{k}}{k} + \text{член с } \mathbf{H}. \quad (2.122)$$

Из условий $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ следует, что волны поперечные, т. е. величины

$$E_{h3} = \int (\mathbf{E}(\mathbf{n}_3) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

и H_{h3} равны нулю ($\mathbf{n}_3 = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Значит, формула (2.122) не изменится, если добавить к ней равную нулю величину

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}_3) (\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{n}_3) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{d\mathbf{k}}{k}.$$

Но после добавления такой величины выражение в квадратных скобках (2.122) примет вид скалярного произведения

$$(\mathbf{E}(\mathbf{r})\mathbf{n}_1) (\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathbf{n}_1) + \dots = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}'),$$

так как $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ образуют три перпендикулярных направления. В результате получим

$$N \sim \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d\mathbf{k}}{k} + \text{член с } \mathbf{H}.$$

Вычисляя интеграл $\int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d\mathbf{k}}{k}$, получим формулу (2.121), что и доказывает сделанное выше утверждение о том, что выражение (2.121) пропорционально числу квантов в поле.

Наиболее интересен тот факт, что N написано как двойной интеграл по объему при данном $t = \text{const}$. При лоренц-преобразовании $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ меняются; кроме того,

нужно перейти к другому объему $t' = \text{const}$ (к другой гиперповерхности в четырехмерном пространстве Минковского). Непосредственное доказательство того, что выражение N является инвариантом, весьма затруднительно. Поскольку t и t' не совпадают, нужно использовать уравнения Максвелла для того, чтобы перейти от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в объеме $t = \text{const}$ к $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ в объеме $t' = \text{const}$. Однако релятивистская инвариантность (2.121) в действительности следует именно из того факта, что полное число квантов — число частиц во всем объеме, очевидно, является релятивистским инвариантом. Существенно при этом, что рассматривается свободное поле без зарядов, в котором кванты не рождаются и не поглощаются.

Глава III

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. Газ из невзаимодействующих частиц

§ 1. Идеальный газ с постоянной теплоемкостью и неизменным числом частиц. Во многих реальных процессах макроскопические параметры, характеризующие состояние газа, скажем, плотность ρ и удельная внутренняя энергия ε или температура T , меняются достаточно медленно по сравнению со скоростями релаксационных процессов, приводящих к установлению термодинамического равновесия. В таких условиях частица газа в каждый момент времени пребывает в состоянии, очень близком к термодинамически равновесному, соответствующему мгновенным значениям макроскопических параметров. Исключения составляют лишь очень быстрые процессы, такие, например, как прохождение газа через фронт ударной волны. В этой главе будут рассматриваться только термодинамически равновесные состояния газа.

Для описания гидродинамического движения вещества в адиабатическом случае необходимо задать энтропию или удельную внутреннюю энергию как функции плотности и давления: $S(\rho, p)$, $\varepsilon(\rho, p)$. В неадиабатическом случае обычно в уравнение энергии в явном виде входит еще и температура (например, при учете теплопроводности или излучения), которую необходимо связать с плотностью и давлением посредством уравнения состояния $p = p(\rho, T)$.

Как известно, все термодинамические функции вещества могут быть получены с помощью одного из обобщенных термодинамических потенциалов, заданных в виде функций соответствующих переменных, а именно: $\varepsilon(S, \rho)$; $w(S, p)$; $F(T, \rho)$; $\Phi(T, p)$, где F — свободная энергия, w — энтальпия, а Φ — термодинамический потенциал (в узком смысле).

При конкретных расчетах термодинамических свойств газов обычно непосредственно вычисляют внутреннюю энергию в зависимости от температуры и плотности или температуры и давления $\varepsilon(T, \rho)$ или $\varepsilon(T, p)$. При этом приходится независимо вводить уравнение состояния, которое можно вывести из функции $\varepsilon(S, \rho)$, но нельзя найти из функций $\varepsilon(T, \rho)$ или $\varepsilon(T, p)$.

Везде, где это не будет оговорено особо, мы будем рассматривать идеальные газы, в которых, по определению, можно пренебречь взаимодействием между частицами. Во многих практически важных случаях приближение идеальности выполняется с большой точностью (неидеальность проявляется лишь при достаточно больших плотностях; см. об этом § 11–14).

Уравнение состояния идеального газа можно записать в одной из эквивалентных форм:

$$p = nkT = N \rho kT = \frac{NkT}{V} = \frac{R}{\mu} \rho T = A \rho T, \quad (3.1)$$

где n — число частиц в 1 см^3 ; N — число частиц в 1 г , R — универсальная газовая постоянная¹⁾; A — газовая постоянная, рассчитанная на 1 г ; μ — средний молекулярный вес; V — удельный объем. При этом число частиц N в 1 г или средний молекулярный вес μ могут сами зависеть от температуры и плотности вследствие диссоциации, химических реакций или ионизации.

Внутренняя энергия газа, а вместе с нею и теплоемкость при постоянном объеме в общем случае складываются из ряда компонент, соответствующих различным степеням свободы газа: поступательному движению, вращениям и колебаниям молекул, электронному возбуждению атомов и молекул, а также из компонент, соответствующих диссоциации молекул, протеканию химических реакций, ионизации. В дальнейшем для краткости мы будем эти последние факторы также включать в общее понятие «степеней свободы». Как и энергия, по степеням свободы суммируются все остальные термодинамические потенциалы, а также энтропия. Различные степени свободы, за исключением поступательного движения частиц, включаются в термодинамические функции лишь начиная с более или менее определенных значений температур. Для степеней свободы, связанных с изменением числа частиц (диссоциации, химических реакций, ионизации) эти температуры зависят от плотности газа.

При очень низких температурах атомы и молекулы не ионизованы и не возбуждены; химический состав соответствует энергетически наивыгоднейшему состоянию; тепловое движение ограничивается только поступательными перемещениями частиц. Удельная внутренняя энергия, отсчитываемая от нуля температуры, равна при этом $\varepsilon_{\text{пост}} = \frac{3}{2}NkT$; удельная теплоемкость при постоянном объеме — $c_{V \text{ пост}} = \frac{3}{2}Nk$.

В одноатомном газе область температур, в которой термодинамические функции определяются чисто поступательным движением атомов, простирается до весьма высоких значений порядка нескольких тысяч или даже десятка тысяч градусов, пока не начинаются ионизация и возбуждение электронов в атомах.

В молекулярном газе при наиболее низких температурах возбуждаются вращения молекул. Это происходит обычно при нескольких или десятке градусов Кельвина. Энергии вращательных квантов, выраженные в кельвинах (то есть поделенные на постоянную Больцмана k), весьма малы: например, у кислорода $2,1 \text{ К}$, у азота $2,9 \text{ К}$, у окиси азота $2,4 \text{ К}$. Исключение составляет лишь молекула водорода, для которой эта величина равна $85,4 \text{ К}$. Даже при комнатной температуре 300 К (а тем более при высоких) квантовые эффекты не играют никакой роли. Вращательная часть теплоемкости равна своему классическому значению.

Теплоемкость $c_{V \text{ вращ}} = Nk$ для двухатомных и линейных многоатомных молекул и $c_{V \text{ вращ}} = \frac{3}{2}Nk$ для нелинейных многоатомных молекул. Соответствующие составляющие внутренней энергии равны $\varepsilon_{\text{вращ}} = NkT$ или $\frac{3}{2}NkT$.

Колебания в молекулах возбуждаются при гораздо более высоких температурах порядка нескольких сотен или тысячи градусов, поэтому существует диапазон температур, в котором тепловое движение молекулярного газа складывается только из поступательного и вращательного. Теплоемкость в этом диапазоне постоянна,

¹⁾ $R = 8,31 \cdot 10^7 \text{ эрг/К} \cdot \text{моль} = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль} = 1,99 \text{ кал/К} \cdot \text{моль}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$.

и для двухатомного газа (например, воздуха) равна $c_V = c_{V \text{ пост}} + c_{V \text{ вращ}} = \frac{5}{2}Nk$.
Соответствующая внутренняя энергия $\varepsilon = \frac{5}{2}NkT$.

Энергии колебательных квантов, выраженные в кельвинах, в двухатомных молекулах обычно порядка нескольких тысяч градусов. Например, у O_2 $h\nu/k = 2230$ К, у N_2 — 3340 К, у N_2 — 2690 К; у трехатомных молекул самая низкая частота колебаний обычно меньше, например, у NO_2 $h\nu/k = 916, 1960, 2310$ К. При температурах, меньших и порядка $h\nu/k$, колебательная часть теплоемкости должна вычисляться по квантовым формулам и сама зависит от температуры. Однако при температурах, больших $h\nu/k$, колебательная теплоемкость постоянна и равна своему классическому значению k на одну колебательную степень свободы. Двухатомная молекула имеет одну колебательную степень свободы, нелинейная m -атомная молекула $3m - 6$, а линейная $3m - 5$ колебательных степеней свободы.

Таким образом, при температурах более высоких, чем наибольшее из значений $h\nu/k$, полная классическая теплоемкость из расчета на одну молекулу $c_V = c_{V \text{ пост}} + c_{V \text{ вращ}} + c_{V \text{ кол}}$ равна $c_V = \frac{3}{2}Nk + Nk + (3m - 5)Nk = \left(3m - \frac{5}{2}\right)Nk$ для линейных m -атомных молекул и $c_V = \frac{3}{2}Nk + \frac{3}{2}Nk + (3m - 6)Nk = (3m - 2)Nk$ — для нелинейных молекул. Для двухатомных молекул $c_V = \frac{7}{2}Nk$. Уравнение адиабаты для идеального газа с постоянной теплоемкостью и неизменным числом частиц определяется из общего термодинамического соотношения:

$$T dS = d\varepsilon + p dV = c_V dT + NkT \frac{dV}{V} = 0.$$

Отсюда получается после интегрирования

$$T \sim V^{-(\gamma-1)} \sim \varrho^{\gamma-1}; \quad \varrho \sim V^{-\gamma} \sim \varrho^{\gamma}, \quad (3.2)$$

причем коэффициенты пропорциональности зависят только от энтропии. Здесь $\gamma = c_p/c_V$ — показатель адиабаты; $c_p = c_V + Nk$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Например, для одноатомного газа $\gamma = 5/3$, для двухатомного с невозбужденными колебаниями — $\gamma = 7/5$; с полностью возбужденными колебаниями — $\gamma = 9/7$.

Следует, однако, отметить, что не существует широкого диапазона температур, в котором колебания в молекулах были бы полностью возбуждены, а теплоемкость и показатель адиабаты были бы постоянными, так как диссоциация молекул и химические реакции часто начинаются еще при таких температурах, когда колебательная часть теплоемкости только достигает своего предельного классического значения.

§ 2. Расчеты термодинамических функций методом статистических сумм. Наиболее строгим и последовательным образом все термодинамические функции можно найти с помощью так называемого метода статистических сумм. Изложим кратко основы этого метода¹⁾ с тем, чтобы получить выражение для энтропии, квантовую формулу для колебательной энергии молекулы, а также чтобы применить его в последующих параграфах к газу с переменным числом частиц.

Согласно статистической механике вероятность n -го состояния системы, состоящей из N частиц, энергия которого равна E_n , пропорциональна величине

¹⁾ Подробные выводы можно найти в курсах статистической физики, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1].

$\exp(-E_n/kT)$. Сумма этих вероятностей по всем возможным состояниям системы, определенная с точностью до постоянного множителя,

$$Q = \sum_n e^{-E_n/kT}, \quad (3.3)$$

и называется статистической суммой системы.

Для идеального больцмановского газа, состоящего из молекул нескольких сортов, числа которых равны $N_A, N_B, \dots$, статистическая сумма распадается на произведение сомножителей, соответствующих каждому сорту частиц:

$$Q = \frac{Z_A^{N_A}}{N_A!} \frac{Z_B^{N_B}}{N_B!} \dots \quad (3.4)$$

Здесь $Z_A, Z_B, \dots$ — статистические суммы одной молекулы каждого сорта, которые выражаются формулами, по виду сходными с (3.3):

$$Z = \sum_k e^{-\varepsilon_k/kT}, \quad (3.5)$$

где ε_k — энергия молекулы в k -м состоянии, суммирование производится по всем возможным состояниям одной молекулы.

Общая формула для свободной энергии системы имеет вид

$$F = -kT \ln Q. \quad (3.6)$$

Если заменить факториалы в выражении (3.4) по формуле Стирлинга $N! \approx (N/e)^N$ и подставить полученное выражение в (3.6), то получим

$$F = -N_A kT \ln \frac{Z_A e}{N_A} - N_B kT \ln \frac{Z_B e}{N_B} - \dots \quad (3.7)$$

Поскольку свободная энергия является термодинамическим потенциалом по отношению к переменным: температура и плотность (объем), все термодинамические функции можно вывести из формулы (3.7), если известны статистические суммы молекул в зависимости от температуры T и объема V . По общим формулам термодинамики энтропия, внутренняя энергия и давление равны

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon = F + TS = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_{V, N}^{1)}, \quad (3.9)$$

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}. \quad (3.10)$$

Если пренебрегать взаимодействием между электронными состояниями, колебаниями и вращениями, рассматривать молекулу как жесткий ротатор, а колебания считать гармоническими, то энергию молекулы можно представить в виде суммы энергий, соответствующих различным степеням свободы. При этом, как видно из

¹⁾ Как легко проверить путем непосредственной подстановки (3.6), (3.3) в (3.9) $\varepsilon = \Sigma E_n \exp(-E_n/kT) / \Sigma \exp(-E_n/kT)$, внутренняя энергия есть просто энергия системы, усредненная по всем возможным состояниям.

формулы (3.5), статистическая сумма одной молекулы также распадается на произведение:

$$Z = Z_{\text{пост}} Z_{\text{вращ}} Z_{\text{кол}} Z_{\text{эл}}. \quad (3.11)$$

Мы приведем здесь формулы для статистических сумм без вывода.

Поступательная статистическая сумма любой частицы равна

$$Z_{\text{пост}} = \left(\frac{2\pi M kT}{h^2} \right)^{3/2} V, \quad (3.12)$$

где M — масса частицы, а V — объем, занимаемый газом (если под N понимать число частиц в 1 г, то V — удельный объем).

Вращательная сумма при температурах, гораздо больших энергии вращательного кванта, поделенной на k , равна

$$Z_{\text{вращ}} = \frac{8\pi^2 I kT}{h^2 \sigma} \quad (3.13)$$

для двухатомной или линейной многоатомной молекулы ¹⁾ и

$$Z_{\text{вращ}} = \frac{8\pi^2}{\sigma} \left(\frac{2\pi I kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (3.14)$$

для нелинейной многоатомной молекулы.

Здесь I в первой из формул — момент инерции линейной молекулы, а во второй — среднее геометрическое из трех моментов инерции нелинейной многоатомной молекулы $I = (I_1 I_2 I_3)^{1/3}$; σ — так называемый фактор симметрии, который равен увеличенному на единицу числу перестановок одинаковых атомов в молекуле, эквивалентных вращению молекулы как целого ²⁾.

Квантовое выражение для статистической суммы гармонического осциллятора частотой ν есть

$$Z_{\text{кол}} = \left(1 - \exp \left(-\frac{h\nu}{kT} \right) \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

В этой формуле энергия колебаний отсчитывается от наиболее низкого квантового колебательного уровня. Предполагается, что энергия нулевых колебаний $h\nu/2$ включена в энергию основного состояния молекулы.

Если молекула обладает несколькими колебательными степенями свободы, то ее полная колебательная сумма представляется в виде произведения сомножителей, соответствующих всем нормальным колебаниям.

Наконец, электронная статистическая сумма сохраняет свой первоначальный вид:

$$Z_{\text{эл}} = \sum_n e^{-\epsilon_n/kT}, \quad (3.16)$$

где ϵ_n — энергия n -го электронного квантового состояния атома или молекулы. Если уровни вырождены, то каждая компонента все равно входит в сумму в виде самостоятельного слагаемого, так что числа одинаковых слагаемых равны статистическим весам уровней.

Различные атомные и молекулярные константы, необходимые для расчета термодинамических функций газов, известны обычно из спектроскопических данных.

¹⁾ Энергия вращательного кванта $h\nu_{\text{вращ}} = h^2/8\pi^2 I$, так что $Z_{\text{вращ}} = kT/h\nu_{\text{вращ}} \cdot \sigma$.

²⁾ Например, в двухатомной молекуле, состоящей из одинаковых атомов, $\sigma = 2$, а из разных — $\sigma = 1$.

Энергии вращательных и колебательных квантов для ряда молекул уже были приведены в предыдущем параграфе. Энергии первых возбужденных электронных состояний атомов и молекул ε_1 обычно порядка нескольких эВ, то есть ε_1/k порядка нескольких десятков тысяч градусов; например, у атомов О ^1D -терм, $\varepsilon_1 = 1,96$ эВ, $\varepsilon_1/k = 22\,800$ К; у N, $^2D^0$ -терм, $\varepsilon_1 = 2,37$ эВ, $\varepsilon_1/k = 27\,500$ К; у молекул: N₂, $A^3\Sigma_u^+$ -терм, $\varepsilon_1 = 6,1$ эВ, $\varepsilon_1/k = 71\,000$ К; у NO, $A^2\Sigma^+$ -терм, $\varepsilon_1 = 5,29$ эВ, $\varepsilon_1/k = 61\,400$ К. Бывают и исключения. Так, у молекулы O₂ первые возбужденные уровни лежат низко — $^1\Delta g$ -терм, $\varepsilon_1 = 0,98$ эВ, $\varepsilon_1/k = 11\,300$ К; $^1\Sigma g^+$ -терм, $\varepsilon_2 = 1,62$ эВ, $\varepsilon_2/k = 18\,800$ К.

При не слишком высоких температурах, когда $T \ll \varepsilon_1/k$, электронная сумма сводится, по существу, к слагаемому, соответствующим основному электронному состоянию. Если интервалы между уровнями тонкой структуры основного состояния (когда таковая существует) меньше kT ¹⁾, то соответствующие слагаемые в $Z_{эл}$ можно приближенно считать одинаковыми. Отсчитывая энергию ε_n от основного состояния ($\varepsilon_0 = 0$), можно положить $Z_{эл}$ равным статистическому весу основного состояния g_0 (например, у атомов: O, ^3P -терм, $g_0 = 9$; у N ^4S $g_0 = 4$; у молекул: O₂ ($^3\Sigma$) $g_0 = 3$; N₂ ($^1\Sigma$) $g_0 = 1$; NO ($^2\Pi$) $g_0 = 4$).

О вычислении $Z_{эл}$ при высоких температурах речь будет идти в § 6.

Поскольку статистическая сумма молекулы Z равна произведению отдельных сомножителей, отвечающих различным степеням свободы, свободная энергия газа, а вместе с нею и другие термодинамические функции представляются в виде суммы соответствующих слагаемых. Подставляя выражения для сомножителей Z в формулу (3.7), получим явное выражение свободной энергии через температуру и плотность; последняя входит благодаря тому, что поступательные суммы $Z_{пост}$ содержат объем V . Величины N_A/V , N_B/V , ..., которые появляются под знаком логарифма в формуле (3.7), представляют собой числа частиц в единице объема $n_A, n_B, \dots$, выражаемые через плотность газа и процентные содержания частиц разных сортов, которые в данном случае постоянны.

Статистическая сумма одноатомного газа состоит только из поступательного и электронного сомножителей; подставляя ее в (3.7), найдем свободную энергию N одинаковых атомов (полагаем $Z_{эл} = g_0$):

$$F = -NkT \ln \left(\frac{2\pi MkT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{eVg_0}{N}. \quad (3.17)$$

Удельная энтропия одноатомного газа в отсутствие ионизации и возбуждения электронов (по формуле (3.8)) равна

$$S = Nk \ln \frac{e^{5/2}g_0}{n} \left(\frac{2\pi MkT}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (3.18)$$

Для энергии и давления получим уже известные выражения:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}NkT, \quad p = nkT.$$

Аналогичным путем легко получить вращательные и колебательные составляющие термодинамических функций. Внутренняя энергия вращений, естественно, совпадает с формулами, выписанными в § 1, а внутренняя энергия колебаний выражается

¹⁾ Например, у атома O интервалы для компонент основного триплетного состояния $^3D_2$ равны $\Delta\varepsilon/k = 230$ и 320 К; у NO расщепление дублета $^2\Pi$ равно $\Delta\varepsilon/k = 178$ К. О спектроскопической символике и расшифровке обозначений термов см. § 14 гл. V.

функцией Планка. Энергия N одинаковых осцилляторов (двухатомных молекул) равна

$$\varepsilon_{\text{кол}} = N \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (3.19)$$

В пределе $kT \gg h\nu$ она стремится к своему классическому значению $\varepsilon_{\text{кол}} = NkT$, а теплоемкость $c_{V \text{ кол}} = \partial \varepsilon_{\text{кол}} / \partial T \rightarrow Nk$. Фактически энергия и теплоемкость близки к своим предельным значениям уже при $kT \approx h\nu$. Например, при $kT/h\nu = 0,5$, $c_V/Nk = 0,724$; при $kT/h\nu = 1$, $c_V/Nk = 0,928$; при $kT/h\nu = 2$, $c_V/Nk = 0,979$.

В давление вращения и колебания молекул никакого вклада не дают; формально это связано с тем, что соответствующие статистические суммы, а также внутренние энергии и теплоемкости не зависят от объема. Давление идеального газа связано исключительно с поступательным движением частиц.

При высоких температурах порядка нескольких тысяч градусов, когда амплитуды колебаний молекул становятся заметными по сравнению с межатомными расстояниями, проявляются ангармоничность колебаний и взаимодействие колебаний с вращениями. Ангармоничность несколько уменьшает колебательную часть теплоемкости. Соответствующие поправки в первом приближении пропорциональны температуре. Обычно эти поправки невелики (диссоциация молекул начинается раньше, чем поправки становятся существенными). О вычислении поправок см., например, [2].

§ 3. Диссоциация двухатомных молекул. При температурах порядка нескольких тысяч градусов двухатомные молекулы обычно диссоциируют на атомы. Многоатомные молекулы, в которых связь слабее, начинают распадаться и при более низких температурах. Разрыв молекулы требует весьма большой затраты энергии, поэтому диссоциация существенным образом сказывается на термодинамических функциях газа.

Рассмотрим простейший и вместе с тем практически важный случай двухатомного газа из молекул одного сорта A_2 , состоящих из одинаковых атомов A . Пусть при температуре T и плотности газа ρ на атомы диссоциирована доля α исходных молекул (согласно схеме $A_2 \rightleftharpoons 2A$). Если N — число исходных молекул в 1 г, то при степени диссоциации α в 1 г содержится $N \cdot 2\alpha$ атомов и $N(1 - \alpha)$ молекул; полное число частиц равно $N(1 + \alpha)$, так что давление газа

$$p = N(1 + \alpha) \rho kT. \quad (3.20)$$

При полной диссоциации ($\alpha = 1$) оно вдвое больше давления при тех же T и ρ , но в отсутствие диссоциации.

При малой диссоциации $\alpha \ll 1$ изменение давления невелико, но изменение энергии и теплоемкости газа все равно может оказаться значительным. Пусть ε_{A_2} — энергия одной молекулы при температуре T , а ε_A — энергия одного атома. Обозначим энергию, необходимую для разрыва невозбужденной молекулы (то есть в отсутствие вращений и колебаний или при $T = 0$) через U . Величина U — это энергия связи или энергия диссоциации молекулы: например, для O_2 : $U = 5,11$ эВ $\rightarrow 118$ ккал/моль¹⁾, $U/k = 59\,400$ К; для N_2 : $U = 9,74$ эВ $\rightarrow 225$ ккал/моль, $U/k = 113\,000$ К; для NO : $U = 6,5$ эВ $\rightarrow 150$ ккал/моль, $U/k = 75\,500$ К.

Удельная внутренняя энергия газа, отсчитываемая от молекулярного состояния при нуле температуры, равна

$$\varepsilon = N\varepsilon_{A_2}(1 - \alpha) + N\varepsilon_A 2\alpha + NU\alpha. \quad (3.21)$$

¹⁾ 1 эВ/молекула соответствует 23,05 ккал/моль.

Обычно диссоциация начинается при температурах гораздо меньших, чем U/k , тем меньших, чем разреженнее газ. При концентрации атмосферного воздуха ($n = 2,67 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$) диссоциация заметна уже при $kU/T \sim 1/20$. Это связано с большим статистическим весом состояния, в котором молекула разбита на атомы. Фактически при $kT \ll U$ молекулы разбиваются ударами очень энергичных частиц, относящихся к далекому хвосту больцмановского распределения по энергиям. В отсутствие ионизации и электронного возбуждения $\varepsilon_A = \frac{3}{2}kT$. Если kT больше энергии колебательных квантов $h\nu$, колебательная энергия молекулы, как следует из формулы (3.19), равна примерно kT и $\varepsilon_{A_2} \approx \frac{7}{2}kT$. Энергия диссоциированного газа (3.21) заметно превышает энергию в отсутствие диссоциации, $\varepsilon = N\varepsilon_{A_2}$, даже при малых степенях диссоциации ($\alpha \sim 0,1$ и меньше) за счет последнего члена, отвечающего энергии, затраченной на разрыв молекул. Точно так же заметным образом возрастает и теплоемкость $c_V = (\partial\varepsilon/\partial T)_V$ диссоциирующего газа.

Следует отметить, что формулы (3.20), (3.21) справедливы и в условиях неравновесной диссоциации, когда степень диссоциации отличается от своего термодинамически равновесного значения, соответствующего «температуре» и плотности газа. Под «температурой» при этом подразумевается температура поступательных и вращательных степеней свободы частиц, которые всегда термодинамически равновесны¹⁾.

Термодинамически равновесная степень диссоциации однозначно определяется температурой и плотностью (или давлением) газа. Зависимость степени диссоциации от температуры и плотности можно вывести из общего выражения для свободной энергии газа, представляющего собой смесь частиц разных сортов (3.7), если учесть, что равновесному составу смеси, претерпевающей химические превращения, частным случаем которых является диссоциация, должен соответствовать минимум свободной энергии.

Рассмотрим свободную энергию F как функцию числа частиц N_{A_2} и N_A при заданных температуре, объеме и исходном числе молекул $N_{A_2}^0$:

$$F = -N_{A_2}kT \ln \frac{Z_{A_2}e}{N_{A_2}} - N_AkT \ln \frac{Z_Ae}{N_A}.$$

Составим вариацию δF :

$$\delta F = -\delta N_{A_2} \left(kT \ln \frac{Z_{A_2}e}{N_{A_2}} - kT \right) - \delta N_A \left(kT \ln \frac{Z_Ae}{N_A} - kT \right)^2).$$

Вариации δN_{A_2} и δN_A связаны между собой условием сохранения числа атомов:

$$N_{A_2} + \frac{N_A}{2} = N_{A_2}^0 = \text{const}; \quad \delta N_{A_2} = -\frac{1}{2}\delta N_A.$$

¹⁾ Равновесие в колебательных степенях свободы устанавливается медленнее, чем во вращательных и поступательных, но обычно быстрее, чем устанавливается равновесная диссоциация. Подробно см. об этом гл. VI.

²⁾ Величины в скобках представляют собой химические потенциалы молекул и атомов, взятые с обратным знаком:

$$\mu_{A_2} = \frac{\partial F}{\partial N_{A_2}}, \quad \mu_A = \frac{\partial F}{\partial N_A}.$$

Приравнивая δF нулю (минимум свободной энергии), при условии сохранения числа атомов, получим

$$\frac{N_A^2}{N_{A_2}} = \frac{Z_A^2}{Z_{A_2}}. \quad (3.22)$$

Поскольку статистические суммы Z_A и Z_{A_2} пропорциональны объему V , который входит в поступательные суммы, а в остальном зависят только от температуры, вместо (3.22) можно записать

$$\frac{n_A^2}{n_{A_2}} = f(T), \quad (3.23)$$

или, для парциальных давлений $p_i = n_i kT$,

$$\frac{p_A^2}{p_{A_2}} = f(T) kT = K_p(T). \quad (3.24)$$

Выражения (3.22) или (3.23), (3.24) представляют собой частный случай так называемого закона действующих масс для химического равновесия, а величина $K_p(T)$ называется константой равновесия для реакции диссоциации. Она зависит только от температуры и молекулярных (и атомных) постоянных. Подставляя в (3.22) выражения для статистических сумм молекул A_2 и атомов A и полагая для простоты, что колебания в молекулах возбуждены плотностью, то есть $Z_{\text{кол}} \approx kT/\nu$ (см. формулу (3.15)), а в электронных статистических суммах участвуют только члены, соответствующие основным состояниям молекулы и атома, получим

$$\frac{p_A^2}{p_{A_2}} = K_p(T) = \frac{M_A^{3/2} \nu \sqrt{kT}}{4\pi^{1/2} I_{A_2}} \frac{g_{0A}^2}{g_{0A_2}} e^{-U/kT}. \quad (3.25)$$

Последние два множителя в (3.25) появились от частного электронных статистических сумм:

$$\frac{Z_{\text{эл}A}^2}{Z_{\text{эл}A_2}} \approx \frac{g_{0A}^2}{g_{0A_2}} \exp\left(-\frac{(2\varepsilon_{0A} - \varepsilon_{0A_2})}{kT}\right) = \frac{g_{0A}^2}{g_{0A_2}} e^{-U/kT},$$

так как разность нулевых энергий $2\varepsilon_{0A} - \varepsilon_{0A_2}$, по определению, равна энергии диссоциации U .

Переходя в (3.25) от парциальных давлений к степени диссоциации,

$$\alpha = \frac{N_{A_2}^0 - N_{A_2}}{N_{A_2}^0} = \frac{N_A}{2N_{A_2}^0},$$

получим

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{1}{4n_{A_2}^0} \frac{K_p(T)}{kT} = \frac{M_A^{3/2} \nu}{16\pi^{1/2} I_{A_2} \sqrt{kT}} \frac{g_{0A}^2}{g_{0A_2}} \frac{1}{n_{A_2}^0} e^{-U/kT}, \quad (3.26)$$

где $n_{A_2}^0 = \rho/M_{A_2}$ — число исходных молекул в 1 см^3 газа.

При малых степенях диссоциации $\alpha \ll 1$ (когда $U/kT \gg 1$), как видно из формулы (3.26), $\alpha \sim \rho^{-1/2} e^{-U/2kT}$, то есть α резко возрастает с повышением температуры и медленно увеличивается при разрежении газа. Быстрое увеличение степени диссоциации при повышении температуры влечет за собой и резкое возрастание теплоемкости. При высоких температурах, когда диссоциация почти полная, $\alpha \approx 1$, концентрация молекул $1 - \alpha \sim \rho e^{U/kT}$ пропорциональна плотности и медленнее изменяется с температурой, так как U/kT теперь не очень большое число.

Казалось бы, что при высоких температурах после окончания диссоциации теплоспособность газа (который превратился в одноатомный) должна уменьшиться и стать равной $\frac{3}{2}k$ на один атом или $3k$ на одну исходную молекулу, то есть даже меньше, чем до диссоциации ($\frac{7}{2}k$ на молекулу). В действительности же этого обычно не происходит, так как вслед за окончанием диссоциации при повышении температуры (а иногда даже еще до окончания) начинается ионизация атомов (и молекул), которая вносит свой, и притом значительный, вклад в теплоспособность.

Таблица 3.1. Равновесный состав воздуха в области диссоциации и начала ионизации

T, K	N_2	N	O_2	O	NO	N^+	O^+	NO^+
Нормальная плотность $\varrho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$								
2000	0,788		0,205	0,015	0,007			
4000	0,749	0,0004	0,100	0,134	0,084			
6000	0,744	0,044	0,006	0,356	0,050			
8000	0,571	0,416	0,007	0,393	0,024			
10000	0,222	1,124		0,407	0,009	0,0034		0,0015
12000	0,050	1,458		0,411	0,003	0,020	0,0034	0,001
15000	0,006					0,096	0,015	
Плотность $\varrho = 10^{-2} \varrho_0$								
2000	0,788		0,248	0,002	0,007			
4000	0,777	0,004	0,008	0,378	0,024			
6000	0,592	0,394		0,413	0,005			
8000	0,068	1,440		0,416	0,001	0,004	0,001	0,0001
10000	0,004	1,528		0,410		0,046	0,008	0,0002
12000		1,380		0,384		0,202	0,034	
15000		0,858		0,282		0,724	0,136	

Примечание. Концентрации всех частиц c_i здесь определены как отношение числа частиц данного сорта к исходному числу молекул. При комнатной температуре $c_{N_2} = 0,791$, $c_{O_2} = 0,209$. Данные для аргона не приводим, так как его роль очень мала.

Зависимость степени диссоциации от температуры и плотности газа, а также влияние диссоциации на термодинамические функции иллюстрируются табл. 3.1 и 3.2, составленными по таблицам [3], в которых приведены соответствующие величины для воздуха (79 % N_2 + 21 % O_2) в области диссоциации¹⁾. Реакция окисления азота $N_2 + O_2 \rightleftharpoons 2NO$, протекающая в воздухе (см. следующий параграф), не сильно влияет на диссоциацию молекул N_2 и O_2 и термодинамические функции воздуха. Последние в основном определяются диссоциацией N_2 , O_2 , так что эффекты диссоциации и все зависимости видны из табл. 3.2. Для сравнения в таблице указаны значения энергии, соответствующие данным температурам, в предположении, что диссоциации нет (от плотности удельная энергия в этом случае не зависит). Поскольку ионизация начинается раньше, чем заканчивается диссоциация азота, в таблице указаны и концентрации ионов (об ионизации см. § 5). Следует заметить, что при точных расчетах

¹⁾ В табл. 3.2 данные [3] относятся только к температурам ниже 20000 К. Более высокие температуры рассчитаны в работе [4].

Таблица 3.2. Термодинамические функции воздуха

Нормальная плотность $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3}$ г/см ³					Плотность $\rho = 10^{-2} \rho_0$			
T, K	ϵ , эВ/молекула	p , атм	γ	$(7/2) kT$, эВ/молекула	T, K	ϵ , эВ/молекула	p , атм	γ
2000	0,515	7,42	1,335	0,604	2000	0,520	0,074	1,330
4000	1,52	15,8	1,240	1,21	4000	2,09	0,177	1,195
8000	5,38	41,7	1,180	2,42	8000	10,6	0,575	1,125
12000	12,7	88	1,160	3,92	12000	16,6	0,994	1,140
20000	24	183	1,175	6,04	20000	45,3	2,8	1,145
50000	95	870	1,215	15,1	50000	158	11,6	1,170
100000	276	2690	1,225	30,2	100000	499	37,3	1,175
250000	922	10870	1,275	75,4	250000	1080	125	1,270
500000	1450	23150	1,370	151	500000	3310	412	1,290

Примечание. Внутренние энергии даны в электронвольтах на исходную молекулу; для воздуха 1 эВ/молекула = 0,8 ккал/г. Эффективный показатель адиабаты γ определен как $\gamma = 1 + \frac{p}{\epsilon}$ эВ. В последнем столбце для сравнения приведена энергия $\epsilon = \frac{7}{2} kT$ эВ/молекула, которой обладал бы воздух в отсутствие процессов диссоциации и ионизации, но при классических колебаниях молекул.

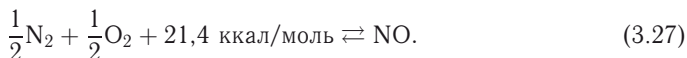
диссоциации и термодинамических функций пользуются не простыми; формулами типа (3.26), а более точными, с учетом возбуждения высших электронных состояний, ангармоничности колебаний и т. д.

При этом исходят из точных выражений (3.22), вычисляя статистические суммы на основе спектроскопических данных об атомах и молекулах. Описание методики подобных расчетов можно найти к работе [5].

§ 4. Химические реакции. Химический состав смеси газов в обычных условиях, то есть при комнатной температуре, очень часто отличается от термодинамически равновесного. Это связано с тем, что для протекания химической реакции, если даже при этом выделяется тепло и газ переходит в энергетически более выгодное состояние, обычно требуется энергия активации E . Скорость химической реакции, пропорциональная больцмановскому фактору $e^{-E/hT}$, при низких температурах и больших энергиях активации, когда $E/kT \gg 1$, очень мала и реакция практически не идет. Таким образом, система смесь газов находится в равновесии, но это не есть термодинамическое равновесие. Такое равновесие может быть названо условным. Типичным примером может служить смесь водорода и кислорода в составе $H_2O + \frac{1}{2}O_2$, которая в условиях термодинамического равновесия при низких температурах должна была бы полностью превратиться в воду H_2O (тепловой эффект реакций 57,1 ккал/моль). Однако при обычных температурах и без воздействия внешних факторов эта необратимая реакция не идет и смесь находится в состоянии условного равновесия.

При высоких температурах порядка нескольких тысяч градусов (для некоторых реакций и при более низких) скорости химических превращений велики и в смеси газов устанавливается химическое равновесие. Протекание обратимых реакций (то есть таких реакций, которые могут идти и в ту и в другую сторону в соответствии с условием химического равновесия при данных температуре и плотности) влияет на химический состав и термодинамические функции газов. Примером является воздух,

в котором при высоких температурах порядка нескольких тысяч градусов происходит окисление части азота по следующей схеме:



Реакция окисления азота требует большой энергии активации, так что при температурах ниже ~ 1500 К она практически не идет (для достижения равновесия необходимы очень большие времена), однако при температурах ~ 3000 К и выше равновесие устанавливается очень быстро (при нормальной плотности воздуха за 10^{-4} с и меньше) и можно говорить о равновесном составе воздуха с учетом образования окиси азота ¹⁾.

Рассмотрим химическое равновесие и влияние его на термодинамические свойства смеси газов на примере реакции типа реакции окисления азота, то есть типа



Предположим для простоты, что диссоциация молекул мала. Это предположение оправдывается при не слишком высоких температурах; например, в воздухе при $T \sim \sim 2000\text{--}3000$ К диссоциация молекул N_2 , O_2 очень мала, а равновесная концентрация окиси азота заметна.

Пусть в одном грамме исходной смеси содержится $N_{\text{A}_2}^0$ и $N_{\text{B}_2}^0$ молекул A_2 и B_2 ; концентрации их — $m_{\text{A}_2}^0 = N_{\text{A}_2}^0/N$ и $m_{\text{B}_2}^0 = N_{\text{B}_2}^0/N$, где $N = N_{\text{A}_2}^0 + N_{\text{B}_2}^0$ — полное число молекул в 1 г исходного газа. Пусть при температуре T и плотности газа ρ равновесные числа молекул в 1 г равны $N_{\text{A}_2}^0, N_{\text{B}_2}^0, N_{\text{AB}}$, а концентрации $m_i = N_i/N$ равны $m_{\text{A}_2}^0, m_{\text{B}_2}^0, m_{\text{AB}}$. Числа молекул и концентрации связаны между собою условиями сохранения числа атомов:

$$N_{\text{A}_2} + \frac{1}{2}N_{\text{AB}} = N_{\text{A}_2}^0, \quad N_{\text{B}_2} + \frac{1}{2}N_{\text{AB}} = N_{\text{B}_2}^0, \quad (3.29)$$

$$m_{\text{A}_2} + \frac{1}{2}m_{\text{AB}} = m_{\text{A}_2}^0, \quad m_{\text{B}_2} + \frac{1}{2}m_{\text{AB}} = m_{\text{B}_2}^0. \quad (3.30)$$

Обозначим через $\varepsilon_{\text{A}_2}, \varepsilon_{\text{B}_2}, \varepsilon_{\text{AB}}$ энергии одной молекулы, а через $2U'$ — тепловой эффект реакции, то есть энергию, которая выделяется при превращении двух молекул, A_2 и B_2 , в две молекулы AB (если реакция идет с поглощением тепла, то $U' < 0$).

Тогда, если по-прежнему принять за нуль энергию исходной смеси $\text{A}_2 + \text{B}_2$ при $T = 0$, получим, что удельная внутренняя энергия газа равна

$$\varepsilon = Nm_{\text{A}_2}\varepsilon_{\text{A}_2} + Nm_{\text{B}_2}\varepsilon_{\text{B}_2} + Nm_{\text{AB}}\varepsilon_{\text{AB}} - Nm_{\text{AB}}U'. \quad (3.31)$$

Полное число частиц в газе при рассматриваемой реакции не меняется, так что на давление при тех же T и ρ реакция не влияет ²⁾.

Числа частиц, участвующих в реакции, связаны между собой в условиях равновесия законом действующих масс, который можно вывести из общего выражения для свободной энергии вполне аналогично тому, как это было сделано в случае диссоциации молекул. Для этого ищем минимум свободной энергии при постоянных T, ρ и числах исходных молекул $N_{\text{A}_2}^0, N_{\text{B}_2}^0$, но переменных $N_{\text{A}_2}, N_{\text{B}_2}, N_{\text{AB}}$.

¹⁾ Подробно о скоростях реакции окисления азота см. в гл. VI, § 8, а о кинетике реакции в ударной волне — гл. VIII, § 5.

²⁾ Так же, как и при диссоциации, формула (3.31) справедлива и в случае, если химического равновесия нет и концентрации неравновесны.

В результате получим, что

$$\frac{N_{AB^2}}{N_{A_2}N_{B_2}} = \frac{Z_{AB^2}}{N_{A_2}N_{B_2}}, \quad (3.32)$$

в полной аналогии с формулой (3.22) для диссоциации.

Выделяя объемы из поступательных статистических сумм, получим для чисел частиц в 1 см³ или парциальных давлений формулу

$$\frac{n_{AB}^2}{n_{A_2}n_{B_2}} = \frac{p_{AB}^2}{p_{A_2}p_{B_2}} = K'_p(T), \quad (3.33)$$

где $K'_p(T)$ — константа равновесия для реакции (3.28). Подставляя выражения для статистических сумм, как и в случае диссоциации, получим, что

$$K'_p(T) = 4 \left(\frac{M_{AB}}{M_{A_2}M_{B_2}} \right)^{3/2} \frac{I_{AB}^2}{I_{A_2}I_{B_2}} \frac{\nu_{A_2}\nu_{B_2}}{\nu_{AB}^2} \frac{g_{0AB}^2}{I_{0A_2}I_{0B_2}} e^{2U'/kT} \quad (3.34)$$

Например, для реакции окисления азота, с хорошей точностью, отношение

$$\frac{p_{NO}^2}{p_{N_2}p_{O_2}} = K'_p(T) = \frac{64}{3} e^{-43\,000/kT},$$

где $R = 2$ кал/моль · К.

Здесь приближенно считается, что массы, частоты и моменты инерции всех трех молекул одинаковы; $U' = -21,4$ ккал/моль, отношение статистических весов равно 16/3 (см. § 2).

Если газ представляет собой смесь, в которой протекает целый ряд реакций, то для каждой из реакций можно аналогичным путем вывести закон действующих масс, связывающий подобно формуле (3.32) числа частиц, участвующих в реакции, и их статистические суммы. Подстановка выражений для статистических сумм дает константы равновесия. Числа частиц, участвующих во многих реакциях, связаны между собою условиями сохранения числа атомов каждого сорта, подобных (3.29).

Совокупность законов действующих масс для каждой из реакций и условий сохранения числа атомов образует систему нелинейных алгебраических уравнений, определяющих химический состав, то есть числа разных частиц N_i в зависимости от температуры и плотности газа (или давления) и исходного атомного состава смеси. Как было показано одним из авторов [6], эта система имеет единственное решение, то есть равновесный химический состав смеси определяется однозначно. Составляя выражение типа (3.31) для энергии, можно вычислить внутреннюю энергию смеси. На основе общей формулы для свободной энергии $F(T, V, N_i)$ и термодинамических формул (3.9), (3.10) также можно получить выражение для энергии и давления, а с помощью формулы (3.8) — выражение для энтропии смеси.

Примером таких расчетов может служить вычисление состава и термодинамических функций воздуха с учетом диссоциации молекул N_2 , O_2 и реакции окисления азота [3, 5]. Другие реакции, приводящие к образованию NO_2 , O_3 и т. д., практически не влияют на расчеты, так как концентрации этих компонентов оказываются чрезвычайно малыми.

¹⁾ Множитель 4 возник от отношения факторов симметрии $\sigma_{A_2}\sigma_{B_2}/\sigma_{AB}^2$; $\sigma_{AB} = 1$, $\sigma_{A_2} = \sigma_{B_2} = 2$; см. вторую сноску на с. 151. Как и при диссоциации, здесь положено

$$Z_{\text{кол}} = kT/h\nu, \quad Z_{\text{эл}} = g_0.$$

Химический состав и термодинамические функции воздуха иллюстрируются табл. 3.1 и 3.2.

§ 5. Ионизация и электронное возбуждение. Так же как и диссоциация молекул, ионизация атомов (и молекул) начинается при значениях kT намного меньших, чем потенциал ионизации I . Причина этого та же, что и в случае диссоциации: статистический вес свободного состояния электрона очень велик.

Потенциалы первой ионизации большинства атомов и молекул меняются от 7 до 15 эВ ($I/k \sim 80\,000\text{--}170\,000\text{ К}$) ¹⁾. Исключение составляют главным образом атомы щелочных металлов с очень низкими потенциалами ионизации. Ионизация начинается обычно при температурах порядка нескольких или десятка тысяч градусов темпраньше, чем ниже потенциал ионизации и чем разреженнее газ.

По мере повышения температуры степень ионизации возрастает и когда температура становится порядка нескольких десятков тысяч градусов, практически все атомы оказываются однократно ионизованными. В водороде процесс ионизации на этом и заканчивается, при дальнейшем нагревании газ остается полностью ионизованным и состоящим из протонов и электронов; каждая частица совершает только поступательное движение, и теплоемкость равна $\frac{3}{2}k$ на частицу.

В газе из более тяжелых атомов после первой ионизации начинается вторая, затем третья и т. д. Обычно следующая ионизация начинается еще до полного окончания предыдущей, так что при температурах выше нескольких десятков тысяч градусов в газе присутствуют ионы нескольких зарядов, а если газ состоит из смеси нескольких элементов, то присутствуют ионы нескольких зарядов каждого элемента.

Как и при диссоциации молекул, внутренняя энергия ионизованного газа складывается из энергии теплового движения частиц (атомов ионов, электронов) и потенциальной энергии, равной затратам на отрыв электронов от атомов и ионов. Кроме того, в области ионизации некоторую роль может играть энергия электронного возбуждения атомов и ионов.

Рассмотрим для простоты газ, состоящий из атомов одного элемента, и предположим, как это чаще всего бывает, что все молекулы, если газ не одноатомный, в области заметной ионизации полностью диссоциированы на атомы. Пусть 1 г газа содержит N атомов. Обозначим через I_m потенциалы последовательных ионизаций: I_1 — энергия, необходимая для отрыва первого электрона от нейтрального атома, I_2 — энергия отрыва электрона от однократно ионизованного атома и т. д. Для того чтобы оторвать от атома m электронов, необходимо затратить энергию

$$Q_m = I_1 + I_2 + \dots + I_m \quad (I_0 = 0). \quad (3.35)$$

Пусть при данных температуре T и плотности ρ или удельном объеме V в 1 г газа имеется N_0 нейтральных атомов, N_1 — однократно ионизованных и т. д. Для краткости будем называть ион с зарядом, равным m , m -ионом; число m -ионов в 1 г обозначаем через N_m (нейтральные атомы являются частным случаем m -ионов). Число свободных электронов обозначим через N_e . Полагая, что газ достаточно разреженный и электроны подчиняются статистике Больцмана ²⁾, мы должны приписать каждой частице газа тепловую энергию поступательного движения $\frac{3}{2}kT$. Кроме того, m -ион обладает энергией электронного возбуждения W_m .

¹⁾ Например, $I_O = 13,6$ эВ, $I_N = 14,6$ эВ, $I_{O_2} = 12,1$ эВ, $I_{N_2} = 15,6$ эВ, $I_{NO} = 9,3$ эВ.

²⁾ Вырожденный электронный газ будет рассмотрен в § 12.

Если отсчитывать внутреннюю энергию от неионизованного состояния газа при нуле температуры, то удельную внутреннюю энергию, приходящуюся на один грамм, можно записать в виде ¹⁾

$$\varepsilon = \frac{3}{2}N(1 + \alpha_e)kT + N \sum_m Q_m \alpha_m + N \sum_m W_m \alpha_m, \quad (3.36)$$

где α_e — степень ионизации газа, то есть число свободных электронов, приходящихся на один исходный атом ($\alpha_e = N_e/N$); $\alpha_m = N_m/N$ — концентрации m -ионов. Концентрации α_m связаны между собой условиями сохранения числа атомов,

$$\sum N_m = N, \quad \sum \alpha_m = 1, \quad (3.37)$$

и сохранения числа зарядов,

$$\sum m N_m = N_e, \quad \sum m \alpha_m = \alpha_e. \quad (3.38)$$

Давление ионизованного газа ²⁾

$$p = N \varrho (1 + \alpha_e) kT. \quad (3.39)$$

Равновесные концентрации ионов удовлетворяют уравнениям, аналогичным закону действующих масс для диссоциации. Это и понятно, ибо процесс ионизации можно трактовать как химическую реакцию «диссоциации» атома или иона; например, процесс отрыва $m + 1$ -го электрона от m -иона можно записать в символической форме:

$$A_m \rightleftharpoons A_{m+1} + e, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

«Закон действующих масс» для этой реакции легко вывести из общего выражения для свободной энергии так же, как это делается для реакции диссоциации. Запишем свободную энергию 1 г ионизованного газа:

$$F = - \sum_m N_m kT \ln \frac{Z_m e}{N_m} - N_e kT \ln \frac{Z_e e}{N_e}, \quad (3.41)$$

где Z_m и Z_e — статистические суммы m -иона и электрона.

В термодинамическом равновесии при постоянных T и V свободная энергия минимальна по отношению к числам частиц. Составляя вариацию δF по отношению к изменению числа m -ионов за счет их ионизации по схеме (3.40), учитывая, что при этом $\delta N_m = -\delta N_{m+1} = -\delta N_e$, а числа всех остальных частиц не меняются, и приравнявая вариацию δF нулю, получим

$$\frac{N_{m+1} N_e}{N_m} = \frac{Z_{m+1} Z_e}{Z_m}. \quad (3.42)$$

Поступательные суммы обоих ионов сокращаются, так как массы ионов практически не отличаются друг от друга. В электронной же части статистической суммы иона (атома) выделим множитель, соответствующий нулевой энергии (основному

¹⁾ Если газ при низких температурах многоатомный, к ε следует добавить энергию диссоциации.

²⁾ Заметим, что, как и при диссоциации, формулы (3.36) для энергии и (3.39) для давления справедливы и в случае неравновесной ионизации, если под T понимать «поступательную» температуру частиц.

состоянию):

$$Z_{эл} = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_0}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_0}{kT}\right) u.$$

Обозначая разность энергий $\varepsilon_k - \varepsilon_0$, которая представляет собой просто энергию возбуждения иона в k -м состоянии, через w_k , запишем преобразованную электронную сумму u в виде

$$u = \sum_k \exp\left(-\frac{w_k}{kT}\right) = g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{w_1}{kT}\right) + g_2 \exp\left(-\frac{w_2}{kT}\right) + \dots, \quad (3.43)$$

где $g_0, g_1, \dots$ — статистические веса 0, 1, ... энергетических уровней иона; если последние не вырождены, то $g = 1$.

Что касается статистической суммы свободного электрона, то она состоит из произведения поступательной суммы на статистический вес свободного электрона, равный двум, в соответствии с двумя возможными ориентациями спина. Замечая, что разность нулевых энергий $m + 1$ -го и m -го ионов равна потенциалу ионизации m -иона $\varepsilon_{0m+1} - \varepsilon_{0m} = I_{m+1}$, также поделив выражение (3.42) на объем ($n_i = N_i/V$), получим

$$\frac{n_{m+1}n_e}{n_m} = 2 \frac{u_{m+1}}{u_m} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I_{m+1}}{kT}\right) = K_{m+1}(T) \quad (3.44)$$

(m_e — масса электрона).

Эта формула известна под названием формулы Саха. Умножив ее на kT , можно получить соотношение для парциальных давлений $p_i = n_i kT$. Для численных расчетов формулу Саха удобно переписать в виде уравнения, связывающего концентрации частиц $\alpha_i = N_i/N = n_i V/N = n_i/N\rho$,

$$\frac{\alpha_{m+1}\alpha_e}{\alpha_m} = \frac{1}{\rho N} K_{m+1}(T), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

Уравнения (3.45), (3.37), (3.38) образуют замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения концентраций ионов и электронов в зависимости от температуры и плотности газа.

Обычно существует некоторый диапазон температур в районе 8000–30 000 К, в котором существенна только первая ионизация, а вторая еще не начинается (потенциал второй ионизации примерно вдвое больше потенциала первой). В этом диапазоне уравнения упрощаются, так как из всех уравнений (3.45) остается только одно с $m = 0$. Замечая, что в области первой ионизации $\alpha_1 = \alpha_e = 1 - \alpha_0$ и опуская индексы у α_1 и потенциала ионизации, получим формулу для степени ионизации $\alpha = \alpha_1 = \alpha_e$:

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha} = 2 \frac{u_1}{u_0} \frac{1}{\rho N} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right), \quad (3.46)$$

которая весьма сходна с формулой для степени диссоциации (3.26).

При $I/kT \gg 1$, $\alpha \ll 1$, степень ионизации $\alpha \sim \rho^{-1/2} e^{-I/2kT}$, то есть очень быстро возрастает с повышением температуры и медленно растет при уменьшении плотности газа. Для газа из атомов водорода формула (3.46) справедлива всегда.

Энергии возбужденных уровней атомов и ионов обычно довольно велики и сравнимы с потенциалом ионизации. В ряде случаев имеются низко лежащие уровни (и они, разумеется, должны быть учтены при расчете), но число их весьма ограничено. Более подробно о вычислении преобразованных электронных сумм u будет сказа-

но в следующем параграфе. Здесь же отметим, что, как правило, достаточно учесть только первые несколько членов в этих суммах, причем в большинстве случаев подавляющую роль играет первый член и сумма сводится просто к статистическому весу основного состояния $u \approx g_0$. Дело в том, что в не слишком плотном газе электрон в атоме или ионе «предпочитает» оторваться, чем занять высокий энергетический уровень. В области однократной ионизации $T \sim 10\,000\text{--}20\,000$ К величина I_1/kT обычно порядка 5–10. Если перейти к более высокой температуре, то I_1/kT станет малой величиной, но одновременно и однократно ионизованные атомы исчезают, так как начинается вторая ионизация, и для наиболее распространенных ионов величина I_{m+1}/kT все равно будет порядка 5–10. Поскольку энергии возбужденных уровней в атомах имеют такой же порядок, что и потенциал ионизации, то даже второй член в сумме u будет, скажем, порядка e^{-5} , то есть весьма мал. Благодаря этому и оказывается, что в электронных суммах u для наиболее распространенных ионов основную роль играет первый член g_0 .

При точных расчетах обычно принимают во внимание первые 5–10 уровней в ионах и атомах, причем энергии и статистические веса их берут из соответствующих таблиц [7]. Имеются также таблицы потенциалов последовательных ионизаций различных атомов [8].

Внутреннюю энергию газа можно вычислить по формуле (3.36), которая следует и из общего выражения для свободной энергии (3.41) в соответствии с термодинамической формулой (3.9). Энергия электронного возбуждения W при этом равна (индекс заряда иона m опускаем)

$$W = \frac{\sum w_k \exp\left(-\frac{w_k}{kT}\right)}{\sum \exp\left(-\frac{w_k}{kT}\right)} = -kT^2 \frac{\partial \ln u}{\partial T}. \quad (3.47)$$

Энтропия согласно (3.8) получается путем дифференцирования свободной энергии по температуре:

$$S = \sum_m N_m k \ln \frac{e^{5/2} V}{N_m} \left(\frac{2\pi M k T}{h^2} \right)^{3/2} u_m + \sum_m N_m \frac{W_m}{T} + \\ + N_e k \ln \frac{e^{5/2} V}{N_e} \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} 2. \quad (3.48)$$

Если возбуждением можно пренебречь, то второй член исчезает и $u_m = g_{0m}$.

Наиболее просты расчеты в области первой ионизации, где степень ионизации можно вычислять просто по формуле (3.46). Начинаяющаяся ионизация дает значительный вклад в теплоемкость и энергию газа и учет ее совершенно необходим при вычислении термодинамических функций.

Широкий диапазон температур и плотностей, в котором атомы многократно ионизованы, был охвачен в работе В. В. Селиванова и И. Я. Шляпинтоха [4]. Авторы рассчитали ионизационный состав¹⁾, термодинамические функции и ударную адиабату воздуха при температурах от 20 000 до 500 000 К и плотностях от $10 \varrho_0$ до $10^{-3} \varrho_0$ (ϱ_0 — нормальная плотность воздуха). Как меняется ионизационный состав и степень ионизации с изменением температуры, а также как влияет ионизация на

¹⁾ Обобщение выписанных выше уравнений на случай, когда газ представляет собой смесь элементов, не представляет труда.

термодинамические функции, можно видеть из табл. 3.2 и 3.3 для воздуха, основанных на расчетах В. В. Селиванова и И. Я. Шляпинтоха ¹⁾.

Подробнейшие таблицы термодинамических функций воздуха составлены Н. М. Кузнецовым в диапазоне температур до $3 \cdot 10^6$ К и плотностей от 30 до $10^{-6} \rho_0$ [35]. Там же приведены таблицы ионизационного состава.

Таблица 3.3. Состав ионизованного воздуха нормальной плотности $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3}$ г/см³ при высоких температурах ¹⁾

T, К	Атом	0	1 ⁺	2 ⁺	3 ⁺	4 ⁺	5 ⁺	6 ⁺	e
20 000	N	0,589	0,201						0,24
	O	0,172	0,033						
50 000	N	0,018	0,451	0,321	0,001				1,50
	O	0,0065	0,303	0,048					
100 000	N		0,012	0,275	0,463	0,04			2,65
	O		0,005	0,09	0,113	0,005			
250 000	N				0,005	0,183	0,603		5,0
	O				0,005	0,020	0,114	0,074	
500 000	N					0,017	0,75	0,025	5,2
	O						0,010	0,200	

¹⁾ Концентрации определены как отношения чисел частиц данного сорта к числу исходных атомов. 0 — нейтральные атомы; 1⁺ — однократно ионизованные и т. д.; e — электроны; N и O — ионы азота и кислорода.

При очень высоких температурах ²⁾ (или очень низких плотностях) энергия и давление теплового излучения могут оказаться сравнимыми с энергией и давлением вещества. В условиях, когда излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом (выполняется ли это условие или нет, необходимо специально проверять в каждом конкретном случае; см. гл. II), энергию и давление излучения следует просто добавить к энергии и давлению газа.

«Удельная» энергия равновесного излучения равна плотности энергии излучения, поделенной на плотность вещества,

$$\varepsilon_\nu = \frac{U_p}{\rho} = \frac{4\sigma T^4}{c\rho}, \quad (3.49)$$

а давление излучения

$$p_\nu = \frac{U_p}{3} = \frac{4\sigma T^4}{3c}. \quad (3.50)$$

Энтропию излучения можно найти с помощью общих термодинамических соотношений:

$$S_\nu = -\frac{\partial F_\nu}{\partial T}, \quad F_\nu = -T \int \frac{\varepsilon_\nu}{T^2} dT = -\frac{4\sigma T^4}{3c\rho},$$

откуда

$$S_\nu = \frac{16\sigma T^3}{3c\rho}. \quad (3.51)$$

В работе [4] термодинамические функции воздуха рассчитывались с учетом равновесного излучения.

¹⁾ В табл. 3.2 данные [4] относятся только к температурам 20 000 К и выше.

²⁾ Для воздуха нормальной плотности — это температуры выше миллиона градусов.

§ 6. Электронная статистическая сумма и роль энергии возбуждения атомов. Изолированный атом (ион, молекула), находящийся в бесконечном пространстве, обладает бесконечным числом энергетических уровней, которые сходятся к континууму, соответствующему состояниям с оторванным электроном (ионизованным состояниям). Формально электронная статистическая сумма u содержит бесконечное число слагаемых и расходится. Средняя энергия возбуждения атомов W , вычисленная по формуле (3.47) с бесконечным числом членов, равна потенциалу ионизации, так как энергии возбуждения высших состояний асимптотически приближаются к потенциалу ионизации.

Эта трудность, возникающая при чисто формальном вычислении u и W , имеет лишь кажущийся характер. На самом деле атом никогда не является изолированным, а находится в газе конечной плотности. Размеры электронной орбиты быстро возрастают при переходе к все более высоким возбужденным состояниям электрона в атоме и в конце концов становятся сравнимыми со средним расстоянием между частицами газа, которое равно примерно $r \approx N^{-1/3}$ (здесь через N мы обозначили число частиц в 1 см^3). Траектории электронов, движущихся по таким большим орбитам, искажаются благодаря наличию соседних частиц, и электрон, который удален от атомного остатка на расстояние, сравнимое со средним расстоянием между частицами газа, по существу, не отличается от свободного, а столь высоко возбужденный атом не отличается от ионизованного. Таким образом, конечность плотности газа налагает ограничение на число возможных возбужденных состояний атома и число слагаемых в электронной статистической сумме, а также ограничивает среднюю энергию возбуждения атома.

Рассмотрим газ, состоящий из атомов водорода. Результаты рассмотрения водородных атомов имеют большую общность, так как высоковозбужденные состояния любых сложных атомных систем весьма сходны с возбужденными состояниями атома водорода. Если электрон в сложном атоме (ионе, молекуле) движется по очень большой орбите, то поле, в котором он находится, весьма близко к кулоновскому полю точечного заряда (атомного остатка) и потому структура высоковозбужденных состояний любых атомов и ионов близка к водородной. Чтобы можно было распространить результаты рассмотрения и на многозарядные ионы, будем во все формулы вводить заряд «ядра», то есть рассматривать не водород в буквальном смысле, а водородоподобные атомы, представляющие собой систему из положительного «ядра» с зарядом Z и электрона.

Уровни энергии водородоподобного атома характеризуются главным квантовым числом n (схему уровней см. на рис. 2.2 в § 2 гл. II). Энергия n -го уровня, отсчитанная от границы непрерывного спектра, равна, как известно, $\varepsilon_n = -I_H Z^2/n^2$, где $I_H = 13,5 \text{ эВ}$ — потенциал ионизации водорода. Абсолютная величина ее, $E_n = |\varepsilon_n| = I_H Z^2/n^2$, представляет собой энергию связи электрона, находящегося на n -м уровне. Энергия связи основного состояния $n = 1$ ¹⁾ равна потенциалу ионизации: $E_1 = I_H Z^2 = I$. Энергия возбуждения n -го состояния равна $w_n = \varepsilon_n - \varepsilon_1 = E_1 - E_n = I_H Z^2 (1 - (1/n^2))$. Преобразованная электронная статистическая сумма водородоподобного атома имеет вид

$$u = \sum g_n \exp\left(-\frac{w_n}{kT}\right) = \sum 2n^2 \exp\left[-\frac{I_H Z^2}{kT} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right],$$

где $g_n = 2n^2$ — статистический вес n -го уровня.

¹⁾ В отличие от предыдущего, здесь мы приписываем основному состоянию индекс «1», а не «0», в соответствии с равенством единице главного квантового числа n .

Энергия связи электрона на n -м уровне равна его кулоновской энергии в поле ядра на расстоянии порядка размеров орбиты, а именно, $E_n = Ze^2/2a$, где a — большая полуось эллиптической орбиты; $a = Ze^2/2E_n = e^2 n^2 / 2Z I_H = a_0 n^2 / Z$ ($a_0 = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус). Статистическую сумму u во всяком случае следует оборвать на том значении n^* , при котором полуось орбиты становится сравнимой со средним расстоянием между частицами газа, то есть при $a = a_0 n^{*2} / Z = r$, $n^* = (Zr/a_0)^{1/2} \sim N^{-1/6}$ (n^* тем меньше, чем плотнее газ). В качестве численного примера рассмотрим молекулярный водород, который при комнатной температуре находился под атмосферным давлением и затем был нагрет сильной ударной волной до температуры порядка десятка тысяч градусов. Сжатие в ударной волне равно примерно 10, так что в условиях полной диссоциации молекул число атомов в 1 см^3 будет $N \approx 5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$. Среднее расстояние между атомами $r \approx N^{-1/3} = 1,3 \cdot 10^{-7}$ см и предельное значение $n^* = 5$ ($Z = 1$). При температуре $T = 11\,600 \text{ K} = 1 \text{ эВ}$ статистическая сумма, содержащая пять членов, равна $u = 2,00053$, то есть практически не отличается от статистического веса основного состояния $g_1 = 2$. Средняя энергия возбуждения атома, вычисленная по формуле (3.47) с учетом пяти членов в сумме, равна $W = 0,003 \text{ эВ}$. При указанных значениях N и T степень ионизации водорода составляет $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$, то есть энергия ионизации, приходящаяся на атом, $I_H \alpha = 0,04 \text{ эВ}$. Энергия возбуждения W мала по сравнению с энергией ионизации ($W/I_H \alpha = 0,075$). При более высокой температуре $T = 23\,200 \text{ K} = 2 \text{ эВ}$ и той же плотности $u = 2,212$ (тоже не намного больше $g_1 = 2$), $W = 1,16 \text{ эВ}$. Степень ионизации теперь $\alpha = 0,22$; энергия ионизации из расчета на один исходный атом равна $I_H \alpha = 3 \text{ эВ}$, а энергия возбуждения, также приходящаяся на один исходный атом, $W(1 - \alpha) = 0,9 \text{ эВ}$.

В этом случае энергия возбуждения играет заметную роль, но все же она меньше энергии ионизации. Следует заметить, что срезание верхних возбужденных уровней в газе конечной плотности одновременно понижает и потенциал ионизации как раз на величину энергии связи электрона на границе срезания, то есть на величину $\Delta I = E_n^* = Ze^2/2r = Z I_H a_0 / r = Z \cdot 7 \cdot 10^{-7} N^{-1/3} \text{ эВ}$ (N в см^{-3}).

В нашем примере это уменьшение равно $\Delta I = 0,55 \text{ эВ}$, так что вычисленные степени ионизации несколько занижены.

При очень высоких температурах, $\sim 50\,000 \text{ K}$ и выше, энергия возбуждения оставшихся атомов водорода становится большой, сравнимой с потенциалом ионизации, но зато и степень ионизации при этом сильно возрастает и само число нейтральных атомов становится малым, так что вклад энергии возбуждения в энергию газа все равно меньше, чем вклад энергии ионизации. Это и соответствует тому положению, что электрону «выгоднее» совсем оторваться от атома, чем занять высокий возбужденный уровень¹⁾.

¹⁾ Это положение можно пояснить путем следующего полукачественного рассуждения, особенно наглядного в предельном случае газа очень низкой плотности. Отношение вероятности свободного и связанного состояний электрона пропорционально отношению поступательной и электронной статистических сумм ($Z_{\text{пост}} \sim V \sim 1/\varrho$). Электронную сумму в пределе малых плотностей, когда в ней участвует очень большое число членов, грубо можно представить так:

$$Z_{\text{эл}} = \sum g_n e^{-\epsilon_n/kT} = \sum 2n^2 e^{I_H/(n^2 kT)} \sim \int_0^{n^*} n^2 dn \sim n^{*3}.$$

Но $n^* \sim r^{1/2}$, так что $Z_{\text{эл}} \sim V^{1/2} \sim \varrho^{-1/2}$. Отсюда $Z_{\text{пост}}/Z_{\text{эл}} \sim V^{1/2} \sim \varrho^{-1/2}$. Таким образом, при уменьшении плотности в пределе малых плотностей, несмотря на возрастание числа возможных связанных состояний, вероятность отрыва электрона от атома все равно растет быстрее.

Приведенная ранее оценка числа членов в электронной сумме скорее всего завышает фактическое число уровней. На срезание высших возбужденных уровней в атомах и ионах существенное влияние оказывает и непосредственное воздействие электростатического поля ближайшей соседней заряженной частицы — штарк-эффект.

Кроме того, в достаточно разреженном газе энергия связи электрона, движущегося по предельной орбите с размером $a \sim r$, $E_n^* = \Delta I = 7 \cdot 10^{-7} N^{-1/3}$ эВ, оказывается меньше, чем kT (в нашем примере $\Delta I = 0,55$ эВ, а температуры были 1 и 2 эВ). Кинетическая энергия электрона в водородоподобном атоме равна его энергии связи на данном уровне. Вряд ли имеет особый смысл считать связанным электрон, энергия связи и кинетическая энергия которого меньше kT . Практически каждое «соударение» со свободным электроном будет выбивать столь слабо связанный электрон из атома. Некоторые авторы поэтому обрывают электронные суммы еще сильнее, на том уровне, где энергия связи электрона равна kT .

Вопросам, связанным со снижением потенциалов ионизации в ионизованном газе и задачей вычисления электронных статистических сумм, посвящен целый ряд работ [9–13, 34]. Надо сказать, что здесь не существует единого мнения и разные авторы предлагают различные рецепты для обрывания электронных сумм. К счастью, расчеты показывают, что вариация в числе членов, учитываемых в электронных суммах, как правило, мало сказывается на термодинамических функциях газов. Но снижение потенциалов ионизации вследствие срезания верхних уровней иногда заметно влияет на ионизационный состав газа (см. работу [14]).

В заключение этого параграфа отметим, что явление срезания верхних возбужденных уровней в атомах, ионах, молекулах имеет экспериментальное подтверждение. В спектрах дуговых разрядов низкого давления обычно не наблюдается больше 5–10 спектральных линий водородной серии Бальмера, связанной с переходами электрона с верхнего возбужденного уровня на уровень $n = 2$. Даже в спектрах газовых туманностей, плотность которых исключительно низка (порядка десятков частиц в 1 см^3), не наблюдается больше 50–60 бальмеровских линий.

§ 7. Приближенный метод расчета в области многократной ионизации. Расчеты ионизационного равновесия, являющиеся основой для нахождения термодинамических функций газа при высоких температурах требуют весьма большой и трудоемкой вычислительной работы. Для каждой пары значений температуры и плотности приходится решать нелинейную систему алгебраических уравнений для определения концентраций ионов разных зарядов, которая еще более усложняется, если газ содержит атомы нескольких элементов. По существу, в широком диапазоне температур и плотностей таблицы составлены только для воздуха. Конечно, при современном уровне машинной техники проблема больших численных расчетов в значительной степени утрачивает свою остроту, но все же для практических целей полезно иметь простой приближенный метод, который позволил бы быстро и с минимальными затратами труда вычислять степени ионизации и термодинамические функции любого газа в широком диапазоне температур и плотностей в области высоких температур, когда атомы многократно ионизованы. В этом параграфе будет описан такой способ, предложенный одним из авторов [15], который при своей крайней простоте обладает точностью, вполне достаточной для решения большинства практических задач.

Рассмотрим газ, состоящий из атомов одного элемента.

В основу приближенного метода положены два основных допущения. Будем, во-первых, рассматривать числа ионов в 1 см^3 n_m и потенциалы ионизации I_{m+1} как непрерывные функции заряда иона m , соединив дискретные значения n_m и I_{m+1} непрерывными кривыми. Функция $I(m)$ строится путем соединения точек I_m на диаграмме I, m (рис. 3.1) непрерывной кривой, скажем, путем соединения

соседних точек прямыми отрезками. Систему рекуррентных формул Саха (3.44) при этом можно превратить в дифференциальное уравнение относительно функции $n(m)$, введя вместо конечных разностей дифференцирование:

$$n(m+1) = n(m) + \frac{dn}{dm}, \quad \Delta m = 1.$$

Отношение электронных статистических сумм ионов u_{m+1}/u_m обычно весьма нерегулярным образом меняется при переходах от одного заряда m к другому для данного элемента или при переходе к другим элементам; однако это отношение всегда порядка единицы. Положим его приближенно равным единице. После этого систему формул Саха можно записать в виде дифференциального уравнения:

$$\left(1 + \frac{d \ln n}{dm}\right) n_e = AT^{3/2} e^{-\frac{I(m+1)}{kT}}, \quad (3.52)$$

$$A = 2 \left(\frac{2\pi m_e k}{h^2} \right) = 4,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2} = 6 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot \text{эВ}^{-3/2}.$$

Одновременно условия сохранения числа частиц и числа зарядов (3.37), (3.38) перепишем в интегральной форме:

$$\int n(m) dm = n, \quad (3.53)$$

$$\int mn(m) dm = n_e. \quad (3.54)$$

Рассмотрение результатов точных расчетов, так же как и рассмотрение системы уравнений Саха, проведенное ниже, показывает, что в газе всегда присутствуют в значительном количестве ионы двух, максимум трех зарядов. Следовательно, функция распределения $n(m)$ имеет вид весьма узкого и острого пика около некоторого значения $m_{\max}$, которое, конечно, зависит от температуры и плотности газа.

Отсюда вытекает второе допущение. Положим приближенно, что среднее значение заряда ионов, которое совпадает со средним числом свободных электронов, приходящихся на один исходный атом,

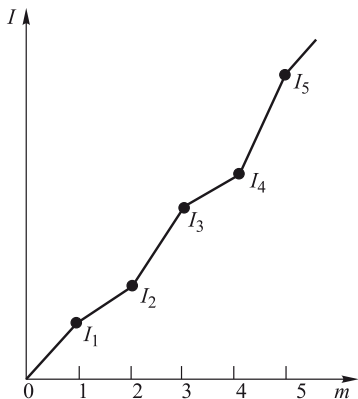
$$\bar{m} = \frac{\int mn(m) dm}{\int n(m) dm} = \frac{n_e}{n}, \quad (3.55)$$

в точности равно тому значению $m_{\max}$, при котором функция распределения ионов $n(m)$ проходит через максимум. Очевидно, что допущение тем более справедливо, чем острее и уже пик распределения $n(m)$.

Рис. 3.1. Переход к непрерывной кривой $I(m)$

Обозначая через $\bar{I}$ потенциал ионизации ионов со «средним» зарядом $\bar{m}$ и замечая, что в точке максимума пика производная $dn/dm = 0$, получим из (3.52) с помощью (3.55) следующее выражение, связывающее $\bar{m}$ и $\bar{I}$:

$$\bar{m} = \frac{AT^{3/2}}{n} e^{-\frac{\bar{I}}{kT}}. \quad (3.56)$$



Для того чтобы превратить это выражение в уравнение для нахождения среднего заряда (или степени ионизации) в зависимости от температуры T и концентрации (числа n исходных атомов в 1 см^3), необходимо определить связь между $\bar{I}$ и $\bar{m}$. Здесь имеется некоторый произвол, связанный с чисто символическим в точной теории вопросом о приписывании индексов потенциалам ионизации.

Если обозначать потенциал ионизации m -иона через I_{m+1} (потенциал ионизации нейтрального атома I_1), то формально следовало бы положить $\bar{I} = I(\bar{m} + 1)$. Иногда потенциал ионизации m -иона обозначают через I_m (потенциал ионизации нейтрального атома I_0). В этом случае в формуле Саха (3.44) вместо I_{m+1} надо писать I_m и формально пришлось бы положить $\bar{I} = I(\bar{m})$.

Конечно, если рассматривать тяжелые элементы и очень высокие температуры, когда степень ионизации настолько высока, что $\bar{m}$ имеет порядок нескольких десятков, такой произвол численно не приводит к существенной вариации в числе $\bar{m}$ (так как при этом $I_{m+1} - I_m \ll I_m$).

Однако в области небольшой ионизации, когда средний заряд ионов порядка нескольких единиц, такой произвол заметным образом сказывается на результатах вычислений $\bar{m}$ и термодинамических функций, что связано с приближенным характером замены дискретных величин непрерывными функциями.

Сопоставление результатов приближенных и точных расчетов показывает, что наилучшее согласие получается, если, как и раньше, обозначать потенциал ионизации m -иона через $I_{m+1} = I(m + 1)$, полагая $I_0 = I(0) = 0$, но относить «среднее» значение потенциала $\bar{I}$ к точке $m + \frac{1}{2}$, то есть считать $\bar{I} = I\left(\bar{m} + \frac{1}{2}\right)$. Это представляется довольно естественным, если учесть, что в действительности ряд дискретных значений m разделен конечными интервалами $\Delta m = 1$.

Логарифмируя (3.56), получим простое трансцендентное уравнение для определения $\bar{m}(T, n)$:

$$I\left(\bar{m} + \frac{1}{2}\right) = kT \ln \frac{AT^{3/2}}{\bar{m}n}. \quad (3.57)$$

Благодаря логарифмической зависимости правой части от $\bar{m}$ достаточно сделать два-три последовательных приближения, чтобы весьма точно найти корень $\bar{m}$ с помощью графика функции $I(m)$.

Убедимся в том, что распределение ионов по зарядам всегда имеет характер узкого пика, и найдем закон спадания краев пика функции распределения $n(m)$.

Комбинируя последовательно выписанные формулы Саха для разных $m = 0, 1, 2, \dots$, положив в них предварительно отношение электронных статистических сумм равным единице и воспользовавшись определением «среднего» потенциала (3.56), получим:

$$\frac{n_{m+l}}{n_m} = \exp \left[- \sum_{i=1}^l \frac{I_{m+i} - \bar{I}}{kT} \right],$$

$$\frac{n_{m-l}}{n_m} = \exp \left[- \sum_{i=1}^l \frac{\bar{I} - I_{m-i}}{kT} \right],$$

где $l = 1, 2, 3, \dots$

Выберем m равным тому значению, при котором n_m максимально. $\bar{I}$ примерно соответствует потенциалу ионизации таких ионов, так что все слагаемые в суммах положительны и концентрации ионов спадают по обе стороны от максимума. Чтобы

оценить закон спадания и ширину пика, перейдем в этих формулах к непрерывным функциям $n(m)$, $I(m)$. Разлагая приближенно

$$I(m) \approx \bar{I} + \left(\frac{dI}{dm} \right) (m - \bar{m}),$$

получим гауссову кривую распределения,

$$n(m) = n_{\max} \exp \left[- \left(\frac{m - \bar{m}}{\Delta} \right)^2 \right], \quad (3.58)$$

с полушириной пика

$$\Delta = \sqrt{\frac{2kT}{(dI/dm)}}. \quad (3.59)$$

Если учесть, что в среднем для разных элементов и разных ионизаций потенциалы ионизации растут с зарядом иона быстрее, чем сам заряд, то есть что $dI/dm > I/m$, найдем, что

$$\Delta < \sqrt{\frac{2kT\bar{m}}{\bar{I}}} = \sqrt{\frac{2\bar{m}}{\bar{x}_1}}, \quad \bar{x}_1 = \frac{\bar{I}}{kT}. \quad (3.60)$$

Подставляя в эту формулу численные значения $\bar{x}_1$ и $\bar{m}$, найденные, например, с помощью табл. 3.3 для воздуха, увидим, что $\Delta < 1$, то есть что пик, действительно, узкий¹⁾.

Приближенные формулы для термодинамических функций получаются из точных, если в соответствии со сделанными выше приближениями считать, что распределение ионов $n(m)$ представляет собой очень узкий пик — почти δ -функцию около значения $\bar{m}$, то есть считать, что все ионы в газе обладают одним нецелочисленным «средним» зарядом $\bar{m}$. Удельная внутренняя энергия (3.36) при этом принимает вид

$$\varepsilon = \frac{3}{2} N(1 + \bar{m})kT + NQ(\bar{m}) \quad (3.61)$$

(энергией электронного возбуждения пренебрегаем). Здесь непрерывная функция $Q(m)$ аналогично $I(m)$ строится графически путем соединения непрерывной кривой дискретных значений Q_m , определенных формулой (3.35). Заметим, что наилучшее совпадение с точными расчетами получается, если в формуле (3.61) положить $\bar{Q} = Q(\bar{m})$, в отличие от $\bar{I} = I\left(\bar{m} + \frac{1}{2}\right)$. Давление равно

$$p = n(1 + \bar{m})kT. \quad (3.62)$$

Удельная энтропия (3.48) (если пренебречь электронным возбуждением и положить статистический вес всех ионов одинаковым и равным g) получается равной

$$S = Nk \ln \left(\frac{2\pi M kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{e^{5/2} g}{n} + Nk\bar{m} \ln \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{e^{5/2} g}{n\bar{m}}. \quad (3.63)$$

¹⁾ Тот факт, что пик распределения n_m узкий, порядка самой «конечной» разности $\Delta m = 1$, вообще говоря, лишает смысла переход к дифференцированию по m . Однако фактически метод оказался лучше его обоснования.

Полагая $S = \text{const}$ и воспользовавшись формулой (3.57), получим уравнение адиабаты в параметрической форме:

$$\frac{T^{3/2}}{n} \exp \left\{ \bar{m} \left[\frac{I \left(\bar{m} + \frac{1}{2} \right)}{kT} + \frac{5}{2} \right] \right\} = \text{const}. \quad (3.64)$$

Параметром служит $\bar{m}$; const в правой части определяется значениями T_0, n_0 , через которые проходит адиабата.

Изложенный выше метод вычисления степени ионизации и термодинамических функций легко обобщается на случай смеси газов. Например, в смеси двух элементов средние заряды ионов каждого из элементов $\bar{m}_1, \bar{m}_2$ находятся из системы двух трансцендентных уравнений:

$$I_1 \left(\bar{m}_1 + \frac{1}{2} \right) = I_2 \left(\bar{m}_2 + \frac{1}{2} \right) = kT \ln \frac{A^{3/2}}{n(c_1 \bar{m}_1 + c_2 \bar{m}_2)}, \quad (3.65)$$

где c_1, c_2 — атомные концентрации обоих элементов; I_1, I_2 — кривые их потенциалов ионизации, а n — полное число исходных атомов в 1 см^3 . Удельная внутренняя энергия равна

$$\varepsilon = \frac{3}{2} N (1 + c_1 \bar{m}_1 + c_2 \bar{m}_2) kT + N c_1 Q_1(\bar{m}_1) + N c_2 Q_2(\bar{m}) \quad (3.66)$$

и т. д. Во многих случаях, однако, не имеет большого смысла усложнять таким образом расчеты. Если потенциалы последовательных ионизаций атомов разных элементов не сильно отличаются друг от друга, целесообразно ввести «среднюю» кривую потенциалов $I(m)$, рассматривая все атомы как одинаковые и усреднив значения последовательных потенциалов по всем элементам в соответствии с их процентным содержанием в смеси.

Таблица 3.4. Сравнение приближенных расчетов степени ионизации и внутренней энергии воздуха с точными¹⁾

T, К	$\varrho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$		$\varrho = 10^{-2} \varrho_0$	
	$1 + \bar{m}$	$\varepsilon, \text{ эВ/атом}$	$1 + \bar{m}$	$\varepsilon, \text{ эВ/атом}$
30 000	1,68	16,6	2,30	33
	1,77	23	2,21	33
50 000	2,4	40,5	3,35	83
	2,42	47,8	3,26	80
100 000	3,72	126	5,10	243
	3,75	140	5,16	252

¹⁾Верхние цифры в каждой клетке получены приближенным методом [15], нижние взяты из работы В. В. Селиванова и И. Я. Шляпинтоха [4].

В табл. 3.4 сопоставлены результаты приближенных расчетов степени ионизации и внутренней энергии воздуха с точными данными В. В. Селиванова и И. Я. Шляпинтоха [4]. Видно, что даже при малых степенях ионизации, где ошибка должна быть

особенно велика, приближенный метод дает неплохую точность. При высоких же степенях ионизации ошибка не превышает нескольких процентов.

Метод верно передает нерегулярности изменения $\overline{m}$ и ε с температурой и плотностью, соответствующие резким скачкам в потенциалах ионизации, которые возникают при переходах от ионов с заполненными электронными оболочками к ионам с незаполненными. Расчеты показали, что метод дает хорошую точность и для ксенона. Поскольку кривые потенциалов ионизации у всех элементов похожи друг на друга, можно надеяться на то, что приближенный метод обеспечит достаточную точность и в случае любого другого газа.

§ 8. Интерполяционные формулы и эффективный показатель адиабаты.

Непосредственным результатом расчетов термодинамических функций являются таблицы, составленные в виде сетки по температуре и плотности (или температуре и давлению). Использование таблиц при решении газодинамических задач связано с большими неудобствами. Гораздо приятнее иметь дело с простыми интерполяционными формулами, более или менее точно аппроксимирующими табличные данные. Исключительный интерес представляет такая аппроксимация действительных функций, при которой показатель адиабаты, определяющий ход гидродинамического процесса, приближенно оказывается постоянным. Введение постоянного эффективного показателя адиабаты позволяет воспользоваться автомодельными и точными решениями уравнений газодинамики, которые, как правило, удается получить только для газа с постоянной теплоемкостью.

Адиабатические связи между двумя какими-либо термодинамическими параметрами, например, T и ρ или p и ρ при учете неполного возбуждения колебаний, диссоциации, ионизации уже не описываются уравнениями типа адиабаты Пуассона. Можно формально определить в каждой точке показатель γ таким образом, чтобы в окрестности этой точки истинная адиабата приближенно совпадала с уравнением адиабаты Пуассона. Для этого следует, очевидно, положить

$$\left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_s = \gamma' - 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_s = \gamma''.$$

Однако при этом показатели, соответствующие различным парам термодинамических параметров, отличаются друг от друга. Поэтому при введении эффективного показателя адиабаты γ в интересующем диапазоне T и ρ или p и ρ необходимо определить его так, чтобы он наилучшим образом отвечал природе газодинамического процесса.

Третье уравнение газодинамики в общем случае представляет собой уравнение сохранения энергии, и для того, чтобы замкнуть систему уравнений в гидродинамике идеальной жидкости¹⁾, достаточно ввести связь удельной внутренней энергии с давлением и плотностью $\varepsilon(p, \rho)$. Обычно эта связь описывается формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Поэтому для определения эффективного показателя адиабаты в интересующем диапазоне p и ρ следует составить таблицу для комбинации

$$\gamma - 1 = \frac{p}{\rho \varepsilon} \tag{3.67}$$

и выбрать некоторое постоянное значение $\gamma - 1$, наилучшим образом аппроксимирующее фактически не одинаковые значения указанной комбинации. В результате

¹⁾ В гидродинамике идеальной жидкости не учитываются вязкость и теплопроводность.

уравнение адиабаты $d\varepsilon + p dV = 0$ ($V = 1/\varrho$) примет вид адиабаты Пуассона $p \sim \varrho^\gamma$, $\varepsilon \sim \varrho^{\gamma-1}$ с эффективным постоянным значением γ .

Удельную внутреннюю энергию в зависимости от температуры и плотности удобнее всего аппроксимировать формулой степенного типа,

$$\varepsilon = a T^\alpha V^\beta, \quad (3.68)$$

с постоянными, a, α и β .

В области возбуждения колебаний теплоемкость не зависит от плотности и $\beta = 0$. В области диссоциации и ионизации теплоемкость всегда растет при уменьшении плотности газа, так как при этом увеличивается степень диссоциации или ионизации и возрастают соответствующие затраты энергии. Поэтому показатель β всегда положителен. Показатель α обычно больше 1, так как теплоемкость растет с повышением температуры как в области неполного возбуждения колебаний, так и в областях диссоциации и ионизации.

При аппроксимации функции $\varepsilon(T, V)$ формулой (3.68) с постоянными показателями α и β и аппроксимации функции $p(\varepsilon, \varrho)$ или $p(\varepsilon, V)$ уравнением (3.67) с постоянным показателем γ три константы α, β и γ нельзя выбирать независимым образом.

Функции $p(\varepsilon, V)$ и $\varepsilon(T, V)$ должны удовлетворять общему термодинамическому соотношению:

$$p + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

Легко проверить путем непосредственной подстановки, что три показателя α, β, γ связаны между собой условием

$$\gamma - 1 = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad (3.69)$$

справедливым, конечно, только в том случае, если они считаются постоянными. При описанной интерполяции, что легко проверить с помощью уравнения адиабаты $d\varepsilon + p dV = 0$, адиабатические связи T и ϱ и ε и ϱ также характеризуются единым показателем адиабаты γ , как и в случае адиабаты Пуассона:

$$T \sim \varrho^{\gamma-1}, \quad \varepsilon \sim \varrho^{\gamma-1}, \quad p \sim \varrho^\gamma, \quad \gamma = \text{const.}$$

Это получается несмотря на зависимость теплоемкости от температуры и объема.

Для иллюстрации численных значений показателя адиабаты в табл. 3.2 представлена комбинация $1 + p/\varrho\varepsilon = \gamma$ в области многократной ионизации воздуха. Мы видим, что показатель γ уменьшается с уменьшением плотности.

В диапазонах температур 10 000–250 000 К и плотностей $10 \varrho_0$ – $10^{-3} \varrho_0$ (ϱ_0 — нормальная плотность) внутреннюю энергию воздуха в грубом приближении можно описать интерполяционной формулой (3.68) со следующими значениями констант:

$$\varepsilon = 8,3 \left(\frac{T}{10^4} \right)^{1,5} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{0,12} \text{ эВ/молекула.} \quad (3.70)$$

По формуле (3.69) эффективный показатель адиабаты равен $\gamma = 1,24$.

Существенно, что показатель γ , определяемый формулой (3.67), изменяется гораздо меньше, чем показатели α и β в формуле (3.68). Это положение крайне благоприятно, так как для расчета адиабатических процессов связь $\varepsilon(T, V)$ фактически не нужна, достаточно связи $\varepsilon(p, V)$ или $p(\varepsilon, V)$, которая дается уравнением (3.67).

Следует отметить, что эффективный показатель адиабаты и показатели степени α и β в интерполяционной формуле (3.68) довольно слабо меняются при переходе от

одного газа к другому, если пытаться аппроксимировать широкий диапазон температур и плотностей. Это и понятно, так как кривые потенциалов ионизации в общем всегда похожи друг на друга, различаясь в деталях, влияющих на ход энергии и давление в небольших областях изменения температуры и плотности газа.

§ 9. Ударная адиабата в условиях диссоциации и ионизации. Параметры фронта ударной волны в газе с постоянной теплоемкостью были вычислены в гл. I. В случае сильной волны, когда давление за фронтом много больше начального $p_1 \gg p_0$, сжатие во фронте стремится к предельному значению $h = (\gamma + 1)(\gamma - 1)$. Так, в одноатомном газе (инертные газы, пары металлов) $c_V = \frac{3}{2}Nk$, $\gamma = \frac{5}{3}$ и $h = 4$, в двухатомном газе с невозбужденными колебаниями $c_V = \frac{5}{2}NkT$, $\gamma = \frac{7}{5}$ и $h = 6$ ¹⁾. Уже из формулы для h в случае газа с постоянной теплоемкостью видно, что сжатие во фронте тем больше, чем больше теплоемкость и чем ближе к единице показатель адиабаты. Тенденция к увеличению сжатия при возрастании теплоемкости сохраняется и в общем случае, когда теплоемкость зависит от температуры и плотности. Если двухатомный газ настолько плотный, что колебания возбуждаются еще до начала диссоциации, то при переходе к более сильным ударным волнам теплоемкость за фронтом возрастает, стремясь к значению $c_V = \frac{7}{2}NkT$, показатель адиабаты стремится к $\gamma = \frac{9}{7}$ и сжатие за фронтом увеличивается до $h = 8$.

Диссоциация и ионизация приводят к дальнейшему увеличению сжатия. Важно отметить, что на величине сжатия сказывается только та часть теплоемкости, которая связана с потенциальной и внутренней энергией частиц: энергией диссоциации и ионизации, вращательной и колебательной энергией молекул, энергией электронного возбуждения атомов и ионов. Возрастание удельной теплоемкости за счет увеличения числа частиц в газе не влияет на сжатие, так как одновременно с возрастанием энергии поступательного движения частиц растет и давление газа. Непосредственно изменение числа частиц не отражается на показателе адиабаты γ , которым определяется сжатие. В этом легко убедиться, если представить внутреннюю энергию в виде суммы $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пост}} + Q$, где в Q включена потенциальная энергия и энергия внутренних степеней свободы частиц. Замечая, что давление $p = \frac{2}{3}\rho\varepsilon_{\text{пост}}$, подставим эти выражения в формулу для ударной адиабаты (1.71). Пренебрегая начальными энергией и давлением, то есть считая ударную волну сильной, получим после элементарного вычисления, что величина предельного сжатия равна

$$h = 4 + \frac{3Q}{\varepsilon_{\text{пост}}} \quad (3.71)$$

Эта величина отличается от значения 4, соответствующего одноатомному газу, тем больше, чем больше относительная роль потенциальной и внутренней энергии.

В области диссоциации и ионизации потенциальная энергия обычно оказывается больше поступательной энергии частиц и сжатие во фронте велико, порядка 10–12;

¹⁾ Практически предельное сжатие, равное 6, достигается в двухатомном газе с невозбужденными колебаниями только при очень низких начальных температурах T_0 . В противном случае при тех температурах за фронтом, при которых колебания еще не возбуждаются, отношение давлений p_1/p_0 недостаточно велико для того, чтобы ударная волна была «сильной».

²⁾ В статье авторов [16] вместо формулы (3.71) было приведено ошибочное соотношение $h = 4/(1 - 3Q/\varepsilon_{\text{пост}})$ (формула (2.5)).

особенно велико сжатие при малой начальной плотности, когда степени диссоциации и ионизации очень высоки при данной температуре ¹⁾).

Сжатие в области ионизации у тяжелых газов не остается постоянным при увеличении амплитуды волны. Относительный вклад потенциальной энергии после прохождения максимума сжатия в период диссоциации или первой ионизации постепенно падает, так как поступательная энергия растет быстрее, чем потенциальная вследствие увеличения числа частиц. Постепенно падает при этом и сжатие. Так происходит до тех пор, пока не оторвутся все электроны с какой-либо оболочки атомов. Между потенциалами ионизации последнего из электронов этой оболочки и первого из электронов следующей, замкнутой оболочки всегда имеется большой разрыв. Особенно велик этот разрыв между L - и K -оболочками. Так, например, в азоте это 97 и 550 эВ, в кислороде 137 и 735 эВ. Поэтому в воздухе существует довольно широкий интервал амплитуд волн, примерно в диапазоне температур от 500 000 до 700 000 К, когда все электроны в атомах кислорода и азота, заполнявшие L -оболочки, уже оторваны, а ионизация с K -оболочек еще не началась: в газе присутствуют только гелиеподобные ионы. Когда при дальнейшем повышении амплитуды волны начинается отрыв K -электронов, затраты энергии на ионизацию снова резко возрастают, относительный вклад потенциальной энергии, так же как и в начале первой ионизации, повышается, и сжатие проходит через второй, явно выраженный максимум.

Давление за фронтом сильной ударной волны, как следует из уравнений сохранения импульса и массы (1.61), (1.62), мало чувствительно к величине сжатия, особенно при больших D тах, и приближенно пропорционально квадрату скорости распространения волны D :

$$p_1 = \varrho_0 D^2 \left(1 - \frac{1}{h} \right) \quad (3.72)$$

(например, при $h \sim 10$ с точностью до $\sim 10\%$).

С еще большей точностью, порядка 1%, пропорциональна квадрату скорости удельная энтальпия за фронтом:

$$w_1 = \frac{D^2}{2} \left(1 - \frac{1}{h^2} \right) \quad (3.73)$$

(это выражение следует из формул (1.61), (1.62), (1.64)).

Температура же, которая в газе с постоянной теплоемкостью также пропорциональна квадрату скорости, в условиях диссоциации и ионизации растет с увеличением амплитуды волны гораздо медленнее.

В области первой ионизации это происходит за счет относительного возрастания затрат энергии на ионизацию, то есть величины $Q/\varepsilon_{\text{пост}} \sim Q/T$, в дальнейшем же, когда доля потенциальной энергии во внутренней уменьшается по сравнению с поступательной энергией, замедленный рост температуры объясняется увеличением числа частиц, которому пропорциональны $\varepsilon_{\text{пост}}$ и p :

$$\varepsilon_{\text{пост}} = \frac{3}{2} N(1 + \overline{m}) kT, \quad p = n(1 + \overline{m}) kT.$$

Заметим, что после наступления полной ионизации, когда с повышением амплитуды ударной волны и температуры за фронтом $\varepsilon_{\text{пост}}$ растет, а Q остается неизменным,

¹⁾ Так, например, когда по воздуху с начальным давлением $p_0 = 10^{-4}$ атм распространяются ударные волны со скоростями $D \sim 6,5\text{--}12$ км/с (числа Маха $M \sim 20\text{--}35$), сжатие за фронтом равно примерно 17.

сжатие при росте амплитуды стремится к 4 (если не учитывать тепловое излучение). Это видно из формулы (3.71). Например, в водороде, в области полных диссоциации и ионизации, потенциальная энергия на атом равна 15,74 эВ (энергия диссоциации H_2 2,24 эВ на атом, энергия ионизации 13,5 эВ), поступательная энергия на атом (энергия протона и электрона) равна $3kT = 3T_{эВ}$, то есть

$$h = 4 + \frac{15,74}{T_{эВ}} \rightarrow 4 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty$$

(полная ионизация в водороде при атмосферной плотности перед волной наступает уже при $T \sim 100\,000\text{ К} \sim 10\text{ эВ}$).

Для иллюстрации изложенных соображений о влиянии диссоциации и ионизации на параметры за фронтом ударной волны мы приводим табл. 3.5, содержащую результаты расчета этих параметров для воздуха при нормальной начальной плотности. Данные для низких температур в области возбуждения колебаний взяты из книги Я. Б. Зельдовича [17]; расчеты в области диссоциации и начала первой ионизации были проделаны Дэвисом [18]. В широком интервале температур от 20 000 до 500 000 К параметры фронта были рассчитаны В. В. Селивановым и И. Я. Шляпинтохом в уже цитированной выше работе [4].

Таблица 3.5. Параметры за фронтом волны в воздухе при нормальных условиях перед фронтом $p_0 = 1\text{ атм}$, $T_0 = 293\text{ К}$

$T, \text{ К}$	$D, \text{ км/с}$	$p_1, \text{ атм}$	ϱ_1/ϱ_0	$T, \text{ К}$	$D, \text{ км/с}$	$p_1, \text{ атм}$	ϱ_1/ϱ_0
293	0,33	1	1	14 000	9,31	1 000	11,10
482	0,70	5	2,84	20 000	11,8	1 650	10,10
705	0,98	10	3,88	30 000	15,9	2 980	9,75
2 260	2,15	50	6,04	50 000	23,3	6 380	9,97
4 000	3,35	127	8,58	100 000	40,1	19 200	8,62
6 000	4,54	236	9,75	250 000	81,6	76 500	7,80
8 000	5,64	366	10,30	500 000	114,0	143 900	6,27
10 000	6,97	561	11,00				

Расчеты параметров за фронтом ударной волны в воздухе в широком интервале начальных давлений от нормального до $p_0 \sim 10^{-5}\text{ атм}$ были сделаны И. Б. Рождественским [19] и Н. Ф. Горбанем [20] (для температур за фронтом, не превышающих 12 000 К). Параметры ударной волны в воздухе при температурах до $3 \cdot 10^6\text{ К}$ и плотностях до $10^{-6}\varrho_0$ (до высоты 100 км) приведены в таблицах Н. М. Кузнецова [35].

В ряде работ рассчитывались параметры фронта ударной волны и в других газах: в аргоне и водороде (В. А. Прокофьев [21]), в аргоне (Реслер и др. [22]), в ксеноне (Сэйбол [23]), в водороде и ксеноне (С. Р. Холев [24]). Качественно явления во всех газах не отличаются друг от друга и ударные адиабаты весьма сходны между собой.

Расчетные адиабаты в аргоне и ксеноне хорошо согласуются с экспериментальными, полученными на основе изучения ударных волн в ударных трубах. Что касается воздуха, то и здесь имеется удовлетворительное совпадение расчетов с экспериментом. Следует отметить, что ход ударной адиабаты в области диссоциации сильно зависит от того, какое из двух ранее спорных значений приписать энергии диссоциации азота: 7,38 или 9,74 эВ. Опыты Христиана и др. [25], изучавших ударные волны в воздухе с помощью ударной трубы, подтвердили, что опытная ударная адиабата ближе к расчетной, соответствующей энергии диссоциации азота 9,74 эВ. В пользу

этого значения свидетельствуют и опыты Моделя [26], измерявшего скорость фронта и (оптическим методом) температуру за фронтом.

§ 10. Ударная адиабата с учетом равновесного излучения. При очень высоких температурах (или очень низких плотностях газа), когда энергия и давление равновесного излучения сравнимы с энергией и давлением вещества, излучение следует учитывать при расчете ударной адиабаты (разумеется, предварительно следует проверить, устанавливается ли равновесие излучения с веществом в конкретных условиях задачи).

Рассмотрим очень сильную ударную волну, распространяющуюся по холодному газу, и предположим, что потоки излучения по обе стороны фронта равны нулю. Предположим также, что за фронтом ударной волны излучение равновесно (не интересуясь здесь вопросом о процессе установления равновесия). Таким образом, мы рассматриваем задачу с чисто термодинамической точки зрения, как это обычно делается при выводе ударной адиабаты¹⁾. Подчеркнем, что мы рассматриваем нерелятивистский случай, когда скорости ударной волны и вещества гораздо меньше скорости света, и энергии вещества и излучения гораздо меньше энергии покоя вещества. Введем в уравнения сохранения потоков импульса и энергии на фронте ударной волны энергию и давление излучения за фронтом $\varepsilon_{\nu 1}$, $p_{\nu 1}$ (см. § 13 гл. I и § 17 гл. II). Законы сохранения на фронте запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varrho_1 u_1 &= \varrho_0 D, \\ p_1 + p_{\nu 1} + \varrho_1 u_1^2 &= \varrho_0 D^2, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_{\nu 1} + \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{p_{\nu 1}}{\varrho_1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Чтобы упростить задачу с целью выяснения роли излучения, будем считать, что газ обладает постоянными теплоемкостью и показателем адиабаты γ и подчиняется обычному уравнению состояния:

$$p = A \varrho T, \quad A = \text{const}; \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} A T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\varrho}.$$

Подставляя в (3.74) $\varepsilon_{\nu 1}$ и $p_{\nu 1}$ по формулам (3.49), (3.50), выражая давление p_1 и энергию ε_1 через температуру T_1 и исключая u_1 с помощью первого из уравнений (3.74), получим соотношения, соответствующие формулам (3.72), (3.73), в которых излучение не учтено:

$$\begin{aligned} A \varrho_0 h T_1 + \frac{4 \sigma T_1^4}{3c} &= \varrho_0 D^2 \left(1 - \frac{1}{h} \right), \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} A \varrho_0 h T_1 + \frac{16 \sigma T_1^4}{3c} &= \frac{\varrho_0 D^2}{2} h \left(1 - \frac{1}{h^2} \right), \end{aligned} \quad (3.75)$$

где $h = \varrho_1 / \varrho_0$ — сжатие во фронте ударной волны. Исключим далее из этих уравнений D и разрешим полученное выражение относительно T_1 :

$$\frac{4 \sigma T_1^3}{3 A c \varrho_0} = \frac{h(h - h_0)}{(7 - h)}, \quad (3.76)$$

где $h_0 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ — предельное сжатие в сильной ударной волне без учета излучения. Это соотношение можно рассматривать как уравнение, определяющее

¹⁾ Эта задача рассматривалась Саксом [27].

сжатие h в зависимости от амплитуды ударной волны, которую можно характеризовать температурой за фронтом T_1 .

Величина в левой части уравнения (3.76), пропорциональная T_1^3 , представляет собой помноженное на h отношение давления излучения к давлению вещества за фронтом ударной волны $hp_{\nu 1}/p_1$. Из (3.76) следует, что если давление излучения относительно мало, так что $hp_{\nu 1}/p_1 \ll 1$, то $h \approx h_0$, то есть сжатие равно обычной величине $h_0 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. В пределе очень сильной волны, когда $hp_{\nu 1}/p_1 \sim T_1^3 \rightarrow \infty$, сжатие h стремится к $h_\infty = 7$. Этого результата следовало ожидать, так как равновесное излучение с термодинамической точки зрения ведет себя как идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$ (см. § 3 гл. II), соответствующим предельному сжатию в ударной волне, равному 7.

В интервале между двумя предельными случаями $hp_{\nu 1}/p_1 \rightarrow 0$ и $hp_{\nu 1}/p_1 \rightarrow \infty$ сжатие h по мере увеличения амплитуды волны монотонно меняется от $h_0 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ до $h_\infty = 7$, независимо от того, $h_0 > 7$ или $h_0 < 7$, то есть независимо от того, меньше или больше $4/3$ показатель адиабаты газа без учета излучения.

В предельном случае, когда энергия и давление излучения много больше энергии и давления вещества, то есть когда вторые члены в левых частях уравнений (3.75) гораздо больше первых, температура за фронтом $T_1 \sim D^{1/2}$, в отличие от обычного случая $T_1 \sim D^2$, без учета излучения (в газе с постоянной теплоемкостью).

Напоминаем, что относительная роль энергии и давления равновесного излучения тем больше, чем меньше плотность вещества: $p_\nu/p \sim 1\rho$ (в газе с неизменным числом частиц). Например, в полностью ионизованном водороде давление излучения равно давлению газа при $T = 10^6$ К, если число частиц (протонов и электронов) $n = 10^{19}$ см $^{-3}$; если же $n = 10^{16}$ см $^{-3}$, давления сравниваются при $T = 10^5$ К.

2. Газ из частиц с кулоновским взаимодействием

§ 11. Разреженный ионизованный газ. Рассмотрим отклонения ионизованного газа от идеальности, обусловленные кулоновским взаимодействием заряженных частиц. Мы ограничимся в этом параграфе случаем слабой неидеальности, когда члены кулоновского взаимодействия в термодинамических функциях можно рассматривать как малые поправки к членам, соответствующим идеальному газу.

Для того чтобы ионизованный газ можно было считать идеальным, необходимо чтобы энергия кулоновского взаимодействия соседних частиц была мала по сравнению с их энергией теплового движения, то есть чтобы выполнялось условие $(Ze)^2/r_0 \ll kT$, где Z — средний заряд частиц (ионов, электронов), а $r_0 \approx n^{-1/3}$ — среднее расстояние между ними; n — число частиц в 1 см ^{3} газа. Это условие можно переписать в форме

$$n \ll \left(\frac{kT}{Z^2 e^2} \right) = 2,2 \cdot 10^8 \left(\frac{T}{Z^2} \right)^3 \text{ 1/см}^3. \quad (3.77)$$

Например, при степени ионизации порядка единицы ($Z \sim 1$) и $T \sim 30\,000$ К для идеальности нужно, чтобы $n \ll 6,2 \cdot 10^{21}$ см $^{-3}$ (для сравнения напомним, что число молекул в воздухе нормальной плотности равно $2,67 \cdot 10^{19}$ см $^{-3}$).

Кулоновские поправки к термодинамическим функциям при слабой неидеальности можно вычислить, воспользовавшись методом Дебая–Хюккеля так, как это сделано в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1] (см. также работу Б. Л. Тимана [11]). Вокруг каждого из ионов или электронов образуется неравномерно заряженное облако из соседних частиц, причем распределение плотности заряда в этом облаке

определяется законом Больцмана в соответствии с электростатическим потенциалом, создаваемым совместным действием центрального заряда и облака. Решение уравнения Пуассона для распределения электростатического потенциала по радиусу r около центрального иона с зарядом $Z_i e$ в первом приближении приводит к формуле

$$\varphi_i = Z_i e \exp \frac{(-r/d)}{r},$$

где d — так называемый дебаевский радиус, характеризующий размеры облака,

$$d = \left(\frac{4\pi e^2}{kT} \sum n_i Z_i^2 \right)^{-1/2} = 6,90 \left(\frac{T}{n \bar{Z}^2} \right)^{1/2} \text{ см} \quad (3.78)$$

(n_i — число ионов с зарядом $Z_i e$ в 1 см^3 , электроны также включаются здесь в понятие «ионов»; для них $Z = -1$).

Статистическое рассмотрение методом Дебая–Хюккеля справедливо, если в облаке содержится много частиц, то есть если дебаевский радиус d гораздо больше среднего расстояния между частицами $r_0 \approx n^{-1/3}$. Условие $d \gg r_0$ приводит к условию $n \ll \left(kT/4\pi e^2 \bar{Z}^2 \right)^3 = 1,1 \cdot 10^5 \left(T/\bar{Z}^2 \right)^3 \text{ см}^{-3}$, еще более жесткому, чем условие идеальности газа (3.77). Таким образом, дебаевское рассмотрение предполагает очень слабую неидеальность газа.

Вблизи центра, при $r \ll d$, $\varphi_i = \frac{Z_i e}{r} - \frac{Z_i e}{d}$. Первый член есть потенциал, создаваемый самим центральным ионом, а второй $\varphi'_i = -Z_i e/d$ представляет собой потенциал, создаваемый окружающими зарядами в месте, где находится данный ион. Кулоновская энергия газа в объеме V , согласно общей электростатической формуле, равна

$$E_{\text{кул}} = V \frac{1}{2} \sum e Z_i n_i \varphi'_i = -V e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left(\sum n_i Z_i^2 \right)^{3/2}. \quad (3.79)$$

Поправку к свободной энергии можно найти путем интегрирования термодинамического соотношения $E/T^2 = -\partial/\partial T (F/T)$:

$$F_{\text{кул}} = \frac{2}{3} E_{\text{кул}} = -\frac{2}{3} e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} \left(\sum N_i Z_i^2 \right)^{3/2}, \quad (3.80)$$

где $N_i = n_i V$ — полное число частиц i -го сорта в объеме V . Поправка к давлению равна

$$p_{\text{кул}} = - \left(\frac{\partial F_{\text{кул}}}{\partial V} \right)_{T, N_i} = \frac{E_{\text{кул}}}{3V}. \quad (3.81)$$

В среднем между частицами действуют силы притяжения, так как каждый ион окружает себя преимущественно зарядами противоположного знака. Поэтому кулоновские энергия и давление отрицательны.

Кулоновское взаимодействие влияет на состояние газа двояким образом. Во-первых, оно уменьшает энергию и давление (а также энтропию: $S_{\text{кул}} = -\partial F_{\text{кул}}/\partial T = E_{\text{кул}}/3T$). Во-вторых, и этот эффект наиболее существен, оно сдвигает ионизационное равновесие в сторону более высокой степени ионизации.

В самом деле, свободный электрон во взаимодействующем газе обладает отрицательной потенциальной энергией, то есть как бы тоже немного связан с ионами, поэтому для отрыва электрона от атома или иона необходимо теперь затратить несколько меньшую работу, что соответствует эффективному уменьшению потенциалов ионизации. Уменьшение потенциала ионизации определяется изменением не полной, а только свободной кулоновской энергии, так как вследствие зависимости

кулоновской энергии от температуры «включение» кулоновских сил, взаимодействия меняет энтропию системы.

Чтобы вывести формулу для ионизационного равновесия с учетом кулоновского взаимодействия, поступим так же, как и в § 5. Запишем полную свободную энергию системы в виде $F = F_{\text{ид}} + F_{\text{кул}}$, где $F_{\text{ид}}$ выражается формулой (3.41), а $F_{\text{кул}}$ — формулой (3.80), и составим вариацию δF по отношению к вариации числа m -ионов в результате их ионизации.

Воспользовавшись условием $\delta N_m = -\delta N_{m+1} = -\delta N_e$, и приравнявая вариацию δF нулю, получим вместо (3.42) исправленное выражение для «закона действующих масс». Чтобы здесь не путать статистическую сумму с зарядом, отметим статистические суммы «тильдой» ($\tilde{Z}$):

$$\frac{N_{m+1}N_e}{N_m} = \frac{\tilde{Z}_{m+1}\tilde{Z}_e}{\tilde{Z}_m} \exp\left(\frac{\Delta I_{m+1}}{kT}\right), \quad (3.82)$$

где величину ΔI_{m+1} , равную изменению кулоновских частей химических потенциалов,

$$\Delta I_{m+1} = \mu_{m, \text{кул}} - \mu_{m+1, \text{кул}} - \mu_{e, \text{кул}}, \quad \mu_{i, \text{кул}} = \left(\frac{\partial F_{\text{кул}}}{\partial N_i}\right)_{T, V},$$

можно трактовать как уменьшение потенциала ионизации m -ионов (напоминаем, что $\tilde{Z}_{m+1}\tilde{Z}_e/\tilde{Z}_m \sim \exp(-I_{m+1}/kT)$).

Вычисление дает для поправки к потенциалу ионизации величину

$$\Delta I_{m+1} = 2(Z_m + 1)e^3 \sqrt{\frac{\pi}{kT}} \left(\sum n_i Z_i^2\right)^{1/2}, \quad (3.83)$$

где Z_m — заряд m -иона; по существу, $Z_m = m$.

Принимая во внимание определение дебаевского радиуса (3.78), можно переписать (3.83) в виде

$$\Delta I_{m+1} = \frac{(Z_m + 1)e^2}{d} = \frac{Z_{m+1}e^2}{d}. \quad (3.84)$$

Уменьшение потенциала ионизации m -иона в точности равно энергии кулоновского взаимодействия $m + 1$ -иона, получающегося в результате ионизации m -иона, с оторванным электроном, если последний находится на расстоянии, равном дебаевскому радиусу.

В соответствии с условиями справедливости метода Дебая–Хюккеля и условием слабой неидеальности формула (3.84) справедлива, если $d \gg r_0$, то есть $\Delta I \ll kT$.

В области первой ионизации формула (3.84) принимает вид ($i = 0, 1, e$; $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$, $Z_e = -1$)

$$\Delta I_1 = 2e^3 \left(\frac{2\pi n\alpha}{kT}\right)^{1/2}, \quad (3.85)$$

где $\alpha = n_e/n = n_1/n$ — степень ионизации.

В области многократной ионизации, заменяя, как это мы делали в § 7, все ионы ионами с одним «средним» зарядом $\bar{m} = n_e/n$ (n — число исходных атомов в 1 см^3) и полагая $\bar{Z}_i^2 = \bar{m}^2$, получим для изменения «среднего» потенциала ионизации величину

$$\overline{\Delta I} = 2(\bar{m} + 1)e^3 \left[\frac{\pi \bar{m}(\bar{m} + 1)n}{kT}\right]^{1/2}. \quad (3.86)$$

В качестве примера рассмотрим воздух при температуре $T = 100\,000 \text{ К}$ и нормальной плотности $n = 5,34 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Без учета кулоновского взаимодействия имеем

при этих условиях степень ионизации $\overline{m} = 2,72$ и «средний» потенциал ионизации $\overline{I} = 60$ эВ ($\overline{I}/kT = 6,9$). Поправка к «среднему» потенциалу ионизации с этим значением $\overline{m}$ равна $\Delta\overline{I} = 5,4$ эВ ($\Delta\overline{I}/kT = 0,63$), то есть кулоновское взаимодействие уменьшает «средний» потенциал ионизации почти на 10 %, что соответствует в следующем приближении возрастанию степени ионизации примерно на 14 % ¹⁾.

Влияние кулоновских поправок на сдвиг ионизационного равновесия в аргоне при $T = 45\,000$ К и $p \sim 10^{-3}$ – 10^2 атм рассмотрено в работе [14]. Это влияние оказалось довольно заметным, в то время как поправки к термодинамическим функциям не превышали 1 %.

§ 12. Плотный газ. Элементы квантовой статистики Ферми–Дирака для электронного газа. Выше при рассмотрении ионизованного газа всегда предполагалось, что свободные электроны подчиняются классической статистике Больцмана. Строго говоря, электронный газ описывается квантовой статистикой Ферми–Дирака, которая лишь в случае достаточно высоких температур или достаточно малых плотностей переходит в статистику Больцмана. Это превращение происходит, если температура электронного газа гораздо больше так называемой температуры вырождения T_0 , которая определяется числом электронов в 1 см^3 n :

$$T_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e k} n^{2/3} = 4,35 \cdot 10^{-11} n^{2/3} \text{ К.} \quad (3.87)$$

При обычных газовых плотностях и температурах, при которых вследствие ионизации появляются свободные электроны, условие $T \gg T_0$ выполняется с большим запасом. Например, при плотности атмосферного воздуха и примерно однократной ионизации атомов $n = 5,34 \cdot 10^{19}\text{ см}^{-3}$, температура вырождения $T_0 = 610$ К, температура газа при этом $T \sim 35\,000$ К, так что $T/T_0 \approx 60$. Условие применимости статистики Больцмана может нарушаться либо при очень низких температурах, либо при высоких плотностях электронного газа. Первый случай при рассмотрении газов обычно не возникает так как при низких температурах газы не ионизируются.

Что же касается второго, то в ряде процессов образуется очень плотный, высоконагретый газ, в котором присутствуют электроны. Обычно такое положение возникает, когда первоначально твердое тело быстро нагревается до очень высоких температур порядка десятков или сотен тысяч градусов ²⁾ и, по существу, превращается в плотный газ, так как при таких температурах энергия теплового движения часто превышает энергию связи атомов в твердом или жидком веществе.

При плотности порядка плотности твердого тела и числе свободных электронов на атом порядка единицы температура вырождения равна нескольким десяткам тысяч градусов (например, при $n = 5 \cdot 10^{22}\text{ см}^{-3}$ $T_0 = 59\,000$ К), то есть даже при температуре в сто тысяч градусов никак нельзя описывать электроны статистикой Больцмана.

Следует отметить, что при плотностях порядка плотности твердого тела и температурах в десятки или сотни тысяч градусов энергия кулоновского взаимодействия

¹⁾ Формально при рассматриваемых условиях мы находимся на пределе применимости метода, так как $\Delta\overline{I} = 5,4$ эВ лишь немногим меньше $kT = 8,6$ эВ.

²⁾ Например, при ударах метеоритов, летящих с большими скоростями порядка нескольких десятков километров в секунду, о поверхность планет, при взрывах проволок электрическим током, при нагревании анодных игл в импульсных рентгеновских трубках электронным ударом (см. работу В. А. Цукермана и М. А. Манаковой [28]), при нагревании твердого тела мощной ударной волной и др. Мы не останавливаемся здесь на таком классическом объекте применения квантовой статистики, как свободные электроны в металлах при обычных условиях.

заряженных частиц, электронов и ионов, сравнима с их кинетической энергией и электронно-ионный газ является существенно неидеальным ¹⁾.

Задача определения термодинамических свойств газа при таких условиях приближенно решается методом, который представляет собой обобщение метода Томаса–Ферми для статистического описания атома на случай отличной от нуля температуры. Для того чтобы изложить существо этого метода, нам придется напомнить основные положения квантовой статистики Ферми–Дирака (подробнее см., например, [1]).

Рассмотрим свободный ²⁾ электронный газ при нуле температуры (так называемый полностью вырожденный газ). Число квантовых состояний в элементе объема dV и интервале абсолютных значений импульсов электрона от p до $p + dp$ (число клеток в фазовом пространстве координат и импульсов) равно $4\pi p^2 dp dV/h^3$. В каждой клетке может находиться по два электрона с противоположно направленными спинами, так что полное число квантовых состояний в данном интервале $dp dV$ есть $8\pi p^2 dp dV/h^3$. По принципу Паули в каждом квантовом состоянии с данным направлением спина может находиться не более одного электрона.

N электронов, находящихся в объеме V ($n = N/V$ — число электронов в 1 см^3), заполняют все самые низкие энергетические состояния с импульсами от 0 до p_0 , так что

$$N = V \int_0^{p_0} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi p_0^3}{3h^3} V.$$

Отсюда следует выражение для максимальной кинетической энергии электронов $\varepsilon_0 = p_0^2/2m_e$ — так называемой граничной энергии Ферми:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n^{2/3}. \quad (3.88)$$

Температура вырождения (3.87) определяется как $T_0 = \varepsilon_0/k$. Кинетическая энергия N электронов в объеме V равна

$$E_{\text{кин}} = V \int_0^{p_0} \frac{p^2}{2m_e} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{3}{5} \varepsilon_0 N \sim N^{5/3} V^{-2/3} \quad (3.89)$$

(средняя кинетическая энергия одного электрона равна $3/5 \varepsilon_0$).

Поскольку электроны предполагаются свободными, то кинетическая энергия в то же время равна и полной энергии, $E_{\text{кин}} = E$, и в силу термодинамического соотношения $TdS = dE + PdV$, отнесенного к нулю температуры, давление свободного вырожденного электронного газа равно

$$P = -\frac{dE}{dV} = \frac{2}{3} \frac{E_{\text{кин}}}{V} = \frac{2}{5} \varepsilon_0 n = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n^{5/3}. \quad (3.90)$$

Давление пропорционально плотности в степени $5/3$.

¹⁾ Например, при $n = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $Z = 1$ кулоновская энергия $e^2/r \approx e^2 n^{1/3}$ сравнивается с kT при $T = 60000 \text{ К}$. Кинетическая энергия свободных электронов, которая определяется не просто температурой, но и температурой вырождения T_0 , также сравнима с кулоновской, поскольку T_0 при этом равна 59000 К .

²⁾ Свободный в том смысле, что на электроны не действуют силы. В то же время предполагается, что электронный газ не растекается. Реально это можно себе представить как электронейтральную смесь ионов и электронов, в которой среднее самосогласованное поле считается равным нулю (везде, кроме границ тела).

Соотношение давления и кинетической энергии, $P = (2/3) \cdot E_{\text{кин}}/V$, такое же, как и в одноатомном бoльцмановском газе. Это и понятно, так как «кинетическое» давление определяется переносом импульса частицами, и связь его с кинетической энергией частиц часто механическая, не зависящая от типа статистики, которой подчиняются частицы.

При повышении температуры электроны, ранее заполнявшие самые низкие энергетические уровни, переходят в более высокие квантовые состояния. В квантовой статистике Ферми–Дирака доказывается, что функция распределения частиц по квантовым состояниям, то есть среднее число электронов в квантовом состоянии с энергией ε , есть

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + \varepsilon}{kT}\right) + 1}, \quad (3.91)$$

где μ — константа, зависящая от температуры и плотности электронов, представляющая собою химический потенциал электронного газа. В свободном электронном газе энергия ε равна кинетической энергии $\varepsilon = p^2/2m_e$. При нуле температуры функция распределения равна 1, если $\varepsilon < \mu$ ($\frac{-\mu + \varepsilon}{kT} = -\infty$), и равна 0, если $\varepsilon > \mu$ ($\frac{-\mu + \varepsilon}{kT} = +\infty$), то есть получаем уже

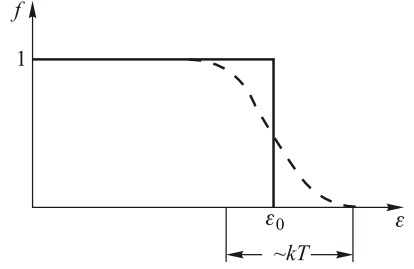


Рис. 3.2. Функция распределения для электронного газа по статистике Ферми–Дирака

найденное выше распределение, причем, как видно из этого рассуждения, химический потенциал свободного газа совпадает с граничной энергией Ферми ε_0 . При отличной от нуля температуре распределение «размывается», как показано на рис. 3.2.

Число электронов в 1 см^3 с импульсами в интервале от p до $p + dp$ есть

$$\varrho(p) dp = \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} f = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{-\mu + \varepsilon}{kT}\right) + 1}, \quad (3.92)$$

а полное число электронов в единице объема равно

$$n = \int_0^\infty \varrho(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{-\mu + \varepsilon}{kT}\right) + 1}. \quad (3.93)$$

Эта формула определяет в неявном виде химический потенциал μ как функцию температуры и плотности.

Кинетическая энергия электронов в единице объема равна

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \int_0^\infty \frac{p^2}{2m_e} \varrho(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{2m_e} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{-\mu + \varepsilon}{kT}\right) + 1}. \quad (3.94)$$

Статистику можно применять и к электронному газу, находящемуся в потенциальном поле. Разумеется, поле должно меняться в пространстве достаточно медленно для того, чтобы в элементарном объеме dV , на протяжении которого поле может считаться постоянным, находилось достаточно много частиц. В противном случае применение статистики к частицам теряет смысл¹⁾. Если обозначить электростати-

¹⁾ Поле должно мало меняться и на расстоянии порядка длины волны электрона.

ческий потенциал поля в точке r через $\varphi(r)$, то энергию электрона ε можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e} - e\varphi(r). \quad (3.95)$$

В статистической механике доказывается, что если газ находится в поле, то в состоянии равновесия его химический потенциал μ должен быть одинаковым в разных точках. В противном случае частицы будут перетекать из одного места в другое.

Если рассматривать электронный газ, находящийся в поле при нуле температуры, то согласно формулам (3.91), (3.95) функция распределения f по-прежнему равна 1, если $\varepsilon = p^2/2m_e - e\varphi(r) < \mu$ и равна 0, если $\varepsilon = p^2/2m_e - e\varphi(r) > \mu$. Таким образом, максимальная кинетическая энергия электрона в данной точке r равна $\varepsilon_0(r) = \mu + e\varphi(r)$. Она теперь зависит от координаты, но максимальная полная энергия электрона $p_0^2/2m_e - e\varphi(r) = \varepsilon_0 - e\varphi(r) = \mu$, равная химическому потенциалу, от координаты точки не зависит (если бы она зависела от координаты, электроны перетекали бы из места с более высокой в место с более низкой максимальной энергией).

Формулы (3.92)–(3.94) справедливы и для газа, находящегося в поле, если под ε понимать величину (3.95). Формула (3.93) теперь дает неявную связь концентрации газа $n(r)$ в точке r , с величиной $\varepsilon_0(r) = \mu + e\varphi(r)$, то есть с потенциалом в данной точке и температурой T . При $T = 0$ эта связь по-прежнему выражается формулой (3.88).

§ 13. Модель атома по Томасу–Ферми и сильное сжатие холодного вещества. При описании плотного газа по методу Томаса–Ферми не делается различия между «свободными» и «связанными» электронами, и газ считается состоящим не из ионов и электронов, как при малых плотностях, а из ядер и электронов. Ядра подчиняются статистике Больцмана и вносят свой вклад в полные давление и удельную тепловую энергию. При высоких температурах этот вклад соответствует обычному одноатомному газу:

$$P_a = n_a kT, \quad \varepsilon_a = \frac{3}{2} \frac{n_a}{\rho} kT$$

(n_a — число ядер в 1 см^3 , ρ — плотность вещества). Вся энергия взаимодействия частиц приписывается электронам. Для вычисления электронных частей энергии и давления газ разбивается на атомные ячейки, каждая из которых содержит ядро с зарядом Ze и Z электронов. Для простоты ячейка считается сферической. Объем ее V принимается равным среднему объему в веществе, приходящемуся на одно ядро: $V = 1/n_a$, а радиус $r_0 = (3V/4\pi)^{1/3} = (3/4\pi n_a)^{1/3}$.

Между атомными ячейками в модели Томаса–Ферми не действуют силы сцепления, так что эта модель не описывает связи атомов в твердом теле. Ячейки оказывают друг на друга положительное давление, совпадающее с давлением электронного газа, то есть модель описывает только силы отталкивания и «тепловое» давление. Поэтому модель дает разумные результаты либо при больших плотностях, для сильно сжатого твердого тела, когда силы отталкивания резко преобладают над силами притяжения атомов, либо при высоких температурах, когда силами сцепления можно пренебречь. Из сказанного следует, что в модели Томаса–Ферми энергии «ионизации», «возбуждения» и «теплого движения» электронов уже не вычисляются отдельно, как при рассмотрении разреженных газов. Они автоматически входят в полную электронную энергию атомной ячейки. Для того чтобы выделить из нее «тепловую» часть энергии, специально связанную с существованием температуры, из полной энергии следует

исключить энергию ячейки того же самого объема, но соответствующую нулю температуры. То же относится и к давлению.

Рассмотрим сначала атомную ячейку при нуле температуры, то есть статистическую модель атома по Томасу–Ферми¹⁾. В основе этой модели лежит предположение о том, что в сложных атомах с большим числом электронов большинство электронов обладает высокими главными квантовыми числами и их движение квазиклассично.

Электроны в атоме рассматриваются как газ, находящийся в достаточно медленно меняющемся по радиусу самосогласованном электростатическом поле²⁾ $\varphi(r)$, обусловленном зарядами ядра и самих электронов. Тем самым учитывается неидеальность электронного газа. К этому газу применяется статистика Ферми–Дирака.

Максимальная кинетическая энергия электрона на данном расстоянии r от ядра $\varepsilon_0(r) = \mu + e\varphi(r)$ связана с плотностью электронов в этой точке формулой (3.88), так что плотность выражается через потенциал формулой

$$n(r) = \frac{8\pi}{3} 2^{3/2} \frac{m_e^{3/2}}{h^3} [e\varphi(r) + \mu]^{3/2}. \quad (3.96)$$

Электростатический потенциал $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\varphi(r)] = 4\pi en(r), \quad (3.97)$$

которое после подстановки (3.96) и введения нового «потенциала» $\psi = \varphi + \mu/e$ (потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi) = \frac{32 \cdot 2^{2/3} \pi^2}{3} \frac{e^{5/2} m_e^{3/2}}{h^3} \psi^{3/2}. \quad (3.98)$$

К уравнению (3.98) присоединяются граничные условия. В центре, при $r \rightarrow 0$, поле переходит в кулоновское поле ядра, то есть

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{r} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (3.99)$$

Поскольку ячейка электронейтральна, на границе ее поле равно нулю (вне ячейки потенциал постоянен):

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (3.100)$$

Это условие эквивалентно очевидному соотношению

$$Z = \int_0^{r_0} n(r) 4\pi r^2 dr. \quad (3.101)$$

Введением безразмерных переменных

$$x = \frac{r}{a}, \quad a = \frac{1}{4} \left(\frac{9\pi^2}{2} \right)^{1/3} \frac{a_0}{Z^{1/3}} = \frac{0,885 a_0}{Z^{1/3}}, \quad (3.102)$$

¹⁾ Подробному изложению этого вопроса посвящена книга Гамбоша [29]. Короткое и ясное изложение можно найти в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [30].

²⁾ О возможностях статистического описания электронного газа в поле было сказано в предыдущем параграфе.

где $a_0 = \hbar^2 / 4\pi^2 m_e e^2 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус, и

$$\chi = \frac{r}{Z\epsilon} \left(\varphi + \frac{\mu}{e} \right) = \frac{r}{Z\epsilon} \psi, \quad (3.103)$$

уравнение (3.98) приводится к универсальному виду

$$x^{1/2} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = \chi^{3/2}. \quad (3.104)$$

Граничные условия (3.99), (3.100) принимают следующую форму:

$$\chi(0) = 1; \quad \chi(x_0) = x_0 \left(\frac{d\chi}{dx} \right)_{x_0}.$$

Безразмерная форма уравнений демонстрирует характер подобия по отношению к числу электронов Z . А именно, распределение плотности по радиусу согласно (3.96), (3.102), (3.103) можно записать в виде

$$n(r) = Z^2 f \left(\frac{rZ^{1/3}}{b} \right), \quad b = 0,885 a_0, \quad (3.105)$$

где функция f пропорциональна $(\chi/x)^{3/2}$.

Решение уравнения (3.104) с соответствующими граничными условиями (это делается путем численного интегрирования) дает распределение потенциала и плотности электронов по радиусу, после чего можно вычислить все интересующие нас величины.

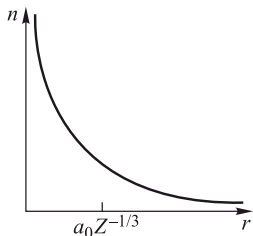


Рис. 3.3. Схематическое распределение электронной плотности в свободном атоме

Электронная плотность в свободном нейтральном атоме, не сжатом внешними силами, как показывает решение, простирается до бесконечности: $\chi \rightarrow 0$, $n \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ ¹⁾ (рис. 3.3). Если за нуль потенциальной энергии принять состояние, в котором все заряды разведены на бесконечность, следует положить потенциал φ равным нулю на бесконечности. Химический потенциал при этом обращается в нуль. Давление на границе свободного атома, не сжатого внешними силами, а следовательно, и давление²⁾ во всем пространстве равны нулю. По теореме вириала для неограниченного кулоновского поля полные кинетическая и потенциальная энергии частиц связаны соотношением $2E_{\text{кин}}^\infty = -E_{\text{пот}}^\infty$. Полная энергия атома

$E^\infty = E_{\text{кин}}^\infty + E_{\text{пот}}^\infty = -E_{\text{кин}}^\infty = \frac{1}{2} E_{\text{пот}}^\infty$. Теорема вириала в данном случае, в сущности, выражает тот факт, что кинетическое расталкивание электронов в точности уравновешивается кулоновским стягиванием их к ядру, благодаря чему полное давление,

¹⁾ Поскольку поле электронейтрального атома должно убывать на бесконечности быстрее, чем r^{-2} , «потенциал» ψ убывает быстрее, чем r^{-1} ; граничное условие в этом случае принимает вид $r\psi \sim \chi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

²⁾ Давление в системе из взаимодействующих частиц складывается из двух частей: «кинетического», связанного с движением частиц и их кинетической энергией обычным соотношением $P_{\text{кин}} = 2n\varepsilon_{\text{кин}}/3$, где n — число частиц в 1 см³, $\varepsilon_{\text{кин}}$ — их средняя кинетическая энергия, и «потенциального», эквивалентного силам, действующим на частицы (в данном случае кулоновским). Формально это разделение следует из соотношения (при нуле температуры) $P = -\partial E / \partial V = -(\partial E_{\text{кин}} / \partial V) - (\partial E_{\text{пот}} / \partial V) = P_{\text{кин}} + P_{\text{пот}}$. Кинетическое давление всегда положительно, потенциальное $P_{\text{пот}} > 0$, если частицы отталкиваются, и $P_{\text{пот}} < 0$, если они притягиваются.

равное сумме «кинетического» и «потенциального», в каждой точке равно нулю. Хотя электронная плотность, в принципе, простирается до бесконечности, основной заряд сосредоточен в конечном объеме $V_{\text{эф}}$. Согласно (3.105), линейным масштабом этой области служит боровский радиус a_0 , причем $V_{\text{эф}} \sim Z^{-1}$ (см. рис. 3.3). Это следует и из теоремы вириала. Потенциальная энергия атома по порядку величины равна $E_{\text{пот}}^{\infty} \sim -e^2 Z^2 / V_{\text{эф}}^{1/3}$. Кинетическая энергия, согласно (3.88), (3.89), порядка

$$E_{\text{кин}}^{\infty} \sim \varepsilon_0 Z \sim \frac{h^2}{m_e} Z \left(\frac{Z}{V_{\text{эф}}} \right)^{2/3}.$$

Из условия механического равновесия или теоремы вириала найдем $V_{\text{эф}} \sim (m_e e^2 / h^2)^3 Z^{-1} \sim a_0^3 Z^{-1}$. Полная энергия атома порядка $E^{\infty} = E_{\text{пот}}^{\infty} / 2 \sim -e^2 \times \times Z^{7/3} / a_0 \sim -I_{\text{H}} Z^{7/3}$. Точное значение $E^{\infty} = -20,8 Z^{7/3}$ эВ; это есть, по абсолютной величине, энергия, которую надо затратить, чтобы развести все заряды атома на бесконечность (энергия полной ионизации атома).

Рассмотрим теперь «сжатый» атом, то есть атомную ячейку конечного объема V . Теперь давление (равное «внешней» силе, действующей на 1 см^2 поверхности ячейки) отлично от нуля и положительно. Следовательно, и электронная плотность на границе ячейки конечна (рис. 3.4). В самом деле, поля на границе ячейки нет. Электроны у границы ведут себя как свободные и все давление у границы «кинетического» происхождения. «Кинетическое» давление, по определению, равно передаче нормальной составляющей импульса 1 см^3 поверхности ячейки в 1 с. Поскольку электроны распределены по направлениям движения изотропно, то

$$P = \int_0^{\infty} \varrho(p, r_0) p \frac{v}{3} dp, \quad (3.106)$$

где $\varrho(p, r_0)$ — функция распределения по импульсам у границы ячейки r_0 , а $v = p/m_e$ — скорость электронов. Давление, как и следует ожидать, равно

$$P = \frac{2}{3} n(r_0) \varepsilon_{\text{кин}}(r_0) = \frac{2}{5} n(r_0) \varepsilon_0(r_0), \quad (3.107)$$

где $\varepsilon_{\text{кин}}(r_0) = \frac{3}{5} \varepsilon_0(r_0)$ — средняя кинетическая энергия электрона у границы ячейки. Давления во всех точках одинаковы: $P_{\text{кин}} + P_{\text{пот}} = \text{const}$, хотя «кинетическая» и «потенциальная» составляющие меняются от точки к точке. «Кинетическое» давление $P_{\text{кин}}$ в любой точке выражается через кинетическую энергию формулой типа (3.107).

Выражая полные кинетическую и потенциальную энергии всей ячейки $E_{\text{кин}}$ и $E_{\text{пот}}$ через интегралы по объему ячейки от плотностей энергий, которые пропорциональны электронной плотности, можно путем непосредственного вычисления убедиться в том, что ¹⁾

$$PV = \frac{2}{3} E_{\text{кин}} + \frac{1}{3} E_{\text{пот}}. \quad (3.108)$$

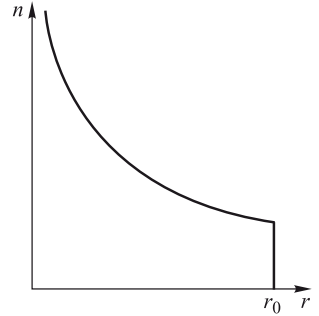


Рис. 3.4. Схематическое распределение электронной плотности в «сжатом» атоме — в атомной ячейке радиусом r_0

¹⁾ При вычислении потенциальной энергии следует разбить потенциал на два слагаемых, соответствующих потенциалу ядра и потенциалу электронов $\varphi = \varphi_a + \varphi_e$, где $\varphi_a = Ze/r$,

Уравнение (3.108) может быть выведено из теоремы вириала применительно к системе частиц, находящихся в кулоновском поле и занимающих конечный объем ¹⁾. В частности, для свободного атома $P = 0$ и $2E_{\text{кин}}^{\infty} = -E_{\text{пот}}^{\infty}$, как уже говорилось выше.

При сжатии атома давление и плотность на границе растут. Растет и энергия ячейки в силу соотношения $dE = -P dV$ ($P > 0$). Физически это очевидно, если учесть, что не сдерживаемое внешними силами электронное облако, стремясь свести к минимуму энергию системы, растекается до бесконечности. Если интересоваться энергией сжатия ячейки, то ее следует отсчитывать от энергии свободного атома, то есть из полной энергии ячейки $E(V)$ следует вычесть энергию атома E^{∞} . Поскольку давление в свободном атоме равно нулю, то из давления ничего вычитать не надо.

Здесь следует подчеркнуть, что модель Томаса–Ферми по своему существу описывает только силы отталкивания, действующие между атомами (атомными ячейками), эквивалентные положительному давлению, и не описывает сил притяжения, которые появляются только при учете обменной энергии. Поэтому модель не может обеспечить связывание атомов в твердое тело. Чтобы сжать атомную ячейку до размеров ее в твердом теле в модели Томаса–Ферми, необходимо затратить работу против сил давления, и энергия такой ячейки больше, чем энергия свободного атома, в то время как в действительности давление в твердом теле при нуле температуры равно нулю, и энергия связанного состояния атома меньше энергии свободного атома.

При небольших сжатиях свободного атома в рассматриваемой модели, когда объем $V \gg V_{\text{эф}}$, электронная плотность перераспределяется только вблизи границы (рис. 3.5), давление и энергия $\Delta E = E - E^{\infty}$ невелики. Приближенную зависимость давления от объема ячейки можно получить, полагая, что плотность на границе r_0 в первом приближении такая же, как и плотность в точке $r = r_0$ в свободном атоме.

$$\begin{aligned} E_{\text{пот}} = E_{\text{пот } e} + E_{\text{пот } a} &= -\frac{1}{2}4\pi e \int_0^{r_0} r^2 dr n(r) \varphi_e(r) - 4\pi e \int_0^{r_0} r^2 dr n(r) \varphi_a(r) = \\ &= -\frac{1}{2}4\pi e \int_0^{r_0} r^2 dr n(r) \left[\varphi(r) + \frac{Ze}{r} \right]. \quad (3.109) \end{aligned}$$

Множитель $1/2$ в $E_{\text{пот } e}$ введен потому, что энергия взаимодействия каждого электрона с каждым другим в интеграле учтена дважды. Чтобы потенциальная энергия отсчитывалась от значения, соответствующего разведению всех электронов на бесконечность, следует положить потенциал на границе нейтральной ячейки $\varphi(r_0)$ равным нулю. Поскольку плотность на границе сжатого атома отлична от нуля (ей пропорционально давление), химический потенциал в силу определения $\varphi(r_0) = 0$, согласно (3.96), не равен нулю и положителен.

¹⁾ Теорема вириала для движения системы частиц в кулоновском поле гласит: $2E_{\text{кин}} = I = -\sum_i r_i F_i$, где r_i — радиус вектор i -го электрона, а F_i — действующая на него сила.

Усреднение производится по всем положениям электронов (или по времени). Разбивая вириал I на три составляющие, соответствующие силам, действующим на электрон со стороны других электронов I_{ee} , ядра I_{ea} и границы I_0 , и производя несложные преобразования (см. [31]), получим:

$$\begin{aligned} I_0 &= r_0 \overline{|F_{\text{граница}}|} = 4\pi r_0^3 P = 3PV, \quad I_{ea} = \sum_i \overline{\frac{Ze^2}{r_i}} = -E_{\text{пот } a}, \\ I_{ee} &= -e^2 \sum_i \sum_j \overline{\frac{r_i(r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3}} = -\frac{e^2}{2} \sum_i \sum_j \overline{\frac{1}{|r_i - r_j|}} = -E_{\text{пот } e}. \end{aligned}$$

Подставляя все эти слагаемые в теорему вириала, получим (3.108).

Как легко проверить, асимптотическое решение уравнения (3.104) для свободного атома при $x \rightarrow \infty$ имеет вид $\chi = 144x^{-3}$.

Согласно (3.105) и (3.102) плотность на границе

$$n(r_0) \sim Z^2 \left(\frac{\chi}{x}\right)^{3/2} \sim Z^2 x^{-6} \sim Z^2 r_0^{-6} Z^{-2} \sim R_0^{-6} \sim V^{-2},$$

а давление по формуле (3.107) $P \sim n\varepsilon_0 \sim^{5/3} \sim V^{-10/3}$ и не зависит от Z .

Существенное возрастание давления и энергии начинается при больших сжатиях, когда объем атомной ячейки становится порядка и меньше эффективного объема $V_{\text{эф}}$, занимаемого основной частью электронов в атоме. Электроны теперь занимают весь объем ячейки (см. рис. 3.5) и среднее расстояние между частицами $\bar{r}$ порядка $V^{1/3}$, а средняя плотность $\bar{n} \sim Z/V$. При этом $E_{\text{кин}} \sim Z\bar{n}^{2/3} \sim \sim Z^{5/3}V^{-2/3}$, а $E_{\text{пот}} \sim -Z^2/\bar{r} \sim -Z^2V^{-1/3}$.

Как видно из этих соотношений, при сжатии кинетическая энергия растет скорее, чем потенциальная, и в пределе малых объемов, то есть больших плотностей вещества $E_{\text{кин}} \gg E_{\text{пот}}$, $E \sim E_{\text{кин}}$, $P \sim E_{\text{кин}}/V$. Все давление становится «кинетическим» и предельный закон имеет вид

$$P \sim Z^{5/3}V^{-5/3} \sim n^{-5/3}. \quad (3.110)$$

Давление сильно сжатого холодного вещества пропорционально плотности вещества ρ (которой пропорциональна средняя плотность электронов $\bar{n}$) в степени $5/3$, как для свободного вырожденного электронного газа. Удельная энергия соответственно пропорциональна $\varepsilon \sim \rho^{2/3}$.

Надо сказать, что фактически эти предельные законы становятся справедливыми лишь при очень больших плотностях, раз в десять превышающих плотности обычных твердых тел. О реальных зависимостях давления и энергии холодного сжатия твердых тел от плотности речь будет идти в гл. XI.

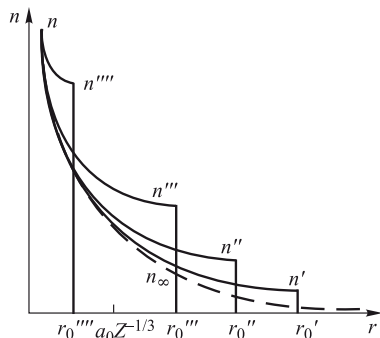


Рис. 3.5. Перераспределение электронной плотности при сжатии атома. n' , n'' , n''' , n'''' — схематические распределения в ячейках радиусов r'_0 , r''_0 , r'''_0 , r''''_0 ; n_∞ — распределение в свободном атоме ($r_0 = \infty$)

§ 14. Вычисление термодинамических функций высоконагретого плотного газа методом Томаса–Ферми. Общая схема термодинамического описания плотного газа при высоких температурах в рамках модели Томаса–Ферми была изложена в начале предыдущего параграфа. Обобщение уравнений модели холодной атомной ячейки на случай отличной от нуля температуры производится элементарно. В основе лежит уравнение Пуассона (3.97) для электростатического потенциала в ячейке $\varphi(r)$ ¹⁾, который по-прежнему удовлетворяет граничным условиям (3.99) и (3.100), а также полагается равным нулю на границе ячейки для целесообразного отсчета потенциальной энергии. Однако вместо простого соотношения (3.96), связывающего

¹⁾ Заметим, что уравнение Пуассона лежит и в основе вычисления кулоновского взаимодействия данного иона с образующимся вокруг него электронно-ионным облаком в методе Дебая–Хюккеля. Однако, в отличие от этого метода, здесь кулоновская энергия не предполагается малой по сравнению с кинетической и для плотности зарядов выписывается точное выражение, а кроме того, для описания электронов используются функции распределения не Больцмана, а Ферми–Дирака.

электронную плотность $n(r)$ с потенциалом, теперь появляется интегральное соотношение (3.93) с функцией распределения $f(p)$, зависящей от температуры по формуле (3.91), где энергия электрона выражается, как и раньше, формулой (3.95).

По-прежнему справедливо нормировочное условие (3.101). Полная кинетическая энергия ячейки вычисляется путем интегрирования плотности кинетической энергии (3.94) по объему ячейки, а потенциальная энергия выражается через электронную плотность и потенциал формулой (3.109).

Для давления справедлива формула (3.106), если под $\varrho(p, r_0)$ понимать теперь функцию распределения по импульсам, зависящую от температуры по формуле (3.92). По-прежнему справедлива и теорема вириала, приводящая к соотношению (3.108), которое следует и непосредственно из выражений для P , $E_{\text{кин}}$ и $E_{\text{пот}}$.

Известные затруднения представляет вычисление энтропии ячейки S . Непосредственное вычисление ее с помощью термодинамических соотношений и выражений для энергии E и давления P ячейки было проделано Брахманом [32]. Менее строго, путем приближенного вычисления статистической суммы, энтропию нашел Латтер [31]. Энтропия ячейки равна

$$S = \frac{1}{T} \left[\frac{5}{3} E_{\text{кин}} + 2E_{\text{пот } e} + E_{\text{пот } a} - Z\mu \right], \quad (3.111)$$

где $E_{\text{пот } e}$ и $E_{\text{пот } a}$ — потенциальные энергии взаимодействия электронов друг с другом и с ядром (см. формулу (3.109)). Для определения химического потенциала μ как функции T и V служит нормировочное условие (3.101).

Можно показать, что при $T \rightarrow 0$ выражение в скобке стремится к нулю быстрее, чем T , так что $S \rightarrow 0$ в соответствии с теоремой Нернста.

Систему уравнений для определения функций $\varphi(r)$ и $n(r)$, а также выражения для энергии, давления и энтропии можно преобразовать к безразмерным переменным (в качестве масштаба длины вводится радиус ячейки r_0), причем, как и при нуле температуры, модель допускает преобразование подобия относительно Z . При нуле температуры распределение плотности выражалось формулой (3.105), откуда следует, что плотность на границе ячейки можно представить в виде $n(r_0) = Z^2 F(V \cdot Z)$ ($r_0 Z^{1/3} \rightarrow V \cdot Z$), давление согласно (3.107) — в виде $P = Z^{10/3} F_1(V \cdot Z)$, а энергию согласно (3.108) — в виде $E = Z^{7/3} F_2(V \cdot Z)$.

При отличной от нуля температуре эти соотношения подобия обобщаются таким образом, что температура всегда входит в виде комбинации $TZ^{-4/3}$, так что

$$PZ^{-10/3} = f(VZ, TZ^{-4/3}), \quad EZ^{-7/3} = f_1(VZ, TZ^{-4/3}).$$

Энтропия и химический потенциал всегда фигурируют в виде комбинаций SZ^{-1} , $\mu Z^{-4/3}$.

Уравнения модели Томаса–Ферми были решены численно с помощью ЭВМ, и результаты вычисления термодинамических функций в широком диапазоне переменных VZ и $TZ^{-4/3}$ (плотностей и температур) приведены в виде графиков в статье Латтера [31]¹⁾.

Из энергии E вычиталась энергия холодного свободного атома E^∞ (соответственно из $E_{\text{кин}}$ и $E_{\text{пот}}$ вычитались $E_{\text{кин}}^\infty$ и $E_{\text{пот}}^\infty$).

¹⁾ Еще до работы Латтера ряд авторов [33] пытались рассмотреть методом теории возмущений температурную поправку к решениям для нуля температуры. Однако такая процедура сопряжена с численными расчетами, не намного менее сложными, чем решение точных уравнений, а охватывает температурный диапазон гораздо более узкий.

Рассмотрение результатов расчетов показывает, что при повышении температуры в ячейке заданного объема кинетическая и полная энергии и давление монотонно возрастают.

Потенциальная энергия меняется мало, только за счет перераспределения электронной плотности, которая при повышении температуры выравнивается по объему ячейки. В пределе очень высоких температур, когда снимается вырождение электронного газа (при $kT \gg \frac{h^2}{m_e} (Z/V)^{2/3}$; см. формулу (3.87)), энергия и давление стремятся к естественным значениям:

$$E \approx E_{\text{кин}} \approx \frac{3}{2} ZkT; \quad P \approx \frac{Z}{V} kT = \bar{n} kT.$$

Если изотермически сжимать атомную ячейку, давление в ней монотонно возрастает, правда, медленнее, чем в случае нуля температуры, что видно хотя бы из того, что в пределе высоких температур $P \sim 1/V$, тогда как при $T = 0$ и $V \rightarrow 0$ $P \sim 1/V^{5/3}$. Энергия при не слишком высоких температурах имеет пологий минимум в зависимости от объема: увеличение энергии при разрежении связано с тем, что при больших размерах ячейки электроны из-за наличия температуры и «теплого» давления стремятся занять несколько больший объем, чем в случае холодной ячейки, что приводит к некоторому возрастанию потенциальной энергии.

В качестве примера температурной зависимости энергии укажем, что энергию ячейки, приходящуюся на один атом железа при нормальной плотности твердого железа, можно аппроксимировать в интервале температур от 20 000 до 30 000 К интерполяционной формулой

$$E = 0,86571 T_{\text{эВ}}^{1,8} \text{ эВ/атом}$$

(из энергии ячейки исключена энергия E^∞ ; температура измеряется в эВ).

При плотностях, меньших плотности, соответствующей твердому состоянию, энергия слабо зависит от объема, грубо говоря, как $E \sim V^{0,15}$. Чтобы получить полные энергию и давление вещества, к электронным составляющим, соответствующим атомной ячейке E и P , следует прибавить ядерные составляющие (см. начало § 13), то есть положить

$$P_{\text{полн}} = P_a + P = n_a kT + P_e(V, T), \quad P_e \equiv P,$$

$$E_{\text{полн}} = E_a + E = \frac{3}{2} kT + E_e(V, T) \text{ на атом; } E_e \equiv E.$$

При плотности, равной плотности твердого тела, можно несколько улучшить эти результаты, исключив из давления и энергии величины, соответствующие холодной ячейке того же объема (так как в действительности давление в реальном твердом теле при нуле температуры равно нулю), и добавив к энергии энергию связи атомов твердого тела (теплоту испарения U):

$$P_{\text{полн}} = n_a kT + P_e(V, T) - P_e(V, 0),$$

$$E_{\text{полн}} = \frac{3}{2} kT + E_e(V, T) - E_e(V, 0) + U \text{ на атом.}$$

При этом энергия отсчитывается от нормального состояния твердого тела.

Глава IV

УДАРНЫЕ ТРУБЫ

§ 1. Использование ударной трубы для изучения физико-химической кинетики. В предыдущей главе говорилось о различных физико-химических процессах, которые протекают в газах при температурах порядка тысячи или нескольких тысяч градусов и выше, таких, как возбуждение молекулярных колебаний, диссоциация молекул, химические реакции, ионизация, испускание света. При этом мы рассматривали влияние этих процессов на термодинамические свойства газов, совершенно не интересуясь их кинетикой, скоростями реакций, временами установления термодинамического равновесия.

Между тем вопросы кинетики имеют большое, часто решающее значение, если общий газодинамический процесс протекает настолько быстро, что термодинамическое равновесие не успевает устанавливаться, и состояние газовых частиц является существенно неравновесным.

Особенно большую актуальность приобрели эти вопросы в связи с проблемами входа ракет и искусственных спутников в атмосферу, сверхзвуковых течений в мощных реактивных двигателях, сильных взрывов, мощных электрических разрядов и т. д.

В отличие от термодинамических свойств газов, которые сравнительно легко рассчитываются теоретическими методами, наши сведения об эффективных сечениях элементарных процессов и скоростях разнообразных физико-химических превращений черпаются главным образом из эксперимента. Наиболее удобным и широко применяемым в настоящее время инструментом для получения в лаборатории высоких температур и исследования физико-химических процессов в газах является ударная труба. Ударная труба служит для создания в газе ударной волны, которая и нагревает газ до нужной температуры ¹⁾.

Как мы знаем, в скачке уплотнения первоначально холодный газ практически мгновенно нагревается до высокой температуры ²⁾, которую можно регулировать, меняя интенсивность ударной волны. Затем в нагретой газовой частице начинаются различные процессы: возбуждение молекулярных колебаний, диссоциация, ионизация и т. д., роль и скорость которых зависят от температуры (и плотности). Постепенно эти релаксационные процессы приводят к установлению термодинамического равновесия, соответствующего амплитуде ударной волны. Таким образом, за скачком

¹⁾ Существуют и другие способы получения ударных волн: при помощи взрывов, мощных электрических разрядов и т. д.

²⁾ Под «температурой» здесь понимается температура поступательных степеней свободы атомов и молекул.

уплотнения существует неравновесный слой (который можно включить в понятие фронта ударной волны), где разыгрываются релаксационные процессы; этот слой и подвергается исследованию на опыте. Теория позволяет связать распределения плотности и температуры в релаксационном слое со скоростями реакций, поэтому измерение распределений на опыте дает возможность определять скорости релаксационных процессов. (В некоторых случаях возможна и непосредственная регистрация кинетики реакции.)

Подробно о структуре релаксационного слоя во фронте ударной волны речь пойдет в гл. VII. В гл. VI будут рассмотрены различные физико-химические процессы, протекающие в нагретых газах, и оценены их скорости. Поскольку многие фактические данные о скоростях получены при помощи ударной трубы, представляется целесообразным предварительно познакомиться с тем, как работает это важное устройство.

Подчеркнем, что наше изложение, преследующее чисто вспомогательную цель, будет чрезвычайно кратким. Оно ни в какой мере не отражает действительного объема экспериментальных работ, который поистине огромен. Для более подробного ознакомления с вопросами конструкции и работы ударных труб, а также с экспериментальными методами исследований и измерений различных величин можно рекомендовать обзорные статьи [1, 2] и книги [3, 4, 18, 19]. Там же читатель найдет и ссылки на оригинальные работы. Здесь эти ссылки немногочисленны и имеют более или менее случайный характер.

Мы не будем останавливаться на других методах получения высоких температур (см. [16]). Отметим только очень интересные работы Ю. Н. Рябинина [17] по адиабатическому сжатию газов. Газ в трубе сжимался летящим поршнем в сотни раз, до давлений в 10 000 атм, и адиабатически нагревался вплоть до температур ~ 9000 К. С помощью созданной им установки Рябинин изучал термодинамические и оптические свойства и электропроводность высоконагретых газов.

§ 2. Принцип действия. Ударная труба представляет собой длинную трубу, обычно круглого или прямоугольного сечения, которая разделяется тонкой диафрагмой на две части. Одна из них, камера низкого давления, наполняется исследуемым газом. Во вторую часть, камеру высокого давления, нагнетается рабочий газ. Габариты трубы бывают различными. Обычно длина ее составляет несколько метров, а внутренний диаметр — порядка нескольких сантиметров. Длина камеры низкого давления в несколько раз больше длины камеры высокого давления. Давление исследуемого газа, как правило, не превышает атмосферного, а чаще всего ниже, порядка нескольких сантиметров ртутного столба. В камере высокого давления стараются создать возможно большее давление, порядка нескольких десятков или сотни атмосфер.

В нужный момент диафрагма с помощью специального устройства быстро разрывается и сильно сжатый рабочий газ устремляется в камеру низкого давления. По исследуемому газу распространяется ударная волна, а по рабочему газу бежит волна разрежения. Профили давления до и после разрыва диафрагмы, а также профиль температуры после разрыва диафрагмы, схематически изображены на рис. 4.1.

На рисунке не показаны детали распределения величин во фронте ударной волны, который представлен в виде «классического» скачка. После того как ударная волна достигает конца трубы, обычно закрытого неподвижной крышкой, она отражается и бежит навстречу рабочему газу. Давление и температура в отраженной ударной волне резко подскакивают по сравнению со значениями в падающей волне. Газ в отраженной ударной волне неподвижен относительно стенок трубы. x, t -диаграмма процесса изображена на рис. 4.2.

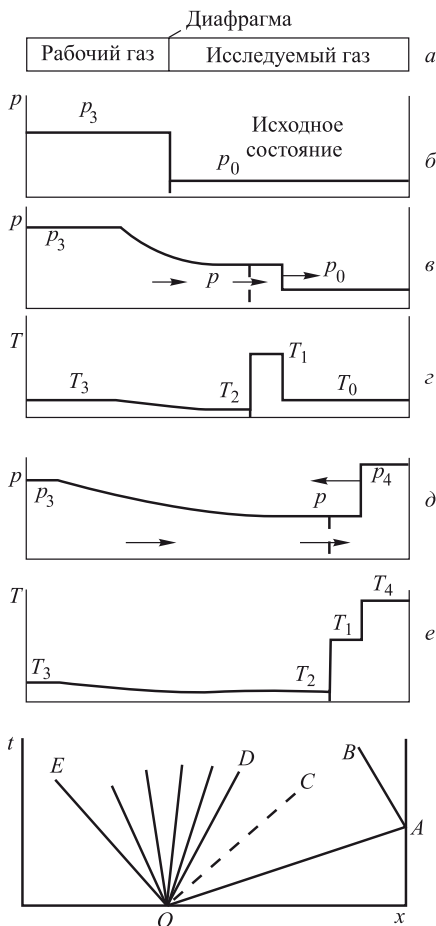


Рис. 4.1. Действие ударной трубы: *a* — схема трубы перед работой; *б* — профиль давления перед разрывом диафрагмы; *в, г* — профили давления и температуры в некоторый момент t_1 после разрыва диафрагмы; *д, е* — профили давления и температуры в момент t_1 после отражения ударной волны от закрытого конца трубы. Все профили даны схематически. Стрелки у скачков показывают направления распространения ударной волны. Другие стрелки показывают направления движения газа

Рис. 4.2. x, t -диаграмма для движения в ударной трубе, показанного на рис. 4.1. OA — ударная волна; OC — контактный разрыв; веер между OE и OD — волна разрежения в рабочем газе; AB — отраженная ударная волна

§ 3. Элементарная теория ударной трубы. Параметры падающей ударной волны легко оценить, рассматривая распад произвольного начального разрыва (см. § 24, гл. I). Будем считать для простоты, что исследуемый и рабочий газы обладают постоянными показателями адиабаты γ и γ' соответственно, и будем рассматривать только сильные ударные волны¹⁾. Припишем величинам в невозмущенном исследуемом газе индекс «0», величинам за фронтом ударной волны — индекс «1», величинам в рабочем газе, прошедшем через волну разрежения, индекс «2» и величинам в невозмущенном волной разрежения рабочем газе — индекс «3».

По формулам (1.111) для сильной ударной волны имеем

$$\varrho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_0, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \varrho_0 D^2, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad p = \frac{R}{\mu} \varrho T \quad (4.1)$$

(μ — молярная масса исследуемого газа).

¹⁾ Предполагается также, что массой диафрагмы можно пренебречь, то есть рассматриваются времена, когда ударная волна охватывает достаточно большую массу исследуемого газа.

На контактной границе между двумя газами давление и скорость непрерывны, так что $p_2 = p_1 = p$, $u_2 = u_1 = u$ (плотность и температура на контакте испытывают разрыв). Контактная граница, которая движется со скоростью u , служит «поршнем», толкающим ударную волну. По известной формуле (см. § 10 гл. I) скорость рабочего газа, прошедшего через волну разрежения, равна

$$u = \frac{2}{\gamma' - 1}(c_3 - c_2) = \frac{2}{\gamma' - 1}c_3 \left(1 - \frac{c_2}{c_3}\right), \quad (4.2)$$

причем скорости звука c_2 и c_3 связаны между собой условием адиабатичности расширения:

$$\frac{c_2}{c_3} = \left(\frac{p}{p_3}\right)^{(\gamma' - 1)/2\gamma'}.$$

Выражая $p = p_1$ через $u = u_1$ по формулам (4.1), получим уравнение, из которого можно найти скорость «поршня» при известных начальных значениях параметров:

$$\frac{u}{c_3} = \frac{2}{\gamma' - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{\gamma'(\gamma + 1)}{2} \frac{\varrho_0}{\varrho_3} \frac{u^2}{c_3^2} \right]^{(\gamma' - 1)/2\gamma'} \right\}. \quad (4.3)$$

Скорость звука $c_3 = \left(\gamma' \frac{R}{\mu'} T_3\right)^{1/2}$, где μ — молярная масса рабочего газа. Интенсивность ударной волны полностью определяется скоростью «поршня» u . В частности, температура за фронтом равна $T_1 = \frac{\gamma - 1}{2} \mu \frac{u^2}{R}$.

Наиболее мощная ударная волна при прочих равных условиях образуется, если отношение начальных плотностей ϱ_0/ϱ_3 исчезающе мало, так что рабочий газ после разрыва диафрагмы вытекает практически в вакуум, с максимальной скоростью истечения

$$u_{\max} = \frac{2}{\gamma' - 1} c_3 = \frac{2}{\gamma' - 1} \left(\gamma' \frac{R}{\mu'} T_3\right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Соответствующий верхний предел температуры за фронтом ударной волны равен

$$T_{1\max} = \frac{2\gamma'(\gamma - 1)}{(\gamma' - 1)^2} \frac{\mu}{\mu'} T_3. \quad (4.5)$$

Из последней формулы видно, что для создания высоких температур нужно применять легкий рабочий газ, причем наиболее высокие температуры возникают в тяжелых одноатомных газах (чем меньше теплоемкость, тем больше величина $\gamma - 1 = R/\mu c_V$, которая стоит в числителе формулы (4.5)).

Выгоднее всего применять в качестве рабочего газа водород ($\mu' = 2$, $\gamma' = 7/5$, $T_{1\max} = 8,75(\gamma - 1)\mu T_3$; работают также и с гелием $\mu' = 4$, $\gamma' = 5/3$, $T_{1\max} = 1,87(\gamma - 1)\mu T_3$).

Достижение максимально возможной скорости (4.4) требует исключительно малого отношения начальных плотностей газов ϱ_0/ϱ_3 (чрезвычайно большого перепада давлений p_3/p_0). При реальных значениях перепада давлений исследуемый газ оказывает существенное «сопротивление» истечению рабочего газа и скорость u , вычисленная по уравнению (4.3), оказывается в несколько раз меньше скорости истечения в пустоту. Еще резче снижается температура в ударной волне.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть рабочим газом служит водород, а исследуется аргон ($\mu = 40$, $\gamma = 5/3$). Начальные температуры обоих газов одинаковы и равны комнатной: $T_0 = T_3 = 300$ К. Отношение начальных давлений $p_3/p_0 = 7600$,

скажем, $p_0 = 5$ мм. рт. ст., $p_2 = 50$ атм. Получим: $u = 2,78$ км/с, $D = 3,7$ км/с, число Маха $M = D/c_0 = 11,5$; $T_1 = 41$ К, $T_3 = 12\,300$ К, $p_1 = 164 p_0 = 2,1$ атм. Верхний предел скорости $u_{\max} = 6,65$ км/с ¹⁾.

На самом деле температура в ударной волне будет немного ниже $12\,300$ К, так как при такой температуре уже играют некоторую роль затраты энергии на ионизацию аргона, что несколько снижает эффективный показатель адиабаты аргона γ . Для более точных расчетов нужно пользоваться фактической ударной адиабатой газа с учетом ионизации. Значения скорости газа u , вычисленные по уравнению (4.3), а также значения скорости фронта, давления, внутренней энергии в ударной волне мало чувствительны к предположениям относительно термодинамических свойств исследуемого газа. Вычисление же температуры без учета затрат энергии на ионизацию, диссоциацию и т. д. может дать сильно завышенные цифры.

При исследовании воздуха в ударной трубе с водородом в качестве рабочего газа получают скорости фронта до 4 км/с (числа Маха порядка 12) и температуры за фронтом ударной волны порядка 4000 К. Существуют различные способы увеличения эффективности ударной трубы, позволяющие несколько повысить параметры ударной волны. В частности, выгодно увеличивать начальную температуру рабочего газа T_3 (см. формулу (4.5)). Для этого в качестве рабочего газа часто используют взрывчатую смесь водорода с кислородом (смесь обычно разбавляют легким нейтральным газом — гелием). В нужный момент смесь поджигается и в результате реакции рабочий газ оказывается нагретым. Таким путем получают в воздухе скорости D порядка 5 км/с (числа Маха порядка 15) и температуры порядка 6000 К. Разработаны конструкции ударных труб с переменным сечением и др. (см. [4]).

Вычислим теперь параметры отраженной ударной волны, по-прежнему считая, что теплоемкость и показатель адиабаты постоянны. Параметрам отраженной волны припишем индекс «4», параметрам падающей — «1», как и раньше. Воспользуемся формулой (1.69), связывающей разности давлений, удельных объемов и скоростей по обе стороны фронта ударной волны. Разность скоростей, которая представляет собой скорость движения газа за фронтом относительно газа перед фронтом, в падающей и отраженной волнах одинакова. Полагая, что падающая волна сильная, получим отсюда уравнение

$$u^2 = (p_4 - p_1)(V_1 - V_4) = p_1(V_0 - V_1).$$

Уравнение ударной адиабаты (1.76) для отраженной волны (которая не является сильной) имеет вид

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_4}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_4}.$$

Замечая, что $V_0/V_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ и исключая из этих двух уравнений V_4/V_1 , найдем отношение давлений на фронте отраженной волны p_4/p_1 , после чего вычислим отношения плотностей и температур. Получим

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma}. \quad (4.6)$$

При численной оценке нужно проявлять известную осторожность. Дело в том, что в отраженной волне температуры обычно столь высоки, что теплоемкость газа вследствие диссоциации, ионизации и т. д. не постоянна. Строго говоря, параметры отраженной волны следовало бы рассчитывать, пользуясь реальными термодина-

¹⁾ Вычисление $T_{1\max}$ по формуле (4.5), которая для показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ дает $70\,000$ К, не имеет смысла, так как при столь высоких температурах существенную роль играет ионизация и фактическая температура гораздо ниже.

мическими функциями газа. Однако для грубой оценки можно воспользоваться формулами (4.6), выбрав для показателя адиабаты некоторое эффективное значение. В разреженном газе в области диссоциации или ионизации можно принять для оценки, например, $\gamma = 1,20$. Это дает: $p_4/p_1 \approx 13$, $\rho_4/\rho_1 \approx 6$, $T_4/T_1 \approx 2,17$. В тяжелых одноатомных газах можно получить в отраженной ударной волне десятки тысяч кельвинов. В воздухе при начальном давлении $p_0 = 10$ мм рт. ст. и скорости падающей волны $D \approx 5$ км/с, когда $T_1 \approx 5800$ К, $\rho_1/\rho_0 \approx 10$, в отраженной волне $T_4 \approx 8600$ К, $\rho_4/\rho_1 \approx 7$ (эти данные получены с учетом реальных термодинамических свойств). Реальный процесс в ударной трубе протекает гораздо сложнее, чем это рисуется идеализированной схемой, изложенной выше. Ударная волна становится стационарной не сразу после разрыва диафрагмы, а лишь спустя некоторое время. Играть роль трение о стенки, взаимодействия с пограничным слоем, особенно в отраженной ударной волне, неравномерность нагрева по сечению трубы, потери энергии через стенки и на излучение (при очень высоких температурах), перемешивание газов у контактного разрыва и многие другие эффекты (см. об этом [2, 4, 5, 19]; там же имеются ссылки на многие оригинальные работы).

§ 4. Электромагнитные ударные трубки. Ударные трубы, в которых ударная волна в исследуемом газе получается при внезапном расширении первоначально сжатого рабочего газа, широко применяются для исследования различных высокотемпературных процессов. Однако максимальные скорости ударной волны (числа Маха), а следовательно, и температуры, которые достигаются даже в усовершенствованных конструкциях, основанных на указанном принципе, весьма ограничены.

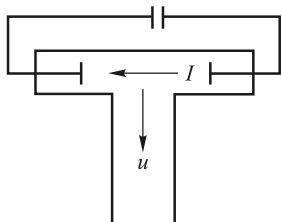


Рис. 4.3. Схема Т-образной трубки Фаулера

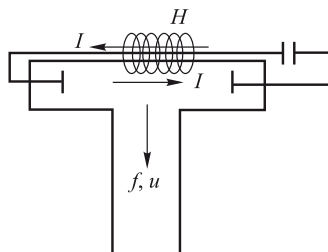


Рис. 4.4. Схема электромагнитной трубки Колба

В последнее время были предложены новые типы ударных труб, в основе которых лежат иные принципы. В этих устройствах, которые часто называют электромагнитными или магнитными ударными трубками, для создания интенсивных ударных волн используются эффекты нагревания газа при электрическом разряде и ускорения его под действием магнитных сил. Ранняя конструкция, предложенная Фаулером с сотрудниками [6], представляет собой Т-образную трубку, изображенную на рис. 4.3. Трубка наполняется исследуемым газом под низким давлением, порядка миллиметра ртутного столба. В перекладину «буквы Т» введены электроды, и через газ разряжается конденсаторная батарея. Газ в разряде быстро нагревается до высокой температуры и под действием высокого давления с большой скоростью выплескивается в «вертикальную» трубку, толкая перед собой ударную волну.

В отличие от трубки Фаулера, где электрический разряд используется как средство быстрого нагревания газа, в Т-образной трубке, построенной Колбом [7] для ускорения газа — плазмы, используется явление электромагнитного взаимодействия токов. Шина, по которой течет возвратный ток в электрической цепи разряда,

максимально приближена к разрядной части трубки, как показано на рис. 4.4. Как известно, параллельные проводники с противоположно направленными токами отталкиваются друг от друга. Это можно рассматривать как результат воздействия магнитного поля одного тока на проводник с другим током. Сила, действующая на единицу объема проводника с током, определяется векторным произведением плотности тока $\mathbf{j}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$: $\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}]$ (магнитная проницаемость плазмы очень близка к единице). Эта сила перпендикулярна к направлению тока и магнитного поля. В данном случае магнитное поле возвратного тока, текущего по шине, отталкивает плазму с текущим по ней разрядным током в сторону вертикальной трубки, дополнительно ускоряя ее. Как говорят, на плазму действует «магнитный поршень». Плазма выплескивается в вертикальную трубку с еще большей скоростью, создавая в последней еще более мощную ударную волну, чем в отсутствие магнитного поля. Размеры магнитной ударной трубки невелики: радиус примерно 1,5 см, длина вертикальной части — 12 см. В одном из типичных опытов Колба трубка наполнялась дейтерием с начальным давлением 0,7 мм рт. ст. Емкость конденсаторной батареи составляла $C = 0,52$ мкФ, она заряжалась до $V = 50$ кВ. Как показала осциллограмма разрядного тока, частота разряда равнялась $\nu = 700$ кГц. При этих параметрах была достигнута максимальная скорость ударной волны, $D = 90$ км/с (на расстоянии 3,5 см от разрядной части трубки). Волна ослабляется по мере распространения, например, на расстоянии 9 см скорость ее падает до 75 км/с. Температура за фронтом ударной волны при $D = 90$ км/с равна примерно $120\,000$ К¹⁾.

Убедимся при помощи простой оценки в том, что магнитная сила при указанных параметрах действительно может разогнать плазму до такой высокой скорости. Без учета затухания (которое невелико) разрядный ток с момента пробоя изменяется по синусоидальному закону $I = I_{\max} \sin \omega t$, где $\omega = 2\pi\nu$, а $I_{\max} = V(C/L)^{1/2} = VC\omega$ (L — самоиндукция контура, в данном случае равная 0,1 мкГн). Максимальный ток равен $I_{\max} = 115\,000$ А = $1,15 \cdot 10^5$ с/10 единиц СГСЭ. Ток I , текущий по шине, создает на расстоянии r от нее магнитное поле $H = 2I/cr$. В качестве среднего расстояния между шиной и плазмой можно принять радиус трубки. Магнитное поле действует на плазму как поршень с давлением $H^2/8\pi$. Скорость u , которую приобретает плазма под действием такого давления, определяется очевидным соотношением $H^2/8\pi \approx \rho u^2$, где ρ — плотность; отсюда $u = H/\sqrt{8\pi\rho} = I/cr\sqrt{2\pi\rho}$. В качестве I возьмем средний ток $I = (\overline{I^2})^{1/2} = I_{\max}/\sqrt{2}$.

Подставляя в формулу для скорости $r = 1,5$ см, $\rho = 0,74 \cdot 10^{-7}$ г/см³ (это — плотность дейтерия при давлении $p_0 = 0,7$ мм рт. ст. и комнатной температуре) и значение тока, получим $u = 80$ км/с. Таким образом, магнитный поршень разгоняет плазму до скорости порядка наблюдаемой ($D_{\max} \approx 90$ км/с). Заметим, что время действия магнитного поршня, которое порядка $t \approx r/u \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$ с, меньше четверти периода разряда $T/4 \approx 1/4\nu = 3,6 \cdot 10^{-7}$ с. Весь процесс ускорения плазмы происходит в первую четверть периода разряда, пока ток не вырастает до максимального значения. В сделанном расчете мы пренебрегали ускорением за счет чисто теплового расширения плазмы, нагретой разрядным током. Оценки показывают, что действительно основную роль в ускорении играет магнитное давление, а не тепловое. Для увеличения магнитного давления, действующего на плазму, в некоторых опытах к магнитному

¹⁾ Эта температура вычислена по скорости фронта при помощи ударной адиабаты с учетом эффектов диссоциации и ионизации, но без учета потока излучения с фронта, так как он мал вследствие прозрачности газа.

полю возвратного тока (которое при $\bar{I} = I_{\max}/\sqrt{2} = 80\,000$ А и $r = 1,5$ см равно примерно 11 000 Э) добавлялось еще и внешнее магнитное поле того же направления ($\sim 15\,000$ Э). В Т-образной трубке Колба очень важно получить большую скорость нарастания тока и большую амплитуду тока (высокую частоту разряда), то есть нужно принимать специальные меры для максимального уменьшения самоиндукции контура¹⁾.

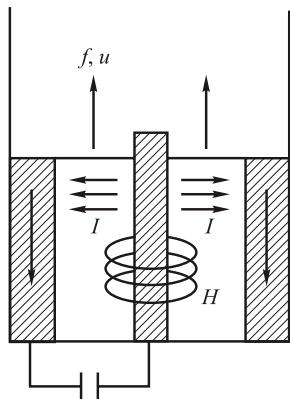


Рис. 4.5. Схема трубки Холева и Полтавченко. Электроды заштрихованы

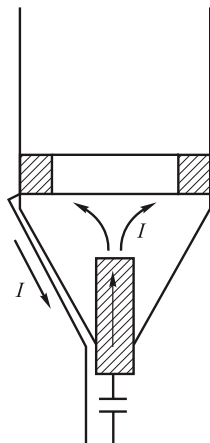


Рис. 4.6. Схема трубки с коническим насадком. Электроды заштрихованы

По принципу «магнитного поршня» действует и другая трубка, построенная С. Р. Холевым и Д. С. Полтавченко [9], схема которой показана на рис. 4.5. Разрядный ток течет в радиальном направлении между электродами, одним из которых служит стержень, расположенный на оси трубки, а другим — цилиндр вблизи поверхности трубки. Радиальный ток разряда взаимодействует с concentрическим магнитным полем тока, текущего по центральному электроду. Пондеромоторная сила направлена вдоль оси трубки и ускоряет плазму в этом направлении. Вдоль трубки распространяется ударная волна. Характерным является выбрасывание плазмы из межэлектродной области, отрыв ее от «дна» трубки под влиянием магнитного поля, которое действует подобно поршню.

Эксперименты ставились с воздухом. Наиболее интенсивная ударная волна с числом Маха $M \approx 250$, $D \approx 80$ км/с, $T_1 = 130\,000$ К была получена при следующих параметрах: $C = 2400$ мкФ, $V = 5$ кВ, $I \approx 560\,000$ А (трубка делалась из плексигласа и имела диаметр от 2 до 5 см и длину от 50 до 90 см). Волна довольно быстро затухает при распространении по трубе. Слабо затухающие ударные волны, но зато меньшей амплитуды ($D < 10$ км/с), получены на установке С. Р. Холева и Л. И. Крестниковой [10].

Принцип действия описанной выше трубки С. Р. Холева и Д. С. Полтавченко имеет много общего с принципом действия кольцевой трубки, построенной Патриком [11].

¹⁾ Укажем на работу [8], авторы которой получали интенсивные ударные волны в Т-образной трубке, наполняемой водородом и гелием, и исследовали свечение нагретого газа в спектральных линиях.

Иозефсоном [12] описана трубка с коническим насадком. К цилиндрической трубе присоединяется конический насадок (рис. 4.6). На конце его расположен центральный электрод. Вторым электродом служит кольцо на стыке цилиндрической и конической частей трубки. По образующим конуса идут шины возвратного тока. При разряде происходит магнитное сжатие плазмы к оси — «пинч-эффект», причем радиальное сжатие начинается у центрального электрода и постепенно охватывает слои, более близкие к центральному. Затем нагретая сжатая плазма выбрасывается в цилиндрическую трубку, образуя в ней ударную волну. В работе [13] такая трубка применялась для разгона сильно разреженного воздуха до скоростей порядка 12 км/с ($M \approx 40$, $T_1 \approx 12000$ К) и исследования обтекания моделей, имитирующих головки ракет.

Более подробно с вопросами конструкции электромагнитных ударных трубок и работы с ними можно познакомиться в сборнике переводов [14].

§ 5. Методы измерений различных величин. К настоящему времени разработаны и широко применяются разнообразные методы наблюдения быстротекущих процессов в ударных трубках и измерения различных величин: скорости фронта ударной волны, плотности, температуры и др. Описанию этих методов и изложению полученных с их помощью результатов посвящена обширная литература. Со многими вопросами можно познакомиться в книгах [3, 4, 18, 19] и обзорах [1, 2]; там же имеются многочисленные ссылки на журнальные статьи.

Мы здесь не будем останавливаться на детальном рассмотрении методов эксперимента и только коротко перечислим основные из них. При этом мы придерживаемся в основном классификации методов, принятой в обзоре [2].

1. *Высокоскоростная фотографическая съемка.* Газодинамический процесс можно фотографировать либо благодаря собственному свечению газа, нагретого до высокой температуры, либо в свете постороннего источника. Разработаны и применяются камеры, которые позволяют производить киносъемку быстротекущих процессов с частотой вплоть до миллионов кадров в секунду¹⁾. Широко применяется также метод фоторазвертки, при котором пучок света, отражаясь от вращающегося зеркала, непрерывно бежит по пленке, так что движущийся светящийся объект (скажем, фронт ударной волны) описывает на пленке непрерывную наклонную линию. По наклону линии можно определить скорость движения объекта.

2. *Измерение плотности.* Измерение распределения плотности газа в неравновесном слое за скачком уплотнения имеет особо важное значение, так как распределение плотности связано со скоростями релаксационных процессов (см. гл. VII). Именно таким способом были в основном определены скорости возбуждения колебаний и диссоциации молекул при высоких температурах.

Для измерения распределения плотности применяется главным образом интерференционный метод, в основе которого лежит тот факт, что коэффициент преломления газа изменяется при изменении его плотности. На изменении коэффициентов преломления при движении сжимаемого газа основаны и другие важные оптические методы наблюдения поля течения: шлирен-метод и теневой. Однако наиболее точные количественные данные по распределению плотности дает интерференционный метод²⁾.

¹⁾ Ссылки на работы советских ученых и конструкторов — создателей уникальных высокоскоростных камер — в гл. XI.

²⁾ Указанные оптические методы, в которых используется свет от постороннего источника, обычно применяются при не слишком высоких температурах, когда собственное свечение нагретого газа мало.

В работах Хорнига и др. [3] распределение плотности во фронте слабых ударных волн определялось по отражению света от поверхности фронта. Начальная плотность газа подбиралась так, чтобы толщина фронта ударной волны была сравнима с длиной волны света. При этом условии коэффициент отражения зависит от толщины переходного слоя и распределения плотности (то есть коэффициента преломления) в нем. Таким образом были измерены толщины фронта и скорости возбуждения вращений молекул в слабых ударных волнах.

Распределение плотности газа измерялось также по рассеянию электронного пучка, по поглощению рентгеновских лучей.

3. *Измерение концентрации компонентов газа.* В ряде случаев, когда в неравновесном слое за скачком уплотнения протекает диссоциация молекул или химическая реакция, можно непосредственно следить за изменением концентрации определенных частиц. Это обычно возможно, если какие-нибудь частицы обладают резко выраженным по сравнению с другими частицами поглощением света. Так, например, изучалась диссоциация молекул брома и йода в ударной волне, диссоциация молекул кислорода и т. д. Молекулы брома и йода сильно поглощают видимый свет, тогда как их атомы не поглощают его; молекулы кислорода обладают характерной системой полос поглощения в ультрафиолетовой области (см. гл. V).

4. *Измерение испускания и поглощения света.* Во многих работах производились спектральные измерения интенсивности испускания света газом, нагретым ударной волной. Зная плотность газа и температуру, можно таким образом определить лучеиспускательную способность при разных температурах и в разных участках спектра. Свет обычно регистрируют фотографическими методами или при помощи фотоумножителей. По лучеиспускательной способности с помощью закона Кирхгофа (см. гл. V) можно найти и коэффициент поглощения света в нагретом газе. Коэффициенты поглощения иногда измеряют и непосредственно, по ослаблению пучка света от постороннего источника при прохождении через газ.

5. *Измерение температуры.* Для измерения высоких температур чаще всего применяют оптические методы. Литература по методам оптической пирометрии огромна. Рекомендуем, в частности, сборник переводов [15]; см. также обзор [16].

6. *Измерение концентрации электронов и электропроводности.* Для измерения степени ионизации газа и концентрации электронов в ударной волне часто пользуются методом зондов Лэнгмюра, который обычно применяется при изучении газовых разрядов. Применяется также метод поглощения и отражения микроволн. Измеряется концентрация электронов и по свечению газа (например, интенсивность рекомбинационного свечения пропорциональна квадрату концентрации электронов). Применяются магнитные методы, в частности, основанные на эффекте вытеснения движущейся плазмой внешнего магнитного поля; вытеснение зависит от электропроводности. Определив электропроводность, можно вычислить концентрацию электронов.

7. *Измерение давления.* Давление чаще всего измеряют при помощи пьезоэлектрических датчиков с чувствительным элементом из титаната бария.

8. *Измерение скорости фронта ударной волны.* Проще всего измерять скорость, регистрируя тем или иным методом моменты прохождения ударной волной определенных сечений в трубе, отстоящих друг от друга на известных расстояниях. Для регистрации пользуются пьезодатчиками давления, ионизационными датчиками, различными электроконтактными датчиками и др.

Очень большие скорости, которые получаются в электромагнитных ударных трубках, обычно измеряют при помощи фоторазвертки (см. п. 1).

Глава V

ПОГЛОЩЕНИЕ И ИСПУСКАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ГАЗАХ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

§ 1. Введение. Типы электронных переходов. В гл. II было показано, что основной оптической характеристикой газа, которая определяет степень черноты нагретого тела, интенсивность и спектр свечения, энергетический баланс вещества в условиях лучистого теплообмена, является коэффициент поглощения света ¹⁾. Зная коэффициент поглощения, с помощью закона Кирхгофа, который служит выражением общего принципа детального равновесия, можно найти и лучеиспускательную способность вещества.

В § 2 гл. II были даны краткий обзор и классификация различных механизмов поглощения и излучения.

В соответствии с общей схемой возможных энергетических состояний атомной системы, простейшей из которых является система из одного протона и одного электрона, в связанном состоянии образующая атом водорода, все возможные электронные переходы, сопровождающие процессы поглощения и излучения света, подразделялись на три типа. Это:

- 1) свободно-свободные переходы (тормозное излучение и поглощение света);
- 2) связанно-свободные переходы (фотоэлектрическое поглощение);
- 3) связанно-связанные (дискретные) переходы.

Свободно-свободные и связанно-свободные переходы приводят к образованию непрерывного (сплошного) спектра поглощения и излучения света.

Связанно-связанные переходы в атомах дают линейчатые спектры. В результате связанно-связанных переходов в молекулах образуются полосатые спектры. Полосатые спектры состоят из множества близко расположенных друг к другу по частоте спектральных линий. В некоторых условиях отдельные линии настолько тесно соприкасаются, что даже частично перекрываются и спектр получается почти непрерывным (квазинепрерывным).

С точки зрения энергетической основной интерес представляют непрерывные (квазинепрерывные) спектры.

Представим себе, например, тело, нагретое до постоянной температуры T . Если тело абсолютно черное, то с его поверхности выходит поток излучения с планковским распределением по спектру. Спектральный поток S_ν как функция частоты ν изображен на рис. 5.1 пунктирной кривой. Площадь, ограниченная этой кривой, дает полное количество лучистой энергии, испускаемой с 1 см^2 поверхности тела в 1 с и равное σT^4 . Предположим теперь, что вещество, совершенно прозрачное в непрерывном

¹⁾ Напоминаем, что говоря о «свете», «световых квантах», «оптических» свойствах, мы имеем в виду излучение любых частот, а не только принадлежащих видимой части спектра.

спектре, поглощает и излучает только линейчатый спектр, причем в частотных линиях излучение находится в термодинамическом равновесии с веществом. Спектральный поток излучения с поверхности тела изображается теперь системой отдельных узких линий, высота которых соответствует функции Планка, как показано на рис. 5.1 сплошными кривыми. Полное количество лучистой энергии, выходящей с 1 см^2 поверхности тела в 1 с, численно равно заштрихованной площади этих линий, которая вследствие малой ширины линий гораздо меньше полного планковского потока σT^4 . Потери энергии тела на излучение, а также яркость свечения поверхности в рассматриваемом случае гораздо меньше, чем если бы спектр был непрерывным.

Точно так же во многих случаях линейчатые спектры играют небольшую роль по сравнению с непрерывными и в переносе лучистой энергии внутри тела. Поэтому основное внимание в этой главе будет уделяться не линейчатым, а непрерывным и квазинепрерывным молекулярным спектрам.

При высоких температурах, когда молекулы диссоциированы и газ состоит из атомов, а при еще более высоких — из ионов и электронов, сплошной спектр поглощения и испускания возникает в результате связанно-свободных и свободно-свободных переходов. Вычисление вероятностей электронных переходов, с помощью которых можно найти коэффициенты поглощения (и испускания) света в случае многоэлектронных атомов (сложных атомных систем), представляет собой весьма трудную квантовомеханическую задачу. Она требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае, для каждого атома или иона и даже для каждого квантового состояния системы. Такие расчеты проделаны лишь для немногих частных случаев.

Сравнительно просто и до конца вычисление удастся провести лишь для простейшей, водородоподобной системы, т.е. для переходов единственного электрона в кулоновском поле положительного заряда Ze . Практически, даже при рассмотрении поглощения и испускания света в газах, состоящих из сложных атомов или ионов, часто приходится пользоваться формулами, выведенными для водородоподобных систем.

Атом или ион при этом представляется в виде некоего «атомного остатка» с положительным точечным зарядом Ze , в поле которого движется «оптический» электрон, переходящий при поглощении или испускании светового кванта из одного энергетического состояния в другое. Как будет показано ниже, в ряде практически важных случаев такое приближение оказывается до некоторой степени оправданным.

При вычислении коэффициентов молекулярного поглощения обычно удается определить коэффициент как функцию частоты и температуры с точностью до некоторого множителя — силы осциллятора для данного электронного перехода, которую, как правило, находят из эксперимента.

В последующих параграфах этой главы будут подробно рассмотрены различные механизмы поглощения и испускания света в газах при высоких температурах и вычислены соответствующие коэффициенты поглощения. При этом мы будем интересоваться в основном физической стороной дела, не останавливаясь подробно

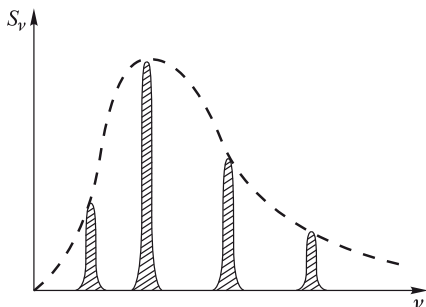


Рис. 5.1. Спектр испускания нагретого тела, совершенно прозрачного в непрерывном спектре, но непрозрачного в линиях. Пунктирная кривая соответствует планковскому спектру при данной температуре

на различных приближенных способах усовершенствования расчетных формул для коэффициентов поглощения.

Очень часто в поглощении и испускании света в газе при каждом данных условиях участвует целый ряд механизмов. Все они действуют независимо друг от друга. Полные коэффициенты поглощения и лучеиспускательные способности в каждом спектральном участке складываются из величин, отвечающих различным механизмам. Поэтому последовательное и независимое рассмотрение отдельных механизмов представляется вполне естественным. В конце главы, в качестве наиболее важного с практической точки зрения примера такого совокупного действия многих механизмов, будут рассмотрены оптические свойства нагретого воздуха.

1. Непрерывный спектр

§ 2. Тормозное излучение электрона в кулоновском поле иона. Как известно из классической электродинамики, свободный электрон, двигаясь во внешнем электрическом поле, скажем, в кулоновском поле иона с положительным зарядом Ze , излучает свет. При этом он теряет часть своей кинетической энергии, «тормозится», почему такое излучение и называется тормозным.

Количество лучистой энергии S , испускаемой электроном в 1 с, определяется его ускорением $\mathbf{w}$:

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mathbf{w}^2. \quad (5.1)$$

Полное излучение за все время пролета электрона мимо иона равно интегралу по времени от этого выражения:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} S dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}^2 dt. \quad (5.2)$$

Спектральный состав излучения можно найти, разлагая вектор ускорения $\mathbf{w}$ в интеграл Фурье и подставляя разложение в формулу (5.2).

Получим при этом

$$\Delta E = \frac{16\pi^2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_0^{\infty} \mathbf{w}_{\nu}^2 d\nu = \int_0^{\infty} S_{\nu} d\nu, \quad (5.3)$$

где

$$\mathbf{w}_{\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{w}(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

— компонента Фурье вектора ускорения $\mathbf{w}(t)$.

Величина

$$S_{\nu} = \frac{16\pi^2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mathbf{w}_{\nu}^2 \quad (5.4)$$

представляет собой количество лучистой энергии частоты ν , испускаемой при пролете электрона мимо иона и приходящейся на единичный интервал частот ¹⁾.

По классической механике, в отсутствие потерь энергии на излучение свободный электрон (сумма кинетической и потенциальной энергий которого положительна)

¹⁾ В соответствии с астрофизическими традициями мы будем всегда пользоваться не круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$, а обычной ν .

пролетает мимо иона по определенной гиперболической орбите, характеризующейся прицельным расстоянием ϱ , смысл которого ясен из рис. 5.2.

Полное количество излученной энергии и спектральный состав излучения можно приблизительно вычислить по формулам (5.2)–(5.4), взяв в качестве ускорения $\mathbf{w}(t)$ величину, соответствующую движению электрона без излучения¹⁾.

Пусть на ион из бесконечности падает параллельный пучок электронов, начальная скорость которых на бесконечности равна v и плотность N_e постоянна (поток электронов равен $N_e v$). Через элементарное кольцо площадью $2\pi\varrho d\varrho$ около иона в 1 с проходит $N_e v \cdot 2\pi\varrho d\varrho$ электронов. Каждый из них излучает энергию ΔE эрг. Излучение этих электронов в 1 с равно $\Delta E N_e v \cdot 2\pi\varrho d\varrho$ эрг/с. Излучение в 1 с электронов, проходящих мимо иона по всевозможным орбитам, получится, если проинтегрировать это выражение по ϱ от 0 до ∞ . Полное количество энергии излучения, рассчитанное на один ион и единичный поток электронов, $N_e v = 1 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, равно

$$q = \int_0^{\infty} \Delta E 2\pi\varrho d\varrho \text{ эрг} \cdot \text{см}^2. \quad (5.5)$$

Можно говорить и о количестве энергии, излученной в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, о так называемом эффективном излучении

$$dq_\nu \left(\int_{\nu=0}^{\nu=\infty} dq_\nu = q_\nu \right). \text{ В соответствии с определением (5.3) эффек-$$

тивное излучение, т. е. количество энергии, излученной в интервале частот $d\nu$ из расчета на один ион и единичный поток электронов, равно

$$dq_\nu = d\nu \int_0^{\infty} S_\nu 2\pi\varrho d\varrho \text{ эрг} \cdot \text{см}^2. \quad (5.6)$$

Эффективным излучением определяется спектральная лучеиспускательная способность вещества, обязанная тормозному излучению.

Если в 1 см^3 имеется N_+ ионов определенного сорта и dN_e электронов со скоростями от v до $v + dv$, то количество энергии в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, испускаемой в 1 с в 1 см^3 в результате торможения этих электронов в поле ионов, равно $N_+ dN_e v dq_\nu$ эрг/см³ · с.

Оценим эффективное излучение электронов в кулоновском поле иона. Если электрон находится на расстоянии r от иона (радиус-вектор $\mathbf{r}$), то на него со стороны иона действует сила $-Ze^2\mathbf{r}/r^3$. Вызываемое этой силой ускорение равно $\mathbf{w} = -Ze^2\mathbf{r}/r^3m$, где m — масса электрона. Пусть электрон обладает начальной скоростью v и пролетает мимо иона на прицельном расстоянии ϱ . Время действия силы $t \sim \varrho/v$, а ускорение в течение этого времени $w \sim Ze^2/\varrho^2m$. В разложении вектора ускорения в интеграл Фурье основную роль играют частоты ν порядка $1/2\pi t \sim v/2\pi\varrho$ ²⁾. Можно сказать, что частота ν в основном излучается теми электронами, которые пролетают мимо иона на прицельном расстоянии $\varrho \sim v/2\pi\nu$, а частоты в интервале от ν до

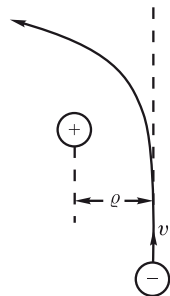


Рис. 5.2. Траектория электрона при пролете мимо положительного иона

¹⁾ Это соответствует предположению о том, что излучение мало.

²⁾ Для большей точности мы сохраним численный коэффициент 2π . (Основную роль в разложении играют «круговые» частоты, такие, что $\omega t \sim 1$.)

$\nu + d\nu$ испускаются главным образом электронами с прицельными параметрами, заключенными в интервале $d\rho \sim \frac{v}{2\pi\nu^2}d\nu \sim 2\pi\frac{\rho^2}{v}d\nu$.

Энергия, испускаемая каждым из таких электронов,

$$\Delta E \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2 t \sim \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 \rho^3 v}.$$

Эффективное излучение частоты ν соответствует излучению электронов с прицельными параметрами от ρ до $\rho + d\rho$, связанными с частотами указанным выше образом, так что

$$dq_\nu \sim \Delta E 2\pi\rho d\rho \sim \frac{4\pi}{3} \frac{Z^2 e^6 d\rho}{m^2 c^3 \rho^2 v} \sim \frac{8\pi^2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v^2} d\nu. \quad (5.7)$$

Последовательное вычисление эффективного излучения по формулам (5.6), (5.4) с вектором ускорения, найденным из решения механической задачи о движении электрона по гиперболической орбите около иона, проведено в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]. Оно дает:

$$dq_\nu = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v^2} d\nu \quad \text{при} \quad \nu \gg \frac{mv^3}{2\pi Ze^2}, \quad (5.8)$$

$$dq_\nu = \frac{32\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v^2} \ln \frac{mv^3}{1,78\pi\nu Ze^2} d\nu \quad \text{при} \quad \nu \ll \frac{mv^3}{2\pi Ze^2}. \quad (5.9)$$

Как видим, при больших частотах точный результат отличается от простой оценки (5.7) только численным множителем $4/\sqrt{3} = 2,3$. При малых частотах точная формула отличается от простой, помимо численного, еще и логарифмическим множителем, зависящим от частоты. Дело в том, что малые частоты излучаются при далеких столкновениях с большими прицельными параметрами ρ , причем при $\nu \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ столкновения с параметрами $\rho > v/2\pi\nu$ дают относительно все больший и больший вклад в излучение частоты ν по сравнению со столкновениями с параметрами $\rho \sim v/2\pi\nu$, которые только и учитываются при выводе простой формулы (5.7).

Расходимость эффективного излучения со стороны малых частот характерна для медленно спадающего с расстоянием кулоновского поля, благодаря чему и приобретают столь существенную роль далекие столкновения. Эта расходимость устраняется при учете экранировки, всегда существующей в реальном ионизованном газе. Фактически по ρ в формуле (5.6) следует интегрировать не до бесконечности, а, скажем, до дебаевского радиуса d , что ограничит излучение со стороны малых частот на частоте $\nu_{\min} \sim v/2\pi d$.

Следует, однако, заметить, что интегральное по спектру излучение $q = \int dq_\nu$ сходится со стороны малых частот, так как расходимость dq_ν только логарифмическая и вклад пика dq_ν при $\nu \rightarrow 0$ в интеграл по ν невелик. Поэтому если интересоваться интегральным излучением, вопрос об обрезании прицельных параметров ρ сверху, а частот — снизу не является столь существенным.

Излучение больших частот в классической теории не зависит от частоты и эффективное излучение на единичный интервал частот $dq_\nu/d\nu$ остается конечным

даже при $\nu \rightarrow \infty$ ¹⁾. Формально, полное излучение $q = \int dq_\nu$ расходится со стороны больших частот.

Это противоречие теории связано с несовершенством классических представлений о движении электрона и устраняется в квантовой теории. Большие частоты, как мы видели, излучаются при пролете электрона мимо иона на малых прицельных расстояниях. Но согласно квантомеханическим представлениям электрон, обладающий начальным импульсом $p = mv$, не может быть локализован точнее, чем это диктуется принципом неопределенности $\Delta r \Delta p \sim h/2\pi$. Поскольку неопределенность в импульсе не может превышать самого импульса, нет смысла говорить о прицельных расстояниях меньших, чем $\varrho_{\min} \sim h/2\pi mv$. Максимальная частота, излучаемая при таких минимальных прицельных параметрах, по порядку величины равна $\nu_{\min} \sim v/2\pi\varrho_{\min} \sim mv^2/h$. Это ограничение излучаемой частоты сверху имеет весьма наглядный физический смысл. В квантовой теории тормозное излучение представляется следующим образом. Свободный электрон, обладающий начальной энергией $E = mv^2/2$, пролетая мимо иона, может испустить световой квант $h\nu$. Если после испускания кванта он остается свободным, т. е. удалившись от иона, обладает положительной энергией E' , то, очевидно, электрон не может испустить квант, превышающий начальную энергию E . Таким образом, $\nu_{\max} = E/h = mv^2/2h$, что с точностью до несущественного множителя $1/2$ совпадает с ограничением частоты, диктуемым принципом неопределенности.

В квантовой механике свободный электрон представляется плоской волной и понятие прицельного расстояния не имеет строго определенного смысла. Можно говорить о вероятности испускания кванта той или иной частоты, вернее, об эффективном сечении испускания квантов с энергиями от $h\nu$ до $h\nu + d(h\nu)$. Количество энергии, излученной в интервале частот $d\nu$ единичным потоком электронов, взаимодействующих с одним ионом, равно произведению энергии кванта $h\nu$ на эффективное сечение испускания $d\sigma_\nu$. Эта величина и соответствует эффективному излучению классической теории:

$$dq_\nu = h\nu \cdot d\sigma_\nu \text{ эрг} \cdot \text{см}^2. \quad (5.10)$$

В свете принципа соответствия эффективное излучение частоты ν связано с переходом электрона с одной «стационарной гиперболической орбиты», отвечающей энергии электрона E , на другую, отвечающую энергии $E' = E - h\nu$. Эффективное сечение $d\sigma_\nu$, а следовательно, и эффективное излучение dq_ν вычисляются в квантовой механике обычными методами, через матричные элементы энергии взаимодействия электрона с ионом.

Однако прежде чем приводить результат квантовомеханического расчета тормозного излучения, посмотрим, каковы пределы применимости классических формул (5.8), (5.9) и когда, собственно, их нужно заменять квантовомеханическими.

Согласно классическому выводу, формула (5.8) для больших частот справедлива при условии $\nu \gg mv^3/2\pi Ze^2$. При этом, конечно, нет смысла распространять ее на частоты, превышающие верхний предел, диктуемый квантовыми энергетическими представлениями, $\nu_{\max} = E/h = mv^2/2h$. Перепишем эти ограничения, накладываемые на частоту в формуле (5.8), в виде

$$1 = \frac{h\nu_{\max}}{E} > \frac{h\nu}{E} \gg \frac{h}{E} \frac{mv^3}{2\pi Ze^2} = \frac{h\nu}{\pi Ze^2}. \quad (5.11)$$

¹⁾ Это справедливо только при условии, что сталкивающиеся частицы обладают разноименными зарядами (электрон — положительный ион). При взаимодействии частиц с зарядами одного знака $dq_\nu/d\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Но неравенство $h\nu/\pi Ze^2 \ll 1$ с точностью до двойки представляет собой не что иное, как условие квазиклассичности движения электрона в кулоновском поле (см., например, [2])

$$\frac{h\nu}{2\pi Ze^2} \ll 1. \quad (5.12)$$

Поэтому классической формулой (5.8) для эффективного излучения частоты ν , ограниченной сверху и снизу неравенствами (5.11), приближенно можно пользоваться при всех тех скоростях электронов, которые удовлетворяют неравенству (5.12). Если выполнено условие квазиклассичности (5.12), то область применимости формулы (5.8) простирается вплоть до очень малых частот, таких, что $h\nu/E \sim h\nu/\pi Ze^2 \ll 1$. Поскольку обычно интерес представляют кванты, не очень малые по сравнению с kT , то есть с энергиями электронов, и вклад пика при $\nu \rightarrow 0$ в интегральное излучение невелик, формулу (5.8) с успехом можно распространить вплоть до $\nu = 0$, заменив ею формулу (5.9) и тем самым устранив формально расходимость dq_ν при $\nu \rightarrow 0$.

Преобразуем условие квазиклассичности (5.12), которое является условием применимости формулы (5.8), так, чтобы получить условие, накладываемое на энергию электрона:

$$E = \frac{mv^2}{2} \ll \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi Ze^2}{h} \right)^2 = \frac{Z^2 e^2}{2a_0} = I_H Z^2 = 13,5 Z^2 \text{ эВ}, \quad (5.13)$$

где $a_0 = h^2/4\pi^2 me^2$ — боровский радиус, а $I_H = 13,5 \text{ эВ}$ — потенциал ионизации атома водорода¹⁾.

Например, в случае водородной плазмы формула (5.8) справедлива вплоть до температур порядка $10 \text{ эВ} \sim 100\,000 \text{ К}$; в газе из более тяжелых элементов она справедлива до еще более высоких температур, так как вследствие многократной ионизации возрастают заряды ионов Z . Так, в воздухе нормальной плотности при $T = 10^6 \text{ К}$ $Z \approx 6$ и средняя энергия электронов еще в четыре раза меньше «квазиклассического» предела.

При очень высоких температурах, когда выполняются неравенства, противоположные условиям квазиклассичности (5.12), (5.13), справедливо борновское приближение в квантовой механике²⁾. Для нерелятивистских энергий ($E \ll mc^2 = 500 \text{ кэВ}$) вычисление эффективного излучения в борновском приближении дает выражение (см. [3])

$$dq_\nu = h\nu \cdot d\sigma_\nu = \frac{32\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 v^2} \ln \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - h\nu})^2}{h\nu} d\nu;$$

dq_ν автоматически обращается в нуль при $h\nu = E$ и слабо, логарифмически, зависит от частоты во всем интервале частот от 0 до $\nu_{\max}$.

Замечательно, что квантовая формула приводит к значениям эффективного излучения, весьма близким к тем, которые дает классическая формула (5.8) (за исключением, конечно, частот очень малых и очень близких к максимальной). Это видно из

¹⁾ Условие квазиклассичности для движения электрона в кулоновском поле эквивалентно условию малости энергии электрона по сравнению с его энергией на первой боровской орбите.

²⁾ Для борновского приближения надо, чтобы не только при начальной, но и при конечной скорости электрона выполнялись условия (5.12), (5.13); в противном случае следует пользоваться точными волновыми функциями электрона в кулоновском поле, что вносит известный кулоновский множитель в результирующие формулы [2, 3].

табл. 5.1, в которой представлены значения отношения

$$g_1 = \left(\frac{dq_\nu}{d\nu} \right)_{\text{квант}} / \left(\frac{dq_\nu}{d\nu} \right)_{\text{класс}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{(\sqrt{E} + \sqrt{E - h\nu})^2}{h\nu} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - x})^2}{x}$$

в зависимости от безразмерной величины $x = h\nu/E = \nu/\nu_{\text{max}}$.

Величину g_1 , которая отличает квантовое выражение для тормозного излучения от классического, иногда называют множителем Гаунта.

Т а б л и ц а 5.1

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
g_1	∞	2,01	1,61	1,34	1,13	0,97	0,81	0,68	0,53	0,36	0

Интегральное излучение, вычисленное по квантовой формуле, записывается в следующем виде:

$$g_{\text{квант}} = \int_0^{\nu_{\text{max}}} \left(\frac{dq_\nu}{d\nu} \right)_{\text{квант}} d\nu = \left(\frac{dq_\nu}{d\nu} \right)_{\text{класс}} \nu_{\text{max}} \int_0^1 g_1 dx = 1,05 q_{\text{класс}}.$$

Таким образом, классической формулой (5.8) с хорошим приближением можно пользоваться практически при любых нерелятивистских температурах.

§ 2а. Тормозное излучение электрона при рассеянии нейтральным атомом.

Найдем эффективное тормозное излучение электрона при столкновении с рассеивающим центром, не конкретизируя пока закона взаимодействия электрона с рассеивателем. Последним может служить нейтральный атом, молекула, ион. Допустим, что длительность взаимодействия τ_b мала по сравнению с периодом излучаемых электромагнитных колебаний, точнее, что выполняется неравенство $\omega\tau_b \ll 1$, где $\omega = 2\pi\nu$. Для частот видимого света, энергий электрона порядка нескольких электронвольт и рассеяния нейтральным атомом такое предположение можно считать оправданным¹⁾.

При условии $\omega\tau_b \ll 1$ рассеяние происходит «мгновенно» и, естественно, положить вектор ускорения равным $\mathbf{w}(t) = \Delta\mathbf{v}\delta(t)$, где $\Delta\mathbf{v}$ — изменение вектора скорости электрона при рассеянии.

Компонента Фурье вектора ускорения тогда равна $\mathbf{w}_\nu = \Delta\mathbf{v}/2\pi$. Подставляя это выражение в формулу (5.4), получим, что при данном акте рассеяния электрона в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ излучается энергия

$$S_\nu d\nu = \frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} (\Delta\mathbf{v})^2 d\nu.$$

Это выражение следует усреднить по углам рассеяния θ . Полагая приближенно, что абсолютная величина скорости электрона v при рассеянии изменяется мало, что соответствует излучению квантов $h\nu$, небольших по сравнению с энергией электрона $mv^2/2$, получим $(\Delta\mathbf{v})^2 = 2v^2(1 - \cos\theta)$, где $\cos\theta$ — средний косинус угла рассеяния.

Для того чтобы найти эффективное излучение, нужно умножить усредненную по углам рассеяния величину $\overline{S_\nu} d\nu$ на эффективное сечение рассеяния σ (ср. с формулой (5.6)). Это дает

$$dq_\nu = \overline{S_\nu} d\nu \sigma = \frac{8}{3} \frac{e^2 v^2 \sigma_{\text{тр}}}{c^3} d\nu, \quad (5.13')$$

¹⁾ Например, для красного света $\lambda = 7000 \text{ \AA}$, $h\nu = 1,8 \text{ эВ}$, $\omega = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Если радиус атома 10^{-8} см и скорость электрона 10^8 см/с (энергия 3 эВ), то $\tau_b \approx 10^{-16} \text{ с}$ и $\omega\tau_b = 0,27$.

где $\sigma_{\text{tr}} = \sigma(1 - \overline{\cos \theta})$ — так называемое транспортное сечение рассеяния. Эта формула описывает, в частности, тормозное излучение электронов при столкновениях с нейтральными атомами; сечения упругих столкновений электрона с атомом σ обычно порядка или несколько меньше газокинетических сечений¹⁾. С помощью формул (5.10) и (5.13') найдем связь между дифференциальным сечением испускания кванта $h\nu$ и сечением упругого рассеяния электрона:

$$\frac{d\sigma_\nu}{d\nu} = \frac{8}{3} \frac{e^2 v^2}{c^3 h \nu} \sigma_{\text{tr}}. \quad (5.13'')$$

Проделанный вывод еще раз наглядно демонстрирует физическую природу процесса излучения света в классической электродинамике. Электрон испытывает ускорение при столкновении с рассеивающим центром, а на рассеяние как бы «накладывается» излучение, причем вероятность (сечение) излучения определяется чисто механической вероятностью (сечением) рассеяния. Эта связь фотопроцессов с процессами соответствующих электронных соударений существует и в квантовой механике²⁾.

Применим формулу (5.13') к рассеянию электрона кулоновским центром, т.е. ионом. Кулоновские силы — дальнодействующие. Рассеяние при столкновении заряженных частиц, т.е. заметное изменение вектора импульса электрона, происходит, если частицы сближаются на расстоянии $r_0 = 2Ze^2/mv^2$, при котором кинетическая энергия электрона $mv^2/2$ оказывается сравнимой с потенциальной Ze^2/r_0 . Эффективное сечение при кулоновских «столкновениях» порядка $\pi r_0^2 = 4\pi Z^2 e^4 / (mv^2)^2$ (подробнее см. об этом в разд. 3 гл. VI). Если подставить это сечение в формулу (5.13'), получим величину dq_ν , которая лишь в $\pi/\sqrt{3}$ раз меньше точной величины (5.8). Таким образом, эффективные сечения тормозного излучения при рассеянии электрона ионом и нейтральным атомом относятся друг к другу как соответствующие сечения упругого рассеяния:

$$\frac{(d\sigma_\nu)_{\text{ион}}}{(d\sigma_\nu)_{\text{нейт}}} = \frac{\pi r_0^2}{\sigma_{\text{tr}}} = \frac{\pi Z^2 e^4}{\sigma_{\text{tr}} E^2} = \frac{\pi a_0^2}{\sigma_{\text{tr}}} \left(\frac{2I_{\text{H}}}{E} \right)^2 Z^2.$$

Обычно $\sigma_{\text{tr}}/\pi a_0^2 \sim 1 \div 10$, и при энергии E порядка нескольких электронвольт эффективность нейтральных атомов в отношении тормозного излучения (и поглощения) на один-два порядка меньше, чем эффективность ионов. Таким образом, столкновения электронов с нейтральными атомами играют роль только при очень слабой ионизации газа.

Выше было вычислено тормозное излучение электрона при рассеянии его изолированным атомом. Если столкновения электрона с атомами происходят достаточно редко (по сравнению с частотой излучаемой электромагнитной волны), то последовательные столкновения можно считать независимыми и энергия, излучаемая при многих столкновениях, является просто суммой энергий, излучаемых при отдельных столкновениях.

В этом случае согласно (5.13') электрон в 1 с в интервал частот $d\nu$ излучает энергию

$$dQ_\nu = \overline{S}_\nu d\nu N v \sigma = \frac{8}{3} \frac{e^2 v^2}{c^3} \nu_{\text{эф}} d\nu \text{ эрг/с},$$

¹⁾ Много экспериментальных данных по сечениям σ собрано в книге [60].

²⁾ В частности, существует связь между сечениями ионизации атома электронным ударом и фотоионизации [53].

где $\nu_{\text{эф}} = Nv\sigma_{\text{тр}}$ — эффективная частота столкновений (N — число атомов в 1 см^3). Если же частота столкновений сравнима с частотой излучаемого света, то столкновения уже нельзя считать независимыми. Между изменениями вектора скорости электрона при последовательных столкновениях существует корреляция, результатом которой является интерференция парциальных волн, излученных при отдельных столкновениях. Амплитуды двух последовательных электромагнитных волн в среднем оказываются направленными в противоположные стороны, что приводит к уменьшению суммарной излученной энергии.

Для того чтобы рассчитать тормозное излучение электрона, испытывающего большое число столкновений ($n \rightarrow \infty$), можно представить ускорение его $\mathbf{w}(t)$ в виде

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{k=1}^n \Delta \mathbf{v}_k \delta(t - t_k),$$

где t_k — момент k -го столкновения; $\Delta \mathbf{v}_k$ — соответствующее изменение вектора скорости. Квадрат модуля компоненты Фурье ускорения равен

$$|\mathbf{w}_\nu|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\Delta \mathbf{v}_j \Delta \mathbf{v}_k) e^{i2\pi\nu(t_j - t_k)}.$$

Это выражение следует усреднить по направлениям скоростей электрона и по временам столкновений. Подставив полученное выражение в (5.4) и разделив на время, в течение которого электрон испытывает n столкновений, $n/Nv\sigma$, найдем величину dQ_ν , исправленную на эффект корреляции. Вычисление, сделанное в работе одного из авторов [61], дает

$$dQ_\nu = \frac{8}{3} \frac{e^2 v^2}{c^3} \nu_{\text{эф}} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \left(\frac{\nu_{\text{эф}}}{2\pi}\right)^2} \nu = (dQ_\nu)_{\text{без корр}} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \left(\frac{\nu_{\text{эф}}}{2\pi}\right)^2}.$$

В предельном случае $\nu_{\text{эф}}/2\pi \ll \nu$ дополнительный множитель обращается в единицу в соответствии с исчезновением эффекта корреляции.

Практически эффект корреляции сказывается только при излучении очень низких частот (в радиодиапазоне). Например, при $N = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $v = 10^8 \text{ см/с}$, $\sigma_{\text{тр}} = 10^{-15} \text{ см}^2$, $\nu_{\text{эф}} = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, тогда как для красного света $\omega = 2\pi\nu = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

§ 3. Свободно-свободные переходы в нагретом ионизованном газе. Найдем лучеиспускательную способность ионизованного газа, связанную с тормозным излучением.

Пусть в 1 см^3 газа имеется N_+ положительных ионов с зарядом Ze и N_e электронов с максвелловским распределением по скоростям

$$f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv$$

$\left(\int_0^\infty f(v) dv = 1\right)$. Температуру электронного газа обозначим через T . Энергия, ко-

торая излучается электронами, обладающими скоростями от v' до $v' + dv'$, в 1 см^3 в 1 с, в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, равна

$$N_+ N_e f(v') dv' v' dq_\nu(v')^1. \quad (5.14)$$

Количество энергии, спонтанно излучаемой в результате свободно-свободных переходов в интервале $d\nu$ в 1 см^3 в 1 с , получится, если проинтегрировать выражение (5.14) по скоростям электронов от $v_{\min}$ до ∞ , причем $v_{\min}$ — это минимальная скорость электронов, способных излучить квант $h\nu$: $mv_{\min}^2/2 = h\nu$. Воспользовавшись формулой (5.8) для эффективного излучения и интегрируя, найдем спектральную лучеиспускательную способность, связанную с тормозным механизмом:

$$J_\nu d\nu = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{3kTm} \right)^{1/2} \frac{Z^2 e^6}{mc^3} N_+ N_e \exp \left(-\frac{h\nu}{kT} \right) d\nu. \quad (5.15)$$

Испускание квантов $h\nu \gg kT$ экспоненциально мало. Это связано с тем, что большие кванты излучаются электронами с большими энергиями, сосредоточенными в хвосте максвелловского распределения по скоростям.

Интегральная лучеиспускательная способность для тормозного излучения равна

$$J = \int_0^\infty J_\nu d\nu = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{2\pi kT}{3m} \right)^{1/2} \frac{Z^2 e^6}{mc^3 h} N_+ N_e = 1,42 \cdot 10^{-27} Z^2 T^{1/2} N_+ N_e \text{ эрг/см}^3 \cdot \text{с} \quad (5.16)$$

(T — температура в кельвинах).

Интегральное тормозное испускание довольно слабо зависит от температуры (оно пропорционально $\sqrt{T}$).

Если в газе имеются ионы разных зарядов Z , то формулы (5.15), (5.16) следует просуммировать по всем сортам ионов.

Теперь найдем коэффициент тормозного поглощения света. Для этого воспользуемся принципом детального равновесия. Если $U_{\nu p}$ — равновесная спектральная плотность излучения, определяемая формулой Планка (2.10),

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (5.17)$$

а a_ν — спектральный коэффициент истинного тормозного поглощения, рассчитанный на один ион и один электрон, движущийся со скоростью v , то энергия излучения в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, поглощаемая при термодинамическом равновесии в 1 с в 1 см^3 электронами со скоростями от v до $v + dv$, равна

$$N_+ N_e U_{\nu p} dv cf(v) dv a_\nu (e^{-h\nu/kT}). \quad (5.18)$$

Множитель $(1 - e^{-h\nu/kT})$ учитывает эффективное уменьшение поглощения за счет вынужденного испускания (переизлучения; см. § 4 гл. II). В условиях термодинамического равновесия поглощение и испускание в точности компенсируют друг друга, т.е. выражения (5.18) и (5.14) равны. При этом скорости электронов, испускающих кванты $h\nu$ и поглощающих эти кванты, связаны между собой законом сохранения энергии

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + h\nu.$$

Замечая, что $v dv = v' dv'$, а $dq_\nu = h\nu d\sigma_\nu$, найдем общую связь единичного коэффициента поглощения a_ν с сечением излучения $d\sigma_\nu$:

$$a_\nu = \frac{c^2 v'^2}{8\pi \nu^2 v} \frac{d\sigma_\nu(v')}{dv}. \quad (5.19)$$

¹⁾ Предполагается, что скорости ионов очень малы по сравнению со скоростями электронов.

Пользуясь формулой (5.8) для dq_ν , получим

$$a_\nu = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{h c m^2 \nu^3} = 1,80 \cdot 10^{14} \frac{Z^2}{\nu^3} \text{ см}^5. \quad (5.20)$$

Эта формула была выведена Крамерсом в 1923 г. Умножая a_ν на $N_+ N_e$ и с помощью функции максвелловского распределения усредняя по скоростям электронов, получим спектральный коэффициент истинного тормозного поглощения в газе при температуре электронов T :

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= \frac{4}{3} \left(\frac{2\pi}{3mkT} \right)^{1/2} \frac{Z^2 e^6}{h c m \nu^3} N_+ N_e = 3,69 \cdot 10^8 \frac{Z^2}{T^{1/2} \nu^3} N_+ N_e \text{ см}^{-1} = \\ &= 4,1 \cdot 10^{-23} Z^2 \frac{N_+ N_e}{T^{7/2} x^3} \text{ см}^{-1}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В более строгой теории в формулах для коэффициента поглощения (5.20) и (5.21) (и, соответственно, всех других) фигурирует множитель Гаунта g , учитывающий отклонения от теории Крамерса: $\kappa_\nu = (\kappa_\nu)_{\text{Крам}} g$. Для небольших x по сравнению с kT квантов

$$g = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4kT}{e^2 N_e^{1/3}} = 1,27 \left(3,38 + \lg T - \frac{1}{3} \lg N_e \right).$$

Вспоминая определение среднего коэффициента поглощения, характеризующего лучеиспускательную способность (2.102), вычислим эту величину для тормозного механизма:

$$\kappa_1 = \frac{J}{cU_p} = \frac{J}{4\sigma T^4} = 6,52 \cdot 10^{-24} Z^2 \frac{N_+ N_e}{T^{7/2}} \text{ см}^{-1}. \quad (5.22)$$

Соответствующая средняя длина пробега равна

$$l_1 = \frac{1}{\kappa_1} = 1,53 \cdot 10^{23} \frac{T^{7/2}}{Z^2 N_+ N_e} \text{ см}. \quad (5.23)$$

Вычислим еще и средний росселандов пробег (2.80) для случая, когда газ полностью ионизован и тормозной механизм поглощения является единственным (а все ионы обладают одинаковым зарядом Z):

$$l = 4,8 \cdot 10^{24} \frac{T^{7/2}}{Z^2 N_+ N_e} \text{ см}. \quad (5.24)$$

Росселандов пробег l для тормозного механизма равен спектральному пробегу при энергии квантов $h\nu = 5,8 kT$. Как видно, в переносе лучистой энергии путем теплопроводности при тормозном механизме поглощения основную роль играют весьма большие кванты, находящиеся в виновской области спектра. Наоборот, при объемном излучении основную роль играют маленькие кванты. Средний коэффициент κ_1 равен исправленному на вынужденное испускание спектральному коэффициенту $\kappa_\nu (1 - e^{-h\nu/kT})$, соответствующему $h\nu = 1,73 kT$.

Для того чтобы представить себе порядки величин оптических характеристик плазмы, соответствующих тормозному механизму, приведем конкретный пример.

Рассмотрим водород при плотности $\rho = 1,17 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$ (такая плотность соответствует давлению 10 мм рт. ст. при комнатной температуре) и температуре $T = 100\,000 \text{ К}$. В этих условиях водород полностью диссоциирован и полностью ионизован, так что $N_+ = N_e = 7 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Коэффициент поглощения красного света $\lambda = 6500 \text{ Å}$ при этом равен $\kappa_\nu = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$, а длина пробега $l_\nu = 1/\kappa_\nu = 175 \text{ см}$.

Росселандов пробег $l = 3,1 \cdot 10^6$ см. Средний пробег, характеризующий лучеиспускательную способность, $l_1 = 0,98 \cdot 10^5$ см.

Если размеры тела гораздо меньше, чем длина l_1 , то тело испускает как объемный излучатель (см. § 16 гл. II) и скорость потерь энергии на излучение равна

$$\frac{d(\varrho\varepsilon)}{dt} = -J,$$

где ε — удельная внутренняя энергия. В нашем примере $J = 2,2 \cdot 10^{11}$ эрг/см³ с. С учетом энергии диссоциации и ионизации $\varepsilon = 41,6$ эВ/атом, $\varrho\varepsilon = 4,66 \cdot 10^7$ эрг/см³. Начальный масштаб времени лучистого охлаждения $\tau = \varrho\varepsilon/J = 2,12 \cdot 10^{-4}$ с.

§ 4. Эффективное сечение захвата электрона ионом с испусканием кванта.

Рассмотрим захват свободного электрона водородоподобным «ионом» с излучением кванта и образованием водородоподобного «атома». Будем, как и в § 2, исходить из

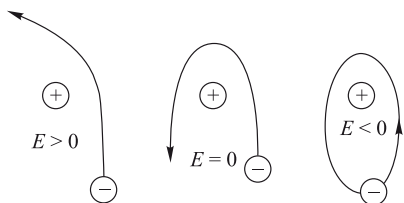


Рис. 5.3. Гиперболическая, параболическая и эллиптическая орбиты электрона

полуклассических представлений. В классической механике без учета излучения переход от свободных состояний электрона к связанным является непрерывным. Состояние или орбита электрона характеризуются величиной полной энергии E системы электрон-ион и (в общем случае) вместо «прицельного расстояния» ϱ — моментом количества движения, также определяющим геометрические параметры траектории. При уменьшении энергии и неизменном моменте гиперболические орбиты, соответствующие положительной энергии $E > 0$, непрерывным образом переходят в параболические ($E = 0$) и далее, в связанном состоянии системы, характеризуемом отрицательной энергией, $E < 0$, в эллиптические (рис. 5.3).

В свете принципа соответствия захват свободного электрона и излучение кванта, энергия которого превышает начальную кинетическую энергию электрона E , связаны с переходом электрона с гиперболической траектории на эллиптическую.

В классической механике энергия системы электрон-ион может быть произвольной. В квантовой механике энергетический спектр системы непрерывен только, если электрон свободен и $E > 0$. В связанном состоянии, при $E < 0$, энергия может принимать только дискретные значения. Энергетические уровни водородоподобного атома E_n характеризуются главным квантовым числом n , пробегающим значения от 1 до ∞ :

$$E_n = -\frac{I_H Z^2}{n^2} = -\frac{I}{n^2}, \quad I_H = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2}, \quad (5.25)$$

$I = I_H Z^2 = |E_1|$ — абсолютная величина энергии основного состояния, т.е. потенциал ионизации. Энергия связи электрона в n -м квантовом состоянии равна $-E_n = |E_n| = I/n^2$. Схема уровней атома водорода изображена на рис. 2.2 в § 2 гл. II. Как известно, при движении связанного электрона в кулоновском поле иона его кинетическая энергия в среднем по времени равна половине потенциальной, взятой с обратным знаком, и равна полной, также взятой с обратным знаком: $E_{\text{кин}} = -E_{\text{пот}}/2 = -E$ ($E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$). Следовательно, в среднем по времени

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{I}{n^2} = \frac{I_H Z^2}{n^2}.$$

Из этой формулы с учетом неравенства (5.13) видно, что движение электрона в сильно возбужденных квантовых состояниях с большим квантовым числом n квазиклассично.

При рассмотрении тормозного излучения в § 2 мы применяли классическую формулу (5.8) для эффективного излучения, описывая ею «переходы» электрона с одной гиперболической орбиты на другую, отвечающую меньшей энергии, причем распространяли формулу вплоть до переходов на орбиту с бесконечно малой положительной энергией, почти параболическую, что соответствовало излучению почти максимальной частоты $\nu_{\max} = E/h$. При этом начальная энергия E предполагалась достаточно малой, $E \ll I_H Z^2$, $v \ll 2\pi Z e^2/h$, чтобы движение в начальном состоянии было квазиклассичным. Движение в конечном состоянии тем более квазиклассично, так как электрон при переходе теряет кинетическую энергию и тормозится. Поскольку малые отрицательные энергии, как мы только что видели, также соответствуют малым скоростям и отвечающие им эллиптические орбиты также близки к параболической (но только со стороны отрицательных энергий), естественно распространить формулу (5.8) и на случай излучения частот, несколько превышающих $\nu_{\max}$, т. е. на случай захвата электрона на высокие уровни. При этом следует учесть, что конечное состояние электрона попадает в дискретный спектр. Эффективное излучение в некотором малом, но конечном интервале частот $\Delta\nu$, $\Delta q_\nu = (dq_\nu/d\nu)\Delta\nu$, равно согласно квантовой трактовке $h\nu\Delta\sigma_\nu$, где $\Delta\sigma_\nu$ — эффективное сечение для процессов испускания квантов в малом интервале $\Delta\nu$. Но теперь испускание квантов от $h\nu$ до $h\nu + \Delta(h\nu)$ соответствует захвату на определенное конечное число уровней Δn и эффективное сечение захвата на них $\Delta\sigma_\nu$ можно представить в виде произведения $\sigma_{cn}\Delta n$, где σ_{cn} — среднее сечение захвата на какой-нибудь из уровней в этом интервале. Это сечение зависит от среднего номера n в малом интервале Δn . Таким образом,

$$\sigma_{cn} = \frac{\Delta\sigma_\nu}{\Delta n} = \frac{1}{h\nu} \frac{\Delta q_\nu}{\Delta n} = \frac{1}{h\nu} \left(\frac{dq_\nu}{d\nu} \right) \frac{\Delta\nu}{\Delta n}. \quad (5.26)$$

Воспользовавшись формулой (5.25) для определения энергетического расстояния между уровнями при больших n , $\left| \frac{dE_n}{dn} \right| = \frac{h\Delta\nu}{\Delta n} = 2I_H Z^2/n^3$, и формулой (5.8) для эффективного излучения, получим эффективное сечение захвата на уровень n свободного электрона, обладающего начальной энергией $E = mv^2/2$:

$$\sigma_{cn} = \frac{128\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10}}{mc^3 h^4 v^2 \nu} \frac{1}{n^3} = \frac{2,1 \cdot 10^{-22}}{n^3} \frac{I_H Z^2}{E} \frac{I_H Z^2}{h\nu} \text{ см}^2. \quad (5.27)$$

Энергия кванта, испускаемого при захвате электрона на уровень n , равна

$$h\nu = E + |E_n| = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_H Z^2}{n^2}. \quad (5.28)$$

Как показывают квантовомеханические расчеты (см. следующий параграф), полуклассическая формула (5.27) дает хорошие результаты и применительно к захвату на глубокие уровни, в том числе и на основной ($n = 1$), несмотря на то, что движение электрона в основном состоянии уже не квазиклассично ($E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = I_H Z^2$)¹⁾.

¹⁾ Начальное же движение свободного электрона предполагается квазиклассическим, т. е. начальная энергия $E \ll I_H Z^2$.

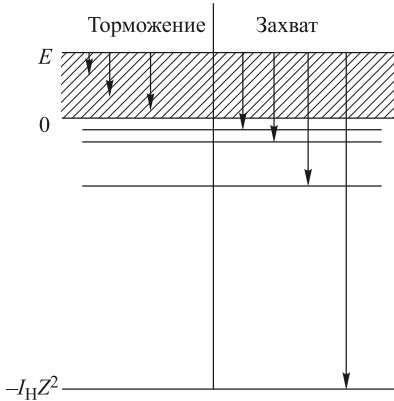


Рис. 5.4. Схема, поясняющая соотношение между энергетическими интервалами конечных состояний электрона при торможении и захвате ионом

где $n^* \approx (I_H Z^2 / E)^{1/2}$. Для небольших (но и не очень малых) энергий электронов, когда E меньше $I_H Z^2$, но сравнимо с этой величиной, сумма φ порядка 1 и сечение захвата равно примерно $\sigma_c \approx 10^{-21} (Z^2 / E_{\text{эВ}}) \text{ см}^2$.

Интересно сравнить интегральное эффективное излучение свободного электрона с данной энергией E при торможении в поле водородоподобного иона с интегральным излучением при фотозахвате, т.е. величины $q_{\text{торм}} = \int dq_\nu = \int h\nu d\sigma_{\text{торм}}$ и $q_{\text{зах}} = \sum_n h\nu \sigma_{cn}$. Первая величина согласно (5.8) равна $q_{\text{торм}} = (dq_\nu / d\nu) E / h$, а вторая, в силу самого вывода сечения σ_{cn} (см. формулу (5.26)), $q_{\text{зах}} = (dq_\nu / d\nu) I_H Z^2 / h$, где постоянная $dq_\nu / d\nu$, определяется формулой (5.8). Обе величины, $q_{\text{торм}}$ и $q_{\text{зах}}$, пропорциональны энергетическим интервалам возможных конечных состояний электрона (рис. 5.4) и относятся друг к другу как эти интервалы:

$$\frac{q_{\text{торм}}}{q_{\text{зах}}} = \frac{I_H Z^2}{E}.$$

§ 5. Эффективное сечение связанно-свободного поглощения света атомами и ионами. Рассмотрим процесс, обратный фотозахвату, — фотоионизацию водородоподобного атома, т.е. поглощение кванта с переходом электрона в непрерывный спектр.

Как и при вычислении тормозного поглощения, воспользуемся принципом детального равновесия.

В 1 см^3 в 1 с происходит

$$N_+ N_e f(v) dv v \sigma_{cn} \quad (5.30)$$

актов фотозахвата электронов со скоростями от v до $v + dv$ на n -й уровень ионов. При этом испускаются кванты с частотами от ν до $\nu + d\nu$, которые связаны со скоростью электрона соотношением (5.28).

Вычислим с помощью формулы (5.27) полное эффективное сечение фотозахвата электрона с данной энергией $E = mv^2/2$ на все уровни водородоподобного иона. Для этого следует просуммировать сечение σ_{cn} по формуле (5.27) по всем n от 1 до ∞ с учетом того, что испускаются кванты различных энергий, которые даются формулой (5.28):

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 2,1 \cdot 10^{-22} \frac{I_H Z^2}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{\left(\frac{E}{I_H Z^2} + \frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{2,8 \cdot 10^{-21} Z^2}{E_{\text{эВ}}} \varphi \left(\frac{I_H Z^2}{E} \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Здесь через φ обозначена сумма по n . В грубом приближении при малых энергиях электронов $E \ll I_H Z^2$, $\varphi \approx \left(\sum_{n=1}^{n^*} 1/n \right) + 1/2$,

Число обратных процессов — актов фотоионизации «атомов», пребывающих в n -м квантовом состоянии, квантами с частотами от ν до $\nu + d\nu$ — равно

$$N_n \frac{U_{\nu p}}{h\nu} d\nu c \sigma_{\nu n} (1 - e^{-h\nu/kT}), \quad (5.31)$$

где $\sigma_{\nu n}$ — эффективное сечение поглощения кванта $h\nu$ атомом в n -м состоянии; N_n — число таких атомов в 1 см^3 ; множитель $(1 - e^{-h\nu/kT})$, как и раньше, учитывает процессы вынужденного испускания. В условиях полного термодинамического равновесия $f(\nu)$ — функция максвелловского распределения электронов; $U_{\nu p}$ — функция Планка; число возбужденных атомов N_n выражается формулой Больцмана:

$$N_n = N_1 \frac{g_n}{g_1} \exp \left[-\frac{(E_n - E_1)}{kT} \right] = N_1 \frac{g_n}{g_1} \exp \left[-\frac{I}{kT} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right], \quad (5.32)$$

где $g_n = 2n^2$ — статистический вес n -го уровня водородоподобного атома, а N_1 — число атомов в 1 см^3 , пребывающих в основном состоянии; $g_1 = 2$; $E_n - E_1 = I_n Z^2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = I \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ — энергия возбуждения n -го состояния.

Числа свободных электронов, ионов и «нейтральных» атомов (если $Z > 1$, то «нейтральный» водородоподобный атом представляет собой ион с зарядом $Z - 1$) связаны между собой уравнением Саха (см. формулу (3.44) в § 5 гл. III):

$$\frac{N_+ N_e}{N} = 2 \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{u_+}{u} \exp \left(-\frac{I}{kT} \right), \quad (5.33)$$

причем в данном случае электронная статистическая сумма иона $u_+ = 1$. Число «нейтральных» атомов в 1 см^3 $N = u N_1 / g_1$, где u — электронная статистическая сумма атома.

Приравнивая друг другу числа прямых и обратных процессов (5.30), (5.31), с учетом всех сделанных замечаний о входящих в формулы величинах, найдем связь сечений фотоионизации и фотозахвата:

$$\sigma_{\nu n} = \frac{u^+}{g_n} \left(\frac{m v c}{h \nu} \right)^2 \sigma_{cn}.$$

Подставляя сюда σ_{cn} по формуле (5.27), получим эффективное сечение поглощения кванта $h\nu$ водородоподобным атомом, заряд «атомного» остатка которого равен Z и который находится в n -м квантовом состоянии:

$$\sigma_{\nu n} = \frac{64\pi^4 e^{10} m Z^4}{3\sqrt{3} h^6 c \nu^3 n^5} = 7,9 \cdot 10^{-18} \frac{n}{Z^2} \left(\frac{\nu_n}{\nu} \right)^3 \text{ см}^2. \quad (5.34)$$

Здесь через ν_n обозначена минимальная частота кванта, который способен вырвать электрон с n -го уровня: $h\nu_n = I_n Z^2 / n^2$ (см. формулу (5.28)).

Характерной особенностью сечения является обратная кубическая зависимость от частоты $\sigma_{\nu n} \sim (\nu_n / \nu)^3$. Сечение максимально у порога поглощения при $\nu = \nu_n$. Формула (5.34) известна в литературе под названием формулы Крамерса.

Несколько более строгое, квантовомеханическое, рассмотрение фотоионизации водородоподобных атомов с высоких уровней приводит к формуле, отличающейся от (5.34) поправочным множителем [4]:

$$g' = 1 - 0,173 \left(\frac{h\nu}{I_n Z^2} \right)^{1/3} \left[\frac{2}{n^2} \left(\frac{I_n Z^2}{h\nu} \right) - 1 \right].$$

В большинстве практически интересных случаев этот множитель весьма близок к единице, так что его, как правило, можно не учитывать.

Полуклассическая формула (5.34), по самому своему выводу справедливая лишь для высоковозбужденных состояний $n \gg 1$, тем не менее дает хорошие результаты даже при применении ее к фотоионизации с основного уровня $n = 1$.

Квантовомеханические расчеты эффективного сечения фотоэффекта с K -оболочки атомов, т.е. для основного состояния водородоподобного атома, выполненные с точными волновыми функциями свободного электрона, в кулоновском поле дают [5] (из расчета на один электрон, как и (5.33)):

$$\sigma_{\nu_1} \approx \frac{6,34 \cdot 10^{-18}}{Z^2} \left(\frac{\nu_1}{\nu} \right)^{8/3}, \quad \nu - \nu_1 \ll \nu_1; \quad (5.35)$$

$$\sigma_{\nu_1} \approx \frac{8,32 \cdot 10^{-18}}{Z^2} \left(\frac{\nu_1}{\nu} \right)^3, \quad \nu - \nu_1 \sim \nu_1; \quad (5.36)$$

$$\sigma_{\nu_1} \approx \frac{5,42 \cdot 10^{-17}}{Z^2} \left(\frac{\nu_1}{\nu} \right)^{3,5}, \quad \nu \gg \nu_1. \quad (5.37)$$

Первая из формул соответствует области вблизи границы поглощения, последняя — когда энергия освобождающегося электрона значительно больше энергии связи $h\nu_1 = I_H Z^2$, что соответствует переходу к борновскому приближению.

Сопоставление формулы (5.34), в которой положим $n = 1$, с формулами (5.35), (5.36) показывает, что на границе поглощения, при $\nu = \nu_1$, «полуклассическое сечение» (5.34) равно $7,9 \cdot 10^{-18}/Z^2$ см² и всего на 25 % больше квантового (5.35). При $\nu - \nu_1 \sim \nu_1$, т.е. когда энергия освобождающегося электрона порядка энергии связи его в основном состоянии атома, формулы (5.34), (5.35) совпадают с точностью 5 % и даже дают одинаковую зависимость от частоты. Сильное расхождение наступает только при $h\nu \gg I_H Z^2$, когда энергия освобождающегося электрона $E \gg I_H Z^2$, т.е. в борновской области, где положение противоположно квазиклассическому.

Как будет видно из дальнейшего, столь большие кванты всегда находятся в далекой виновской области спектра и в условиях, близких к тепловому равновесию, практически не играют роли. Таким образом, полуклассическую формулу (5.34) приближенно можно распространить на фотоионизацию со всех уровней водородоподобных атомов. Точно так же формула для фотозахвата (5.27) применима для захвата электрона на все уровни, вплоть до основного, что и было использовано в предыдущем параграфе при вычислении полного сечения захвата.

Рассмотрим коротко, чего можно ожидать от применения к сложным атомным системам формул, выведенных для водородоподобных атомов.

Маленькие кванты, значительно меньшие потенциала ионизации атома или иона I , поглощаются (с выбиванием электрона) только высоковозбужденными атомами (ионами), энергия возбуждения которых не меньше чем $I - h\nu$. Но в сильно возбужденных состояниях оптический электрон движется по большой орбите, в области которой поле «атомного остатка» весьма близко к кулоновскому, создаваемому зарядом, равным заряду «остатка». Поэтому можно надеяться, что в этом случае приближение «водородоподобности» является оправданным. К сожалению, нет точных квантовомеханических расчетов поглощения высоковозбужденными атомами и ионами, которые могли бы подтвердить это довольно вероятное предположение.

Имеющиеся немногочисленные расчеты относятся главным образом к фотоэффекту из основного состояния атомов (для ионов данные еще более скудны).

В этом случае поле, в котором движется поглощающий электрон, создается сложной системой зарядов ядра и остальных электронов, размеры которой таковы

же, что и «орбита» электрона, и, конечно, поле сильно отличается от кулоновского. Точно так же волновая функция электрона сильно отличается от волновой функции S -состояния водородоподобного атома. Для ряда атомов эффективные сечения фотоионизации с основного состояния очень сильно отличаются от соответствующего сечения для атома водорода, равного согласно (5.34) $\sigma_{\nu_1} = 7,9 \cdot 10^{-18} (\nu_1/\nu)^3 \text{ см}^2$ (на границе поглощения $\sigma^* = 7,9 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$), для других же они весьма близки на границе поглощения, но имеют другую зависимость от частоты. Так, например, у кислорода и фтора на границе поглощения сечения равны примерно $2,5 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, а затем почти не зависят от частоты вплоть до $\nu \approx 2\nu_1$. У азота на границе $\sigma^* = 7,5 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, а углерода $\sigma^* = 10 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, но сечения спадают с увеличением ν медленнее, чем пропорционально ν^{-3} , как у водородоподобных атомов¹⁾; у лития $\sigma^* = 3,7 \cdot 10^{-18}$, у кальция $\sigma^* = 25 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$. Особенно велико отличие от «водородоподобности» у щелочных металлов. У натрия $\sigma^* = 0,31 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$.

Экспериментальные значения для рубидия $\sigma^* = 0,1 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, для цезия $\sigma^* = 0,6 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$. Более подробный обзор имеющихся данных можно найти в статье Бейтса [7]. К счастью, как мы увидим ниже, в достаточно разреженных газах в состояниях, близких к термодинамическому равновесию, роль больших квантов, превышающих потенциалы ионизации атомов и ионов, сравнительно мала, так что сильные расхождения в этом случае не делают бессмысленным использование приближения «водородоподобности».

А. В. Ивановой [84, 85] были проведены строгие квантово-механические расчеты эффективных сечений фотоионизации с основных и многих возбужденных уровней литиеподобных атомных систем: атомов лития, четырехкратных ионов азота, пятикратных ионов кислорода. Волновые функции вычислялись методом Хартри–Фока. На основе найденных сечений рассчитаны коэффициенты поглощения ионов N^{+4} , O^{+5} с 20 уровней для широкого интервала частот и температур.

В некоторых случаях имеют большое значение фотозахват электронов нейтральными атомами с образованием отрицательных ионов и, соответственно, фотоэлектрическое поглощение квантов отрицательными ионами. Это относится к отрицательным ионам водорода, играющим важнейшую роль в поглощении света в звездных атмосферах, и отрицательным ионам кислорода, существенным для поглощения света в воздухе в некоторых условиях. Энергии связи или потенциалы ионизации отрицательных ионов, определяющие нижнюю границу поглощения $h\nu_{\min}$, равны 0,75 эВ для водорода, 1,45 эВ для атомарных ионов кислорода O^- , порядка нескольких десятых электронвольт для молекулярных ионов O_2^- . Зависимость сечения от частоты не имеет ничего общего с законом ν^{-3} . На рис. 5.5 представлены результаты квантовомеханических расчетов эффективного сечения фотоионизации O^- . График взят из работы [8]. Около теоретически рассчитанной кривой указаны экспериментальные точки по измерениям [9]. Данные по поглощению ионами H^- можно найти в книге [6].

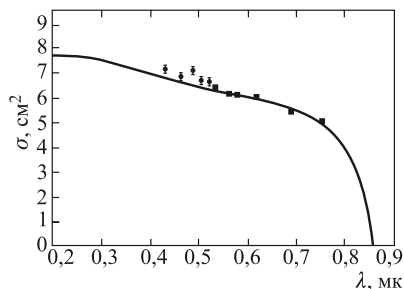


Рис. 5.5. Эффективное сечение поглощения света отрицательными ионами кислорода O^-

¹⁾ Графики для сечений фотоионизации из основных состояний O, N, F, C приведены в книге [6].

§ 6. Коэффициент непрерывного поглощения в газе из водородоподобных атомов. Вычислим коэффициент связанно-свободного поглощения квантов $h\nu$ водородоподобными атомами, заряд «ядра» которых равен Z . При данной температуре в газе присутствуют атомы, возбужденные до всевозможных энергий. Если N_n — число атомов в 1 см^3 , находящихся в n -м квантовом состоянии, а $\sigma_{\nu n}$ — эффективное сечение поглощения кванта $h\nu$ этими атомами, то коэффициент поглощения равен ¹⁾

$$\kappa_\nu = \sum_{n^*}^{\infty} N_n \sigma_{\nu n}. \quad (5.38)$$

Нижний предел в этой сумме определяется из условия, что энергия кванта больше энергии связи электрона в атоме, $h\nu > |E_n|$. В противном случае квант не сможет вырвать электрон и, следовательно, атомы, возбужденные до состояний с $n < n^*$, для которых $|E_n| > h\nu$, не участвуют в поглощении квантов $h\nu$. В частности, если энергия кванта превышает энергию связи электрона в основном состоянии атома, т. е. потенциал ионизации $I = I_H Z^2$, то в поглощении участвуют все атомы ($n^* = 1$). В поглощении очень маленьких квантов $h\nu \ll I_H Z^2$ участвуют только высоковозбужденные атомы ($n^* \gg 1$).

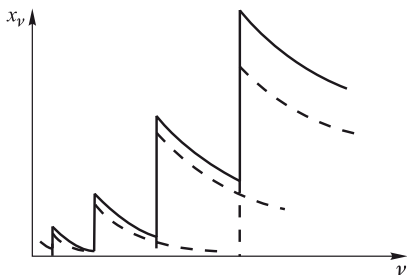


Рис. 5.6. «Частогокол» поглощения. Пунктирные кривые соответствуют поглощению атомами в данном квантовом состоянии. Сплошная кривая — суммарный коэффициент поглощения. Рисунок схематический

Кривая поглощения в зависимости от частоты имеет характер «зачастогола», как это изображено на рис. 5.6. Как только энергия $h\nu$, возрастая, достигает энергии связи электрона в каком-нибудь состоянии $|E_n|$, атомы, возбужденные до этого уровня, включаются в поглощение и коэффициент поглощения вырастает скачком. Затем, вплоть до включения следующего уровня, κ'_ν уменьшается $\sim \nu^{-3}$.

Каждый уровень вносит свой «зубец» в частогокол $N_n \sigma_{\nu n}$ (пунктирные линии на рис. 5.6), а полный коэффициент поглощения κ'_ν получается путем суммирования всех «зубцов» (сплошная линия на рис. 5.6).

Если газ находится в состоянии термодинамического равновесия, число атомов в n -м состоянии N_n определяется формулой Больцмана (5.32). При больших n , когда показатель в экспоненте практически не зависит от n , число атомов N_n просто пропорционально n^2 ($g_n = 2n^2$).

Поскольку эффективное сечение $\sigma_{\nu n} \sim n^{-5}$, слагаемые в сумме (5.38) при $n \rightarrow \infty$ уменьшаются пропорционально $1/n^3$, так что вклад в поглощение света данной частоты все более высоких уровней весьма быстро уменьшается, а сама бесконечная сумма сходится ²⁾.

Поскольку эффективное сечение $\sigma_{\nu n} \sim n^{-5}$, слагаемые в сумме (5.38) при $n \rightarrow \infty$ уменьшаются пропорционально $1/n^3$, так что вклад в поглощение света данной частоты все более высоких уровней весьма быстро уменьшается, а сама бесконечная сумма сходится ²⁾.

¹⁾ Отметим здесь коэффициент связанно-свободного поглощения штрихом, чтобы отличать его от коэффициента свободно-свободного поглощения, который будем отмечать двумя штрихами.

²⁾ В реальном ионизованном газе из-за взаимодействия атомов и ионов верхние возбужденные уровни срезают (см. § 6 гл. III), так что на самом деле число членов в сумме (5.38) конечно. В данном случае в обрезании суммы по n нет необходимости, так как сумма быстро сходится.

Будем интересоваться температурами, при которых степень ионизации невелика. Как было показано в § 5 гл. III, заметная ионизация в не слишком плотном газе начинается, когда kT еще гораздо меньше потенциала ионизации I . Число возбужденных атомов при этом весьма мало, так как для возбуждения даже самого низкого состояния $n = 2$ необходима энергия, близкая к потенциалу ионизации и равная $(3/4)I$.

Таким образом, при $kT \ll I$ число атомов в основном состоянии N_1 весьма близко к полному числу атомов $N = \sum N_n$ и в формуле Больцмана (5.32) можно положить приближенно $N_1 \approx N$. Подставляя при этом условия N_n и $\sigma_{\nu n}$ по формулам (5.32), (5.34) в выражение (5.38) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{|E_n|}{kT} = \frac{|E_1|}{kT} \frac{1}{n^2} = \frac{x_1}{n^2}, \\ x_1 &= \frac{|E_1|}{kT} = \frac{I_H Z^2}{kT} = \frac{I}{kT}, \\ x &= \frac{h\nu}{kT}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

получим коэффициент связанно-свободного поглощения в виде

$$\kappa'_\nu = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{e^{10} m Z^4 N}{h^6 c \nu^3} \sum_{n^*}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-(x_1 - x_n)}. \quad (5.40)$$

Чтобы получить полный коэффициент непрерывного поглощения, к κ'_ν следует присоединить коэффициент тормозного поглощения свободными электронами в поле ионизованных атомов — «водородоподобных ионов», который дается формулой (5.21). Выражая в этой формуле произведение $N_+ N_e$ через число «нейтральных» атомов по формуле Саха (5.33) и имея в виду, что $u \approx g_1 = 2$, $N \approx N_1$, перепишем коэффициент тормозного поглощения в виде

$$\kappa''_\nu = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6 k T N}{h^4 c \nu^3} e^{-I/kT} = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10} m N}{h^6 c \nu^3} \frac{e^{-x_1}}{2x_1}. \quad (5.41)$$

Суммарный коэффициент $\kappa_\nu = \kappa'_\nu + \kappa''_\nu$ равен

$$\kappa_\nu = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{e^{10} m Z^4 N}{h^6 c \nu^3} \left\{ \sum_{n^*}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-(x_1 - x_n)} + \frac{e^{-x_1}}{2x_1} \right\}. \quad (5.42)$$

Эта формула значительно упрощается, если энергия кванта мала по сравнению с потенциалом ионизации, так что квант поглощается только высоковозбужденными атомами (n^* велико). Поскольку уровни с возрастанием n быстро сгущаются, суммирование при больших n можно заменить интегрированием («дифференциал» соответствует $\Delta n = 1$). Интегрирование по n эквивалентно интегрированию по спектру энергетических состояний с заменой дискретного спектра непрерывным в соответствии с равенством $\frac{dn}{n^3} = -\frac{1}{2} \frac{dx_n}{x_1}$.

В качестве нижнего предела интеграла по x_n следует, очевидно, взять безразмерную энергию кванта $x = h\nu/kT$. Таким образом,

$$\sum_{n^*}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-(x_1 - x_n)} \approx \frac{e^{-x_1}}{2x_1} \int_x^0 e^{x_n} dx_n = \frac{e^{-x_1}}{2x_1} (e^x - 1). \quad (5.43)$$

Если формально распространить суммирование или интегрирование на «отрицательные энергии связи» или, что то же самое, на энергии «возбуждения» $x_1 - x_n$, превышающие потенциал ионизации, то интеграл по x_n от 0 до $-\infty$ дает величину $e^{-x_1}/2x_1$, в точности соответствующую свободно-свободным переходам. Этого и следовало ожидать, так как состояния атома с «возбуждением», превышающим потенциал ионизации, представляют собой состояния с оторванным электроном, а непрерывный переход от связанных состояний электрона к свободным был с самого начала положен в основу вывода эффективного сечения связанны-свободного поглощения.

Подставляя выражение (5.43) в формулу (5.42), выделяя в коэффициенте, стоящем перед фигурными скобками, множитель $I/kT = I_N Z^2/kT$ и сокращая его с величиной x_1 , содержащейся в знаменателе (5.43), получим окончательную формулу для коэффициента поглощения малых квантов $h\nu \ll I$ ¹⁾:

$$\kappa_\nu = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 Z^2 k T N}{h^4 c \nu^3} \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right) = 0,96 \cdot 10^{-7} \frac{N Z^2}{T^2} \frac{e^{-(x_1 - x)}}{x^3} \text{ см}^{-1}. \quad (5.44)$$

Коэффициент поглощения κ_ν пропорционален не Z^4 , как это может показаться при взгляде на формулу (5.40), а только Z^2 . Чтобы пояснить это, вспомним, каково происхождение множителя Z^4 в формуле (5.40). Один множитель Z^2 входит в коэффициент в связи с пропорциональностью эффективного сечения поглощения квадрату «ускорения» электрона в кулоновском поле (по классической трактовке) или квадрату матричного элемента энергии взаимодействия с «ядром» (по квантовой). Другой же множитель Z^2 появился вследствие пропорциональности сечения поглощения $\sigma_{\nu n}$ расстоянию между уровнями, которое в свою очередь пропорционально полному энергетическому интервалу связанных состояний, $I = I_N Z^2$.

Сечение $\sigma_{\nu n}$, действительно, пропорционально энергетическому расстоянию между уровнями, так как этому расстоянию пропорционально сечение фотозахвата (см. формулу (5.21)), которое связано с сечением поглощения принципом детального равновесия. При суммировании парциального коэффициента $\kappa'_{\nu n} = N_n \sigma_{\nu n}$ по уровням или, что то же самое, при интегрировании по энергетическому интервалу связанных состояний, участвующих в поглощении данного кванта, последняя зависимость от Z^2 исчезает. Сделанное замечание о зависимости κ_ν от Z существенно для перехода к многозарядным ионам (см. ниже).

Как видно из формул (5.42), (5.43), связанны-свободные переходы и свободно-свободные переходы вносят в суммарный коэффициент непрерывного поглощения κ_ν доли, которые относятся друг к другу как

$$(e^x - 1) : 1 = (e^{h\nu/kT} - 1) : 1.$$

Отсюда следует, что в поглощении больших квантов $h\nu \gg kT$ основную роль играют связанны-свободные переходы, а в поглощении маленьких квантов $h\nu \ll kT$ — свободно-свободные.

§ 7. Непрерывное поглощение света в одноатомном газе в области первой ионизации. Рассмотрим непрерывное поглощение света в одноатомных газах, таких, как инертные (аргон, ксенон и др.) или пары металлов, в области первой ионизации. Газ будем предполагать одноатомным для того, чтобы исключить из рассмотрения квазинепрерывные молекулярные спектры (если диссоциация молекул почти полная, то, очевидно, любой газ является одноатомным).

¹⁾ Ее часто называют формулой Крамерса–Унзольда.

Область первой ионизации лежит в диапазоне температур порядка 6000—30 000 К (в зависимости от потенциала ионизации атомов и плотности газа) и представляет большой интерес в связи с многочисленными лабораторными исследованиями и практическими приложениями. При более высоких температурах начинаются вторая и последующие ионизации, которые необходимо учитывать при рассмотрении поглощения, что будет сделано в следующем параграфе.

Рассмотрим сильно возбужденный атом как водородоподобную систему: «оптический» электрон (которым является один из внешних валентных электронов) движется по большой орбите в поле ядра и остальных электронов. Если размеры этой системы зарядов, образующих «атомный остаток», невелики по сравнению с размерами орбиты «оптического» электрона, что как раз и имеет место в случае больших возбуждений атома, то ее можно представить как точечный заряд $Z = 1$, создающий кулоновское поле (если имеем дело не с нейтральным атомом, а с ионом, то Z на единицу больше заряда иона; см. следующий параграф).

Распространяя результаты, полученные для водородоподобных атомов, на сложные атомы, естественно под потенциалом ионизации в формулах понимать истинный потенциал данного атома.

В самом деле, основным фактором, определяющим температурную зависимость коэффициента поглощения квантов, значительно меньших потенциала ионизации, является больцмановский множитель $\exp[-(I - h\nu)/kT]$, которому пропорционально число атомов, возбужденных настолько, чтобы квант был в состоянии вырвать из них электрон. Этот множитель, безусловно, присутствует совершенно независимо от того, водородоподобный атом или сложный. Один из сомножителей больцмановского фактора, $\exp(-I/kT)$, описывает степень ионизации, точнее, произведение N_+N_e , которому пропорционален коэффициент тормозного поглощения, опять-таки независимо от типа атома.

В сложных атомах каждый из «водородоподобных» уровней с данным главным квантовым числом n расщепляется на несколько уровней в соответствии со своим статистическим весом. Это связано с тем, что в сложных атомах вследствие отклонений поля от кулоновского отсутствует l -вырождение, и энергии уровней с данным главным квантовым числом n , но различными орбитальными числами l не совпадают (в отличие от водородоподобных атомов).

Если принять во внимание такое «размножение» уровней в сложных атомах, которое приводит к появлению большего числа более тесно расположенных «зубцов» в «частоколе» кривой $\kappa(\nu)$, то замена суммирования по уровням интегрированием или замена «частокола», усредненной гладкой кривой представляется даже более естественной, чем в случае водородоподобных атомов (Унзольд [10]).

Поглощение квантов, значительно меньших потенциала ионизации, по-видимому, должно неплохо описываться формулой (5.44), выведенной для водородоподобных атомов, причем для нейтральных атомов следует считать Z равным единице. В самом деле, высокие уровни, с которых только и вырываются электроны маленькими квантами, в сложных атомах весьма близки к «водородоподобным», так как поле на больших расстояниях от атомного остатка весьма близко к кулоновскому.

Что касается больших квантов, которые поглощаются атомами, находящимися в основном или низких возбужденных состояниях, то здесь использование формулы (5.44) может, конечно, привести к значительным ошибкам ¹⁾.

¹⁾ См. § 5, с. 221, где приведены результаты вычисления сечения поглощения квантов некоторыми атомами, находящимися в основном состоянии.

Формула (5.44) становится вообще бессмысленной при энергиях квантов, превышающих потенциал ионизации, $h\nu > I$, $x > x_1$. В этом случае в сумме по n участвуют все уровни от $n = 1$ до ∞ и формула (5.43) с переменным нижним пределом интегрирования теряет смысл. Сумма по уровням в этом случае просто постоянна и не зависит от ν (от x). Подавляющую роль в поглощении квантов $h\nu > I$ играют атомы, находящиеся в основном состоянии, и приближенно сумму можно считать равной первому члену, т. е. единице. Это дает приближенную формулу

$$\kappa_\nu = \frac{32\pi^2 e^6 Z^2 N}{3\sqrt{3} h^4 c \nu^3} I = 0,96 \cdot 10^{-7} \frac{NZ^2}{T^2} \frac{2x_1}{x^3} \text{ см}^{-1} \text{ при } x > x_1, \quad h\nu > I, \quad (5.45)$$

которой следует заменить формулу (5.44) при $h\nu > I$.

Найдем средний росселандов пробег одноатомного газа в области первой ионизации. Росселандов пробег определяется обратной величиной коэффициента поглощения, т. е. пропусанием.

Спектральная длина пробега $l_\nu = 1/\kappa_\nu$, характеризующая пропускание, схематически изображена на рис. 5.7. Частотные области пропускания противоположны

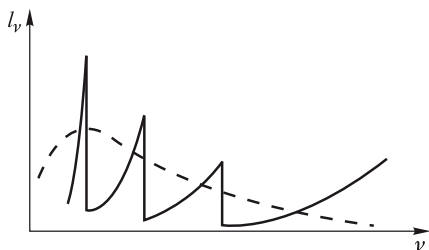


Рис. 5.7. «Частокол» пропускания. Сплошная кривая — длина пробега как функция частоты. Пунктирная кривая — пробег, сглаженный по зубцам. Рисунок схематический

областям поглощения и находятся вблизи скачков со стороны меньших частот. В области энергий квантов $h\nu$, превышающих потенциал ионизации, практически никакого пропускания нет, так как эти кванты очень сильно поглощаются атомами, пребывающими в основном состоянии.

Основной вклад в перенос лучистой энергии дают кванты, соответствующие максимуму весовой функции в росселандовом интеграле (2.80), $x = h\nu/kT \approx 4$. Если температура значительно меньше потенциала ионизации, как это обычно и бывает в области первой ионизации не слишком плотного газа, поглощение таких квантов можно приближенно описывать формулой (5.44), которая тем точнее, чем меньше $h\nu$,

и которую можно использовать для вычисления среднего пробега («частокол» пропускания по этой формуле заменяется гладкой кривой $x^3 e^{-x}$, изображенной на рис. 5.7 пунктиром).

Поскольку большие частоты $x > x_1$ не вносят практически никакого вклада в росселандов интеграл (2.80), вычислять этот интеграл можно, распространяя формулу (5.44), имеющую смысл только при $x < x_1$, и на $x > x_1$. Действительно, формула (5.44) формально обеспечивает очень быстрое затухание пропускания при $x > x_1$, $x \rightarrow \infty$. Подставляя выражение (5.44) в росселандов интеграл (2.80), получим росселандов пробег¹⁾

$$l = 0,9 \cdot 10^7 \frac{T^2}{NZ^2} e^{I/kT} \text{ см.} \quad (5.46)$$

Следует отметить, что если вычислять росселандов пробег с коэффициентом поглощения, взятым не по формуле (5.44), а по «точной» формуле для водородо-

¹⁾ Появляющийся при этом интеграл $\int_0^\infty x^3 e^{-x} G'(x) dx = 0,87$.

подобных атомов (5.42), т. е. без замены «частотокола» пропускания гладкой кривой, получаются значения пробега раз в пять большие, чем это дает формула (5.46) (при $x_1 = I/kT \sim 10$).

Приведем пример вычисления росселандова пробега по формуле (5.46). Для водорода при $T = 11\,600\text{ К} = 1\text{ эВ}$, $N = 10^{19}\text{ см}^{-3}$ получим $l = 100\text{ см}$ (степень ионизации при этих условиях равна 0,02).

Если формально вычислить по формуле (2.105) с помощью формул (5.44), (5.45) средний коэффициент поглощения, характеризующий интегральную лучеиспускающую способность газа $\varkappa_1$, то для соответствующей длины пробега получим

$$l_1 = \frac{1}{\varkappa_1} = 2,3 \cdot 10^7 \frac{T^2}{N Z^2} e^{I/kT} \frac{kT}{I} \text{ см.} \quad (5.47)$$

Следует, однако, заметить, что эта формула может содержать большую ошибку, так как в интеграле (2.105) основную роль играет область больших частот $x > x_1$, для которой приближение водородоподобности выполняется хуже всего (испускаются в основном большие кванты при захвате электронов на основные уровни атомов).

Коэффициент непрерывного поглощения небольших квантов, гораздо меньших потенциала ионизации $kT \ll I$, в области первой ионизации при $kT \ll I$ зависит от температуры в основном по закону $\varkappa_\nu \sim e^{-I/kT}$, т. е. очень резко. Соответственно средний пробег l пропорционален $e^{I/kT}$. Больцмановская температурная зависимость поглощения характерна как для связанно-свободных переходов, так и для тормозного поглощения в поле ионов, т. е. для обоих слагаемых $\varkappa'_\nu$ и $\varkappa''_\nu$ в $\varkappa_\nu$ (так как $\varkappa''_\nu \sim N_+ N_e \sim e^{I/kT}$).

В ряде работ предлагаются способы усовершенствования формул Крамерса и Крамерса–Унзоляда, выведенных для водородоподобных атомов, при применении их к сложным атомам. Унзольд [11] вводит вместо заряда «атомного остатка» Z эффективный заряд Z^* , который определяется таким образом, чтобы величина $E_{n,l} = -I_N Z^{*2}/n^2$ отвечала фактической энергии уровня сложного атома с данными главным и орбитальным квантовыми числами n и l . Кроме того, формула Крамерса умножается на γ/Σ_0 , где γ равно отношению числа подуровней сложного атома при данных n и l к аналогичной величине у водорода, а Σ_0 — статистическая сумма атома. Унзольд [11] и др. [12] рекомендуют брать для всех уровней $Z^{*2} \approx 4-7$, отвечающее энергии основного состояния атома.

Берджесс и Ситон [13], используя одноэлектронные полуэмпирические волновые функции, найденные с помощью метода квантового дефекта¹⁾, получили общее выражение для сечения фотоионизации произвольного атома или иона.

Л. М. Биберман и Г. Э. Норман [14], взяв за основу формулу Берджесса и Ситона, развили приближенный метод вычисления коэффициента непрерывного поглощения для неводородоподобных атомов. Коэффициент поглощения представляется ими в виде формулы типа Крамерса–Унзоляда, в которой множитель Z^2 заменяется некой функцией частоты и, вообще говоря, температуры $\xi(\nu, T)$. Эта функция была вычислена ими для атомов О, N, С (приблизительно она не зависит от температуры). Очень высокие уровни атомов всегда «водородоподобны», поэтому очень маленькие кванты поглощаются так же, как и в водороде: при $h\nu \rightarrow 0$ $\xi \rightarrow 1$ (при $Z = 1$).

¹⁾ Квантовым дефектом называют величину $\Delta n(E_{n,l}) = n - n_l^*$, где n — главное квантовое число для уровня $E_{n,l}$ атома, а n_l^* — эффективное число, такое, что $E_{n,l} = -I_N Z^2/n_l^{*2}$. Квантовый дефект характеризует отклонение энергии уровня сложного атома или иона от энергии соответствующего уровня водородоподобного атома.

При увеличении энергии кванта от нуля до $h\nu \sim 4$ эВ коэффициент ξ монотонно уменьшается для этих атомов до значения $\sim 1/5$. В работе [15] функции вычислены для ряда других атомов (Li, Al, Hg, Kr, Xe, Ar). Например, для аргона в видимой области спектра $h\nu \approx 2\text{--}3$ эВ, $\xi \approx 1,5\text{--}2$. Величина ξ меняется нерегулярным образом от атома к атому.

Результаты, полученные методом квантового дефекта, неплохо согласуются с экспериментом. Обзор этих результатов дан в работе [55].

Имеются экспериментальные данные о том, что теория Крамерса–Унзоляда дает неплохие результаты в применении к инертным газам. Так, в работе А. П. Дронова, А. Г. Свиридова и Н. Н. Соболева [42] изучался сплошной спектр свечения криптона и ксенона в ударной трубе. Измеренные интенсивности удовлетворительно согласуются с рассчитанными по теории Крамерса–Унзоляда.

§ 8. Средние пробеги излучения при многократной ионизации атомов газа.

При высоких температурах, порядка нескольких десятков тысяч; градусов и выше, атомы газа многократно ионизованы. Молекулы при таких температурах полностью диссоциированы, так что все газы являются «одноатомными» и ведут себя в отношении поглощения света одинаковым образом. Найдем средние пробеги излучения в многократно ионизованном газе. (Ислагаемые ниже результаты были получены в работе одного из авторов [18].) Для простоты рассмотрим газ, состоящий из атомов одного элемента.

Расчеты ионизационного равновесия показывают, что при каждой паре значений температуры и плотности в газе присутствуют в значительном количестве ионы только двух-трех зарядов (см. § 7 гл. III). Каждый из этих ионов вносит свой вклад в непрерывное поглощение, участвуя как в связанно-свободных, так и в свободно-свободных переходах. Те же расчеты свидетельствуют о том, что в газе не слишком большой плотности потенциалы ионизации ионов, присутствующих в большом количестве, всегда гораздо больше, чем kT . Например, в воздухе с плотностью в 100 раз меньшей, чем нормальная, «средний» потенциал ионизации ионов $\bar{I}$ (соответствующий ионам со «средним» при данных температуре и плотности зарядом) примерно в 11 раз больше, чем kT . Следовательно, кванты с энергиями $h\nu$, в 3–5 раз превышающими kT , которые играют главную роль в переносе лучистой энергии, поглощаются не с основного, а с возбужденных уровней ионов. Как и в случае нейтральных атомов, это может служить основанием для перенесения на многозарядные ионы формул, выведенных для водородоподобных атомов. Более того, для многозарядных ионов приближение водородоподобности является даже более оправданным, чем для нейтральных атомов, так как поле «атомного остатка» многозарядного иона тем ближе к кулоновскому, чем больше заряд «остатка».

Будем рассматривать непрерывное поглощение многозарядными ионами как поглощение водородоподобными атомами с соответствующим зарядом.

Пусть в газе, содержащем N ядер в 1 см^3 при температуре T , в 1 см^3 имеется N_m атомов ионизованных m раз (будем их называть для краткости m -ионами). Суммарный коэффициент связанно-свободного поглощения m -ионами и свободно-свободного поглощения в поле $m+1$ -ионов будем описывать формулами (5.44), (5.45), в которых положим заряд Z равным заряду «атомного остатка» m -ионов, $Z = m+1$, и в качестве потенциала ионизации возьмем истинный потенциал m -иона I_{m+1} . Объединение связанно-свободного и свободно-свободного коэффициентов для многозарядных ионов вполне соответствует такому же объединению в области первой ионизации. В самом деле, коэффициент свободно-свободного поглощения в поле $m+1$ -ионов пропорционален произведению $N_{m+1}N_e$, которое, как и раньше, по

формуле Саха (3.44) выражается через число m -ионов N_m . Запишем суммарный коэффициент поглощения в виде

$$\kappa_{\nu m} = \frac{aN_m(m+1)^2}{T^2} e^{-x_{1m}} F_m(x), \quad (5.48)$$

где

$$a = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{hck} = 0,96 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2 \cdot \text{К}^2, \quad x_{1m} = I_{m+1}/kT, \quad x = h\nu/kT,$$

а в $F_m(x)$ заключена частотная зависимость

$$F_m(x) = \frac{e^x}{x^3} \quad \text{при} \quad x < x_{1m}. \quad (5.49)$$

Для квантов, превышающих потенциал ионизации, положим в соответствии с (5.45)

$$F_m(x) = 2x_{1m} \frac{e^{x_{1m}}}{x^3} \quad \text{при} \quad x > x_{1m}. \quad (5.50)$$

Чтобы получить полный коэффициент поглощения частоты ν , следует просуммировать парциальный коэффициент $\kappa_{\nu m}$ по всем сортам ионов, т. е. по заряду m :

$$\kappa_\nu = \sum_m \kappa_{\nu m}. \quad (5.51)$$

Найдем прежде средний коэффициент поглощения κ_1 , характеризующий интегральную лучеиспускательную способность.

Подставляя спектральный коэффициент κ_ν в формулу (2.105) и вычисляя интеграл по спектру, получим

$$\kappa_1 = \frac{1}{l_1} \frac{45a}{\pi^4 T^2} \sum_m N_m (m+1)^2 x_{1m} e^{-x_{1m}}. \quad (5.52)$$

Теперь найдем средний росселандов пробег, для чего подставим κ_ν в формулу (2.80):

$$l = \frac{T^2}{a} \int_0^\infty \frac{G'(x) dx}{\sum_m N_m (m+1)^2 e^{-x_{1m}} F_m(x)}. \quad (5.53)$$

Здесь $G'(x)$ — росселандов весовой множитель. В этом выражении уже нельзя как при вычислении κ_1 , без привлечения дополнительных соображений избавиться от интегрирования по спектру, так как здесь усредняется не коэффициент поглощения, который аддитивен, а его обратная величина. Однако приближенно интегрирование все же можно провести. Согласно формуле (5.49) все ионы в своей полосе пропускания, т. е. при $x < x_{1m}$ ($h\nu < I_{m+1}$), с изменением частоты поглощают свет одинаково. Фактически верхней границей интеграла (5.53) является наименьшая из границ пропускания, которой обладают ионы, присутствующие в газе в столь значительном количестве, что дают заметный вклад в поглощение.

Как отмечалось выше, при каждой паре значений температуры и плотности газа в значительном количестве присутствуют ионы только двух-трех зарядов. Поскольку средний потенциал ионизации $\bar{I}$ намного больше kT , границы пропускания этих ионов x_{1m} лежат за пределами той области спектра, которая дает существенный вклад в интеграл (5.53). Поэтому приближенно можно пренебречь зависимостью функции $F_m(x)$ от m и вынести ее за знак суммы по m , а кроме того, распространить выражение (5.49) для $F_m(x)$ и на значения $x > x_{1m}$, подобно тому как это было

сделано в предыдущем параграфе. При этих упрощениях интеграл превращается в точно такой же, как и в случае нейтральных атомов (см. сноску на с. 224). Получим

$$l = \frac{0,87T^2}{a} \sum_m \frac{1}{N_m(m+1)^2 e^{-x_{1m}}}. \quad (5.54)$$

Для приближенного вычисления сумм по зарядам ионов в формулах (5.52), (5.54) воспользуемся способом, примененным в § 7 гл. III при вычислении термодинамических функций газов в области многократной ионизации. Будем рассматривать распределение ионов N_m как δ -функцию около некоего «среднего» заряда $\bar{m}$, определяемого уравнением (3.57).

Как было показано в § 7 гл. III, функция распределения ионов N_m имеет характер острого пика, описываемого гауссовой кривой $N_m \sim \exp[-(m - \bar{m})^2/\Delta^2]$ (см. формулу (3.58)).

Если произвести разложение множителя $e^{-x_{1m}}$, входящего в сумму (5.52), (5.54), около среднего значения $\bar{x}_{1m}$, получим, что этот множитель зависит от $m - \bar{m}$ по закону $e^{-x_{1m}} \approx \exp[-\bar{x}_{1m} - \text{const}(m - \bar{m})]$, т. е. слабее, чем N_m . Поэтому применение указанного приближенного способа вычисления суммы по m в данном случае, так же как и в § 7 гл. III, возможно. Вынося средние значения коэффициентов при N_m в слагаемых сумм за знак суммирования и принимая во внимание, что $\sum N_m = N$, получим

$$l = \frac{0,87T^2}{a} \frac{e^{\bar{x}_1}}{N(\bar{m}+1)^2}, \quad l_1 = \frac{\pi^4 T^2}{45a} \frac{e^{\bar{x}_1}}{N(\bar{m}+1)^2 \bar{x}_1},$$

где $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_{1m} = \bar{I}/kT$.

Воспользовавшись формулой (3.56) для замены экспоненты и подставляя численное значение a , получим окончательно:

$$l = \frac{4,4 \cdot 10^{22} T^{7/2}}{N^2 \bar{m}(\bar{m}+1)^2} \text{ см} \quad (5.55)$$

и

$$l_1 = \frac{1,1 \cdot 10^{23} T^{7/2}}{N^2 \bar{m}(\bar{m}+1)^2 \bar{x}_1} \text{ см}. \quad (5.56)$$

Средний заряд $\bar{m}$ и средний относительный потенциал ионизации $\bar{x}_1 = \bar{I}/kT$, в зависимости от температуры и плотности, определяются путем решения уравнения (3.57)¹⁾.

Как показывает проверка, ошибка, связанная с приближенным вычислением сумм по m , весьма мала, во всяком случае заведомо меньше возможных ошибок, связанных с использованием приближения водородо-подобности при рассмотрении сложных ионов. Можно, однако, надеяться, что полученные формулы (5.55), (5.56) дают правильный порядок величины средних пробегов и верно описывают зависимость их от температуры и плотности газа.

Для иллюстрации численных значений средних пробегов в табл. 5.2 приведены результаты расчета для воздуха²⁾. К сожалению, зависимости $l(T, N)$ и $l_1(T, N)$ в широком диапазоне изменения переменных не удастся более или менее точно описать интерполяционной формулой степенного типа, очень удобной для практиче-

¹⁾ Заметим, что формулу (5.55) нельзя применять к случаю полной ионизации газа, когда связано-свободного поглощения нет (ср. с формулой (5.24)).

²⁾ В таблице, приведенной в работе [18], была допущена ошибка. Все значения пробегов l и l_1 были занижены ровно в 10 раз.

ских целей. В грубом приближении показатели степени в законе $l \sim T^\alpha N^{-\beta}$ таковы: $\alpha \sim 1,5-3$; $\beta \sim 1,6-1,9$.

Если проследить за зависимостью среднего пробега от температуры, начиная с низких температур, то окажется, что функция $l(T)$ имеет минимум.

Таблица 5.2. Средние пробеги излучения в воздухе в области многократной ионизации

T, К		$N/N_{\text{норм}};$ $N_{\text{норм}} = 5,34 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$		
		1	10^{-1}	10^{-2}
50 000	$\bar{m}$	1,4	1,85	2,35
	l , см	0,053	2,8	170
	l_1 , см	0,02	0,8	39
100 000	$\bar{m}$	2,72	3,47	4,1
	l , см	0,13	7	470
	l_1 , см	0,05	2	110
250 000	$\bar{m}$	4,85	5,15	5,2
	l , см	0,72	61,5	6000
	l_1 , см	0,24	15,6	1200
500 000	$\bar{m}$	5,2	5,4	5,85
	l , см	6,8	610	50 000
	l_1 , см	2,0	140	9 500

В области однократной ионизации, при $kT \ll I_1$, $l \sim e^{I_1/kT}$ (см. формулу (5.46)), т.е. очень быстро уменьшается с увеличением температуры. Пробег становится минимальным в области, где начинается вторая ионизация (в воздухе при $T \sim 20\,000-40\,000$ К). После этого он возрастает при росте температуры, сначала медленнее, чем $T^{7/2}$, а потом, при полной ионизации, когда остается только тормозной механизм, пропорционально $T^{7/2}$ (см. формулы (5.24)). Следует отметить, что возрастание росселандова пробега не беспредельно: при очень малых поглощениях становится существенным рассеяние света (см. § 2 гл. II), которое не учитывалось в расчетах. Длина пробега для комптоновского рассеяния квантов, $h\nu \ll mc^2 = 500$ кэВ, в воздухе нормальной плотности равна 37 м. Это и есть верхний предел росселандова пробега при нормальной плотности воздуха. Подчеркнем, что характер зависимостей $l(T, N)$, $l_1(T, N)$ и порядок величины пробегов в области многократной ионизации для всех газов примерно одинаковы, так как потенциалы последовательных ионизации у всех элементов более или менее похожи друг на друга.

Оценим для примера лучеиспускательную способность и скорость лучистого охлаждения прозрачной частицы воздуха с размерами $R \ll l_1$. При $T = 50\,000$ К и $N = 10^{-2} N_{\text{норм}}$, $l_1 = 39$ см, $J = 4\sigma T^4/l_1 = 3,6 \cdot 10^{13}$ эрг/см³ · с. Внутренняя энергия воздуха в этих условиях $\varepsilon = 83$ эВ/атом. Начальный масштаб времени охлаждения, $\tau = N\varepsilon/J$, есть $\tau = 1,9 \cdot 10^{-6}$ с ($d(N\varepsilon)/dt = -J$).

Изложенный в этом параграфе метод вычисления средних пробегов излучения был несколько усовершенствован в работе [50].

В таблицах Н. М. Кузнецова [87] пробеги l и l_1 вычислены для воздуха по формулам (5.52), (5.53) на основе рассчитанного ионизационного состава.

§ 8а. Поглощение света в слабоионизованном газе. При небольших степенях ионизации коэффициент поглощения, соответствующий свободно-свободным переходам в поле ионов и связанно-свободным переходам, пропорционален квадрату электронной плотности $\kappa_\nu = \kappa'_\nu + \kappa''_\nu \sim N \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right) \sim N_e^2$. Поэтому при невысоких температурах и очень малых степенях ионизации на первый план выступают свободно-свободные переходы в поле нейтральных атомов, коэффициент поглощения для которых пропорционален первой степени электронной плотности $\kappa_{\nu n} \sim N N_e \sim e^{-I/2kT}$. Найдем приближенно этот коэффициент. Для этого воспользуемся формулой (5.13'') для сечения излучения и принципом детального равновесия (5.19). Получающийся в результате такого вычисления коэффициент истинного поглощения, рассчитанный на один электрон и один атом, можно представить в следующей форме:

$$a_{\nu n}(E) = a_{\nu k} \left[\frac{2}{3} \frac{E + h\nu}{E} \frac{E + h\nu}{h\nu} \frac{\sigma_{tr}(E + h\nu)}{\sigma_{tr}(E)} \right], \quad (5.57)$$

$$a_{\nu k} = \frac{e^2 v \sigma_{tr}(E)}{\pi m c v^2} \text{ см}^5,$$

где $E = mv^2/2$ — энергия электрона перед поглощением кванта. Эта формула была выведена в работе авторов [62] с целью изучения пробоя газов под действием лазерного луча (см. § 22 и 23). Выделенный в формуле множитель $a_{\nu k}$ представляет собою эффективный коэффициент поглощения электромагнитных волн в слабоионизованном газе, который следует из чисто классической теории [63]. В этой теории в уравнения Максвелла для поля подставляется решение в виде бегущей волны с комплексным значением волнового вектора. Мнимая часть вектора, которая описывает поглощение волны, выражается при этом через электропроводность среды. Затем с помощью кинетического уравнения Больцмана для электронов в поле определяется электропроводность слабоионизованного газа и таким образом появляется коэффициент поглощения энергии волны $a_{\nu k}$.

Очевидно, в пределе $h\nu/E \rightarrow 0$ квантовая теория должна приводить к классическим результатам. При таком переходе, однако, следует принять во внимание, что в классике не существует понятия «истинного» поглощения, которое является квантовым. В классической теории существует «эффективное» поглощение, которое определяется усредненной по столкновениям разностью между набором и отдачей энергии электрона под действием электромагнитной волны ¹⁾.

Эффективному поглощению в квантовой теории соответствует разность между истинным поглощением и вынужденным испусканием и именно этой величиной и следует оперировать при переходе к классическому пределу.

Согласно соотношению Эйнштейна для непрерывного спектра коэффициент переизлучения (вынужденного испускания) электрона с энергией $E' = E + h\nu$ равен

$$b_{\nu n}(E') = \frac{v}{v'} a_{\nu n}(E) = \sqrt{\frac{E}{E + h\nu}} a_{\nu n}(E). \quad (5.57')$$

¹⁾ Происходит ли при каждом данном столкновении набор или отдача энергии, зависит от соотношения направлений скоростей электрона до и после рассеяния и вектора электрического поля волны в момент рассеяния.

Эффективный коэффициент поглощения малых квантов $h\nu \ll E$ есть ¹⁾

$$a'_{\nu_{\text{н}}}(E) = a_{\nu_{\text{н}}}(E) - b_{\nu_{\text{н}}}(E) = a_{\nu_{\text{н}}}(E) = \sqrt{\frac{E - h\nu}{E}} a_{\nu_{\text{н}}}(E - h\nu).$$

Подставляя сюда $a_{\nu_{\text{н}}}$ по формуле (5.57) и переходя к пределу $h\nu/E \rightarrow 0$, получим

$$(a'_{\nu_{\text{н}}})_{h\nu/E \rightarrow 0} = \frac{a_{\nu k}}{3} [1 + 2d(\ln a_{\nu k} E)/d \ln E].$$

Отсюда видно, что предельная величина с точностью до численного множителя порядка единицы совпадает с классическим значением $a_{\nu k}$, а при $a_{\nu k}(E) = \text{const}$ ($\nu \sigma_{\text{тр}}(E) = \text{const}$) совпадение полное.

Расчеты показывают, что величина $a'_{\nu_{\text{н}}}(E)$ довольно близка к классической величине $a_{\nu k}$ и тогда, когда $h\nu$ не очень мало по сравнению с E . Таким образом, при приближенных расчетах в качестве исправленного на вынужденное испускание коэффициента поглощения в газе можно принять классическую величину

$$\kappa_{\nu_{\text{н}}} = N_a N_e a_{\nu k} = \frac{e^2 N_e}{\pi m c \nu^2} \nu_{\text{эф}}, \quad (5.57'')$$

где $\nu_{\text{эф}} = N_a \nu \sigma_{\text{тр}}$ — эффективная частота столкновений электрона с атомами ²⁾.

До недавнего времени формулой (5.57'') для коэффициента поглощения электромагнитных волн в слабоионизованном газе пользовались, в основном, применительно к радиодиапазону и микроволнам (сантиметровым волнам) [63]. Фактически же область применимости ее, и в особенности формул (5.57) и (5.57') для коэффициентов истинного поглощения и вынужденного испускания, шире. При энергиях электронов порядка нескольких электронвольт формулами можно пользоваться для оценки поглощения оптических частот, т.е. квантов с энергией порядка электронвольт. В частности, с помощью этих формул можно рассматривать поглощение в газах лазерного излучения в стадии развития пробоя (см. § 22 и 23). Значения коэффициента поглощения, которые дает полуклассическая формула (5.57), неплохо согласуются с результатами квантовомеханических расчетов для водорода, выполненных Чандraseкаром и Брином [16], а также Омура и Омура [88] ³⁾.

Сопоставим коэффициенты поглощения света при рассеянии электрона ионом и нейтральным атомом. По формулам (5.20) и (5.57)

$$\frac{a_{\nu \text{ ион}}(E)}{a_{\nu \text{ нейтр}}(E)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\pi a_0^2}{\sigma_{\text{тр}}(E')} \left(\frac{2I_{\text{H}}}{E'} \right)^2, \quad E' = E + h\nu.$$

Например, для водорода при $E = 1$ эВ, $h\nu = 2$ эВ, $\sigma_{\text{тр}} \ll 15\pi a_0^2$ [53] и $a_{\nu \text{ ион}}/a_{\nu \text{ нейтр}} \approx 10^4$.

¹⁾ Если усреднить эту величину по максвелловскому распределению электронов, получим обычный коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное испускание $a'_{\nu_{\text{н}}} = a_{\nu_{\text{н}}}(1 - e^{-h\nu/kT})$.

²⁾ Заметим, что если частота столкновений не мала по сравнению с круговой частотой света, то в коэффициентах $a_{\nu k}$, $\kappa_{\nu_{\text{н}}}$ появляется дополнительный множитель $\nu^2/[\nu^2 + (\nu_{\text{эф}}/2\pi)^2]$. Об этом уже шла речь в § 2а.

³⁾ Квантовомеханический подход имеется также в работе [17].

⁴⁾ Заметим, что по [16] для тех же примерно условий $\lambda = 5965$ Å, $h\nu = 2,08$ эВ, $T = 7200$ К, $\bar{a}_{\nu_{\text{н}}} = 2,5 \cdot 10^{-39}$ см⁵ и $a_{\nu \text{ ион}}/a_{\nu_{\text{н}}} = 12$; $a_{\nu \text{ ион}} = 3 \cdot 10^{-38}$ см⁵.

2. Линейчатый спектр атомов

§ 9. Классическая теория спектральных линий. Линейчатые спектры испускаются и поглощаются в результате связанно-связанных переходов в атомах (ионах), т. е. при переходах атома из одного энергетического состояния в другое.

В классической теории моделью излучающего атома является упруго связанный электрон, который совершает колебания около некоторого положения равновесия. В нулевом приближении, без учета потерь энергии на излучение, такая система представляет собой гармонический осциллятор. Поскольку колеблющийся электрон движется ускоренно, он излучает свет. Если потеря энергии за период одного колебания очень мала по сравнению с самой энергией колебаний W , то скорость излучения можно вычислить по общей формуле (5.1), подставив в нее ускорение гармонического осциллятора. Обозначим через ν_0 собственную частоту осциллятора. Если $\mathbf{r}$ — координата электрона, отсчитываемая от положения равновесия, то ускорение есть $\mathbf{w} = 4\pi^2\nu_0^2\mathbf{r}$. Средняя по времени скорость потери энергии электрона на излучение согласно (5.1) равна

$$\frac{dW}{dt} = -S = -\frac{32\pi^4}{3} \frac{e^2}{c^3} \nu_0^4 \langle \mathbf{r}^2 \rangle = -\frac{32\pi^4}{3} \frac{\nu_0^4}{c^3} \langle \mathbf{d}^2 \rangle, \quad (5.58)$$

где $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ — дипольный момент. Символ $\langle \rangle$ означает усреднение по времени. Выражая средний квадрат отклонения электрона $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ через энергию осциллятора W , получим энергию, излучаемую в 1 с:

$$S = -\frac{dW}{dt} = \frac{8\pi^2 e^2}{3mc^2} \nu_0^2 W = \gamma W. \quad (5.59)$$

Комбинация

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3mc^3} = 2,47 \cdot 10^{-22} \nu_0^2 \text{ с}^{-1} \quad (5.60)$$

представляет собой величину, обратную времени, в течение которого энергия осциллятора уменьшается в e раз (если начальная энергия осциллятора равна W_0 , то $W = W_0 e^{-\gamma t}$). Величина γ называется постоянной затухания.

Условие слабого затухания $\gamma \ll \nu_0$, лежащее в основе вывода формулы (5.58), всегда выполняется с большой точностью¹⁾. Так, например, для фиолетового света $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, $\nu = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ($h\nu = 3,1 \text{ эВ}$), а $\gamma = 1,4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$; $\tau = 1/\gamma = 0,7 \cdot 10^{-8} \text{ с}$.

Если учесть потери энергии на излучение, то в следующем приближении осциллятор совершает уже не гармонические, а затухающие колебания, амплитуда которых пропорциональна $\sqrt{W} = \sqrt{W_0} e^{-(\gamma t)/2}$. Следовательно, и излучается теперь не собственная частота ν_0 , а целый спектр частот. Чтобы найти спектральный состав излучения, нужно разложить в интеграл Фурье ускорение осциллятора (предполагается, что при $t < 0$ движения нет и $\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{w} = 0$). Энергия, излученная за все время в спектральном интервале $d\nu$, $S_\nu d\nu$, определится через фурье-компоненту ускорения по формуле (5.4). Вычисление, которое можно найти в книге [19], дает при $\nu - \nu_0 \ll \nu_0$:

$$S_\nu d\nu = \frac{2e^2\nu_0^2}{3mc^3} \frac{W_0}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} d\nu. \quad (5.61)$$

¹⁾ Привлекая квантовые понятия, это условие можно переписать в виде $\frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3mc^3} \ll \nu_0$;
 $h\nu_0 \ll \frac{3}{8\pi^2} \frac{hmc^2}{e^2} = \frac{3}{4\pi} \frac{hc}{2\pi e^2} mc^2 = \frac{3}{4\pi} \ll 137 \text{ } mc^2 = 163 \text{ МэВ}.$

Легко проверить, интегрируя это выражение по всему спектру от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$, что полная излученная энергия равна начальной энергии осциллятора:

$$\int_0^{\infty} S_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} S dt = \int_0^{\infty} \gamma W_0 e^{-\gamma t} dt = W_0.$$

Можно говорить об энергии, излучаемой осциллятором в частотном интервале $d\nu$ в 1 с. Эта величина равна $\gamma S_{\nu} d\nu$, причем в выражении (5.61) вместо W_0 следует в этом случае писать W — энергию осциллятора в данный момент времени.

Спектральное распределение излучения затухающего осциллятора, которое выражается формулой (5.61), изображено на рис. 5.8. Полуширина пика, так называемая естественная ширина, смысл которой ясен из рис. 5.8, равна $\Delta\nu = \gamma/2\pi$.

В шкале длин волн естественная ширина не зависит от длины волны и равна $\Delta\lambda = \frac{c\Delta\nu}{\nu_0^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{4\pi}{3} r_0 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$ ($r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ — «радиус электрона»).

Выше было рассмотрено самопроизвольное испускание света однажды возбужденным осциллятором. Пусть теперь на осциллятор извне падает монохроматическая световая волна частоты ν с неизменной во времени амплитудой. Под действием электрического поля волны упруго связанный электрон совершает вынужденные колебания. Если бы затухания не было, световая волна в течение непродолжительного времени после момента ее «включения» возбуждала бы осциллятор, сообщив ему определенную энергию, и после этого (в среднем по времени) больше не производила бы работы. Если же имеется затухание, вынужденные колебания сопровождаются непрерывным излучением энергии осциллятором. Эта энергия черпается за счет работы, производимой внешним полем.

Найдем работу, совершаемую периодическим полем световой волны над осциллятором. Решим для этого уравнение движения осциллятора:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m(2\pi\nu_0)^2\mathbf{r} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 e^{i2\pi\nu t}.$$

Здесь $\mathbf{E}_0$ — амплитуда напряженности электрического поля. Член $m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ учитывает «силу трения», связанную с затуханием. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{i2\pi\nu t}, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu\frac{\gamma}{2}}. \quad (5.62)$$

Работа, совершаемая внешней силой в 1 с, равна произведению силы на скорость $\dot{\mathbf{r}}$. Умножая уравнение движения на $\dot{\mathbf{r}}$ производя усреднение по времени, в результате чего члены $\langle \ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} \rangle$ и $\langle \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} \rangle$ исчезают, получим, что работа в 1 с равна

$$\langle e\mathbf{E}_0 e^{i2\pi\nu t} \dot{\mathbf{r}} \rangle = 2\pi^2 m\gamma\nu^2 |\mathbf{r}_0|^2. \quad (5.63)$$

Она определяется модулем комплексной величины $\mathbf{r}^2$.

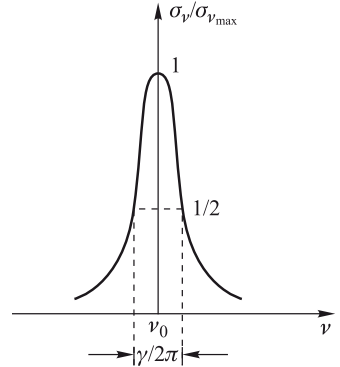


Рис. 5.8. Форма линии поглощения

Работа равна энергии, которая отбирается осциллятором от световой волны в 1 с, т.е. поглощается осциллятором.

Оставляя пока в стороне вопрос о дальнейшей судьбе поглощенной энергии, вычислим эффективное сечение поглощения. Оно, по определению, равно энергии, поглощаемой в 1 с, деленной на средний по времени поток энергии световой волны. Средний поток равен $\frac{c}{8\pi} \mathbf{E}_0^2$. Таким образом, получим эффективное сечение поглощения света частоты ν . При частотах ν , не слишком далеких от резонансной $|\nu - \nu_0| \ll \nu_0$, оно равно

$$\sigma_\nu = \frac{e^2}{mc} \frac{\gamma}{4\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}. \quad (5.64)$$

Если затухание колебаний осциллятора связано исключительно с излучением, то вся поглощенная энергия тратится на испускание света. В этом случае мы имеем дело, по существу, не с поглощением света, а с его рассеянием (в классической теории). Постоянная затухания при этом выражается формулой (5.60) ¹⁾.

Для эффективного сечения ослабления падающей световой волны осциллятором получим в этом случае по формуле (5.64)

$$\sigma_\nu = \frac{4,23 \cdot 10^{20}}{\nu_0^2} \frac{1}{1 + \xi^2} \text{ см}^2 = \frac{7,2 \cdot 10^{-9}}{(h\nu_B)^2} \frac{1}{1 + \xi^2} \text{ см}^2, \quad \xi = \frac{(\nu - \nu_0)}{(\gamma/4\pi)}. \quad (5.65)$$

В центре линии эффективное сечение равно $\sigma_{\nu \max} = \frac{3}{2\pi} \lambda^2$, или $\sigma_{\nu \max} = \frac{7,2 \cdot 10^{-9}}{(h\nu_B)^2} \text{ см}^2$ ($\lambda = c/\nu$ — длина волны света). Это сечение очень велико. Для видимого света $h\nu \sim 2-3$ эВ, $\sigma_{\nu \max} \sim 10^{-9} \text{ см}^2$, что соответствует длине пробега света $l \sim 10^{-10} \text{ см}$ при плотности атомов $N \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Возбужденный осциллятор может терять свою энергию и за счет столкновений атомов друг с другом. В этом случае поглощенная энергия световой волны частично переходит в тепло. Можно показать (см. [19]), что и в этом случае колебания осциллятора описываются формулой (5.62), но только под γ следует теперь понимать не естественную ширину линии (5.60), а сумму естественной ширины и величины $2/\tau_{\text{ст}}$, где $\tau_{\text{ст}}$ — среднее время между столкновениями, приводящими к «деактивации» осциллятора. Точно так же сохраняет свой вид и формула (5.64) для эффективного сечения поглощения, если под γ понимать полную ширину линии, уширенной за счет столкновений.

Судьба поглощенной энергии света определяется соотношением между естественной шириной γ и обратным временем между столкновениями $2/\tau_{\text{ст}}$. Если $\gamma \gg 2/\tau_{\text{ст}}$, что имеет место в очень разреженном газе, то поглощаемая энергия высвечивается (свет рассеивается); если же $\gamma \ll 2/\tau_{\text{ст}}$ — энергия переходит в основном в тепло (поглощение в буквальном смысле слова). Существуют и другие механизмы уширения спектральных линий в газе (см. об этом [10, 53, 54]).

Пусть в «атоме» имеется f_k осцилляторов с частотой ν_{0k} , а число атомов в 1 см^3 равно N . Полный коэффициент поглощения света частоты ν тогда равен

$$\kappa_\nu = N \sum_k f_k \sigma_{\nu k}. \quad (5.66)$$

¹⁾ Подставляя в (5.58) решение (5.62), получим $S = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (2\pi\nu)^4 \frac{|r_0^2|}{2}$. Приравнявая это выражение к (5.59), получим формулу (5.60) для постоянной затухания.

Обычно отдельные линии ν_{0k} находятся друг от друга на расстоянии гораздо большем, чем ширина линии. Подавляющую роль в поглощении света данной частоты играют осцилляторы с собственной частотой ν_0 , самой близкой к поглощаемой, и в сумме (5.66) остается фактически только один член. Поскольку линии чрезвычайно узкие, поглощаются, по существу, только частоты, очень близкие к собственным частотам осцилляторов: поглощение имеет селективный характер. Предположим, что на атомы падает сплошной спектр излучения с плотностью энергии U_ν , которая, как это обычно бывает, мало меняется в интервале частот порядка ширины линии. Полное количество энергии, поглощаемой в 1 с в 1 см³ осцилляторами с частотой ν_0 ,

равно $\int_0^\infty U_\nu d\nu c N \sigma_\nu f = U_\nu c N f \int_0^\infty \sigma_\nu d\nu$ (индекс k опущен). Поглощение на один атом

характеризуется величиной, получаемой путем интегрирования сечения (5.64). Для одной линии интеграл от сечения по частоте, т. е. площадь линии, равен

$$f \int_0^\infty \sigma_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f = 2,64 \cdot 10^{-2} f \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}. \quad (5.67)$$

Это есть константа, зависящая только от числа осцилляторов f и не зависящая от ширины линии. Поэтому, если линия уширена, например, за счет столкновений, то эффективное сечение теперь будет меньше, чем у линии с естественной шириной.

Поглощение света осциллятором зависит от частоты точно так же, как и излучение (ср. формулы (5.61) и (5.64)). Это находится в соответствии с принципом детального равновесия, выполнение которого легко проверить путем непосредственного вычисления¹⁾.

§ 10. Квантовая теория спектральных линий. Силы осцилляторов. Рассмотрим излучение и поглощение света с квантовомеханической точки зрения.

Между результатами квантовой и классической теорий имеется глубокий параллелизм. В нулевом приближении квантовой теории атома, соответствующем стационарным состояниям, возможны только строго определенные уровни энергии атома (аналогично постоянству энергии незатухающих колебаний классического осциллятора). В следующем приближении появляется возможность переходов между энергетическими состояниями атома. В силу нестационарности состояний, по принципу неопределенности уровни энергии (кроме основного) оказываются размытыми на величину $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$, где Δt — «время жизни» атома в рассматриваемом состоянии, равное обратной величине вероятности спонтанных переходов на более низкие уровни. Но размытие уровней приводит и к размытию линий на величину порядка $\Delta \nu \sim \Delta E/\hbar \sim 1/\Delta t$, т. е. порядка постоянной «затухания» $1/\Delta t$, как и в классической теории. Ширина n -го энергетического уровня равна, в соответствии со сказанным, сумме вероятностей переходов на все более низкие уровни:

$$\Gamma_n = \sum_{n'} A_{nn'}, \quad (5.68)$$

где $A_{nn'}$ (с⁻¹) — вероятность спонтанного перехода $n \rightarrow n'$, так называемый коэффициент Эйнштейна для испускания.

¹⁾ $\gamma S_\nu d\nu = U_\nu c d\nu \sigma_\nu$; это соотношение удовлетворяется, если подставить в качестве W и U_ν термодинамически равновесные значения энергии осциллятора (трехмерного) и плотности излучения, либо по классической теории: $W = 3kT$, $U_\nu = 8\pi\nu^2 kT/c^3$, либо по квантовой.

Квантовая механика дает для скорости излучения величину

$$S = h\nu_{nn'} A_{nn'} = \frac{64\pi^4}{3} \frac{\nu_{nn'}^4}{c^3} |\mathbf{d}|^2, \quad (5.69)$$

где $|\mathbf{d}|$ — матричный элемент дипольного момента. Выражение (5.69) очень похоже на классическое выражение (5.58); разница состоит лишь в замене среднего квадрата дипольного момента удвоенным квадратом матричного элемента того же момента. Численные значения вероятности излучения $A_{nn'}$ имеют такой же порядок, что и классическая «вероятность», т. е. постоянная затухания γ .

Матричный элемент $|\mathbf{d}|$ вычисляется для перехода между двумя вполне определенными квантовыми состояниями. В случае вырождения энергетических уровней можно интересоваться средней вероятностью перехода с одного уровня на другой. Для этого $|\mathbf{d}|^2$ следует просуммировать по конечным и усреднить по начальным состояниям. Если α, α' — квантовые числа (или наборы чисел), соответствующих уровням n, n' , то в общем случае вероятность перехода между уровнями есть

$$A_{nn'} = \frac{64\pi}{3} \frac{\nu_{nn'}^3}{hc^3} \left\{ \frac{1}{g_n} \sum_{\alpha, \alpha'} (n', \alpha' | \mathbf{d} | n, \alpha)^2 \right\}, \quad (5.69')$$

g_n — статистический вес n -го уровня. Можно интересоваться переходами между определенными группами состояний, принадлежащих данным уровням; например, в случае атома водорода — вероятностями переходов $n, l \rightarrow n', l'$ (l — орбитальное квантовое число). В этом случае суммировать в (5.69') следует только по магнитным числам m, m' (соответственно и g_n заменяется на g_n).

Таблица 5.3. Вероятности переходов в атоме водорода
в единицах 10^8 с^{-1}

Исходное состояние	Конечное состояние	$n = 1$	$n = 2$	Сумма	Время жизни, 10^8 с^{-1}
$2s$	np	—		0	
$2p$	ns	6,25		6,25	0,16
2	Среднее	4,69		4,69	0,21
$3s$	np	—	0,063	0,063	16
$3p$	ns	1,64	0,22	1,86	0,54
$3d$	np	—	0,64	0,64	1,56
3	Среднее	0,55	0,43	0,98	1,02

В табл. 5.3 приведены вероятности некоторых переходов в атоме водорода ¹⁾ (схему уровней см. на рис. 2.2 и 5.9). Зная коэффициенты вероятности $A_{nn'}$, легко подсчитать интенсивности соответствующих линий испускания. Именно, если N_n — число атомов в 1 см^3 , пребывающих в n -м возбужденном состоянии, которое можно вычислять по формуле Больцмана, то энергия, излучаемая в линии $\nu_{nn'}$ в 1 см^3 в 1 с, равна $N_n A_{nn'} h\nu_{nn'}$.

Принцип детального равновесия устанавливает связь между вероятностями поглощения и испускания света для данного перехода $n \rightleftharpoons n'$. Энергия, поглощаемая в 1 с

¹⁾ Эти данные взяты из книги Бете и Солпитера [5].

в 1 см^3 атомами, находящимися в состоянии n' с переходом их в n -е состояние, равна

$$\int U_\nu c d\nu \sigma_{\nu n'n} N_{n'} = N_{n'} U_\nu c \int \sigma_{\nu n'n} d\nu = N_{n'} U_\nu c h \nu_{nn} B_{n'n},$$

где $\sigma_{\nu n'n}$ — эффективное сечение поглощения частоты ν в пределах данного перехода $n' \rightarrow n$, а $B_{n'n}$ — коэффициент, характеризующий полное поглощение в данной линии (так называемый коэффициент Эйнштейна для поглощения). Он пропорционален «площади» линии:

$$B_{n'n} = \frac{1}{h \nu_{nn'}} \int \sigma_{\nu n'n} d\nu. \quad (5.70)$$

Умножая скорость поглощения на $(1 - e^{-h\nu/kT})$ для того, чтобы учесть вынужденное испускание (см. § 4 гл. II), приравнявая полученное выражение скорости испускания и подставляя плотность излучения U_ν по формуле Планка, а число атомов N_n — по формуле Больцмана, получим связь между коэффициентами Эйнштейна:

$$B_{n'n} = \frac{c^2}{8\pi h \nu_{nn'}^3} \frac{g_n}{g_{n'}} A_{nn'}. \quad (5.71)$$

Обычно принято характеризовать поглощательную способность атома в данной линии $\nu_{nn'}$, определяемую площадью линии $\int \sigma_{\nu n'n} d\nu$, числом классических осцилляторов с собственной частотой $\nu_{nn'}$, которые дали бы такой же эффект, что и рассматриваемый атом. Это число $f_{\text{полг } n'n}$ называется силой осциллятора для поглощения и теперь уже не является целым. Сравнивая площади линии по формулам (5.70) и (5.67) и имея в виду (5.60), найдем связь между силой осциллятора и коэффициентом Эйнштейна, которая, в сущности, является определением понятия силы осциллятора:

$$f_{\text{полг } n'n} = \frac{mc}{\pi e^2} h \nu_{nn'} B_{n'n}. \quad (5.72)$$

Наряду с $f_{\text{полг } n'n}$ вводится отрицательная сила осциллятора для излучения (переход $n \rightarrow n'$) по формуле

$$f_{\text{изл } nn'} = -\frac{g_{n'}}{g_n} f_{\text{полг } n'n} = -\frac{A_{nn'}}{3\gamma} \quad (5.73)$$

(последнее равенство получено из (5.72) с помощью (5.71)). Силы осциллятора можно выразить непосредственно через матричные элементы дипольного момента. При помощи (5.73), (5.69') и (5.60) найдем

$$g_{n'} f_{\text{полг } n'n} = -g_n f_{\text{изл } nn'} = \frac{8\pi^2 m \nu_{nn'}}{3e^2 c^3} \sum_{\alpha, \alpha'} (n', \alpha' | \mathbf{d} | n, \alpha)^2. \quad (5.73')$$

¹⁾ Заметим, что число f представляет собой среднюю силу осциллятора, рассчитанную на одну степень свободы электрона. Полная сила осциллятора вдвое больше в соответствии с тем, что электрон в атоме обладает тремя степенями свободы. Полная сила осциллятора для излучения $|3f_{\text{изл}}| = A_{nn'}/\gamma$ представляет собою отношение квантовой «постоянной затухания» (т. е. вероятности перехода $A_{nn'}$) к классической γ .

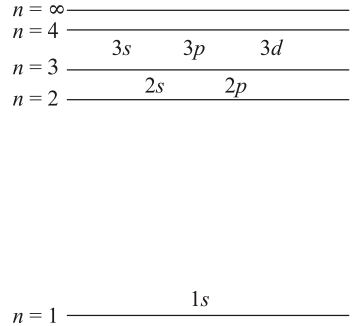


Рис. 5.9. Схема уровней атома водорода

Как видим, величины $g_n f_{nn'}$, где первый индекс у f соответствует начальному уровню, для излучения и поглощения одинаковы и, следовательно, симметричны относительно перестановки чисел, характеризующих начальный и конечный уровни.

В дальнейшем мы всегда будем пользоваться положительными силами осциллятора для поглощения, опуская при этом знак «погл» и обозначая первым индексом начальное состояние.

Что касается распределения поглощения по частоте в пределах линии, то квантовая теория приводит к такой же зависимости вероятности поглощения кванта от частоты, что и классическая формула для сечения σ_ν . Нормируя соответствующим образом эту вероятность, можно записать квантовую формулу для сечения поглощения в виде, аналогичном классической формуле (5.64) (переставим индексы n и n' , т.е. будем обозначать нижнее состояние, из которого совершается переход с поглощением кванта, через n : $f_{nn'}$, $n \rightarrow n'$, $E_{n'} > E_n$):

$$\sigma_{\nu nn'} = \frac{e^2}{mc} \frac{\Gamma_{nn'}}{4\pi} f_{nn'} \frac{1}{(\nu - \nu_{nn'})^2 + (\Gamma_{nn'}/4\pi)^2}. \quad (5.74)$$

Если подставить сюда значение $f_{nn'}$ по формуле (5.73), воспользовавшись выражением для γ , и учесть, что $c/\nu = \lambda$, то сечение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu nn'} &= \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \frac{g_n}{g_{n'}} A_{n'n} \frac{\Gamma_{nn'}}{4\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{nn'}/4\pi)^2} = \\ &= \sigma_{\nu nn' \max} \frac{(\Gamma_{nn'}/4\pi)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{nn'}/4\pi)^2}, \end{aligned}$$

где сечение в центре линии

$$\sigma_{\nu nn' \max} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{A_{n'n}}{\Gamma_{nn'}}.$$

Ширина линии (естественная) в квантовой теории складывается из суммарных вероятностей переходов (5.68): $\Gamma_{nn'} = \Gamma_n + \Gamma_{n'}^{(2)}$. В соответствии с определениями силы осциллятора и коэффициента Эйнштейна $B_{nn'}$ (5.72), (5.70), площадь линии равна

$$\int \sigma_{\nu nn'} d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f_{nn'} = 2,65 \cdot 10^{-2} f_{nn'} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Она совершенно не зависит от ширины линии $\Gamma_{nn'}$, в которую при наличии столкновений включается и член $2/\tau_{\text{ст}}$. Это представляется весьма естественным, так как площадь линии принципом детального равновесия однозначно связывается с вероятностью спонтанного испускания, которая, разумеется, не может зависеть от таких внешних причин, как столкновения атомов, и определяется только строением самого атома.

Обычно в реальном газе существует ряд причин, по которым спектральные линии расширяются: столкновения частиц, доплеровский эффект, штарк-эффект. Так, уширение за счет столкновений добавляет к естественной ширине линии γ величину, равную удвоенной вероятности столкновений $\gamma_{\text{ст}} = 2/\tau_{\text{ст}}$. Доплеровское уширение равно примерно $\Delta\nu = \nu \bar{v}/c$, где $\bar{v}$ — скорость теплового движения. Мы здесь на этом вопросе останавливаться не будем; см. [10, 53, 54].

²⁾ В ширины уровней Γ_n , $\Gamma_{n'}$ включаются также вероятности, соответствующие вынужденному испусканию. Эти члены пропорциональны плотности излучения и существенны только при достаточно больших плотностях.

§ 11. Спектр поглощения водородоподобных атомов. Замечания о влиянии линий наросселандов пробег. Пусть на газ из водородоподобных атомов (в частности, на атомарный водород) падает извне свет с непрерывным спектром, в котором представлены все частоты. Рассмотрим, какие из этих частот будут поглощаться атомами, пребывающими в определенном, n -м, состоянии, и какова интенсивность поглощения.

Атомы селективно поглощают частоты $\nu_{nn'}$, соответствующие переходам электрона с n -го уровня на более высокие возбужденные уровни $n' > n$. Имея в виду формулу (5.25) для энергии уровня, найдем связь этих частот с квантовыми числами n и n' , так называемую сериальную формулу Бальмера:

$$\nu_{nn'} = \frac{I_H Z^2}{h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = \nu_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad (5.75)$$

где $\nu_1 = I_H Z^2/h = \nu_R Z^2$. Частота $\nu_R = I_H/h = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ соответствует потенциалу ионизации атома водорода. Ее часто применяют в качестве единицы частоты, называя «ридбергом». При возрастании n' уровни и соответственно линии $\nu_{nn'}$ быстро сгущаются и в пределе $n' \rightarrow \infty$ переходят в континуум (непрерывный спектр), так как при поглощении частот, превышающих верхнюю границу серии $\nu_n = \nu_{n,\infty} = \nu_1/n^2$, происходит ионизация, и конечное состояние электрона попадает в непрерывный спектр энергий. Спектр поглощения с данного уровня атома n изображен на рис. 5.10 (там же для сопоставления приведена схема уровней). Для определенности положено $n = 1$, т. е. рисунок изображает спектр поглощения холодного газа из водородоподобных атомов, в котором все атомы находятся в основном состоянии. В нагретом газе имеются возбужденные уровни и спектр поглощения представляет собой совокупность серий, соответствующих поглощению атомами, находящимися в различных состояниях.

Вблизи верхней границы серии, где линии сильно сгущаются, начинается перекрывание отдельных линий. Это происходит, когда частотное расстояние между линиями, которое быстро уменьшается при $n' \rightarrow \infty$, становится сравнимым с шириной линий. Перекрыванию линий способствует их уширение за счет столкновений, доплеровского эффекта и т. д.

Обычно перекрывание атомных линий начинается при столь больших квантовых числах n' и настолько близко от верхней границы серии $\nu_n = \nu_{n,\infty}$, что вся эта частотная область перекрывающихся уровней очень узка и практически не играет никакой роли. В реальном атомарном газе ее и не существует из-за срезания верхних уровней за счет взаимодействия атомов и эффективного снижения потенциала ионизации.

Фактически перекрывание отдельных линий может возникать только, при поглощении света молекулами, где число линий гораздо больше, чем в атомах, и они расположены гораздо ближе друг к другу (см. об этом ниже).

Рассмотрим переходы $n \rightarrow n'$ с поглощением света между высокими уровнями с большими квантовыми числами. Движение электрона на таких уровнях квазиклас-

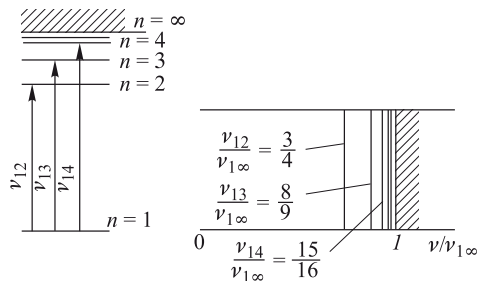


Рис. 5.10. Спектр поглощения света атомом водорода, находящимся в основном состоянии. Слева — схема переходов

сично, и поглощение света, сопровождающееся переходами $n \rightarrow n'$ с $n, n' \gg 1$, можно изучать, пользуясь полуклассическими представлениями.

В спектральной области, соответствующей переходам с $n, n' \gg 1$, где линии расположены очень часто и почти перекрываются, представляется естественным сгладить зависимость эффективного сечения поглощения от частоты путем введения усредненного сечения. Усреднение должно производиться таким образом, чтобы суммарная площадь линий, которая характеризует ослабление потока внешнего излучения с непрерывным спектром, оставалась неизменной.

Рассмотрим небольшой спектральный интервал от ν до $\nu + \Delta\nu$ такой, что в нем содержится много линий, но эти линии мало отличаются друг от друга. Кроме того, предположим, что интервал $\Delta\nu$ гораздо больше ширины отдельной линии. Эффективное сечение поглощения частоты ν атомами, находящимися в n -м состоянии, равно $\sigma_{\nu n} = \sum_{n'} \sigma_{\nu nn'}$.

Произведем усреднение сечения в интервале $\Delta\nu$:

$$\int_{\nu}^{\nu+\Delta\nu} \sigma_{\nu n} d\nu = \bar{\sigma}_{\nu n} \Delta\nu = \sum_{n'} \int \sigma_{\nu nn'} d\nu = \sum_{n'} \frac{\pi e^2}{mc} f_{nn'}.$$

Усредним также и силы осцилляторов, определив среднее для данного интервала $\Delta\nu$ значение $f_{nn'} = \overline{f_{nn'}} = f_n(\nu)$. Если в интервале частот от ν до $\nu + \Delta\nu$ содержатся линии, соответствующие конечным состояниям от n' до $n' + \Delta n'$, число которых равно $\Delta n'$, то среднее сечение можно записать в виде

$$\bar{\sigma}_{\nu n} = \frac{\pi e^2}{mc} f_n(\nu) \frac{\Delta n'}{\Delta\nu}. \quad (5.76)$$

Число линий, приходящихся на единичный спектральный интервал, можно вычислить путем дифференцирования формулы Бальмера (5.75):

$$\frac{\Delta n'}{\Delta\nu} = \left(\frac{d\nu_{nn'}}{dn'} \right)^{-1} = \left(\frac{2\nu_1}{n'^3} \right)^{-1}. \quad (5.77)$$

В § 4 мы нашли эффективное сечение для связанно-свободных переходов, расширяя классическое выражение для эффективного излучения при свободно-свободных переходах на случай, когда одно из состояний попадает в дискретный спектр. Оправданием для такой операции послужили те соображения, что в состояниях с большими квантовыми числами n движение электрона квазиклассично и что движение по «эллиптической» орбите, соответствующей большому n и малой отрицательной энергии, весьма близко к движению по «гиперболической» орбите с малой положительной энергией. Сделаем еще один шаг и рассмотрим в том же приближении случай, когда оба состояния находятся в дискретном спектре с большими квантовыми числами.

Рассмотрим переходы с n -го уровня при поглощении кванта в рамках тех же полуклассических представлений. При увеличении частоты электрон в конечном состоянии попадает на «эллиптические» орбиты, все более приближающиеся к параболической, при $\nu = \nu_n$ попадает на параболическую, а при частоте ν , лишь немного превышающей ν_n , — на «гиперболические», близкие к параболической. Поскольку движение электрона в конечном состоянии меняется непрерывным образом, следует ожидать, что и среднее эффективное сечение поглощения света атомами в n -м состоянии, $\bar{\sigma}_{\nu n}$, также будет непрерывно при переходе от дискретного спектра к континууму (рис. 5.11).

Распространим выражение (5.34) для сечения фотоионизации с n -го уровня на поглощение частот, несколько меньших границы фотоионизации — ν_n ¹⁾, и приравняем сечение (5.34) выражению для среднего сечения в случае связанно-связанных переходов (5.76).

Вспоминая определение потенциала ионизации атома водорода I_H по формуле (5.25) и выражение для частотной границы серии $\nu_n = \nu_1/n^2$ (см. (5.75)), найдем среднюю силу осциллятора $f_n(\nu)$ для перехода с n -го уровня на один из n' -уровней, заключенных в узком интервале $\Delta n'$, $\Delta \nu$. Обозначая ее через $f_{nn'}$, а частоту ν через $\nu_{nn'}$, получим

$$f_{nn'} = \frac{16}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n^5} \left(\frac{\nu_1}{\nu_{nn'}} \right)^2 \frac{1}{\nu_{nn'}} \frac{\Delta \nu}{\Delta n'}.$$

Подставляя сюда среднее расстояние между уровнями $\Delta \nu/\Delta n'$, вычисленное по формуле (5.77), и заменяя частоту перехода $\nu_{nn'}$ по формуле Бальмера (5.75), получим окончательно силу осциллятора $f_{nn'}$ для перехода $n \rightarrow n'$:

$$f_{nn'} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n^5} \frac{1}{n'^3} \frac{1}{(1/n^2 - 1/n'^2)^3}. \quad (5.78)$$

Для переходов на уровни $n' \gg n$ найдем асимптотическую формулу:

$$f_{nn'} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{n}{n'^3} = \frac{1,96n}{n'^3}, \quad n' \gg n. \quad (5.79)$$

По самому своему выводу величина $f_{nn'}$ представляет собою среднюю силу осциллятора для перехода с какого-либо состояния l , m при данном n в любое из состояний l' , m' уровня n' .

При этом правила отбора для дипольных переходов здесь автоматически учтены (разумеется, приближенно) благодаря тому, что мы исходим из классической формулы для дипольного излучения. Как видим, величина $g_n f_{nn'} = 2n^2 f_{nn'}$ симметрична относительно перестановки n и n' в соответствии со сказанным в § 10.

В табл. 5.4 представлены силы осцилляторов для некоторых переходов: в атоме водорода, рассчитанные квантовомеханическим путем [5].

Замечательно, что полуклассические формулы (5.78), (5.79), выведенные для случая $n, n' \gg 1$, дают неплохую оценку даже для переходов между уровнями с небольшими квантовыми числами, в том числе и для переходов с основного уровня. Например, полуклассические значения $f_{12} = 0,585$, $f_{13} = 0,104$, асимптотическое $f_{1n'} = 1,96 n'^{-3}$, а по таблице $f_{12} = 0,416$, $f_{13} = 0,079$, асимптотическое $f_{1n'} = 1,6 n'^{-3}$. Мы здесь сталкиваемся с таким же положением, как и при сопоставлении полуклассического и квантового сечений фотоионизации с основного уровня водородоподобного атома.

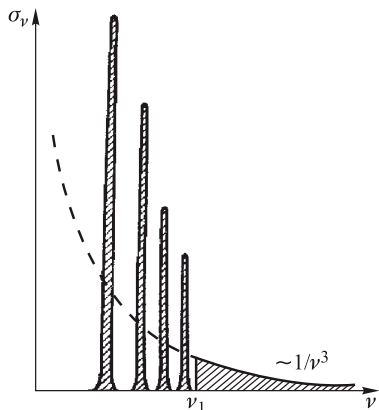


Рис. 5.11. Эффективное сечение поглощения света атомом водорода из основного состояния. Переход дискретного спектра в континуум. Пунктиром показано усредненное по линиям сечение в области дискретного спектра. Рисунок схематический

¹⁾ Подобно тому как мы распространили в § 4 выражение для эффективного тормозного излучения на частоты, несколько превышающие максимально возможную при свободно-свободном переходе и, таким образом, описали фотозахват.

Таблица 5.4. Силы осцилляторов для атома водорода¹⁾

Исходное состояние	1s	2s	2p	
Конечное состояние	np	np	ns	nd
n = 1	—	—	−0,139	—
n = 2	0,4162	—	—	—
n = 3	0,0791	0,425	0,014	0,694
n = 4	0,0290	0,102	0,0031	0,122
n = 5	0,0139	0,042	0,0012	0,044
n = 6	0,0078	0,022	0,0006	0,022
n = 7	0,0048	0,013	0,0003	0,012
n = 8	0,0032	0,008	0,0002	0,008
Сумма от n = 9 до ∞	0,0101	0,026	0,0007	0,053
Асимптотическая формула	$1,6 \cdot n^{-3}$	$3,7 \cdot n^{-3}$	$0,1 \cdot n^{-3}$	$3,3 \cdot n^{-3}$
Линейчатый спектр	0,5641	0,638	−0,119	0,923
Непрерывный спектр	0,4359	0,362	0,008	0,188
Сумма	1,000	1,000	−0,111	1,111

¹⁾Отрицательные силы осцилляторов соответствуют переходам с испусканием кванта.

При некоторых условиях линии поглощения атомов могут оказывать заметное влияние на средний росселандов пробег. Основной вклад в пробег вносят спектральные участки с малым коэффициентом непрерывного поглощения, находящиеся

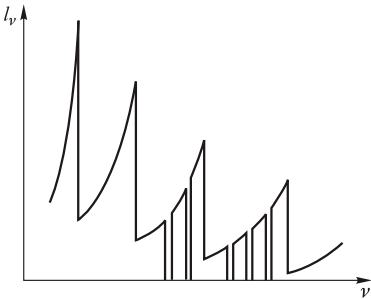


Рис. 5.12. К вопросу о влиянии линий на величину пробега

в области максимума весовой функции (см. § 7, рис. 5.7). Это — участки, предшествующие границам серий, т.е. началам соответствующих континуумов. На них накладываются спектральные линии. Поскольку поглощение в центрах линий обычно очень велико, из интеграла по спектру практически вырезаются соответствующие частотные участки, как показано на рис. 5.12. Если линии узкие, ширина вырезаемых участков очень мала. Однако в газе достаточно большой плотности, где линии сильно уширены, вырезаемые участки и снижение росселандова пробега могут оказаться весьма значительными.

Согласно вычислениям Л. М. Бибермана и А. Н. Лагарькова [51], в водороде при плотностях 10^{17} – 10^{19} атом/см³ и температурах 12 000–20 000 К поглощение в линиях может снижать росселандов пробег в два-четыре раза по сравнению с пробегом, рассчитанным без учета линий.

§ 12. Силы осцилляторов для континуума. Теорема сумм. В предыдущих параграфах мы видели, что вероятности переходов между дискретными уровнями атома с поглощением световых квантов характеризуются силами осцилляторов. Силой осциллятора определяется площадь линии поглощения, т.е. интеграл по частотам от эффективного сечения поглощения света частоты ν в данной линии.

По аналогии можно ввести понятие силы осциллятора и для связанно-свободных переходов, характеризуя величиной f_n интеграл по частотам от эффективного сечения поглощения света с переходом электрона с n -го уровня атома в непрерывный спектр. Если $\sigma_{\nu n}$ — эффективное сечение связанно-свободного поглощения частоты ν при таком переходе, то

$$\int_{\nu_n}^{\infty} \sigma_{\nu n} d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f_n, \quad (5.80)$$

причем интегрирование по частотам ведется от наименьшей частоты ν_n , при которой возможен переход в непрерывный спектр.

Вычислим силу осциллятора f_n для связанно-свободного поглощения водородоподобными атомами.

Воспользовавшись полуклассической формулой (5.34) для $\sigma_{\nu n}$ и замечая, что $\nu_n = I_H Z^2 / h n^2$, получим после интегрирования

$$f_n = \frac{8}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} = \frac{0,49}{n}. \quad (5.81)$$

Результаты квантовомеханического расчета для атома водорода представлены в табл. 5.4. Например, для $n = 1$ точное значение $f_1 = 0,436$, а по формуле (5.81) $f_1 = 0,49$.

В классической теории каждый электрон, участвующий в излучении и поглощении света, заменяется осциллятором. Сумма чисел осцилляторов, следовательно, равна просто числу электронов в атоме. Квантовым аналогом этого положения является теорема о сумме сил осцилляторов, согласно которой сумма $\sum_{n'} f_{nn'}$ по всем возможным переходам в атоме из данного состояния n равна числу электронов. Если ограничиваться только переходами с участием внешних, оптических электронов, то сумма равна числу последних. В частности, в случае водородоподобного атома сумма равна единице. В сумму по конечным состояниям включаются и переходы в непрерывный спектр, т.е. член f_n , который, как мы увидим ниже, можно представить в виде интеграла по конечным состояниям непрерывного спектра. Кроме того, в сумму включаются и отрицательные члены, соответствующие переходам на более низкие уровни $n' < n$, т.е. переходам с испусканием света (см. об этом работу [5]). Данные табл. 5.4, разумеется, удовлетворяют правилу сумм, что можно проверить путем непосредственного вычисления.

При описании связанно-свободных переходов (континуума), а также связанно-связанных переходов между густо расположенными уровнями в полосатых спектрах молекул (квазиконтинуума) часто пользуются понятием дифференциальной силы осциллятора или силы осциллятора, рассчитанной на единичный интервал частот. Формально дифференциальная сила осциллятора $df/d\nu$ определяется следующим образом. Если σ_ν — сечение поглощения частоты ν при переходе с n -го уровня, то

$$\sigma_{\nu n} = \frac{\pi e^2}{mc} \left(\frac{df}{d\nu} \right)_n = 2,64 \cdot 10^{-2} \left(\frac{df}{d\nu} \right)_n \text{ см}^2 = 8 \cdot 10^{-18} \left[\frac{df}{d(\nu/\nu_R)} \right]_n \text{ см}^2 \quad (5.82)$$

(ν/ν_R — это частота, измеренная в ридбергах). Отсюда полная сила осциллятора для всего континуума определяется как

$$\int_{\nu_n}^{\infty} d_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} \int_{\nu_n}^{\infty} \left(\frac{df}{d\nu} \right)_n d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f_n \quad (5.83)$$

в соответствии с формулой (5.80).

Вычислим дифференциальную силу осциллятора для связанно-свободного поглощения с n -го уровня водородоподобного атома. Сравнивая формулу (5.34) с определением (5.82), найдем

$$\left(\frac{df}{d\nu}\right)_n = \frac{16}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} \frac{\nu_n^2}{\nu^3} = \frac{0,98}{n} \frac{\nu_n^2}{\nu^3}, \quad \nu_n = \frac{I_H Z^2}{hn^2}. \quad (5.84)$$

Интегрируя это выражение по ν от ν_n до ∞ , придем к формуле (5.81).

Если спектр поглощения представляет собой совокупность многих линий, то под сечением $\sigma_{\nu n}$ следует понимать среднее сечение $\bar{\sigma}_{\nu n}$ (см. формулу (5.76)), и дифференциальная сила осциллятора равна средней силе осциллятора одного перехода, помноженной на число линий в единичном интервале частот:

$$\left(\frac{df}{d\nu}\right)_n = f_n(\nu) \frac{\Delta n'}{\Delta \nu} = f_n(\nu) \frac{dn'}{d\nu} = f_{nn'} \frac{dn'}{d\nu}. \quad (5.85)$$

В табл. 5.5, взятой из книги Унзоляда [10], приведены силы осцилляторов атомов водорода и щелочных металлов для непрерывного спектра, соответствующего поглощению с основного уровня. Там же стоят и значения дифференциальной силы осцилляторов у границы поглощения $(df/d\nu)_\nu$ при $\nu = \nu_n$ (ν измеряется в ридбергах).

Таблица 5.5. Силы осцилляторов f для непрерывного спектра и дифференциальная сила $df/d\nu$ у границ главной серии

Атом	$\lambda_{\text{гран}}, \text{\AA}$	f	$df/d\nu$	$I, \text{эВ}$
H	912	0,436	0,78	13,5
Li	2281	0,24	0,46	5,4
Na	2442	0,0021	0,038	5,05
K	2857		0,0024	4,32

Эти данные получены путем квантовомеханических расчетов. Они показывают степень «неводородоподобности» атомов щелочных металлов.

§ 13. Излучение спектральных линий. Рассмотрим спонтанные радиационные переходы в атоме водорода и вычислим приближенно средние вероятности переходов с уровня n на лежащий ниже уровень n' . Будем исходить из общего выражения (5.73) вероятности через силу осциллятора для поглощения $n' \rightarrow n$:

$$A_{nn'} = 3\gamma \frac{g_{n'}}{g_n} f_{n'n} = \frac{8\pi^2 e^2}{mc^3} \nu_{nn'}^2 \frac{n'^2}{n^2} f_{n'n}.$$

Подставим сюда $f_{n'n}$ по формуле (5.78), предварительно поменяв в ней номера n и n' в соответствии с тем, что теперь числом n обозначается верхний уровень.

Подставляя также частоту перехода $\nu_{nn'} = \nu_1 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, где $\nu_1 = I_H/h$, получим

$$A_{nn'} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_1^2}{mc^3} \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n^5 n'^3 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1,6 \cdot 10^{10}}{n^3 n' (n^2 - n'^2)} \text{ с}^{-1}.$$

Эта формула с хорошей точностью описывает переходы не только при больших n, n' , но и между сравнительно низкими уровнями и даже переход в основное состояние. В этом можно убедиться, если сравнить результаты вычислений с точными

квантовомеханическими значениями [5], приведенными частично в табл. 5.3 ($A_{nn'}$ надо сравнивать с представленными в таблице средними вероятностями). Например, $A_{51 \text{ приб}} = 5,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, а $A_{51 \text{ точн}} = 4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $A_{21 \text{ приб}} = 6,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, $A_{21 \text{ точн}} = 4,7 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

Рассмотрим зависимость вероятности перехода с данного высокого уровня $n \gg 1$ от числа n' конечного уровня. Для переходов на нижние уровни $n' \ll n$ приближенно

$$A_{n,n' \ll n} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{10}}{n^5 n'} \text{ с}^{-1}.$$

В частности, вероятность прямого перехода в основное состояние

$$A_{n,1} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{10}}{n^5} \text{ с}^{-1} \quad ^1).$$

Для переходов на близкие уровни с $n' = n - \Delta n$, $\Delta n \ll n$

$$A_{n,n-\Delta n} \approx \frac{0,8 \cdot 10^{10}}{n^5 \Delta n} \text{ с}^{-1}.$$

В зависимости от n' , $A_{nn'}$ проходит через минимум при $n' = n/\sqrt{3}$, равный

$$A_{\min} = A_{n,n/\sqrt{3}} = \frac{4,15 \cdot 10^{10}}{n^5 n} \text{ с}^{-1}.$$

Итак, для атома, находящегося на n -м уровне ($n \gg 1$), в среднем наиболее вероятен переход прямо в основное состояние $n' = 1$ с полной дезактивацией. Вероятны также переходы в первое возбужденное ($n' = 2$) и ближайшее ($n' = n - 1$) состояния:

$$A_{n,2} = A_{n,n-1} = \frac{1}{2} A_{n,1}.$$

Переходы в промежуточные между нижними и соседним состояниями менее вероятны. Разумеется, близкие по вероятности переходы в нижние и соседнее состояния совершенно не равноценны по своему эффекту. При переходе на соседний уровень излучается очень малый квант и энергия атома изменяется совсем мало, тогда как при переходе в основное состояние излучается большой квант и энергия атома изменяется сильно.

¹⁾ Этот результат весьма близок к тому, что дают точные квантовомеханические расчеты. В основное состояние $1s$ могут переходить атомы, находящиеся только в p -состояниях. Для больших n вероятность перехода $A_{np,1s}$ равна [5]

$$A_{np,1s} = \frac{8 \cdot 10^9 \cdot 2^8 n(n-1)^{2n-2}}{9(n+1)^{2n+2}} \text{ с}^{-1}.$$

Легко видеть, что в пределе $n \gg 1$ эта величина приближенно равна $A_{np,1s} = \frac{8 \cdot 10^9 \cdot 2^8}{9n^3 e^4}$. Средняя вероятность перехода $n \rightarrow 1$ равна произведению вероятности перехода $np \rightarrow 1s$ на вероятность того, что, обладая энергией E_n , атом находится именно в p -состоянии ($l = 1$), т. е.

$$A_{n1} = \frac{2l+1}{n^2} A_{np,1s} = \frac{3}{n^2} A_{np,1s}.$$

Это дает

$$A_{n1} = \frac{1,29 \cdot 10^{10}}{n^5},$$

что весьма близко к квазиклассическому значению.

Казалось бы, превращение энергии атома в излучение при очень высокой степени возбуждения, когда движение оптического электрона квазиклассично, можно описывать на основе классической электродинамики. Если вычислить по формуле (5.1) скорость излучения электрона, вращающегося по круговой орбите вокруг иона, то получим

$$S = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{класс}} = \frac{32}{3} \frac{E^4}{m^2 c^3 e^2},$$

где E — энергия связи электрона в атоме (изменение энергии связи равно изменению полной энергии электрона).

Эта величина dE/dt оказывается в $\pi\sqrt{3}/4 = 1,35$ раза больше квантовой скорости изменения энергии электрона, соответствующей радиационному переходу только на соседний уровень; $(dE/dt)_{n,n-1} = h\nu_{n,n-1}A_{n,n-1}$, где $n = \sqrt{I_H/E}$. Между тем основной вклад в действительную скорость излучения dE/dt дает переход в основное состояние $(dE/dt)_{n,1} = h\nu_{n,1}A_{n,1}$, который классическая электродинамика описать не может ¹⁾.

Зная вероятности переходов (и распределение атомов по состояниям возбуждения), можно вычислить лучеиспускательную способность газа, связанную с излучением в линиях:

$$J = \sum_{n=1}^{n^*} N_n \sum_{n' < n} h\nu_{nn'} A_{nn'},$$

где N_n — число атомов в 1 см^3 в n -м состоянии; n^* — квантовое число наивысшего из реализующихся состояний, которое определяется срезанием верхних уровней атомов в газе.

Излучение в линиях играет важную роль в потерях энергии оптически тонкого тела. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что площадь линий поглощения сравнима с площадью поглощения в непрерывном спектре. Например, для поглощения с основного уровня атома водорода примерно половина сил осцилляторов принадлежит непрерывному спектру, а половина — дискретному (см. табл. 5.4).

Если тело в линиях непрозрачно, относительная роль потерь энергии на излучение в дискретном спектре уменьшается из-за самопоглощения. Однако в газе достаточно большой плотности, где линии сильно уширены, потери энергии за счет дискретного спектра все равно могут быть значительными и даже превышать потери в непрерывном спектре (если излучение в непрерывном спектре не планковское). В разреженном, но оптически толстом для линий, газе энергетическая роль линий,

¹⁾ Тем не менее, классическая электродинамика дает разумную оценку для времени жизни атома по отношению к полной радиационной дезактивации, под которой в рамках классической теории следует понимать «радиационное падение электрона на центр»:

$$\tau_{\text{класс}} = \int_{E_0}^{\infty} \frac{dE}{(dE/dt)_{\text{класс}}} = 1,6 \cdot 10^{-11} \left(\frac{I_H}{E_0} \right)^3 \text{ с},$$

где E_0 — энергия связи в «начальном» состоянии. Квантовое время жизни по отношению к дезактивации (без учета каскадных переходов)

$$\tau_{\text{квант}} \approx \frac{1}{A_{n,1}} = 6,2 \cdot 10^{-11} n_0^5 = 6,2 \cdot 10^{-11} \left(\frac{I_H}{E_0} \right)^{2,5} \text{ с}.$$

Обычно E_0 не меньше kT , а I_H/kT — не чрезмерно большая величина, так что оба времени оказываются одного порядка.

определяемая их малой суммарной шириной, обычно невелика и основную роль играет непрерывный спектр.

Расчеты, показывающие сравнительную роль излучения в линиях и в непрерывном спектре при разных плотностях, температурах и оптических толщинах, проделаны в работах [49] (для водорода) и [52] (для азота).

3. Полосатый спектр молекул

§ 14. Энергетические уровни двухатомных молекул. Поглощение света молекулами имеет смысл рассматривать при температурах ниже 12 000—8000 К, так как при более высоких температурах молекулы полностью диссоциируют на атомы.

Энергия атома определяется только его электронным состоянием. Энергия молекулы, помимо электронного состояния, зависит еще и от интенсивности колебательного и вращательного движений. Поэтому число энергетических уровней и число возможных переходов между ними у молекул гораздо больше, чем у атомов; молекулярные спектры значительно сложнее, чем атомные. Иногда отдельные линии в спектре расположены настолько близко друг к другу и число их столь велико, что в некоторых участках они образуют почти непрерывный спектр. При высоких температурах или плотностях газа линии из-за сильного уширения могут даже перекрываться. Поэтому полосатые молекулярные спектры излучения и поглощения в некоторых условиях оказывают существенное энергетическое влияние, аналогично непрерывным спектрам. Большое значение имеют молекулярные спектры для поглощения и испускания света в воздухе при температурах порядка нескольких тысяч и десятка тысяч градусов.

Мы рассмотрим простейший и вместе с тем практически важный случай двухатомных молекул. В первом приближении электронное, колебательное и вращательное движения в молекуле происходят независимо друг от друга и полную энергию молекулы можно представить в виде суммы соответствующих слагаемых. При не слишком интенсивных колебаниях последние близки к гармоническим и энергия их равна

$$E_{\text{кол}} = hc\omega_e(v + 1/2), \quad (5.86)$$

где $\omega_e = \nu_{\text{кол}}/c$ — волновое число, измеряемое в см^{-1} (обычно в спектроскопии принято пользоваться вместо частот ν (с^{-1}) волновыми числами $1/\lambda = \nu/c$ (см^{-1})¹); $v = 0, 1, 2, \dots$ — колебательное квантовое число. Энергия вращательного движения характеризуется вращательным квантовым числом $J = 0, 1, 2, \dots$ и моментом инерции молекулы I :

$$E_{\text{вр}} = \frac{h^2 J(J+1)}{8\pi^2 I} = hcB_e J(J+1), \quad (5.87)$$

где $B_e = h/8\pi^2 cI$ — константа вращения, измеряемая в см^{-1} .

Таким образом, если U_e — электронная энергия в данном состоянии, то в первом приближении полная энергия молекулы равна²)

$$E = U_e + hc\omega_e\left(v + \frac{1}{2}\right) + hcB_e J(J+1). \quad (5.88)$$

¹) Волновому числу 1 см^{-1} соответствуют: длина волны $\lambda = 10^8 \text{ Å}$, частота $\nu = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, энергия кванта $h\nu = 1/8067 \text{ эВ}$, $h\nu/k = 1,44 \text{ К}$.

²) Вращательная энергия в формулах (5.87), (5.88) определена с точностью до постоянной, зависящей от типа связи между вращательным и электронным состояниями; от типа связи зависит и точный смысл вращательного квантового числа. Постоянная имеет порядок hcB_e и ее можно включить в U_e , записав энергию в форме (5.88); см. об этом в книгах [20].

В следующих приближениях к выражению (5.88) добавляются члены, учитывающие ангармоничность колебаний, взаимодействие колебаний с вращением и т. д. (см. [20, 41]); на этом мы останавливаться не будем.

Волновые числа испускаемого или поглощаемого излучения $1/\lambda = \nu/c$ (в спектроскопии о них иногда говорят как о «частоте», измеряя «частоту» в см^{-1}) определяются разностью энергий начального и конечного состояний. В дальнейшем верхнее состояние всегда будет обозначаться одним штрихом, а нижнее — двумя

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E' - E''}{hc} = \left[\frac{U'_e - U''_e}{hc} \right] + \left[\omega'_e \left(v' + \frac{1}{2} \right) - \omega''_e \left(v'' + \frac{1}{2} \right) \right] + [B'_e J'(J' + 1) - B''_e J''(J'' + 1)]. \quad (5.89)$$

Между разностями электронных, колебательных и вращательных энергий (масштабом последних двух являются величины $hc\omega_e$ и hcB_e) всегда существует соотношение

$$\Delta E_{\text{эл}} \gg \Delta E_{\text{кол}} \gg \Delta E_{\text{вр}}; \quad 1/\lambda_{00} \gg \omega_e \gg B_e, \quad (5.90)$$

где $1/\lambda_{00} = \left(U'_e + \frac{\omega'_e}{2} - U''_e - \frac{\omega''_e}{2} \right) / hc$ — волновое число, соответствующее электронному переходу в отсутствие колебаний и вращений. В справедливости неравенств (5.90) можно убедиться, рассматривая табл. 5.6, в которой представлены спектроскопические

Рис. 5.13. Схема энергетических уровней и переходов в двухатомной молекуле. Вертикальными линиями показаны различные полосы

константы важнейших состояний и переходов в молекулах O_2 , N_2 , N_2^+ , NO ¹⁾.

Схема уровней молекулы имеет вид, изображенный на рис. 5.13. Пунктиром указаны электронные энергии уровней A и B . Первые фактические уровни молекулы, соответствующие отсутствию колебаний ($v = 0$), лежат несколько выше из-за нулевой энергии колебаний. Каждому электронному состоянию соответствует множество колебательных уровней, а каждому из колебательных в свою очередь множество вращательных. Колебательные уровни при росте возбуждения несколько сгущаются вследствие ангармоничности и в пределе $v \rightarrow \infty$ переходят в континуум, соответствующий диссоциации. Вращательные уровни, наоборот, раздвигаются при росте J (при не слишком больших числах J , когда справедливо приближение (5.87) ²⁾).

¹⁾ Различные электронные состояния молекулы отличаются формами потенциальных кривых, описывающих взаимодействие атомов в зависимости от междядерного расстояния, а также средними междядерными расстояниями (т. е. при переходе от одного электронного состояния к другому меняются частота колебаний, момент инерции и константа вращения). Таблица взята из работы [8].

²⁾ При очень сильных вращениях (чрезвычайно больших J) становится существенным изменение потенциальной кривой молекулы за счет центробежных сил. В пределе $J \rightarrow \infty$ вращательные уровни, так же как и колебательные, начинают сгущаться и переходят в континуум.

Таблица 5.6. Спектроскопические константы важнейших молекул

Молекула	Состояние	Электронная энергия U_e , эВ	$h\nu_\infty = hc/\lambda_{00}$, эВ	Переход $1/\lambda_{00}$, см ⁻¹	ω_e , см ⁻¹	B_e , см ⁻¹	Переход и название системы полос
O ₂	$B^3\Sigma_u^-$	6,11	6,11	49 363	700,4	0,819	$B \rightarrow X$ Шуман-Рунге
	$X^3\Sigma_g^-$	0		0	1580	1,446	
N ₂	$C^3\Pi_u$	11,1	3,69	29 670	2035	1,826	$C \rightarrow B$ 2-я положительная
	$B^3\Pi_g$	7,4	1,18	9 557	1734	1,638	$B \rightarrow A$ 1-я положительная
	$A^3\Sigma_u^+$	6,17	6,17	49 757	1460	1,440	$A \rightarrow X$ Запрещенная полоса Вергарда-Каплана
	$X^1\Sigma_g^+$			0	2360	2,010	
NO	$B^2\Pi$	5,63	5,63	45 440	1038	1,127	$B \rightarrow X$ β -полосы
	$A^2\Sigma^+$	5,48	5,47	44 138	2371	1,995	$A \rightarrow X$ γ -полосы
	$X^2\Pi$			0	1904	1,705	
N ₂ ⁺	$B^2\Sigma_u^+$		3,16	25 566	2420	2,083	$B \rightarrow X$ 1-я отрицательная
	$X^2\Sigma_g^+$				2207	1,932	

Схема уровней молекулы азота с указанием термов и их энергий, а также колебательных состояний, представлена на рис. 5.14. Для молекул O₂ и NO мы приводим схемы потенциальных кривых, на которых также указаны термы и энергии. В дальнейшем нам часто придется пользоваться обозначениями различных электронных состояний молекул, поэтому мы напомним коротко основные положения спектроскопической символики.

Электронное состояние характеризуется проекцией орбитального момента электронов на ось молекулы или квантовым числом Λ , суммарным спином электронов S и свойствами симметрии. Состояния $\Lambda = 0, 1, 2, \dots$ обозначаются греческими буквами $\Sigma, \Pi, \Delta, \dots$. Проекция спина на ось может принимать $2S + 1$ значений, в соответствии с чем расщепляется каждый терм. Мультиплетность терма $2S + 1$ указывается слева вверх, например, $^3\Sigma, ^2\Pi$ ($S = 1, S = 1/2$ соответственно).

При отражении в плоскости, проходящей через ось молекулы, проекция электронного орбитального момента меняет знак; соответственно этому термы с отличным от нуля орбитальным моментом двукратно вырождены, точнее, расщепляются на два вследствие существования взаимодействия между вращением молекулы и движением электронов. Это явление называется Λ -удвоением («лямбда-удвоением»).

Если же $\Lambda = 0$, отражение вообще не меняет электронной энергии; волновая функция умножается на $+1$ или -1 . Это свойство симметрии Σ термов указывается справа сверху: Σ^+, Σ^- .

Если молекула состоит из одинаковых атомов, появляется еще одно свойство симметрии, а именно, энергия инвариантна относительно одновременного изменения знака координат всех электронов и ядер. Волновая функция умножается при этом на $+1$ или -1 , что обозначается индексами g и u справа внизу, например Σ_g, Π_u .

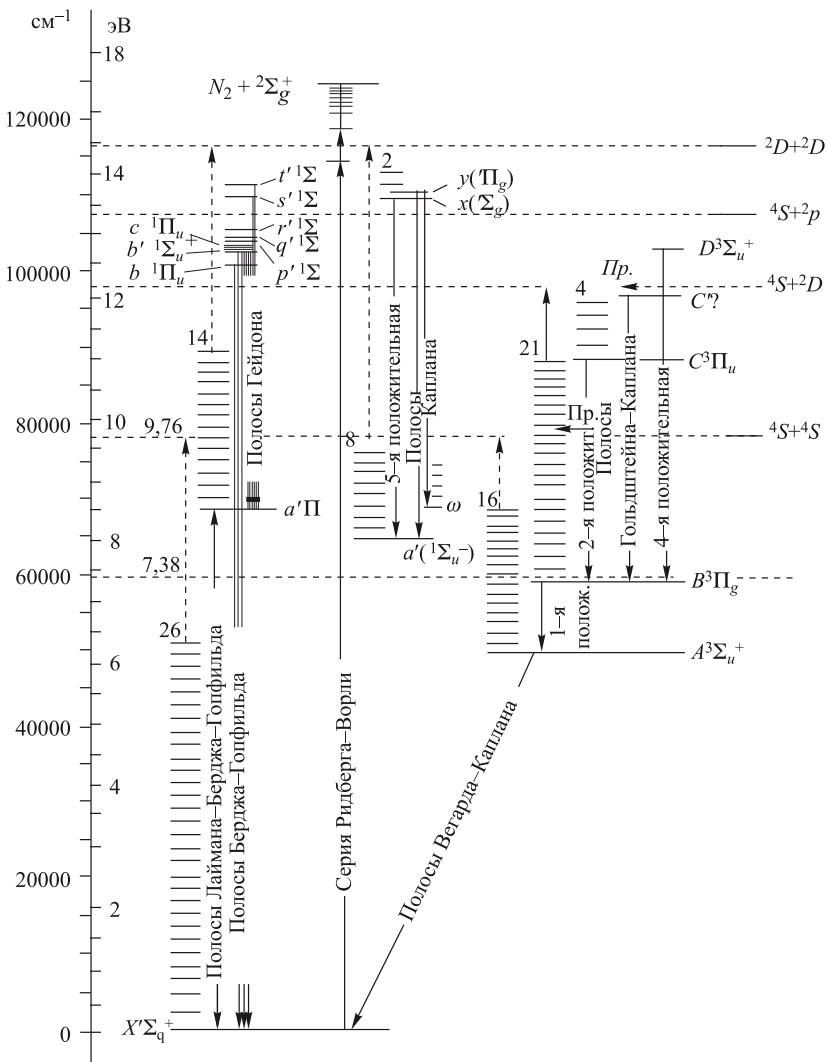


Рис. 5.14. Схема уровней молекулы азота

Как правило, основное состояние двухатомных молекул обладает полной симметрией и основной терм есть ${}^1\Sigma_g^+$. Исключение составляют молекула O_2 — основной терм ${}^3\Sigma_g^-$, и молекула NO — основной терм ${}^2\Pi$.

Последовательные электронные состояния обозначают буквами: X (основное состояние), $A, B, C, \dots$ или $a, b, c, \dots$. В случае ионизованных молекул к буквам добавляют штрих: $A', b', \dots$. Так, например, первое возбужденное (метастабильное) состояние N_2 есть $A^3\Sigma_u^+$.

Допустимые переходы между различными электронными состояниями (дипольные переходы с испусканием или поглощением света) подчинены некоторым правилам отбора. Эти правила зависят от типа связи между орбитальным движением

электронов, их спином и вращением молекулы. Во многих важных случаях правила отбора следующие: $\Delta\Lambda = 0 \pm 1$; мультиплетность $2S + 1$ не меняется; запрещены переходы $\Sigma^+ \rightleftharpoons \Sigma^-$ и переходы $g \rightarrow g$, $u \rightarrow u$ (последние два правила не зависят от типа связи).

§ 15. Структура молекулярных спектров. Совокупность переходов между двумя электронными состояниями $B - A$ образует ряд полос, соответствующих переходам между двумя данными колебательными состояниями $v' - v''$.

Частоты квантов, излучаемых или поглощаемых при электронных переходах молекул, лежат обычно в ультрафиолетовой или видимой частях спектра. Переходы без изменения электронного состояния соответствуют частотам, относящимся к инфракрасной области спектра; ими мы интересоваться не будем. Каждая из полос состоит из многих близко расположенных друг к другу линий, отвечающих переходам между разными вращательными состояниями. Вращательные переходы подчиняются правилам отбора, которые в значительной степени упрощают спектр. А именно, возможны переходы со следующими изменениями вращательного квантового числа: $\Delta J = J' - J'' = 0, \pm 1$, причем запрещен переход $0 - 0$; в случае $\Sigma \rightarrow \Sigma$ -переходов отсутствуют также переходы $\Delta J = 0$. На рис. 5.13 вертикальными линиями показаны переходы между различными колебательными состояниями двух электронных уровней (полосы $v' - v''$; $0 - 0$, $1 - 0$ и т. д.). На рис. 5.15 специально выделена одна полоса $v' - v''$ и указана ее вращательная структура. При этом предположено, что по крайней мере в одном из состояний B или A $\Lambda \neq 0$, так что переходы $\Delta J = 0$ существуют. Серию линий с $\Delta J = 0, +1, -1$ называются Q -, R -, P -ветвями, соответственно.

Если бы колебательные уровни в различных электронных состояниях располагались в точности одинаково, т. е. совпадали бы частоты ω'_e и ω''_e , и идентичным образом происходило бы сгущение вследствие ангармоничности, то полосы с одинаковым значением разности $\Delta v = v' - v''$, как видно из рис. 5.13, строго накладывались бы друг на друга. На самом же деле расположения уровней в разных электронных состояниях несколько отличаются друг от друга, причем разность частот колебаний $\omega'_e - \omega''_e$ обычно значительно меньше самих частот. Поэтому полосы с одинаковой разностью Δv располагаются близко друг от друга, образуя так называемую последовательность полос, тогда как полосы с различными Δv отстоят на больших частотных расстояниях. Это положение иллюстрируется фотографией спектра испускания так называемой второй положительной

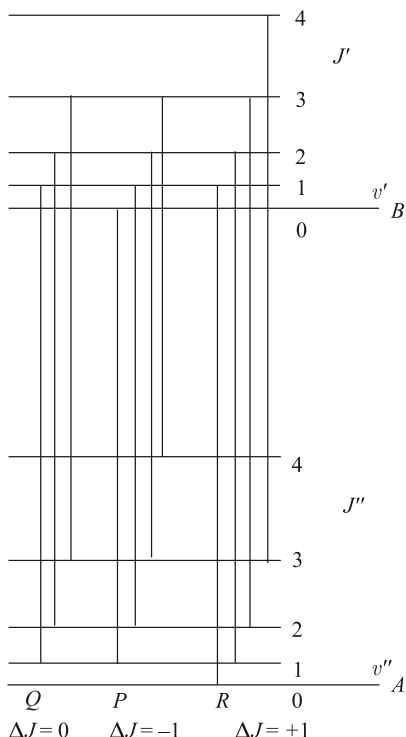


Рис. 5.15. Вращательная структура полос. Схема переходов, отвечающих Q -, P - и R -ветвям

системы азота ¹⁾ (переход $C^3\Pi_u \rightarrow B^3\Pi_g$; см. схему уровней, рис. 5.14); на этой фотографии (рис. 5.16) отложена шкала длин волн и указаны номера колебательных переходов (первая цифра соответствует верхнему электронному состоянию). Как видно из фотографии, расстояния между соседними полосами последовательности $\Delta v = -2$, например, равны примерно 50 Å; расстояние между ближайшими полосами соседних последовательностей больше, для $\Delta v = -2$ и $\Delta v = -1$ оно равно примерно 230 Å. При увеличении частоты полосы сгущаются в соответствии со сгущением колебательных уровней при $v \rightarrow \infty$ и в конце концов переходят в континуум, связанный с диссоциацией молекулы.

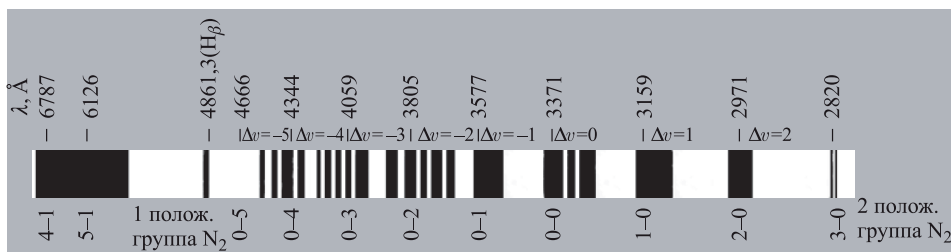


Рис. 5.16. Спектр испускания второй положительной системы азота. Фотография взята из работы [20а]

Расположение линий во вращательной структуре полосы легко установить, пользуясь (5.89) и правилами отбора: $J' - J'' = 0, +1, -1$. Получим для трех ветвей следующие закономерности:

$$P: J' = J'' - 1, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{v'v''}} + (B'_e - B''_e)J''^2 - (B'_e + B''_e)J'', \quad J'' \geq 1; \quad (5.90')$$

$$Q: J' = J'', \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{v'v''}} + (B'_e - B''_e)J''^2 + (B'_e - B''_e)J'', \quad J'' \geq 1; \quad (5.91)$$

$$R: J' = J'' + 1, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{v'v''}} + (B'_e - B''_e)J''^2 + (3B'_e - B''_e)J'' + 2B'_e, \quad J'' \geq 0. \quad (5.92)$$

Здесь $1/\lambda_{v'v''}$ — константа, представляющая собой волновое число, которое соответствует электронно-колебательному переходу в отсутствие вращательной структуры (без третьего члена в формуле (5.89)). Вращательная структура зависит от того, какая из двух вращательных постоянных больше: B'_e или B''_e . Зависимости волновых чисел $1/\lambda$ от квантового числа J'' и спектр схематически изображены для обоих случаев на рис. 5.17 и 5.18 (так называемые диаграммы Фортра). Из рис. 5.17 видно, что при $B'_e > B''_e$ спектр имеет низкочастотную границу, где линии сгущаются («красный» кант); линии простираются в сторону высоких частот и расстояния между ними возрастают. При $B'_e < B''_e$, наоборот, кант «фиолетовый» и линии простираются в сторону низких частот. В области канта «частотные» расстояния между линиями порядка $B'_e - B''_e$ ($\approx 0,2 \text{ см}^{-1}$ для 2-й положительной системы N_2 , что соответствует

¹⁾ Системы полос, соответствующие различным электронным переходам, носят обычно какое-нибудь название. Наиболее важные системы указаны на схемах уровней.

в шкале длин волн $\Delta\lambda \sim 0,2 \text{ \AA}$). В области разрежения линий при $J'' \gg 1$ все ветви ведут себя примерно по закону

$$\frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda_{v'v''}} + (B'_e - B''_e)J''^2 \quad (5.93)$$

и расстояния между линиями $\Delta(1/\lambda)$ растут пропорционально J'' .

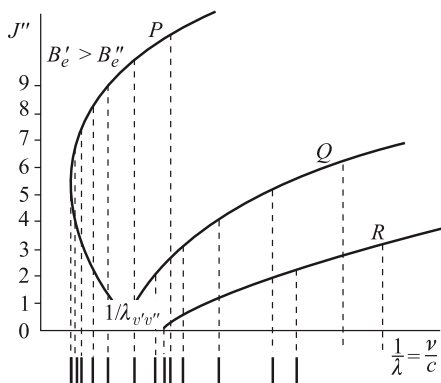


Рис. 5.17. Зависимость волнового числа $1/\lambda$ в P-, Q- и R-ветвях полосы от вращательного квантового числа J'' для случая $B'_e > B''_e$ (красный кант)

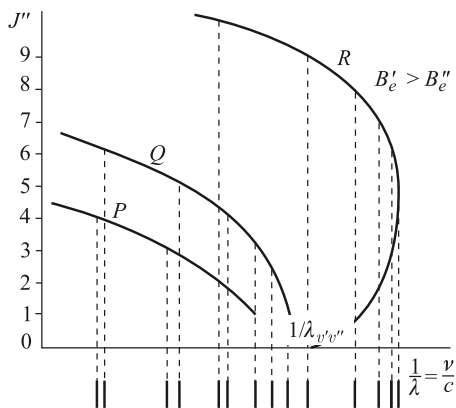


Рис. 5.18. Зависимость волнового числа $1/\lambda$ в P-, Q- и R-ветвях полосы от вращательного квантового числа J'' для случая $B'_e < B''_e$ (фиолетовый кант)

Для иллюстрации вращательной структуры приводим фотографию (рис. 5.19), на которой разрешена полоса 0–2 второй положительной системы N_2 . Для перехода $C^3\Pi_u \rightarrow B^2\Pi_g$ азота $B'_e > B''_e$ (см. табл. 5.6) и полоса отненена в «красную» сторону («красный» кант).



Рис. 5.19. Спектр в полосе 0–2 второй положительной системы азота. Фотография взята из работы [20a]

Каждая из линий вращательной структуры на этой фотографии состоит из трех, в соответствии с мультиплетным расщеплением уровней. Λ-удвоение на фотографии не разрешено (оно обычно меньше 1 см^{-1} , что соответствует в шкале длин волн при $\lambda \approx 3800 \text{ \AA}$ $\Delta\lambda < 1 \text{ \AA}$).

Как уже было отмечено выше, электронные переходы в молекулах, как и в атомах, соответствуют ультрафиолетовой или видимой областям спектра. Если ближайший

незапрещенный переход из основного состояния в возбужденное соответствует ультрафиолетовым квантам, газ прозрачен и бесцветен, как, например, N_2 , O_2 , NO . В некоторых молекулах, таких, как Br_2 , I_2 , ближайший электронный уровень с разрешенным переходом из основного состояния расположен довольно низко, и молекула поглощает видимый свет. Такие газы сильно окрашены. В сторону больших частот полосы поглощения молекул простираются обычно в далекую ультрафиолетовую область спектра и переходят затем в континуум.

§ 16. Принцип Франка–Кондона. Электронные переходы в молекуле связаны с одновременным изменением сразу трех характеристик ее состояния. Огромное множество всевозможных комбинаций начальных и конечных состояний ограничивается правилами отбора. Однако правила отбора распространяются только на изменение электронных и вращательных параметров молекулы и ничего не говорят о возможном изменении состояния колебаний. Чтобы установить, какие из комбинаций колебательных квантовых чисел при переходах наиболее вероятны, обратимся к диаграмме кривых потенциальной энергии молекулы, пренебрегая вращением.

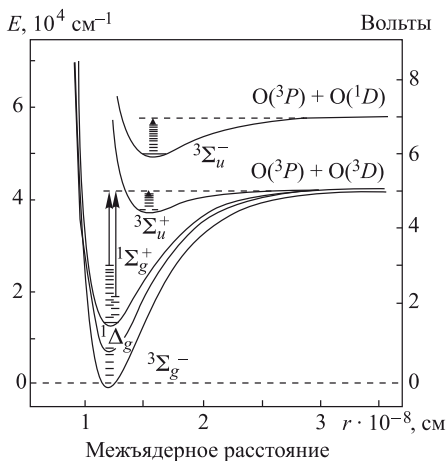


Рис. 5.20. Потенциальные кривые молекулы O_2

Потенциальная энергия молекулы зависит от междядерного расстояния. При сближении ядер преобладают силы отталкивания, при удалении — силы притяжения. На некотором расстоянии r_e силы отталкивания и притяжения уравниваются друг друга и потенциальная энергия в этой точке минимальна. Абсолютная величина минимума потенциальной энергии соответствует энергии электронного состояния U_e . Разность между энергией при бесконечном удалении ядер и этой величиной дает энергию диссоциации (с точностью до энергии нулевых колебаний).

Форма и положение потенциальной кривой зависит от электронного состояния, так что каждой молекуле принадлежит несколько кривых. На рис. 5.20 и 5.21 изображены потенциальные кривые молекул O_2 и NO , построенные на основе спектроскопических данных¹⁾. На рисунках проведены горизонтальные линии, соответствующие уровням колебательной энергии в каждом из электронных состояний.

С классической точки зрения междядерное расстояние при данной энергии колебаний периодически изменяется около положения равновесия r_e . Изменение происходит в интервале между точками, в которых горизонтальная прямая, отвечающая энергии колебаний, пересекает потенциальную кривую. В точках пересечения скорость относительного движения ядер обращается в нуль, так как меняется направление движения и в этих положениях (точках возврата) молекула пребывает дольше всего. Наоборот, положение равновесия она проскакивает очень быстро, так как скорость здесь максимальна.

Поэтому спонтанный переход из верхнего электронного состояния в нижнее чаще всего происходит в то время, когда ядра занимают крайние положения. Перестройка

¹⁾ Рисунки взяты из работ [20, 21].

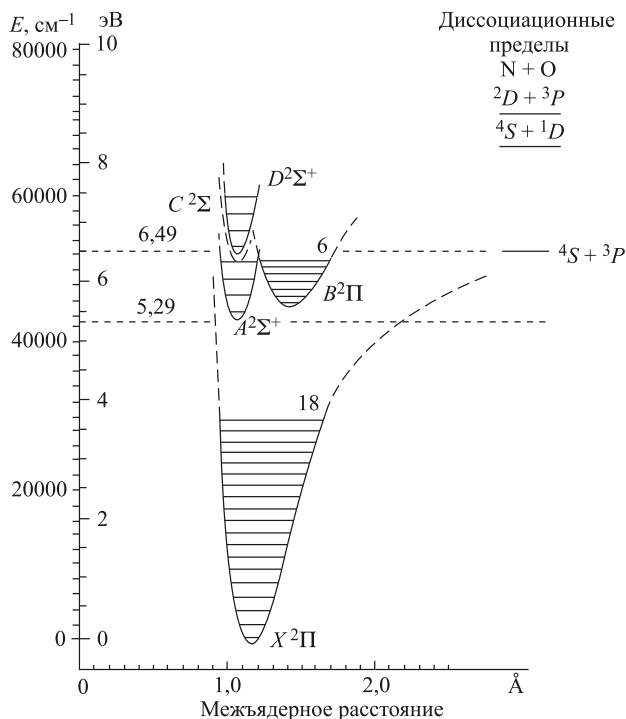


Рис. 5.21. Потенциальные кривые молекулы NO

электронной оболочки при переходе с испусканием кванта происходит настолько быстро, что за это время ни положения ядер, ни их кинетические энергии не успевают измениться. В самом деле, длительность перестройки измеряется временем, в течение которого электрон пробегает расстояние порядка размеров молекулы, т.е. $\sim 10^{-16}$ с (при скорости электрона $\sim 10^8$ см/с и размерах молекулы $\sim 10^{-8}$ см). Расстояние же между ядрами заметно меняется за время порядка периода колебаний, т.е. за время $\sim 1/\omega_e \sim 10^{-14}$ с (при $\omega_e \sim 1000$ см $^{-1}$, что относится к легким молекулам; в тяжелых ω_e еще меньше, а период колебаний больше)¹⁾.

Электронный переход в нижнее состояние совершается при неизменном межъядерном расстоянии, т.е. главным образом по вертикалям, проведенным из точек возврата на диаграмме потенциальных кривых (рис. 5.22).

В конечном состоянии молекула приходит с нулевой скоростью, т.е. начинает колебательное движение с новой колебательной энергией также из точек возврата.

Таким образом, легче всего совершаются переходы в такие нижние колебательные состояния, для которых одна из точек возврата расположена на таком же межъядерном расстоянии, что и одна из точек возврата в верхнем состоянии. Это положение, известное под названием принципа Франка–Кондона, иллюстрируется рис. 5.22, на

¹⁾ Вероятности незапрещенных электронных переходов из верхнего состояния в нижнее в атомах и молекулах порядка 10^8 с $^{-1}$. Таким образом, возбужденная молекула в течение времени порядка 10^{-8} с (за которое атомы совершают много, $\sim 10^6$ колебаний) находится в верхнем состоянии, а затем за время $\sim 10^{-16}$ с переходит в нижнее, испуская световой квант.

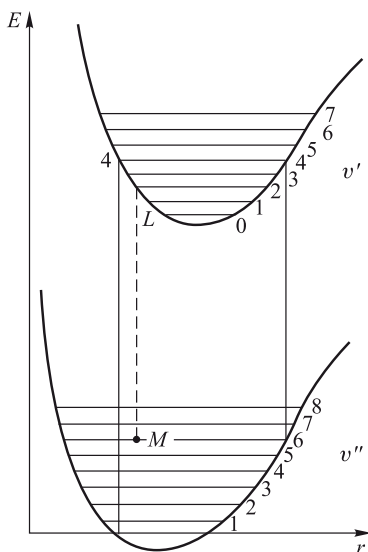


Рис. 5.22. Схема потенциальных кривых и переходов, иллюстрирующая принцип Франка-Кондона

$2J + 1$ значений: $M = J, J - 1, \dots, -J$. Вращательная энергия от него не зависит, а волновая функция системы Ψ — зависит. Матричный элемент равен

$$\overline{D}_{Av''J''M''}^{Bv'J'M'} = \int \Psi_{Bv'J'M'}^* \mathbf{d} \Psi_{Av''J''M''} d\tau, \quad (5.94)$$

где интегрирование производится по всем координатам, от которых зависит волновая функция системы.

Будем по-прежнему исходить из упрощенной модели молекулы, в которой движение электронов, колебания и вращения предполагаются не зависящими друг от друга. Полную волновую функцию при этом можно представить в виде произведения трех волновых функций $\psi_{эл}$, $\psi_{кол}$, $\psi_{вр}$, описывающих электроны, колебательное движение и вращательное. Они зависят от соответствующих координат: $\psi_{эл}$ — от координат электронов, $\psi_{кол}$ — от междиядерного расстояния, $\psi_{вр}$ — от углов поворота молекулы, а также от соответствующих квантовых чисел. Например, для верхнего состояния,

$$\Psi_{Bv'J'M'} = \psi_{элB} \psi_{колv'} \psi_{врJ',M'}, \quad (5.95)$$

$\psi_{кол}$ зависит от электронного состояния, так как от последнего зависят частоты колебаний.

Представим дипольный момент системы $\mathbf{d} = \sum e_i \mathbf{r}_i$; (сумма распространяется на все частицы) в виде суммы электронного и ядерного моментов $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_a$. Электронные волновые функции, по определению, ортогональны в различных электронных состояниях (ядерные координаты входят в них только в качестве параметров). При подстановке $\mathbf{d}$ и Ψ в интеграл (5.94) в члене с ядерным моментом выделяется множитель $\int \psi_{элB}^* \psi_{элA} d\tau_e$, который обращается в нуль при $B \neq A$, так что матричный элемент от ядерного момента исчезает. Поскольку $\psi_{кол}$ и $\psi_{вр}$ не зависят

в котором проведены вертикали наиболее вероятных переходов из верхнего состояния $v' = 4$ в нижние $v'' = 0$ и $v'' = 6$.

Наоборот, переходы, для которых вертикали из верхних точек возврата попадают в середину отрезка нижнего уровня или вообще выходят за пределы отрезка, ограниченного потенциальной кривой (как, например, переход 2–6, показанный на рис. 5.22 пунктиром), маловероятны.

§ 17. Вероятности молекулярных переходов с испусканием света. Рассмотрим переход молекулы из верхнего состояния в нижнее с квантовомеханической точки зрения.

Вероятность спонтанного дипольного перехода с испусканием светового кванта пропорциональна квадрату матричного элемента дипольного момента $\mathbf{d}$ системы и описывается общей формулой (5.69). Рассмотрим переход из верхнего состояния $Bv'J'M'$ в нижнее состояние $Av''J''M''$. Буквы B и A обозначают электронные состояния молекулы; v', v'' — колебательные, а J', J'' — вращательные квантовые числа. M есть «магнитное» квантовое число, определяющее величину проекции вращательного момента на ось молекулы. Оно может принимать

от координат электронов, оставшийся матричный элемент от электронного момента можно представить в виде произведения

$$D = D_e = \int \psi_{эл}^* | \mathbf{d}_e | \psi_{эл}^* \int \psi_{кол}^* \psi_{кол} \int \psi_{вр}^* \mathbf{n} \psi_{вр} = D_{эл} D_{кол} D_{вр}, \quad (5.96)$$

где во вращательный матричный элемент вошло только направление усредненного электронного дипольного момента — единичный вектор $\mathbf{n}$, который затем усредняется по «поворотам» молекулы. (Мы здесь опустили для краткости индексы — квантовые числа у волновых функций и дифференциалы.) Условие того, чтобы $D_{вр}$ было отлично от нуля, и дает правила отбора для изменения вращательных квантовых чисел при переходе.

Энергия молекулы в нашем приближении не зависит от направления вращательного момента, поэтому, чтобы получить вероятность перехода из одного энергетического состояния, $Bv'J'$, в другое, $Av''J''$, вероятность следует усреднить по всем возможным направлениям вращательного момента в начальном состоянии и просуммировать по направлениям — в конечном. Таким образом, вероятность перехода в единицах с^{-1} , согласно (5.69), равна ¹⁾

$$A_{Av''J''}^{Bv'J'} = \frac{64\pi^4}{3hc^3} \nu_{Bv'J', Av''J''}^3 D_{эл}^2 B A q_{v'v''} p_{J'J''}, \quad (5.97)$$

где

$$q_{v'v''} = D_{кол v'v''}^2 = \left| \int \psi_{кол v'}^*(r) \psi_{кол v''}(r) dr \right|^2, \quad (5.98)$$

$$p_{J'J''} = \frac{1}{2J' + 1} \sum_{M' M''} D_{вр J'M', J''M''}^2. \quad (5.99)$$

Интенсивность соответствующей линии в спектре в $\text{эрг/см}^3 \cdot \text{с}$ равна произведению вероятности перехода A (с^{-1}), энергии кванта $h\nu$ (эрг) и числа молекул N (см^{-3}), пребывающих в верхнем квантовом состоянии: $I = h\nu N A$ (индексы для краткости опущены).

Безразмерная вероятность $p_{J'J''}$ определяет распределение интенсивности в линиях вращательной структуры внутри данной полосы $Bv' \rightarrow Av''$. В квантовой механике молекулы доказываются, что $p_{J'J''}$ подчиняется правилу сумм,

$$\sum_{J''} p_{J'J''} = \sum_{J''} \sum_{M' M''} \frac{1}{2J' + 1} D_{вр J'M', J''M''}^2 = 1, \quad (5.100)$$

смысл которого заключается в том, что при совершившемся переходе из верхнего электронно-колебательного состояния в нижнее молекула обязательно попадет на один из возможных вращательных уровней J'' (соответствующая вероятность равна единице).

Вероятность перехода $Bv' \rightarrow Av''$ на какой-нибудь из вращательных уровней получается путем суммирования выражения (5.97) по J'' . В соответствии с условием

¹⁾ Строго говоря, электронный матричный элемент $D_{эл}$ зависит от межуядерного расстояния r (он вычисляется в определенный момент времени, при фиксированном межуядерном расстоянии, которое входит в электронные волновые функции). Под величиной $D_{эл}^2$, которая входит в формулу для вероятности перехода (5.97), следует подразумевать некоторое среднее по r значение $D_{эл}^2$, скажем, соответствующее положению равновесия r_e в верхнем электронном состоянии.

(5.100), она равна

$$A_{Av''}^{Bv'} = \frac{64\pi^4}{3hc^3} \nu_{Bv', Av''}^3 D_{эл BA}^2 q_{v'v''}, \quad (5.101)$$

где $\nu_{Bv', Av''}$ — некоторая средняя частота для данной полосы (в силу малости вращательных энергий по сравнению с колебательными разброс частот внутри полосы невелик и введение средней частоты для полосы оправдано).

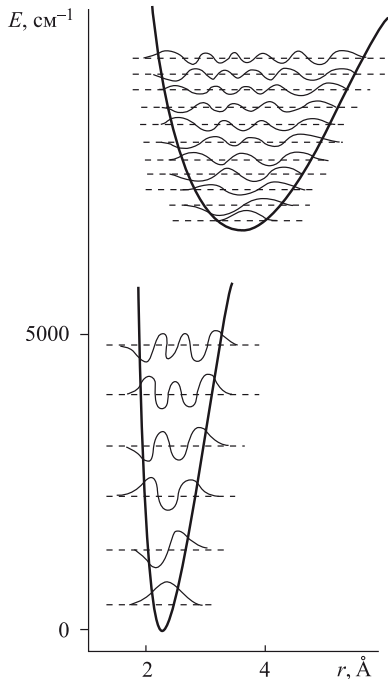


Рис. 5.23. Потенциальные кривые и волновые функции ряда колебательных состояний для молекулы RbH. (График взят из работы [206].) Число нулей (узлов) у каждой волновой функции равно колебательному квантовому числу v

та в нижнем. Приведенное рассуждение обосновывает принцип Франка-Кондона с квантовомеханической точки зрения. Величина $q_{v'v''}$, называемая часто фактором Франка-Кондона, есть вероятность данного колебательного перехода $v' \rightarrow v''$ при совершившемся электронном переходе, так как по правилу сумм для матричных элементов суммарная вероятность перехода из данного v' в любое v'' равна единице:

$$\sum_{v''} q_{v'v''} = \sum_{v''} D_{\text{кол } v'v''}^2 = 1. \quad (5.102)$$

Для иллюстрации изложенной квантовомеханической интерпретации принципа Франка-Кондона приводим рассчитанную в работе [21] таблицу интегралов $\left| \int \psi_{v'}^* \psi_{v''} dr \right|$, квадрат которых равен $q_{v'v''}$ для β -системы NO ($B^2\Pi \rightarrow X^2\Pi$).

Таблица 5.7. Корень квадратный из фактора Франка–Кондона $\sqrt{q_{v'v''}}$
 для β -системы полос молекулы NO
 (v' относится к верхнему состоянию, v'' — к нижнему)¹⁾

v''	Колебательное квантовое число верхнего состояния v'								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,0000	0,0002	0,0010	0,0032	0,0079	0,0161	0,0280	0,0429	0,0587
1	0,0003	0,0024	0,0087	0,0219	0,0414	0,0625	0,0788	0,0811	0,0707
2	0,0021	0,0119	0,0336	0,0619	0,0819	0,0803	0,0569	0,0257	0,0040
3	0,0086	0,0364	0,0735	0,0896	0,0680	0,0273	0,0016	0,0065	0,0286
4	0,0250	0,0750	0,0967	0,0607	0,0115	0,0025	0,0286	0,0471	0,0362
5	0,0554	0,1069	0,0693	0,0077	0,0100	0,0447	0,0448	0,0146	0,0001
6	0,0972	0,1020	0,0153	0,0121	0,0530	0,0371	0,0027	0,0097	0,0341
7	0,1380	0,0556	0,0041	0,0573	0,0363	0,0001	0,0231	0,0401	0,0170
8	0,1603	0,0075	0,0497	0,0489	0,0000	0,0317	0,0389	0,0055	0,0066
9	0,1522	0,0101	0,0756	0,0046	0,0629	0,0004	0,0567		
10	0,1276	0,0452	0,0391	0,0395	0,0286	0,0301	0,0299		
11	0,0964	0,0849	0,0059	0,0686	0,0006	0,0572	0,0003		
12	0,0657	0,1100	0,0033	0,0599	0,0158	0,0382	0,0198		
13	0,0405	0,1123	0,0318	0,0252	0,0515	0,0047	0,0506		
14	0,0226	0,0956	0,0704	0,0010	0,0619	0,0070	0,0399		
15	0,0113	0,0698	0,0962	0,0102	0,0363	0,0404	0,0070		
16	0,0051	0,0442	0,0985	0,0449	0,0057	0,0587	0,0046		
17	0,0021	0,0246	0,0816	0,0793	0,0036	0,0394	0,0361		
18	0,0007	0,0120	0,0565	0,0932	0,0329	0,0080	0,0557		
19	0,0002	0,0051	0,0334	0,0838	0,0693	0,0022	0,0374		
20	0,0001	0,0019	0,0169	0,0610	0,0881	0,0297	0,0068		
21		0,0006	0,0074	0,0369	0,0821	0,0663	0,0031		
22		0,0002	0,0028	0,0188	0,0603	0,0852	0,0326		
23			0,0009	0,0801	0,0361	0,0784	0,0685		
24				0,0030	0,0179	0,0559	0,0865		
25				0,0009	0,0074	0,0331	0,0727		
26					0,0026	0,0150	0,0486		
27					0,0007	0,0057	0,0258		
28						0,0018	0,0110		
29							0,0038		
$v' = 9$	10	11	12	13	14	15	16	17	
$v'' = 0;$	0,0731	0,0837	0,0892	0,0866	0,0841	0,0744	0,0601	0,0445	0,0303
$v' = 18$	19	20	21	22	23	24	25	26	
$v'' = 0;$	0,0190	0,0110	0,0059	0,0029	0,0013	0,0006	0,0002	0,0001	0,0000
¹⁾ Прямоугольники — наиболее вероятные переходы из каждого верхнего состояния.									

Табл. 5.7 полезно рассматривать вместе со схемой потенциальных кривых рис. 5.21, проверяя, таким образом, выполнение принципа Франка–Кондона.

Знание факторов Франка–Кондона необходимо для вычисления относительных вероятностей различных переходов $v' \rightarrow v''$, т.е. относительных интенсивностей

различных полос в рамках данного электронного перехода. Они рассчитаны для ряда систем важнейших молекул: NO, O₂, N₂, N₂⁺ (см. работы [8, 21–24]).

Чтобы найти абсолютные значения вероятностей переходов и интенсивностей линий или полос, нужно знать значение электронного матричного элемента $D_{эл}$. Теоретическое вычисление электронного матричного элемента $D_{эл}$ представляет большие трудности. Обычно его находят из эксперимента (см. § 18 и 21).

По аналогии с теорией атомных переходов, вместо электронного матричного элемента пользуются обычно понятием силы осциллятора.

Просуммируем вероятность перехода $ABv' \rightarrow Av''$ по формуле (5.101) по конечным колебательным состояниям v'' и усредним по начальным v' . Получим вероятность электронного перехода $B \rightarrow A$ при произвольных колебательных и вращательных превращениях:

$$A_{BA} = \frac{64\pi^4}{3hc^3} \nu_{BA}^3 D_{эл BA}^2 \quad (5.103)$$

ν_{BA} — некоторая средняя частота для электронного перехода (так же как и раньше, оправданием для введения средней частоты служит то, что разности колебательных энергий малы по сравнению с разностью электронных). Воспользовавшись формулами (5.69), (5.73), (5.60), определим силу осциллятора для электронного перехода $B \rightarrow A$:

$$f_{BA} = \frac{8\pi^2 m}{3he^2} \nu_{BA} D_{эл BA}^2 \quad (5.104)$$

Отношение статистических весов верхнего и нижнего электронных состояний здесь принято равным единице в предположении, что мультиплетности обоих термов одинаковы. Следует ожидать, что силы осцилляторов для молекулярных переходов имеют такой же порядок, как и для атомных. Численные значения сил осцилляторов для важнейших систем будут приведены ниже.

§ 18. Коэффициент поглощения света в линиях. Для вычисления коэффициента поглощения в линии, соответствующей переходу $Av''J'' \rightarrow Bv'J'$, который является обратным по отношению к переходу с испусканием света, рассмотренному в предыдущем параграфе, воспользуемся принципом детального равновесия. Последний устанавливает связь между коэффициентами Эйнштейна для прямых и обратных переходов (5.71) ¹⁾. Подставляя в это соотношение вероятность испускания по формуле (5.97), принимая во внимание определение (5.70) и заменяя в выражении (5.97) $D_{эл}^2$ на силу осциллятора по формуле (5.104), получим коэффициент поглощения в виде

$$\kappa_{Av''J'', Bv'J'} = \frac{\pi e^2}{mc} f_{BA} q_{v''v'} p_{J''J'} N_{Av''J''} F(\nu), \quad (5.105)$$

где $N_{Av''J''}$ — число молекул в 1 см³, находящихся в нижнем состоянии $Av''J''$, а $F(\nu)$ — функция, описывающая распределение поглощения внутри линии; она нормирована на единицу, $\int F(\nu) d\nu = 1$.

Проинтегрируем коэффициент поглощения, связанный с электронным переходом $A \rightarrow B$, по всему спектру. Очевидно, тот же результат получится, если мы проинтегрируем по частоте коэффициент поглощения каждой линии (5.105) и просуммируем по всем линиям спектра ²⁾. Суммирование по линиям эквивалентно суммированию

¹⁾ Отношение статистических весов в этой формуле, как и раньше, считаем равным единице. См. (5.104).

²⁾ Сюда следует включить и континуум, который начинается с той частоты, при которой полосы сходятся к пределу диссоциации.

по всем начальным и конечным состояниям $v''J'', v'J'$. Суммирование по конечным состояниям осуществляется с помощью правил сумм (5.100), (5.102); суммирование по начальным состояниям сводится к суммированию по числам молекул: $N_A = \sum_{v''J''} N_{Av''J''}$, где N_A — число молекул в 1 см^3 , находящихся в электронном состоянии A . Если A есть основное состояние, то N_A практически равно полному числу молекул в 1 см^3 N .

Для интеграла по спектру от эффективного сечения поглощения молекулы в состоянии A при переходе ее в состояние B , $\sigma_\nu = \kappa_\nu/N_A$, получим

$$\int_0^\infty \sigma_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f_{BA}. \quad (5.106)$$

Это соотношение находится в полном соответствии с таким же соотношением для атомных переходов. Таким образом, как и в случае атомов, «площадь» поглощения, соответствующего данному электронному переходу, определяется только силой осциллятора. Различие состоит в том, что в молекулах эта «площадь» распределена по очень многим линиям, благодаря чему на каждую из линий приходится лишь небольшая ее часть. Соответственно этому «высота» молекулярных линий гораздо меньше «высоты» атомных линий. Мультиплетное расщепление линий и Λ -удвоение еще снижают «высоту» линий в несколько раз, не изменяя полной «площади».

Путем экспериментального исследования спектра поглощения молекул можно определить силу осциллятора для данной системы полос. С этой целью измеряется ослабление света оптически тонким слоем газа, прозрачным в вершинах линий. Это позволяет найти «площадь» спектра поглощения и по формуле (5.106) вычислить силу осциллятора. Если известен из расчета фактор Франка–Кондона, то для оценки силы осциллятора можно непосредственно пользоваться кривой поглощения в отдельной линии или полосе (для вероятностей вращательных переходов $p_{J''J'}$ существуют несложные формулы).

Таким путем, например, в работе [25] были измерены силы осцилляторов для γ - и β -полос молекулы NO ($\gamma: X^2\Pi \rightarrow A^2\Sigma^+$; $\beta: X^2\Pi \rightarrow B^2\Pi$). Оказалось, что $f_\gamma \approx 0,0025$, $f_\beta \approx 0,008$. В работе [26] была найдена сила осцилляторов для системы полос Шумана–Рунге молекулы кислорода (переход $X^3\Sigma_g^- \rightarrow B^3\Sigma_u^-$): $f = 0,259$, причем из полной «площади» поглощения долю $\Delta f = 0,044$ занимают полосы, а долю $\Delta f = 0,215$ — континуум, соответствующий диссоциации молекул O_2 на атомы $\text{O}(^3P) + \text{O}(^1D)$. Континуум начинается при $\lambda = 1760 \text{ \AA}$ (нижняя граница полос $\lambda = 2030 \text{ \AA}$). Эффективное сечение в континууме имеет максимум при $\lambda = 1450 \text{ \AA}$, равный $\sigma_\nu = 1,81 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, и падает наполовину к $\lambda = 1567 \text{ \AA}$ и $\lambda = 1370 \text{ \AA}$. Следует отметить, что значение силы осцилляторов для полос Шумана–Рунге, извлеченное из данных по излучению света при высоких температурах, оказывается гораздо меньше (см. § 20; в работе [26] измерялось поглощение света холодным кислородом). (По поводу возможных причин такого различия см. работу [27].)

Вообще следует отметить, что, в отличие от атомных переходов, сила осциллятора для молекулярного перехода не есть строго постоянная величина (в частности, она зависит от степени колебательного возбуждения и способа усреднения по междукерному расстоянию). Литературные данные о силах осцилляторов для одних и тех же переходов часто сильно расходятся. Сводку известных результатов по силам осцилляторов для молекулярных переходов и ссылки на литературу можно найти в обзоре В. Н. Сошникова [27a].

§ 19. Молекулярное поглощение при высоких температурах. При комнатной температуре практически все молекулы находятся в основном электронном и колебательном состояниях. Так, например, в доле $\sim 10^{-5}$ молекул азота возбужден только один колебательный квант. Длинноволновая граница поглощения двухатомных молекул лежит всегда в ультрафиолетовой или видимой областях спектра: например, у молекул O_2 , NO , N_2 — в далекой ультрафиолетовой области ¹⁾, у молекул Bg_2 , J_2 , CN — в видимой. При повышении температуры в газе появляются возбужденные молекулы, находящиеся в верхних колебательных состояниях, из которых переход в то же самое верхнее электронное состояние требует меньшей энергии. Таким образом, при повышении температуры длинноволновая граница поглощения сдвигается в «красную» сторону. При температурах порядка 10 000 К появляются и молекулы в верхних электронных состояниях, из которых возможны новые переходы в еще более высокие электронные состояния; так возникает поглощение в первой и второй положительных системах азота (переходы $A^3\Sigma_u \rightarrow B^3\Pi_g$ и $B^3\Pi_g \rightarrow C^3\Pi_u$; см. табл. 5.6 и рис. 5.14).

Рассмотрим молекулярное поглощение света при высоких температурах на примере молекул NO . Окись азота образуется в воздухе при температурах порядка 2000—10 000 К в довольно значительной концентрации порядка нескольких процентов (см. § 4 гл. III). Поглощение света молекулами NO , как будет видно из дальнейшего, в некоторых условиях играет существенную роль для оптических свойств нагретого воздуха. Расчеты поглощения молекулами NO были сделаны в работе [21], которой мы в основном и будем следовать.

Имеются три важные системы полос поглощения NO из основного электронного состояния: γ (переход $-X^2\Pi \rightarrow A^2\Sigma^+$), β ($X^2\Pi \rightarrow B^2\Pi$) и δ ($X^2\Pi \rightarrow C^3\Sigma$). Длинноволновые границы первых двух систем соответствуют $\sim 45\,000\text{ см}^{-1}$, третьей $\sim 52\,000\text{ см}^{-1}$ (см. табл. 5.6). В поглощении света при температурах $T \sim 3000$ —10 000 К основную роль играет β -система, так как по принципу Франка-Кондона вероятные переходы в γ - и δ -системах происходят без большого изменения колебательного числа, т. е. в основном поглощаются высокие частоты порядка 45 000—52 000 см^{-1} , которые лежат в далекой ультрафиолетовой области и не столь существенны при таких температурах. Наоборот, в β -системе вероятны переходы из высоких нижних колебательных состояний с $v'' \sim 12$ в основное верхнее $v' \sim 0$, которые дают поглощение в близкой ультрафиолетовой и видимой областях спектра $\sim 25\,000\text{ см}^{-1}$.

При больших плотностях газа и высоких температурах молекулярные линии сильно расширяются и даже могут перекрываться. Спектр при этом становится почти непрерывным.

Сравним ширину линий и среднее расстояние между ними для β -системы NO . Для оценки примем, что температура $T = 8000\text{ К}$ и плотность газа равна нормальной плотности воздуха.

При температуре 8000 К доплеровская ширина линий с частотами $\sim 25\,000\text{ см}^{-1}$ имеет порядок $0,3\text{ см}^{-1}$. Если предположить, что каждое газокинетическое соударение меняет состояние колебательного или вращательного движений, то уширение вследствие столкновений оказывается больше, порядка

$$\frac{\Delta\nu}{c} = \frac{N\sigma_{\text{газ}}\bar{v}}{2\pi c} \approx \frac{3 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^{-15} \cdot 1,5 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx 1,2\text{ см}^{-1}.$$

¹⁾ Переходы на низколегащие уровни $^1\Delta_g$ и $^1\Sigma_g^+$ в молекуле O_2 запрещены. Также запрещен и переход на уровень $^3\Sigma_u^+$. Соответствующие последнему полосы Герцберга чрезвычайно слабы. Запрещен и переход $X^1\Sigma \rightarrow A^3\Sigma_u$ в N_2 (полосы Вергарда-Каплана очень слабые).

Оценим среднее расстояние между линиями В системы NO в частотном интервале от 15 000 до 45 000 см^{-1} . Для поглощения наименьшего кванта 15 000 см^{-1} молекула должна быть возбуждена до энергии 45 000–15 000 = 30 000 см^{-1} , т.е. до колебательного уровня $v'' \approx 20$. Рассматривая схему потенциальных кривых и имея в виду принцип Франка–Кондона, можно заключить, что из каждого нижнего колебательного уровня вероятны переходы примерно в пять верхних состояний, т.е. рассматриваемый интервал содержит в себе примерно $20 \cdot 5 = 100$ полос. При температуре $T = 8000$ К существенно вращательное возбуждение до $2-3 kT$, что соответствует 7500 см^{-1} , т.е. в переходах участвует примерно $J'' \approx \sqrt{2,5kT/hcB_e} \approx 80$ вращательных уровней нижнего состояния. Каждый из них дает две линии: $J' = J'' + 1$ и $J' = J'' - 1$ (Q -ветвь $J' = J''$ обычно очень слаба при $J'' \gtrsim 10$), т.е. имеется всего 160 вращательных линий в полосе. Каждая из них удваивается вследствие мультиплетного расщепления и еще раз расщепляется на две из-за Λ -удвоения. Таким образом, в рассматриваемом частотном интервале 30 000 см^{-1} имеется примерно $100 \cdot 160 \cdot 2 \cdot 2 = 64\,000$ линий. Среднее расстояние между ними порядка 0,5 см^{-1} ; поскольку ширина линий $\sim 1 \text{ см}^{-1}$, линии сильно перекрываются и спектр действительно почти непрерывный.

Оценим коэффициент поглощения в грубом приближении. При среднем колебательном возбуждении молекулы порядка kT , т.е. порядка 5 000 см^{-1} при $T = 8000$ К, наиболее вероятны переходы на низкие колебательные уровни верхнего состояния. Положим для оценки, что свет поглощается в основном при переходах на уровень $v' = 0$ верхнего электронного состояния. Тогда кванты $h\nu$ поглощаются только молекулами, возбужденными до энергии $E_0 - h\nu$, где E_0 — энергия верхнего электронного состояния. Число таких молекул по закону Больцмана пропорционально $\exp\left(-\frac{E_0 - h\nu}{kT}\right)$.

Представим коэффициент поглощения в форме (5.82), выражая сечение поглощения через дифференциальную силу осциллятора: $\kappa_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} N \frac{df}{d\nu}$, где N — число молекул NO в 1 см^3 . Принимая во внимание, что по принципу Франка–Кондона вероятность поглощения квантов, превышающих E_0 , очень мала, можно считать, что

вся «площадь» поглощения $\int_0^\infty (df/d\nu) d\nu$ сосредоточена в основном в интервале частот

от 0 до E_0/h и вклад в интеграл области ν от E_0/h до ∞ очень мал. Зная, что $\kappa_\nu \sim \frac{df}{d\nu} \sim \exp\left(-\frac{E_0 - h\nu}{kT}\right)$, найдем коэффициент пропорциональности из условия

(5.106) или, что то же самое, из условия равенства интеграла $\int_0^{E_0/h} (df/d\nu) d\nu$ силе

осциллятора f . Получим, таким образом, что

$$\frac{df}{d\nu} = f \frac{h}{kT} \exp\left(-\frac{E_0 - h\nu}{kT}\right)$$

и

$$\kappa_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f N \frac{h}{kT} \exp\left(-\frac{E_0 - h\nu}{kT}\right). \quad (5.107)$$

Введем вместо N — числа молекул NO в 1 см^3 — концентрацию их в воздухе: $c_{\text{NO}} = N \varrho_0 / N_0 \varrho$, где N_0 — число молекул в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях, а ϱ / ϱ_0 — отношение плотности воздуха к нормальной ($\varrho_0 = 1,27 \cdot 10^{-3}$ г/см³).

Перейдем от частот света к волновым числам $1/\lambda = \nu/c$. Получим

$$\kappa_\nu = \frac{3,4 \cdot 10^7}{T} f c_{\text{NO}} \frac{\varrho}{\varrho_0} \exp \left[-\frac{1,44}{T} \left(\frac{1}{\lambda_{00}} - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \text{ см}^{-1}. \quad (5.108)$$

Здесь $1/\lambda_{00} = E_0/hc$ (для β -системы NO эта величина равна $45\,440 \text{ см}^{-1}$). В формуле (5.108) $1/\lambda_{00}$ и $1/\lambda$ выражены в 1 см^{-1} . Зная силу осциллятора, можно, следовательно, оценить коэффициент поглощения. Полагая для β -системы NO $f_\beta \approx 0,006$ (см. § 20), найдем для красного света, $\lambda = 6500 \text{ Å}$ при $\varrho/\varrho_0 = 1$, $T = 8000 \text{ K}$ ($c_{\text{NO}} = 0,036$), $\kappa_{\text{NO}} \approx 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ (эффективное сечение на молекулу $\sigma_{\text{NO}} = \kappa_{\text{NO}}/N_{\text{NO}} = 4,3 \cdot 10^{-21} \text{ см}^2$).

В отношении расположения потенциальных кривых и выполнения принципа Франка–Кондона переходы в основной системе поглощения кислорода O_2 (системе Шумана–Рунге) вполне аналогичны β -системе NO, так что для оценки коэффициента поглощения O_2 при высоких температурах также можно пользоваться формулами (5.107), (5.108), в которые следует, конечно, подставлять константы для O_2 .

§ 20. Уточненный расчет коэффициента молекулярного поглощения при высоких температурах. Для более точных расчетов (см. работы [8, 21, 28]) нужно исходить из строгой формулы для коэффициента поглощения в линии и учесть фактические вероятности колебательных переходов. Будем по-прежнему считать, что линии расширены настолько, что почти (или заметно) перекрываются.

Введем в рассмотрение средний коэффициент поглощения частоты ν для данного электронного перехода $A \rightarrow B$, усреднив истинный коэффициент в небольшом спектральном интервале от ν до $\nu + \Delta\nu$, как это делалось в § 12. Для этого надо проинтегрировать коэффициент поглощения для отдельной линии (5.105) по частоте (при этом получим «площадь» одной линии) и просуммировать интеграл по всем линиям, содержащимся в интервале частот от ν до $\nu + \Delta\nu$. Полученный результат будет равен $\bar{\kappa}_\nu \Delta\nu$. Прodelывая эту операцию так же, как и при выводе формулы (5.106), найдем усредненный коэффициент поглощения частоты ν для данного электронного перехода:

$$\bar{\kappa}_{\nu AB} = \frac{\pi e^2}{mc} \frac{f_{BA}}{\Delta\nu} \sum_{\text{полосы}} q_{\nu''\nu'} \sum_{J''} N_{Av''J''}. \quad (5.109)$$

Суммы по J'' и по полосам распространяются на те начальные вращательные уровни и те полосы, которые дают линии, попадающие в рассматриваемый спектральный участок $\Delta\nu$. Число молекул в состоянии $A_{\nu''J''}$ при температуре T можно вычислить по формуле Больцмана, подставляя в нее энергию молекулы в данных колебательном и вращательном состояниях (см. [29]):

$$N_{Av''J''} = N_A \frac{\exp \left(-\frac{hc\omega_A \nu''}{kT} \right)}{Z_{vA}} \frac{(2J'' + 1) \exp \left(-\frac{hcB_A J''(J'' + 1)}{kT} \right)}{Z_{rA}}. \quad (5.110)$$

Здесь N_A — число молекул в электронном состоянии A ;

$$Z_{vA} = \left(1 - \exp \left(-\frac{hc\omega_A}{kT} \right) \right)^{-1} \approx \frac{kT}{hc\omega_A} \text{ и } Z_{rA} = \frac{kT}{hcB_A}$$

— колебательная и вращательная статистические суммы в нижнем электронном состоянии.

В основном полосе заполняют линии с большими вращательными числами $J'' \gg \gg 1$, для которых, согласно формулам (5.90), (5.91), можно приближенно положить

волновые числа равными

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{v''v'}} + (B_B - B_A)J''^2. \quad (5.111)$$

Интервал частот $\Delta\nu$ заполняют линии полосы $v''v'$, соответствующие вращательным числам от J'' до $J'' + \Delta J''$, где $\Delta J''$ определяется дифференцированием (5.111):

$$\frac{\Delta\nu}{c} = \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = (B_B - B_A) 2J'' \Delta J''. \quad (5.112)$$

Полагая, что $J'' \gg 1$, $\Delta J'' \ll J''$ (интервал $\Delta\nu$ достаточно мал), можно считать все $\Delta J''$ членов в сумме по J'' в формуле (5.109) одинаковыми. Пренебрегая единицей по сравнению с J'' , подставим в показатель экспоненты формулы (5.110) J''^2 по формуле (5.111) и заменим $\Delta\nu$ в формуле (5.109) выражением (5.112). Выделяя в формуле (5.109) экспоненциальный множитель, чтобы привести окончательное выражение в соответствие с приближенной формулой (5.107), получим

$$\bar{\kappa}_{\nu_{AB}} = \frac{\pi e^2}{mc} f_{BA} N_A \frac{h}{kT} \exp \left(-\frac{(E_B - E_A) - h\nu}{kT} \right) \varphi, \quad (5.113)$$

где безразмерный множитель φ равен

$$\varphi = \frac{kT}{hc|B_B - B_A|} \frac{1}{Z_{vA}Z_{rA}} \exp \left[-\frac{hc}{kT} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{00}} \right) \right] \times \\ \times \sum_{\text{полосы}} \exp \left\{ - \left[\omega_A v'' + \frac{B_A}{B_B - B_A} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{v''v'}} \right) \right] \right\}. \quad (5.114)$$

Здесь $1/\lambda_{00} = 1/hc(E_B - E_A)$ — по-прежнему волновое число, соответствующее электронному переходу в отсутствие колебаний и вращений (E_B и E_A — энергии электронных состояний с учетом нулевой энергии колебаний, $E = E_e + hc\omega/2$), $1/\lambda_{v''v'}$ — волновое число, соответствующее переходу $Av'' \rightarrow Bv'$ в отсутствие вращений. Если $B_B > B_A$, полосы имеют кант с «красной» стороны и простираются в «фиолетовую»; если же $B_B < B_A$, то наоборот (см. формулу (5.111)). Поэтому сумма по полосам в (5.114) распространяется на полосы с $\lambda_{v''v'} > \lambda$ при $B_B > B_A$ (как в случае γ -системы NO) и на полосы с $\lambda_{v''v'} < \lambda$ при $B_B < B_A$ (как в случае β -системы NO или в системе Шумана–Рунге O₂). Это положение прекрасно иллюстрируется рис. 5.24 и 5.25, на которых приведены рассчитанные в работе [21] значения сумм в множителе φ в зависимости от длины волны света для γ - и β -систем NO. Кривые имеют характер «чastoколов», причем каждый новый зубец появляется при включении в поглощение новой полосы. В случае γ -системы поглощение скачкообразно возрастает при уменьшении λ , а в случае β -системы — при увеличении λ .

Более точная формула (5.114) превращается в приближенную (5.107), если положить множитель φ , учитывающий вероятности различных колебательных переходов, равным единице (поскольку формула (5.107) относится к переходу из основного состояния, то при этом $E_A = 0$, $N_A = N$). Расчеты показывают, что коэффициент φ не очень сильно отличается от 1, так что формулой (5.107) можно пользоваться для грубой оценки.

Мы видим, что коэффициенты молекулярного поглощения можно теоретически рассчитать при помощи спектроскопических данных о молекулах, схемах уровней, колебательных и вращательных констант, потенциальных кривых, с точностью до постоянного множителя — силы осциллятора f , которая должна определяться из эксперимента. На рис. 5.26–5.28 приведены результаты расчетов множителей φ_λ

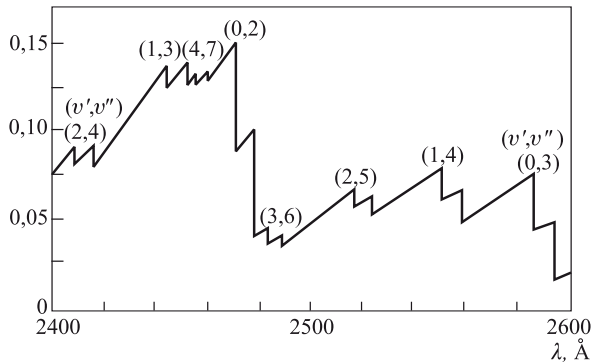


Рис. 5.24. Коэффициент спектрального поглощения в γ -системе NO в относительных единицах, $T = 8000$ К. Скачок поглощения при $\lambda = 2480$ Å соответствует включению колебательного перехода 0–2

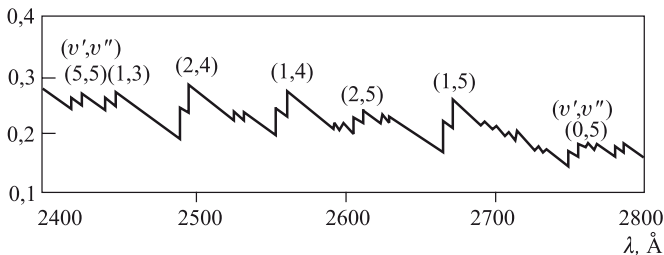


Рис. 5.25. Коэффициент спектрального поглощения в β -системе NO в относительных единицах, $T = 8000$ К

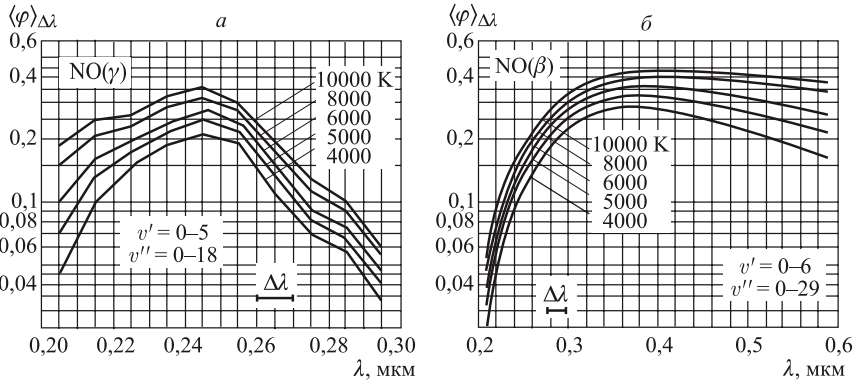
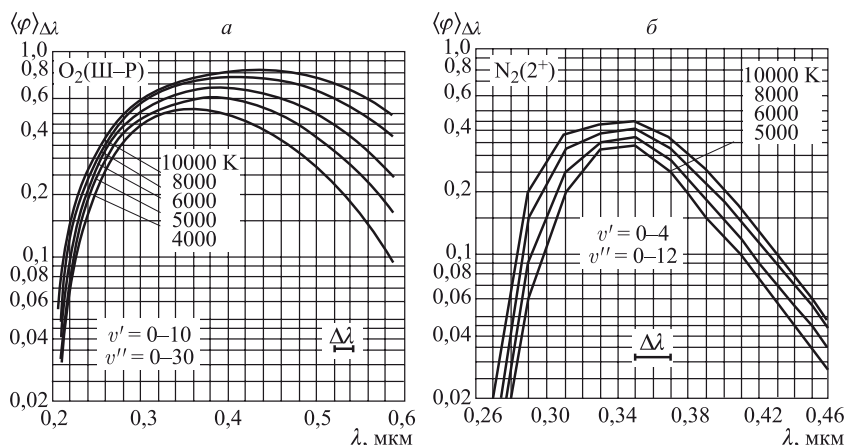
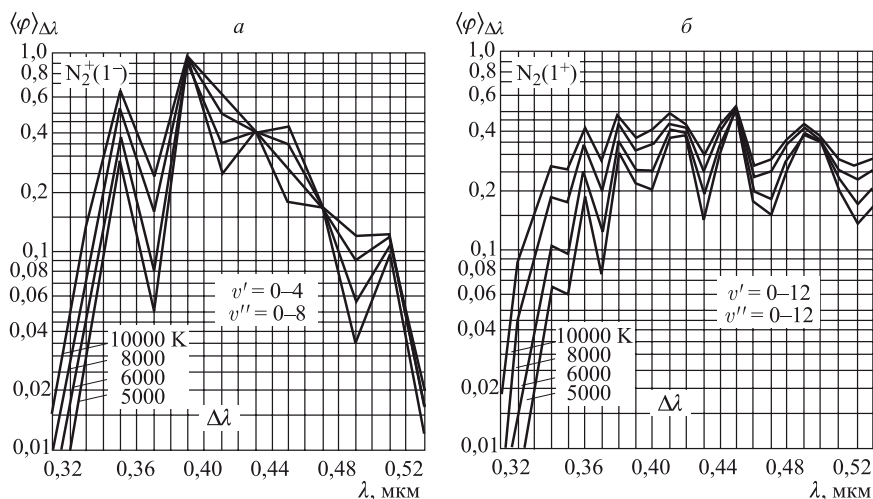


Рис. 5.26. Множитель φ для γ - и β -систем NO

при нескольких температурах для важнейших систем поглощения¹⁾, определяющих поглощательные свойства нагретого воздуха: γ - и β -систем NO, системы Шу-

¹⁾ φ_λ сглажены путем усреднения в небольших интервалах $\Delta\lambda$, что необходимо для сравнения с экспериментальными данными, где $\Delta\lambda$ определяется аппаратурой (монокроматором).

Рис. 5.27. Множитель φ для системы Шумана–Рунге O_2 и 2^+ -системы N_2 Рис. 5.28. Множитель φ для 1^- -системы N_2^+ и 1^+ -системы N_2

мана–Рунге O_2 , 1^+ , 2^+ -систем N_2 и 1^- -системы N_2^+ (ионизованной молекулы азота); значения $1/\lambda_{00}$ для этих систем представлены в табл. 5.6. Таблица сил осцилляторов для этих систем приводится в следующем параграфе. Рисунки 5.26–5.28 взяты из работы [8].

4. Воздух

§ 21. Оптические свойства нагретого воздуха. Вопрос о поглощении и излучении света нагретым воздухом имеет первостепенное значение для таких практически важных задач, как изучение явлений, происходящих в огненном шаре сильного взрыва (см. гл. IX), расчет радиационного нагрева баллистических ракет и искусственных спутников при входе в атмосферу и др. Для первой задачи существен широкий диапазон температур от обычных и до сотен тысяч и даже миллиона градусов.

Для второй задачи наибольший интерес представляют температуры $\sim 5000\text{--}20\,000\text{ К}$, которые развиваются в ударной волне перед телами, движущимися в атмосфере со скоростями порядка нескольких или 10 км/с . Широкий диапазон плотностей, с которыми приходится иметь дело, от $\sim 10\varrho_0$ (в ударной волне, распространяющейся по воздуху нормальной плотности ϱ_0) и до очень малых $\sim 10^{-3}\text{--}10^{-4}\varrho_0$ и даже меньше, имеющих в центральных областях огненного шара и на больших высотах.

Холодный воздух, как известно, прозрачен для видимого света. Поглощение начинается в ультрафиолетовой области спектра и связано с системой полос Шумана–Рунге молекул кислорода. Фактически заметной величины поглощение достигает при $\lambda \approx 1860\text{ \AA}$. Экспериментальная кривая коэффициента поглощения холодного воздуха нормальной плотности в зависимости от длины волны показана на рис. 9.3 в § 2 гл. IX.

При температурах выше $15\,000\text{--}20\,000\text{ К}$, когда молекулы почти полностью диссоциированы на атомы и последние заметно ионизованы, поглощение света в непрерывном спектре складывается из фотоэлектрического поглощения атомами и ионами и тормозного поглощения в поле ионов. Эти механизмы были подробно рассмотрены разд. 1 настоящей главы, где были даны оценочные формулы для вычисления коэффициентов поглощения и средних пробегов излучения, основанные на приближении водородоподобности. В табл. 5.2 § 8 были приведены результаты расчетов средних пробегов в воздухе в области многократной ионизации, т. е. при температурах выше примерно $50\,000\text{ К}$. При температурах ниже $\sim 15\,000\text{ К}$ в поглощении участвуют все рассматривавшиеся выше механизмы, причем сравнительная роль различных составляющих очень сильно зависит от частоты света и от термодинамических условий: температуры и плотности. К составляющим непрерывного и квазинепрерывного поглощения относятся: молекулярные переходы в молекулах, присутствующих в нагретом воздухе, N_2 , O_2 , N_2^+ , NO , NO_2 , фотоэлектрическое поглощение частицами O_2 , N_2 , NO , O , N , O^+ , свободно-свободные переходы в поле ионов O^+ , N^+ , NO^+ , O_2^+ , N_2^+ , а также, возможно, в поле нейтральных атомов и молекул.

Для конкретных расчетов коэффициентов поглощения необходимо, конечно, знание концентраций всех указанных компонент воздуха, а также концентрации свободных электронов (см. гл. III).

Оптические свойства нагретого воздуха экспериментально исследовались при помощи ударной трубы в лаборатории AVCO в США. Экспериментальные и расчетные данные изложены в работах [8, 31, 32, 32а, 43–46] и обзорах [28, 30, 47] (см. также работы [33, 48]).

Расчетам коэффициентов поглощения и излучательной способности нагретого воздуха посвящен цикл работ Л. М. Бибермана и его сотрудников. Обзор этих работ имеется в статье [56], в которой рассматриваются вопросы радиационного нагрева тела, движущегося в атмосфере с гиперзвуковой скоростью. В статье дана обширная библиография. Вопросам поглощения света в воздухе посвящен также номер журнала [64].

Основным результатом экспериментального изучения оптических свойств воздуха в ударной трубе является определение сил осцилляторов для важнейших молекулярных переходов.

На опыте измеряется спектральная интенсивность излучения столба нагретого газа при различных температурах и плотностях. В прямой ударной волне изучаются температуры порядка $3000\text{--}5000\text{ К}$, в отраженной — порядка 8000 К . Пересчет измеренных интенсивностей на коэффициент поглощения можно сделать с помощью известной формулы для потока излучения от нагретого слоя данной толщины d (см. § 7, гл. II, формула (2.38)). Количество лучистой энергии в интервале длин волн

$d\lambda$, выходящей в 1 с 1 см² поверхности слоя в единицу телесного угла нормально к поверхности, равно

$$I_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda p} d\lambda \left(1 - e^{-\kappa'_{\lambda} d}\right), \quad (5.115)$$

где $I_{\lambda p}$ — соответствующая величина для абсолютно черного тела,

$$I_{\lambda p} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda} - 1\right)},$$

а $\kappa'_{\lambda} = \kappa_{\lambda}(1 - e^{-hc/kT\lambda})$ — коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное испускание. Если слой оптически тонкий, самопоглощением в нем можно пренебречь (даже в центрах линий): $\kappa'_{\lambda} d \ll 1$. Интенсивность излучения в этом случае определяется лучеиспускательной способностью:

$$I_{\lambda} = \frac{J_{\lambda} d}{4\pi} = I_{\lambda p} \kappa'_{\lambda} d.$$

Отношение измеренной интенсивности излучения из расчета на слой единичной толщины к интенсивности абсолютно черного тела дает непосредственно исправленный коэффициент поглощения κ'_{λ} . Сила осцилляторов для системы полос Шумана–Рунге была определена путем исследования интенсивности излучения в чистом кислороде при сравнительно низких температурах ~ 3000 – 4000 К, получающихся в прямой волне.

При таких температурах степень ионизации очень мала, отрицательных ионов кислорода мало и практически все поглощение связано с молекулярными переходами. Из этих данных по формулам (5.113), (5.114) с использованием расчетных коэффициентов φ_{λ} была выведена сила осциллятора $f_{\text{Ш-Р}} = 0,028 \pm 0,008$. В интервале длин волн от 3300 до 4700 Å она оказалась не зависящей от λ, T, ρ .

Данные по силам осцилляторов NO и N₂ были получены путем обработки спектров излучения в воздухе при разных температурах и плотностях.

Эти величины извлекались последовательно при изучении тех участков спектра, температур и плотностей, при которых еще неизвестные механизмы играют небольшую роль, за исключением одного; поглощение за счет уже известных механизмов из измеренных величин исключалось.

Таблица 5.8. Силы осцилляторов для важнейших систем полос

Система	O ₂ (Ш-Р)	NO _β	NO _γ	N ₂ (2 ⁺)	N ₂ ⁺ (1 ⁻)	N ₂ (1 ⁺)
f	0,028	0,006	0,001	0,09	0,18	0,025
Погрешность	$\pm 0,008$	$\pm 0,002$	$\pm 0,0005$	$\pm 0,03$	$\pm 0,07$	$\pm 0,008$
Интервал λ , Å	3300–4700	3500–5000	2500–2700	2900–3300	3300–4500	10 460

Таким образом, были найдены силы осцилляторов для всех важных систем ¹⁾; они собраны в табл. 5.8.

На рис. 5.29 изображены экспериментальные и теоретически рассчитанные интенсивности излучения при $T = 8000$ К, $\rho = 0,83 \rho_0$.

¹⁾ Для N₂ (1⁺)-системы f сильно зависит от λ вследствие резкого изменения междядерного расстояния с изменением λ .

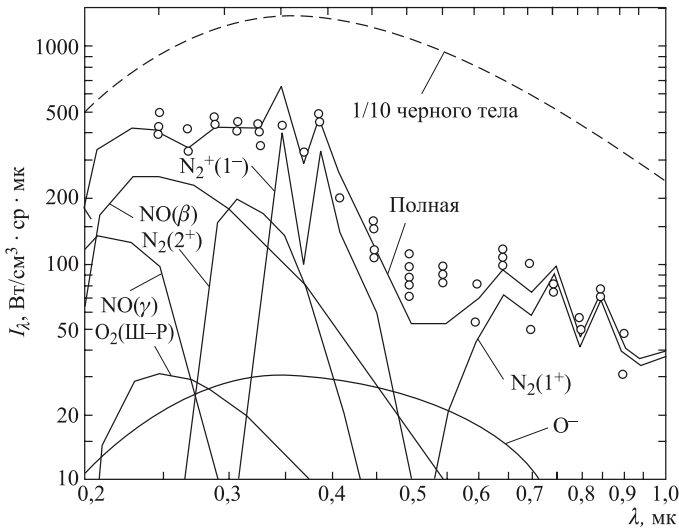


Рис. 5.29. Спектральная интенсивность излучения I_λ ($\text{Вт/см}^3 \cdot \text{ср} \cdot \text{мк}$) слоя воздуха толщиной $d \approx 1$ см, $T = 8000$ К, $\varrho = 0,83 \varrho_0$ (ϱ_0 — нормальная плотность). Показаны экспериментальные точки и рассчитанные кривые, отвечающие различным механизмам испускания. Пунктиром дана величина $0,1 I_{\lambda_p}$ ($1/10$ интенсивности излучения черного тела). Отношение I_λ/I_{λ_p} дает непосредственно $\varkappa'_\lambda$ (см^{-1}), поскольку $d \approx 1$ см. Рисунок взят из работы [8]

Для удобства вычисления коэффициентов поглощения воздуха приводим численные формулы для расчета отдельных составляющих в областях молекулярного поглощения и первой ионизации, т. е. при $T \lesssim 20\,000$ К.

$$\varkappa_{i \text{ мол}} = \frac{10^5 c_i \frac{\varrho}{\varrho_0}}{T} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \begin{cases} 9,5 \varphi_{\text{III-P}} e^{-71\,000/T} & \text{система Шумана-Рунге } \text{O}_2, \\ 2,04 \varphi_\beta e^{-65\,300/T} & \beta\text{-система NO}, \\ 0,34 \varphi_\gamma e^{-63\,500/T} & \gamma\text{-система NO}, \\ 30,6 \varphi_{2+} e^{-127\,500/T} & 2^+\text{-система N}_2, \\ 8,5 \varphi_{1+} e^{-84\,900/T} & 1^+\text{-система N}_2, \\ 61,2 \varphi_{1-} e^{-36\,800/T} & 1^-\text{-система N}_2^+, \end{cases}$$

$$\varkappa_{\text{O}^-} = 2,67 \cdot 10^{19} c_{\text{O}^-} \frac{\varrho}{\varrho_0} \sigma_{\text{O}^-}.$$

$$\varkappa_i (\text{Краммерс}) = \frac{2,56 \cdot 10^{12} c_i \frac{\varrho}{\varrho_0}}{T^2 x^3} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \begin{cases} e^{-140\,000/T} & \text{O}_2 \\ e^{-181\,000/T} & \text{N}_2, \\ e^{-158\,000/T} & \text{O}, \\ e^{-169\,000/T} & \text{N}, \\ e^{-108\,000/T} & \text{NO}, \end{cases}$$

$$\left(x = \frac{h\nu}{kT} = \frac{1,44}{\lambda T}\right)$$

$$\varkappa_{\text{NO}_2} = 2,67 \cdot 10^{19} c_{\text{NO}_2} \frac{\varrho}{\varrho_0} \sigma_{\text{NO}_2} \quad (T \text{ в К, } \lambda \text{ в см, } \varkappa \text{ в см}^{-1}).$$

Концентрации c_i всех частиц определены в этих формулах как отношения чисел частиц к числу исходных молекул в холодном воздухе. В формулы для коэффициентов молекулярного поглощения подставлены силы осцилляторов из табл. 5.8. Эффективный заряд в формулах для крамеровского поглощения принят равным 1¹⁾.

Концентрации отрицательных ионов кислорода можно вычислить по формуле Саха, зная концентрации атомов кислорода и свободных электронов. Эффективные сечения поглощения отрицательными ионами О даны на рис. 5.5 в § 5.

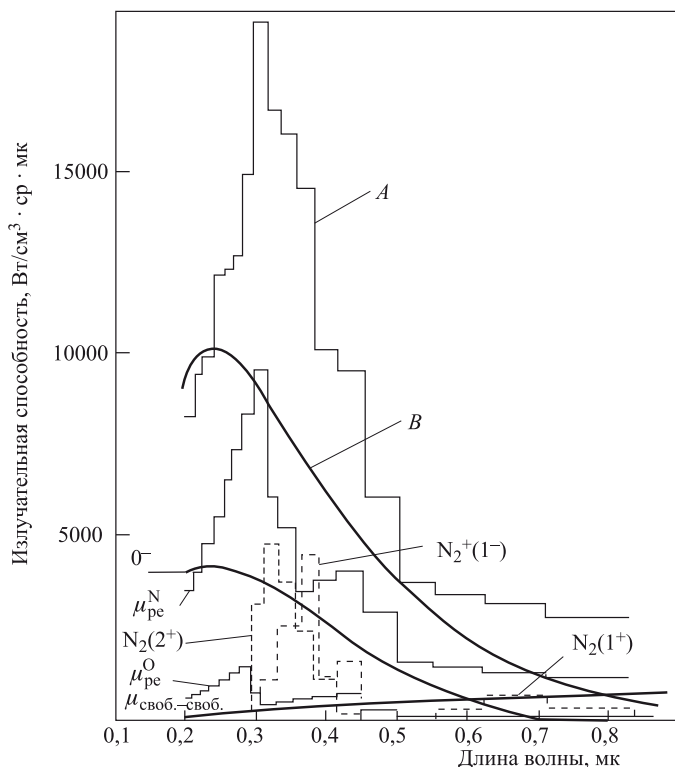


Рис. 5.30. Интенсивность испускания воздуха при $T = 12000$ K, $\rho = \rho_0$ (нормальная плотность). Показаны вклады различных механизмов: $\mu_{\text{своб.}}$ — свободно-связанные переходы; A — суммарное излучение; B — $1/10$ интенсивности излучения черного тела

Имеются экспериментальные данные, свидетельствующие о существовании отрицательного иона азота N^- [57]. Поглощение света этими ионами рассматривалось в работе [58]. Зная все составляющие коэффициентов поглощения, можно вычислить суммарные коэффициенты и испускательные способности для любых температур и плотностей. На рис. 5.30 и 5.31 показана полученная таким образом реконструкция радиации при нескольких значениях температуры и плотности (эти данные заимствованы из работы [28]). На графиках указаны вклады отдельных составляющих поглощения.

¹⁾ Поправочный множитель Бибермана и Нормана (см. § 7) не учитывается.

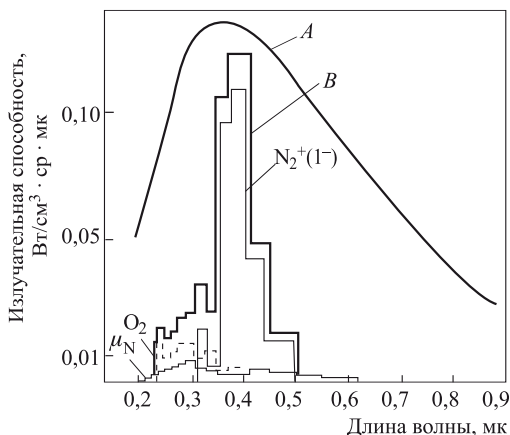


Рис. 5.31. Интенсивность испускания воздуха при $T = 8000$ К, $\varrho = 10^{-3} \varrho_0$. A — 10^{-5} интенсивности излучения черного тела; B — суммарное излучение; μ_N — свободно-связанные переходы

В работе [32] исследовался вопрос о свободно-свободном поглощении электронами в поле нейтральных атомов. Для этого измерялась лучеиспускательная способность при $T = 8000$ К, $\varrho/\varrho_0 = 0,85$ в инфракрасной области спектра с $\lambda \sim 20\,000$ – $40\,000$ Å, где по расчетам все другие механизмы должны играть малую роль. Оказалось, что приближенно коэффициент поглощения можно описать обычной формулой для тормозного поглощения с квадратом эффективного заряда $Z^2 = 0,04$ для атомов О и $Z^2 = 0,02$ для N. В видимой и ультрафиолетовой областях спектра, судя по этим данным, свободно-свободное поглощение в поле нейтральных атомов не должно играть существенной роли.

Коэффициенты поглощения красного света $\lambda = 6500$ Å в воздухе в ударной волне для двух значений температур были измерены И. Ш. Моделем [34]. В опытах Моделя детонационная волна выходила из взрывчатого вещества на границу с воздухом. Фотографическим путем измерялось изменение во времени интенсивности свечения поверхности фронта ударной волны в направлении, нормальном к поверхности. Если d — толщина слоя воздуха, охваченного ударной волной к моменту t , то интенсивность свечения поверхности фронта определяется формулой (5.115). Когда слой нагретого воздуха становится оптически толстым $\kappa'_\lambda d \gg 1$, фронт светится как черное тело и $I_\nu \approx I_{\nu p}$. Снимая кривую нарастания свечения $I_\nu(d)$, можно было измерить коэффициент поглощения. Независимо определялась температура за фронтом по яркости фронта в стадии, когда $\kappa'_\lambda d \gg 1$ и фронт светится как черное тело. И. Ш. Моделем были получены значения коэффициента поглощения для двух температур, $T = 10\,900$ К, $\kappa_\lambda = 3,7$ см $^{-1}$; $T = 7480$ К, $\kappa_\lambda = 1,66$ см $^{-1}$ ($\lambda = 6500$ Å, $\varrho/\varrho_0 \approx 10$). Первое значение удовлетворительно согласуется со значением, рассчитанным по приведенным формулам.

Основную роль играет поглощение в 1^+ -системе N_2 и крамерсовский механизм. Что же касается второй точки, то экспериментальное значение гораздо выше, чем то, которое дает теория¹⁾. Характерной особенностью всех рассмотренных выше составляющих поглощения (см. сводку формул, с. 270) является резкая, больцмановская

¹⁾ О причинах этого расхождения нельзя высказать определенного суждения.

зависимость от температуры с весьма значительными энергиями активации. При не очень высоких температурах порядка 3000–4000 К все коэффициенты в видимой области спектра становятся очень малыми, например, при $T = 4000$ К и $\varrho/\varrho_0 = 1$, $\kappa \sim 10^{-6} \text{ см}^{-1}$.

Таблица 5.9. Равновесные концентрации двуокиси азота в нагретом воздухе, $c_{\text{NO}_2} \cdot 10^4$

T, К	ϱ/ϱ_0			T, К	ϱ/ϱ_0		
	10	5	1		10	5	1
2000	1,11	0,79	0,35	3500	2,91	1,92	0,79
2600	2,02	1,42	0,63	4000	2,86	1,90	0,67
3000	2,24	1,58	0,69	5000	2,11	1,29	0,25

Примечание. $c_{\text{NO}_2} = \frac{\text{число молекул NO}_2}{\text{число исходных молекул в воздухе}}$.

При столь низких температурах основную роль в поглощении играет молекулярное поглощение двуокисью азота, которая присутствует в воздухе в незначительных количествах (см. табл. 5.9)¹⁾, но сильно поглощает свет в видимой и ультрафиолетовой областях спектра. Молекулярные полосы NO_2 образуют очень сложную систему с практически перекрывающимися линиями. На рис. 5.32 приведена зависимость эффективного сечения поглощения холодных молекул NO_2 по данным работы [35]. Сечение монотонно падает от $\sigma = 6,5 \times 10^{-19} \text{ см}^2$ до $\sigma \approx 10^{-20} \text{ см}^2$ в интервале длин волн от $\lambda = 4000 \text{ Å}$ до $\lambda = 7000 \text{ Å}$. Согласно измерениям [36] сечение поглощения в инфракрасной области очень мало: при $\lambda = 10\,000\text{--}20\,000 \text{ Å}$, $\sigma < 4,5 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2$.

В близкой ультрафиолетовой области при $\lambda = 3020 \text{ Å}$ сечение проходит через минимум [37]; это вместе с кривой рис. 5.32 свидетельствует о том, что максимум поглощения лежит в синей части спектра $\lambda \sim 4000 \text{ Å}$.

Следует ожидать, что при температурах порядка 2000–4000 К спектр поглощения сильно смещается в красную сторону и эффективное сечение NO_2 во всей видимой области спектра становится порядка нескольких единиц на 10^{-19} см^2 (подробнее см. об этом в статье [38]; см. также § 7 гл. IX).

Например, при концентрации молекул NO_2 в воздухе порядка 10^{-4} это дает коэффициент поглощения при нормальной плотности порядка 10^{-3} см^{-1} .

В работе [59] изучалась интенсивность излучения двуокиси азота при температурах 1400–2100 К (двуокись в смеси с аргоном нагревалась в ударной трубе). Получены абсолютные значения интенсивности в видимой части спектра.

В заключение отметим, что вопрос об оптических свойствах нагретого воздуха еще не является решенным и исследования в этой области продолжаются.

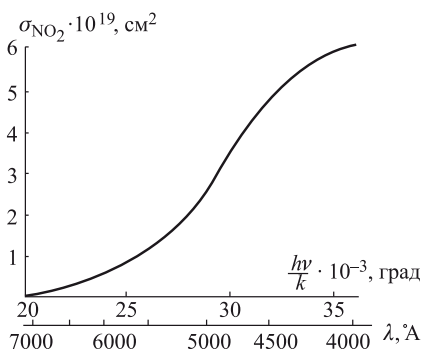


Рис. 5.32. Усредненное эффективное сечение поглощения света невозбужденными молекулами NO_2

¹⁾ Концентрации NO_2 были рассчитаны в работе [39].

5. Пробой и нагревание газа под действием сфокусированного лазерного луча

§ 22. Пробой. Изобретение лазеров и совершенствование лазерной техники открыли широкие возможности для изучения различных явлений, происходящих при взаимодействии мощных потоков излучения с веществом. В частности, несколько лет назад было открыто явление пробоя газов и образования «искры» под действием лазерного луча.

Опыты [65–72] показывают, что под действием светового потока достаточно большой интенсивности в газах, обычно прозрачных для соответствующего излучения, происходит пробой, т.е. образуются свободные электроны¹⁾. Для пробоя нужны очень большие потоки лучистой энергии, и при мощностях современных оптических генераторов (с модулированной добротностью) такие потоки удается получить только путем фокусировки лазерного луча линзой (рис. 5.33). Порог для пробоя, обычно исключительно резкий, принято характеризовать напряженностью электрического поля световой волны. На рис. 5.34 в качестве примера показаны измеренные в работе [65] пороговые поля для пробоя в аргоне и гелии при разных давлениях.

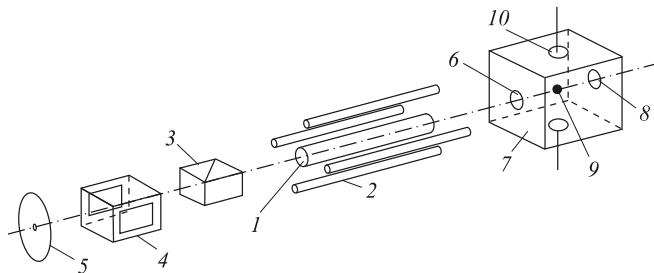


Рис. 5.33. Схема опыта по пробоев: 1 — рубин; 2 — ксеноновые лампы накачки; 3 — поляризатор; 4 — ячейка Керра; 5 — зеркало; 6 — линза; 7 — сосуд с газом; 8 — выходное отверстие; 9 — фокус; 10 — собирающие электроды

В этих опытах рубиновый лазер с модулированной добротностью давал импульсы с длительностью $3 \cdot 10^{-8}$ с и максимальной (пиковой) мощностью до ~ 30 МВт (энергия в импульсе до 1 Дж). Луч фокусировался линзой в кружок с радиусом, примерно, $r_0 = 10^{-2}$ см. Радиус фокусировки оценивался, во-первых, по угловой расходимости несфокусированного лазерного луча и, во-вторых, по размеру отверстия в золотой фольге, помещенной в фокусе, которое прожигал луч. Зная мощность лазера и площадь кружка в фокусе, можно вычислить средние по площадке поток лучистой энергии и электрическое поле в световой волне²⁾. Так, были получены значения поля, фигурирующие на рис. 5.34.

О возникновении пробоя обычно свидетельствует световая вспышка, подобная вспышке в искре. Иногда факт пробоя устанавливается путем вытягивания зарядов из области пробоя при помощи пары электродов, к которым прикладывается

¹⁾ Хорошо известно и изучено явление высокочастотного пробоя под действием излучения в микроволновом диапазоне частот [60].

²⁾ Например, при мощности 30 МВт и радиусе кружка 10^{-2} см поток энергии составляет примерно 10^{18} эрг/см² · с и поле $0,6 \cdot 10^7$ В/см.

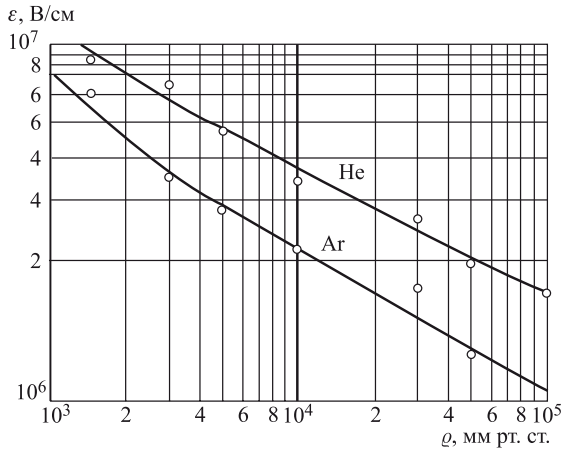


Рис. 5.34. Пробивающие поля в аргоне и гелии в зависимости от давления

небольшое напряжение. Помимо аргона и гелия исследовался и пробой в воздухе при нормальных условиях. Пороговые поля также имеют порядок 10^7 В/см.

Надо полагать, что при достаточно больших интенсивностях потока лучистой энергии или электрических полях в световой волне возможно прямое вырывание электронов из атомов под действием излучения. Соответствующая квантовомеханическая задача была решена Л. В. Келдышем [73], который нашел общее выражение для вероятности вырывания. В пределе низких частот оно переходит в известную формулу для вероятности туннельного эффекта под действием статического поля, а в случае достаточно высоких (и, в частности, оптических) частот описывает многоквантовый фотоэффект, когда ионизация происходит в результате одновременного поглощения n квантов, энергия которых $n h \nu$ превышает потенциал ионизации I . Вероятность многоквантового фотоэффекта пропорциональна n -й степени потока лучистой энергии или $\mathcal{E}^{2n}$, где $\mathcal{E}$ — напряженность электрического поля. Для атомов и молекул с высокими потенциалами ионизации, таких, как Ar, He, N_2 , O_2 , требуется большое число квантов: у рубинового лазера $h\nu = 1,8$ эВ и, например, для аргона $I = 15,8$ эВ, $n = 9$, а для гелия $I = 24,6$ эВ и $n = 14$. Поэтому вероятность вырывания исключительно резко зависит от поля. Оценки показывают, что для прямого вырывания электронов из атомов за время лазерного импульса нужны очень большие поля ($\sim 10^8$ В/см). Эти электрические поля почти на порядок больше тех средних полей, которые в настоящее время достигаются на опыте, поэтому при сравнительно малых полях ($\sim 10^6$ – 10^7 В/см) пробой происходит не за счет прямого вырывания электронов из атомов, а в результате развития электронной лавины.

Для начала развития лавины необходимо, чтобы в начале лазерного импульса в газе появились начальные «затравочные» электроны. По-видимому, многоквантовое поглощение света, скорее всего на примесных атомах с низкими потенциалами ионизации, и является источником образования затравочных электронов. Надо сказать, что распределение поля по площади кружка фокусировки не является равномерным. Существуют очень малые области с локальными полями, которые значительно превышают поле, среднее по площадке. В этих областях и зарождаются первые электроны, которые кладут начало лавине.

(Неравномерность распределения поля в фокусе связана с неоднородностью и расходимостью несфокусированного лазерного луча, а также является результатом

абберации линзы. Последний эффект детально исследован в работе Б. Я. Зельдовича и Н. Ф. Пилипецкого [83].)

Рассмотрим, как развивается электронная лавина.

Электроны поглощают световые кванты при столкновениях с нейтральными атомами (см. § 8а) и таким путем набирают энергию, достаточную для ионизации. В результате акта ионизации вместо одного «быстрого» электрона появляется два «медленных», которые снова набирают энергию под действием излучения, ионизируют атомы и т. д.

Наряду с поглощением под действием интенсивного светового потока происходит и вынужденное испускание квантов таких же частоты и направления, однако результирующий эффект является положительным — электрон в среднем приобретает энергию от излучения и ускоряется.

Скорость нарастания энергии электрона можно оценить с помощью формулы (5.57") для эффективного поглощения, которая как раз и описывает результирующий эффект истинного поглощения и вынужденного испускания квантов. Обозначим поток лучистой энергии

$$G = \frac{c}{8\pi} (\overline{\mathcal{E}^2} + H^2) = \frac{c \overline{\mathcal{E}^2}}{4\pi} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{с},$$

где $\overline{\mathcal{E}^2}$ — средний квадрат электрического поля в световой волне.

В единицу времени в единице объема поглощается энергия излучения $G\kappa_{\nu_n}$, а на один электрон $G\kappa_{\nu_n}/N_e$. Эта величина и представляет собою среднюю скорость нарастания энергии электрона:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 G}{\pi m c \nu^2} \nu_{\text{эф}} = \frac{e^2 \overline{\mathcal{E}^2}}{m \omega^2} \nu_{\text{эф}}. \quad (5.116)$$

Чтобы приобрести энергию, равную одному кванту $h\nu$, электрон должен испытать в среднем $h\nu \pi m c \nu^2 / e^2 G$ столкновений с атомами. Например, при потоке $G=10^{18}$ эрг/см² · с, поле $\sqrt{\overline{\mathcal{E}^2}} = 0,6 \cdot 10^7$ В/см и $h\nu = 1,8$ эВ это число равно 200. Чтобы набрать энергию, равную энергии ионизации I при отсутствии потерь энергии, нужно в $I/h\nu$ раз больше столкновений, например в гелии — 2700. При атмосферном давлении частота столкновений электрона с энергией $E \approx 10$ эВ в гелии составляет $\nu_{\text{эф}} \approx 2 \cdot 10^{12}$ с⁻¹, так что необходимое время равно примерно $2700/\nu_{\text{эф}} = 1,3 \cdot 10^{-9}$ с. За время действия лазерного импульса $3 \cdot 10^{-8}$ с появилось бы $3 \cdot 10^{-8} / 1,3 \cdot 10^{-9} = 23$ поколения электронов, т. е. на каждый «затравочный» электрон пришлось бы в среднем $2^{23} \approx 10^7$ электронов²⁾. Развитие лавины чрезвычайно чувствительно к интенсивности светового потока и плотности газа. Например, при увеличении потока или давления в два раза (поля — в 1,4 раза) скорость набора энергии и число поколений в лавине возросли бы вдвое, т. е. к концу импульса той же длительности на каждый «затравочный» электрон родилось бы не 10^7 , а 10^{14} новых

¹⁾ Ее можно интерпретировать следующим образом. Под действием переменного электрического поля световой волны на прямолинейное движение электрона накладываются осцилляции. Импульс осцилляции $p = e\mathcal{E}/\omega$, средняя энергия $\overline{p^2}/2m = e^2 \overline{\mathcal{E}^2}/2m\omega^2$. При столкновении с атомом направление скорости электрона резко меняется и величина, равная по порядку энергии осцилляции, присоединяется к энергии хаотического движения. За 1 с электрон испытывает $\nu_{\text{эф}}$ столкновений, следовательно, и прирост энергии хаотического движения оказывается равным величине (5.116).

²⁾ Число электронов в лавине нарастает с течением времени по закону $N_e = N_{e0} \exp(t/\theta)$, где $\theta \ln 2$ — время удвоения числа электронов.

электронов. Этой исключительной чувствительностью и объясняется обнаруженное на опыте существование резкого порога для пробоя газа как по мощности лазерного импульса, так и по давлению.

Изложенные простые соображения о наборе энергии электрона под действием световой волны намечают лишь схему основного процесса. На самом деле развитие электронной лавины протекает значительно сложнее. Существенную роль играет возбуждение атомов электронами, энергия которых еще недостаточна для ионизации, но достаточна для возбуждения. При не очень больших полях возбуждение тормозит развитие лавины, так как в акте возбуждения электрон сбрасывает накопленную энергию и должен начать набор энергии сначала. При больших полях (больших 10^7 или нескольких единиц 10^7 В/см) возбуждение атомов, напротив, способствует развитию лавины, так как возбужденные атомы быстро ионизируются под действием излучения (в результате либо одновременного, либо последовательного поглощения небольшого числа квантов). В легких газах, таких, как гелий, значительную роль играют и потери энергии электронов за счет упругих соударений с атомами¹⁾. В некоторых случаях (при малом объеме фокусировки или при низкой плотности газа) возможен диффузионный уход электронов из объема фокуса.

В условиях, когда развитие лавины тормозится за счет потерь энергии электронов на возбуждение атомов, простая формула для набора энергии электрона типа (5.116), даже с учетом отрицательного члена потерь энергии, не в состоянии описать сложный процесс и приходится рассматривать кинетическое уравнение для функции распределения электронов по энергии. Это было сделано в работе авторов [62], где при некоторых допущениях вычислялись пороговые для пробоя поля и было получено удовлетворительное согласие с результатами опытов [65] с аргонном и гелием. Вопросам пробоя газа в фокусе лазерного луча посвящены также теоретические работы [73–76] и обзор [86].

§ 23. Поглощение лазерного луча и нагревание газа после первичного пробоя. Если поток лучистой энергии в фокусе заметно превышает пороговую для пробоя величину, газ ионизируется очень сильно и образующаяся плазма практически полностью поглощает луч, теперь уже за счет свободно-свободных переходов электронов в поле ионов; при этом газ нагревается до высоких температур. Так, например, измерения интенсивности рентгеновского излучения из области фокуса, сделанные в опытах [71], показали, что яркостная и цветовая температуры излучения, которые характеризуют температуру электронов, составляют при мерно 600 000 К. В этих опытах изучался пробой в атмосферном воздухе при энергии импульса рубинового лазера 2,5 Дж, длительности $4 \cdot 10^{-8}$ с и радиусе кружка фокусировки $r_0 = 10^{-2}$ см (порогу пробоя при тех же длительности и радиусе соответствует энергия около 1 Дж).

Рассмотрим, как протекает процесс поглощения луча, и оценим температуру, до которой нагревается газ (это было сделано в работе одного из авторов [77]). Предположим, что в фокусе, в самом узком месте светового канала (рис. 5.35), где поток

¹⁾ При каждом соударении электрон в среднем теряет долю $2m/M$ своей энергии (где M — масса атома). Поэтому с учетом упругих потерь формула (5.116) приобретает вид $\frac{dE}{dt} = \nu_{эф} \left[\frac{e^2 \mathcal{E}}{m\omega^2} - \frac{2mE}{M} \right]$. Электрон в среднем не может приобрести энергию, превышающую $E_m = \frac{M}{2m} \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{m\omega^2}$. Например, для гелия при поле $6 \cdot 10^6$ В/см $E_m = 33$ эВ. В действительности в правой части выражения для упругих потерь вместо E должна стоять разность средних энергий электронов и атомов (ионов), однако в данном случае атомный газ — холодный.

лучистой энергии максимален, произошел пробой и уже достигнуты высокие степень ионизации и температура. Свет поглощается в слое порядка длины пробега квантов l_ν и нагревает газ. Длину поглощения квантов можно оценить с помощью формулы (5.21), предварительно умножив коэффициент κ_ν на величину $1 - e^{h\nu/kT} \approx h\nu/kT$ ($h\nu = 1,8$ эВ $\ll kT$), учитывающую вынужденное испускание. В воздухе нормальной плотности при температурах 10^5 – 10^6 К длины пробега оказываются равными $(2\text{--}7) \times 10^{-3}$ см (степень ионизации или заряд ионов $Z = 2,7\text{--}6,6$).

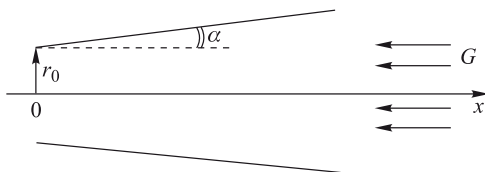


Рис. 5.35. Схема светового канала в области фокуса

Одна из наиболее примечательных особенностей процесса, довольно очевидная физически и обнаруженная экспериментально [69, 71], состоит в перемещении зоны поглощения луча навстречу световому потоку.

Измеренные в этих опытах скорости были равны примерно 100 км/с ¹⁾. Легко понять причину перемещения зоны поглощения. Световые кванты сильно поглощаются в высокоионизованной среде. Как только степень ионизации перед поглощающим в данный момент слоем газа по той или иной причине достигает достаточно большой величины, новый слой становится непрозрачным и начинает интенсивно поглощать луч. Таким образом, по световому каналу навстречу лучу распространяется «волна поглощения и нагревания». Этот эффект препятствует выделению всей энергии импульса в очень малом объеме фокуса, где раньше всего происходит пробой, и ограничивает нагревание газа.

Можно указать три различных и независимых механизма, которые приводят к возникновению волны поглощения.

1. Если поток лучистой энергии в фокусе заметно превышает порог для пробоя, то он является надпороговым и на некотором протяжении расширяющегося по направлению к линзе светового канала. Пробой происходит и в этих частях канала, но с запаздыванием по отношению к самому узкому месту, тем большим, чем больше сечение канала, т. е. меньше поток. Таким образом, навстречу лучу движется «волна пробоя».

2. Нагретый газ в поглощающем слое расширяется и посылает во всех направлениях ударную волну, в том числе и вдоль светового канала, навстречу лучу. В ударной волне газ нагревается и ионизируется, так что зона поглощения света и энерговыделения в газе перемещается вслед за фронтом ударной волны. Этот гидродинамический механизм во многом сходен с детонацией взрывчатых веществ.

Детонационный механизм был отмечен в статье Ремсдена и Савича [78], однако в этой работе содержатся в корне неверные суждения о температуре нагревания. Критику этой работы см. в статье [77].

3. Газ перед поглощающим слоем ионизируется и приобретает способность поглощать свет за счет поглощения теплового излучения, выходящего из высоконагретой

¹⁾ Скорость измерялась при помощи фоторазвертки процесса, а также по доплеровскому смещению спектральных линий.

области газа (из-за фронта волны поглощения). Этот механизм назовем «радиационным».

Эффективность каждого из этих механизмов характеризуется той скоростью перемещения волны поглощения, которую он дает, причем реальная волна движется с самой большой из возможных скоростей ¹⁾.

Волну поглощения в некотором смысле можно рассматривать как гидродинамический разрыв (см. гл. I). В системе координат, связанной с волной, процесс является квазистационарным. Действительно, за время Δt , в течение которого волна проходит расстояние порядка своей ширины Δx , поток света и скорость волны $D = \Delta x / \Delta t$ не успевают сильно измениться. ($\Delta x \approx l_\nu \lesssim 10^{-2}$ см; $D \approx 100$ км/с; $\Delta t \lesssim 10^{-9}$ с.)

Составим баланс энергии, отвлекаясь пока от того обстоятельства, что при нагревании газ приходит в движение. На 1 см^2 поверхность волны за время dt падает энергия Gdt , где G — поток лучистой энергии. Она расходуется на нагревание массы $\rho_0 D dt$, которая захватывается волной за это время (ρ_0 — начальная плотность газа). Следовательно, удельная внутренняя энергия $\varepsilon(T)$, которую приобретает газ после полного поглощения светового потока определяется уравнением

$$\rho_0 D \varepsilon(T) = G. \quad (5.117)$$

Это соотношение выражает просто закон сохранения энергии и не зависит от конкретного механизма распространения волны.

При более детальном рассмотрении следует исходить из общих законов сохранения массы, импульса и энергии при переходе газа через волну, точно так же, как это делается при выводе соотношений на фронте ударной волны (см. гл. I). В результате получается уравнение «ударной адиабаты» волны поглощения, которая связывает давление и плотность газа за фронтом волны с начальной плотностью и падающим на волну потоком энергии G ²⁾. Ударная адиабата волны поглощения схематически изображена на рис. 5.36.

Уравнение баланса энергии типа (5.117) при учете работы сжатия и изменения кинетической энергии газа изменяется немного. Изменение сводится к тому, что в уравнении вместо G появляется несколько отличная величина $G\beta$, причем значения коэффициента β заключены в весьма узком интервале $1 < \beta \leq (2\gamma)/(\gamma + 1)$, где γ — показатель адиабаты газа. Для воздуха при температурах 10^5 – 10^6 К $\gamma \approx 1,33$ и $1 < \beta < 1,14$, т.е. элементарное уравнение энергии (5.117) оказывается всегда справедливым с достаточной точностью. Это уравнение связывает скорость волны поглощения и температуру нагревания и позволяет по измеренной на опыте скорости оценить температуру, даже если не известен механизм распространения волны поглощения.

Как и для ударной волны, скорость волны D определяется наклоном прямой, проведенной на диаграмме p, V ($V = 1/\rho$) рис. 5.36 из точки начального состояния

¹⁾ Оценки показывают, что нагрев и ионизация перед поглощающим слоем, связанные с электронной теплопроводностью и диффузией электронов, играют малую роль.

²⁾ Несмотря на общие черты, оно отличается от ударной адиабаты взрывчатого вещества, в котором также происходит энерговыделение, так как в ВВ энерговыделение на грамм есть величина постоянная, а при поглощении света энерговыделение на грамм зависит от скорости волны.

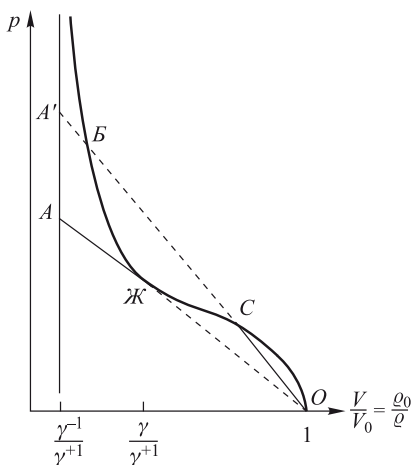


Рис. 5.36. Ударная адиабата волны поглощения

ся и нагревается ударной волной до состояния A , а затем, получая дополнительно энергию за счет поглощения света, расширяется вдоль прямой $AЖ$, достигая точки Жуге к моменту окончания энерговыделения.

Минимальная скорость волны поглощения равна

$$D = \left[2(\gamma^2 - 1) \frac{G}{\varrho_0} \right]^{1/3}. \quad (5.118)$$

Энергия нагревания при этом режиме имеет максимально возможную величину, равную

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)(\gamma + 1)} D^2 = \frac{2^{2/3} \gamma}{(\gamma^2 - 1)^{1/3} (\gamma + 1)} \left(\frac{G}{\varrho_0} \right)^{2/3}. \quad (5.119)$$

Если какой-нибудь из механизмов ионизации, например механизм пробоя при данном потоке G , дает скорость распространения волны, которая превышает скорость «нормальной детонации» (5.118), то ударная волна в световом канале не образуется. Газ, поглощая световой поток, переходит из начального состояния O в конечное C путем непрерывного нагревания и сжатия вдоль прямой OC , причем повышение давления и плотности в данном случае являются не причинами, а следствиями возникновения волны. Волна при этом распространяется по остающемуся за ней газу со сверхзвуковой скоростью¹⁾. Приведем численный пример. При значениях $G = 2 \cdot 10^{18}$ эрг/см² · с, $\varrho = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\gamma = 1,33$, соответствующих опыту [71], по формулам (5.118) и (5.119) получается $D = 133$ км/с, $\varepsilon = 1,35 \cdot 10^{14}$ эрг/г, чему в равновесии соответствует температура $T = 910\,000$ К (опытные значения $D = 110$ км/с, $T = 600\,000$ К). Если учесть потери энергии на боковое расширение газа, вследствие которых «действующий» поток G уменьшается примерно вдвое, то

O в точку конечного состояния газа за волной. Из рис. 5.36 видно, что при данном потоке лучистой энергии G существует минимально возможная скорость распространения волны, соответствующая точке конечного состояния $Ж$. Это так называемая точка Жуге, в которой скорость волны относительно нагретого вещества за нею в точности совпадает с местной скоростью звука. Физический смысл точки Жуге и причины, по которым соответствующий режим осуществляется при детонации взрывчатого вещества, были разъяснены одним из авторов [81], а также независимо фон Нейманом и Дерингом. С вопросами теории детонации подробно можно ознакомиться в книге [82].

При меньшей эффективности других механизмов ионизации (поджигания) по сравнению с ионизацией ударной волной осуществляется именно этот гидродинамический (детонационный) режим. Газ при этом сжимается

¹⁾ Гидродинамические режимы с ионизацией ударной волной, но скоростью, превышающей детонационную ($O \rightarrow A' \rightarrow B$), не осуществляются. Движение за волной при этом было бы дозвуковым, и расширение нагретого газа за волной тотчас ослабило бы волну, переводя ее в режим «нормальной детонации».

получаются значения $G = 105$ км/с, $\varepsilon = 8,5 \cdot 10^{13}$ эрг/г, $T = 720\,000$ К, которые совсем близки к опытным.

Как показано в работе [77], скорость волны «пробоя» можно оценить по формуле $D = r_0/t_k \operatorname{tg} \alpha$, где r_0 — минимальный радиус светового канала в фокусе; α — угол раствора светового канала (см. рис. 5.35), а t_k — момент первичного пробоя в фокусе, отсчитываемый от некоторого эффективного начала лазерного импульса. Например, для опытов [77] $r_0 = 10^{-2}$ см, $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$, $t_k \approx 10^{-8}$ с, скорость волны «пробоя» $D \approx 100$ км/с близка к скорости детонации.

В опытах [69] использовалась короткофокусная линза, которая давала $r_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ см, $\operatorname{tg} \alpha = 1$; t_k было равно $7 \cdot 10^{-9}$ с, при этом скорость пробоя составляла 6 км/с, тогда как скорость детонации — более 100 км/с, т. е. в этих опытах механизм пробоя заведомо не играл роли. Механизм пробоя является ведущим и определяет движение волны поглощения при очень мощных, коротких лазерных импульсах и длиннофокусных линзах (малых углах α). Этот механизм играл главную роль в опытах работы [72].

Значительные трудности представляет сколько-нибудь точное рассмотрение радиационного режима. Приближенное вычисление скорости этого режима [77] приводит к довольно громоздким формулам, которые мы здесь не будем выписывать. Укажем лишь, что скорость радиационного режима оказывается весьма близкой к скорости детонаций, причем обе скорости примерно одинаково зависят от мощности лазера, так что в рамках точности теории не представляется возможным отдать предпочтение одному из этих двух механизмов. Практически это означает, что в тех случаях, когда эффективность механизма пробоя мала, реальная волна движется со скоростью, примерно совпадающей со скоростями, соответствующими остальным двум режимам.

После окончания лазерного импульса в газе остается высоко нагретый канал (при скорости волны 100 км/с и длительности импульса $3 \cdot 10^{-8}$ с, длина его составляет 3 мм). Газ расширяется, и последующий процесс подобен процессу сильного взрыва.

Отметим работы Н. Г. Басова и О. Н. Крохина [79], а также работу [80], в которых даны предварительные оценки мощностей лазеров, необходимых для нагревания водорода до термоядерных температур.

Более подробно вопросы пробоя и нагревания газов под действием лазерного луча рассмотрены в обзорной статье [86] и монографии [89] одного из авторов; там же приводится полный список литературы.

Глава VI

СКОРОСТИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗАХ

1. Молекулярные газы

§ 1. Установление термодинамического равновесия. Состояние газа зависит от концентраций различных компонентов: атомов, молекул, ионов, электронов и распределения внутренней энергии по степеням свободы. В общем случае внутренняя энергия газа складывается из энергии поступательного движения частиц, вращательной и колебательной энергии молекул, химической энергии, энергии ионизации и электронного возбуждения атомов, молекул, ионов. В условиях полного термодинамического равновесия состояние полностью определяется элементарным составом газовой смеси и значениями двух каких-либо макроскопических параметров, например, плотности и удельной внутренней энергии.

Возбуждение каждой из степеней свободы ¹⁾ и установление термодинамического равновесия требуют некоторого времени, масштабом которого служит так называемое время релаксации. Времена релаксации для возбуждения различных степеней свободы часто очень сильно различаются, поэтому возможны такие условия, когда термодинамическое равновесие устанавливается не во всех, а только в части степеней свободы. Скорее всего равновесие устанавливается в поступательных степенях свободы частиц. Если в начальный момент существовало какое-то произвольное распределение атомов или молекул по скоростям, то уже после немногих упругих соударений частиц с близкими массами распределение по скоростям в этих частицах становится максвелловским. Установление максвелловского распределения происходит в результате обмена импульсом и кинетической энергией частиц, причем при столкновениях частиц с не сильно различающимися массами они обмениваются импульсом и энергией, которые в среднем такого же порядка, что и сами импульсы и энергии соударяющихся частиц. Поэтому время релаксации для установления максвелловского распределения в частицах данного сорта или в частицах разных сортов, но с близкими массами, имеет порядок среднего времени между газокинетическими столкновениями:

$$\tau_{\text{пост}} \sim \tau_{\text{ст}} = \frac{l}{\bar{v}} = \frac{l}{n\bar{v}\sigma_{\text{ст}}}, \quad (6.1)$$

¹⁾ Для краткости мы будем говорить о диссоциации, химических превращениях, ионизации как о «степенях свободы».

где l — средняя газокинетическая длина пробега; $\bar{v}$ — средняя скорость частиц; n — число частиц в 1 см^3 , а $\sigma_{\text{ст}}$ — газокинетическое эффективное сечение. Например, в воздухе при нормальных условиях $l \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, $\tau_{\text{пост}} \sim 10^{-10} \text{ с}$.

Обычно газокинетические времена очень малы по сравнению с временами, в течение которых заметным образом меняются макроскопические параметры газа, скажем, плотность и энергия. Поэтому, как правило, можно в каждый момент приписывать газу «поступательную» температуру — величину, характеризующую среднюю кинетическую энергию поступательного движения частиц¹⁾. В состоянии неполного термодинамического равновесия, когда говорят о термодинамически равновесных степенях свободы, имеют в виду, что распределение энергии (и концентраций соответствующих компонентов газовой смеси) в этих степенях свободы находится в равновесии с «поступательной» температурой газа.

Величины же, соответствующие неравновесным степеням свободы, могут быть произвольными; они зависят от многих факторов, в том числе и от предыдущей «истории» процесса, в котором участвует газ.

Такие условия встречаются в быстропотекающих газодинамических процессах или в областях резкого изменения макроскопических параметров, например, в ультразвуковой волне или во фронте ударной волны, когда временные масштабы явления²⁾ оказываются сравнимыми или даже гораздо меньшими соответствующих времен релаксации. В этом случае распределения энергии и концентраций соответствующих частиц определяются не просто температурой, плотностью и элементарным составом газа, как при термодинамическом равновесии, но еще и кинетикой физико-химических процессов, приводящих к установлению равновесия в данных степенях свободы.

В некоторых случаях времена релаксации для установления термодинамического равновесия в определенной степени свободы бывают настолько большими, что неравновесное состояние системы оказывается весьма устойчивым, стационарным. Обычно такое положение возникает в смеси газов, способной к химическому превращению, которое фактически не происходит из-за большой энергии активации, необходимой для протекания реакции. Типичным примером может служить гремучая смесь $2\text{H}_2 + \text{O}_2$, которая в состоянии строгого термодинамического равновесия при низких температурах должна была бы полностью превратиться в воду. О таких случаях говорят как о «ложных» равновесиях.

Как уже было отмечено выше, времена релаксации для установления равновесия в различных степенях свободы часто очень сильно различаются. Если при данных температуре и плотности переходить от быстрых к более медленным релаксационным процессам, то обычно можно установить такую последовательность: поступательные степени свободы, вращения молекул, колебания молекул, диссоциация и химические реакции, ионизация и электронное возбуждение.

Благодаря весьма резкому различию во временах релаксации, каждый из релаксационных процессов можно изучать в отдельности, выделяя его из остальных и предполагая, что в легко возбуждаемых степенях свободы равновесие существует в каждый момент, а более медленные релаксационные процессы вообще не идут на протяжении рассматриваемых времен.

¹⁾ Следует отметить, что при изотропном распределении частиц по направлениям скоростей поступательного движения давление газа определяется энергией поступательного движения частиц, находящихся в 1 см^3 : $p = 2E_{\text{кин}}/3$, совершенно независимо от того, каково распределение частиц по абсолютным значениям скоростей, т.е. существуют ли максвелловское распределение и «температура» или нет.

²⁾ В ударной волне это — время резкого сжатия газа.

Все релаксационные процессы обладают некоторыми общими чертами, независимо от их природы. А именно, приближение к состоянию термодинамического равновесия в данной степени свободы происходит асимптотически, по экспоненциальному закону. Если характеризовать «состояние» данной степени свободы каким-либо параметром, скажем, числом частиц N (например, числом молекул, колебания которых возбуждены, или числом молекул данного сорта в случае химических превращений), то при данных температуре и плотности (и элементарном составе) газа можно записать

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_p - N}{\tau}, \quad (6.2)$$

где N_p — равновесное число частиц, а τ — некоторая величина, которая характеризует скорость приближения к равновесию. Из решения уравнения (6.2),

$$N = N_{\text{нач}} e^{-t/\tau} + N_p (1 - e^{-t/\tau}), \quad (6.3)$$

видно, что τ является временем релаксации для данного процесса. Вообще говоря, кинетика физико-химических процессов далеко не всегда описывается линейным уравнением типа (6.2). Однако в стадии приближения к равновесию, когда $|N_p - N| \ll N_p$, уравнение (6.2) справедливо как первое приближение, если в общем уравнении кинетики типа

$$\frac{dN}{dt} = f(N, T, \rho, \dots) \quad (6.4)$$

представить функцию в правой части в виде разложения по малому отклонению от равновесия $(N_p - N)/N_p$.

Надо сказать, что время τ , определенное уравнением (6.2), как правило, характеризует масштаб времени установления равновесия и в случае общего уравнения кинетики (6.4) (в этом мы убедимся на ряде конкретных примеров в последующих параграфах).

Рассмотрение кинетики физико-химических релаксационных процессов имеет два аспекта. Это, во-первых, вопрос о скоростях элементарных процессов, приводящих к возбуждению той или иной степени свободы, т. е. вопрос об эффективных сечениях соответствующих неупругих соударений частиц, в результате которых происходит процесс возбуждения. Обычно этими сечениями определяется и характерное время релаксации τ . Во-вторых, это — вопрос о самой кинетике релаксационного процесса в данных конкретных условиях с учетом меняющихся во времени макроскопических параметров системы и обратного влияния процесса на изменение макроскопических параметров. В этой главе мы остановимся только на первом из указанных аспектов. (Второй будет рассмотрен в гл. VII, VIII.) При этом будем всегда предполагать, что в газе поддерживаются постоянные температура, плотность и концентрации тех частиц, которые не имеют отношения к рассматриваемому процессу.

§ 2. Возбуждение вращений молекул. Энергии вращательных квантов молекул обычно очень малы. Будучи разделенными на постоянную Больцмана, они имеют порядок нескольких градусов, например, у кислорода 2,1 К, у азота — 2,9 К. Поэтому даже при комнатной температуре $T \approx 300$ К, а тем более при высоких температурах, квантовые эффекты вращений молекул не проявляются. Некоторое исключение составляют лишь молекулы водорода и дейтерия, обладающие очень маленькими моментами инерции и сравнительно большими вращательными квантами, — 85,4 и 43 К.

Вследствие «классичности» вращений молекулы при столкновениях весьма интенсивно обмениваются поступательной и вращательной энергиями. В самом деле, время соударения, т. е. время, в течение которого взаимодействуют сталкивающиеся

молекулы, порядка $a/\bar{v}$, где a — размер молекулы, а $\bar{v}$ — средняя тепловая скорость. Если энергия вращений порядка kT , то время соударения сравнимо с периодом вращательного движения¹⁾. Следовательно, столкновение молекул можно представить как столкновение двух медленно поворачивающихся «гантелей» и достаточно небольшой асимметрии при сближении частиц, чтобы они получили заметный вращательный момент.

Экспериментальные данные подтверждают тот факт, что вращения возбуждаются легко. За исключением H_2 и D_2 , вращательная энергия молекул достигает своего равновесного классического значения kT (у двухатомных молекул) после десятилетия газокинетических соударений. Времена вращательной релаксации на опыте измерялись главным образом путем изучения дисперсии и поглощения ультразвука (об этом методе см. § 3, 4 гл. VIII). Они находятся в качественном согласии с измерениями Хорнига и Грина [1–3] толщины фронта слабых ударных волн по отражению света (об этом методе см. § 5 гл. IV). Некоторые данные о временах вращательной релаксации и числе столкновений, необходимых для установления термодинамического равновесия во вращательных степенях свободы молекул, приведены в табл. 6.1. Более подробные данные с многочисленными ссылками на оригинальные работы можно найти в обзорах Л. В. Лескова и Ф. А. Савина [4], С. А. Лосева и А. И. Осипова [5] и в книге Е. В. Ступоченко, С. А. Лосева и А. И. Осипова [77].

Таблица 6.1. Вращательная релаксация молекул

Молекула	Температура, К	Время релаксации при атмосферном давлении, с	Число столкновений	Метод	Литература
H_2	300	$2,1 \cdot 10^{-8}$	300	Ультразвук	[6]
H_2	300	$2,1 \cdot 10^{-8}$	300	Ударная волна	[1]
D_2	288	$1,5 \cdot 10^{-8}$	160	Ультразвук	[7]
N_2	300	$1,2 \cdot 10^{-9}$	9	»	[8]
N_2	300		20	Ударная волна	[2, 3]
O_2	314	$2,2 \cdot 10^{-9}$	12	Ультразвук	[9]
O_2	300		20	Ударная волна	[3]
NH_3	293	$8,1 \cdot 10^{-10}$	10	Ультразвук	[10]
CO_2	305	$2,3 \cdot 10^{-9}$	16	»	[11]

За исключением водорода при не слишком высоких температурах, практически всегда можно считать, что равновесие во вращательных степенях свободы устанавливается столь же быстро, как и в поступательных, т. е. что вращения всегда имеют «поступательную» температуру.

§ 3. Уравнение кинетики для релаксации колебательной энергии молекул. Энергии колебательных квантов важнейших двухатомных молекул, деленные на постоянную Больцмана, имеют порядок тысячи или нескольких тысяч градусов, например, у кислорода $h\nu/k = 2230$ К, у азота — 3340 К. По формуле (3.19) для

¹⁾ Энергия вращений $kT \sim M\omega^2 a^2$, где ω — круговая частота вращений, M — масса молекулы. Период вращений

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \sim a \sqrt{\frac{M}{kT}} \sim \frac{a}{\bar{v}}.$$

колебательной энергии газа колебательные степени свободы дают заметный вклад в теплоемкость газа, начиная с температур, при которых kT в несколько раз меньше $h\nu$. Так, при $h\nu/kT = 4$ энергия на одно колебание составляет 7,25 % от своего классического значения kT , при $h\nu/kT = 3$ — 15 %; для воздуха это температуры около 1000 К. Таким образом, в отличие от вращений молекул вопрос о колебательной релаксации практически возникает тогда, когда колебания имеют существенно квантовый характер. Наоборот, в «далекой» классической области $kT \gg h\nu$, скажем, при температурах порядка 10 000–20 000 К, вопрос в значительной степени теряет свою актуальность, так как при этом молекулы в основном диссоциированы на атомы. В «далекой» классической области при $kT \gg h\nu$ для возбуждения колебаний, как и вращений молекул, не требуется много столкновений. Однако при тех температурах порядка тысячи или нескольких тысяч градусов, когда вопрос о колебательной релаксации представляет практический интерес, времена релаксации весьма велики: для возбуждения колебаний, как показывают теория и опыт, нужны тысячи и сотни тысяч столкновений.

Сформулируем уравнение кинетики для возбуждения колебаний. Рассмотрим для простоты газ из двухатомных молекул одного сорта. Пусть $T < h\nu/k$, так что существенно возбуждение только первого колебательного уровня молекул¹⁾ (для воздуха — это температуры 1000–2000 К). Если n_0 , n_1 , $n = n_0 + n_1$ — числа невозбужденных, возбужденных и всех молекул в 1 см³, $\tau_{ст}$ — среднее время между газокинетическими столкновениями, определенное формулой (6.1), а p_{01} и p_{10} — вероятности возбуждения колебаний и дезактивации возбужденной молекулы при столкновении, то уравнение кинетики можно записать в виде

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{1}{\tau_{ст}}(p_{01}n_0 - p_{10}n_1). \quad (6.5)$$

По принципу детального равновесия, в соответствии с законом Больцмана,

$$\frac{p_{01}}{p_{10}} = \frac{n_{1p}}{n_{0p}} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (6.6)$$

(индексом p всегда отмечаем равновесные значения).

Поскольку, при $kT \ll h\nu$, $n_{1p} \ll n_{0p} \approx n$, получим приближенно

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{n_{1p} - n_1}{\tau}, \quad (6.7)$$

где время релаксации,

$$\tau = \tau_{ст}/p_{10}, \quad (6.8)$$

пропорционально числу столкновений, необходимых для дезактивации молекулы $1/p_{10}$. Умножая уравнение (6.7) на $h\nu$, получим уравнение для релаксации колебательной энергии единицы объема $E = h\nu n_1$ ($E_p(T) = h\nu n_{1p}(T)$):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_p(T) - E}{\tau}. \quad (6.9)$$

Как видим, для процесса возбуждения колебаний уравнения кинетики (6.7), (6.9) имеют форму (6.2) при любых отклонениях от равновесия.

Рассмотрим теперь температуры не малые, $kT \gtrsim h\nu$, когда в газе присутствуют молекулы, находящиеся в самых различных колебательных состояниях. В этом

¹⁾ Если молекулы многоатомные, то ограничиваемся случаем возбуждения: только самых низкочастотных колебаний.

общем случае следует писать систему уравнений кинетики для чисел молекул n_l , обладающих l колебательными квантами ($l = 0, 1, 2, \dots$). Однако уравнение типа (6.9) для релаксации полной колебательной энергии все равно остается в силе, причем время релаксации определяется формулой, лишь несколько видоизмененной по сравнению с (6.8).

Из квантовой механики известно¹⁾, что если колебания гармонические, то осциллятор может менять свою энергию только на величину одного колебательного кванта, причем вероятности перехода из состояния с $l-1$ квантами в состояние с l квантами $p_{l-1,l}$ и перехода с l -уровня на $(l-1)$ -й уровень $p_{l,l-1}$ пропорциональны l . Таким образом, если рассматривать молекулу как гармонический осциллятор, что справедливо для не слишком высоких колебательных состояний, т. е. при температурах, не слишком больших по сравнению с $h\nu/k$, то можно записать

$$p_{l-1,l} = lp_{01}; \quad p_{l,l-1} = lp_{10}; \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

Уравнение кинетики для числа молекул, обладающих l квантами с учетом переходов в l -е состояние как из $(l-1)$ -го, так и из $(l+1)$ -го, имеет вид

$$\frac{dn_l}{dt} = \frac{1}{\tau_{ст}}(p_{l-1,l}n_{l-1} + p_{l+1,l}n_{l+1} - p_{l,l-1}n_l - p_{l,l+1}n_l). \quad (6.11)$$

По принципу детального равновесия, аналогично (6.6),

$$\frac{p_{l-1,l}}{p_{l,l-1}} = \frac{n_{l,p}}{n_{l-1,p}} = e^{-h\nu/kT}. \quad (6.12)$$

Умножим уравнение (6.11) на $h\nu l$. Подставляя (6.10) в (6.11), суммируя по l и замечая, что $E = \Sigma h\nu l n_l$ — полная энергия колебаний в 1 см^3 , получим

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau_{ст}} [p_{01}h\nu n - (p_{10} - p_{01})E], \quad (6.13)$$

где $n = \Sigma n_l$ — полное число молекул в 1 см^3 . Имея в виду (6.6) и то, что величина $E_p = h\nu n (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}$ представляет собой энергию колебаний в 1 см^3 в условиях термодинамического равновесия (см. формулу (3.19)), придем к уравнению кинетики (6.9) со временем релаксации

$$\tau = \frac{\tau_{ст}}{p_{10} (1 - e^{-h\nu/kT})}. \quad (6.14)$$

Среднее число столкновений, необходимых для установления равновесия в колебательных степенях свободы, равно

$$Z = \frac{1}{p_{10} (1 - e^{-h\nu/kT})} = \frac{Z_1}{1 - e^{-h\nu/kT}}, \quad (6.15)$$

где $Z_1 = 1/p_{10}$ — число столкновений, необходимых для дезактивации молекулы, обладающей одним колебательным квантом. При $h\nu \gg kT$, $Z = Z_1$ и формула (6.14) превращается в (6.8). При высоких температурах, когда среднее число колебательных квантов в молекулах велико, $\bar{l} = kT/h\nu \gg 1$,

$$Z = \bar{l}Z_1, \quad \tau = \frac{\tau_{ст}\bar{l}}{p_{10}} = \frac{\tau_{ст}\bar{l}^2}{p\bar{l}, \bar{l}-1}.$$

¹⁾ См., например, книгу Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [12].

В кинетическом уравнении (6.11) для изменения числа молекул в l -м квантовом состоянии приняты во внимание только переходы, сопровождающиеся обменом энергией между поступательными и колебательными степенями свободы молекул. На самом деле при столкновениях молекул может происходить и обмен колебательными квантами, причем оказывается, что вероятность такого обмена гораздо больше, чем вероятность обмена между поступательной и колебательной энергиями [13]. Поэтому больцмановское распределение молекул по колебательным уровням в соответствии с общим запасом колебательной энергии газа устанавливается быстро. Можно сказать, что в неравновесной системе сначала устанавливается «колебательная» температура, а затем уже происходит выравнивание «колебательной» и «поступательной» температур [14].

§ 4. Вероятность возбуждения колебаний и время релаксации. Рассмотрим простейший случай, когда на двухатомную молекулу ВС налетает атом А вдоль направления оси молекулы, как показано на рис. 6.1. Если между сталкивающимися частицами А и ВС нет химического сродства, то при сближении между ними возникают силы отталкивания, сначала тормозящие атом А, а затем отталкивающие его от молекулы ВС.

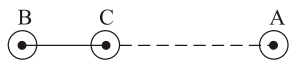


Рис. 6.1. К вопросу о возбуждении колебаний в молекуле при ударе атома

На атом С действует вынуждающая сила, которая сначала стремится вывести его из положения равновесия и сместить в сторону атома В. Если сближение происходит очень медленно, атом С медленно сдвинется с места и затем, когда атом А и молекула ВС оттолкнутся и начнут удаляться друг от друга, также медленно вернется в исходное положение: удар, как говорят, будет «адиабатическим», и колебание не возникнет. Условие адиабатичности состоит, очевидно, в том, чтобы время взаимодействия атома с молекулой, которое имеет порядок a/v , где a — радиус действия сил, а v — относительная скорость частиц при бесконечном удалении, было велико по сравнению с периодом колебаний: $av/v \gg 1$. Иначе это условие можно себе представить так: для интенсивной «раскачки» молекулы необходимо, чтобы при разложении вынуждающей силы в интеграл Фурье были велики резонансные компоненты с частотами, близкими к собственной частоте ν , но для этого нужно, чтобы время соударения a/v было порядка $1/\nu$, вернее, чтобы выполнялось условие $a\omega/v \sim 1$, где $\omega = 2\pi\nu$.

Л. Д. Ландау и Е. Теллер [15] оценили зависимость вероятности возбуждения колебаний от скорости столкновения и, в конечном счете, от температуры, воспользовавшись принципом соответствия. Для справедливости квазиклассического приближения необходимо, чтобы длина волны частиц была мала по сравнению с масштабом поля: $aMv/h \gg 1$, где M — приведенная масса сталкивающихся частиц. Легко проверить, что это условие заведомо выполняется, если, наряду с условием адиабатичности $av/v \gg 1$, кинетическая энергия относительного движения гораздо больше энергии кванта $Mv^2 \gg h\nu$. Таким образом, квазиклассический случай соответствует адиабатическим столкновениям, т.е. очень малым вероятностям возбуждения колебаний.

Вероятность возбуждения колебания при столкновении пропорциональна квадрату матричного элемента энергии взаимодействия частиц А и ВС как функции расстояния между ними $U(x)$. В квазиклассическом приближении матричный элемент превращается в фурье-компоненту энергии взаимодействия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U[x(t)] e^{i\omega t} dt. \quad (6.16)$$

Примем закон отталкивания в виде $U = \text{const} e^{-x/a}$ и положим для простоты, что $\text{const} = \mathcal{E} = Mv^2/2$, т.е. что атом может «вплотную» приблизиться к молекуле. Интегрируя уравнение движения,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M}(\mathcal{E} - U)}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}[\mathcal{E} - U(x)]}},$$

найдем функции $t(x)$, $x(t)$ и зависимость $U(t)$:

$$U(t) = 4\mathcal{E} \frac{e^{(vt)/a}}{(e^{(vt)/a} + 1)^2} = \frac{\mathcal{E}}{\text{ch}^2(vt/2a)}$$

($t = 0$ соответствует моменту наибольшего сближения частиц, $x = 0$). Интеграл (6.16) можно вычислить, если перейти к интегрированию в комплексной плоскости t по замкнутому контуру. Контур включает действительную ось и прямую $\text{Im } t = 2\pi a/v$, отстоящую от нее на удвоенном расстоянии ближайшего к действительной оси полюса функции $U(t)$: $t_1 = i\pi a/v$. По теореме вычетов интеграл оказывается равным

$$\int_{-\infty}^{\infty} U e^{i\omega t} dt = \frac{4\pi^2 M a v}{\text{sh}(2\pi^2 a v/v)} \approx 8\pi^2 M a^2 v \exp\left(-\frac{2\pi^2 a v}{v}\right),$$

причем экспоненциальный закон справедлив при выполнении условия адиабатичности. Физический смысл вывода Ландау и Геллера становится особенно наглядным, если решить задачу о возбуждении осциллятора ударом частицы на основе классической механики. Такой вывод проделан в книге Е. В. Ступоченко, С. А. Лосева и А. И. Осипова [77]. Мы здесь рассмотрим один частный случай, который оказывается особенно простым. Предположим, что атом В гораздо тяжелее атома С ($m_B \gg m_C$) и что налетающий атом А взаимодействует только с атомом С, так что в системе центра масс частиц ВС и А раскачивается только легкий атом С.

Обозначим через y смещение атома С около положения равновесия (вдоль линии столкновения x) и запишем уравнение движения осциллятора:

$$m_C(\ddot{y} + \omega^2 y) = F(t), \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Сила в данном случае равна просто $F = -\partial U/\partial x$, т.е. при $U = \mathcal{E} e^{-x/a}$, $F = U/a$.

Вычислим энергию осциллятора $\varepsilon(t) = \frac{m_C}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2)$. Для этого умножим уравнение движения на $e^{i\omega t}$ и проинтегрируем по t от $-\infty$ до t . Производя в левой части интегрирование по частям и принимая во внимание начальное условие $y(-\infty) = 0$, $\dot{y}(-\infty) = 0$, получим

$$m_C(\dot{y} - i\omega y) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^t F(t) e^{i\omega t} dt.$$

Квадрат модуля этой величины, деленный на $2m_C$, и дает энергию $\varepsilon(t)$. Имея в виду, что $F = U/a$, найдем энергию, которую осциллятор приобретает в результате удара:

$$\varepsilon = \varepsilon(\infty) = \frac{1}{2m_C a^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} U[x(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

Если теперь перейти к квантовым представлениям, то следует положить $\varepsilon = \hbar\nu p_{01}(v)$, где p_{01} — вероятность возбуждения осциллятора при столкновении. Подставляя указанное выше значение интеграла, получим вероятность

$$p_{01}(v) = \frac{32\pi^4 M^2 a^2 \nu}{m_c \hbar} \exp\left(-\frac{4\pi^2 a \nu}{v}\right).$$

Она экспоненциально убывает при увеличении фактора адиабатичности $a\nu/v$.

При произвольном отношении масс атомов в молекуле задача несколько усложняется, однако в результате всех вычислений в формуле для $p_{01}(v)$ появляется только множитель $m_B/(m_B + m_C)$ (см. [77]).

Вероятность, как функцию относительной скорости частиц v , следует усреднить с помощью максвелловского распределения по относительным скоростям, т.е. с помощью функции, пропорциональной $\exp(-Mv^2/2kT)$. При этом возникает интеграл по скоростям, содержащий в подынтегральной функции экспоненциальный множитель $\exp(-4\pi^2 a \nu/v - Mv^2/2kT)$. Основную роль в интеграле играют скорости $v^* = (4\pi^2 a \nu kT/M)^{1/3}$, при которых показатель экспоненты имеет наименьшую абсолютную величину. Столкновения с такими скоростями главным образом и вызывают возбуждение и дезактивацию колебаний. Интеграл и вероятности переходов p_{01} и p_{10} пропорциональны максимальному значению экспоненциального множителя¹⁾:

$$\begin{aligned} p_{10} \sim p_{01} \sim \exp\left(-\frac{4\pi^2 a \nu}{v^*} \frac{M v^{*2}}{2kT}\right) &= \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{M v^{*2}}{kT}\right) = \\ &= \exp\left[-\left(\frac{54\pi^4 a^2 \nu^2 M}{kT}\right)^{1/3}\right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Подстановка численных значений констант в показатель экспоненты (6.17) и опыт показывают, что при не слишком высоких температурах показатель гораздо больше единицы²⁾. Это означает, что для столкновений, вносящих основной вклад в возбуждение и дезактивацию колебаний, выполняется условие адиабатичности и кинетическая энергия сталкивающихся частиц гораздо больше kT .

Последовательные квантовомеханические расчеты вероятности дезактивации p_{10} , определяющей время релаксации (Ценер [17], Шварц и Герцфельд [18]), также приводят в адиабатическом пределе к формуле, содержащей экспоненциальный фактор (6.17). В работе [18] рассмотрен весьма общий случай столкновений и для числа столкновений перед дезактивацией получена формула

$$\begin{aligned} Z_1 = \frac{1}{p_{10}} &= \pi^2 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left(\frac{\hbar\nu}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{kT}{\varepsilon_0}\right)^{1/6} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\hbar\nu}{2kT} - \frac{\varepsilon_1}{kT}\right) \exp\left[\frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{kT}\right)^{1/3}\right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

¹⁾ Любопытно отметить, что аналогичным образом, по закону $\exp(-\text{const } T^{-1/3})$, зависит от температуры скорость термоядерных реакций. Это происходит по той причине, что вероятность сближения ядер, отталкивающихся кулоновскими силами, тоже зависит от относительной скорости сближения по закону $\exp(-\text{const } v^{-1})$, который затем усредняется с помощью максвелловского распределения по скоростям ядер.

²⁾ Например, в кислороде при $T = 1000$ К показатель равен примерно 10 (по данным [16]; см. ниже).

где $\varepsilon_0 = 16\pi^4 a^2 \nu^2 M$. Последний экспоненциальный множитель в точности соответствует экспоненте в (6.17) и при не слишком высоких температурах, благодаря большой величине показателя, описывает основную температурную зависимость числа столкновений. Множитель $\exp(-\varepsilon_1/kT)$ учитывает некоторое облегчение переходов из-за ускорения частиц при их сближении за счет дальнедействующих сил притяжения, которые описываются «потенциальной ямой» с энергией ε_1 ; ε_1 обычно порядка нескольких десятых долей электронвольта. Формула (6.18) несколько уточнена в более поздней работе Герцфельда [18a].

Как следует из изложенной выше теории, время колебательной релаксации зависит от температуры по закону

$$\tau = Z\tau_{\text{ст}} = \tau_{\text{ст}} A \exp(bT^{-1/3}), \quad (6.19)$$

где $b = \text{const}$, а A — медленно меняющаяся функция температуры. Таким образом, график $\ln \tau$ в зависимости от $T^{-1/3}$ должен давать почти прямую линию.

Таблица 6.2. Колебательная релаксация в кислороде и азоте по измерениям Блэкмана [16]. Теоретические значения Шварца и Герцфельда [18]

$T, \text{ К}$	p_{10} (эксперимент) ¹⁾	p_{10} (теория)	Число столкновений Z (эксперимент)	τ (в с) приведено к плотности $n = 2,67 \cdot 10^{19} \text{ 1/см}^3$
Кислород				
288	$4 \cdot 10^{-8} \text{ }^2)$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^7$	
900	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^5$	$96 \cdot 10^{-7}$
1200	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^4$	$41 \cdot 10^{-7}$
1800	$9,8 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^4$	$9,5 \cdot 10^{-7}$
2400	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^3$	$2,7 \cdot 10^{-7}$
3000	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^3$	$0,83 \cdot 10^{-7}$
Азот				
600	$3 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^7 \text{ }^3)$		
3000	$3,1 \cdot 10^{-5}$	$4,6 \cdot 10^4$		$2,1 \cdot 10^{-6}$
4000	$9,7 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^4$		$0,67 \cdot 10^{-6}$
5000	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^4$		$0,27 \cdot 10^{-6}$

¹⁾ При вычислении p_{10} из экспериментальных времен τ использованы газокинетические сечения $\sigma_{\text{O}_2} = 3,6 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$, $\sigma_{\text{N}_2} = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$.
²⁾ Эта точка получена ультразвуковым методом [19].
³⁾ Эта точка получена Кантровицем [20] путем исследования истечения из сопла.

На опыте времена колебательной релаксации измеряются при комнатной температуре и небольших нагреваниях методом поглощения и дисперсии ультразвука, а в широком диапазоне температур с помощью ударных труб, путем исследования установления равновесия во фронте ударной волны. Тщательное исследование релаксации в кислороде и азоте с помощью ударной трубы было проведено Блэкманом [16]. Его результаты представлены в табл. 6.2. Там же приведены теоретические значения для кислорода, вычисленные в работе Шварца и Герцфельда [18]. Как видно, согласие между теорией и экспериментом неплохое.

Экспериментальные значения, измеренные для самых различных газов, более или менее удовлетворительно ложатся на теоретические прямые $\ln \tau$ или $\ln Z$ от $T^{-1/3}$. Это видно из рис. 6.2, заимствованного из работы [5]. Отклонения от прямых

частично объясняются температурной зависимостью предэкспоненциального множителя A в формуле (6.19).

Время колебательной релаксации в кислороде при той же температуре меньше, чем в азоте, так как собственная частота в азоте в полтора раза больше, чем в кислороде, что затрудняет возбуждение колебаний в азоте. Поэтому колебательная релаксация в воздухе имеет два периода: сначала приходит в равновесие кислород,

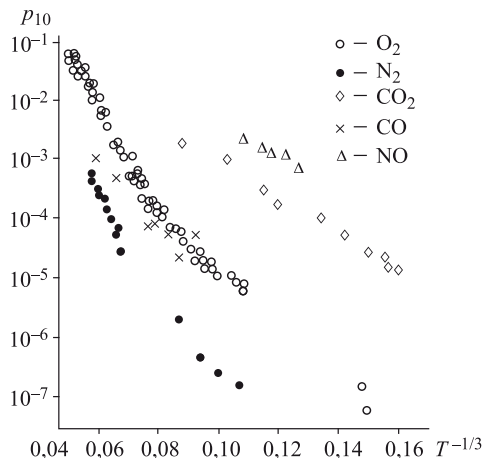


Рис. 6.2. Экспериментальные данные по вероятностям дезактивации молекул, в которых возбуждены колебания

Теория колебательной релаксации детально изложена в книге [77]; там же имеется подробнейшая библиография, включая ссылки на теоретические и экспериментальные работы последних лет.

§ 5. Уравнение кинетики диссоциации двухатомных молекул и время релаксации. Диссоциация двухатомных молекул происходит обычно при соударениях достаточно энергичных частиц по схеме



где M — какая-либо частица¹⁾. В однородном двухатомном газе частицей M могут служить либо молекула A_2 , либо атом A . Обратный процесс ведет к рекомбинации атомов в тройных соударениях, причем третья частица M берет на себя часть выделяющейся при этом энергии связи. Уравнение кинетики для процесса (6.20) с учетом того, что частицей M может быть как молекула, так и атом, имеет вид

$$\frac{dA_2}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dA}{dt} = -k_d A_2^2 + k_r A^2 \cdot A_2 - k'_d A_2 \cdot A + k'_r A^3. \quad (6.21)$$

¹⁾ Непосредственный распад достаточно сильно возбужденной молекулы на атомы $A_2 \rightleftharpoons A + A$ имеет чрезвычайно малую вероятность, так же как и обратный процесс объединения атомов в молекулу без участия третьей частицы, которой могла бы быть передана часть выделяющейся при объединении энергии. Также малы вероятности фотодиссоциации и рекомбинации с испусканием светового кванта.

а затем азот. Следует отметить, что столкновения молекул N_2 с O_2 в 2,5 раза менее эффективны в отношении возбуждения колебаний в O_2 , чем столкновения O_2 – O_2 . Вообще, некоторые молекулы очень активно возбуждают колебания; например, молекулы H_2O в 50–100 раз быстрее возбуждают колебания в O_2 , чем сами молекулы O_2 . Поэтому при измерениях колебательной релаксации существенна высокая степень очистки газа от примесей.

Подробные сводки литературных данных по временам колебательной релаксации в различных газах, так же как и ссылки на многочисленные экспериментальные и теоретические работы, можно найти в обзорах [4, 5]. Укажем несколько работ по изучению возбуждения колебаний в O_2 [58, 59], NO [60], CO [61], CO_2 [62, 63]. Отметим также обзор [64] и работы [65, 66] по колебательной релаксации в смесях.

Здесь для краткости числа частиц в 1 см^3 обозначены их символами. Константы скоростей реакций зависят только от температуры и связаны между собой принципом детального равновесия:

$$\frac{k_d}{k_r} = \frac{k'_d}{k'_r} = \frac{(A)^2}{(A_2)} = K(T), \quad (6.22)$$

где в скобки заключены равновесные при данных температуре и плотности газа значения чисел частиц; $K(T)$ — константа равновесия, отличающаяся от константы равновесия для давлений $K_p(T)$ множителем $(kT)^{-1}$: $K(T) = K_p(T)/kT$. Константа равновесия определяет равновесную при данных температуре и плотности степень диссоциации α . По формуле (3.26)

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{K(T)}{4N} = \frac{1}{4N} \frac{M_A \nu}{4I_{A_2}} \sqrt{\frac{M_A}{\pi kT}} \frac{g_A^2}{g_{A_2}} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right), \quad (6.23)$$

где N — число исходных молекул в 1 см^3 ; M_A — масса атома (остальные обозначения см. в § 3 гл. III).

В отличие от колебательной релаксации, уравнение кинетики для диссоциации молекул в общем случае нелинейно. Однако при небольшом отклонении от равновесия его можно, в соответствии с общим указанием в § 1, привести к линеаризованной форме (6.2) для чисел частиц A или A_2 , причем время релаксации τ определяется выражением

$$\frac{1}{\tau} = 4\alpha(2-\alpha)N^2 \left(k_r + k'_r \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right). \quad (6.24)$$

Как показывают расчеты, временем τ характеризуется не только конечная стадия асимптотического приближения к равновесию, но и вообще вся кинетика диссоциации, даже в той стадии, когда она описывается нелинейным уравнением (6.21), так что τ по порядку величины равно времени установления равновесной диссоциации и в общем случае произвольных начальных условий. В предельных случаях малой и сильной равновесной диссоциации формула (6.24) упрощается. При $\alpha \ll 1$ атомов мало, основную роль играет диссоциация молекул ударами молекул и с учетом (6.22), (6.23)

$$\frac{1}{\tau} = 8\alpha N^2 k_r = \frac{2}{\alpha} N k_d. \quad (6.25)$$

При $1-\alpha \ll 1$, если даже в начальный момент атомов нет, основное время занимает поздняя стадия, когда молекул мало и оставшиеся молекулы разбиваются ударами атомов. В этом случае

$$\frac{1}{\tau} = \frac{8}{1-\alpha} N^2 k'_r = 2N k'_d. \quad (6.26)$$

Таким образом, вопрос о времени установления равновесия сводится к вопросу о скоростях реакций диссоциации или рекомбинации. Поскольку обе скорости связаны между собой принципом детального равновесия (6.22), достаточно знать из теории или эксперимента одну из них.

§ 6. Скорости рекомбинации атомов и диссоциации двухатомных молекул.

Грубую оценку скорости рекомбинации атомов в двухатомную молекулу можно получить из самых элементарных соображений, полагая, что каждое газокинетическое столкновение атомов в присутствии третьей частицы ведет к рекомбинации. Число столкновений атомов A друг с другом в 1 см^3 в 1 с равно $A \cdot \bar{v} \cdot \sigma \cdot A$, где $\bar{v} = (8kT/M_A\pi)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость, а σ — газокинетическое сечение. Вероятность того, что в момент столкновения «по соседству», т.е. на расстоянии

порядка молекулярных размеров r , окажется третья частица, приближенно равна среднему числу частиц в объеме, равном объему одной молекулы: $(4\pi r^3/3)N$, где N — число частиц в 1 см^3 . Таким образом, число тройных столкновений в 1 см^3 в 1 с равно $A \cdot \bar{v} \cdot \sigma \cdot A(4\pi r^3/3)N$. Вводя для общности еще численный коэффициент β , равный вероятности рекомбинации при условии, что произошло тройное столкновение, получим для константы скорости рекомбинации выражение

$$k_r = \beta \bar{v} \sigma \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (6.27)$$

Для атомов азота $\bar{v} = 3,9 \cdot 10^3 \sqrt{T}$ см/с, $\sigma \approx 10^{-15} \text{ см}^2$. Полагая $r = 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ и $\beta = 1$, получим $k_r = 2,2 \cdot 10^{14} \sqrt{T} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$ (в одном моле содержится $6 \cdot 10^{23}$ атомов). При $T = 300 \text{ К}$ $k_r = 3,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$.

Рекомбинацию атомов азота на опыте обычно изучают, измеряя изменение во времени числа молекул азота по послесвечению¹⁾. Таким образом была найдена константа скорости рекомбинации с молекулами азота в качестве третьей частицы. В интервале температур от 297 до 442 К она оказалась почти не зависящей от температуры и равной $k_r = 5,8 \cdot 10^{15} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$ [21], в хорошем согласии с приведенной оценкой. Близкие результаты получали и другие авторы [22, 23].

В работе [70] путем измерения неравновесного излучения изучалась диссоциация и рекомбинация азота в ударной трубе. Было найдено, что при $T = 6400 \text{ К}$ константа скорости рекомбинации равна $k_{r,N} = 6,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$, если третьей частицей служит атом азота, и в 13 раз меньше, если роль третьей частицы играет молекула азота.

Вообще при не слишком высоких температурах ($T \sim 300\text{--}1000 \text{ К}$) константы скорости рекомбинации обычно имеют порядок $10^{14}\text{--}10^{16} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$, что свидетельствует о довольно больших вероятностях рекомбинации β при тройном соударении. Скорость рекомбинации сравнительно слабо зависит от температуры, обычно проявляя некоторую тенденцию к уменьшению с возрастанием температуры. Это можно понять, если учесть, что вероятность рекомбинации при тройном столкновении тем больше, чем больше время взаимодействия сталкивающихся частиц, т. е. чем меньше их скорости или чем меньше температура, так что вероятность β обратным образом зависит от температуры. Например, если $\beta \sim 1/T$, то $k_r \sim \bar{v}\beta \sim 1/T^{1/2}$ в соответствии с теоретическими расчетами Вигнера [24].

Скорость рекомбинации атомов зависит от сорта третьей частицы; например, при рекомбинации атомов азота атомы азота в качестве третьих частиц в 13 раз эффективнее, чем молекулы (при $T = 6400 \text{ К}$). В работе [25] изучение кинетики диссоциации йода в ударной трубе (концентрацию молекул J_2 измеряли по поглощению света) показало, что при $T = 1300 \text{ К}$ молекулы йода в 35 раз эффективнее в качестве третьих частиц при рекомбинации атомов йода, чем атомы аргона. Скорость рекомбинации йода в тройных соударениях с аргоном, при $T = 1300 \text{ К}$, $k_r = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$ [25]; при $T = 298 \text{ К}$, $k_r = 2,9 \cdot 10^{15} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}$ [26].

Диссоциация молекулы при столкновении с другой частицей может произойти только в том случае, если энергия сталкивающихся частиц превышает энергию диссоциации. Полное число столкновений в 1 с данной молекулы с другими частицами,

¹⁾ Явление послесвечения азота состоит в следующем. При рекомбинации атомов азота молекулы N_2 оказываются в возбужденном состоянии $^5\Sigma_g^+$. Последующие столкновения с другими молекулами или атомами частично дезактивируют молекулы так, что они переходят в более низкое состояние $B^3\Pi_g$, после чего испускаются кванты первой положительной системы N_2 ($B^3\Pi_g \rightarrow A^3\Sigma_u^+$), которые и регистрируются на опыте. По изменению интенсивности свечения судят о кинетике рекомбинации.

число которых в 1 см^3 равно N , есть $\nu = N\bar{v}\sigma$, где $\bar{v} = (8kT/\pi\mu)^{1/2}$ — средняя скорость относительного движения частиц; μ — приведенная масса ¹⁾. При максвелловском распределении по скоростям число столкновений молекул с кинетической энергией относительного движения, превышающей энергию диссоциации U , составляет долю $((U/kT) + 1) e^{-U/kT}$ от полного числа соударений (обычно $U/kT \gg 1$, так что $(U/kT) + 1 \approx U/kT$). Полагают, что в отношении диссоциации эффективна только та составляющая кинетической энергии частиц, которая соответствует компоненте относительной скорости, направленной вдоль линии центров сталкивающихся частиц (если последние рассматривать как твердые шарики). В этом предположении доля «достаточно энергичных» столкновений вместо $(U/kT) \exp(-U/kT)$ равна просто $\exp(-U/kT)$.

Естественно думать, что на разрыв связи в молекуле может затрачиваться не только кинетическая энергия поступательного движения сталкивающихся частиц, но и энергия их внутренних степеней свободы: колебательная, вращательная. Можно показать (см. [27]), что доля столкновений, в которых суммарная энергия сталкивающихся частиц с учетом энергии внутренних степеней свободы превышает энергию диссоциации, равна ²⁾

$$\frac{1}{s!} \left(\frac{U}{kT} \right)^s e^{-U/kT},$$

где каждая колебательная степень свободы вносит единицу в показатель s , а каждая вращательная степень свободы вносит $1/2$ (в случае полуцелого s факториал $s!$ заменяется на гамма-функцию: $\Gamma(s+1)$).

В настоящее время теория диссоциации молекул ударами частиц весьма далека от своего завершения, поэтому при сравнении с экспериментом для константы скорости диссоциации часто пользуются формулой указанного типа:

$$k_d = P\bar{v}\sigma \frac{1}{s!} \left(\frac{U}{kT} \right)^s e^{-U/kT}. \quad (6.28)$$

Число s , характеризующее степень участия в диссоциации внутренних степеней свободы, и фактор P , который представляет собой вероятность того, что при столкновении частиц с достаточным для диссоциации запасом энергии действительно произойдет диссоциация, рассматривают как параметры, которые следует определять из опыта.

Согласно современным представлениям основную роль в процессе диссоциации играет колебательная энергия молекулы. Е. В. Ступоченко и А. И. Осипов [28] показали, что вероятность диссоциации невозбужденной молекулы чрезвычайно мала, даже если поступательная энергия соударяющихся частиц превышает энергию связи U . Диссоциируют главным образом молекулы, находящиеся на очень высоких колебательных уровнях, энергия которых близка к энергии диссоциации. При этом энергия поступательного движения частиц может и не сильно отличаться от средней тепловой энергии.

Если предполагать, что распределение молекул по колебательным состояниям больцмановское, то для скорости диссоциации остается в силе формула типа (6.28) с соответствующим значением показателя s .

¹⁾ При оценке скорости рекомбинации для простоты $\bar{v}$ заменялось $\bar{v}$, т. е. μ — массой атома M_A .

²⁾ При выводе этой формулы считается, что распределение молекул по энергетическим состояниям во всех внутренних степенях свободы — больцмановское, соответствующее поступательной температуре T .

Е. В. Ступоченко и А. И. Осипов [29] показали, что это предположение не всегда оправдывается. «Отвод» молекул с высших колебательных уровней вследствие диссоциации может иногда сильно нарушать больцмановское распределение молекул по высшим колебательным состояниям. В этом случае кинетика диссоциации должна рассматриваться совместно с кинетикой возбуждения высших колебательных уровней. Процесс идет таким образом, что благодаря столкновениям молекулы «подаются» на верхние уровни, откуда переходят в диссоциированное состояние. При рекомбинации атомов в присутствии третьей частицы энергия диссоциации превращается главным образом в колебательную энергию образующейся молекулы. Теория этих процессов изложена в обзоре [76] и книге [77].

На опыте изучалась в основном диссоциация кислорода за фронтом ударной волны в ударной трубе (работы Мэттьюза [30], Байрона [31], Н. А. Генералова и С. А. Лосева [32], Камака [67], Ринка и др. [68]; обзор литературных данных и ссылки на другие работы см. в [4, 5, 77]). Тщательное исследование было проведено Мэттьюзом. Интерферометрическим методом определялся ход плотности в неравновесной зоне за скачком уплотнения, который сопоставлялся с теоретическими расчетами, выполненными на основе формулы для скорости диссоциации типа (6.28) (см. гл. IV, VII). Равновесие в колебательных степенях свободы устанавливается по крайней мере на порядок скорее, чем происходит диссоциация¹⁾, так что эффект релаксации колебаний не мешал изучению скорости диссоциации. Изучалась область температур 2000–4000 К. Степень диссоциации в опытах Мэттьюза была невелика, а $\alpha \sim 0,05-0,1$, так что основную роль в диссоциации играли столкновения O_2-O_2 ²⁾. В расчетах принималось $s = 3$, при этом эффективность столкновений оказалась равной $P_{O_2-O_2} = 0,073$, а константа скорости диссоциации

$$k_d O_2-O_2 = 5,4 \cdot 10^{10} T^{1/2} \left(\frac{59380}{T} \right)^3 e^{-59380/T} \text{ см}^3/\text{моль} \cdot \text{с}. \quad (6.29)$$

Расчеты, проведенные с $s = 0$, дали неправдоподобно большое значение P (большее единицы). Это свидетельствует о том, что в диссоциации существенную роль играет энергия внутренних степеней свободы молекул. Зная константу равновесия для диссоциации O_2 ,

$$K(T) = 1,85 \cdot 10^3 T^{-1/2} e^{-59380/T} \text{ моль}/\text{см}^3, \quad (6.30)$$

можно найти скорость рекомбинации с молекулами O_2 в качестве третьих частиц:

$$k_r = 6,1 \cdot 10^{21} T^{-2} \text{ см}^6/\text{моль}^2 \cdot \text{с}^3. \quad (6.31)$$

Время релаксации, при $T = 3500$ К и нормальной плотности, $\tau = 0,95 \cdot 10^{-6}$ с ($\alpha = 0,084$). Этот результат весьма близок к данным Глика и Варстера [34], изме-

¹⁾ Имеются в виду не слишком высокие колебательные состояния, в которых находится подавляющее большинство молекул.

²⁾ С реакцией $O_2 + O_2 = 2O + O_2$ конкурирует двухступенчатая реакция диссоциации O_2 с промежуточным образованием озона $O_2 + O_2 = O + O_3$; $O_3 + M = O + O_2 + M$ (соответственно может идти и обратный процесс рекомбинации). При высоких температурах этот процесс играет небольшую роль (в частности, в опытах Мэттьюза). Однако рекомбинация кислорода при низких температурах и малой степени диссоциации идет главным образом через образование озона, так как столкновения $O + O + M$ происходят гораздо реже, чем столкновения $O + O_2 + M \rightarrow O_3 + M$. Константы скоростей реакций с участием озона см. в [33].

³⁾ Эта формула справедлива только в исследованном интервале температур $T \approx 2000-4000$ К. Экстраполяция ее к комнатным температурам дает завышенное значение скорости рекомбинации.

явшим время релаксации для диссоциации кислорода в ударной трубе. Их времена, приведенные к нормальной плотности, равны

T, K	3100	3300	3400	3850
$\tau \cdot 10^6, c$	2	0,8	0,5	0,06

В работах [35, 36, 25] изучалась скорость диссоциации брома и йода (также в ударной трубе; концентрация молекул Br_2 , I_2 измерялась по поглощению света от постороннего источника). В работе [35] в интервале температур до 2000 K получено для скорости диссоциации молекул брома ударами атомов аргона: $s = 2$, $P_{Br_2-Ar} = 0,12$. Удовлетворительное согласие с этим результатом получено в теоретической работе Е. Е. Никитина [37]. Обзор работ по диссоциации молекул см. в работе [5]. Отметим работу [69], в которой изучалась диссоциация водорода в ударной трубе. О скоростях диссоциации O_2 и N_2 и других релаксационных процессов в воздухе см. также [53]. Более подробно теория диссоциации молекул и вопросы кинетики этого процесса изложены в неоднократно цитированной выше книге [77]. Там же приводятся экспериментальные данные и ссылки на новейшие работы.

§ 7. Химические реакции и метод активированного комплекса. С точки зрения энергетического эффекта химические превращения подразделяются на два типа: эндотермические, требующие определенного количества энергии, и экзотермические, сопровождающиеся выделением тепла. Примерами реакций обоих типов являются диссоциация молекул и рекомбинация атомов в молекулу, рассмотренные выше. Ясно, что для протекания эндотермической реакции необходимо, чтобы сталкивающиеся молекулы обладали некоторым минимальным запасом энергии, так называемой энергией активации E , поэтому скорость такой реакции пропорциональна бальцовскому фактору $e^{-E/kT}$ и быстро возрастает с повышением температуры. В процессе диссоциации энергией активации служит энергия связи молекулы U . Опыт, однако, показывает, что и для большинства экзотермических превращений также требуется энергия активации и скорости соответствующих реакций возрастают с температурой по экспоненциальному закону $e^{-E/kT}$, называемому законом Аррениуса. Рекомбинация атомов в молекулу является в этом отношении нетипичной, так как она происходит без активации и потому с легкостью протекает при низких температурах, как и многие другие реакции с участием свободных атомов.

Для того чтобы произошел элементарный акт химического превращения, скажем, обмен атомами при столкновении молекулы XY с молекулой WZ ,



необходимо, чтобы произошло тесное сближение молекул реагентов. Независимо от того, является ли этот процесс энергетически выгодным или нет, т. е. выделяется или поглощается энергия в результате обмена, при тесном сближении частиц между ними, как правило, возникают силы отталкивания, для преодоления которых требуется определенная энергия. Можно сказать, что для превращения должен быть преодолен потенциальный барьер. Это положение поясняется схематическим рис. 6.3, на котором отложена потенциальная энергия системы четырех атомов $XYWZ$ в зависимости от «координаты разложения», характеризующей взаимную пространственную конфигурацию атомов. Для определенности предполагается, что прямой процесс (6.32) экзотермичен. Разность энергий между начальным и конечным состояниями системы равна энергетическому выходу реакции Q . Из рис. 6.3 видно, что энергия активации обратного процесса E_2 превышает энергию активации прямого процесса E_1 на величину энергии реакции Q . Соответственно, скорость обратной,

эндотермической, реакции гораздо резче зависит от температуры, чем скорость прямой, экзотермической реакции.

Уравнение кинетики для процесса (6.32), с учетом как прямой, так и обратной реакций, может быть записано в виде

$$\frac{dXY}{dt} = k_1 XY \cdot WZ - k_2 XW \cdot YZ \quad (6.33)$$

Константы скоростей реакций, зависящие только от температуры, связаны, как обычно, принципом детального равновесия:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{(XY)(WZ)}{(XW)(YZ)} = K(T). \quad (6.34)$$

Пользуясь представлениями теории столкновений, для констант скорости реакций можно написать выражения, сходные с выражением для скорости диссоциации. Так, если считать для простоты, что при преодолении потенциального барьера E эффективна только составляющая поступательной энергии сталкивающихся частиц вдоль линии их центров, а другие составляющие, так же как и внутренние степени свободы молекул, в этом отношении неэффективны, получим

$$k_1 = P\sigma\bar{v}e^{-E/kT}, \quad (6.35)$$

где P , как и раньше, вероятность того, что в результате достаточно энергичного соударения действительно произойдет химическое превращение (P иногда называют стери́ческим фактором).

Опыт показывает, что многие реакции, особенно те, в которых участвуют сложные молекулы, протекают гораздо медленнее, чем этого можно было бы ожидать, исходя из числа достаточно энергичных столкновений: вероятность P часто оказывается очень малой, даже порядка 10^{-8} .

Более определенную оценку скорости реакции в ряде случаев удастся получить с помощью так называемого метода активированного или переходного комплекса ²⁾, который состоит в следующем. Потенциальная энергия системы атомов, участвующих в элементарном акте реакции, зависит от их взаимной конфигурации. Если изменение координат атомов происходит достаточно медленно (а это практически всегда так), электронное состояние системы меняется непрерывным образом, и потенциальная энергия зависит только от ядерных координат (это соответствует адиабатическому приближению в теории молекул). Потенциальная энергия представляет собой непрерывную поверхность в конфигурационном пространстве ядерных координат. При начальной и конечной конфигурациях атомов потенциальная энергия минимальна. Например, для реакции (6.32) энергия минимальна, когда атомы объединены в молекулы $XY + WZ$ и $XW + YZ$, причем молекулы разведены на большие расстояния друг от друга.

Для того чтобы произошла реакция, точка, описывающая движение системы в конфигурационном пространстве, должна пройти через максимум, разделяющий минимумы на поверхности, преодолеть потенциальный барьер. Существуют, вообще говоря, различные пути из начального состояния в конечное. Фактически осуществляется наиболее выгодный путь реакции, соответствующий наименьшему значению

¹⁾ Реакции, в элементарном акте которых участвуют две молекулы (атома), называются бимолекулярными, в отличие от мономолекулярных реакций, в которых происходит разложение одной сложной молекулы на более простые или на атомы, например, $XY \rightarrow X + Y$.

²⁾ Подробное изложение этого метода и его применений к вычислению скоростей ряда реакций можно найти в книге [38]; см. также работу [27].

максимума энергии; поверхность энергии около этого пути имеет характер «ложбины». Рис. 6.3 схематически изображает сечение поверхности энергии вдоль «дна ложбины», причем путь реакции и соответствует координате разложения.

Вершина потенциального барьера отвечает весьма тесному сближению реагирующих частиц. В окрестности ее, в области с линейными размерами δ порядка молекулярных, атомы образуют нечто вроде молекулы. Такое состояние называется активированным комплексом. Однако принципиальное отличие активированного комплекса от молекулы состоит в том, что молекула находится в устойчивом состоянии с минимумом потенциальной энергии; комплекс же находится в состоянии неустойчивого равновесия с максимумом потенциальной энергии как функции координаты разложения. Точка, описывающая состояние системы, движется вдоль пути реакции со скоростью порядка скоростей относительного движения атомов, т.е. со средней скоростью $\bar{v}$ порядка тепловой. Время пребывания ее в окрестности вершины, т.е. время жизни активированного комплекса порядка $\tau = \delta/\bar{v}$. При $\delta \approx 10^{-8}$ см и $\bar{v} \approx 10^4$ см/с $\tau \approx 10^{-12}$ с. Время жизни комплекса очень мало по сравнению с характерным временем реакции (временем достижения химического равновесия в смеси газов). Это служит основанием для основного допущения теории, которая предполагает, что комплексы, рассматриваемые как некие молекулы, которые обладают в основном обычными термодинамическими свойствами, находятся в химическом равновесии с реагентами, и концентрация комплексов «следит» за изменением концентраций реагентов¹⁾.

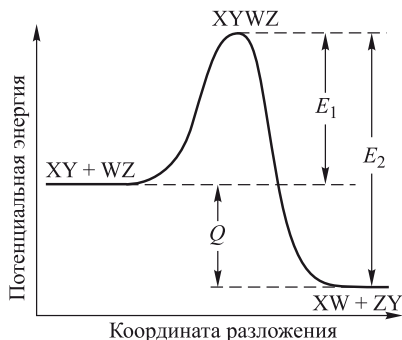


Рис. 6.3. К вопросу о потенциальном барьере при химических реакциях

Если считать, что каждый образующийся комплекс распадается в сторону продуктов реакции, то число актов реакции в 1 см^3 в 1 с равно числу распадов комплексов, т.е. числу комплексов в 1 см^3 , деленному на время их жизни. Обозначая химическими символами А, В, М числа реагентов А и В и комплексов М в 1 см^3 (например, для реакции (6.32) А и В есть XY и WZ, а $M \equiv XYWZ$), получим, что число актов прямой реакции в 1 см^3 в 1 с равно $k_1 \cdot A \cdot B = M/\tau$, откуда константа скорости прямой реакции есть $k_1 = (M/AB)(1/\tau)$.

По закону действующих масс (см. § 3 гл. III) отношение чисел частиц, участвующих в реакции $A + B \rightarrow M$, в состоянии равновесия равно отношению статистических сумм частиц. (Поскольку под А, В, М подразумеваются числа частиц в 1 см^3 , объемы V, входящие в поступательные суммы, следует положить равными 1 см^3). Выделяя из статистических сумм множители типа $\exp(-\epsilon/kT)$, соответствующие нулевой энергии частиц, и замечая, что $\epsilon_M - (\epsilon_A + \epsilon_B) = E$ равно энергии активации, получим

$$\frac{M}{AB} = \left(\frac{Z_M}{Z_A Z_B} \right) \exp \left(-\frac{E}{kT} \right).$$

Статистические суммы Z_A, Z_B рассчитываются обычными методами, что же касается статистической суммы комплекса, то здесь необходимо отметить следующее.

¹⁾ В самом деле, время релаксации для установления подобного равновесия — порядка времени жизни комплексов, т.е. очень мало.

Комплекс устойчив, как и обычная молекула, по отношению ко всем изменениям конфигурации атомов, за исключением направления вдоль пути реакции. Поэтому если рассматривать нормальные колебания комплекса, частота нормального колебания, соответствующая координате разложения, имеет мнимое значение. Если предполагать, что вершина потенциального барьера достаточно плоская, то движение вдоль координаты разложения можно рассматривать как поступательное со средней скоростью $\bar{v}_x = (kT/2\pi m^*)^{1/2}$, где m^* — эффективная масса комплекса. Статистическая сумма одномерного поступательного движения частицы с массой m^* на отрезке δ , эквивалентном «объему», занимаемому комплексами вдоль координаты разложения, равна $Z_{\text{пост. одн}} = (2\pi m^* kT/h^2)^{1/2} \delta$ (ср. с формулой (3.12)). При вычислении статистической суммы комплекса Z_M следует заменить статистическую сумму одного из нормальных колебаний этой поступательной суммой. Таким образом, константа скорости реакции равна

$$k_1 = \frac{M}{AB} \frac{1}{\tau} = \frac{Z_M}{Z_A Z_B} e^{-E/kT} \frac{\bar{v}_x}{\delta} = \frac{Z_M^*}{Z_A Z_B} e^{-E/kT} \left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2} \right)^{1/2} \delta \left(\frac{kT}{2\pi m^*} \right)^{1/2} \frac{1}{\delta},$$

где через Z_M^* обозначена статистическая сумма комплекса, из которой исключен множитель, соответствующий одному нормальному колебанию¹⁾. Из этой формулы видно, что неопределенные величины δ и m^* сокращаются. Вводя еще так называемый трансмиссионный коэффициент κ , характеризующий вероятность распада комплекса в сторону продуктов реакции (а не в сторону исходных частиц; κ обычно порядка единицы), получим окончательно константу скорости реакции

$$k_1 = \kappa \frac{kT}{h} \frac{Z_M^*}{Z_A Z_B} e^{-E/kT}. \quad (6.36)$$

Происхождение универсального для всех реакций множителя с размерностью частоты kT/h в (6.36) можно себе представить еще и так. Будем рассматривать степень свободы комплекса вдоль пути реакции как нормальное колебание с частотой ν . Статистическая сумма для него равна $kT/h\nu$ (при $h\nu < kT$), так что $Z_M = Z_M^* kT/h\nu$. Но каждое колебание фактически ведет к распаду комплекса, так что время жизни τ равно периоду колебаний, $\tau = 1/\nu$, откуда и получается $(kT/h\nu)(1/\tau) = kT/h$, т. е. формула (6.36).

Подставив в (6.36) конкретные выражения для статистических сумм и сравнивая полученную формулу с формулой (6.35), можно получить, в явном виде значение стерического фактора P .

Рассмотрим прежде всего чисто формально воображаемую реакцию объединения двух атомов в молекулу без участия третьей частицы. Тогда Z_A и Z_B — чисто поступательные суммы, а Z_M^* состоит из поступательной и вращательной (колебание двухатомного комплекса исключено). Подставляя в (6.36) $Z_{A,B} = (2\pi m_{A,B} kT/h^2)^{3/2}$, $Z_M^* = [2\pi(m_A + m_B)kT/h^2]^{3/2} (8\pi^2 I kT/h^2)$, и замечая, что момент инерции комплекса $I = \frac{d_{12}^2 m_A m_B}{m_A + m_B}$, где d_{12} — средний диаметр атомов, $d_{12} = (d_A + d_B)/2$, получим в точности формулу (6.35) теории столкновений, если отождествить стерический фактор P с трансмиссионным коэффициентом κ (эффективное сечение столкновений $\sigma = \pi d_{12}^2$).

В общем случае для оценки удобно записать статистические суммы реагентов и комплекса в виде произведений сумм, каждая из которых соответствует одной

¹⁾ Ее можно рассчитывать обычными методами, если задаться «молекулярными» константами комплекса.

степени свободы, и не различать суммы, относящиеся к одинаковым степеням свободы, но разным частицам. Например, в случае, если А и В — двухатомные молекулы, $Z_A \sim Z_B \sim Z_{\text{пост}}^3 Z_{\text{вращ}}^2 Z_{\text{кол}}^1$. Полагая, что комплекс нелинейный, запишем $Z_M^* \sim \sim Z_{\text{пост}}^3 Z_{\text{вращ}}^3 Z_{\text{кол}}^5$ (в комплексе 4 атома, 6 колебательных степеней свободы, причем одна исключена). Таким образом, по порядку величины

$$k_1 \sim \kappa \frac{kT}{h} \frac{Z_{\text{пост}}^3}{Z_{\text{пост}}^6} \frac{Z_{\text{вращ}}^3}{Z_{\text{вращ}}^4} \frac{Z_{\text{кол}}^5}{Z_{\text{кол}}^2} e^{-E/kT}.$$

Аналогично реакции объединения двух атомов в молекулу, множитель

$$\frac{kT}{h} \frac{Z_{\text{пост}}^3 Z_{\text{вращ}}^2}{Z_{\text{пост}}^6} \approx \frac{kT}{h} \frac{Z_{\text{вращ}}^2}{Z_{\text{пост}}^3} \approx \pi d_{12}^2 \cdot \bar{v}$$

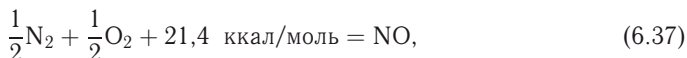
дает примерно число столкновений, входящее в (6.35), так что стерический фактор по порядку величины равен

$$P \sim \kappa \frac{Z_{\text{кол}}^3}{Z_{\text{вращ}}^3}.$$

При комнатных температурах $Z_{\text{кол}}$ имеет порядок единицы. Величина $Z_{\text{вращ}}$ порядка 10–100, тем меньше, чем легче молекула. Отсюда видно, что стерический фактор может быть очень малой величиной, 10^{-3} – 10^{-6} .

В § 10 мы воспользуемся методом активированного комплекса для оценки скорости образования двуокиси азота в нагретом воздухе, что важно для выяснения некоторых оптических явлений, наблюдаемых при сильном взрыве.

§ 8. Реакция окисления азота. При нагревании воздуха до температуры в несколько тысяч градусов в нем протекает химическая реакция,



в результате которой образуется довольно значительное количество окиси азота NO. Равновесные концентрации окиси при температурах 3000–10 000 К и плотностях воздуха порядка нормальной достигают нескольких процентов (см. табл. 3.1 в гл. III). Некоторое количество окиси окисляется до двуокиси NO₂, равновесные концентрации которой в указанных условиях имеют порядок $10^{-4} = 10^{-2} \%$. Окислы азота играют важную роль в излучении и поглощении света нагретым воздухом. Особенно велика в этом отношении роль двуокиси азота в области температур порядка 2000–4000 К, когда оптические свойства воздуха в видимой части спектра практически целиком определяются молекулами NO₂. При нагревании воздуха в сильных ударных волнах, например при взрыве, температура и плотность воздуха претерпевают очень быстрые изменения, поэтому при оценке концентраций окислов азота существенное значение приобретает вопрос о кинетике их образования и разложения.

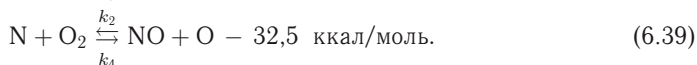
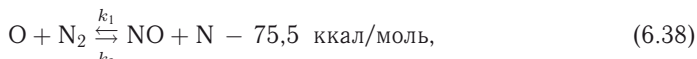
Как будет показано в гл. VIII, IX, особенностями кинетики определяются некоторые характерные оптические эффекты, наблюдаемые при сильном взрыве. В этом параграфе будет рассмотрена кинетика окисления азота, а в следующем — кинетика окисления окиси до двуокиси.

Реакция окисления азота имеет большую энергию активации, поэтому практически она протекает только при достаточно высоких температурах порядка 2000 К и выше. Реакция была детально изучена как экспериментально, так и теоретически в работе Я. Б. Зельдовича, П. Я. Садовникова и Д. А. Франк-Каменецкого [39].

На опыте реакции образования и разложения окиси азота изучались с помощью взрывных бомб, в которых сжигалась смесь водорода и кислорода. Таким путем

получались высокие температуры порядка 2000 К. К смеси N_2 и O_2 добавлялись азот и в различных концентрациях окись азота. При малых добавках окись образовывалась в результате соединения кислорода и азота, при больших добавках — первоначально введенная окись разлагалась. После взрыва определялись остаточные количества окиси и путем сопоставления теории с опытом находились скорости реакций образования и разложения. Сам процесс соединения кислорода с водородом почти не влиял на образование и распад окиси и служил только средством получения высокой температуры.

Если предположить, что реакция протекает по бимолекулярному механизму, т.е. при столкновении двух молекул N_2 и O_2 образуются две молекулы NO , то для константы скорости реакции можно написать простое выражение, следующее из теории столкновений (см. формулу (6.35)): $k' = P\bar{\nu}\sigma e^{-E/kT}$. На опыте было найдено значение предэкспоненциального фактора, равное $1,1 \cdot 10^3 \text{ O}_2^{-1/2}$, где через O_2 обозначено число молекул кислорода в 1 см^3 . Если подставить, например, $\text{O}_2 = 10^{18}$ молекула/см³, то получим предэкспоненциальный фактор равный $1,1 \times 10^{-6} \text{ см}^3/\text{с}$. При $T = 2500 \text{ К}$, $\bar{\nu} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, $\sigma \approx 10^{-15} \text{ см}^2$, для вероятности превращения P получается неправдоподобно большое значение $P \approx 5000$. Таким образом, предположение о бимолекулярном механизме реакции приводит к физически бессмысленному результату; опыт показывает, что на самом деле реакция протекает гораздо скорее. Н. Н. Семеновым было высказано предположение о том, что реакция окисления азота идет по цепному механизму, в котором активную роль играют свободные атомы O и N :



Теплоты реакций здесь соответствуют энергиям диссоциации молекул N_2 и NO , равным $9,74 \text{ эВ} = 225 \text{ ккал/моль}$ и $6,5 \text{ эВ} = 150 \text{ ккал/моль}$ ¹⁾.

Скорость всего процесса в целом определяется первой, эндотермической реакцией, требующей энергии активации не менее $75,5 \text{ ккал/моль}$. Как только в результате обмена $\text{O} + \text{N}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{N}$ освободится атом N , он сразу же реагирует с кислородом O_2 , восстанавливая исчезнувший атом O . Поэтому концентрация атомов O в процессе реакции остается стационарной и соответствует равновесию с молекулами O_2 , которое устанавливается быстрее, чем протекает реакция окисления азота²⁾.

Обозначая константы скоростей так, как это сделано в формулах (6.38), (6.39), запишем общие уравнения кинетики:

$$\frac{d\text{NO}}{dt} = k_1 \cdot \text{O} \cdot \text{N}_2 + k_2 \cdot \text{N} \cdot \text{O}_2 - k_3 \cdot \text{N} \cdot \text{NO} - k_4 \cdot \text{O} \cdot \text{NO}, \quad (6.40)$$

$$\frac{d\text{O}}{dt} = -\frac{d\text{N}}{dt} = -k_1 \cdot \text{O} \cdot \text{N}_2 + k_2 \cdot \text{N} \cdot \text{O}_2 + k_3 \cdot \text{N} \cdot \text{NO} - k_4 \cdot \text{O} \cdot \text{NO}. \quad (6.41)$$

¹⁾ В работе [39] были приняты старые значения энергий диссоциации N_2 и NO : $7,38$ и $5,3 \text{ эВ}$, однако, как показывают приводимые ниже расчеты (а также новейшие опыты [40]), новые значения энергий диссоциации не противоречат предположению о цепном механизме. Все численные значения констант в последующем изложении соответствуют новым энергиям диссоциации.

²⁾ Поскольку атомы кислорода находятся в равновесии с молекулами O_2 , механизм диссоциации O_2 не влияет на ход реакции окисления азота.

В силу стационарности концентрации О приравняем правую часть (6.41) нулю, выразим концентрацию N через О и подставим найденное выражение в (6.40). Получим

$$\frac{d\text{NO}}{dt} = 2 \frac{\text{O}}{k_2 \cdot \text{O}_2 + k_3 \cdot \text{NO}} \left(k_1 \cdot k_2 \cdot \text{N}_2 \cdot \text{O}_2 - k_3 \cdot k_4 \cdot \text{NO}^2 \right). \quad (6.42)$$

Произведем некоторые преобразования. Константы k_3 и k_2 определяют скорости экзотермических реакций атома с молекулой и, вероятно, одного порядка. Поскольку концентрация $\text{NO} \ll \text{O}_2$, членом $k_3 \cdot \text{NO}$ в знаменателе (6.42) можно пренебречь. Концентрацию атомов О выразим с помощью константы равновесия, $\text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{O}$, которую обозначим C_0 :

$$\text{O} = C_0 \sqrt{\text{O}_2} = 6,6 \cdot 10^{12} e^{-61\,000/RT} \sqrt{\text{O}_2}. \quad (6.43)$$

Здесь, как и в дальнейшем, все численные значения констант равновесия и констант скоростей реакций соответствуют измерению концентраций в единицах молекула/см³. Энергии выражены в кал/моль. Газовая постоянная $R = 2$ кал/моль · К. Константы скоростей связаны между собою принципом детального равновесия¹⁾:

$$C_1 = \frac{(\text{NO})(\text{N})}{(\text{N}_2)(\text{O})} = \frac{k_1}{k_3} = \frac{32}{9} e^{-75\,500/RT}; \quad C_2 = \frac{(\text{NO})(\text{O})}{(\text{O}_2)(\text{N})} = \frac{k_2}{k_4} = 6 \cdot e^{32\,500/RT}.$$

Отсюда следует тождество

$$C_1 C_2 = \frac{k_1 k_2}{k_3 k_4} = \frac{(\text{NO})^2}{(\text{N}_2)(\text{O}_2)} = C^2 = \frac{64}{3} e^{-43\,000/RT}. \quad (6.44)$$

Вынося из скобок (6.42) $k_3 k_4$ и пользуясь (6.44), получим окончательно уравнение кинетики окисления азота:

$$\frac{d\text{NO}}{dt} = k' \cdot \text{N}_2 \cdot \text{O}_2 - k \cdot \text{NO}^2 = k \{ (\text{NO})^2 - \text{NO}^2 \}, \quad (6.45)$$

где константы скоростей равны

$$k' = \frac{2C_0 k_1}{\sqrt{\text{O}_2}}, \quad k = \frac{k'}{C^2} = \frac{2C_0 k_1}{C^2 \sqrt{\text{O}_2}}. \quad (6.46)$$

Здесь (NO) соответствует равновесию NO с данными концентрациями N_2 и O_2 .

Уравнение (6.45) отличается от обычного уравнения бимолекулярной реакции зависимостью констант скорости от концентрации одного из реагентов — кислорода.

Физический смысл выражения для скорости образования окиси $k' \cdot \text{N}_2 \cdot \text{O}_2 = 2C_0 k_1 \text{N}_2 \sqrt{\text{O}_2}$ очень простой: $C_0 \sqrt{\text{O}_2}$ есть концентрация атомного кислорода, $k_1 C_0 \sqrt{\text{O}_2} \cdot \text{N}_2$ — скорость первой реакции цепи; но в силу экзотермичности вторая реакция следует «мгновенно» за первой, так что каждый акт первой реакции, которая «ведет» процесс, приводит к образованию двух молекул NO .

Выделяя в константе скорости k_1 множитель $e^{-E_1/RT}$ и замечая, что согласно (6.43) $C_0 \sim e^{-61\,000/RT}$, можно видеть, что энергия активации для реакции образования окиси азота E' ($k' \sim e^{-E'/RT}$) складывается из энергии, необходимой на

¹⁾ Предэкспоненциальные множители в константах равновесия C_1 , C_2 , C вычислены в приближении равенства масс N и O, моментов инерции и частот N_2 , O_2 , NO , при учете различной симметрии и мультиплетности термов. Это приближение достаточно точное.

образование одного атома кислорода — 61 ккал/моль¹⁾, и энергии активации для реакции атома кислорода с молекулой азота — E_1 .

В опытах, описанных в работе [39], окись азота получалась в результате взрывов горючей смеси, содержащей в своем составе кислород и азот. Количество образующейся окиси измерялось после охлаждения продуктов взрыва. На основе теоретического рассмотрения кинетики реакции в процессе охлаждения были выведены энергия активации образования окиси $E' = 125 \pm 10$ ккал/моль, и абсолютное значение константы скорости в исследуемом интервале температур 2000–3000 К; причем отмечено, что более вероятным является верхнее значение энергии активации $E' = 125 + 10 = 135$ ккал/моль. Отсюда для энергии активации первой реакции цепи $O + N_2 \rightarrow NO + N$ получается значение $E_1 = 135 - 61 = 74$ ккал/моль, совпадающее с теплотой эндотермической реакции. Это означает, что обратная реакция $N + NO \rightarrow O + N_2$ идет практически без активации (или с очень малой энергией активации), что является типичным для экзотермической реакции свободного атома с молекулой. Абсолютные значения констант скорости, которые следуют из опытных данных, равны

$$k' = \frac{1,1 \cdot 10^3}{\sqrt{O_2}} e^{-135\,000/RT}, \quad k' = \frac{53}{\sqrt{O_2}} e^{-92\,000/RT} \text{ см}^3/\text{с} \quad (O_2 \text{ в } 1/\text{см}^3). \quad (6.47)$$

Константа скорости для первой реакции цепи $k_1 = 8,3 \cdot 10^{-11} e^{-74\,000/RT}$. Сопоставление этой величины с формулой (6.35) теории столкновений дает стерический фактор $P = 0,086$ (если принять эффективный диаметр $d_{12} = 3,75 \cdot 10^{-8}$ см равным диаметру молекулы N_2 , определенному из данных по вязкости). Такое значение P представляется вполне разумным.

Позднее исследование кинетики образования окиси азота было предпринято Гликом и др. [40] с помощью ударной трубы, в которой газовая смесь, содержащая азот и кислород, нагревалась ударной волной до температур 2000–3000 К. Эти авторы нашли энергию активации $E' = 135 \pm 5$ ккал/моль ($E_1 = 74 \pm 5$ ккал/моль), что хорошо согласуется с данными работы [39] и подтверждает совпадение энергии активации первой реакции цепи E_1 с теплотой реакции. Абсолютные значения константы скорости также оказались близкими к данным первой работы.

Из формулы (6.47) видно, что энергия активации для разложения окиси азота также весьма велика, $E = E' - 43 = 92$ ккал/моль, поэтому при низких температурах окись разлагается очень медленно. Благодаря этому при быстром охлаждении первоначально нагретого воздуха образовавшаяся в нем при высоких температурах окись азота сохраняется после охлаждения в течение долгого времени, так что концентрация ее значительно превышает равновесные значения, которые очень малы при низких температурах (этот эффект носит название эффекта закалки; мы еще вернемся к нему в § 5 гл. VIII). Как видно из уравнения кинетики (6.45) и формул (6.44), (6.47), время релаксации для установления равновесной концентрации окиси равно²⁾

$$\tau = \frac{1}{2K(NO)} = \frac{0,95 \cdot 10^{-2} \sqrt{O_2}}{(NO)} e^{92\,000/RT} = \frac{2,06 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{N_2}} e^{113500/RT} \text{ с}. \quad (6.48)$$

¹⁾ Такая энергия — эффективная для температур порядка 2000–5000 К; она несколько отличается от энергии образования при абсолютном нуле — 58,5 ккал/моль.

²⁾ Согласно определению времени релаксации (6.2), при небольшом отклонении NO от (NO) , $\{(NO)^2 - NO^2\} \approx 2(NO) \cdot \{(NO) - NO\}$, откуда и получается (6.48). Время τ характеризует не только приближение к равновесию, но и вообще процесс установления равновесия, даже если в начальный момент окиси не было.

Оно быстро уменьшается с увеличением температуры. Приведем несколько значений τ для воздуха нормальной плотности ($N = 2,1 \cdot 10^{19}$ молекула/см³):

T, K	1000	1700	2000	2300	2600	3000	4000
τ , с	$2,2 \cdot 10^{12}$	140	1	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-7}$

§9. Скорость образования двуокиси азота при высоких температурах. Реакция образования двуокиси азота из окиси,



— экзотермическая, поэтому чем ниже температура, тем более сдвинуто равновесие в сторону окисления окиси. Реакция эта широко используется в промышленности и хорошо изучена экспериментально при температурах ниже 1000 К. Она имеет очень малую, практически незаметную, энергию активации и поэтому легко протекает при обычных температурах. Уравнение кинетики реакции имеет вид

$$\frac{d\text{NO}_2}{dt} = 2 \{ k'_1 \text{NO}^2 \cdot \text{O}_2 - k'_2 \text{NO}_2^2 \} = 2k'_2 \{ (\text{NO}_2)^2 - \text{NO}_2^2 \}. \quad (6.50)$$

Константы скоростей реакций описывают число актов реакций; множитель 2 учитывает тот факт, что в каждом акте образуются или исчезают две молекулы NO_2 . Время релаксации для установления химического равновесия двуокиси азота с окисью и кислородом равно

$$\tau' = \frac{1}{4k'_2(\text{NO}_2)} = \frac{C^2}{4k'_1(\text{NO}_2)}, \quad (6.51)$$

где $C^2 = (\text{NO}_2)^2 / \text{NO}^2 \cdot \text{O}_2$ — константа равновесия двуокиси с фактическими количествами окиси и кислорода, которые могут быть и неравновесными ¹⁾. Константу равновесия можно рассчитать статистическим методом. После подстановки значений всех параметров она оказывается равной ²⁾

$$C = \frac{(\text{NO}_2)}{\text{NO} \cdot \text{O}_2^{1/2}} = \frac{1,25 \cdot 10^{-11}}{T^{3/4}} \times \frac{(1 - e^{-2740/T}) (1 - e^{-2270/T})^{1/2} e^{6460/T}}{(1 + e^{-174/T}) (1 - e^{-916/T}) (1 - e^{-1960/T}) (1 - e^{-2310/T})}, \quad (6.52)$$

где температура везде выражена в градусах, а размерность C соответствует измерению концентраций в числах частиц в 1 см³.

Константа скорости рассчитывалась в работе [38] методом активированного комплекса, причем было получено хорошее согласие с экспериментальными данными Боденштейна [44], исследовавшего скорость реакции в интервале температур от 353 до 845 К. Сопоставление свидетельствует об отсутствии энергии активации для реакции. Формулой для константы скорости k'_1 , выведенной в [38], можно воспользоваться для оценки скорости и времени релаксации и при высоких

¹⁾ Заметим, что время τ' характеризует релаксацию только при условии, что $(\text{NO}_2) \ll \text{NO}$, т. е. при достаточно высоких температурах. В противном случае необходимо одновременно рассматривать и изменение концентрации NO .

²⁾ Как было отмечено одним из авторов [41], константа равновесия, приведенная в широко распространенном справочнике [42], взята из ошибочной работы [43] и завышена в 2,42 раза.

температурах, которые на опыте не изучались. Результаты расчета времени релаксации образования двуокси азота в нагретом воздухе при нескольких значениях температуры и плотности представлены в табл. 6.3 (при этом равновесные концентрации (NO_2) рассчитывались на основе равновесных значений концентраций окиси (NO) и кислорода (O_2)).

Таблица 6.3. Времена релаксации для установления равновесной концентрации двуокси азота в воздухе (в с) (τ' — тримолекулярная реакция, τ'' — бимолекулярная)

T, K	$\varrho/\varrho_{\text{норм}} = 10$		$\varrho/\varrho_{\text{норм}} = 5$		$\varrho/\varrho_{\text{норм}} = 1$	
	τ'	τ''	τ'	τ''	τ'	τ''
1600			$8 \cdot 10^{-3}$	0,35	0,09	0,69
1800			$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,04	0,09
2000	$6,75 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	0,01
2300	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$
2600	$4,75 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
3000	$1,75 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-6}$	$4,75 \cdot 10^{-5}$	$9,4 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
4000	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$1,05 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$

При высоких температурах и особенно при малых плотностях газа, с тримолекулярной реакцией (6.49) конкурирует другой механизм образования двуокси:



Несмотря на то, что эта реакция эндотермическая, она обладает по сравнению с реакцией (6.49) тем преимуществом, что осуществляется путем не тройных, а парных столкновений молекул. Это преимущество должно проявляться при высоких температурах, когда условия для активации благоприятны. Реакция (6.53) не изучалась на опыте; теоретическая оценка ее скорости была дана в работе одного из авторов [41]. Уравнение кинетики для реакции (6.53) можно записать в виде

$$\frac{d\text{NO}_2}{dt} = k_1'' \cdot \text{NO} \cdot \text{O}_2 - k_2'' \cdot \text{NO}_2 \cdot \text{O} = k_2'' \cdot \text{O} \{(\text{NO}_2) - \text{NO}_2\}. \quad (6.54)$$

Время релаксации

$$\tau'' = \frac{1}{k_2'' \cdot \text{O}}. \quad (6.55)$$

Оценим константу скорости методом активированного комплекса, сущность которого была изложена в § 7. В частности, эта оценка может послужить иллюстрацией конкретного применения метода. Для удобства будем рассматривать обратную реакцию $\text{NO}_2 + \text{O} \rightarrow \text{NO}_3^* \rightarrow \text{NO} + \text{O}_2$, где звездочкой отмечен комплекс. По общей формуле (6.36) константа скорости k_2'' равна

$$k_2'' = \kappa \frac{kT}{h} \frac{Z_{\text{NO}_3^*}}{Z_{\text{NO}_2} \cdot Z_{\text{O}}}.$$

Вычисление статистических сумм атомов O и молекул NO_2 не представляет трудностей, так как спектроскопические константы молекулы NO_2 известны. Что же касается комплекса, то здесь имеется целый ряд неизвестных величин, которые для оценки придется выбрать разумным образом.

Масса комплекса NO_3^* в 1,39 раза больше массы молекулы NO_2 . Полагая, что размеры его несколько превышают размеры молекулы NO_2 , будем считать, что средний момент инерции комплекса в 1,5 раза больше среднего момента инерции молекулы NO_2 . Собственные частоты молекулы NO_3 , по которым можно было бы

судить о частотах комплекса, неизвестны. Можно надеяться, что три высшие частоты меньше частот молекулы NO_2 : $h\nu_{\text{NO}_2}/k = 960, 1960, 2310$ К, так как связь в комплексе слабее. Легко проверить, что при температурах 2000–4000 К константа скорости не очень чувствительна к выбору частот комплекса в пределах разумного интервала. Зададимся для расчета следующими пятью частотами: $h\nu^*/k = 600, 800, 900, 1500, 2000$ К (шестая исключена из Z^*). Комплекс несимметричен, так что фактор симметрии $\sigma = 1$. Статистический вес электронного состояния $g^* \geq 2$, так как комплекс содержит один неспаренный электрон. Положим $g^* = 2$. Энергия активации экзотермической реакции, $\text{NO}_2 + \text{O} \rightarrow \text{NO} + \text{O}_2$, по-видимому, весьма мала, как это обычно бывает, когда одним из реагентов является свободный атом. Положим для оценки $E = 10$ ккал/моль; это в худшем случае может понизить скорость реакции в 2–3 раза при температурах 2000–4000 К.

Подставляя эти, а также другие известные константы в выражения статистических сумм и принимая трансмиссионный коэффициент κ равным единице, получим константу скорости

$$k_2'' = \frac{1,16 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{T}} \frac{\prod_{i=1}^5 Z_{\text{кол } i}^*}{\prod_{i=1}^3 Z_{\text{кол NO}_2 i}} e^{-5030/T} \text{ см}^3/\text{с}, \quad (6.56)$$

где колебательные статистические суммы равны $Z_{\text{кол}} = (1 - e^{h\nu/kT})$. Чтобы получить с помощью теории столкновений (см. формулу (6.35)) константу скорости такого же порядка, что и по формуле (6.56), следовало бы считать стерический фактор P величиной порядка $2 \cdot 10^{-4}$. Выбрать столь малое значение без каких-либо видимых к тому оснований было бы довольно трудно, так что теория столкновений в данном случае оказывается практически бесполезной и оценить скорость реакции можно только, воспользовавшись методом активированного комплекса.

Времена релаксации, вычисленные для воздуха по формулам (6.55), (6.56), также представлены в табл. 6.3.

Сравнение этих времен показывает, что при плотностях воздуха порядка и меньше нормальной и температурах ~ 2000 – 3000 К вторая реакция идет скорее и является основной.

2. Ионизация и рекомбинация. Электронное возбуждение и дезактивация

§ 10. Основные механизмы. Возбуждение высших электронных состояний атомов (молекул, ионов) и ионизация имеют между собой много общего. В сущности, ионизация представляет собой предельный случай электронного возбуждения, когда электрон, связанный в атоме, приобретает энергию, достаточную для отрыва от атома и перехода в непрерывный спектр. Каждый из элементарных процессов, в результате которых происходит возбуждение электронов в атомах, может привести и к ионизации, если для этого хватает энергии.

Все элементарные процессы возбуждения и ионизации можно подразделить на две категории: возбуждение и ионизацию атомов (молекул, ионов) ударами частиц и фотопроцессы, в которых роль одной из «частиц» играет световой квант. В первом круге процессов следует различать ионизацию и возбуждение электронным ударом и неупругие столкновения тяжелых частиц, так как вероятности тех и других неупругих столкновений резко отличаются друг от друга. Согласно такой классификации,

основные реакции ионизации можно записать в следующей символической форме (А, В — тяжелые частицы, e — электроны, $h\nu$ — световые кванты):

$$A + e = A^+ + e + e, \quad (6.57)$$

$$A + B = A^+ + B + e, \quad (6.58)$$

$$A + h\nu = A^+ + e. \quad (6.59)$$

Обратные процессы, идущие справа налево, приводят к рекомбинации электронов с ионами: первые два представляют собой рекомбинации в тройных столкновениях с участием электрона или тяжелой частицы в качестве третьей, последняя реакция — фоторекомбинация или фотозахват электронов.

Каждому из процессов (6.57)–(6.59) соответствует процесс возбуждения (возбужденный атом отмечается звездочкой):

$$A + e = A^* + e, \quad (6.60)$$

$$A + B = A^* + B, \quad (6.61)$$

$$A + h\nu = A^*. \quad (6.62)$$

Первые два обратных процесса представляют собой дезактивацию возбужденных атомов так называемыми ударами второго рода, третий — высвечивание возбужденного атома.

Ионизоваться могут не только атомы, пребывающие в основном состоянии, но и возбужденные, так что к списку реакций (6.57)–(6.59) следует добавить и реакции типа

$$A^* + e = A^+ + e + e, \quad (6.63)$$

$$A^* + B = A^+ + B + e, \quad (6.64)$$

$$A^* + h\nu = A^+ + e. \quad (6.65)$$

То же относится и к процессам возбуждения; к списку реакций (6.60)–(6.62) следует добавить реакции повышения степени возбуждения:

$$A^* + e = A^{**} + e, \quad (6.66)$$

$$A^* + B = A^{**} + B, \quad (6.67)$$

$$A^* + h\nu = A^{**}. \quad (6.68)$$

Несмотря на то, что число возбужденных атомов обычно значительно меньше числа атомов, пребывающих в основном состоянии, роль ионизации возбужденных атомов в освобождении электронов не мала, так как соответственно в их ионизации участвуют частицы с меньшими энергиями. В самом деле, число частиц, способных ионизовать невозбужденный атом, пропорционально $e^{-I/kT}$, где I — потенциал ионизации. Но число актов ионизации атомов, возбужденных до уровня E^* , также пропорционально $e^{-E^*/kT} e^{-(I-E^*)/kT} = e^{-I/kT}$, так как первому множителю пропорционально число возбужденных атомов, а второму — число частиц, способных ионизовать возбужденный атом. (Обычно в не слишком плотном газе ионизация происходит при $kT \ll I$, так что $I/kT \gg 1$ и бoльцмановский фактор $e^{-I/kT}$ весьма существен.) Сравнительная роль ионизации возбужденных и невозбужденных атомов в условиях равновесного возбуждения определяется, главным образом, эффективными сечениями ионизации тех и других при ударах частицами с надпороговой энергией.

Вообще говоря, процессы всех трех типов протекают в газе одновременно. Однако часто один из процессов оказывается преобладающим. При энергиях порядка

потенциалов возбуждения или ионизации атомов, т. е. порядка нескольких или десятка электронвольт, эффективные сечения неупругих соударений тяжелых частиц на несколько порядков меньше эффективных сечений неупругих электронных ударов. Кроме того, скорости тяжелых частиц при сравнимых энергиях примерно в сотню раз меньше скоростей электронов (в отношении корня квадратного из масс). Поэтому процессы типа (6.58), (6.61) в нагретом газе имеют значение только тогда, когда свободных электронов практически нет. При степенях ионизации порядка 10^{-5} – 10^{-4} и выше, скорости процессов первого типа, (6.57), (6.60), больше скоростей процессов с участием тяжелых частиц и роль последних пренебрежимо мала. По существу, ионизация ударами атомов или молекул важна только для образования небольшого начального количества «затравочных» электронов, когда газ «мгновенно» нагревается, как это иногда имеет место, например, при прохождении сильной ударной волны. В некоторых случаях начальная ионизация в «мгновенно» нагретом газе создается достаточно интенсивным потоком излучения или же быстрыми электронами, приходящими извне, из ранее нагретых областей, и тем самым низводится к нулю даже эта «затравочная» роль второго процесса.

Сравнительная роль первого и третьего процессов более сложным образом зависит от макроскопических условий. Число актов ионизации электронным ударом в 1 с в 1 см^3 пропорционально плотности электронов, тогда как число актов фотоионизации пропорционально плотности излучения.

Если размеры области, занимаемой нагретым газом, достаточно велики по сравнению с пробегами квантов, так что плотность излучения значительна и порядка равновесной, она не зависит от плотности газа и определяется только температурой. Поэтому в достаточно разреженном газе скорость ионизации электронным ударом оказывается малой и основную роль играет фотоионизация. То же относится и к процессам возбуждения, а также и к обратным процессам рекомбинации и дезактивации: фоторекомбинация преобладает над рекомбинацией в тройных соударениях, и высвечивание возбужденных атомов преобладает над снятием возбуждения ударами второго рода. Именно такое положение наблюдается, например, в звездных фотосферах.

Если область, занимаемая нагретым газом, ограничена и прозрачна («оптический тонка»), то излучаемые в газе кванты, не задерживаясь, покидают нагретый объем, и плотность излучения в газе меньше равновесной. В этих условиях даже при малой плотности электронов скорость ионизации электронным ударом может оказаться выше скорости фотоионизации, тогда как соотношение скоростей обратных процессов рекомбинации может остаться прежним, т. е. фоторекомбинация может преобладать.

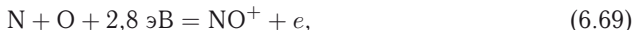
В достаточно плотном ионизованном газе фотоионизация и фоторекомбинация играют второстепенную роль по сравнению с процессами (6.57) и (6.63).

В реальных условиях процессы ионизации и рекомбинации чаще всего протекают более сложными путями, чем это рисуется простыми схемами (6.57)–(6.59). Происходит так называемая ступенчатая ионизация, при которой атом сначала возбуждается, скажем, электронным ударом, а затем либо сразу ионизируется при последующих электронных ударах, либо предварительно проходит через несколько ступеней повышения степени возбуждения. Сложным образом часто протекает и обратный процесс рекомбинации в тройных столкновениях: электрон захватывается ионом на возбужденный уровень атома, а затем происходит ступенчатая дезактивация атома, причем здесь действуют конкурирующие механизмы дезактивации: электронные удары второго рода и спонтанные радиационные переходы между уровнями.

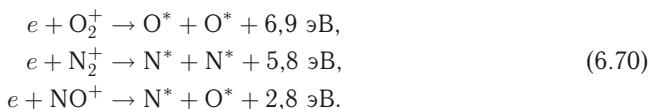
В молекулярном газе, молекулы и атомы которого обладают потенциалами ионизации, не намного превышающими энергии диссоциации, ионизация начинается задолго до конца диссоциации, так что существует область температур, в которой одновременно значительны и концентрация электронов, и концентрация молекул.

Примером может служить воздух при температурах порядка 7000–15 000 К, очень важных с точки зрения практических приложений. В этом случае, наряду с указанными процессами ионизации выше существуют и более сложные, главный из которых — рекомбинация атомов в молекулу с одновременной ионизацией (ассоциативная ионизация).

Этот процесс с энергетической точки зрения выгодно отличается от остальных тем, что требует затраты энергии, меньшей потенциала ионизации на величину выделяющейся энергии диссоциации. При сравнительно низких температурах и малой степени ионизации важнейшую роль для ионизации воздуха играет реакция

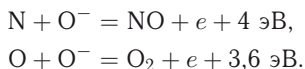


которая протекает на несколько порядков быстрее, чем простая ионизация NO ударами атомов и молекул ¹⁾. В процессе рекомбинации электронов с ионами в молекулярных газах важную роль играет так называемая диссоциативная рекомбинация. В частности, в воздухе протекают процессы



В результате диссоциативной рекомбинации образуются возбужденные атомы. Выделяющаяся энергия связи электрона тратится на диссоциацию молекулы, а избыток ее идет на возбуждение атомов и частично переходит в кинетическую энергию.

Если в газе имеются атомы или молекулы, обладающие электронным сродством (например, Н, О, О₂, Cl, Br, J и др.), при сравнительно низких температурах образуются отрицательные ионы, что оказывает существенное влияние на кинетику образования и исчезновения свободных электронов. Помимо реакций типа (6.57)–(6.59), в которых А и А⁺ заменяются соответственно на А[−] и А, могут протекать и более сложные энергетически выгодные реакции типа (6.69); например в воздухе — это экзотермические реакции:



Список реакций, протекающих в нагретом воздухе и приводящих к образованию и исчезновению свободных электронов, а также к обмену зарядом, с указанием их энергетического выхода, имеется в работе [73].

§ 11. Ионизация невозбужденных атомов электронным ударом. Рассмотрим процесс первой ионизации газа из одинаковых атомов в предположении, что все атомы ионизируются из основного состояния, а при рекомбинации электрон захватывается на основной уровень (реакция (6.57)). Эффективное сечение ионизации при столкновениях зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Поскольку скорость атомов при сравнимых температурах атомов и электронов всегда значительно меньше скорости электронов, относительная скорость совпадает с последней; приведенная масса, характеризующая кинетическую энергию относительно движения, совпадает с массой электрона.

¹⁾ При сравнительно низких температурах основным поставщиком свободных электронов в воздухе являются молекулы NO, потенциал ионизации которых, $I_{\text{NO}} = 9,25 \text{ эВ}$, ниже, чем у всех других компонентов воздуха ($I_{\text{O}_2} = 12,15 \text{ эВ}$, $I_{\text{N}_2} = 15,56 \text{ эВ}$, $I_{\text{O}} = 13,57 \text{ эВ}$, $I_{\text{N}} = 14,6 \text{ эВ}$, $I_{\text{Ar}} = 15,8 \text{ эВ}$).

Если N_a и N_e — числа атомов и электронов в 1 см^3 , $f_e(v) dv$ — функция максвелловского распределения электронов по скоростям, соответствующая электронной температуре T_e ¹⁾, $\left(\int_0^\infty f_e(v) dv = 1 \right)$ и $\sigma_e(v)$ — эффективное сечение ионизации электронным ударом, то число актов ионизации в 1 см^3 в 1 с равно

$$Z_{\text{ион}}^e = N_a N_e \int_{v_k}^\infty \sigma_e(v) v f_e(v) dv = N_a N_e \alpha_e, \quad (6.71)$$

где интегрирование распространяется по скоростям электронов, энергия которых превышает потенциал ионизации, $m_e v_k^2 / 2 = I$.

Обозначая константу скорости рекомбинации через β_e , запишем уравнение кинетики реакции (6.57),

$$\frac{dN_e}{dt} = \alpha_e N_a N_e - \beta_e N_+ N_e^2, \quad (6.72)$$

причем число ионов N_+ равно числу электронов N_e . Константы скоростей α_e и β_e связаны между собою принципом детального равновесия:

$$\beta_e = \frac{\alpha_e}{K(T_e)}. \quad (6.73)$$

Здесь константа равновесия определяется формулой Саха (3.44):

$$K(T_e) = \frac{(N_e)(N_+)}{(N_a)} = \frac{g_+}{g_a} \frac{2(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-I/kT_e} =$$

$$= 4,85 \cdot 10^{15} \frac{g_+}{g_a} T_e^{3/2} e^{-I/kT_e} \text{ 1/см}^3. \quad (6.73')$$

Число рекомбинаций в 1 см^3 в 1 с иногда записывают в форме $Z_{\text{рек}} = b_e N_+ N_e$. Величина $b_e = \beta_e N_e$ называется коэффициентом рекомбинации; b_e имеет размерность $\text{см}^3/\text{с}$, такую же, что и константа скорости ионизации α_e .

Если концентрация электронов (и ионов) гораздо меньше равновесной, рекомбинация не играет роли и развитие ионизации электронным ударом носит характер электронной лавины: если считать, что электронная температура не зависит от времени, концентрация электронов экспоненциально растет со временем $N_e = N_e^0 e^{t/\tau_e}$; здесь N_e^0 — «начальное» число электронов, а масштаб времени нарастания лавины приближенно (при $N_a \approx \text{const}$) равен

$$\tau_e = \frac{1}{\alpha_e N_a} \text{ 2)}. \quad (6.74)$$

¹⁾ Вследствие большого различия масс электронов и атомов обмен энергиями между электронами и тяжелыми частицами при упругих столкновениях происходит довольно медленно. Поэтому электронная температура, вообще говоря, может отличаться от поступательной температуры тяжелых частиц (см. разд. 3 этой главы).

²⁾ Следует подчеркнуть, что простой экспоненциальный закон нарастания электронной лавины с масштабом времени τ_e справедлив только при условии, что $T_e = \text{const}$. В реальных условиях электронная температура может сама зависеть от времени. Дело в том, что при $kT_e \ll I$ на ионизацию затрачивается очень большая доля тепловой энергии электронов: грубо говоря, на рождение одного нового электрона тратится тепловая энергия I/kT_e электронов. Если нет источника, за счет которого восполнялись бы потери энергии

Легко убедиться в том, что величина τ_e характеризует и время релаксации для приближения к ионизационному равновесию путем первого механизма (6.57). Точнее, при $|(N_e) - N_e| \ll (N_e)$, время релаксации, согласно общему определению (6.2), вдвое меньше τ_e .

Типичная кривая зависимости эффективного сечения ионизации σ_e от скорости или энергии электронов изображена на рис. 6.4. Сечение возрастает за порогом ионизации $\varepsilon_e = I$, достигает максимума при энергии электронов, в несколько раз превышающей порог, и затем медленно падает. В максимуме сечение, как правило, порядка 10^{-16} см². В не слишком плотном газе ионизация наступает обычно при температурах, гораздо меньших потенциала ионизации: $I/kT_e \gg 1$. Так, например, в атомарном водороде при $N_a = 10^{19}$ см⁻³ (что соответствует давлению недиссоциированного молекулярного водорода при комнатной температуре, равному 135 мм рт. ст.) и $T = 10\,000$ К равновесная степень ионизации равна $6,25 \cdot 10^{-3}$; при этом $I/kT = 15,7$.

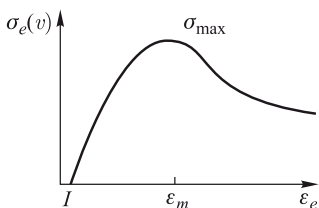


Рис. 6.4. Зависимость эффективного сечения ионизации электронным ударом от энергии электрона

Достаточной для ионизации энергией обладают лишь электроны, соответствующие хвосту максвелловского распределения по скоростям, число которых экспоненциально мало (пропорционально $\exp(-m_e v^2/2kT_e) \ll 1$). Поэтому в интеграле (6.71)

основную роль играют электроны, энергия которых лишь немного, на величину порядка kT_e ($kT_e \ll I$), превышает потенциал ионизации. Теория и опыт показывают, что вблизи порога эффективное сечение линейно зависит от энергии электронов ε_e :

$$\sigma_e(v) \approx C(\varepsilon_e - I), \quad C = \text{const.} \quad (6.75)$$

Подставляя эту величину в выражение (6.69) и интегрируя, найдем константу скорости ионизации с основного уровня атомов:

$$\alpha_e = \int_{v_k}^{\infty} \sigma_e(v) v f_e(v) dv = \sigma_e \bar{v}_e \left(\frac{I}{kT_e} + 2 \right) \exp(-I/kT_e), \quad (6.76)$$

где

$$\bar{v}_e = \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} = 6,21 \cdot 10^5 \sqrt{T_e} = 6,7 \cdot 10^7 \sqrt{T_{\text{эВ}}} \text{ см/с}$$

— средняя тепловая скорость электронов, а σ_e — некоторое среднее значение эффективного сечения $\sigma_e(v)$, которое в точности соответствует энергии электронов $\varepsilon_e = I + kT_e$; $\sigma_e = CkT_e$.

Константа скорости рекомбинации с захватом электрона на основной уровень атома, согласно (6.73), (6.76) равна

$$\beta_e = \frac{g_a}{g_+} \left(\frac{I}{kT_e} + 2 \right) \frac{h^3 \sigma_e}{2\pi^2 m_e^2 kT} = 1,1 \cdot 10^{-14} C \frac{g_a}{g_+} \left(\frac{I}{kT_e} + 2 \right) \text{ см}^6/\text{с}. \quad (6.77)$$

электронного газа на ионизацию, то электронная температура падает с течением времени, величина $\alpha_e \sim \exp(-I/kT_e)$ резко уменьшается, развитие лавины затухает. Во фронте ударной волны потери энергии электронов восполняются за счет притока энергии от атомов (ионов) к электронам. Подробнее см. об этом § 10 гл. VII.

В не слишком плотном газе, когда $I/kT_e \gg 1$, $\beta_e \sim T_e^{-1}$, характерное время τ_e в области малых степеней ионизации зависит от температуры по закону $\tau_e \sim \exp(I/kT_e)$.

В табл. 6.4 собраны экспериментальные данные по сечениям ионизации некоторых атомов и молекул электронным ударом (обозначения см. на рис. 6.4) ¹⁾. Численное значение константы C совпадает с эффективным сечением (в см^2) при энергии электронов, превышающей потенциал ионизации на 1 эВ, т. е. со средним сечением σ_e при температуре $T_e = 1 \text{ эВ} = 11\,600 \text{ К}$, как раз характерной для области первой ионизации. Как видно из таблицы, сечение σ_e имеет порядок 10^{-17} см^2 .

Таблица 6.4. Ионизация электронным ударом

Атом, молекула	I , эВ	$C \cdot 10^{17}$ $\text{см}^2/\text{эВ}$	Область применимости, эВ	$\varepsilon_{\max}$, эВ	$\sigma_{e \max} \cdot 10^{16}$, см^2	Литература
H ₂	15,4	0,59	16–25	70	1,1	[46]
Ne	24,5	0,13	24,5–35	100	0,34	[46]
N	14,6	0,59	15–30	~ 100	$\sim 2,1$	[47]
N ₂	15,6	0,85	16–30	110	3,1	[46]
O	13,6	0,6	14–25	~ 80	$\sim 1,5$	[48]
O ₂	12,1	0,68	13–40	110		[46]
NO	9,3	0,82	10–20	~ 100	3,25	[49]
Ar	15,8	2,0	15–25	100	3,7	[46]
		1,7	15–18			
Ne	21,5	0,16	21,5–40	~ 160	0,85	[46]
Hg	19,4	7,9	10,5–13	42	5,4	[46]
Hg		2,7	10,5–28			

Для того чтобы получить представление о порядках величин, рассмотрим конкретный пример: аргон при $T_e = 13\,000 \text{ К}$ и $N_\alpha = 1,7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (такая плотность соответствует давлению 50 мм рт. ст. при нормальной температуре). Равновесная степень ионизации в таких условиях равна 0,14; $\sigma_e = 2,24 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$; $\bar{v}_e = 7,1 \cdot 10^7 \text{ см/с}$; константы скоростей равны $\alpha_e = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}^3/\text{с}$, $\beta_e = 5,9 \cdot 10^{-31} \text{ см}^6/\text{с}$; характерное время $\tau_e = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. При температуре $T_e = 16\,000 \text{ К}$ и той же плотности время τ_e примерно в 15 раз меньше: $\tau_e = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

§ 12. Возбуждение атомов из основного состояния электронным ударом.

Деактивация. Аналогично предыдущему будем для простоты считать, что атом обладает только одним возбужденным уровнем E^* , так что атом возбуждается только в результате перехода из основного состояния. Запишем уравнение кинетики возбуждения:

$$\frac{dN^*}{dt} = \alpha_e^* N_a N_e - \beta_e^* N^* N_e, \quad (6.78)$$

α_e^* — константа скорости возбуждения, а β_e^* — константа скорости деактивации, равная $\beta_e^* = \bar{v}_e \cdot \sigma_{e2}$, где σ_{e2} — усредненное по максвелловскому распределению эффективное сечение для электронных ударов второго рода. Константа скорости возбуждения выражается через эффективное сечение возбуждения $\sigma_e^*(v)$ точно таким же интегралом, что и α_e (см. (6.76)), с той лишь разницей, что нижним пределом

¹⁾ Подробный обзор и анализ литературных данных имеется в книге Мессии и Бархопа [45]. Рекомендуем также книгу В. Л. Грановского [46] и С. Брауна [78].

служит теперь скорость v^* , соответствующая порогу возбуждения $m_e v^{*2}/2 = E^*$. Зависимость сечения $\sigma_e^*(v)$ от скорости или от энергии (так называемая функция возбуждения) имеет такой же характер, что и кривая ионизации, изображенная на рис. 6.4. Точно так же вблизи порога ее можно приближенно аппроксимировать прямой: $\sigma_e^*(v) = C^*(\varepsilon - E^*)^1$). Поэтому

$$\alpha_e^* = \int_{v^*}^{\infty} \sigma_e^*(v) v f_e(v) dv = \sigma_e^* \bar{v}_e \left(\frac{E^*}{kT_e} + 2 \right) \exp \left(-\frac{E^*}{kT_e} \right), \quad (6.79)$$

где σ_e^* соответствует энергии электронов $E^* + kT_e$.

По принципу детального равновесия, принимая во внимание, что

$$\frac{(N^*)}{(N_a)} = \left(\frac{g^*}{g_a} \right) \exp \left(-\frac{E^*}{kT_e} \right) \quad (6.80)$$

(g^* и g_a — статистические веса возбужденного и основного состояний), можно связать константы скоростей α_e^* , β_e^* или эффективные сечения возбуждения и дезактивации:

$$\sigma_{e2} = \sigma_e^* \frac{g_a}{g^*} \left(\frac{E^*}{kT_e} + 2 \right); \quad \beta_e^* = \bar{v}_e \sigma_{e2}. \quad (6.81)$$

Характерное время, соответствующее возбуждению электронным ударом, которое совпадает со временем релаксации для установления больцмановского распределения (6.80) при условии, что $T_e = \text{const}$ (см. сноску на с. 317), есть

$$\tau_e^* = \frac{1}{\beta_e^* N_e} = \frac{1}{\bar{v}_e \sigma_{e2} N_e}. \quad (6.82)$$

Литературные данные по сечениям возбуждения собраны в книгах [45, 46, 78]. Некоторые результаты представлены в табл. 6.5. Средние сечения возбуждения σ_e^* имеют порядок 10^{-17} см². Таков же и порядок сечений ударов второго рода σ_{e2} (множитель в скобках в формуле (6.81) порядка 10, но отношение статистических весов g_a/g^* обычно $\sim 1-10^{-1}$).

Для примера оценим время релаксации в аргоне при $T_e = 13\,000$ К, $N_a = 1,71 \times 10^{18}$ см⁻³. Сечения $\sigma_e^* = 10^{-17}$ см², $\sigma_{e2} \sim 10^{-17}$ см². Если взять равновесную концентрацию электронов (N_e) = $2,4 \cdot 10^{17}$ см⁻³, получим $\tau_e^* \approx 6 \cdot 10^{-9}$ с. Это время значительно меньше времени ионизации τ_e . Интересно сравнить характерные времена для ионизации и возбуждения электронным ударом. По формулам (6.74), (6.82)

$$\frac{\tau_e}{\tau_e^*} = \frac{\bar{v}_e \sigma_{e2} N_e e^{I/kT}}{\bar{v}_e \sigma_e ((I/kT) + 2) N_a} \approx \frac{1}{10} \frac{N_e}{N_a} e^{I/kT} \quad \text{при} \quad \frac{I}{kT} \sim 10.$$

В условиях, близких к равновесию и при небольших степенях ионизации $N_e/N_a \approx (6 \cdot 10^{21}/N_a)^{1/2} T_{\text{эВ}}^{3/4} \exp(-I/2kT_e)$; при обычных плотностях газа больцмановское распределение по возбуждениям устанавливается всегда быстрее, чем ионизационное равновесие. В рассмотренном примере с аргонном при $N_a = 1,7 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $T_e = 13\,000$ К, $\tau_e/\tau_e^* \approx 5000$. Времена могут оказаться сравнимыми только в начале процесса ионизации, когда число электронов гораздо меньше равновесного.

¹⁾ Это возможно для многих, но не всех атомов; в любом случае аппроксимация дает небольшую ошибку. Заметим, что сечение возбуждения положительных ионов вблизи порога, при $\varepsilon - E^*$, отлично от нуля [83].

Таблица 6.5. Возбуждение электронным ударом

Атом	Уровни	Потенциал E^* , эВ	Интерполяция суммарного сечения σ_e^* , см ²	Источник ¹⁾
H	$2p$	10,1	$25 \cdot 10^{-18} (\varepsilon - 10) \text{ см}^2$	[83]
He	$2p^3P$ $2s^1S$	19,7 20,6	$4,6 \cdot 10^{-18} (\varepsilon_{эВ} - 20) \text{ см}^2$	[46]
Ne	$3s^3P_2$	16,6 18,5	$1,5 \cdot 10^{-18} (\varepsilon_{эВ} - 16) \text{ см}^2$	[46]
Ar	$4s^3P_2$	11,5	$7 \cdot 10^{-18} (\varepsilon_{эВ} - 11,5) \text{ см}^2$	[50]
Hg	$6p^3P_1$	4,87	Максим. свечение при $\varepsilon = 6,5 \text{ эВ}$ $\sigma_{\max}^* = 1,7 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$	[46]
H ₂		8,7	$7,6 \cdot 10^{-18} (\varepsilon - 8,7) \text{ см}^2$	[78]

¹⁾ Данные со ссылкой [46] взяты из таблиц, приведенных в книге В. Л. Грановского. Ссылки на оригинальные работы можно найти в этой же книге.

§ 13. Ионизация возбужденных атомов электронным ударом. Рассмотрим ионизацию атома на основе классической механики, предполагая, что столкновение свободного электрона с атомом, вернее, «столкновение» с оптическим электроном атома, происходит быстро по сравнению со скоростью вращения связанного электрона по орбите, так что последний воспринимает энергию удара как свободный. Это было впервые сделано Томсоном в 1912 г. (Классические формулы для сечения ионизации применялись для рассмотрения элементарных процессов ионизации и рекомбинации в водородной плазме в работах [79, 80]; в работе [81] использовалось борновское приближение.)

Как известно из курса механики [82], если электрон с кинетической энергией ε пролетает мимо другого электрона, то дифференциальное сечение передачи энергии электрону — «мишени» от $\Delta\varepsilon$ до $\Delta\varepsilon + d\Delta\varepsilon$ равно $d\sigma = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \frac{d\Delta\varepsilon}{(\Delta\varepsilon)^2}$.

Сечение передачи энергии, превышающей E ($E \leq \Delta\varepsilon \leq \varepsilon$), равно

$$\sigma = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Положим, что ионизация происходит всякий раз, когда связанному электрону при ударе сообщается энергия, превышающая энергию связи. Тогда, если E — энергия связи электрона в атоме, то σ представляет собою сечение ионизации. Замечая, что $e^2 = 2I_H a_0$, где I_H — потенциал ионизации атома водорода, а a_0 — борковский радиус, запишем сечение ионизации в виде

$$\sigma = 4\pi a_0^2 \frac{I_H^2 (\varepsilon - E)}{E \varepsilon^2}. \quad (6.83)$$

Эта формула в качественном отношении правильно описывает зависимость сечения ионизации невозбужденного атома от энергии $\sigma(\varepsilon)$, изображенную на рис. 6.4, и дает верные по порядку величины значения сечений (в данном случае $E \equiv I$). Вблизи порога, при $\varepsilon \approx E \equiv I$, формула (6.83) приводит к линейной зависимости (6.75) $\sigma \approx C(\varepsilon - I)$, причем постоянная наклона оказывается равной

$$C = \frac{4\pi a_0^2}{I_H} \left(\frac{I_H}{I} \right)^3 = 2,6 \cdot 10^{-17} \left(\frac{I_H}{I} \right)^3 \text{ см}^2/\text{эВ}.$$

Для большинства атомов и молекул вычисленные по классическим формулам постоянные C и сечения вблизи порога в несколько раз превышают опытные значения (см. табл. 6.4; для аргона получаются правильные величины).

Формула (6.83) приводит к соотношению подобия по n для ионизации с n -го уровня атома водорода. Для атома водорода $E_n = I_H/n^2$ и

$$\sigma_n(\varepsilon) = 4\pi a_0^2 I_H n^4 \frac{(n^2\varepsilon - I_H)}{(n^2\varepsilon)^2} = n^4 \sigma_1(n^2\varepsilon).$$

Любопытно, что квантовомеханические формулы, основанные на борновском приближении, в случае ионизации возбужденных атомов водорода приводят к похожему, но несколько отличающемуся соотношению подобия $\sigma_n(\varepsilon) = n^3 \sigma_1(n^2\varepsilon)$ [81]. (Впрочем, ионизацию возбужденных атомов представляется более оправданным рассматривать на основе классической теории.)

Вычислим скорость ионизации возбужденных атомов. Если N_n — число атомов в 1 см^3 пребывающих в n -м квантовом состоянии, а $f(\varepsilon) d\varepsilon$ — нормированная на единицу функция максвелловского распределения электронов, то число актов ионизации таких атомов в 1 см^3 за 1 с равно

$$Z_{\text{ион } n} = N_n N_e \int_{E_n}^{\infty} \sigma(\varepsilon) v_e f(\varepsilon) d\varepsilon = \alpha_n N_n N_e. \quad (6.84)$$

Подставляя сечение (6.83), найдем константу скорости ионизации:

$$\alpha_n = 4\pi a_0^2 \bar{v}_e \left(\frac{I_H}{kT} \right)^2 \psi_n; \quad \bar{v}_e = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}, \quad (6.85)$$

$$\psi_n = \int_{x_n}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x'} \right) e^{-x'} dx' = \frac{e^{-x_n}}{x_n} - E_1(x_n), \quad x_n = E_n/kT.$$

(Заметим, что число n в этой формуле является пока что лишь индексом, так что формулу (6.85) можно применять к любому атому в любом состоянии.)

При условии $x_n \gg 1$ имеем приближенно:

$$E_1(x) \approx \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right), \quad \psi_n \approx \frac{e^{-x_n}}{x_n^2},$$

т. е. при $E_n \gg kT$

$$\alpha_n \approx 4\pi a_0^2 \bar{v}_e \left(\frac{I_H}{E_n} \right)^2 \exp \left(-\frac{E_n}{kT} \right) = 2,2 \cdot 10^{-10} \sqrt{T} \left(\frac{I_H}{E_n} \right)^2 \exp \left(-\frac{E_n}{kT} \right) \text{ см}^3/\text{с} \quad (6.86)$$

(если $E_n = 1$, приходим к формуле (6.76), в которой опущена двойка по сравнению с $I/kT \gg 1$).

Для того чтобы сравнить скорости ионизации возбужденных и невозбужденных атомов, нужно сделать какие-то предположения относительно числа возбужденных атомов. Предположим, что состояние газа близко к термодинамически равновесному и распределение по возбужденным состояниям — больцмановское. Кроме того, будем рассматривать атомы водорода. Тогда

$$E_n = I_H/n^2, \quad N_e = n^2 \exp[-(x_1 - x_n)] N_1$$

и

$$\frac{Z_{\text{ион } n}}{Z_{\text{ион } 1}} = \frac{\alpha_n N_n}{\alpha_1 N_1} = n^2 \exp[-(x_1 - x_n)] \frac{\psi_n}{\psi_1}.$$

Величину x_1 всегда можно считать большой, $x_1 \gg 1$. Если x_n также велико (низкие уровни, низкие температуры), то

$$\frac{Z_{\text{ион } n}}{Z_{\text{ион } 1}} = n^2 \left(\frac{x_1}{x_n} \right)^2 \approx n^6 \gg 1.$$

Для верхних уровней с энергиями связи $E_n \sim kT$, $x_n \sim 1$, приближенно можно положить $\psi_n \approx \frac{2}{5} \frac{e^{-x_n}}{x_n}$ [80]. При этом

$$\alpha_n \approx 4\pi a_0^2 \bar{v}_e \frac{2}{5} \left(\frac{I_H}{kT} \right) n^2 \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \approx \frac{1,4 \cdot 10^{-4} n^2}{\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \text{ см}^3/\text{с} \quad (E_n \sim kT). \quad (6.86')$$

Отношение скоростей ионизации

$$\frac{Z_{\text{ион } n}}{Z_{\text{ион } 1}} = \frac{2}{5} \frac{x_1^2}{x_n} n^2 = \frac{2}{5} \left(\frac{I_H}{kT} \right) n^4 \gg 1.$$

Таким образом, при больцмановском распределении по уровням атомы ионизуются электронным ударом преимущественно с верхних уровней, причем роль возбужденных состояний тем больше, чем выше степень возбуждения. Делая заключения о сравнительной роли ионизации невозбужденных и возбужденных атомов при сильно неравновесных условиях, нужно проявлять известную осторожность, так как верхние уровни могут оказаться сильно обедненными по сравнению с равновесной заселенностью. (К вопросу об ионизации электронным ударом мы еще вернемся в гл. VII при рассмотрении ионизации газа в ударной волне.)

Найдем скорость захвата электронов ионами на возбужденные уровни атома при тройных столкновениях с участием электрона в качестве третьей частицы.

Число актов захвата на n -й уровень в 1 см^3 за 1 с есть $Z_{\text{рек } n} = \beta_n N_e^2 N_+$. По принципу детального равновесия при термодинамическом равновесии $Z_{\text{рек } n} = Z_{\text{ион } n}$, так что $\beta_n = a_n \frac{(N_n)}{(N_e)(N_+)}$.

Формула Саха вместе с законом Больцмана дает

$$\frac{(N_e)(N_+)}{(N_n)} = \frac{2g_+}{g_n} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right). \quad (6.87)$$

Воспользовавшись формулой (6.85) для α_n , получим константу скорости захвата. Для водоподобного атома ($g_+ = 1, g_n = 2n^2$)

$$\beta_n = \frac{4}{\pi} a_0^2 \frac{h^3}{m^2 kT} \left(\frac{I_H}{kT} \right)^2 n^2 \psi_n e^{x_n} = 0,91 \cdot 10^{-25} \frac{n^2}{T} \left(\frac{I_H}{kT} \right)^2 \psi_n e^{x_n} \text{ см}^6/\text{с}. \quad (6.88)$$

Если $x_n \gg 1$ (захват на низкие уровни, низкие температуры), то $\psi_n e^{x_n} \approx x_n^{-2}$ и

$$\beta_n = 0,91 \cdot 10^{-25} \frac{n^6}{T} \text{ см}^6/\text{с}.$$

Для захватов на высокие уровни с $E_n \sim kT$

$$\psi_n e^{x_n} \approx \frac{2}{5} x_n^{-1} \quad (6.88')$$

и

$$\beta_n = \frac{0,36 \cdot 10^{-25} n^4}{T} \frac{I_H}{kT} = \frac{5,65 \cdot 10^{-21} n^4}{T^2} \text{ см}^6/\text{с}.$$

Из этих формул видно, что захваты на верхние уровни происходят гораздо чаще, чем на нижние: вероятность захвата очень быстро возрастает при увеличении квантового числа n . Физически это связано просто с увеличением радиуса и площади орбиты связанного электрона при возрастании n (площадь орбиты пропорциональна n^4). Мы здесь намеренно употребляем термин «захват», а не «рекомбинация», так как захват на высокий уровень, вообще говоря, не всегда эквивалентен рекомбинации: с верхних уровней электрон легко оторвать. К вопросу о рекомбинации в тройных столкновениях мы еще вернемся ниже, в § 17.

Остановимся кратко на вопросе об ионизации ионов. Применительно к ионизации водородоподобных ионов с основного уровня формула для сечения (6.83) приводит к соотношению подобия по Z ($E \equiv I_Z = I_H Z^2$):

$$\sigma_Z(\varepsilon) = \frac{4\pi a_0^2 I_H}{Z^4} \frac{(Z^{-2}\varepsilon - I_H)}{(Z^{-2}\varepsilon)^2} = \frac{1}{Z^4} \sigma_1\left(\frac{\varepsilon}{Z^2}\right).$$

Борновское приближение в этом случае приводит к некоторому отклонению от подобия [83]. Оценим зависимость скорости ионизации ионов от их заряда ($Z = 1$ соответствует нейтральному атому). Очевидно, производить такое сравнение при одинаковых температурах не имеет смысла, так как вторая ионизация протекает при более высоких температурах, чем первая, третья — при еще более высоких температурах, и т. д. Как было выяснено в гл. III, атомы и ионы обычно ионизируются при температурах, удовлетворяющих условию $I_Z/kT \sim 5-10$.

Поэтому скорости ионизации имеют смысл сравнивать при постоянном отношении $I_Z/kT = \text{const}$. Имея в виду, что при этом $\bar{v}_e \sim \sqrt{T} \sim Z$, получим по формуле (6.86) ($E_n \rightarrow I_Z = I_H Z^2$) константу скорости Z -й ионизации с основного уровня: $\alpha_Z = \alpha_1/Z^3$. Таким образом, ионизация ионов протекает относительно медленнее, чем ионизация нейтральных атомов. Физически это связано в первую очередь с малостью геометрических размеров ионов.

§ 14. Ударные переходы между возбужденными состояниями атома. Экспериментальные данные по сечениям возбуждения электронным ударом относятся к переходам из основного состояния (см. § 12). При изучении нагретой плазмы иногда возникает необходимость в оценках вероятностей ударных переходов между более высокими уровнями. Для оценки сечений переходов можно использовать результаты, которые дает квантовомеханический метод искаженных волн [83]. Упрощенная формула для сечения возбуждения атома электронным ударом при разрешенных переходах приводится в [86]. Ее удобно представить в форме, сходной с классическим выражением для сечения ионизации:

$$\sigma_{nn'} = 4\pi a_0^2 \frac{I_H^2 (\varepsilon - E_{nn'})}{E_{nn'} \varepsilon^2} 3f_{nn'}. \quad (6.89)$$

Здесь $E_{nn'}$ — энергия перехода $n \rightarrow n'$ ($n' > n$); $f_{nn'}$ — соответствующая сила осциллятора для поглощения. Квантовомеханическая формула для сечения перехода содержит произведение матричных элементов, один из которых описывает тормозное излучение кванта $h\nu = E_{nn'}$ при рассеянии электрона в поле атома, а другой — поглощение этого кванта атомом. Этот последний матричный элемент и выражается через силу осциллятора. Таким образом, возбуждение атома электронным ударом можно интерпретировать так, будто электрон сначала испускает тормозной квант, а поглощение этого кванта уже приводит к возбуждению.

Если применить формулу (6.89) для описания возбуждения атомов из основного состояния ударами электронов с небольшими надпороговыми энергиями, то оказывается, что формула дает некоторое завышение по сравнению с экспериментальными сечениями. Для водорода она завышает сечение примерно в 3–3,5 раза, для некоторых других атомов (гелия, натрия) завышение меньше. Надо сказать, что в работе [84] переходы связанного электрона в атоме под действием электронных ударов рассматривались на основе классической механики (было учтено орбитальное движение связанного электрона), причем получились результаты, по порядку величины совпадающие с тем, что дают квантовомеханические расчеты ¹⁾.

Оценим с помощью формулы (6.89) вероятности переходов в водородной плазме (это было сделано в работе [79]).

Число актов возбуждения электронным ударом $n \rightarrow n'$ в 1 см^3 за 1 с равно

$$Z_{\text{возб } nn'} = N_n N_e \int_{E_{nn'}}^{\infty} \sigma_{nn'}(\varepsilon) v_e f(\varepsilon) d\varepsilon = \alpha_{nn'} N_n N_e. \quad (6.90)$$

Для константы скорости получается выражение, вполне аналогичное (6.85):

$$\alpha_{nn'} = 4\pi a_0^2 \bar{v}_e \left(\frac{I_H}{kT} \right)^2 \psi_{nn'} 3f_{nn'}, \quad (6.91)$$

$$\psi_{nn'} = \frac{\exp(-x_{nn'})}{x_{nn'}} - E_1(x_{nn'}), \quad x_{nn'} = \frac{E_{nn'}}{kT}.$$

Число обратных процессов дезактивации $n \rightarrow n'$ в 1 см^3 в 1 с $Z_{\text{дез } n'n} = \beta_{n'n} N_{n'} N_e$. По принципу детального равновесия

$$\beta_{n'n} = \alpha_{nn'} \frac{n^2}{n'^2} \exp(x_{nn'}) = 4\pi a_0^2 \bar{v}_e \left(\frac{I_H}{kT} \right)^2 3f_{nn'} \frac{n^2}{n'^2} e^{x_{nn'}} \psi_{nn'}. \quad (6.92)$$

Если подставить в эти формулы силу осциллятора по формуле (5.78), энергию перехода $E_{nn'} = I_H(1/n^2 - 1/n'^2)$, а также значения констант, то получим формулы

$$\alpha_{nn'} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{T}} \frac{1}{n^5 n'^3 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)^4} [\exp(-x_{nn'}) - x_{nn'} E_1(x_{nn'})] \text{ см}^3/\text{с}, \quad (6.91')$$

$$\beta_{n'n} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{T}} \frac{1}{n^3 n'^5 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)^4} [1 - x_{nn'} \exp(x_{nn'}) E_1(x_{nn'})] \text{ см}^3/\text{с}. \quad (6.92')$$

Легко видеть, что вероятности дезактивационных переходов из состояния n' в $n'-1$, $n'-2$ и т.д. убывают скорее, чем последовательность $1, 2^{-4}, 3^{-4}$. Отношение суммарной вероятности переходов на все нижние уровни к вероятности перехода на ближайший заключено между единицей и $1 + 2^{-4} + 3^{-4} + \dots = \pi^4/90 = 1,08$. То же относится и к вероятностям возбуждения $n \rightarrow n+1$, $n \rightarrow n+2, \dots$ Таким образом, при дискретных переходах в атомах под действием электронных ударов наиболее вероятными являются переходы между соседними уровнями, причем «перескоки» через уровни имеют очень малую вероятность.

¹⁾ Столкновения свободных электронов со связанными по классической теории рассматривались также в работе [85].

Рассмотрим переходы между соседними уровнями в области верхних состояний с $n \gg 1$. Если расстояния между уровнями ΔE меньше kT ($\Delta E \approx 2I_H/n^3 = 2E_n/n$, так что это имеет место при условии $E_n < nkT/2$), то выражения в квадратных скобках в формулах (6.91'), (6.92') не сильно отличаются от единицы. В пределе $x_{nn'} \rightarrow 0$ они строго обращаются в единицу.

Отсюда следует, что в этой области состояний вероятности переходов между соседними уровнями как с возбуждением, так и с дезактивацией атома («вверх» и «вниз») весьма близки друг к другу и приближенно равны

$$N_e \alpha_{n,n+1} \approx N_e \beta_{n,n-1} \approx \frac{8}{\sqrt{3}} N_e \bar{v}_e a_0^2 n^4 \frac{I_H}{kT} = \frac{1,25 \cdot 10^{-5} n^4}{\sqrt{T}} N_e \text{ с}^{-1} \quad (6.93)$$

(среднее сечение перехода примерно в $I_H/kT \gg 1$ раз больше площади круговой орбиты, соответствующей n -му уровню, $\pi a_0^2 n^4$).

Сопоставим вероятности возбуждения и ионизации атома при электронных ударах. Если атом находится в основном состоянии и температура не очень велика, так что $I/kT \gg 1$, то ясно, что акты ионизации происходят реже, чем акты возбуждения просто потому, что необходимой для ионизации энергией обладает меньшее число электронов.

Однако даже в тех случаях, когда большинство электронов обладает энергией, достаточной для ионизации, а именно, при столкновениях с атомами, энергия связи в которых $E_n \sim kT$, ионизация происходит реже, чем дискретные переходы, причем вероятность дискретных переходов в соседние состояния относительно тем больше, чем меньше энергия связи (больше n). Это видно из сравнения выражений (6.86) и (6.93). Разумеется, абсолютная величина вероятности ионизации возрастает с ростом n (но медленнее, чем вероятность дискретных переходов).

§ 15. Ионизация и возбуждение ударами тяжелых частиц. Формальное описание этих процессов вполне аналогично рассмотренному в предыдущих параграфах случаю ионизации и возбуждения электронным ударом. Так, уравнение кинетики ионизации невозбужденных атомов имеет вид

$$\frac{dN_e}{dt} = \alpha_a N_a^2 - \beta_a N_+ N_e N_a^{-1},$$

причем по принципу детального равновесия $\beta_a = \alpha_a / K(T)$. Характерное время

$$\tau_a = \frac{(N_e)}{2\alpha_a N_a^2} = \frac{1}{2\beta_a N_a (N_e)}.$$

Константа скорости ионизации α_a выражается такой же формулой, что и α_e . Следует только иметь в виду, что эффективное сечение ионизации $\sigma_a(v')$ зависит от относительной скорости сталкивающихся атомов и в функцию максвелловского распределения по относительным скоростям входит приведенная масса μ , равная в случае одинаковых атомов $\mu = m_a/2$. Если по-прежнему аппроксимировать сечение вблизи порога линейной зависимостью от кинетической энергии относительного движения, $\epsilon' = \mu v'^2/2$, то получим для α_a формулу, аналогичную (6.75). Если же просто вынести за знак интеграла некоторое среднее значение сечения σ_a , то вместо множителя $\frac{I}{kT} + 2$ появится близкая к нему величина $\frac{I}{kT} + 1$. Таким образом,

¹⁾ Коэффициент рекомбинации равен, по определению, $b_a = \beta_a N_a$.

в случае линейной аппроксимации

$$\alpha_a = \sigma_a \bar{v}' \left(\frac{I}{kT} + 2 \right) \exp \left(-\frac{I}{kT} \right), \quad \bar{v}' = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2},$$

причем σ_a соответствует энергии $\varepsilon' \approx I + kT$. Подобным же образом можно описать и кинетику возбуждения.

К сожалению, в отличие от случая электронного удара, сделать какие-либо количественные оценки скоростей процессов весьма трудно. Сравнение констант скоростей ионизации электронами и атомами показывает, что $\alpha_e = \alpha_a = (\bar{v}_e/\bar{v}'_a)(\sigma_e/\sigma_a)$. При сравнимых температурах $\bar{v}_e/\bar{v}' \approx \sqrt{m_a/m_e} \sim 100$. Что касается сечений σ_a , то они на несколько порядков меньше, чем σ_e . Экспериментальных данных о сечениях ионизации или возбуждения атомами с энергиями порядка десятка электронвольт нет; по-видимому, они порядка $10^{-20} - 10^{-22}$ см².

Для того чтобы столкновение было неупругим, необходимо, чтобы удар был достаточно резким, иными словами, скорость сближения частиц должна быть порядка скоростей движения внешних электронов в атоме. В случае электронного удара с энергией порядка потенциала ионизации или энергии возбуждения, т.е. порядка нескольких или десятка эВ, это условие выполняется и неупругое сечение велико. При соударениях тяжелых частиц скорости сравнимы лишь при энергиях примерно в $\sqrt{m_a/m_e} \sim 100$ раз больших указанных величин, т.е. при энергиях порядка кэВ. И действительно, при этом эффективное сечение ионизации или возбуждения сравнимо с аналогичными сечениями для электронного удара. При энергиях же порядка 10 эВ скорость сближения частиц очень мала и удар «адиабатичен». Положение вполне аналогично случаю возбуждения колебаний в молекулах, рассмотренному в § 4. Точно так же, чтобы при столкновении неупругая передача энергии произошла со значительной вероятностью, нужно, чтобы фактор адиабатичности $a\nu/v$ был не слишком велик, порядка единицы. Здесь под ν следует понимать теперь не частоту колебаний молекул, а частоту обращения электрона по своей орбите ($a\nu$ порядка скорости электрона в атоме, так как a порядка размеров атома). Наиболее низкие энергии относительного движения¹⁾ ε' , при которых на опыте еще измерялась ионизация, были порядка 30–40 эВ. Было найдено, что сечение ионизации аргона атомами и ионами аргона, при $\varepsilon' = 35$ эВ, $\sigma_a \sim 3 \cdot 10^{-18}$ см² [51]; сечение ионизации гелия атомами гелия, при $\varepsilon' = 35$ эВ, $\sigma_a \sim 2 \cdot 10^{-19}$ см² [52]; сечение ионизации аргона ионами калия, при $\varepsilon' = 45$ эВ, $\sigma_a \sim 2 \cdot 10^{-19}$ см² 2).

Квантовомеханическим аналогом условия адиабатичности, $a\nu/v \gg 1$, служит условие $a\nu/v \rightarrow ah\nu/hv = a\Delta E/hv \gg 1$, где ΔE — неупругое превращение энергии при столкновении. Происхождение этого условия таково. Вероятность процесса определяется матричным элементом взаимодействия, в который входит произведение волновых функций начального и конечного состояний частиц. Волновые функции поступательного движения описываются плоскими волнами $e^{ipr/\hbar}$ 3); произведение

¹⁾ На опыте обычно пучок быстрых частиц пронизывает газ из «неподвижных» атомов. Порог ионизации по энергии налетающих частиц при этом вдвое выше потенциала ионизации. Это соответствует тому, что приведенная масса вдвое меньше массы атома и при данной относительной скорости $\varepsilon' = \varepsilon/2$; $\varepsilon_{\text{пр}} = 2\varepsilon_{\text{нр}} = 2I$.

²⁾ В работах [54] теоретически вычисляются эффективные сечения неупругих столкновений Ag–Ag и He–He и проводится сопоставление с экспериментальными данными [51, 52]. Данные по сечениям ионизации при соударениях ионов и атомов с энергиями порядка нескольких сотен эВ и выше имеются в обзоре [75].

³⁾ $\hbar = h/2\pi$.

плоских волн начального и конечного состояний дает в подынтегральном выражении матричного элемента осциллирующий множитель $e^{i\Delta\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}$, где $\Delta\mathbf{p}$ — изменение импульса налетающей частицы при столкновении. Интеграл имеет заметную величину, если этот множитель не осциллирует в области, где велика энергия взаимодействия, т.е. на расстоянии $\mathbf{r}$ порядка атомных размеров a . Таким образом, условие большой вероятности процесса состоит в том, чтобы $\Delta p \cdot a/\hbar \lesssim 1$. Изменение импульса Δp порядка $\Delta E/v$, где ΔE — изменение кинетической энергии частиц, т.е. неупругая передача энергии. Отсюда и получается условие значительной вероятности $a\Delta E/\hbar v \lesssim 1$; условие малой вероятности — $a\Delta E/\hbar v \gg 1$.

Из этого условия, в частности, следует, что должны быть велики сечения процессов, в которых неупругое превращение энергии ΔE очень мало (так называемый случай резонанса). И действительно, велики сечения ионизации атомов возбужденными атомами или молекулами, когда на отрыв электрона затрачивается не кинетическая энергия поступательного движения, а энергия внутренних степеней свободы. Так, сечение процессов типа



где энергия возбуждения E^* частицы B близка к потенциалу ионизации частицы A , по порядку величины близки к газокинетическим. Поэтому процесс ионизации тяжелыми частицами, особенно молекулами, скорее всего двух- или многоступенчатый: сначала происходит возбуждение одной из частиц, а затем ионизация ударом возбужденной частицы (так называемая ионизация ударом второго рода) или, наоборот, отрыв электрона от возбужденной частицы. Некоторые данные об этих процессах можно найти в книгах [45, 46].

Вопрос об оценке скоростей процессов ионизации и возбуждения тяжелыми частицами может возникнуть только при рассмотрении самой ранней стадии ионизации «мгновенно» нагретого газа, пока концентрация электронов очень мала, меньше 10^{-4} – 10^{-5} , т.е. пока не образуется электронная лавина.

Чтобы оценить нижний предел времени, необходимого для образования «затраченных» электронов и возникновения электронной лавины, рассмотрим следующий воображаемый процесс. Пусть газ «мгновенно» нагревается до высокой температуры T и освобождающиеся электроны мгновенно приобретают ту же температуру T , что и атомы. В начале процесса, пока ионизация значительно меньше равновесной, рекомбинацией можно пренебречь. Сначала $dN_e/dt = \alpha_a N_a^2$ и $N_e = \alpha_a N_a^2 t$. Число электронов растет линейно со временем до тех пор, пока скорость ионизации электронным ударом не сравняется со скоростью ионизации ударами атомов и не возникнет лавина. Этот момент t_1 определяется из условия $\alpha_e N_a N_e = \alpha_a N_a^2$. Подставляя сюда $N_e = \alpha_a N_a^2 t_1$ и замечая, что по формуле (6.74) $\alpha_e N_a = \tau_e$, получим $t_1 = \tau_e$. Иными словами, минимальное необходимое время t_1 равно характерному времени развития лавины.

Реальное время «индукции» для развития лавины может быть значительно большим. Оно определяется не условием возникновения достаточного количества свободных электронов, а условием нагревания электронного газа до температуры, достаточно высокой, чтобы производить заметную ионизацию. Это время лимитируется замедленностью обмена энергией между атомами (ионами) и электронами, которые много энергии теряют на неупругие столкновения: ионизацию и возбуждение. Об обмене энергией между ионами и электронами см. § 20.

Условия, при которых атомы «мгновенно» нагреваются до высокой температуры, после чего начинается ионизация, осуществляются в ударной волне. Кинетике ионизации во фронте ударной волны и установлению ионизационного равновесия за фронтом будут посвящены § 10, 11 гл. VII.

§ 16. Фотоионизация и фоторекомбинация. Процессы фотоионизации и фоторекомбинации уже рассматривались в гл. V при вычислении коэффициентов поглощения и излучения света, поэтому нам неизбежно придется повторять здесь некоторые рассуждения и выводы этой главы.

Предположим для простоты, что все атомы пребывают в основном состоянии и при рекомбинации электроны захватываются на основной уровень. Если N_a — число атомов в 1 см^3 , $U_\nu d\nu$ — количество энергии излучения в спектральном интервале от ν до $\nu + d\nu$ в 1 см^3 , а $\sigma_{\nu 1}(\nu)$ — эффективное сечение фотоионизации с основного уровня атомов, то число актов фотоионизации в 1 см^3 в 1 с равно

$$Z_{\text{ион}}^\nu = N_a \int_{\nu_1}^{\infty} \frac{U_\nu}{h\nu} d\nu \cdot c \cdot \sigma_{\nu 1}(\nu) = \alpha_\nu N_a, \quad (6.94)$$

причем в поглощении участвуют только кванты $h\nu > h\nu_1 = I$; α_ν — константа скорости фотоионизации.

Обозначим через $\sigma_{\nu 1}(\nu)$ — эффективное сечение фотозахвата электронов, обладающих скоростью v , на основной уровень атома. Тогда число актов фоторекомбинации в 1 см^3 в 1 с есть

$$Z_{\text{рек}}^\nu = b_\nu N_+ N_e = N_+ N_e \int_0^{\infty} f_e(v) dv \cdot v \cdot \sigma_{\nu 1}(v) \cdot \left[1 + \frac{c^3 U_\nu}{8\pi h\nu^3} \right]. \quad (6.95)$$

Слагаемое $c^3 U_\nu / 8\pi h\nu^3$ в множителе под знаком интеграла учитывает процессы вынужденной рекомбинации, соответствующие вынужденному испусканию квантов. Энергия испускаемого кванта связана со скоростью электрона уравнением фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + I.$$

Интеграл в (6.95) представляет собою коэффициент фоторекомбинации b_ν .

По принципу детального равновесия в условиях полного термодинамического равновесия дифференциалы в интегральных выражениях для $Z_{\text{рек}}^\nu$ и $Z_{\text{ион}}^\nu$ равны друг другу.

Подставляя в качестве $f_e(v)$ функцию максвелловского распределения электронов, а в качестве U_ν — функцию Планка, воспользовавшись уравнением Саха (6.73') и уравнением фотоэффекта, получим связь эффективных сечений фотоионизации и фоторекомбинации:

$$\sigma_{c1}(v) = \frac{g_1}{g_+} \frac{h^2 \nu^2}{m_e^2 v^2 c^2} \sigma_{\nu 1}(\nu).$$

Аналогичным образом связаны между собою и сечения фотоионизации с n -го возбужденного уровня атома и фотозахвата на n -й уровень:

$$\sigma_{cn}(v) = \frac{g_n}{g_+} \frac{h^2 \nu^2}{m_e^2 v^2 c^2} \sigma_{\nu n}(\nu). \quad (6.95')$$

Здесь g_n — статистический вес n -го состояния атома. Частота ν и скорость электрона v также связаны между собою уравнением фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + \varepsilon_n = \frac{m_e v^2}{2} + I - w_n, \quad (6.95'')$$

где ε_n — энергия связи электрона в n -м состоянии, а w_n — энергия возбуждения n -го уровня атома.

Уравнение кинетики для фотопроцессов имеет вид

$$\frac{dN_e}{dt} = Z_{\text{ион}}^\nu - Z_{\text{рек}}^\nu = \alpha_\nu N_a - b_\nu N_+ N_e.$$

Время релаксации для фотопроцессов

$$\tau_\nu = \frac{1}{b_\nu(N_+)} = \frac{(N_e)}{\alpha_\nu N_a}.$$

Оценим константу скорости фотоионизации, предполагая, что плотность излучения близка к равновесной. В отличие от сечений ударной ионизации, которые равны нулю у порога ионизации, сечение фотоионизации отлично от нуля у порога и во многих случаях, наоборот, максимально при $h\nu = I = h\nu_1$. Так, у водородоподобных атомов $\sigma_{\nu 1} = \sigma_{\nu 1}^0 (\nu_1/\nu)^3$, где $\sigma_{\nu 1}^0 = 7,9 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, если заряд «ядра» равен единице (см. формулу (5.34)). Если, как это обычно бывает, $I/kT \gg 1$, то ионизирующие кванты находятся в виновской части спектра, где $U_\nu \sim \exp(-h\nu/kT)$. Вынося из-под знака интеграла (6.94) среднее значение сечения, которое с большой точностью можно положить равным сечению у порога ионизации, получим после интегрирования

$$\alpha_\nu = \frac{8\pi}{c^2} \frac{I^2}{h^2} \frac{kT}{h} \sigma_{\nu 1}^0 e^{-I/kT} = 3,95 \cdot 10^{23} T_{\text{эВ}} I_{\text{эВ}}^2 \sigma_{\nu 1}^0 e^{-I/kT} \text{ с}^{-1}. \quad (6.96)$$

Коэффициент рекомбинации b_ν можно найти либо по принципу детального равновесия: $b_\nu = \alpha_\nu(N_a)/(N_+)(N_e)$, либо непосредственно, вычисляя интеграл (6.95). Следует отметить, что при $I \gg kT$ роль вынужденных рекомбинаций очень мала: множитель в скобках в интеграле (6.95) приближенно равен $1 + e^{-h\nu/kT} \approx 1$, так как $h\nu > I \gg kT$. Для коэффициента рекомбинации получим (при $I/kT \gg 1$):

$$b_\nu = \overline{v_e \sigma_{c1}(v)} = \overline{v_e} \sigma_{c1}, \quad \sigma_{c1} = \frac{g_1}{2g_+} \frac{I^2}{m_e c^2 kT} \sigma_{\nu 1}^0 = \frac{g_1}{g_+} \frac{I_{\text{эВ}}^2}{T_{\text{эВ}}} \sigma_{\nu 1}^0 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2, \quad (6.97)$$

где σ_{c1} — среднее сечение фотозахвата на основной уровень ($\overline{v_e}$ — средняя тепловая скорость электронов).

Среднее сечение фотозахвата обратно пропорционально электронной температуре. Эффективные сечения фотоионизации и фотозахвата при температуре, соответствующей 1 эВ ($\sigma_{\nu 1}^0$; $\sigma_{c1} = \sigma_{c1}^0/T_{\text{эВ}}$), для некоторых атомов представлены в табл. 6.6. Что касается сечений ионов, если рассматривать их как водородоподобные системы, то $\sigma_{\nu 1}^0 \sim Z^{-2}$, а $\sigma_{c1}^0 \sim I_z^2 Z^{-2}$. Обычно потенциалы ионизации ионов растут с зарядом, как $I_z \sim Z - Z^2$, откуда $\sigma_{c1}^0 \sim Z^0 - Z^2$.

Выясним роль рекомбинаций с захватом электрона на возбужденные уровни. Коэффициент рекомбинации в общем случае равен (ср. с формулой (6.97))

$$b_\nu = \sum_n \overline{v \sigma_{cn}(v)}, \quad (6.98)$$

где суммирование производится по всем уровням n , а усреднение — по максвелловскому распределению электронов. $\sigma_{cn}(v)$ выражается формулой (6.95'). Для водородоподобных атомов $\sigma_{\nu n} \sim 1/n^2$, $g_n = 2n^2$, так что $\sigma_{cn} \sim 1/n^3$, причем ν и v связаны формулой (6.95''), в которой $\varepsilon_n = I/n^2$. Вообще говоря, при суммировании по n возникает вопрос о числе фактических уровней в атоме, которое следует учитывать (см. § 6 гл. III), однако в данном случае сумма по n быстро сходится и суммирование можно приближенно распространить до $n = \infty$.

Таблица 6.6. Эффективные сечения фотоионизации с основных уровней атомов и фотозахвата электронов на основной уровень

Атом	I , эВ	g_1	g_+	$\sigma_{\nu 1}^0 \cdot 10^{18}$, см ²	Ход сечения $\sigma_{\nu 1}$ за порогом	$\sigma_{c1}^0 \cdot 10^{21}$, см ² · эВ
H	13,54	2	1	7,9	Уменьшается $\sim \nu^{-3}$	2,9
Li	5,37	2	1	3,7		0,21
C	11,24	9	6	10	Уменьшается вдвое при $h\nu = I + 10$ эВ	1,9
N	14,6	4	9	7,5	Медленно уменьшается	0,7
O	13,57	9	4	3	Почти постоянно до $h\nu \sim I + 15$ эВ	1,24
F	17,46	6	9	2	Почти постоянно до $h\nu \sim I + 15$ эВ	0,41
Na	5,09	2	1	0,31	Уменьшается быстрее, чем ν^{-3}	0,016
Ca	6,25	1	2	25	Уменьшается $\sim \nu^{-3}$	0,51

¹⁾Эффективные сечения $\sigma_{\nu 1}^0$ и данные о ходе сечения за порогом взяты из книги [55].
 Величины σ_{c1}^0 вычислены по формуле (6.97).

Вычисление коэффициента рекомбинации по формуле (6.98) показывает, что для водородоподобного атома его можно представить в виде

$$b_\nu = b_{\nu 1} \varphi \left(\frac{I}{kT} \right), \quad (6.99)$$

$$b_{\nu 1} = 2,07 \cdot 10^{-11} Z^2 T^{-1/2} = 2 \cdot 10^{-13} Z^2 T_{\text{эВ}}^{-1/2} \text{ см}^3/\text{с},$$

где $b_{\nu 1}$ — коэффициент, соответствующий захвату на основной уровень при $I/kT \gg 1$ (он определяется формулой (6.97)); $\varphi(I/kT)$ — очень медленно меняющаяся функция, которая получается в результате суммирования по n . Эта функция табулирована в книге Спитцера [56]. Например, при $I/kT = 5$, $\varphi = 1,69$; при $I/kT = 10$, $\varphi = 2,02$; при $I/kT = 100$, $\varphi = 3,2$. Приблизленно [86]

$$b_\nu \approx 2,7 \cdot 10^{-13} Z^2 T_{\text{эВ}}^{-3/4} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (6.100)$$

Таким образом, при обычных условиях, встречающихся в области первой ионизации, когда $I/kT \sim 10$, захват на все возбужденные уровни дает примерно такой же вклад в рекомбинацию, как и захват на основной уровень.

В силу принципа детального равновесия, при условии, что распределение атомов по возбужденным состояниям — бальмановское и излучение равновесно, то же относится и к фотоионизации. Таким образом, при фотоионизации роль ионизации возбужденных атомов сравнима с ролью ионизации невозбужденных, так что наши оценки скоростей фотоионизации и фоторекомбинации занижены примерно раза в два.

Сравним скорость ионизации невозбужденных атомов электронным ударом и квантами (в предположении, что плотность излучения равновесна). По формулам (6.94), (6.96), (6.71), (6.76) найдем

$$\frac{Z_{\text{ион}}^e}{Z_{\text{ион}}^\nu} = \frac{\alpha_e N_e}{\alpha_\nu} = \frac{1,7 \cdot 10^{-16} N_e C \text{ см}^2 \cdot \text{эВ}^{-1}}{I_{\text{эВ}} \sqrt{T_{\text{эВ}}} \sigma_{\nu 1}^0 \text{ см}^2}.$$

Очевидно, в таком же отношении находятся и скорости обратных процессов. Численные значения C и $\sigma_{\nu 1}^0$ одного порядка ($\sim 5 \cdot 10^{-18}$, см. табл. 6.4, 6.6), потенциалы

ионизации $I \approx 10$ эВ, типичная для первой ионизации температура $T \approx 1$ эВ = 11 600 К. Это дает

$$\frac{Z_{\text{ион}}^e}{Z_{\text{ион}}^\nu} = \frac{Z_{\text{рек}}^e}{Z_{\text{рек}}^\nu} \sim 10^{-17} N_e,$$

т. е. при $N_e > 10^{17} \text{ см}^{-3}$ преобладают электронные процессы, а при $N_e < 10^{17} \text{ см}^{-3}$ — фотопроцессы (подчеркнем, что это относится только к ионизации атомов из основного состояния и захвату электрона на основной уровень атома).

Несколько слов по поводу возбуждения и дезактивации первых возбужденных состояний излучением. Времена жизни атомов, пребывающих в первых возбужденных состояниях, по отношению к спонтанному высвечиванию имеют порядок $\tau_\nu^* \sim 10^{-8}$ с. Время жизни атома на этих уровнях по отношению к дезактивации электронными ударами, согласно сказанному в § 12, при электронной температуре $T_e \sim 1$ эВ порядка $\tau_e^* \sim 10^9/N_e$ с, т. е. «тушение» излучения электронными ударами происходит при электронных плотностях $N_e > 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и, наоборот, при $N_e < 10^{17} \text{ см}^{-3}$ преобладают фотопроцессы (так же, как и для ионизации атомов с основного уровня и захвата электрона на основной уровень).

В условиях, близких к термодинамическому равновесию, таково же соотношение скоростей возбуждения ближайших к основному уровню атомов электронами и квантами. Заметим, что сечения поглощения резонансного излучения, способного возбуждать атомы, очень велики и резонансное излучение чаще всего равновесно (среда непрозрачна для резонансного излучения). Поэтому время $\tau_\nu^* \sim 10^{-8}$ с характеризует время релаксации для установления больцмановской заселенности первых возбужденных уровней атомов за счет фотопроцессов. О вероятности спонтанных радиационных переходов с верхних возбужденных состояний см. § 13 гл. V.

§ 17. Электрон-ионная рекомбинация при тройных столкновениях (элементарная теория). В сильно разреженной плазме рекомбинация электронов и ионов происходит главным образом при парных столкновениях с излучением светового кванта. В плотной плазме преобладает рекомбинация при тройных столкновениях с участием электрона в качестве третьей частицы (третьей частицей может служить и нейтральный атом, но этот процесс играет роль только при чрезвычайно малых степенях ионизации, меньше 10^{-7} – 10^{-10}). Простейшую оценку скорости рекомбинации с участием электрона в качестве третьей частицы можно сделать, если обобщить на этот случай старую теорию Томсона [45], которая относится к рекомбинации с участием нейтрального атома. Рассуждения здесь вполне аналогичны тем, с помощью которых в § 6 этой главы была оценена скорость рекомбинации атомов в молекулу при тройных столкновениях.

Предположим, что электрон может захватиться ионом (с зарядом Z) на замкнутую орбиту и рекомбинировать, если он пролетает мимо иона на таком прицельном расстоянии r , что потенциальная энергия кулоновского притяжения к иону Ze^2/r больше средней кинетической энергии электрона $(3/2)kT$. Прицельное расстояние, следовательно, не должно превышать Zr_0 , где $r_0 = \frac{e^2}{(3/2)kT}$ — эффективный радиус кулоновского взаимодействия частиц с зарядами $Z = 1$.

Число таких столкновений в 1 см^3 в 1 с равно $N_e \bar{v}_e \pi r_0^2 Z^2 N_+$. Но для того чтобы произошел захват, необходимо, чтобы, пролетая мимо иона, т. е. на пути порядка Zr_0 , электрон провзаимодействовал с другим электроном, которому могла бы быть передана выделяющаяся при захвате потенциальная энергия. Вероятность такого события равна примерно $Zr_0 \pi r_0^2 N_e$. Таким образом, число актов рекомбинации

в 1 см³ в 1 с есть

$$Z_{\text{рек}} = N_e \bar{v}_e \pi r_0^2 Z^2 N_+ Z r_0 \pi r_0^2 N_e = \beta N_e^2 N_+ = b N_e N_+. \quad (6.101)$$

Отсюда для коэффициента рекомбинации получаем

$$b = \bar{v}_e \pi^2 r_0^5 Z^3 N_e = \frac{2^6 \pi \sqrt{2\pi}}{3^5} \frac{e^{10} Z^3}{m^{1/2} (kT)^{9/2}} N_e. \quad (6.102)$$

Радиус кулоновского взаимодействия электрона и протона $r_0 = \frac{e^2}{(3/2)kT}$ (будем рассматривать водород) весьма близок к радиусу круговой орбиты электрона с энергией связи $E^* \approx kT$: $r_{n^*} = a_0 n^{*2} = a_0 I_H / kT = e^2 / 2kT$. Поэтому ясно, что тот же коэффициент рекомбинации должен получиться, если просуммировать коэффициенты захвата электрона $\beta_n N_e$, выведенные в § 14, по всем n от 1 и до $n^* = \sqrt{I_H / E_n^*} = \sqrt{I_H / kT}$ (при $I_H / kT \gg 1$, $n^* \gg 1$ суммирование можно заменить интегрированием). И действительно, при этом получается формула, которая практически точно совпадает с выражением (6.102). Такое вычисление коэффициента рекомбинации через вероятности захвата на дискретные уровни было проделано в работе Хиннова и Хиршберга [80]. Оно также обладает большой наглядностью, хотя и не отличается строгостью.

Замечательно, что строгая в рамках известных предположений теория, развитая в работах Л. П. Питаевского [88] и А. В. Гуревича и Л. П. Питаевского [89] (о ней речь пойдет в следующем параграфе), приводит к формуле

$$b = \frac{4\pi\sqrt{2\pi}}{9} \frac{e^{10} Z^3}{m^{1/2} (kT)^{9/2}} N_e \ln \Lambda_1, \quad (6.103)$$

которая отличается от элементарной (6.102) только численным коэффициентом $\frac{27}{16} \ln \Lambda_1$ порядка единицы. Здесь $\ln \Lambda_1$ — некий особого вида кулоновский логарифм, который приближенно можно положить равным единице. Численно по формуле (6.103) с $\ln \Lambda_1 = 1$ коэффициент рекомбинации равен

$$b = \frac{8,75 \cdot 10^{-27} Z^3}{T_{\text{эВ}}^{9/2}} N_e = \frac{5,2 \cdot 10^{-23} Z^3}{T_{\text{тыс. К}}^{9/2}} N_e \text{ см}^3/\text{с}. \quad (6.104)$$

Область применимости этой формулы (для водорода, $Z = 1$) ограничивается довольно низкими температурами $kT \ll I_H$, при которых захват происходит на очень высокие уровни $n^* = \sqrt{I_H / kT} \gg 1$. По-видимому, это температуры ниже 3000 К ($n^* \geq 7$).

Сопоставим коэффициенты рекомбинации в тройных столкновениях $b_{\text{по}}$ формуле (6.104) и фоторекомбинации с захватом на все уровни b_{ν} по формуле (6.100). Последняя преобладает при условии

$$N_e < \frac{3,1 \cdot 10^{13} T_{\text{эВ}}^{3,75}}{Z} = \frac{3,2 \cdot 10^9 T_{\text{тыс. К}}^{3,75}}{Z} \text{ см}^{-3}. \quad (6.105)$$

Как видим, при низких температурах и не чрезмерно малых плотностях всегда главную роль играет рекомбинация в тройных столкновениях.

В работе [80] построены приближенные формулы для оценки коэффициентов рекомбинации в тройных столкновениях при более высоких температурах (от 3000 до 10 000 К), когда захват происходит на низкие уровни. (Надо сказать, что формула (6.104) в этой области дает завышенные значения коэффициента рекомбинации, но это завышение не превышает 5–10 раз даже при $T = 10\,000$ К.)

Приводится также удобный для пользования график суммарного коэффициента рекомбинации $b + b_\nu$ в зависимости от N_e и T . Там же описаны результаты экспериментального изучения рекомбинации в гелии, причем получается удовлетворительное согласие теории и эксперимента.

§ 18. Более строгая теория рекомбинации при тройных столкновениях.

Рассмотрим подробнее, как протекает процесс рекомбинации при тройных столкновениях в низкотемпературной водородной плазме. Предположим, что условия в газе существенно неравновесны: степень ионизации выше равновесной или, что то же самое, температура ниже той, которая соответствует данной степени ионизации, так что в плазме протекает преимущественная рекомбинация. Выше отмечалось, что вероятность захвата электрона при тройном столкновении быстро возрастает при увеличении радиуса орбиты и уменьшении энергии связи уровня, так что электроны захватываются в основном на верхние уровни. Как было показано в § 13 гл. V, вероятности спонтанных радиационных переходов с верхних уровней резко уменьшаются при увеличении квантового числа n и уменьшении энергии связи E_n (как $1/n^5 \sim E_n^{5/2}$).

Предположим, что плотность электронов достаточно велика для того, чтобы вероятности радиационных переходов с верхних уровней были гораздо меньше вероятностей ударных переходов. Обратное положение при низких температурах практически не реализуется: если плотности столь малы, что радиационные переходы с верхних уровней происходят быстрее, чем ударные, то вообще преобладает фоторекомбинация и электроны преимущественно захватываются не на верхние, а на нижние уровни.

Итак, состояние образовавшегося в результате захвата высоковозбужденного атома изменяется под действием электронных ударов. При этом наиболее вероятны переходы в ближайшие соседние состояния, причем в области, где расстояния между уровнями ΔE_n меньше kT , переходы с возбуждением и дезактивацией («вверх» и «вниз») по принципу детального равновесия почти равновероятны ($\Delta E_n < kT$ в области энергий связи $E_n < nkT/2$ или $E_n < I_H(kT/2I_H)^{2/3}$, это следует из соотношений $\Delta E_n \approx |dE_n/dn| = 2I_H/n^3 = 2E_n/n = 2I_H(E_n/I_H)^{3/2}$). Таким образом, в этой области уровень энергии атома при каждом ударе меняется малыми порциями, причем «шаги» в ту и другую сторону примерно равновероятны. Это — типичная картина «диффузии». Можно сказать, что происходит «диффузия связанного электрона в атоме вдоль энергетической оси».

Соотношение вероятностей переходов «вверх» и «вниз» изменяется в области низких уровней $E_n \gg kT$, $\Delta E > kT$, где вероятность дезактивации больше, чем вероятность возбуждения. Кроме того, в области низких уровней весьма вероятны и радиационные переходы, которые также способствуют дезактивации. В рамках «диффузионной» модели это означает, что в области низких уровней имеется «сток» и, следовательно, «диффузионный» поток направлен «вниз» — образовавшийся высоковозбужденный атом стремится прийти к основному состоянию, в чем, собственно, и заключается рекомбинация. Подчеркнем, что направление диффузионного потока определяется состоянием газа. Если бы условия были таковы, что ионизация была бы ниже равновесной, то преобладали бы акты возбуждения и поток был бы направлен «вверх». Существенно, что вероятность ионизации атома при ударе на не слишком высоких уровнях невелика и меньше вероятности дискретных переходов, так что ионизацией в этой области можно пренебречь.

Вероятность ионизации, возрастающая с номером уровня n , велика в области очень больших n , где одновременно велика и вероятность захватов. Это приводит к тому, что в области очень малых энергий связи (порядка и меньше kT) устанавливается равновесие Саха–Больцмана (6.87) между заселенностью уровней и

плотностью свободных электронов. В рамках «диффузионной» модели это означает, что «источник» частиц, в области малых энергий связи таков, что в этой области «автоматически» поддерживается данная плотность частиц. Поток вдоль энергетической оси, который при этом возникает из-за наличия «стока» в области больших энергий, очевидно, и определяет скорость отвода возбужденных атомов «вниз» и скорость образования атомов в основном состоянии, т.е., по существу, скорость рекомбинации.

Описанная картина процесса рекомбинации была облечена в математическую форму в работе Л.П. Питаевского [88], где диффузия вдоль энергетической оси рассматривалась на основе чисто классического уравнения Фоккера–Планка в предположении, что основную роль играют верхние состояния, где дискретность энергетических уровней проявляется слабо.

Для большей наглядности и для того, чтобы яснее продемонстрировать физический смысл совершаемых приближений и «коэффициента диффузии», мы здесь перейдем к классике, исходя из системы квантовых кинетических уравнений. Пусть N_n — числа атомов в 1 см^3 , находящихся на n -х уровнях (числа заполнения или заселенности уровней). Составим для них кинетические уравнения с учетом только дискретных переходов между ближайшими соседними уровнями, причем для удобства сгруппируем попарно прямые и обратные процессы:

$$\frac{dN_n}{dt} = N_e \{ [\beta_{n+1,n} N_{n+1} - \alpha_{n,n+1} N_n] - [\beta_{n,n-1} N_n - \alpha_{n-1,n} N_{n-1}] \}. \quad (6.106)$$

Рассмотрим область больших квантовых чисел $n \gg 1$ (предполагается, что $I_H/kT \gg 1$). В этой области с дискретными числами n и N_n можно обращаться как с непрерывными и дифференцировать функции номера n (имея в виду, что «дифференциал» $dn = 1$). Производя в (6.106) разложение с учетом членов второго порядка малости, получим

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} = -\frac{\partial j_n}{\partial n}; \quad j_n = -\alpha_{n-1,n} N_e \left[\frac{\partial N_n}{\partial n} + \left(\frac{\beta_{n,n-1}}{\alpha_{n-1,n}} - 1 \right) N_n \right]. \quad (6.107)$$

Преобразуем отношение вероятностей с помощью принципа детального равновесия и ограничимся рассмотрением области уровней, где расстояние между уровнями меньше kT :

$$\frac{\beta_{n,n-1}}{\alpha_{n-1,n}} = \frac{(N_n - 1)}{(N_n)} = \frac{(n - 1)^2}{n^2} \exp \left(\frac{\Delta E}{kT} \right) \approx 1 - \frac{2}{n} + \frac{\Delta E}{kT}.$$

Теперь

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} = -\frac{\partial j_n}{\partial n}; \quad j_n = -(\alpha_{n-1,n} N_e) \left[\frac{\partial N_n}{\partial n} + \left(\frac{\Delta E}{kT} - \frac{2}{n} \right) N_n \right]. \quad (6.108)$$

Это уравнение имеет типичную форму уравнения диффузии при наличии объемной силы. Величина $D_n = (\alpha_{n-1,n} N_e)$ играет роль коэффициента диффузии, ее размерность с^{-1} (поскольку «координата» n безразмерна). От функции распределения возбужденных атомов по n , N_n , легко перейти к функции распределения по энергии связи $\varphi(E)$. Очевидно, $N_n = \varphi(E) \left| \frac{dE}{dn} \right| = \varphi(E) \Delta E$ и $\frac{\partial}{\partial n} = - \left| \frac{dE}{dn} \right| \frac{\partial}{\partial E} = -\Delta E \frac{\partial}{\partial E}$.

Преобразуя уравнение (6.108) и опуская члены высших порядков, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial E}, \quad j = -D \frac{\partial \varphi}{\partial E} + D \left(\frac{1}{kT} - \frac{5}{2E} \right) \varphi, \quad (6.109)$$

$$D = \alpha N_e (\Delta E)^2, \quad \alpha \equiv \alpha_{n-1,n}.$$

Коэффициент диффузии по энергетической оси D имеет размерность эрг²/с (ΔE соответствует «длине пробега», $1/2\alpha N_e$ — среднее время между столкновениями, которые сопровождаются переходами «вверх» и «вниз»). Если сделать еще один шаг и перейти в уравнении (6.109) от функции распределения атомов по энергиям связи $\varphi(E)$ к функции распределения связанных электронов в фазовом пространстве координат и импульсов, получим уравнение Фоккера–Планка в той форме, которая послужила отправным пунктом в работах [88, 89].

Коэффициент диффузии D в работе [89] вычислен на основе чисто классической теории как средний квадрат изменения энергии связанного электрона в единицу времени при столкновениях со свободными электронами:

$$D_{\text{класс}} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial(\delta E)^2}{\partial t} \right\rangle = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e^4 E N_e \ln \Lambda_1}{(mkT)^{1/2}}. \quad (6.110)$$

Примечательно, что коэффициент диффузии, выраженный через квантово-механическую вероятность перехода $\alpha_{n-1,n} N_e$, $D = \alpha N_e (\Delta E)^2$, где $\alpha_{n-1,n}$ дается формулами § 14, при условии $\Delta E \ll kT$ приводит к точно такому же буквенному выражению, что и классическая теория, и превышает $D_{\text{класс}}$ в $8\sqrt{3\pi} \ln \Lambda_1 \approx 4,4$ раза (при $\ln \Lambda_1 = 1$). Надо полагать, что классическое значение в области тесно расположенных уровней более правильно, чем приближенное квантовомеханическое¹⁾.

Допустим, что высоковозбужденный атом, образующийся в результате захвата электрона ионом, дезактивируется и приходит к основному состоянию быстрее по сравнению со скоростью изменения плотности электронов и температуры, т.е. по существу, по сравнению со скоростью рекомбинации. Тогда среди возбужденных атомов устанавливается квазистационарное распределение по энергиям, которое «следит» за медленным изменением плотности электронов и температуры. Иначе говоря, рассматривая рекомбинацию при данных N_e и T , мы можем искать стационарное решение уравнений (6.108) или (6.109), когда поток постоянен. В этом случае даже нет необходимости в отыскании явного вида функции распределения. Достаточно определить поток, ибо величина $j_n \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ представляет собою скорость образования атомов в основном состоянии, т.е. число актов рекомбинации в 1 см^3 в 1 с $Z_{\text{рек}} = b N_e N_+$.

Полагая в (6.108) $j_n = \text{const}$ и интегрируя получающееся линейное уравнение для функции $N(n) \equiv N_n$ с учетом того, что $\Delta E = 2I_H/n^3$ и $E_n = I_H/n^2$, получим

$$N_n = -\frac{j_n}{N_e} n^2 e^{E_n/kT} \int_{n_0}^n \frac{e^{-E_n/kT} dn}{n^2 \alpha_{n-1,n}};$$

здесь n_0 — постоянная интегрирования. Как отмечалось выше, в области низких уровней имеется «сток», так что заселенности уровней там малы и $N_n \approx 0$. Следовательно, в качестве n_0 можно выбрать небольшое число — порядка единицы.

¹⁾ Здесь уместно напомнить, что квантовомеханические вероятности переходов для нижних уровней давали завышение по сравнению с опытом.

Как показывают расчеты, интеграл в области небольших n быстро сходится и практически не зависит от конкретного выбора n_0 .

Теперь воспользуемся вторым граничным условием в области больших n , которое заключается в том, что в этой области устанавливается равновесие Саха–Больцмана (6.87). Следовательно,

$$\text{при } n \rightarrow \infty, \quad N_n \rightarrow n^2 \exp\left(\frac{E_n}{kT}\right) \left(\frac{h^2}{2\pi m kT}\right)^{3/2} N_e N_+. \quad (6.111)$$

Отсюда получаем выражение для потока,

$$-j_n = \left(\frac{h^2}{2\pi m kT}\right)^{3/2} \left[\int_{n_0 \sim 1}^{\infty} \frac{e^{-E_n/kT} dn}{n^2 \alpha_{n-1,n}} \right]^{-1} N_e^2 N_+ = b N_e N_+, \quad (6.112)$$

и коэффициента рекомбинации b .

Если перейти от $\alpha_{n-1,n}$ к коэффициенту диффузии D по формуле $\alpha_{n-1,n} = D/(\Delta E)^2$, подставить $\Delta E = 2I_H/n^3$ и вычислить интеграл (6.112) с классическим значением D (6.110), то получим для коэффициента рекомбинации формулу (6.103)¹⁾.

В работе Бейтса, Кингстона и Мак-Уиртера [90], опубликованной почти одновременно с первой статьей Л. П. Питаевского [88], рекомбинация рассматривалась в весьма общих предположениях. В работе [90] заложены фактически те же идеи о ходе процесса рекомбинации, что и в работе [88], но авторы исходили из системы кинетических уравнений для чисел заполнения дискретных состояний (типа (6.106)) с учетом всех процессов: захвата электронов и ионизации электронным ударом, дискретных переходов на удаленные уровни, а также фотозахвата и спонтанных радиационных переходов. Для ограничения числа уравнений использовалось условие равновесности заселенности верхних состояний. Система уравнений, также для стационарного случая ($dN_n/dt = 0$ при $n \neq 1$), решалась численно, в широком диапазоне плотностей и температур, в том числе и при высоких температурах, когда захват происходит на низкие уровни. Скорость рекомбинации определялась как $-dN_+/dt = dN_1/dt$. Результаты расчетов коэффициентов рекомбинации представлены в таблицах²⁾.

Авторы предлагают называть общий сложный процесс «ударно-радиационной рекомбинацией». В пределе малых плотностей он превращается в фоторекомбинацию, при больших плотностях — в то, что мы называли выше рекомбинацией при тройных столкновениях. Результаты численных расчетов для этого предельного случая неплохо согласуются с тем, что дает формула (6.104).

В работе [90] и книге [83] выясняются условия, при которых допустимо использование приближения квазистационарности распределения возбужденных атомов по энергии. Фактически для этого нужно, чтобы числа возбужденных атомов были гораздо меньше чисел невозбужденных атомов и свободных электронов. О коэффициенте рекомбинации см. также работу [94].

¹⁾ Именно это и было сделано в работах [88, 89], но только там с самого начала авторы оперировали энергией атома $E = -E_n$, а не квантовыми числами n . Отметим, что в работе [88] описанным способом был вычислен коэффициент рекомбинации с участием нейтрального атома в качестве третьей частицы. При этом получилась величина, примерно в 6 раз превышающая результат теории Томсона [45].

²⁾ Они приведены также в книге [83].

В некоторых случаях необходимо знание не только скорости рекомбинации, но и дальнейшей судьбы выделяющейся при рекомбинации потенциальной энергии. Как следует из сказанного выше, часть этой энергии передается электронному газу при ударной дезактивации возбужденных атомов, образующихся при рекомбинации, и, следовательно, превращается в тепло. Другая часть высвечивается в результате спонтанных радиационных переходов и в случае, если газ прозрачен для излучения, по существу, теряется газом. Если же газ не вполне прозрачен, эта часть энергии участвует в дальнейших, весьма сложных превращениях, связанных с поглощением и излучением света (в частности, с диффузией резонансного излучения), и, в конечном счете, вследствие ударной дезактивации атомов частично также переходит в тепло, а частично уходит за пределы газового объема в виде излучения. Вопрос о скорости дезактивации высоковозбужденных атомов, образующихся при рекомбинации, и о превращениях потенциальной энергии рассматривался в работе Н. М. Кузнецова и одного из авторов работы [91] в связи с изучением кинетики рекомбинации в газе, расширяющемся в пустоту. О кинетике рекомбинации при разлете в пустоту речь пойдет в § 9 гл. VIII. Там же будут приведены некоторые результаты указанного рассмотрения.

§ 19. Ионизация и рекомбинация в воздухе. При очень высоких температурах, когда молекулярные газы диссоциированы, ионизация и рекомбинация в них протекают примерно так же, как и в атомарных газах. При более низких температурах, когда значительна концентрация молекул, положение существенным образом меняется и на первый план выступают процессы, связанные с участием молекул. Так, в воздухе при температурах ниже примерно 10000 К основным механизмом ионизации служит реакция (6.69) $N + O + 2,8 \text{ эВ} = NO^+ + e$, требующая минимальной энергии активации. В реакциях такого типа на отрыв электрона затрачивается энергия связи, которая выделяется при объединении атомов в молекулу, поэтому для них и нужна небольшая дополнительная энергия из запаса тепловой. Реакция типа $A + B \rightleftharpoons AB^+ + e$ может протекать, если пересекаются потенциальные кривые систем, обозначенных в правой и левой частях уравнения, как схематически показано на рис. 6.5. Пусть атомы обладают запасом энергии (скажем, кинетической энергии относительного движения), равным $\Delta E = E_2 - E_1$, т. е. их полная энергия соответствует горизонтальной линии E_2 . В соответствии с принципом Франка-Кондона (см. § 16 гл. V) в момент сближения на расстояние r_1 , на котором происходит пересечение потенциальных кривых, система $A + B$ может без изменения полной энергии перейти в другое состояние, отвечающее второй потенциальной кривой: $AB^+ + e$.

Эффективное сечение такого процесса (при наличии необходимой энергии, превышающей энергию активации), можно представить в весьма наглядной форме [83]:

$$\sigma = \gamma \pi r_1^2 \left(1 - e^{-r_1/v\tau}\right),$$

где τ — время жизни молекулярного комплекса, образующегося в момент сближения атомов на расстояние r_1 , по отношению к переходу в состояние с оторванным электроном; v — скорость сближения атомов, т. е. r_1/v — характерное время взаимодействия атомов или существования комплекса, и отношение $r_1/v\tau$ характеризует вероятность перехода за это время; γ — вероятность того, что система атомов

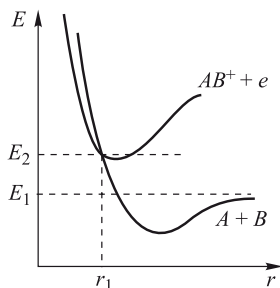


Рис. 6.5. Схема потенциальных кривых, поясняющая реакцию ассоциативной ионизации и диссоциативной рекомбинации

$A + B$ находится именно в том состоянии, которое соответствует пересекающейся потенциальной кривой; она определяется как отношение статистического веса этого состояния к сумме статистических весов всех возможных состояний. Если $r_1/v\tau \gg 1$, то сечение $\sigma \approx \gamma\pi r_1^2$; если, наоборот, вероятность превращения мала $r_1/v\tau \ll 1$, то $\sigma = \gamma\pi r_1^2 (r_1/v\tau)$. Эти соображения были использованы Лином и Тиром [73] для того, чтобы оценить сечение и скорость реакции (6.69), при этом они привлекли экспериментальные данные [72], полученные на основе измерений скорости ионизации воздуха в ударной трубе для того, чтобы определить неизвестную величину τ . Как следует из схемы потенциальных кривых молекулы NO , $r_1 \approx 10^{-8}$ см; величина γ оценивается как 0,1. Время τ оказалось равным $\tau \approx 6 \cdot 10^{-13}$ с. Этому соответствует сечение процесса $\sigma \approx 1,5 \cdot 10^{-16}$ см² (при скорости $v = 3 \cdot 10^5$ см/с, $T = 5000$ К). В результате для константы скорости реакции (6.69) получилась величина

$$k_{\text{ион N,O}} \approx \frac{5 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{T}} e^{-32500/T} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (6.113)$$

С помощью константы равновесия реакции, которая в широком диапазоне температур аппроксимируется формулой

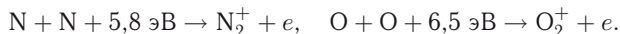
$$K = (1,4 \cdot 10^{-8}T + 1,2 \cdot 10^{-12}T^2 + 1,4 \cdot 10^{-16}T^3) e^{-32500/T},$$

можно оценить константу скорости обратной реакции — диссоциативной рекомбинации¹⁾. Для низких температур

$$b_{\text{дис. рек NO}^+} \approx \frac{k_{\text{ион N,O}}}{K} \approx 3 \cdot 10^{-3} T^{-3/2} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (6.114)$$

Эта величина согласуется с экспериментальными данными по диссоциативной рекомбинации NO^+ при комнатной температуре и при 2000 К.

При высоких температурах, наряду с реакцией (6.69), протекают аналогичные реакции:



Для них в работе [73] также выводятся константы скоростей, но не прямым путем, как для реакции (6.69), а с помощью констант равновесия через скорости соответствующих реакций диссоциативной рекомбинации. Последние определяются выражениями, близкими к b_{NO^+} .

Работа Лина и Тира [73] представляет собою фундаментальное исследование и в ней можно найти много сведений о скоростях ионизационных процессов в воздухе, а также обзор эксперимента и библиографию. Подробный перечень реакций в воздухе с участием заряженных частиц и константы их скоростей, подобранные по разным литературным данным, имеются в работе [93].

Процессы диссоциативной рекомбинации играют важнейшую роль в E - и F -слоях ионосферы (на высотах больше 100 км над уровнем моря). Подробная сводка экспериментальных данных по коэффициентам диссоциативной рекомбинации $b_{\text{дис. рек}}$ имеется в обзоре Г. С. Иванова-Холодного [71]. Величина $b_{\text{дис. рек}}$ уменьшается с повышением температуры примерно как $1/T^{1/2} - 1/T^{3/2}$ (по разным данным). Для ионов N_2^+ , при $T = 300$ К, $b_{\text{дис. рек N}_2^+} \approx 10^{-6}$ см³/с, что соответствует очень большому эффективному сечению $\sigma \approx 10^{-13}$ см². Для ионов O_2^+ и NO^+ величина $b_{\text{дис. рек}}$ несколько меньше.

¹⁾ О теории этого процесса см. работу [83].

При рекомбинации в холодном воздухе (в ионосфере) существенную роль играют реакции перезарядки типа



Атомарные ионы O^+ , которые образуются в верхних слоях атмосферы под действием ультрафиолетового излучения Солнца, рекомбинируют медленно, перезарядка же с последующей диссоциативной рекомбинацией O_2^+ является гораздо более быстрым процессом. Константы скоростей реакций перезарядки, идущих с выделением энергии, оцениваются [93] как

$$k_{\text{перез}} \approx 1,3 \cdot 10^{-12} T^{1/2} \text{ см}^3/\text{с.}$$

Рекомбинация в холодном воздухе при сравнительно больших плотностях (в D -слое ионосферы ниже ~ 80 км) идет в основном через образование отрицательных ионов кислорода. Электроны прилипают к молекулам кислорода преимущественно в тройных столкновениях $\text{O}_2 + e + \text{M} \rightarrow \text{O}_2^- + \text{M}$, а затем ионы O_2^- нейтрализуются с ионами N_2^+ или O_2^+ в парных или тройных столкновениях. Новейшие данные по рекомбинации в холодном воздухе, а также по многим другим неупругим процессам, протекающим в ионосфере, имеются в обзорах Дальгарно [74] и А. Д. Данилова и Г. С. Иванова-Холодного [92].

3. Плазма

§ 20. Релаксация в плазме. В атомарном или молекулярном газе время релаксации для установления максвелловского распределения по скоростям характеризуется временем между столкновениями частиц, т. е. газокинетическими сечениями, которые имеют порядок 10^{-15} см^2 . Газокинетические сечения равны примерно $\sigma \approx \pi a^2$, где радиус a порядка радиуса действия межуатомных и междумолекулярных сил взаимодействия, т. е. порядка размеров частиц. Иной характер имеют силы, действующие между заряженными частицами плазмы: электронами, ионами. Кулоновские силы спадают с расстоянием очень медленно, как $1/r^2$, и не имеют характерного масштаба длины. Поэтому вопрос о «столкновениях» между заряженными частицами и вопрос о соответствующих временах релаксации должен быть рассмотрен особо.

Плазму можно представить себе как смесь двух газов, электронного и ионного, с резко различными массами частиц m_e и m . Благодаря резкому различию масс между электронами и ионами затруднен обмен энергией, так как при «столкновениях» электрон и ион обмениваются энергией, которая составляет только долю порядка $m_e/m \ll 1$ от их кинетической энергии. Таким образом, средние кинетические энергии электронов и ионов, т. е. электронная и ионная температуры, могут в течение сравнительно продолжительного времени сильно отличаться друг от друга. Отмеченные два фактора: дальнodelствующий характер кулоновских сил и резкое различие масс электронов и ионов, и определяют специфические особенности плазмы.

Рассмотрим сначала взаимодействие заряженных частиц с массами одного порядка. При столкновениях они могут обмениваться энергией, сравнимой с начальными энергиями частиц, поэтому установление максвелловского распределения по скоростям, т. е. температуры, требует всего лишь нескольких столкновений. Если под «столкновением» понимать такое взаимодействие частиц, при котором происходит значительное изменение скорости и энергии, т. е. отклонение на значительный угол (порядка 90°), то в случае заряженных частиц «столкновения» происходят при сближении их на такое расстояние, при котором кинетическая и потенциальная (кулоновская) энергии оказываются сравнимыми. Это характерное расстояние r_0

определяется, очевидно, из условия $Z^2 e^2 / r_0 \approx (3/2) kT$, где Z — заряд частиц. Таким образом, мерой эффективного сечения «столкновений» может служить величина

$$\sigma \approx \pi r_0^2 \approx \frac{4}{9} \pi \frac{Z^4 e^4}{(kT)^2}. \quad (6.115)$$

В действительности дело обстоит несколько сложнее, так как в изменении скоростей частиц при кулоновском законе взаимодействия большую роль играют «далекие» столкновения, соответствующие большим прицельным расстояниям (рис. 6.6).

«Далекие» столкновения происходят чаще, чем «близкие». При медленном, кулоновском законе спада сил суммарный эффект «далеких» столкновений велик, несмотря на то, что изменение скорости в каждом таком столкновении мало.

Оценим этот эффект. При пролете одной частицы мимо другой на прицельном расстоянии r , сила, действующая на нее, по порядку величины равна $F \sim Z^2 e^2 / r^2$. Время действия силы $t \sim r/v$, где v — скорость частицы. Изменение скорости при пролете порядка $\Delta v \sim Ft/m \sim Z^2 e^2 / mvr$. Поскольку изменение скорости Δv может быть как положительным, так и отрицательным, естественно характеризовать взаимодействие квадратом изменения скорости $(\Delta v)^2 \sim Z^4 e^4 / m^2 v^2 r^2$.

Вероятность такого изменения пропорциональна площади кольца $2\pi r dr$. Таким образом, скорость изменения величины $(\Delta v)^2$ для потока частиц Nv порядка

$$\frac{d(\Delta v)^2}{dt} \sim Nv \int (\Delta v)^2 2\pi r dr \sim \frac{Nv Z^4 e^4 \cdot 2\pi}{m^2 v^2} \int \frac{dr}{r},$$

где N — число частиц в 1 см^3 . Нижним пределом интеграла служит минимальное расстояние, на которое могут приблизиться частицы, $r_0 \sim 2Z^2 e^2 / mv^2 \approx \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^2}{kT}$. На верхнем пределе, при $r \rightarrow \infty$, интеграл логарифмически расходится. Однако очень далекие взаимодействия в электронейтральном газе экранируются совместным действием положительных и отрицательных зарядов. Радиусом экранировки, который можно принять в качестве верхнего предела, является, очевидно, дебаевский радиус d (см. § 11 гл. III). Принимая во внимание формулу (3.78) для этой величины, найдем:

$$\int \frac{dr}{r} \approx \int_{r_0}^d \frac{dr}{r} = \ln \frac{d}{r_0} = \ln \Lambda, \quad \Lambda = \frac{3(kT)^{3/2}}{2(4\pi)^{1/2} Z^3 e^3 N^{1/2}}. \quad (6.116)$$

Если определить время релаксации τ как время, в течение которого $(\Delta v)^2$ меняется на величину порядка v^2 , и заменить приближенно v на $\bar{v}$, а mv^2 на $3kT$, то получим

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{v^2} \frac{d(\Delta v)^2}{dt} \approx N \bar{v} \frac{2}{9} \pi \frac{Z^4 e^4}{(kT)^2} \ln \Lambda.$$

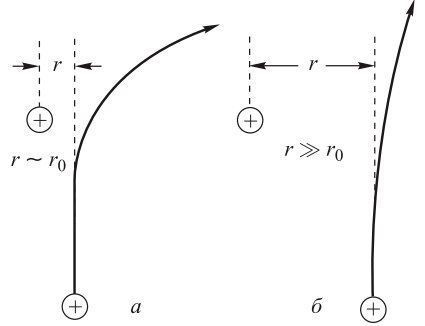


Рис. 6.6. Траектория иона при пролете мимо иона такого же знака: а) $r \sim r_0$ — сильное взаимодействие; б) $r \gg r_0$ — слабое взаимодействие

Более строгое рассмотрение [56] приводит к появлению в этой формуле дополнительного численного множителя, а именно, если $\bar{v} = (8kT/\pi m)^{1/2}$ — средняя тепловая скорость, то

$$\frac{1}{\tau} = N\bar{v} \cdot 1,1\pi \frac{Z^4 e^4}{(kT)^2} \ln \Lambda = \frac{8,8 \cdot 10^{-2} N Z^4}{A^{1/2} T^{3/2}} \ln \Lambda \text{ с}^{-1}, \quad (6.117)$$

где A — атомный вес частиц. В частности, для столкновений электронов друг с другом

$$\frac{1}{\tau_{ee}} = \frac{3,8 N_e \ln \Lambda}{T^{3/2}} \text{ с}^{-1}. \quad (6.118)$$

С помощью обычной связи между частотой столкновений и газокинетическим сечением, $1/\tau = N\bar{v}\sigma$, можно ввести условное понятие эффективного сечения, и для «кулоновских столкновений» частиц

$$\sigma = 0,69\pi \frac{Z^4 e^4}{(kT)^2} \ln \Lambda = \frac{6 \cdot 10^{-6} Z^4}{T^2} \ln \Lambda = \frac{4,4 \cdot 10^{-14} N Z^4}{T_{\text{ЭВ}}^2} \ln \Lambda \text{ см}^2. \quad (6.119)$$

Как видим, (6.119) отличается от элементарной формулы (6.115), в которой не учтены «далекие столкновения» множителем, примерно равным $\ln \Lambda$. Как следует из табл. 6.7¹⁾, $\ln \Lambda$ имеет порядок 10.

Таблица 6.7. $\ln \Lambda$ при $Z = 1$

$T, \text{ К}$	$N, \text{ см}^{-3}$			
	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}
10^3	5,97			
10^4	9,43	5,97		
10^5	12,8	9,43	5,97	
10^6	15,9	12,4	8,96	5,97

Эффективное сечение очень слабо, логарифмически зависит от плотности и обратно пропорционально квадрату температуры. Оно сравнивается с обычными газокинетическими сечениями $\sigma \sim 10^{-15} \text{ см}^2$ при температуре $T \sim 250\,000 \text{ К}^2)$.

Эффективное сечение σ и длина свободного пробега $l = 1/N\sigma$ заряженных частиц не зависят от массы, т.е. для электронов и ионов с равными температурами одинаковы (при $Z = 1$). Время релаксации, благодаря зависимости от скорости, пропорционально корню из массы $\tau \sim 1/\bar{v} \sim m^{1/2}$, т.е. для электронов раз в 100 меньше, чем для ионов (при равных температурах).

Например, в электронном газе при $T = 20\,000 \text{ К}$, $N_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $\sigma \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$ и $\tau = 2 \cdot 10^{-13} \text{ с}$. В газе из ядер водорода (протонов) при тех же температуре и плотности время в 43 раза больше, $\tau \approx 8,6 \cdot 10^{-12} \text{ с}$. Из этих оценок видно, что температура в каждом из газов устанавливается очень быстро, так что практически вопрос о релаксации установления поступательной температуры почти никогда не возникает.

¹⁾ Данные таблицы взяты из книги [56]. Они несколько уточнены по сравнению с формулой (6.116).

²⁾ Необходимо отметить, что при столь больших температурах и энергиях, при которых радиус r_0 меньше радиуса ионов (сложных) и сечение (6.119) меньше «газокинетического», частота столкновений и длина пробега «ионов» определяются этим последним, а не «кулоновским». При этом следует иметь в виду, что радиусы ионов тем меньше, чем больше их заряд.

Другое дело установление термодинамического равновесия между электронным и ионными газами, т.е. выравнивание электронной и ионной температур. В ряде физических процессов возникает различие в температурах ионного и электронного газов, которое при стремлении системы к термодинамическому равновесию должно с течением времени исчезать. Так, например, в ударной волне, распространяющейся по плазме, в скачке уплотнения нагреваются только ионы, электроны же остаются холодными и постепенная передача энергии от ионов электронам и выравнивание их температур происходят за скачком уплотнения в течение сравнительно большого времени (см. § 12 гл. VII). Оценим время релаксации для обмена энергией между ионами и электронами и выравнивания их температур.

«Эффективное сечение» не зависит от массы заряженных частиц и характеризует фактически вероятность сильного отклонения частиц от первоначального направления их движения при взаимодействии. Эффект обмена энергией является, так сказать, следствием отклонения. При сравнимых массах частиц сильное отклонение одновременно связано и с большой передачей энергии, вследствие чего сечение σ и определяло скорость обмена энергией при столкновении одинаковых частиц. При взаимодействии же частиц с резко различающимися массами (электронов и ионов) обмен энергией при столкновении, согласно законам сохранения импульса и энергии, не может превышать доли порядка m_e/m . Поэтому чтобы произошла значительная передача энергии, необходимо, чтобы частицы испытали примерно m/m_e , т.е. очень много «соударений».

Повторяя вывод «эффективного сечения» для «столкновения» электронов и ионов, заметим, что под кинетической энергией сталкивающихся частиц следует понимать кинетическую энергию их относительного движения. Если электронная температура не намного меньше ионной, то относительная скорость всегда совпадает со скоростью электрона. Приведенная масса также совпадает с массой электрона, так что средняя энергия относительного движения характеризуется электронной температурой. Кроме того, в выражении для эффективного сечения один из множителей Z^2 относился к одной из частиц, а второй — к другой. Поскольку у электрона $Z = 1$, то теперь вместо Z^4 в сечение войдет множитель Z^2 . Таким образом, «эффективное сечение» «столкновений» электронов с ионами порядка $\sigma' \sim \pi Z^2 e^4 \ln \Lambda / (kT)$, время между «соударениями» $\tau' \sim 1/N\bar{v}_e\sigma'$, а характерное время обмена

$$\tau_{ei} \sim \frac{m}{m_e} \tau' \sim \frac{m}{m_e} \frac{1}{N\bar{v}_e\sigma'}. \quad ^1)$$

Более строгое рассмотрение [56] приводит к появлению в этой формуле численно-го коэффициента порядка единицы. После подстановки значений констант выражение для времени обмена приобретает вид

$$\tau_{ei} = \frac{250A \cdot T_e^{3/2}}{N Z^2 \ln \Lambda} = \frac{3,15 \cdot 10^8 A T_{\text{эВ}}^{3/2}}{N Z^2 \ln \Lambda} \text{ с}, \quad (6.120)$$

где A — атомный вес ионов, а N — их число в 1 см^3 . Например, при $N = 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 20\,000 \text{ К}$, $Z = 1$, $A = 16$ (атомы кислорода), $\tau_{ei} \approx 2,8 \cdot 10^{-9} \text{ с}$. При небольшой разности температур электронов и ионов скорость изменения температуры одного из газов естественно представить в форме обычного уравнения релаксации типа (6.2):

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{T - T_e}{\tau_{ei}}. \quad (6.121)$$

¹⁾ В случае взаимодействия электронов и многократно ионизованных ионов при достаточно больших энергиях сохраняет силу замечание, сделанное во второй сноске на с. 336.

Оказывается, однако, что уравнение кинетики для выравнивания температур (6.121) справедливо и при большой разности температур. Уравнение (6.121) со временем обмена (6.120) (отличающимся только несущественным численным коэффициентом порядка единицы) было впервые выведено Л. Д. Ландау в 1936 г. [57] путем строгого рассмотрения кинетического уравнения для газа из заряженных частиц, взаимодействующих по кулоновскому закону.

Заметим, что в случае слабо ионизованного газа уравнение обмена (6.121) остается в силе, если учесть обмен с нейтральными атомами, положив $1/\tau_{ei} = 1/\tau_{e\text{ ион}} + 1/\tau_{e\text{ нейтр}}$; $\tau_{e\text{ ион}}$ выражается прежней формулой (6.120). Что касается $\tau_{e\text{ нейтр}}$, то из элементарных соображений можно написать

$$\frac{1}{\tau_{e\text{ нейтр}}} \approx N_{\text{нейтр}} \bar{v}_e \cdot \sigma_{e\text{ упр}} \cdot \frac{2m_e}{m}, \quad (6.122)$$

где $\sigma_{e\text{ упр}}$ — среднее сечение упругих столкновений электрона с атомами. Строгое вычисление [50] приводит к близким результатам. Обычно при $T_e \sim 1$ эВ обмен с нейтральными атомами играет главную роль только при степенях ионизации меньших, чем $\sim 10^{-3}$.

Глава VII

СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ

§ 1. Введение. Основные представления об ударных волнах были даны в гл. I. Показано, что уравнения гидродинамики идеальной жидкости допускают существование разрывных решений, которые описывают ударные волны. Гидродинамические величины: плотность, давление, скорость по обе стороны поверхности разрыва связаны между собою разностными уравнениями, соответствующими дифференциальным уравнениям, которыми вписываются области непрерывного течения. И те и другие уравнения являются выражением общих законов сохранения массы, импульса и энергии. Из законов сохранения следует, что на поверхности разрыва испытывает скачок (возрастает) и энтропия вещества. Увеличение энтропии в ударной волне определяется только условиями сохранения массы, импульса и энергии и термодинамическими свойствами вещества и совершенно не зависит от механизма диссипации, приводящего к росту энтропии.

В некотором смысле парадоксален тот факт, что уравнения адиабатического движения вещества допускают существование таких поверхностей, на которых энтропия испытывает скачок. Необратимость ударного сжатия свидетельствует о том, что в нем участвуют диссипативные процессы: вязкость и теплопроводности, которые и приводят к росту энтропии.

Именно благодаря вязкости осуществляется необратимое превращение в тепло значительной части кинетической энергии газодинамического потока, набегающего на разрыв в системе координат, где разрыв покоится.

Таким образом, если интересоваться механизмом ударного сжатия, внутренней структурой и толщиной того переходного слоя, в котором происходит превращение вещества из начального состояния в конечное и который в рамках гидродинамики идеальной жидкости заменяется математической поверхностью, необходимо обратиться к теории, включающей в себя описание диссипативных процессов. В гл. I этот вопрос был рассмотрен применительно к ударным волнам слабой интенсивности. В этой главе не будет накладываться ограничений на амплитуду ударной волны.

Обычно в гидродинамических процессах изменения макроскопических параметров в областях непрерывного течения происходят весьма медленно по сравнению со скоростями релаксационных процессов, приводящих к установлению термодинамического равновесия. Каждая частица газа в каждый момент времени находится в состоянии термодинамического равновесия, соответствующего медленно изменяющимся макроскопическим параметрам, как бы «следит» за изменением этих параметров. Поэтому при рассмотрении ударных разрывов в рамках гидродинамики идеальной жидкости состояния газа по обе стороны разрыва с полным основанием предполагаются термодинамически равновесными.

В тонком переходном слое, где происходит превращение газа из начального, термодинамически равновесного состояния в конечное, также термодинамически равновесное, плотность, давление и т. д. меняются очень быстро. Термодинамическое равновесие в этой области, называемой фронтом ударной волны, может существенно нарушаться. Поэтому при изучении внутренней структуры фронта ударной волны необходимо принимать во внимание и кинетику релаксационных процессов, детально рассматривать механизм установления конечного, термодинамически равновесного состояния вещества, которое достигается за фронтом волны.

Изучение внутренней структуры фронта ударных волн представляет интерес со многих точек зрения. Поначалу вопрос о структуре привлекал к себе внимание как чисто теоретическая задача, решение которой помогает понять физический механизм ударного сжатия, одного из замечательнейших явлений в газодинамике. Позднее ударные волны стали применять в лаборатории с целью получения высоких температур и исследования разнообразных процессов, которые протекают в газах при высоких температурах: возбуждения колебаний в молекулах, диссоциации молекул, химических реакций, ионизации, излучения света (см. гл. IV).

С помощью теоретического рассматривания структуры фронта ударной волны удается извлечь из опыта ряд ценных сведений о скоростях этих процессов.

Наконец, изучение структуры фронта очень сильных ударных волн, в которых существенную роль играет излучение, проливает свет на вопрос о такой важной характеристике, как яркость поверхности фронта волны и позволяет объяснить некоторые интересные оптические эффекты, наблюдаемые на опыте и при сильных взрывах в воздухе (см. гл. IX).

В основе математической теории структуры фронта ударной волны лежит предположение о стационарности структуры. Время превращения вещества в ударной волне из начального состояния в конечное очень мало, гораздо меньше характерных времен, в течение которых заметно меняются параметры газа в области непрерывного течения за фронтом волны. Точно так же ширина фронта гораздо меньше характерных масштабов длины, на которых заметно меняется состояние газа за фронтом, скажем, расстояния от фронта ударной волны до поршня, «толкающего» волну (поршень движется с переменной скоростью).

За то малое время, в течение которого ударная волна проходит расстояние порядка ширины фронта, скорость ее распространения, давление и другие параметры газа за фронтом практически не меняются. Но кинетика внутренних процессов, протекающих во фронте ударной волны, распространяющейся по газу с заданными начальными параметрами, зависит только от амплитуды волны.

Поэтому на протяжении некоторого сравнительно большого промежутка времени каждая из частиц газа, втекающих в ударный разрыв, проходит через ту же последовательность состояний, что и предыдущие. Иначе говоря, распределение различных параметров во фронте ударной волны образует как бы застывшую картину, которая в течение этого времени как целое передвигается вместе с фронтом (рис. 7.1).

Если скорость фронта обозначить через D ($D = |D| > 0$), а координату, нормальную к поверхности фронта в данном месте поверхности, через x , то можно сказать, что все параметры состояния газа внутри волны зависят от координаты и времени только в комбинации $x + Dt$. В системе координат, связанной с фронтом, процесс стационарен и не зависит от времени. Это обстоятельство (которое, кстати сказать, уже было использовано при выводе соотношений на разрыве) чрезвычайно облегчает задачу с математической точки зрения, так как в системе координат, движущейся вместе с волной, все параметры состояния газа являются функциями не двух переменных x и t , а только одной координаты, и процессы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В § 23 гл. I при рассмотрении ширины фронта ударных волн слабой интенсивности было показано, что ширина скачка уплотнения имеет своим масштабом длину пробега молекул. При увеличении амплитуды волны ширина уменьшается, и когда превышение давления за фронтом над начальным становится сравнимым с самим начальным давлением, ширина фронта становится порядка пробега.

Физически ясно, что в сильных ударных волнах ширина скачка уплотнения, в котором под действием сил «вязкости» происходит ударное сжатие, всегда порядка пробега молекул¹⁾. Проще всего это уяснить, если рассмотреть ударную волну в системе координат, в которой газ за фронтом покоится (в системе координат, связанной с поршнем) или, что то же самое, рассмотреть торможение высокоскоростного газового потока, набегающего на неподвижную стенку. Кинетическая энергия направленного движения молекул (кинетическая энергия гидродинамического движения) при торможении превращается в кинетическую энергию хаотического движения, т. е. в тепло. Для «торможения» быстрых молекул, направленные скорости которых гораздо больше начальных тепловых (что и соответствует высокой амплитуде волны: высокой сверхзвуковой скорости волны), достаточно нескольких газокINETических соударений, так как в каждом ударе молекула в среднем меняет направление своего движения на большой угол. Поэтому после нескольких соударений направленный импульс молекул почти полностью рассеивается и скорости становятся хаотическими.

Для распределения энергии по различным внутренним степеням свободы — возбуждения колебаний в молекулах, диссоциации, ионизации — требуется обычно много соударений. Ширина релаксационного слоя, в котором происходит установление конечного, термодинамически равновесного состояния, гораздо больше ширины первоначального скачка уплотнения. Весь переходный слой фронта ударной волны можно, следовательно, разделить на две зоны, существенно различающиеся по своей ширине: очень тонкий, «вязкий» скачок уплотнения и протяженный релаксационный слой.

В достаточно сильной ударной волне, в которой газ нагревается до высоких температур, существенную роль играют излучение и лучистый теплообмен. Строение фронта при этом еще более усложняется. Ширина фронта определяется наиболее крупным масштабом, характеризующим переходный процесс, связанный с лучистым

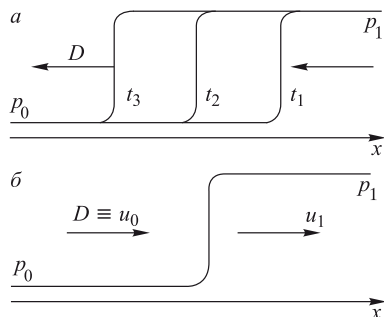


Рис. 7.1. Профиль давления в ударной волне: а) распространение ударной волны в лабораторной системе координат; б) скачок в системе координат, связанной с фронтом

¹⁾ Следует подчеркнуть условность понятия «вязкости» в данном случае. Когда говорят о вязкости, подразумевают, что градиенты скорости малы и скорости заметно меняются на расстояниях, гораздо больших длины пробега молекул. Иными словами, вязкость, которая вводится в гидродинамику, есть понятие «макроскопическое». Если резкое изменение скорости и плотности газа происходит на расстоянии длины пробега молекул, то это явление «микроскопического» масштаба следует рассматривать не гидродинамически, а на основе молекулярно-кинетической теории газов. Применительно к случаю очень больших градиентов, во фронте ударной волны под «вязкостью» следует понимать механизм превращения направленной скорости молекул в хаотическую, обусловленный молекулярными столкновениями.

теплообменом: длиной пробега излучения, которая обычно во много раз больше газокинетических пробегов частиц.

В последующих параграфах будут подробно рассмотрены особенности строения фронта ударных волн. При этом мы начнем с рассмотрения ударных волн сравнительно небольшой интенсивности и будем переходить ко все более и более мощным волнам.

1. Скачок уплотнения

§ 2. Вязкий скачок уплотнения. Поскольку процесс ударного сжатия в скачке уплотнения разыгрывается на расстояниях, соизмеримых с газокинетическим пробегом молекул, при изучении структуры скачка следовало бы, строго говоря, исходить из представлений молекулярно-кинетической теории газов. Однако в качестве первого шага в этом направлении естественно рассмотреть задачу в рамках гидродинамики реальной жидкости, принимающей во внимание диссипативные процессы: вязкость и теплопроводность. При этом, в отличие от вычислений § 23 гл. I, не будем накладывать ограничений на амплитуду ударной волны. В целях связности изложения мы повторим здесь некоторые выводы и выкладки § 23 гл. I. Чтобы не усложнять рассмотрение несущественными в данном случае деталями, связанными с замедленным возбуждением непоступательных степеней свободы газа, будем считать газ одноатомным и пренебрегать ионизацией.

Запишем уравнения одномерного течения вязкого и теплопроводного газа, стационарного в системе координат, связанной с фронтом волны:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varrho u &= 0, \quad \varrho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = 0, \\ \varrho u T \frac{d\Sigma}{dx} &= \frac{4}{3} \mu \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{dS}{dx}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь Σ — удельная энтропия; μ — коэффициент вязкости¹⁾, S — негидродинамический поток энергии, равный, в случае обычной теплопроводности,

$$S = -\kappa \frac{dT}{dx}. \quad (7.2)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

К системе уравнений (7.1) следует присоединить граничные условия, выражающие отсутствие градиентов «перед» и «за» фронтом волны, и стремление гидродинамических величин к начальным (при $x = -\infty$) и конечным (при $x = +\infty$) значениям. Преобразуя третье уравнение (7.1) с помощью второго закона термодинамики:

$$Td\Sigma = d\varepsilon + pdV = dw - \frac{1}{\varrho} dp$$

и интегрируя все уравнения (7.1), получим первые интегралы системы:

$$\begin{aligned} \varrho u &= \varrho_0 D, \quad p + \varrho u^2 - \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = p_0 + \varrho_0 D^2, \\ w + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\varrho_0 D} \left(S - \frac{4}{3} \mu u \frac{du}{dx} \right) &= w_0 + \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

¹⁾ В данном случае понятия первой и второй вязкости неразличимы.

Константы интегрирования здесь выражены через параметры начального состояния газа, которым приписан индекс «0» и скорость фронта $D \equiv u_0$.

Если отнести уравнения (7.3) к конечному состоянию (параметрам его припишем индекс «1»), получим уже известные соотношения на разрыве, которые для удобства выпишем еще раз:

$$\begin{aligned} \varrho_1 u_1 &= \varrho_0 D, \\ p_1 + \varrho_1 u_1^2 &= p_0 + \varrho_0 D^2, \\ w_1 + \frac{u_1^2}{2} &= w_0 + \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из этих соотношений следует, что скачок энтропии в ударной волне $\Sigma_1 - \Sigma_0 = \Sigma(p_1, \varrho_1) - \Sigma(p_0, \varrho_0)$ совершенно не зависит ни от механизма диссипации, ни от коэффициентов вязкости и теплопроводности μ и κ . Последние определяют лишь внутреннюю структуру фронта волны и его толщину δ . Толщина вязкого скачка уплотнения δ пропорциональна коэффициентам μ и κ , которые в свою очередь пропорциональны длине пробега молекул l . В пределе $l \rightarrow 0$ гидродинамика реальной жидкости превращается в областях непрерывного течения в гидродинамику идеальной жидкости. Что же касается фронта ударной волны, то в пределе $l \rightarrow 0$ он превращается в математическую поверхность, так как $\delta \sim l \rightarrow 0$. При этом градиенты всех гидродинамических величин во фронте стремятся к бесконечности как $1/l$, а скачки величин остаются конечными.

Задаваясь коэффициентами вязкости и теплопроводности, а также термодинамической связью $w(p, \varrho)$ (в одноатомном газе $w = c_p T = \frac{5}{2} \frac{p}{\varrho}$), можно численно интегрировать уравнения (7.3), (7.2) с указанными граничными условиями. Гораздо удобнее, однако, иметь дело с аналитическим решением, так как оно нагляднее демонстрирует все закономерности явления. К сожалению, в общем случае найти аналитическое решение системы не удастся. Прointегрировать уравнения аналитически можно, если ограничиться волнами слабой интенсивности и разложить решение в ряд по малым изменениям одной из газодинамических величин. Этот метод был использован в § 23 гл. I для оценки ширины фронта (полное решение имеется в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1]).

Точное аналитическое решение для волны произвольной амплитуды можно найти в одном специальном случае. Это решение, полученное впервые Беккером [2], а впоследствии исследованное Мордуховым и Либби [3], описывает все физические закономерности структуры скачка уплотнения, обладая простотой и наглядностью. Остановимся на нем подробнее.

Обычно в газах транспортные коэффициенты — кинематическая вязкость $\nu = \mu/\varrho$ и температуропроводность $\chi = \kappa/c_p \varrho$ — близки друг к другу и к коэффициенту диффузии $l\bar{v}/3$.

Положим комбинацию $\mathbf{Pr} = \mu c_p / \kappa = \nu / \chi$, называемую числом Прандтля, равной $3/4$. В этом случае выражение в скобках в третьем из уравнений (7.3) превращается в полный дифференциал величины $w + \frac{u^2}{2}$ и уравнение принимает вид

$$\left(w + \frac{u^2}{2} \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\varrho_0 D} \frac{d}{dx} \left(w + \frac{u^2}{2} \right) = w_0 + \frac{D^2}{2}.$$

Написав интеграл этого линейного уравнения, мы увидим, что условию конечности величины $w + \frac{u^2}{2}$ при $x = +\infty$ можно удовлетворить только, считая ее не зави-

сящей от x :

$$w + \frac{u^2}{2} = w_0 + \frac{D^2}{2} \quad (7.5)$$

Таким образом, при числе Прандтля $\text{Pr} = 3/4$ соотношение (7.5) выполняется не только за фронтом волны (см. (7.4)), но и в любой промежуточной точке x .

Уравнение (7.5) дает кривую на плоскости p, V вдоль которой происходит превращение газа из начального состояния в конечное. Замечая, что в одноатомном газе, который мы будем рассматривать здесь, $w = \frac{5}{2}pV$, и переходя к безразмерным скорости или удельному объему,

$$\eta = \frac{u}{D} = \frac{V}{V_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho},$$

найдем уравнение этой кривой:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 + (\text{M}/3)(1 - \eta^2)}{\eta} = \frac{4\eta_1 - \eta^2}{(4\eta_1 - 1)\eta}. \quad (7.6)$$

Здесь η_1 относится к конечному состоянию за фронтом ударной волны:

$$\eta_1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \frac{p_0}{\varrho_0 D^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{\text{M}^2}. \quad (7.7)$$

$\text{M} = D/c_0$ — число Маха; c_0 — скорость звука в начальном состоянии ($c_0^2 = \frac{5}{2}p_0V_0$). При выводе формул (7.6), (7.7) были использованы соотношения, связывающие величины по обе стороны фронта волны. Ударная адиабата в переменных p_1/p_0 , η_1 имеет вид

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{4 - \eta_1}{4\eta_1 - 1}.$$

На рис. 7.2 изображены ударная адиабата и кривая, вдоль которой меняется состояние частицы в волне (а также характерная прямая, связывающая начальное и конечное состояния).

С помощью формулы (7.6) и первых двух уравнений (7.3) запишем дифференциальное уравнение, определяющее профили скорости и объема во фронте волны $\eta(x)$:

$$\frac{5}{3} \frac{\mu}{\varrho_0 D} \eta \frac{d\eta}{dx} = -(1 - \eta)(\eta - \eta_1). \quad (7.8)$$

Будем для простоты считать коэффициент вязкости не зависящим от температуры и равным $\mu = \varrho_0 l_0 \bar{v}_0/3$ (от плотности коэффициент вязкости не зависит, так как $\mu \sim \varrho l$, а $l \sim 1/\varrho$). Интеграл уравнения (7.8) содержит аддитивную постоянную в соответствии с произволом в выборе начала координат. Помещая начало координат в точку перегиба профиля скорости (в «центр» волны) и принимая во внимание формулу (7.7), найдем для $\eta(x)$ выражение:

$$\frac{1 - \eta}{(\eta - \eta_1)^\eta} = \frac{1 - \sqrt{\eta_1}}{(\sqrt{\eta_1} - \eta_1)^\eta} \exp \left(a \frac{\text{M}^2 - 1}{\text{M}} \frac{x}{l_0} \right) \quad \left(a = \frac{27}{40} \sqrt{\frac{5\pi}{6}} = 1,1 \right). \quad (7.9)$$

¹⁾ Это уравнение аналогично интегралу Бернулли в теории стационарного течения.

Зная профиль скорости $\mu = D\eta$, уже легко определить профили и всех остальных величин. Так, для температуры по формуле (7.5) имеем $T/T_0 = 1 + (M^2/3)(1 - \eta^2)$; давление выражается через η формулой (7.6); энтропия равна

$$\Sigma - \Sigma_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - A \ln \frac{p}{p_0} \quad \left(A = \frac{p}{\rho T} \right).$$

Из формулы (7.9) видно, что при $x \rightarrow -\infty$ $\eta \rightarrow 1$, а при $x \rightarrow +\infty$ $\eta \rightarrow \eta_1$, причем приближение к начальному и конечному значениям происходит асимптотически, по экспоненциальному закону. Все гидродинамические величины в волне: скорость, плотность, давление, а также температура, монотонно изменяются от своих начальных до конечных значений и асимптотически приближаются к ним при $x \rightarrow \mp\infty$ 1).

Энтропия же меняется немонотонно и внутри волны достигает максимума (что уже было показано в § 23 гл. I). В этом легко убедиться, если преобразовать третье, энтропийное, уравнение (7.1) с помощью второго закона термодинамики, «интеграла Бернулли» (7.5) и второго из уравнений (7.1):

$$\begin{aligned} \rho u T \frac{d\Sigma}{dx} &= \rho u \left(\frac{dw}{dx} - V \frac{dp}{dx} \right) = \\ &= \rho u \left(-u \frac{du}{dx} - V \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} + V \rho u \frac{du}{dx} \right) = \\ &= -u \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = -\frac{4}{3} \mu u \frac{d^2 u}{dx^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что энтропия экстремальна в точке перегиба скорости, т. е. в «центре» волны. Возникновение максимума энтропии в волне связано с существованием теплопроводности. Один из диссипативных процессов, вязкость, приводит только к возрастанию энтропии, пропорциональному $(du/dx)^2$. Благодаря же теплопроводности тепло необратимым образом перекачивается из более нагретых слоев газа в менее нагретые. При этом приращение энтропии частиц за счет теплопроводности в менее нагретых слоях, где $dS/dx \sim -d^2T/dx^2 < 0$, положительно, а в более нагретых слоях, где $dS/dx \sim -d^2T/dx^2 > 0$ — отрицательно.

Убывание энтропии в более нагретых слоях газа ни в коей мере не противоречит второму закону термодинамики. Энтропия всего газа в целом или же отдельной частицы в результате всего процесса ударного сжатия повышается при переходе через ударный разрыв. Отдельный же слой газа, проходящего через волну, уже не представляет собой изолированной системы. Энтропия его вначале растет, когда к нему поступает тепло благодаря теплопроводности и работе сил вязкости, а затем уменьшается, когда уход тепла за счет теплопроводности в сторону слоев газа, следующих за рассматриваемым, превышает приток за счет работы сил вязкости.

Определим ширину фронта, как и в § 23 гл. I, условием

$$\delta = \frac{D - u_1}{(du/dx)_{\max}}.$$

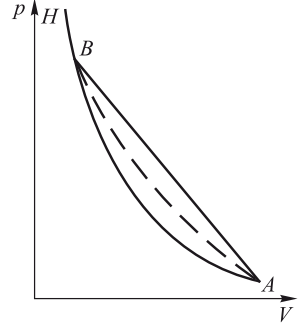


Рис. 7.2. Ударный переход $A \rightarrow B$ на p, V -диаграмме. H — ударная адиабата. Точка, описывающая состояние внутри фронта волны, пробегает из A в B по пунктирной кривой

¹⁾ Точки, где различные величины во фронте волны испытывают перегиб, не совпадают.

Из формулы (7.9) видно, что ширина фронта по порядку величины равна

$$\delta \sim l_0 \frac{M}{M^2 - 1}.$$

В ударной волне малой амплитуды, когда $M - 1 \ll 1$, $\delta \sim l_0/(M - 1)$, в соответствии с результатами § 23 гл. I. Ширина фронта волны при этом может равняться многим пробегам молекул. В случае $M = 2$, изображенном на рис. 7.3, ширина фронта равна примерно трем пробегам l_0 . При $M \rightarrow \infty$ $\delta \sim l_0/M \rightarrow 0$, однако, если учесть переменность коэффициента вязкости во фронте волны ($\mu \sim l\bar{\nu} \sim \bar{\nu}/g$; при $M \rightarrow \infty$ за фронтом $\mu \sim \bar{\nu} \sim D \rightarrow \infty$), то в пределе $M \rightarrow \infty$ ширина фронта оказывается конечной и порядка пробега. Когда ширина фронта становится порядка пробега, гидродинамическая теория теряет смысл, так как в основе ее лежит предположение о малости длины пробега по сравнению с расстояниями, на которых происходят значительные изменения гидродинамических параметров. Поэтому к достаточно сильным волнам теория не применима. Физически ясно, что толщина скачка уплотнения в волне любой амплитуды не может стать меньше пробега, так как молекулам газа, набегающего на разрыв, необходимо сделать по крайней мере несколько соударений, чтобы рассеялся направленный импульс и кинетическая энергия направленного движения превратилась в кинетическую энергию хаотического движения (в тепло). В то же время толщина скачка уплотнения в случае сильной волны не может составлять много пробегов, так как в каждом соударении молекулы набегающего потока теряют в среднем значительную долю своего импульса.

Задача о строении сильных скачков уплотнения должна рассматриваться на основе молекулярно-кинетической теории газов, поэтому многочисленные исследования, направленные на уточнение изложенной выше простой теории, учет зависимости транспортных коэффициентов от температуры, выяснение влияния на структуру фронта числа Прандтля и т. д. [4–13] не вносят ничего принципиально нового по сравнению с рассмотренным частным случаем, и в лучшем случае представляют интерес для волн слабой интенсивности¹⁾.

И. Е. Тамм [100] и, независимо, Мотт-Смит [16] применили кинетическое уравнение Больцмана к задаче о структуре скачка уплотнения. Приближенное решение уравнения Больцмана в области скачка строится в виде суперпозиции двух максвелловских распределений, соответствующих температурам и макроскопическим скоростям в начальном и конечном состояниях. Относительный вес обеих функций меняется на протяжении волны от 0 до 1. Толщина фронта при неограниченном возрастании амплитуды ударной волны стремится к конечному пределу. По расчетам Сакураи [17], который несколько усовершенствовал методику Мотт-Смита, в модели твердых шаров для взаимодействия молекул ширины скачков уплотнения²⁾, изме-

¹⁾ Попытка уточнения гидродинамического приближения путем учета вторых производных в выражениях для членов переноса (так называемое приближение Барнетта), предпринятая Цоллером [14], несколько уточняет результаты для слабых волн и, по существу, лишь указывает пределы применимости гидродинамической теории. При амплитуде волны $p_1/p_0 = 1,5$ толщина волны, по Цоллеру, равна 17 пробегам, а при $p_1/p_0 = 4 - 6$ пробегам. Ширина фронта слабых ударных волн в одноатомных газах измерялась методом отражения света в работах Хорнига и др. [15] (см. § 5 гл. IV). Ширина оказалась равной 30, 19, 13 пробегам для чисел Маха $M = 1,1; 1,5; 2,5$ соответственно. Расчеты Цоллера дают неплохое согласие с этими результатами. См. также [56].

²⁾ Ширина фронта δ определяется следующим образом. Если f_α и f_β — функции распределения молекул в начальном и конечном состояниях, то для функции распределения

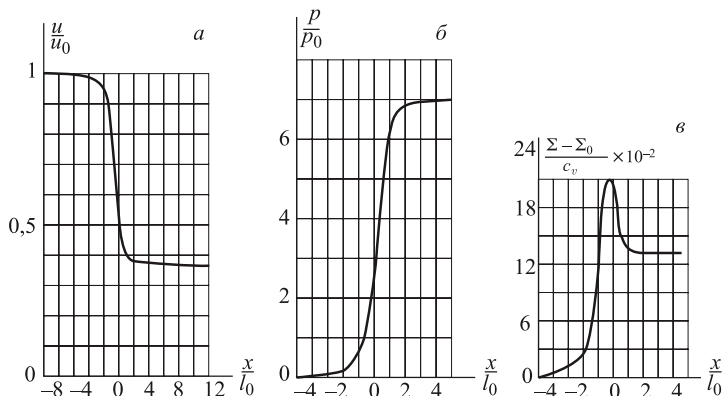


Рис. 7.3. Распределения: а) скорости; б) давления; в) энтропии в вязком скачке уплотнения с числом Маха $M = 2$ в газе с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$ и коэффициентом вязкости, не зависящим от температуры. По оси абсцисс отложена координата, измеренная в длинах пробега молекул в невозмущенном газе (графики взяты из [3])

ренные в длинах свободного пробега при начальных условиях, равны: $\delta/l_0 = 2,11; 1,68; 1,46; 1,42$ при числах Маха, равных $M = 2,5; 4; 10; \infty$, соответственно.

Отметим еще несколько работ, в которых развивается метод Мотт-Смита и скачок уплотнения рассматривается на основе уравнения Больцмана [52–55].

§ 3. Роли вязкости и теплопроводности в образовании скачка уплотнения.

Несмотря на то, что транспортные коэффициенты — кинематическая вязкость и температуропроводность, также как и соответствующие диссипативные члены в уравнении энергии, сравнимы между собой, роли обоих диссипативных процессов в образовании скачка уплотнения далеко не равноценны. Физически ясно, что принципиальную роль в механизме ударного сжатия играет вязкость, а не теплопроводность, так как именно механизм вязкости приводит к рассеянию направленного импульса набегающего газового потока и превращению кинетической энергии направленного движения молекул в кинетическую энергию хаотического движения, т.е. превращению механической энергии в тепло. Теплопроводность же лишь перекачивает тепловую энергию из одних слоев газа в другие и воздействует на превращения механической энергии косвенным образом благодаря перераспределению давления.

Чтобы убедиться в этом, полезно рассмотреть задачу об одномерном стационарном движении газа с граничными условиями, соответствующими ударному сжатию невозмущенного потока в предположении, что вязкости вообще нет, и диссипация обязана исключительно теплопроводности. Исследование этого вопроса, впервые проведенное Рэлеем [18], имеет принципиальное значение, так как выявляет особенности структуры фронта ударной волны в присутствии иных механизмов теплообмена: лучистого переноса энергии или электронной теплопроводности (в плазме). Если не учитывать вязкости, то первые интегралы уравнений гидродинамики одномерного

в промежуточной точке волны x теория дает $f = \nu(-x)f_\alpha + \nu(x)f_\beta$, причем

$$\nu(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{2x}{\delta} \right).$$

стационарного течения (7.3) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho u &= \rho_0 D, \\ p + \rho u^2 &= p_0 + \rho_0 D^2, \\ w + \frac{u^2}{2} + \frac{S}{\rho_0 D} &= w_0 + \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Из первых двух уравнений (7.10) следует, что в процессе ударного сжатия в отсутствие вязкости состояние частицы газа должно непрерывным образом меняться вдоль прямой на диаграмме давление — удельный объем:

$$p = p_0 + \rho_0 D^2(1 - \eta), \quad \eta = V/V_0. \quad (7.11)$$

Это важное свойство течения невязкого газа иллюстрируется рис. 7.4, на котором изображена ударная адиабата и прямая, связывающая начальное и конечное состояния газа. Попытаемся решить систему уравнений (7.10), для чего, как и раньше, исключим все переменные, кроме безразмерной скорости или относительного удельного объема η . Для общности, не будем ограничиваться случаем одноатомного газа и сохраним произвольную величину показателя адиабаты γ , который считаем постоянным.

Имея в виду уравнение состояния,

$$p = \frac{R}{\mu_0} \rho T = A \rho T, \quad A = \frac{R}{\mu_0} \quad (7.12)$$

(μ_0 — молекулярный вес), и термодинамическую связь $w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$, выразим из третьего уравнения (7.10) и уравнения (7.11) негидродинамический поток энергии и температуру через η :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \gamma M^2(1 - \eta) \left(\eta - \frac{1}{\gamma M^2} \right), \quad (7.13)$$

$$S = -\frac{\rho_0 D^3}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (1 - \eta)(\eta - \eta_1). \quad (7.14)$$

Здесь, как и раньше, величина

$$\eta_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2}$$

есть безразмерная скорость в конечном состоянии, а $M = D/c_0$ — число Маха.

Функция $T(\eta)$ проходит через максимум, находящийся в точке

$$\eta = \eta_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\gamma M^2}.$$

При рассмотрении ударных волн различной амплитуды могут представиться два случая. Если амплитуда достаточно мала, то $\eta_1 > \eta_{\max}$. В самом деле, при числе Маха, близком к единице ($M - 1 \ll 1$), $\eta_1 \approx 1 - \frac{4}{\gamma + 1}(M - 1)$, т.е. также близко к единице, тогда как $\eta_{\max} \approx (\gamma + 1)/2\gamma < 1$. В этом случае при монотонном сжатии

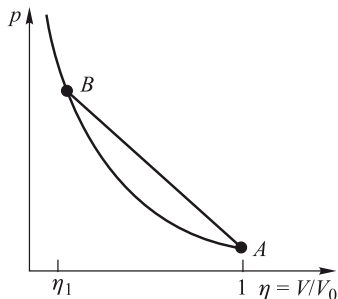


Рис. 7.4. Прямая ударного перехода для невязкого газа

газа от начального объема до конечного (от $\eta = 1$ до $\eta = \eta_1$) температура монотонно возрастает от начального значения T_0 до конечного T_1 , равного (при всех условиях)

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}(\mathbf{M}^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{\gamma\mathbf{M}^2} \right).$$

Графики $T(\eta)$ и $S(\eta)$ в этом случае имеют вид, изображенный на рис. 7.5.

Если исключить η из уравнений (7.13), (7.14) и подставить выражение (7.2) для потока S , получим дифференциальное уравнение типа $dT/dx = f(T)$, которое имеет непрерывное решение. Профили температуры и энтропии в такой волне схематически изображены на рис. 7.6; они сходны с профилями, найденными в предыдущем параграфе.

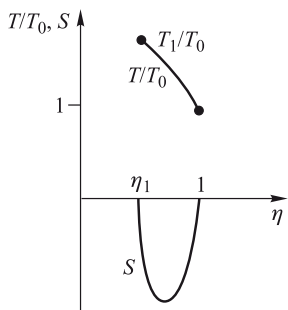


Рис. 7.5. T, η - и S, η -диаграммы для случая, когда возможен непрерывный ударный переход с одной теплопроводностью без учета вязкости

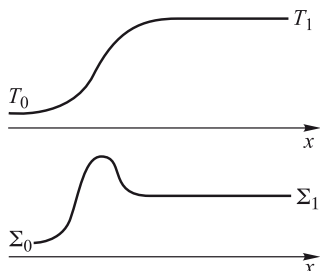


Рис. 7.6. Профили температуры и энтропии в ударной волне с одной теплопроводностью без учета вязкости в случае, когда возможен непрерывный переход

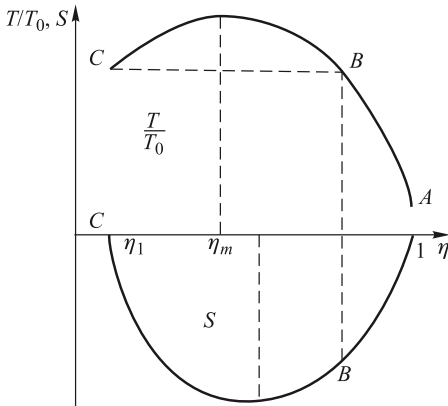
Как видно из энтропийного уравнения (7.1) с $\mu = 0$, энтропия максимальна в точке, где $\frac{d}{dx} \propto \frac{dT}{dx} = 0$, или, в случае $\propto = \text{const}$, в точке, где температура в волне $T(x)$ имеет перегиб: $d^2T/dx^2 = 0$.

Таким образом, возможно существование слабой ударной волны с непрерывным распределением гидродинамических величин во фронте и в отсутствие вязкости, когда имеется одна лишь теплопроводность.

Рассмотрим теперь достаточно сильную ударную волну. В этом случае объем, при котором температура максимальна, заключен между начальным и конечным значениями: $\eta_1 < \eta_{\max} < 1$. Действительно, при $\mathbf{M} \gg 1$ $\eta_{\max} \approx 1/2$, а $\eta_1 = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} < 1/4$, так как показатель адиабаты газа не может превышать 5/3.

Таким образом, при монотонном непрерывном сжатии газа от начального объема до конечного температура во фронте волны неминуемо должна была бы пройти через максимум. Графики функций $T(\eta)$ и $S(\eta)$ для этого случая изображены на рис. 7.7. Посмотрим, возможно ли существование непрерывного решения уравнений (7.13), (7.14) в этом случае. Из формулы (7.14) и рис. 7.7 видно, что поток тепла S , обусловленный теплопроводностью, во всем интервале изменения относительного объема от $\eta = 1$ до $\eta = \eta_1$ не меняет знака и направлен навстречу потоку газа: $S < 0$. В соответствии с определением потока, $S = -\propto dT/dx$, температура при изменении объема от начального до конечного может только возрастать: $dT/dx > 0$.

Следовательно, область за максимумом температуры, где $dT/d\eta > 0$, не реализуется. В этой области объем еще не достиг конечного значения и должен уменьшаться $d\eta/dx < 0$, температура же падает с уменьшением объема, т. е.



$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{dT}{d\eta} \right) \left(\frac{d\eta}{dx} \right) < 0,$$

и поток был бы направлен в другую сторону ($S > 0$), что противоречит формуле (7.14).

Таким образом, в случае сильной волны при учете лишь теплопроводности, непрерывное распределение температуры и плотности по координате невозможно. Прийти из начального состояния в конечное, минуя область падения температуры при увеличении сжатия, можно только, включив в решение разрыв: состояние меняется непрерывным образом от начального (точка A на рис. 7.7) до точки B, а затем скачком попадает в конечную точку C. Возникновение скачка плотности и свидетельствует о том, что в нем должны

Рис. 7.7. T, η - и S, η -диаграммы для случая изотермического скачка при учете одной теплопроводности, но без учета вязкости

проявляться силы вязкости, т. е. сильный разрыв может быть размазан только благодаря вязкости, но не теплопроводности. Температура в скачке остается постоянной, меняется лишь ее производная, т. е. поток. Профили температуры и плотности в такой волне, называемой «изотермическим» скачком, изображены на рис. 7.8 ¹⁾.

Легко найти наибольшую амплитуду, при которой еще возможно непрерывное решение в отсутствие вязкости. Она соответствует случаю, когда максимум функции $T(\eta)$ совпадает с конечным состоянием, т. е. $\eta_{\max} = \eta_1$.

Число Маха и отношение давлений по обе стороны фронта при этом равны

$$M' = \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma(3 - \gamma)}}, \quad \frac{p'_1}{p_0} = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma};$$

например, при $\gamma = 5/3$, $M' = 1,35$, $p'_1/p_0 = 2$; при $\gamma = 7/5$, $M' = 1,2$, $p'_1/p_0 = 1,5$.

Если рассмотреть другой крайний случай, когда есть одна лишь вязкость и нет теплопроводности, то получим непрерывное решение для гидродинамических величин в скачке уплотнения, в принципе не отличающееся от решения предыдущего параграфа, с тем лишь исключением, что энтропия в этом случае возрастает также монотонно (см. третье уравнение (7.1) без члена dS/dx). Ход энтропии в обоих крайних случаях можно уяснить путем рассмотрения диаграммы p, V или p, η (рис. 7.9). В отсутствие вязкости состояние в волне меняется вдоль прямой AB и энтропия, как видно из сопоставления ударной адиабаты и адиабат Пуассона, вначале растет, достигает максимума в точке касания прямой с адиабатой Пуассона

¹⁾ Заметим, что «изотермичность» скачка, т. е. непрерывность температуры в скачке уплотнения, обусловлена тем, что тепловой поток предполагается пропорциональным градиенту температуры. В разд. 3 этой главы при рассмотрении лучистого теплообмена во фронте ударной волны мы увидим, что если не делать такого предположения, то значения температуры также будут иметь разрыв.

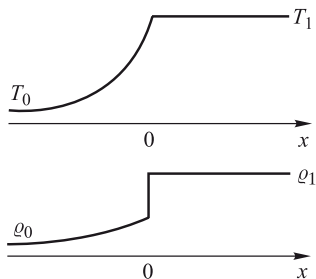


Рис. 7.8. Профили температуры и плотности в ударной волне с изотермическим скачком

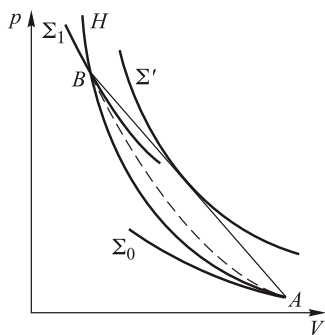


Рис. 7.9. p, V -диаграмма для ударной волны с учетом вязкости. H — ударная адиабата; $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma'$ — адиабаты Пуассона; вдоль пунктирной кривой происходит переход из начального состояния в конечное

Σ' , а затем уменьшается. В отсутствие теплопроводности состояние меняется вдоль пунктирной кривой, проходящей ниже прямой AB (уравнение этой кривой есть $p = p_0 + \rho_0 D^2(1 - \eta) + \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx}$, причем $\frac{du}{dx} < 0$), и она нигде не касается адиабат Пуассона. Положение здесь вполне аналогично тому, которое имеет место в волнах слабой интенсивности, рассмотренных в § 23 гл. I.

§ 4. Диффузия в бинарной смеси газов. Если в смеси газов имеются градиенты термодинамических величин, то возникает диффузионный поток компонентов смеси, благодаря чему происходит перераспределение их концентраций. Вообще говоря, диффузия стремится к выравниванию концентрации компонентов в пространстве. Однако при существовании градиентов давления, температуры или в поле внешних сил (силы тяжести, центробежной силы во вращающейся смеси) и вообще при наличии ускорений, происходит разделение первоначально равномерной смеси.

В частности, такое положение возникает в ударной волне, распространяющейся по смеси газов. Перед и за фронтом волны концентрации компонентов одинаковы и постоянны в пространстве. В области фронта, где имеются градиенты, концентрации изменяются. Подобно вязкости и теплопроводности, диффузия представляет собой необратимый молекулярный перенос массы определенного компонента (вязкость переносит импульс, а теплопроводность — внутреннюю энергию) и является одним из источников диссипации механической энергии.

Диффузионный поток определяется следующим образом. Пусть в бинарной смеси газов массовая концентрация одного из компонентов, скажем, легкого, с массой молекул m_1 , равна α . Концентрация второго, тяжелого, компонента с массой молекул m_2 ($m_2 > m_1$) есть $1 - \alpha$ ¹⁾. Благодаря диффузии одного газа относительно другого, газы обладают различными макроскопическими скоростями. Обозначим их через $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Если ρ — плотность смеси, то полный поток первого компонента есть $\rho\alpha\mathbf{u}_1$,

¹⁾ Массовая концентрация α равна массе первого, легкого компонента в одном грамме смеси. Если числа молекул в одном грамме смеси есть N_1 и N_2 ($N_1 + N_2 = N$), то $\alpha = N_1 m_1$, $1 - \alpha = N_2 m_2$. Молярные концентрации равны

$$\frac{N_1}{N} = \frac{\alpha}{Nm_1}; \quad \frac{N_2}{N} = \frac{1 - \alpha}{Nm_2}.$$

а поток второго $\varrho(1 - \alpha)\mathbf{u}_2$. Макроскопическая или гидродинамическая скорость смеси $\mathbf{u}$ определяется так, чтобы полный поток массы газа был равен $\varrho\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ — импульс единицы массы). Таким образом, $\varrho\mathbf{u} = \varrho\alpha\mathbf{u}_1 + \varrho(1 - \alpha)\mathbf{u}_2$ или $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{u}_2$. В рамках гидродинамики идеальной жидкости скорости обоих компонентов смеси совпадают и равны $\mathbf{u}$. Потоки компонентов равны $\varrho\alpha\mathbf{u}$ и $\varrho(1 - \alpha)\mathbf{u}$.

В следующем приближении в гидродинамической теории появляются вязкость, теплопроводность и диффузия (в смеси). Диффузионным потоком $\mathbf{i}$ называется разность между полным и гидродинамическим потоками одного, скажем, первого компонента, $\mathbf{i} = \varrho\alpha\mathbf{u}_1 - \varrho\alpha\mathbf{u} = \varrho\alpha(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})$.

Полный поток первого компонента равен сумме гидродинамического и диффузионного, $\varrho\alpha\mathbf{u} + \mathbf{i}$. Полный поток второго компонента, очевидно, равен $\varrho(1 - \alpha)\mathbf{u}_2 = \varrho(1 - \alpha)\mathbf{u} + \varrho(1 - \alpha)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}) = \varrho(1 - \alpha)\mathbf{u} - \mathbf{i}$.

Диффузионные потоки обоих компонентов в бинарной смеси равны по величине и противоположны по направлению.

Как уже отмечалось выше, диффузия возникает, когда в газе имеются градиенты концентрации, давления и температуры ¹⁾.

В одномерном случае градиенты величин равны производным по x , а вектор $\mathbf{i}$ имеет одну, x -ю компоненту, которую будем обозначать просто через i . Диффузионный поток равен (см. [1])

$$i = -\varrho D \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{k_p}{p} \frac{dp}{dx} + \frac{k_T}{T} \frac{dT}{dx} \right). \quad (7.15)$$

Здесь D — коэффициент диффузии; $k_p D$ — коэффициент бародиффузии; $k_T D$ — коэффициент термодиффузии. Безразмерная величина k_p определяется чисто термодинамическими свойствами смеси и равна [1] ²⁾

$$k_p = (m_2 - m_1) \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{1 - \alpha}{m_2} + \frac{\alpha}{m_1} \right)^3. \quad (7.16)$$

При $m_2 > m_1$ $k_p > 0$ и бародиффузионный поток легкого компонента направлен в сторону понижения давления. Поток, связанный с градиентом концентрации также направлен в сторону понижения концентрации. Термодиффузионный поток легкого компонента для большинства смесей направлен в сторону повышения температуры (при $m_2 > m_1$ $k_T < 0$).

В отличие от величины k_p , величина k_T , называемая термодиффузионным отношением, зависит не только от концентраций компонентов (при $\alpha = 0$ или 1 , $k_T = 0$) и масс молекул, но и от закона взаимодействия молекул. Величина k_p определяется чисто термодинамическими свойствами газа, так как в поле внешних сил термодинамическое равновесие возможно и при наличии градиента давления. Если существует градиент температуры, то состояние уже является неравновесным.

¹⁾ Состояние бинарной смеси характеризуется тремя термодинамическими величинами: концентрацией и какими-либо двумя из трех величин: температурой, давлением и плотностью. При изучении диффузии в качестве независимых переменных удобно выбрать давление и температуру.

²⁾ В отсутствие вязкого переноса импульса (см. ниже).

³⁾ Величину k_p проще всего вывести, рассматривая равновесие бинарной смеси в поле силы тяжести при постоянной температуре. В равновесном состоянии числа молекул в 1 см^3 n_1 и n_2 (по формуле Больцмана) пропорциональны: $n_1 \sim \exp(-m_1 g x / kT)$, $n_2 \sim \exp(-m_2 g x / kT)$, где g — ускорение силы тяжести, x — высота. Поскольку диффузионный поток в равновесии равен нулю, $d\alpha/dx + (k_p/p)(dp/dx) = 0$. Воспользовавшись связью между концентрацией α и числами частиц n_1, n_2 и замечая, что $p = (n_1 + n_2)kT$, найдем отсюда приведенную формулу для k_p .

Если между молекулами действуют только силы отталкивания, меняющиеся по закону $1/r^n$, то при $n > 5$, что обычно и имеет место, $k_T < 0$: легкий газ стремится в сторону повышения температуры. При $n < 5$, что встречается редко, легкий газ стремится в сторону понижения температуры (к случаю $n < 5$ относится кулоновский закон взаимодействия заряженных частиц, $n = 2$). При $n = 5$ термодиффузии нет: $k_T = 0$. Обычно при сравнимых относительных градиентах $\nabla p/p$, $\nabla T/T$ роль термодиффузии невелика по сравнению с ролью бародиффузии. Подробнее о термодиффузии см. [19].

С диффузионным потоком связан дополнительный необратимый поток энергии $\mathbf{q}$, который пропорционален диффузионному потоку $\mathbf{i}$ (см. [1]).

Работа В. Жданова, Ю. Кагана и А. Сазыкина [19а], вносит существенные коррективы в изложенные выше классические представления о диффузии.

В этой работе выражение для диффузионного потока выводится из кинетического уравнения при помощи так называемого приближения «13 моментов» Грэда. Это приближение обладает рядом преимуществ по сравнению с методом Чепмена–Энскога, на основе которого получается выражение (7.15), всякий раз, когда приходится принимать во внимание высшие приближения в разложении функции распределения. Оказывается, что выражение (7.15) для диффузионного потока справедливо только в отсутствие вязкого переноса импульса в газе. В условиях, когда существует вязкий перенос импульса (т.е. градиент скорости), выражение (7.15) следует дополнить членами, пропорциональными силам вязкости. Несмотря на то, что эти силы определяются производными второго порядка от макроскопических величин (от скорости), они могут иметь тот же порядок малости, что и члены, пропорциональные первым производным, скажем, член с градиентом давления. Например, в случае чисто вязкого установившегося течения, когда ускорений нет, градиент давления просто уравнивается силами вязкости. При неустановившемся течении учет сил вязкости в выражении для диффузионного потока фактически вносит в это выражение члены, пропорциональные ускорениям газа.

В случае чисто вязкого течения замена силы вязкости уравнивающим ее градиентом давления приводит к изменению постоянной бародиффузии k_p по сравнению с чисто термодинамическим значением (7.16). Постоянная бародиффузии в вязком потоке уже не является величиной термодинамической; она зависит от характера взаимодействия молекул между собою. Постоянная бародиффузии даже может стать при некоторых условиях отрицательной (в случае, если молекулярные веса компонентов отличаются друг от друга очень мало, а эффективные сечения молекул различаются сильно). При учете вязкого переноса импульса меняется и термодиффузионное отношение k_T .

§ 5. Диффузия в ударной волне, распространяющейся по бинарной смеси.

Посмотрим, что происходит, когда по бинарной смеси газов распространяется ударная волна. Во фронте ударной волны имеются большие градиенты термодинамических величин и, следовательно, возникают благоприятные условия для диффузии. Физически ясно, что во фронте ударной волны происходит концентрирование легкого компонента. В самом деле, в нагретом газе за фронтом ударной волны молекулы легкого компонента обладают большей тепловой скоростью, чем молекулы тяжелого ($\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$).

Поэтому молекулы легкого газа «вырываются вперед» и несколько опережают молекулы тяжелого (в лабораторной системе координат, где исходная смесь покоится).

Пусть в тяжелом газе имеется небольшая примесь легкого газа. Тогда распределение плотностей основного, тяжелого, и легкого газов (ρ_2 и ρ_1) в сильной ударной

волне имеет вид, показанный на рис. 7.10. Там же изображен профиль концентрации легкого компонента: $\alpha = \varrho_1/(\varrho_2 + \varrho_1)$.

Ширина зоны, в которой имеется повышенная концентрация легкого компонента, по порядку величины равна $\Delta x \sim D/u_0$, где D — коэффициент диффузии, а через u_0 обозначена здесь скорость ударной волны¹⁾. Коэффициент диффузии D порядка $l\bar{v}_1$, где $\bar{v}_1$ — тепловая скорость нагретого в ударной волне легкого газа, а l — длина пробега молекул. Скорость фронта u_0 порядка тепловой скорости нагретого тяжелого газа $u_0 \sim \bar{v}_2$. Но $\bar{v}_1/\bar{v}_2 \approx \sqrt{m_2/m_1}$, так что $\Delta x \approx \sqrt{m_2/m_1} l$. Ширина вязкого скачка уплотнения порядка l . Следовательно, ширина зоны концентрирования легкой компоненты в $\sqrt{m_2/m_1}$ раз больше ширины скачка уплотнения. Наиболее резко разделяются компоненты при сильном различии масс частиц ($m_2/m_1 \gg 1$).

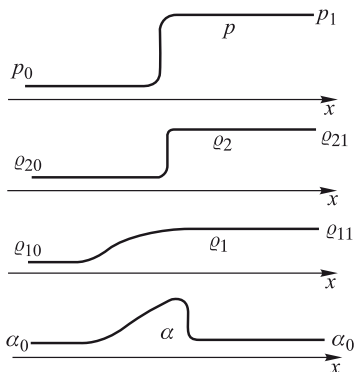


Рис. 7.10. Профили давления, плотностей тяжелого (ϱ_2) и легкого (ϱ_1) компонентов и концентрации легкого компонента (α) в ударной волне, распространяющейся по бинарной смеси газов

Этот эффект должен бы быть особенно ярко выраженным в случае плазмы ввиду огромного различия масс электронов и ионов. Однако в плазме существенную роль играет электростатическое взаимодействие электронов и ионов, которое чрезвычайно сильно ограничивает диффузионный процесс (см. об этом в § 13).

Наряду с вязкостью и теплопроводностью диффузия влияет на структуру фронта ударной волны.

Чтобы описать эту структуру, следует составить уравнения плоского стационарного режима, подобно тому как это было сделано в § 2, при рассмотрении вязкого скачка уплотнения. Уравнения сохранения массы и импульса, первое и второе из уравнений (7.3), остаются, очевидно, без изменений (под μ теперь следует понимать коэффициент вязкости смеси). В уравнение сохранения энергии (третье из уравнений (7.3)) нужно добавить молекулярный поток тепла, связанный с диффузией, и вместо молекулярного потока, обусловленного теплопроводностью S , писать сумму $S + q$. В систему уравнений теперь войдет диффузионный поток i , которому пропорционален поток тепла q , т.е. войдет новая неизвестная функция, концентрация α . Поэтому к системе должно быть добавлено еще одно уравнение. Это уравнение непрерывности (сохранения массы) одного из компонентов (при наличии уравнения непрерывности для всей массы газа сохранение второго компонента обеспечивается автоматически).

Условие постоянства потока массы легкого компонента в плоском стационарном случае имеет вид²⁾

$$\varrho \alpha u + i = \text{const} = \varrho_0 \alpha_0 u_0$$

¹⁾ Это следует из условия стационарности полного потока легкого компонента в системе координат, связанной с фронтом. Приближенно $\varrho_1 u_0 = D d\varrho_1/dx$, откуда $\varrho_1 = \varrho_{11} \exp(-u_0|x|/D)$. Здесь использовано приближенное граничное условие согласно которому можно считать, что в точке $x = 0$, где имеется вязкий скачок уплотнения, плотность легкого компонента равна своему конечному значению ϱ_{11} .

²⁾ Общее уравнение непрерывности для одного из компонентов имеет вид [1]

$$\frac{d\varrho\alpha}{dt} + \text{div}(\varrho\alpha\mathbf{u} + \mathbf{i}) = 0.$$

(перед волной диффузионный поток исчезает). Отсюда, кстати сказать, видно, что за волной, где диффузионный поток также исчезает, концентрация равна исходной $\alpha_1 = \alpha_0$ (так как $\rho_1 u_1 = \rho_0 u_0$).

Систему уравнений одномерного стационарного течения в бинарной смеси в принципе можно решать так же, как и для однокомпонентного газа (см. § 2). Решение даст распределение всех величин во фронте волны. Такая задача рассматривалась С. П. Дьяковым [20] для случая ударной волны слабой интенсивности, когда можно произвести разложение всех величин (см. § 23 гл. I)¹⁾.

Как было показано в § 18, 23 гл. I, если рассматривать изменение давления в слабой ударной волне $\Delta p = p_1 - p_0$ как величину первого порядка малости, то изменения объема и температуры также представляют собой малые первого порядка. Полное изменение энтропии при переходе газа из начального состояния в конечное $\Sigma_1 - \Sigma_0$ есть величина третьего порядка малости, а изменение энтропии внутри фронта волны, скажем, $\Sigma_{\max} - \Sigma_0$ — величина второго порядка малости. Ширина фронта ударной волны по порядку величины равна $\Delta x \approx l p_0 / \Delta p$, где l — длина пробега молекул. Из уравнения сохранения потока одного компонента, которое можно переписать в форме

$$\alpha - \alpha_0 = - \frac{i}{\rho_0 u_0},$$

и выражения для диффузионного потока видно, что изменение концентрации в волне $\Delta \alpha$ и поток i есть величины второго порядка малости (действительно,

$$\alpha - \alpha_0 \sim i \sim \frac{dp}{dx} \sim \frac{\Delta p}{\Delta x} \sim (\Delta p)^2.$$

Следовательно, членом, содержащим градиент концентрации в выражении для диффузионного потока, можно пренебречь ($d\alpha/dx \sim \Delta \alpha / \Delta x \sim (\Delta p)^3$, тогда $dp/dx \sim (\Delta p)^2$).

В работе С. П. Дьякова [20] получено аналитическое решение для распределения концентрации во фронте ударной волны слабой интенсивности. Мы не будем здесь приводить его (распределение имеет вид, показанный на рис. 7.11), а оценим изменение концентрации по порядку величины. Если пренебречь термодиффузией, которая обычно играет меньшую роль, чем бародиффузия (так как величина k_T обычно меньше, чем k_p , то можно записать

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0 \sim \frac{|i|}{\rho_0 u_0} \sim \frac{D}{u_0} \frac{k_p}{p} \frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Коэффициент диффузии $D \sim l \bar{v}$, причем тепловая скорость молекул $\bar{v}$ порядка скорости звука, т. е. порядка u_0 . Замечая, что $\Delta x \sim (p / \Delta p) l$, найдем $\Delta \alpha \sim k_p (\Delta p / p)^2$.

Избыточное количество легкого компонента, собранного ударной волной (на 1 см² поверхности фронта), порядка

$$M = \rho \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \alpha_0) dx \sim \rho \Delta \alpha \cdot \Delta x \sim \rho k_p \frac{\Delta p}{p} l.$$

В достаточно сильной ударной волне, где $\Delta p \sim p$, $\Delta \alpha \sim k_p$, $M \sim \rho k_p l$. Если разность масс молекул сравнительно велика ($k_p \sim (m_2 - m_1)$), то изменение концентрации в сильной волне порядка самой концентрации и избыточная масса компонента порядка самой массы компонента в слое толщиной в длину пробега молекул.

¹⁾ См. также работу Шермана [21].

Выше отмечалось, что диффузия, подобно вязкости и теплопроводности, приводит к диссипации механической энергии и повышению энтропии газа (см. об этом в [1])¹⁾. Мы знаем, что если исключить из рассмотрения диссипативные процессы, то в рамках гидродинамики идеальной жидкости ударная волна представляет собой математический разрыв. Разрыв размывается и превращается в слой конечной толщины с непрерывным распределением величин только при учете диссипативных процессов. При этом одна теплопроводность может обеспечить непрерывный переход в ударной волне только в том случае, если амплитуда волны не слишком велика (см. § 3).

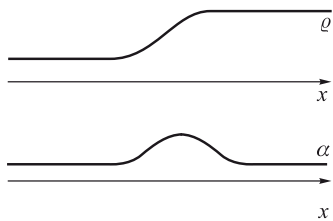


Рис. 7.11. Профили плотности и концентрации в ударной волне слабой интенсивности, распространяющейся по бинарной смеси газов

Интересно посмотреть, может ли диссипация диффузионного происхождения без учета вязкости и теплопроводности обеспечить непрерывный переход в ударной волне, распространяющейся по бинарной смеси. Этот вопрос исследовался Каулингом [22]

(Каулинг пренебрегал термодиффузией). Оказывается, что, как и в случае действия одной лишь теплопроводности, непрерывное решение возможно только при амплитудах ударной волны, не превышающих определенного предела, который зависит от разности масс молекул и концентрации компонентов. В предельных случаях, когда концентрация одного из компонентов стремится к нулю ($\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 1$), т. е. когда газ превращается в однокомпонентный, или же когда относительная разность масс стремится к нулю, верхнее значение возможной амплитуды ударной волны также стремится к нулю. При большом различии масс молекул и сравнимых числах молекул обоих сортов диффузия обеспечивает непрерывность перехода вплоть до довольно больших амплитуд ударных волн, будучи в этом отношении более эффективной, чем теплопроводность. Так, например, в смеси водорода и кислорода ($m_1/m_2 = 1/8$) при молярной концентрации кислорода (N_2/N), равной 10 %, возможно непрерывное сжатие смеси в ударной волне до 4,78 раза (предельное сжатие при значении $\gamma = 7/5$, которое было принято в расчете, равно 6). Одна теплопроводность может обеспечить непрерывное сжатие не более, чем в $\frac{3\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{4}{3}$ раза.

2. Релаксационный слой

§ 6. Ударные волны в газе с замедленным возбуждением некоторых степеней свободы. Для возбуждения некоторых степеней свободы газа²⁾ часто требуется много соударений молекул, причем необходимые числа соударений, т. е. времена релаксации, для разных степеней свободы могут сильно различаться.

Время установления полного термодинамического равновесия во фронте ударной волны, а следовательно, и ширина фронта определяются наиболее медленным из ре-

¹⁾ Подобно теплопроводности диффузия может приводить и к локальному уменьшению энтропии (см. § 2). Благодаря диффузии повышается энтропия всей системы в целом, либо же энтропия частицы за все время процесса, скажем, при переходе из начального состояния в конечное в ударной волне. В отличие от теплопроводности и диффузии, вязкость приводит к локальному повышению энтропии, т. е. за счет вязкости энтропия частицы может только возрастать.

²⁾ Напоминаем, что для краткости терминологии к «степеням свободы» мы относим также и потенциальную энергию диссоциации, химических превращений, ионизации.

лаксационных процессов. При этом, конечно, следует принимать во внимание только те процессы, которые приводят к возбуждению степеней свободы, дающих заметный вклад в теплоемкость при конечных параметрах газа. Если $\tau_{\max}$ — наибольшее время релаксации, а u_1 — скорость движения газа за фронтом относительно самого фронта, то ширина фронта порядка $\Delta x \sim u_1 \tau_{\max} = D(\varrho_0/\varrho_1) \tau_{\max}$ ¹⁾.

Быстрее всего в газе «возбуждаются» поступательные степени свободы частиц. Поэтому механическая энергия потока газа, набегающего на разрыв, прежде всего превращается в энергию поступательного теплового движения атомов и молекул газа. Как было показано в § 2, ширина вязкого скачка уплотнения в сильных ударных волнах порядка одного или нескольких газокинетических пробегов.

При комнатных температурах вращения в молекулах возбуждаются также быстро, в результате небольшого числа соударений; колебания же при этих температурах обычно не играют роли. Следовательно, ширина фронта слабых ударных волн, распространяющихся по молекулярному газу, нагретому до комнатной температуры, порядка нескольких газокинетических пробегов²⁾.

При температурах порядка 1000 К, когда величина kT сравнима с энергией колебательных квантов молекул $h\nu_{\text{кол}}$, возбуждение колебаний требует многих тысяч, а иногда десятков и сотен тысяч соударений. Ширина фронта ударной волны соответствующей амплитуды определяется временем релаксации для колебательных степеней свободы.

Скорости релаксационных процессов всегда быстро возрастают с повышением температуры; так, например, при температурах порядка 8000 К, когда $kT \gg h\nu_{\text{кол}}$, для возбуждения колебаний достаточно уже нескольких соударений. Те процессы, которые при какой-то амплитуде волны были медленными и определяли ширину фронта, в волне большей интенсивности становятся быстрыми и им на смену приходят другие.

Например, при температуре порядка 4000–8000 К в двухатомном газе достижение термодинамического равновесия в основном затягивается из-за медленной диссоциации молекул (колебания возбуждаются сравнительно быстро, а ионизация еще незначительна).

При температуре порядка 20 000 К для диссоциации молекул достаточно небольшого числа соударений, и ширина определяется скоростью первой ионизации (вторая ионизация не существенна). При $T \sim 50\,000$ К на смену первой ионизации приходит вторая и т. д.

Конечно, граница температурной области, в которой тот или иной релаксационный процесс является медленным, не четкая. Точно так же при данной температуре не всегда только один из процессов определяет толщину фронта. Но в каком-то приближении всегда можно для ударной волны данной амплитуды подразделить процессы возбуждения различных степеней свободы, вносящих заметный вклад в теплоемкость, на быстрые и медленные. При этом под быстрыми следует понимать такие процессы, для которых времена релаксации $\tau_{\text{рел}}$ сравнимы с газокинетическими и для которых характерные масштабы $\Delta x = u_1 \tau_{\text{рел}}$ порядка немногих газокинетических пробегов, т. е. сравнимы с толщиной вязкого скачка уплотнения. К медленным же следует отнести процессы, требующие очень, большого числа газокинетических столкновений.

¹⁾ В дальнейшем мы снова будем обозначать скорость фронта ударной волны через D .

²⁾ Исключение составляют молекулярные водород и дейтерий, в которых для возбуждения вращений требуется порядка сотни газокинетических соударений (см. § 2 гл. VI).

Вопрос о структуре фронта ударной волны в газе с замедленным возбуждением части теплоемкости был впервые проанализирован одним из авторов в 1946 г. [23, 24] на примерах обратимой химической реакции и возбуждения колебаний в молекулах.

Рассмотрим качественно процесс ударного сжатия в газе с замедленным возбуждением некоторых степеней свободы. При этом не будем пока конкретизировать виды степеней свободы и лишь разделим их на две категории: те, которые возбуждаются быстро, и те, которые требуют многих газокинетических столкновений.

Диссипативные процессы — вязкость и теплопроводность — играют роль только в области больших градиентов гидродинамических величин, т. е. в зоне, где возбуждаются быстро релаксирующие степени свободы. Эта зона в какой-то мере совпадает с областью вязкого скачка уплотнения. В зоне медленной релаксации, растянутой на расстояния многих газокинетических пробегов, градиенты малы и диссипацией можно пренебречь.

Не будем интересоваться структурой узкой зоны быстрых процессов. Она в принципе не отличается от структуры вязкого скачка уплотнения, рассмотренного в § 2. Увеличение теплоемкости за счет быстрого возбуждения непоступательных степеней свободы вносит лишь некоторые количественные изменения в структуру вязкого скачка, не меняя основных качественных закономерностей. Поскольку толщина этой зоны невелика, порядка нескольких пробегов, можно приближенно рассматривать ее как бесконечно тонкую и величины по обе стороны ее связать уравнениями сохранения, вполне аналогичными уравнениям (7.4). В дальнейшем для определенности терминологии мы будем называть зону быстрой релаксации «скачком уплотнения», в отличие от понятия «фронта ударной волны», который включает в себя всю переходную область от начального до конечного термодинамически равновесного состояния. Отмечая гидродинамические величины непосредственно за скачком уплотнения штрихом, запишем уравнения для определения этих величин:

$$\varrho' u' = \varrho_0 D, \quad p' + \varrho' u'^2 = p_0 + \varrho_0 D^2, \quad w' + \frac{u'^2}{2} = w_0 + \frac{D^2}{2}.$$

Энтальпия $w' = w'(p', \varrho') = w'(T', \varrho')$ включает в себя только быстро возбуждаемые степени свободы газа.

Растянутая зона медленной релаксации описывается интегралами уравнений одномерного стационарного течения типа (7.3), в которых можно пренебречь диссипативными членами.

Рассматривая $\varrho, p, \varepsilon, w, u$ как функции текущей координаты x , запишем интегралы уравнений в этой зоне:

$$\begin{aligned} \varrho u &= \varrho_0 D = \varrho' u', \\ p + \varrho u^2 &= p_0 + \varrho_0 D^2 = p' + \varrho' u'^2, \\ w + \frac{u^2}{2} &= w_0 + \frac{D^2}{2} = w' + \frac{u'^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Начало координат $x = 0$ удобно поместить в точку, соответствующую скачку уплотнения, который считается «бесконечно тонким». Точно так же, если следить за изменением во времени состояния конкретной частицы газа, проходящей через фронт ударной волны, то за начальный момент $t = 0$ удобно принять момент резкого сжатия в скачке уплотнения. Начальные или граничные условия для газодинамических параметров $\varrho(x)$, $u(x)$ и т. д. имеют вид $\varrho(0) = \varrho'$, $u(0) = u'$ и т. д.

При $x \rightarrow +\infty$, как и раньше, $\varrho(\infty) = \varrho_1$, $u(\infty) = u_1$ и т. д.

Изобразим на диаграмме p, V две адиабаты Гюгонио, выходящих из точки А начального состояния газа (рис. 7.12). Одна из них (II) соответствует достижению полного термодинамического равновесия, т. е. соответствует конечным состояниям

газа за фронтом ударной волны. Другая (I) соответствует возбуждению только быстро релаксирующих степеней свободы и «замороженности» медленно релаксирующих (при расчете адиабаты I считается, что удельная внутренняя энергия в медленно возбуждаемых степенях свободы такая же, как и в начальном состоянии, несмотря на то, что плотность и давление газа меняются).

Адиабата I проходит круче, чем II, как показано на рис. 7.12. Действительно, при одинаковой плотности температура и давление газа при условии замороженности некоторых степеней свободы выше, так как, грубо говоря, одинаковая энергия сжатия распределяется по меньшему числу степеней свободы ¹⁾.

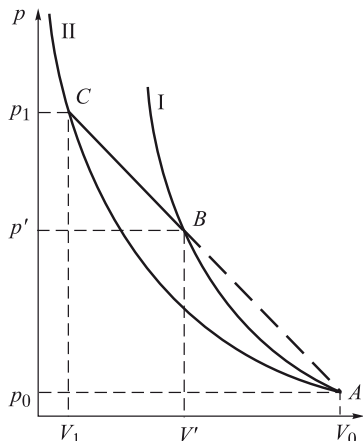


Рис. 7.12. p, V -диаграмма для ударной волны, распространяющейся по газу с замедленным возбуждением части степеней свободы

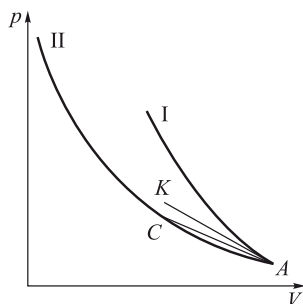


Рис. 7.13. p, V -диаграмма для слабой ударной волны, распространяющейся по газу с замедленным возбуждением части степеней свободы. AK — касательная к ударной адиабате I в точке A

Проведем прямую AC, связывающую начальное и конечное состояния газа. Как известно, наклон этой прямой определяется скоростью распространения ударной волны по невозмущенному газу D .

Из первых двух уравнений (7.17) следует, что состояние частицы газа в релаксационной зоне меняется вдоль этой прямой:

$$p = p_0 + \varrho_0 D^2 \left(1 - \frac{V}{V_0} \right) = p' + \varrho' u'^2 \left(1 - \frac{V}{V'} \right). \quad (7.18)$$

Таким образом, точка, описывающая последовательные состояния частицы газа приданной скорости фронта, скачком переходит из начального состояния $A(p_0, V_0)$ в промежуточное состояние $B(p', V')$ за скачком уплотнения, а затем движется до конечного состояния $C(p_1, V_1)$ вдоль прямой (7.18). При этом давление и сжатие возрастают по мере приближения к конечному состоянию, а скорость газа относительно фронта уменьшается.

¹⁾ При этом, как показывают расчеты, увеличение числа частиц при диссоциации или ионизации не в состоянии компенсировать уменьшение температуры за счет затрат энергии на диссоциацию и ионизацию при неизменном объеме, так что давление в случае II все равно меньше, чем в случае I.

В случае, если волна настолько слаба, что скорость ее меньше скорости звука, соответствующей заморозенности части степеней свободы, прямая AC проходит ниже касательной к адиабате I в точке A (рис. 7.13). При этом состояние непрерывным образом меняется вдоль прямой AC от точки A до точки C , и в газе с самого начала происходит постепенное возбуждение замедленной части теплоемкости.

Из формулы (7.18) видно, что давление в релаксационной зоне в сильной ударной волне возрастает немного. В самом деле, даже если в зоне быстрого сжатия возбуждаются только поступательные степени свободы, $V'/V_0 = 1/4$, то давление

в релаксационном слое может возрасти не более, чем на 25 %, так как величина $1 - V/V_0$, которой пропорционально изменение давления $p - p_0$, заключена в интервале $1 > 1 - V_1/V_0 > 1 - V'/V_0 \geq 3/4$. Если же быстро возбуждаются и другие степени свободы, $V'/V_0 < 1/4$, то изменение давления в релаксационной зоне еще меньше. Совсем незначительно увеличение энтальпии в релаксационной области.

Из третьего и первого уравнений (7.17) следует, что

$$w = w_0 + \frac{D^2}{2} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2} \right). \quad (7.19)$$

Величина $(V/V_0)^2 < 1/16$, так что увеличение энтальпии в релаксационной зоне в любом случае не превышает 5–6 %.

Поскольку, в релаксационной зоне удельная энтальпия почти неизменна, а теплоемкость по мере возбуждения ранее заморозенных степеней свободы возрастает, температура в ней уменьшается. Уменьшение температуры может быть довольно значительным, если запаздывающая часть теплоемкости велика и вносит большой вклад в конечную теплоемкость газа. Конечная температура T_1 может быть в два-три раза меньше температуры T' за скачком уплотнения. Точно так же значительно может возрасти и плотность газа (грубо говоря, $p \sim \varrho T$; p меняется мало, а T сильно). Профили p, ϱ, u, T во фронте ударной

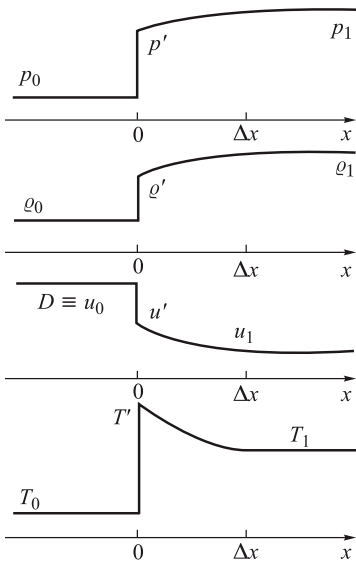


Рис. 7.14. Профили давления, плотности, скорости и температуры во фронте ударной волны, распространяющейся по газу с замедленным возбуждением части степеней свободы; $\Delta x \approx u t_{\text{релак}}$ — ширина фронта

волны, распространяющейся по газу с замедленным возбуждением части теплоемкости, изображены схематически на рис. 7.14.

Для конкретных расчетов профилей следует воспользоваться уравнениями кинетики для соответствующих релаксационных процессов, что будет сделано для нескольких случаев в следующих параграфах.

Заметим, что если ударная волна создается поршнем, движущимся с постоянной скоростью u , то скорость движения газа за скачком уплотнения относительно невозмущенного газа $D - u'$ не совпадает со скоростью поршня (она меньше последней); со скоростью поршня совпадает только относительная скорость газа в конечном состоянии за фронтом волны: $D - u_1$.

§ 7. Возбуждение молекулярных колебаний. При температурах за фронтом ударной волны порядка 1000–3000 К (в зависимости от типа молекул) диссоциация молекул очень мала, и вкладом химической энергии во внутреннюю энергию газа

можно пренебречь. Уширение фронта при этом происходит в основном за счет замедленного возбуждения молекулярных колебаний. Вращения молекул при таких температурах возбуждаются очень быстро, в результате нескольких столкновений, так что вращательная энергия в каждой точке фронта волны равновесна и соответствует «поступательной» температуре газа в этой точке.

Будем рассматривать двухатомный газ из молекул одного сорта, в начальном состоянии нагретый до нормальной температуры порядка $T_0 \approx 300$ К. При такой температуре энергия колебаний чрезвычайно мала и показатель адиабаты равен $7/5$. Параметры газа за скачком уплотнения можно вычислить с помощью обычных формул для идеального газа с постоянной теплоемкостью, соответствующей участию только поступательных и вращательных степеней свободы молекул и показателем адиабаты $\gamma' = 7/5$. Выпишем эти формулы, характеризуя амплитуду ударной волны числом Маха ($\mathbf{M} = D/c_0$; $c_0^2 = (5/7)p_0V_0$), как это принято при проведении лабораторных исследований:

$$\frac{\varrho'}{\varrho_0} = \frac{6}{1 + 5\mathbf{M}^{-2}}, \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{7}{6}\mathbf{M}^2 - \frac{1}{6}, \quad \frac{T'}{T_0} = \frac{1}{36}(7 - \mathbf{M}^{-2})(\mathbf{M}^2 + 5).$$

Параметры конечного состояния за фронтом ударной волны можно вычислить с помощью общих соотношений на фронте, задаваясь функциями $w_1(T_1)$ или $\varepsilon_1(T_1)$ с учетом колебательной энергии.

В общем случае конечные параметры газа не выражаются простыми формулами, так как колебательная энергия в квантовой области сложным образом зависит от температуры (см. формулу (3.19)). Если рассматривать достаточно сильные ударные волны, в которых температура за фронтом больше энергии колебательных квантов, поделенной на постоянную Больцмана, $T_1 > h\nu/k$, то колебательная энергия равна своему классическому значению kT на молекулу и $\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\varrho}$, где показатель адиабаты $\gamma = 9/7$. В этом предельном случае $\varepsilon_1 = (7/2)p_1V_1$, ударная адиабата имеет простой вид ¹⁾:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{6 - V_1/V_0}{8V_1/V_0 - 1} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{V_0} = \frac{p_1/p_0 + 6}{8p_1/p_0 + 1}. \quad (7.20)$$

С помощью общего соотношения (1.67), из которого следует, что

$$\frac{7}{5}\mathbf{M}^2 = \frac{p_1/p_0 - 1}{1 - V_1/V_0}, \quad (7.21)$$

можно легко выразить p_1/p_0 , так же как V_1/V_0 и $T_1/T_0 = p_1V_1/p_0V_0$, через число Маха $\mathbf{M}$.

Надо сказать, что область применимости указанной простой формулы для ударной адиабаты двухатомного газа весьма ограничена. Если $T_1 < h\nu/k$, то колебательная энергия не равна kT ; при температурах же, заметно превышающих $h\nu/k$, становится существенной диссоциация молекул. Рассмотрим для примера ударную волну в кислороде с числом $\mathbf{M} = 7$. Пусть начальная температура равна $T = 300$ К. Если начальное давление — атмосферное, скорость звука равна $c_0 = 350$ м/с, а скорость ударной волны $D = 2,45$ км/с. Параметры газа за скачком уплотнения равны $\varrho'/\varrho_0 = 5,45$, $p'/p_0 = 57$, $T'/T_0 = 10,5$, $T' = 3150$ К.

Параметры в конечном состоянии за фронтом волны: $\varrho_1/\varrho_0 = 7,3$, $p_1/p_0 = 60$, $T_1/T_0 = 8,2$, $T_1 = 2460$ К. У кислорода $h\nu/k = 2230$ К; T_1 немного больше этой

¹⁾ Подчеркнем, что эти формулы не совпадают с формулами для газа с постоянным показателем $\gamma = 9/7$, так как в начальном состоянии $\gamma = 7/5$ и $\varepsilon_0 = (5/2)p_0V_0$.

величины, так что простой формулой для вычисления T_1 пользоваться можно (диссоциация кислорода при такой температуре и не слишком малой плотности столь мала, что ее можно не учитывать).

Найдем распределение параметров газа в релаксационной зоне и оценим ее ширину. Удельная внутренняя энергия газа в какой-нибудь точке x складывается из энергии поступательных и вращательных степеней свободы, равной $(5/2)AT$, где T — «поступательная» температура в точке x , а A — газовая постоянная, рассчитанная на грамм, и неравновесной энергии колебаний, которую обозначим через ε_k : $\varepsilon = (5/2)AT + \varepsilon_k$. Как уже отмечалось выше, удельная энтальпия практически не меняется в релаксационной зоне (в приведенном численном примере изменение ее составляет всего 1 %), поэтому

$$w = \frac{7}{2}AT + \varepsilon_k \approx \text{const} \approx w_1 \approx w'.$$

Эта формула связывает неравновесную энергию колебаний с температурой в точке x . Непосредственно за скачком уплотнения колебания еще не возбуждены (в начальном состоянии при $T = T_0 \approx 300$ К колебательная энергия очень мала), так что в точке $x = 0$ за скачком уплотнения $\varepsilon_k = 0$. Затем начинается постепенное возбуждение колебаний, ε_k растет, а температура падает от T' до конечной величины T_1 , при которой колебательная энергия достигает равновесного значения, соответствующего этой температуре. Чтобы найти распределение температуры по x , воспользуемся уравнением кинетики возбуждения колебаний (6.9):

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \frac{\varepsilon_k(T) - \varepsilon_k}{\tau_k}.$$

Здесь $\varepsilon_k(T)$ — равновесная энергия колебаний, соответствующая поступательной температуре T , а τ_k — время релаксации.

Будем для простоты рассматривать только достаточно сильные ударные волны, в которых температура высока и равновесная колебательная энергия выражается классической формулой: $\varepsilon_k(T) = AT$. При этом $\varepsilon_k = w_1 - (7/2)AT = (9/2)AT_1 - (7/2)AT$. Подставляя эти выражения в уравнение кинетики и переходя от субстанциональной производной по времени к дифференцированию по координате с учетом стационарности процесса, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} = u \frac{d}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{dT}{dx} = \frac{9}{7} \frac{T_1 - T}{u\tau_k}.$$

Время релаксации τ_k зависит от температуры и плотности (или давления) газа. Приблизительно эту зависимость можно описать формулой (6.17), выведенной в § 4, гл. VI:

$$\tau_k \approx \frac{\text{const}}{\varrho} \exp\left(\frac{\text{const}}{T^{1/3}}\right).$$

С целью выяснения физической стороны дела будем приближенно считать величину $u\tau_k$ в релаксационной зоне постоянной и соответствующей некоторым средним, между T' и T_1 , ϱ' и ϱ_1 , значениям температуры и плотности ($u = D\varrho_0/\varrho$). Такое приближение имеет смысл, так как температура и плотность меняются не сильно. Так, в нашем численном примере температура меняется в 1,28 раза, $T^{1/3}$ — в 1,08 раза, а плотность и скорость меняются в 1,34 раза.

Интегрируя уравнение для температуры с начальным условием $T = T'$ при $x = 0$ и принимая во внимание, что в силу условия $w' = w_1$, $T' = (9/7)T_1$, получим профиль температуры:

$$T = T_1 \left(1 + \frac{2}{7} \exp \left(-\frac{9x}{7u\tau_k} \right) \right) = T' \left(\frac{7}{9} + \frac{2}{9} \exp \left(-\frac{9x}{7u\tau_k} \right) \right).$$

Имея в виду, что давление почти постоянно ($p \sim \rho T \approx \text{const}$), а температура меняется также не сильно, найдем приближенно распределение плотности:

$$\rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho') \exp \left(-\frac{9x}{7u\tau_k} \right) = \rho' + (\rho_1 - \rho') \left(1 - \exp \left(-\frac{9x}{7u\tau_k} \right) \right). \quad (7.22)$$

Таким образом, температура и плотность при $x \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к своим конечным значениям T_1 , ρ_1 , причем эффективная ширина релаксационной зоны и фронта ударной волны равна примерно

$$\Delta x = \frac{7}{9} u \tau_k. \quad (7.23)$$

Формулы (7.22), (7.23) могут служить для экспериментального определения времени колебательной релаксации. Для этой цели обычно интерферометрическим методом измеряют распределение плотности за скачком уплотнения и ширину фронта ударной волны (см. гл. IV). Для извлечения из опыта более точных данных изложенную простую теорию можно уточнить, учитывая квантовую зависимость колебательной энергии от температуры, переменность скорости $u = u(x)$ и т. д. Качественной картины распределений и порядка ширины фронта все эти уточнения, конечно, не изменяют.

Изложенная теория распространяется и на колебательную релаксацию в многоатомных молекулах, если амплитуда ударной волны такова, что возбуждаются только самые низкочастотные колебания¹⁾. Расчеты и измерения для газов CO_2 и N_2O имеются в работе [25]. В табл. 7.1 дается несколько значений ширин фронта ударных волн в кислороде и азоте, определяемый колебательной релаксацией (по данным измерений Блэкмана [26]).

Таблица 7.1

М	D , км/с	T_1	ρ_1/ρ_0	$\tau \cdot 10^6$, с	Δx , см
Кислород					
5,95	2,08	2000	6,3	5	0,165
8,0	2,8	3300	7,1	0,8	0,031
Азот					
7,42	2,43	3000	6,55	30	1,11
9,97	3,26	5000	7,14	5	0,23

Они приведены к давлению за фронтом $p_1 = 1$ атм ($\Delta x \sim \tau \sim 1/p_1$), начальная температура $T_0 = 296$ К.

Подробнейший обзор всех теоретических работ, посвященных расчету структуры зоны колебательной релаксации во фронте ударной волны содержится в статье

¹⁾ В случае нелинейных многоатомных молекул численный коэффициент $9/7$ в формулах (7.21), (7.22) нужно заменить на $11/9$ в соответствии с иной вращательной теплоемкостью ($3/2k$ на молекулу вместо $1k$).

Блайта [57]. Там рассматриваются самые разнообразные приближенные решения, а также приводятся результаты точных решений уравнений, полученных; при помощи вычислительных машин (см. также [58]).

Отметим несколько экспериментальных работ, в которых изучается колебательная релаксация во фронте ударной волны и определяются соответствующие времена релаксации и скорости возбуждения колебаний. Кислород изучался в работах [59, 60], окись азота — [61], окись углерода — [62], двуокись углерода — [63, 64].

Подробный обзор экспериментальных данных с многочисленными ссылками имеется в книге Е. В. Ступоченко, С. А. Лосева и А. И. Осипова [90].

§ 8. Диссоциация двухатомных молекул. При температурах за фронтом ударной волны в двухатомном газе порядка 3000—7000 К ионизации еще нет, колебания молекул возбуждаются сравнительно быстро и уширение фронта волны связано с наиболее медленным релаксационным процессом — диссоциацией молекул. Оценки показывают, что время колебательной релаксации при указанных температурах примерно на порядок меньше времени установления равновесной диссоциации. Поэтому приближенно можно считать колебательную энергию в каждой точке релаксационной зоны, так же как и вращательную, равновесной. Параметры газа за скачком уплотнения соответствуют промежуточному значению показателя адиабаты $\gamma' = 9/7$ (колебания при столь высоких температурах вполне «классичны»). Их можно вычислить по формулам (7.20), (7.21).

Заметная диссоциация появляется только в достаточно сильных ударных волнах, так что сжатие за скачком уплотнения близко к предельному соответствующему показателю $\gamma = 9/7$ и равному 8 (предполагаем, что ударная волна распространяется по газу, нагретому до нормальной температуры $T \approx 300$ К). При этом формулы (7.20), (7.21) упрощаются и дают приближенно

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = 8, \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{49}{40} M^2, \quad \frac{T'}{T_0} = \frac{49}{320} M^2,$$

где M — число Маха.

Параметры газа за фронтом ударной волны с учетом диссоциации не выражаются простыми формулами (см. § 9 гл. III); они вычисляются на основе общих соотношений на фронте.

Найдем распределение параметров газа в релаксационной зоне. Удельная внутренняя энергия газа с учетом диссоциации молекул равна (см. формулу (3.21))

$$\varepsilon = \frac{7}{2}(1 - \alpha)AT + 2\alpha\frac{3}{2}AT + \alpha U = \left(\frac{7}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)AT + \alpha U,$$

где U — энергия диссоциации 1 г газа, а α — степень диссоциации (которая может быть и неравновесной).

Поскольку уже непосредственно за скачком уплотнения сжатие газа весьма велико (близко к восьмикратному), изменение давления в релаксационной зоне мало, а изменение энтальпии — ничтожно мало. Отсюда следует, что

$$p = A(1 + \alpha)\varrho T \approx \text{const} = p' = A\varrho'T', \quad (7.24)$$

$$w = \left(\frac{9}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)AT + \alpha U \approx \text{const} = w' = \frac{9}{2}AT'. \quad (7.25)$$

Эти формулы позволяют выразить степень диссоциации и плотность в точке x волны через температуру, либо же температуру и плотность через степень диссоциации.

Так, например, пренебрегая α ($\alpha < 1$) по сравнению с 9, найдем из формулы (7.25):

$$\alpha = \frac{9}{2} \frac{A}{U} (T' - T) = \frac{9}{2} \frac{T' - T}{T_{\text{дис}}}, \quad (7.26)$$

где $T_{\text{дис}} = U/A$ (например, для кислорода $T_{\text{дис}} = 59\,400$ К).

За скачком уплотнения в точке $x = 0$ диссоциации еще нет: $\alpha = 0$ и $T = T'$.

Затем начинается диссоциация; степень диссоциации растет, а температура вследствие затрат энергии на диссоциацию падает. Так происходит до тех пор, пока диссоциация не достигает равновесного значения, соответствующего температуре газа.

Для нахождения распределений параметров по x воспользуемся уравнением кинетики диссоциации (см. § 5 гл. VI).

Рассмотрим здесь ударные волны не очень большой амплитуды, в которых степень диссоциации, достигаемая за фронтом, невелика: $\alpha_1 \ll 1$. В этом случае можно пренебречь диссоциацией молекул ударами атомов и оставить в уравнении кинетики (6.21) только члены, соответствующие диссоциации ударами молекул и рекомбинации атомов в тройных столкновениях с участием молекул в качестве третьих частиц. При переходе в уравнении кинетики (6.21) от чисел атомов в см^3 к степени диссоциации по формуле $N_A = 2\alpha N_0$ (N_0 — число исходных молекул в см^3) следует дифференцировать по времени только степень диссоциации, но не плотность газа (т. е. N_0), так как в уравнении (6.21) нет члена, описывающего изменение плотности. (Если к уравнению (6.21) добавить такой член, то он сократится со слагаемым $2\alpha(dN_0/dt)$, получающимся при дифференцировании N_0 в выражении $N_A = 2N_0\alpha$.)

Пренебрегая во всех членах величиной α по сравнению с единицей, имея в виду определение времени релаксации τ (6.25) и переходя от субстанциональной производной по времени к производной по координате, запишем уравнение кинетики в виде

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{(\alpha)}{2u\tau} \left[1 - \frac{\alpha}{(\alpha)^2} \right],$$

где (α) — равновесная степень диссоциации, соответствующая температуре и плотности газа в точке x (см. формулу (6.23)).

Как и в предыдущем параграфе, будем считать время релаксации $\tau(T, \varrho)$ и скорость газа относительно скачка уплотнения $u = D\varrho_0/\varrho$ постоянными и соответствующими некоторым средним значениям температуры и плотности в релаксационной зоне. Если конечная степень диссоциации очень мала, изменение температуры и плотности не очень велико, и с целью грубой оценки такое приближение сделать можно. Равновесную степень диссоциации (α) , которая зависит от T и ϱ , также будем считать постоянной и равной степени диссоциации в конечном состоянии α_1 . Интегрируя с этими допущениями уравнение кинетики и подчиняя решение начальному условию $\alpha = 0$ при $x = 0$, получим

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 + \alpha} = e^{-x/u\tau}. \quad (7.27)$$

Если подставить степень диссоциации α , вычисленную по этой формуле, в выражение (7.26), найдем профиль температуры $T(x)$ (при $\alpha = \alpha_1$, $T = T_1$), а затем по формуле (7.24) найдем профиль плотности $\varrho(x)$. Не будем выписывать формул для распределений $T(x)$ и $\varrho(x)$. Ясно, что они, так же как и формула (7.27), свидетельствуют об асимптотическом стремлении этих величин к конечным значениям за фронтом волны T_1 и ϱ_1 . Эффективная ширина релаксационной зоны и фронта, как и следовало ожидать, равна примерно $\Delta x \approx u\tau$, где τ — некоторое среднее время релаксации в неравновесной зоне.

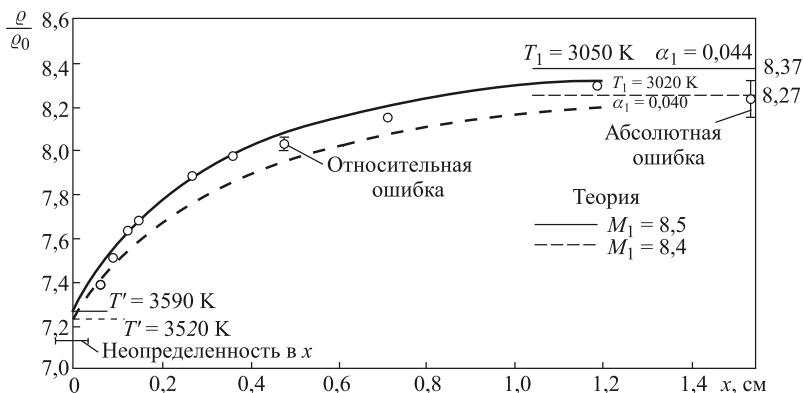


Рис. 7.15. Распределение плотности за скачком уплотнения в кислороде [27]. Начальное давление $p_0 = 19,6$ мм рт. ст., начальная температура $T_0 = 300$ K

Неравновесная диссоциация во фронте ударной волны на опыте изучалась многими авторами. Целый ряд работ посвящен кислороду. Мэттьюз [27] интерференционным методом измерял распределение плотности в неравновесной зоне за скачком уплотнения в ударной трубе. Опытные данные сопоставлялись с теоретическими расчетами, выполненными на основе решения уравнения кинетики диссоциации. Вычислялся ряд профилей с различными значениями констант, входящих в выражение для скорости реакции, и константы выбирались так, чтобы получилось наилучшее согласие с опытом. (Расчеты профилей делались более точно, чем это было изложено выше.)

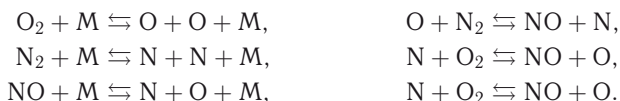
Полученная из опыта скорость диссоциации кислорода была приведена в § 6 гл. VI. На рис. 7.15 изображен профиль плотности в неравновесной зоне ударной волны в кислороде по данным Мэттьюза. Из рис. 7.15 видно, что ширина фронта ударной волны в условиях опыта порядка $\Delta x \approx 1$ см. С. А. Лосев [28] и Н. А. Генералов и С. А. Лосев [29] измеряли распределение температуры за скачком уплотнения в зоне неравновесной диссоциации кислорода по поглощению ультрафиолетового излучения в полосах Шумана–Рунге молекул O_2 , которое зависит от температуры.

По поглощению света изучалась скорость диссоциации брома и йода в ударной волне [30]. В работах Камака [65], Ринка и др. [66], Врая и Фримена [91] изучалась диссоциация кислорода в ударной волне; в работе [67] — диссоциация водорода; в работе [68] — диссоциация и рекомбинация азота. Обзор работ и подробная библиография даны в книге [90].

§ 9. Ударные волны в воздухе. Воздух представляет собой смесь двух двухатомных газов: азота и кислорода (79 и 21 % по числу молекул). В ударных волнах, амплитуды которых соответствуют конечным температурам $T_1 \sim 3000\text{--}8000$ K, наблюдается значительное расширение фронта ударной волны вследствие диссоциации молекул азота и кислорода. Помимо реакций диссоциации, в нагретом воздухе протекает реакция окисления азота. Определение профилей газодинамических величин во фронте волны и ширины фронта требует совместного решения уравнений кинетики всех этих реакций.

Такие расчеты были проделаны Даффом и Дэвидсоном [32], а также рядом других авторов. Ряд работ посвящен экспериментальному изучению неравновесной зоны в воздухе с помощью ударных труб. Ссылки на эти работы можно найти в обзоре [31] и в книге [90].

Приведем для иллюстрации результаты расчетов [32] (расчеты были выполнены с помощью электронной машины). В расчетах принимались во внимание следующие основные химические реакции:



Во всех этих реакциях M соответствует любому атому или молекуле. Для трех реакций диссоциации были приняты следующие постоянные значения скоростей рекомбинации: $3 \cdot 10^{14}$, $3 \cdot 10^{14}$ и $6 \cdot 10^{14}$ моль $^{-2} \cdot \text{см}^6 \cdot \text{с}^{-1}$. Скорости прямых четвертой и пятой реакций были взяты в форме

$$\begin{aligned} k_4 &= 5 \cdot 10^{13} \exp\left(-\frac{75\,500}{RT}\right) \text{ моль}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}, \\ k_5 &= 1 \cdot 10^{11} T^{1/2} \exp\left(-\frac{6200}{RT}\right) \text{ моль}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1} \end{aligned}$$

(ср. с данными § 8 гл. VI).

Расчеты проводились в двух предположениях: 1) колебательные степени свободы в каждой точке неравновесной зоны равновесны, 2) кинетика возбуждения колебаний рассчитывалась одновременно с кинетикой химических реакций. Распределения температуры и плотности за скачком уплотнения в ударной волне с числом Маха $\text{M} = 14,2$, распространяющейся по воздуху с $p_0 = 1$ мм рт. ст., $T_0 = 300$ К, показаны на рис. 7.16. Температура за скачком уплотнения T' равняется 9772 К, если считать, что в скачке возбуждаются равновесные колебания, и 12 000 К — без учета колебаний.

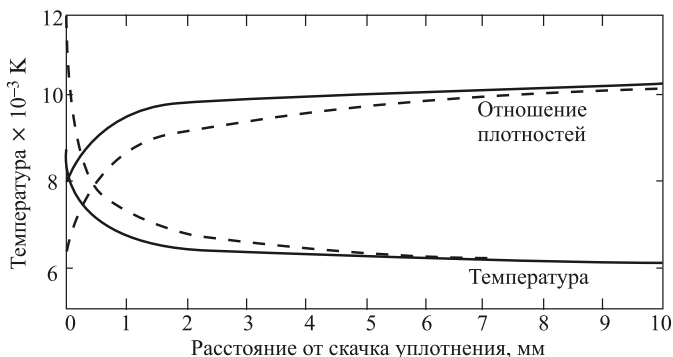


Рис. 7.16. Профили температуры и плотности во фронте ударной волны в воздухе с числом Маха $\text{M} = 14,2$. По оси ординат отложены температура и отношение плотностей ρ/ρ_1 . Начальное давление $p_0 = 1$ мм рт. ст., температура $T_0 = 300$ К. Сплошные кривые соответствуют мгновенному возбуждению, а пунктирные — конечной скорости возбуждения колебаний

Кривые первого расчета проведены сплошными линиями, второго — пунктирными. Расхождение кривых не очень велико, но все же заметно, так как скорости химических реакций не очень сильно превышают скорости возбуждения колебаний. Ширина фронта волны в указанных условиях, как видно из рис. 7.16, порядка 5 мм.

Ширину релаксационного слоя в воздухе в области диссоциации измеряли Н. А. Генералов и С. А. Лосев [33]. Изменение температуры в релаксационном слое регистрировалось по изменению поглощения света от постороннего источника

в полосах Шумана–Рунге молекул кислорода. Давление за фронтом ударной волны было близко к атмосферному. При $D = 3,7$ км/с, $\Delta x = 0,5$ см (средняя температура в слое $\bar{T} \approx 4500$ K); при $D = 2,8$ км/с, $\Delta x = 1,3$ см ($\bar{T} \approx 3200$ K). Сопоставление с расчетами Даффа и Дэвидсона [32] свидетельствует о правильности выбора основных констант скоростей реакций в этих расчетах.

В одной из последних работ (Рэй, Тир, Хаммерлинг, Кивель [69]) приводится перечень констант скоростей химических реакций, протекающих в нагретом воздухе. Константы выбраны авторами на основе анализа имеющегося экспериментального материала и рекомендуются ими для расчетов неравновесных процессов в ударных волнах. Расчеты структуры фронта для воздуха, выполненные авторами, согласуются с измерениями Лина [70] в ударной трубе.

Приводим этот перечень. В последних двух строчках приведены константы скорости реакций ионизации и рекомбинации электронов, которые играют важнейшую роль в установлении равновесной ионизации в воздухе при сравнительно низких температурах.

Реакция	Константа скорости рекомбинации, см ⁶ /моль ² · с	Третья частица
$O + O + M \rightarrow O_2 + M$	$2,2 \cdot 10^{20} T^{-3/2}$ $8,0 \cdot 10^{19} T^{-3/2}$ $2,5 \cdot 10^{15} T^{-1/2}$	O O ₂ N ₂ , N, NO, A
$N + N + M \rightarrow N_2 + M$	$5,5 \cdot 10^{20} T^{-3/2}$ $2,0 \cdot 10^{20} T^{-3/2}$ $6,0 \cdot 10^{15} T^{-1/2}$	N N ₂ O ₂ , O, NO, A
$N + O + M \rightarrow NO + M$	$2,0 \cdot 10^{21} T^{-3/2}$ $1,0 \cdot 10^{20} T^{-3/2}$	NO, O, N O ₂ , N ₂ , A
	Константа скорости, см ³ /моль · с	
NO + N → O + N ₂	$1,3 \cdot 10^{13}$	
NO + O → N + O ₂	$1,0 \cdot 10^{12} T^{1/2} e^{-3120/T}$	
N + O → NO ⁺ + e	$3,0 \cdot 10^{13} T^{-1/2} e^{-32500/T}$	
NO ⁺ + e → N + O	$1,8 \cdot 10^{21} T^{-3/2}$	

Константы скоростей обратных процессов для химических реакций можно выразить через константы скоростей прямых процессов и соответствующие константы равновесия.

Подробнейший перечень скоростей различных реакций, протекающих в воздухе, в том числе и с участием заряженных частиц, дан в гл. 11 сборника [92].

Отметим работы [71–75], в которых изучаются релаксационный слой в ударной волне в воздухе и смежные вопросы.

Более подробный обзор работ по ударным волнам в воздухе имеется в книге [90].

§ 10. Ионизация в одноатомном газе. При температурах за фронтом ударной волны порядка 15 000–20 000 K газ заметно ионизован. Установление ионизационного равновесия при таких температурах является наиболее медленным из релаксационных процессов, и именно оно определяет ширину фронта волны ¹⁾.

¹⁾ Диссоциация молекул при таких температурах происходит очень быстро, в результате небольшого числа соударений.

С точки зрения экспериментального изучения ионизации в ударной трубе особенно привлекательны одноатомные газы. Благодаря отсутствию ряда степеней свободы, которыми обладают молекулярные газы, в одноатомных газах легче достигаются высокие температуры: $\sim 15\,000\text{--}20\,000\text{ К}$. Одноатомные газы благоприятны и для проверки теории явления, так как ионизация (первая) является единственным релаксационным процессом, расширяющим фронт ударной волны. Первое подробное исследование такого рода было проведено Петшеком и Байроном [35] для аргона.

Рассмотрим ударную волну в одноатомном газе. Заметная ионизация получается только при весьма большой амплитуде волны, поэтому в скачке уплотнения достигается предельное сжатие, равное четырем, в соответствии с показателем адиабаты $\gamma' = 5/3$. Параметры за скачком уплотнения выражаются через число Маха простыми формулами:

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = 4, \quad \frac{p'}{p_0} = \frac{5}{4}M^2, \quad \frac{T'}{T_0} = \frac{5}{16}M^2.$$

Например, при числе Маха $M = 18$ и начальной температуре $T_0 = 300\text{ К}$, что соответствует скорости ударной волны в аргоне $D = 5,75\text{ км/с}$, температура за скачком уплотнения $T' = 30\,000\text{ К}$. В равновесии, за фронтом ударной волны в аргоне, при начальном давлении $p_0 = 10\text{ мм рт. ст.}$ газ оказывается ионизованным примерно на 25 %, а температура $T_1 = 14\,000\text{ К}$.

Толщина скачка уплотнения равна примерно двум-трем газокинетическим пробегам атомов. Перед фронтом ударной волны, а следовательно, и непосредственно за скачком уплотнения газ если и ионизован, то очень слабо. После ударного сжатия в высоконагретой частице газа начинается ионизация. Основным механизмом является ионизация электронным ударом (см. гл. VI). Однако для того чтобы ионизация развивалась путем электронных ударов с образованием электронной лавины, необходимо, чтобы в газе имелось некоторое начальное «затравочное» количество электронов. Одним из механизмов, которые могут привести к этой начальной ионизации, является ионизация при соударениях атомов друг с другом. Как отмечалось в гл. VI, эффективное сечение такого процесса чрезвычайно мало. Поэтому для образования «затравочных» электронов за счет атом-атомных столкновений требуется довольно значительное время. Соответственно зона за скачком уплотнения, где параметры газа отвечают ничтожно малой степени ионизации, т. е. равны ρ' , p' , T' , растягивается на весьма большое расстояние.

Лавинообразная ионизация начинается, когда скорость ионизации электронным ударом становится больше скорости ионизации ударами атомов¹⁾. Поскольку последняя чрезвычайно мала, лавинообразная ионизация начинается уже при очень малой «затравке», при степени ионизации $\alpha \sim 10^{-5}\text{--}10^{-3}$. Оставим пока в стороне вопрос об образовании «затравочных» электронов и рассмотрим основной процесс ионизации электронным ударом, в результате которого степень ионизации вырастает от очень малых до равновесных значений ($\alpha_1 = 0,25$ в приведенном выше примере).

При постоянной электронной температуре T_e лавина нарастает по экспоненциальному закону типа $n_e \sim \alpha \sim e^{t/\tau}$ (см. § 11 гл. VI) до тех пор, пока рекомбинация не начинает заметно компенсировать ионизацию. После этого степень ионизации постепенно приближается к равновесной, при которой рекомбинация в точности компенсирует ионизацию.

В действительности развитие лавины происходит более сложным образом. Дело в том, что в каждом акте ионизации электронный газ теряет энергию, равную

¹⁾ Либо ионизации за счет других процессов. О возможных механизмах образования затравочных электронов речь пойдет ниже.

потенциалу ионизации I (который в аргоне равен 15,8 эВ). Температура же электронного газа порядка 10 000 К, т. е. тепловая энергия одного электрона порядка 1,5 эВ. Таким образом, на образование одного нового электрона затрачивается энергия, равная тепловой энергии примерно десятка электронов. Если бы тепловая энергия электронов не восполнялась, электронная температура быстро упала бы. Вместе с нею упала бы и скорость ионизации, которая чрезвычайно резко, по больцмановскому закону типа e^{-I/kT_e} , зависит от электронной температуры (см. § 11 гл. VI).

Потери энергии электронов на ионизацию восполняются благодаря передаче электронам энергии от нагретого в скачке уплотнения атомного газа. Однако обмен энергией между тяжелыми частицами и электронами вследствие большого различия их масс протекает крайне медленно, и именно этот процесс обмена ограничивает скорость развития электронной лавины и определяет время достижения равновесной ионизации. При очень малой степени ионизации ионов мало, и электроны приобретают энергию при соударениях с нейтральными атомами. Но эффективность таких соударений при электронной температуре $T_e \sim 1 \text{ эВ} \approx 10^4 \text{ К}$ примерно в 10^3 раз меньше эффективности соударений электронов с ионами. Поэтому передача энергии от атомов электронам существенна только в самом начале процесса и уже при небольшой ионизации $\alpha \sim 10^{-3}$ основную роль приобретает обмен энергией между ионами и электронами. Ионы имеют температуру, совпадающую с температурой атомов, так как вследствие одинаковости масс обмен энергией между атомами и ионами осуществляется очень быстро. Таким образом, небольшое количество ионов в данном случае служит как бы посредником при передаче энергии от атомов к электронам. В самом электронном газе энергия распределяется быстро, так что можно говорить об электронной температуре T_e , которая, естественно, отличается от температуры тяжелых частиц — атомов и ионов T .

Электроны не только ионизуют, но и возбуждают атомы. Энергия первого возбужденного уровня атома аргона равна $E^* = 11,5 \text{ эВ}$.

При значительных Электронных концентрациях возбужденные атомы дезактивируются электронными ударами второго рода. Энергия возбуждения при этом вновь возвращается к электронному газу. Однако при электронных температурах порядка и, в особенности, больше 1 эВ ионизация возбужденного атома при электронных ударах становится более вероятной, чем дезактивация (для ионизации требуется не слишком большая энергия: $I - E^* = 4,3 \text{ эВ}$). Ионизация при этом протекает в две ступени: сначала атом возбуждается, потом ионизуется. Затрата энергии на ионизацию при таком двухступенчатом процессе все равно остается равной потенциалу ионизации: $E^* + (I - E^*) = I$. Возможны и многоступенчатые процессы, когда при столкновениях электронов с возбужденным атомом он ионизуется не сразу, а претерпевает один или несколько актов повышения степени возбуждения (см. гл. VI).

Если ионизация возбужденных атомов происходит быстро по сравнению с дезактивацией и возбуждением невозбужденных атомов, то скорость ионизации по существу определяется только скоростью возбуждения (по формуле (6.79)). Именно такое предположение делали Петшек и Байрон [35], считая, что каждый атом «мгновенно» ионизуется вслед за актом возбуждения. Возбужденные атомы частично высвечивают свою энергию. Возникающий в результате высвечивания квант поглощается по соседству другим, невозбужденным, атомом (эффективное сечение поглощения резонансных квантов очень велико), который в свою очередь высвечивается и т. д. ¹⁾.

¹⁾ Резонансные кванты, рожденные в нагретой зоне за фронтом ударной волны, диффундируют по газу и проникая через поверхность фронта, выходят и за пределы нагретой области. После этого они диффундируют в невозмущенном газе, опережая распространение ударной

Составим систему уравнений, которая приближенно описывает процесс ионизации и распределения газодинамических величин в ударной волне. Для простоты ограничимся случаем малой ионизации: $\alpha \ll 1$. Будем для удобства относить энергию и другие термодинамические величины не к 1 г, а к одному исходному атому газа.

Энтальпия на исходный атом равна

$$w = \frac{5}{2}kT + \frac{5}{2}\alpha kT_e + \alpha I.$$

Из приближенного условия постоянства энтальпии в релаксационной зоне и условия $\alpha \ll 1$ следует связь степени ионизации с атомной температурой, аналогичная (7.26):

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{T' - T}{T_{\text{ион}}}, \quad (7.28)$$

где $T_{\text{ион}} = I/k$ (в аргоне $T_{\text{ион}} = 1,83 \cdot 10^5$ К).

Давление газа равно $p = nkT + n\alpha kT_e \approx nkT$, где $n = n_a + n_i = n_a + n_e$ — суммарное число атомов и ионов в 1 см³. Его можно выразить через температуру атомов и степень ионизации из уравнения прямой (7.18). С меньшей точностью его можно определить из приближенного условия постоянства давления в релаксационной зоне $p \approx nkT \approx n'kT'$. Это дает

$$n = 4n_0 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{\alpha T_{\text{ион}}}{T'} \right)^{-1}, \quad (7.28')$$

где n_0 — число атомов в 1 см³ перед фронтом.

Уравнение кинетики для степени ионизации $\alpha = n_e/n$ есть

$$\frac{d\alpha}{dt} = u \frac{d\alpha}{dx} = \frac{q}{n}. \quad (7.29)$$

Здесь величина q представляет собою алгебраическую сумму всех членов, описывающих возникновение и исчезновение свободных электронов в 1 см³ в 1 с. В основной области q определяется ионизацией атомов электронным ударом. В рамках предположения Петшека и Байрона, например, q представляет собою в этой области скорость возбуждения атомов $q = \alpha_e^* n_e n_a$, где константа скорости α_e^* дается формулой (6.79). В самом начале процесса, сразу за скачком уплотнения, q определяется процессами, приводящими к образованию «затравочных» электронов (атом-атомными столкновениями и т. д.; см. ниже). На последней стадии, в области приближения к равновесию, в величине q следует учитывать рекомбинацию.

Скорость ионизации электронным ударом зависит от температуры электронного газа, которая подчиняется уравнению баланса электронной энергии. Обозначим $\Sigma_e, w_e = (5/2)\alpha kT_e$ энтропию и энтальпию электронов, приходящиеся на один исходный атом; $p_e = n\alpha kT_e$ — электронное давление. Имея в виду, что $d/dt = ud/dx$, запишем уравнение баланса

$$uT_e \frac{d\Sigma_e}{dx} = u \left(\frac{dw_e}{dx} - \frac{1}{n} \frac{dp_e}{dx} \right) = \frac{1}{n} (\omega_{ea} - \omega_i), \quad (7.30)$$

волны. Благодаря диффузии резонансного излучения перед фронтом на больших расстояниях возникает заметная концентрация возбужденных атомов. Этот процесс был рассмотрен Л. М. Биберманом и Б. А. Векленко [34]. Они показали, что на расстоянии 1 м от фронта волны в аргоне с $p_0 = 10$ мм рт. ст., $M = 18$, $T_1 = 14\,000$ К концентрация возбужденных атомов достигает $5 \cdot 10^{13}$ см⁻³, что соответствует «температуре» возбуждения $\sim 13\,500$ К, лишь немного меньшей температуры резонансного излучения, выходящего с поверхности фронта и равной T_1 .

где ω_{ea} — приток тепла в 1 см^3 в 1 с за счет передачи энергии от ионов и атомов электронам, а ω_i — потери энергии электронов на ионизацию (в 1 см^3 в 1 с)¹⁾. Согласно (6.121)

$$\omega_{ea} = \frac{3}{2}k \left(\frac{dT_e}{dt} \right)_{\text{обм}} n_e = \frac{3}{2}k n_e \frac{T - T_e}{\tau_{\text{обм}}}, \quad (7.31)$$

где $1/\tau_{\text{обм}} = 1/\tau_{ei} + 1/\tau_{ea}$; τ_{ei} — характерное время для обмена энергией между ионами и электронами (формула (6.120)); τ_{ea} — между нейтральными атомами и электронами (формула (6.122)). Потери энергии на ионизацию равны

$$\omega_i = Iq = Inu \frac{d\alpha}{dx}. \quad (7.32)$$

Система дифференциальных уравнений (7.29) и (7.30), относительно $\alpha(x)$, $T_e(x)$, и алгебраических уравнений (7.28) и (7.28'), которые дают $T(\alpha)$, $n(\alpha)$ с соответствующим образом определенной скоростью ионизации q , дает возможность найти распределения всех величин в зоне релаксации. Фактически скорости обмена и неупругих потерь ω_{ea} и ω_i в значительной степени компенсируют друг друга: $\omega_{ea} - \omega_i \ll \omega_{ea}, \omega_i$, так что в подавляющей части зоны релаксации уравнение баланса (7.30) сводится к алгебраическому соотношению $\omega_{ea} \approx \omega_i$, которое позволяет выразить α в виде функции T_e . Именно так поступали Петшек и Байрон при расчете ширины зоны релаксации.

Основную трудность при рассмотрении ионизации в релаксационной зоне представляет вопрос об образовании затравочных электронов. Эффективные сечения ионизации ударами атомов фактически неизвестны (см. § 15 гл. VI). Имеющиеся в литературе экспериментальные данные для аргона [37, 38] относятся к энергиям в несколько десятков электронвольт. Поэтому при расчетах приходится задаваться какими-то более или менее разумными значениями сечений. Расчеты структуры

¹⁾ Уравнение (7.30) можно вывести и из уравнений типа (1.10), (1.6), записанных для электронного газа. При этом, однако, следует учесть, что при наличии градиентов макроскопических величин в ионизованном газе обязательно происходит небольшая поляризация, в результате которой возникают электрические поля, препятствующие заметному разделению зарядов (подробнее см. § 13). Поле поляризации $\mathbf{E}$ обеспечивает «жесткую» связь электронного и атомно-ионного газов. При учете действия поля в уравнениях движения и энергии электронов появляются дополнительные члены:

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\nabla p_e - en_e \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[n_e \left(\frac{3}{2}kT_e + \frac{m_e u_e^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[n_e \mathbf{u}_e \left(\frac{5}{2}kT_e + \frac{m_e u_e^2}{2} \right) \right] = \omega_{ea} - \omega_i - en_e \mathbf{E} \mathbf{u}_e.$$

Вследствие крайней малости массы электронов инерционный член в уравнении движения электронного газа очень мал и градиент электронного давления уравновешивается действием электрического поля поляризации: $-en_e \mathbf{E} = \nabla p_e$. Подставим эту величину в уравнение энергии, пренебрежем малой кинетической энергией электронного газа и перейдем к одномерному стационарному случаю. Замечая еще, что скорость электронного газа $\mathbf{u}_e$ практически не отличается от скорости атомно-ионного газа $\mathbf{u}$, имея в виду интеграл уравнения непрерывности $n\mathbf{u} = \text{const}$ и определение $n_e = \alpha n$, получим уравнение (7.30). Выпишем также уравнения движения и энергии для атомно-ионного газа:

$$m_a n \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + en_i \mathbf{E}, \quad p = p_a + p_i, \quad n = n_a + n_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[n \left(\frac{3}{2}kT + \frac{m_a u^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[n \mathbf{u} \left(\frac{5}{2}kT + \frac{m_a u^2}{2} \right) \right] = -\omega_{ea} + en_i \mathbf{E} \mathbf{u}.$$

зоны релаксации в аргоне были сделаны Бондом [36], Л. М. Биберманом и И. Т. Якубовым [93] ¹⁾. Для иллюстрации приведем рассчитанные в последней работе распределения атомной и электронной температуры и степени ионизации для числа Маха $M = 16$, $D = 5,1$ км/с и начального давления $p_0 = 10$ мм рт. ст. (рис. 7.17). Эти кривые рассчитаны в предположении, что атомы ионизируются электронным ударом прямо с основного уровня, а сечение ионизации ударами атомов вблизи порога в зависимости от энергии столкновения ε аппроксимируется прямой линией с наклоном $C = 1,2 \cdot 10^{-20}$ см²/эВ, так что при $\varepsilon = I + 1$ эВ сечение $\sigma = 1,2 \times 10^{-20}$ см² (см. гл. VI). Из рис. 7.17 видно, что вначале ионизация чрезвычайно мала и развивается очень медленно. Электронная температура довольно быстро поднимается до некоторого значения $T_e \approx 1,3$ эВ и затем остается почти постоянной.

В этой области поступление энергии от ионов компенсируется потерями на ионизацию. Надо сказать, что время накопления затравочных электронов за счет атом-атомных столкновений должно слабо зависеть от выбора сечения. В случае $T_e = \text{const}$ оно вообще не зависит от сечения атом-атомной ионизации и определяется временем последующего развития электронной лавины (это было показано в конце § 13 гл. VI). Как показывают расчеты [93], учет ступенчатого характера ионизации электронным ударом с предварительным возбуждением атомов значительно сокращает время ионизации и ширину зоны релаксации только при числах Маха ударной волны меньше 13–12; при $M > 13$ это уменьшение незначительно.

Опыты по изучению ионизационной релаксации в аргоне были проведены Петшеком и Байроном [35] на ударной трубе. Чтобы расширить неравновесную область и увеличить времена релаксации, сделав их доступными для измерений, работа велась при весьма низких начальных давлениях аргона. Наиболее надежные измерения были сделаны при $p_0 = 2$ мм рт. ст. Распределение электронной плотности в ударной волне определялось путем регистрации сплошного спектра свечения, которое возникает при электрон-ионной рекомбинации и интенсивность которого в данном сечении x ударной волны пропорциональна квадрату плотности электронов (газ прозрачен для излучения). Кроме того, проводились зондовые измерения градиентов электронной плотности, которые согласовывались с измерениями свечения. Опыты показали, что ширина зоны релаксации, которая в значительной мере определяется скоростью начальной ионизации, сильно

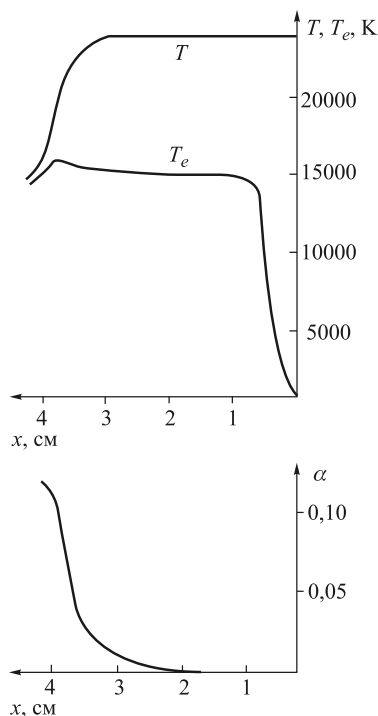


Рис. 7.17. Распределение электронной и атомной температур T_e , T и степени ионизации α в ударной волне в аргоне в предположении, что начальные электроны образуются за счет атом-атомных столкновений. Число Маха равно 16, давление перед фронтом — 10 мм рт. ст., начальная температура — 293 К

¹⁾ В работе [35] приводятся только значения полной ширины зоны.

зависит от степени очистки аргона, т. е. в образовании затравочных электронов существенную роль играют примеси (с низкими потенциалами ионизации).

Приведем некоторые результаты измерения времени ионизационной релаксации в аргоне. Времена релаксации и примерные ширины фронта пересчитаны к начальному давлению $p_0 = 10$ мм рт. ст. (они обратно пропорциональны плотности газа). Значения величин относятся к весьма чистому газу, с содержанием примесей $\sim 5 \cdot 10^{-5}$.

М	T' , К	D , км/с	$\tau \cdot 10^6$, с	Δx , см
10,3	10 000	3,3	100	$\sim 6,5$
11,5	12 500	3,7	17	~ 1
13,4	16 700	4,3	3	$\sim 0,2$
16,4	25 000	5,25	0,5	$\sim 0,032$
20,3	40 000	6,5	0,1	$\sim 0,006$

Опыт показывает, что $\ln \tau$, грубо говоря, линейно зависит от $1/T'$, т. е. что $\tau \sim \exp(\text{const}/T')$. Константа в этом законе соответствует энергии активации: примерно 11,5 эВ.

Сопоставление опытных данных о распределении электронной плотности с расчетами лавинной ионизации показало, что лавина развивается только после того, как начальная ионизация достигает величины порядка 0,1 от равновесной, или абсолютной величины $\alpha \sim 10^{-2}$. Вопрос о природе начальной ионизации в работе [35] так и остался невыясненным. Оценки показали, что ионизация в результате атом-атомных соударений или фотоионизация квантами, рождающимися в равновесной зоне, не может обеспечить быстрое образование большого количества начальных электронов, которое нужно для объяснения опытных данных. Свидетельством недостаточности механизма атом-атомных соударений может служить тот факт, что расчеты с учетом только этого механизма приводят к временам релаксации, которые в десятки раз больше экспериментальных [93].

В ряде работ высказывались различные предположения о механизме начальной ионизации, в частности предположение о том, что играет роль диффузия электронов, проникновение их из области с большой степенью ионизации в зону, где ионизация мала, и даже в газ перед фронтом ударной волны. (Изучению диффузии электронов в ударной волне посвящены работы [39, 76, 77].)

Отмечалась роль возбуждения атомов перед фронтом резонансным излучением, выходящим из равновесной области [94].

Анализ различных механизмов ионизации в ударной волне в аргоне (и вообще одноатомных газов) содержится в уже цитированной выше работе Л. М. Бибермана и И. Т. Якубова [93]. Авторы исследовали влияние вариаций в выборе эффективных сечений ионизации ударами электронов и атомов, роль ступенчатых и радиационных процессов. Они пришли к выводу о том, что в ускорении образования начальных электронов решающую роль должно играть возбуждение атомов резонансным излучением, выходящим из равновесной зоны. Благодаря этому эффекту сильно повышается концентрация возбужденных атомов, которые легко ионизируются электронным ударом. Учет этого позволил авторам значительно сократить расхождения между расчетными и экспериментальными значениями времени релаксации и добиться удовлетворительного согласия тех и других. Надо сказать, что в вопросе об ионизационной релаксации, в особенности о механизме начальной ионизации, полной ясности еще нет. Отметим работу [95], в которой изучалась релаксация в ксеноне, и работу [96] о влиянии излучения.

§ 11. Ионизация в воздухе. Ионизация в ударных волнах в воздухе изучалась в ранних работах [40, 41, 70, 78–80] и особенно тщательно в опытах [87]. В последних опытах в ударной трубе исследовались волны со скоростями 4,5–7 км/с (числа Маха 14–20) при начальных давлениях 0,02–0,2 мм рт. ст. Измерения показали, что ионизация развивается очень быстро и достигает величины порядка равновесной на расстояниях от скачка уплотнения, равных $40 \div 10$ газокинетическим пробегам в невозмущенном воздухе. Степени ионизации при этом имеют порядок 10^{-4} – 10^{-3} , причем в зоне релаксации степень ионизации проходит через максимум, который может в несколько раз превышать равновесное значение.

В разд. 2 гл. VI уже отмечалось, что механизм ионизации в таком молекулярном газе, как воздух, при не слишком больших амплитудах ударной волны существенным образом отличается от механизма ионизации в одноатомных газах. Свободные электроны в воздухе образуются преимущественно в результате ассоциативной ионизации, при которой два атома объединяются в молекулу с одновременным отрывом электрона и образованием молекулярного иона. Основным процессом, требующим наименьшей энергии активации, является реакция



Поскольку потенциалы ионизации всех компонентов воздуха гораздо больше затраты энергии при такой реакции, последняя (при не слишком высоких температурах) протекает гораздо скорее, чем непосредственная ионизация атомов и молекул ударами частиц. Константа скорости указанной главной реакции ионизации приведена в таблице § 9. Поскольку в ионизации воздуха существенную роль играют атомы, расчеты кинетики ионизации в воздухе основаны на расчетах диссоциации молекул (вообще химических превращений). Такие расчеты выполнены в работе Лина и Тира [86], причем они хорошо согласуются с измерениями [87].

Расчеты (для скоростей ударных волн не выше 9 км/с показали, что ионизация происходит быстро, даже быстрее, чем химические превращения, так что в зоне релаксации степень ионизации в какой-то мере приходит в равновесие с химическим составом газа и «следит» за изменением степени диссоциации молекул.

Ионизация в воздухе при скоростях ударной волны несколько больше 10 км/с (9–15 км/с) рассматривалась в работе Л. М. Бибермана и И. Т. Якубова [97]. При этом были учтены химический состав воздуха в зоне релаксации и возбуждение атомов и молекул. В отличие от случая малых скоростей диссоциация происходит быстро по сравнению с ионизацией и ионизация в основном развивается в атомарном газе. Реакции ассоциативной ионизации играют определяющую роль в создании начальных электронов; по мере возрастания электронной плотности все большее значение приобретает ступенчатая ионизация электронными ударами, причем энергия электронов, как и в одноатомном газе, восполняется за счет передачи энергии от ионов.

При вычислении скорости ионизации атомов и молекул электронным ударом в работе [97] использован метод объединения возбужденных и ионизованного состояний в одну группу. Этот метод, предложенный в работе Л. М. Бибермана и К. Н. Ульянова [99], может оказаться полезным и при рассмотрении других вопросов, связанных с нарушением ионизационного равновесия. Он состоит в следующем.

Предположим, что ударное возбуждение и ионизация атомов, пребывающих в основном состоянии, а также обратные процессы; дезактивация с переходом атома на основной уровень и рекомбинация в тройном столкновении с захватом электрона на основной уровень происходят сравнительно медленно. В то же время допустим, что повышение степени возбуждения электронным ударом и ионизация возбужденных атомов, так же как и соответствующие обратные процессы, происходят относительно быстро.

Скорости реальных процессов в какой-то мере находятся именно в таком соотношении, так что указанное допущение имеет смысл. Но при таком положении можно приближенно считать, что среди различных возбужденных состояний устанавливается бальмовское распределение, а между возбужденными и ионизованным состояниями атома устанавливается равновесие Саха. Другими словами, все возбужденные и ионизованные состояния можно объединить в одну группу, приписав этой группе состояний определенную температуру, равную температуре электронного газа. Плотность же электронов, так же как и соотношение между плотностями электронов (или возбужденных атомов) и атомов, в основном состоянии, уже не описываются формулой Саха, т. е. не являются равновесными. Они определяются из уравнения кинетики, которое описывает переходы атомов между основным состоянием и состояниями, принадлежащими к группе возбужденных и ионизованных состояний. При желании этот метод можно уточнять, выделяя самые низшие возбужденные уровни из группы и записывая для концентрации атомов, в этих состояниях отдельные уравнения кинетики. В работе [99] описанным способом рассмотрено влияние выхода излучения из ограниченного газового объема на отклонение состояния газа от термодинамического равновесия.

Ионизацию в воздухе при больших скоростях ударной волны, в десятки километров в секунду (применительно к проблеме движения в атмосфере метеоритных тел), рассматривал В. А. Бронштэн [98].

§ 12. Ударные волны в плазме. Интересными особенностями обладает структура фронта ударных волн, распространяющихся по ионизованному газу. Эти особенности были отмечены одним из авторов [42]; количественные расчеты структуры фронта были сделаны В. Д. Шафрановым [43]; см. также работы В. С. Имшенника [51], Джакса [44], Тайдмена [44а], С. Б. Пикельнера [85]. Основные черты структуры связаны с замедленным характером обмена энергией между ионами и электронами и большой подвижностью электронов, благодаря которой электронная теплопроводность во много раз превышает теплопроводность ионов.

Максвелловские распределения в электронном и ионном газах устанавливаются весьма быстро, за время порядка времени между «соударениями» частиц¹⁾. Выравнивание же температур обоих газов вследствие огромного различия масс электронов и ионов происходит гораздо медленнее. Этот релаксационный процесс и определяет ширину фронта ударной волны в плазме.

Выясним качественно, к чему приводит малая скорость обмена энергиями электронов и ионов, для чего предположим сначала, что электронная теплопроводность не отличается от ионной. Кроме того, будем считать, что ионизация происходит не в самой ударной волне, а волна распространяется по уже ионизованному газу.

В системе координат, связанной с волной, значительная часть кинетической энергии газа, набегающего на скачок уплотнения под действием сил ионной вязкости, необратимо переходит в тепло. Повышение ионной температуры в скачке уплотнения по порядку величины равно $\Delta T_i \sim m_i D^2/k$, где m_i — масса иона, а D — скорость набегающего потока, равная скорости фронта ударной волны. Толщина вязкого скачка определяется временем между ионными столкновениями τ_i ; она — порядка длины пробега ионов $l_i \sim \bar{v}\tau_i$, где $\bar{v} \sim D$ — тепловая скорость ионов в скачке уплотнения (определение τ_i дано в § 20 гл. VI). За время уплотнения τ_i ионный газ не успевает передать электронному газу сколько-нибудь заметную тепловую энергию, так как

¹⁾ О понятии «соударения» заряженных частиц, взаимодействующих по кулоновскому закону, см. в § 20 гл. VI.

характерное время обмена, $\tau_{ei} \sim \sqrt{m_i/m_e} \tau_i$, очень велико. Для ионов со средними массами τ_{ei} в сотни раз больше времени τ_i ; для протонов — в 43 раза больше, чем τ_i .

Приращение температуры электронов в скачке уплотнения за счет превращения кинетической энергии набегающего потока электронного газа в тепло под действием сил электронной вязкости ничтожно мало. Оно порядка $\Delta T_e \sim m_e D^2/k$, т. е. в m_i/m_e раз меньше ΔT_i . Нагревание электронного газа в скачке уплотнения происходит по другой причине.

Электроны и ионы связаны между собой электрическими силами взаимодействия, причем связь эта очень сильна. Малейшее разделение электронного и ионного газов приводит к возникновению мощных электрических полей, которые препятствуют дальнейшему разделению. Поэтому каждая частица плазмы остается электрически нейтральной. Плотность электронов n_e всегда совпадает с плотностью положительных зарядов Zn_i (Z — заряд ионов, n_e и n_i — числа электронов и ионов в 1 см^3). В скачке уплотнения электронный газ ведет себя не независимо, а сжимается точно так же, как ионный. Можно сказать, что электроны «жестко привязаны» к ионам электрическими силами. Эти силы являются «внешними» по отношению к электронному газу и не производят диссипации. Поскольку диссипация энергии за счет действия сил электронной вязкости ничтожно мала, в скачке уплотнения происходит адиабатическое сжатие и нагревание электронного газа.

Так, например, при сжатии водородной плазмы сильной ударной волной плотность ее повышается в скачке уплотнения в четыре раза, в соответствии с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$. Температура ионов может возрасти очень сильно, если амплитуда волны высока, температура же электронов в скачке уплотнения возрастает только в $4^{\gamma-1} = 4^{2/3} = 2,5$ раза.

Поэтому в сильной ударной волне, распространяющейся по плазме с одинаковыми температурами электронов и ионов, за скачком уплотнения возникает резкое различие температур обоих газов; затем в частице, испытавшей ударное сжатие, начинается процесс передачи тепловой энергии от ионов к электронам, который приводит к выравниванию температур через время порядка времени обмена τ_{ei} (см. § 20 гл. VI).

Ширина релаксационной зоны за скачком уплотнения, где происходит приближение к равновесному состоянию плазмы с равными температурами $T_e = T_i = T_1$, имеет порядок $\Delta x \sim u_1 \tau_{ei} \left(u_1 = \frac{q_0}{q_1} D \right)$. Конечная температура T_1 определяется общими уравнениями сохранения для фронта ударной волны. Таким образом, в отсутствие эффектов, связанных с существованием повышенной электронной теплопроводности, распределение температур во фронте волны должно иметь вид, изображенный на рис. 7.18.

Если возбуждения каких-либо иных степеней свободы, кроме ранее «замороженных» поступательных степеней свободы электронов, нет (как это имеет место в полностью ионизованном газе), то плотность газа и давление в релаксационной зоне остаются строго неизменными. Действительно, показатели адиабаты газа с «замороженными» и равновесными степенями свободы совпадают и равны $\gamma = 5/3$, так что сжатие в скачке уплотнения происходит по ударной адиабате, совпадающей с ударной адиабатой конечного состояния. Физическая причина, очевидно, состоит в том, что давление определяется только средней поступательной энергией частиц, которая при обмене остается неизменной и не зависит от распределения ее между частицами.

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает на структуру фронта электронная теплопроводность. До сих пор всегда считалось (и для этого имелись все основания), что диссипативные процессы, вязкость и теплопроводность, играют роль только

в области больших градиентов, в скачке уплотнения, где макроскопические величины сильно меняются на расстояниях порядка газокINETического пробега. В релаксационной же зоне, простирающейся на расстоянии, исчисляемые многими пробегами, градиенты малы и диссипативными процессами можно пренебречь. В самом деле, характерным масштабом, служащим критерием малости градиентов, является масштаб длины, составленный из транспортных коэффициентов и скорости фронта. Транспортные коэффициенты, например, температуропроводность атомов, порядка $\chi \sim l\bar{v}/3$ и масштаб длины $\lambda \sim \chi/D \sim l\bar{v}/D \sim l$ порядка газокINETического пробега, так как тепловая скорость атомов во фронте $\bar{v}$ порядка скорости фронта D).

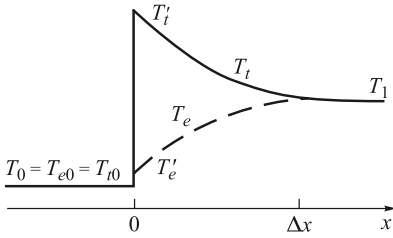


Рис. 7.18. Профили ионной и электронной (пунктир) температур во фронте ударной волны в плазме без учета электронной теплопроводности

Коэффициент электронной температуропроводности χ_e равен примерно

$$\chi_e = \frac{l_e \bar{v}_e}{3} \approx \frac{\bar{v}_e \tau_e}{3},$$

где l_e — длина пробега электронов; $\bar{v}_e$ — их тепловая скорость, а τ_e — время между «столкновениями» электронов друг с другом.

Как было показано в § 20 гл. VI, длина пробега заряженных частиц не зависит от их массы, а зависит только от заряда и температуры, $l \sim T^2/Z^4$.

При сравнимых температурах и в легких газах, например в водороде ($Z = 1$), длины пробега электронов и ионов одного порядка. Скорость же электронов в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше скорости ионов. Поэтому коэффициент электронной теплопроводности в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше коэффициента ионной теплопроводности, и характерный масштаб, на котором разыгрывается процесс электронной теплопроводности,

$$\lambda_e \sim \frac{\chi_e}{D} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{\chi_i}{D} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} l_i.$$

Этот масштаб такого же порядка, что и ширина релаксационной зоны выравнивания температур электронного и ионного газов:

$$\Delta x \sim D \tau_{ei} \sim D \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau_i \sim \frac{D}{\bar{v}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} l_i \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} l_i.$$

Поэтому по отношению к электронной теплопроводности градиенты в релаксационной зоне не малы и теплопроводный теплообмен в этой зоне сравним с теплообменом между ионами и электронами. Электронная теплопроводность способствует скорейшему выравниванию температур за вязким скачком, так как она перекачивает тепло из более удаленных от скачка уплотнения слоев газа в передние, где электронная температура меньше. Кроме того, и этот эффект чрезвычайно существен, электронная теплопроводность приводит к прогреванию газа перед вязким скачком уплотнения. Если «горячие» ионы не могут далеко вырваться из-за скачка уплотнения в область перед скачком (их тепловая скорость сравнима со скоростью распространения скачка по невозмущенному газу), то «горячие» электроны с успехом проникают вперед и опережают скачок уплотнения, так как их скорость примерно в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз больше скорости фронта. Перед скачком уплотнения образуется прогретный слой. В этом слое электронная температура выше, чем ионная, ибо

прежде всего нагревается электронный газ и только потом тепло частично передается ионам. В скачке уплотнения происходит резкое возрастание ионной температуры. Электронная температура не меняется, так как ее скачкообразному повышению препятствует сглаживание за счет большой теплопроводности. Скачок уплотнения имеет «изоэлектронно-термический» характер. Распределение температур во фронте волны с учетом электронной теплопроводности показано на рис. 7.19.

Оценим, ширину прогревного слоя перед скачком уплотнения. Будем считать для простоты, что передачи энергии от прогревающегося электронного газа к ионному нет, а также, что газ перед скачком уплотнения не сжимается и не тормозится (в системе координат, где фронт покоится). Точные расчеты оправдывают эти упрощающие предположения. Поток электронной теплопроводности равен

$$S = -\kappa_e \frac{dT_e}{dx} = -\chi_e c_e \frac{dT_e}{dx}, \quad (7.33)$$

где $\kappa_e = \chi_e c_e$ — коэффициент теплопроводности; c_e — теплоемкость 1 см^3 электронного газа при постоянном объеме.

Эффективный коэффициент электронной теплопроводности равен

$$\kappa_e = \xi \frac{(kT_e)^{5/2} k}{m_e^{1/2} Z e^4 \ln \Lambda} = \xi \cdot 1,93 \cdot 10^{-5} \frac{T^{5/2}}{Z \ln \Lambda} \text{ эрг/с} \cdot \text{см} \cdot \text{град},$$

где $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм (см. § 20 гл. VI), а ξ — число, слабо зависящее от Z : $\xi(1) = 0,95$; $\xi(2) = 1,5$; $\xi(4) = 2,1$ ¹⁾.

В силу стационарности процесса поток теплопроводности в прогревном слое равен гидродинамическому потоку электронной энергии²⁾:

$$-S = D c_e T_e = \chi_e c_e \frac{dT_e}{dx} \quad (7.34)$$

(начальная температура электронов перед фронтом предполагается равной нулю; далеко перед волной поток S исчезает).

Замечая, что $\chi_e \sim \bar{v}_e l_e \sim T_e^{5/2}$, или $\chi_e = a T_e^{5/2}$, где $a = \text{const}$, и интегрируя уравнение (7.34), найдем

$$x - x_0 = \frac{2}{5} \frac{a}{D} T_e^{-5/2}$$

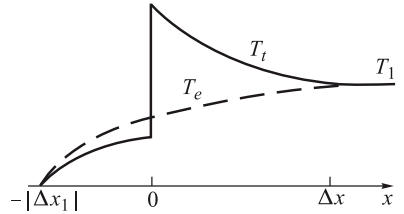


Рис. 7.19. Профили ионной и электронной (пунктир) температур во фронте ударной волны, распространяющейся по холодной плазме

¹⁾ Приведем для справочных целей формулу для электропроводности плазмы:

$$\sigma = 2,63 \cdot 10^{-4} \gamma(Z) \frac{T^{3/2}}{Z \ln \Lambda} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} = 2,38 \cdot 10^8 \gamma(Z) \frac{T^{3/2}}{Z \ln \Lambda} \text{ с}^{-1};$$

$$\gamma(1) = 0,58; \quad \gamma(2) = 0,68; \quad \gamma(4) = 0,78.$$

²⁾ Это есть первый интеграл уравнения энергии для данного случая:

$$c_e \frac{dT_e}{dt} = -\frac{\partial S}{\partial x}; \quad D c_e \frac{\partial T_e}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial x}; \quad D c_e T_e = -S.$$

или

$$T_e = \left[\frac{5}{2} \frac{D}{a} (x - x_0) \right]^{2/5}, \quad (7.35)$$

где x_0 — координата переднего края зоны прогрева, где температура обращается в нуль. Профиль температуры, описываемый этой формулой, изображен схематически на рис. 7.19. Если поместить начало координат $x = 0$ в точку, где расположен скачок уплотнения, и обозначить температуру в этой точке через T_{e0} (электронная температура на скачке не меняется), то ширину прогревного слоя можно записать в виде

$$|x_0| = \frac{2}{5} \frac{a}{D} T_{e0}^{5/2} = \frac{2}{5} \frac{\chi_e(T_{e0})}{D}. \quad (7.36)$$

При учете электронной теплопроводности температура электронов на скачке имеет такой же порядок, что и за фронтом волны, так что ширина прогревного слоя имеет такой же порядок, что и ширина релаксационной зоны за скачком:

$$|x_0| \sim \frac{\chi_e(T_1)}{D} \sim \frac{\bar{v}_e l_e}{D} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} l_e \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} l_i \sim \Delta x_{\text{обмен}}.$$

Ширина прогревного слоя перед скачком уплотнения довольно быстро возрастает с повышением амплитуды волны. Если принять во внимание, что $\chi_e \sim T_e^{5/2} \sim T_1^{5/2}$, а $D \sim T_1^{1/2}$ то из формулы (7.36) найдем зависимость $|x_0| \sim T_1^2 \sim D^4$.

Полученный, профиль температуры характерен для нелинейной теплопроводности, когда коэффициент теплопроводности уменьшается с понижением температуры¹⁾. При обычной теплопроводности с постоянным коэффициентом $\chi = \text{const}$, $\chi = \text{const}$, мы получили бы из уравнения энергии, что прогревание экспоненциально простирается до бесконечности:

$$T = T_1 \exp\left(-\frac{|x|}{x_1}\right), \quad T_1 = T(x = 0),$$

где характерный масштаб $x_1 = \chi/D$. При обычной теплопроводности эффективная ширина зоны прогрева x_1 в отличие от нелинейной, уменьшается с возрастанием амплитуды волны: $x_1 \sim D^{-1} \sim T_1^{-1/2}$.

При учете электронной теплопроводности в очень сильной ударной волне неионизованный газ сильно прогревается и ионизируется еще перед скачком уплотнения, так что качественные особенности структуры волны, распространяющейся по ионизованному газу, остаются в силе и в том случае, если волна бежит по неионизованному газу.

Для строгого расчета структуры фронта ударной волны в полностью ионизованном газе к общим гидродинамическим уравнениям с учетом потока электронной теплопроводности типа (7.10) следует добавить энтропийное уравнение для электронного газа, сходное с (7.30):

$$n_i u T_e \frac{d\Sigma_e}{dx} = -\frac{dS}{dx} + \omega_{ei}, \quad (7.37)$$

где ω_{ei} — энергия, передаваемая в 1 см^3 в 1 с от ионного газа к электронному; она дается формулой (7.31).

¹⁾ Подробнее о нелинейной теплопроводности см. в гл. X.

Скорости и сжатия обоих газов в каждой точке предполагаются одинаковыми ($n_e = Zn_i$). Энтальпия плазмы, приходящаяся на один ион, и давление равны

$$w = w_i + w_e = \frac{5}{2}kT_i + Z\frac{5}{2}kT_e, \quad p = p_i + p_e = n_i kT_i + n_e kT_e.$$

Энтропия электронного газа, рассчитанная на один ион, равна

$$\Sigma_e = Zk \ln \frac{T_e^{3/2}}{n_e} + \text{const} = Zk \ln \frac{T_e^{3/2}}{\varrho} + \text{const}. \quad (7.38)$$

Найдем условие, определяющее электронную температуру в скачке уплотнения.

Проинтегрируем уравнение (7.37) по области скачка уплотнения, устремляя ширину ее к нулю и принимая во внимание, что электронная температура на скачке непрерывна (она равна T_{e0}). Отмечая индексами 01 и 02 величины перед и за скачком уплотнения, запишем результат интегрирования:

$$\varrho_0 D T_{e0} \ln \frac{\varrho_{02}}{\varrho_{01}} = S_{02} - S_{01}. \quad (7.39)$$

Поток на разрыве испытывает скачок; разность потоков по обе стороны разрыва соответствует работе изотермического сжатия электронного газа «внешними» силами, действующими со стороны ионов.

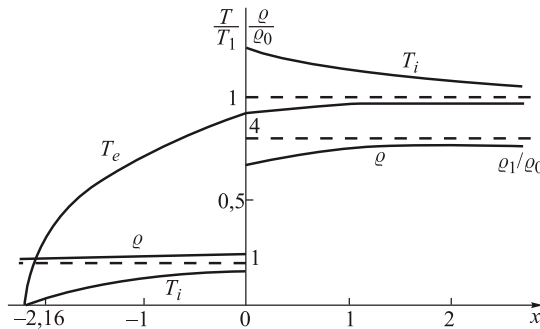


Рис. 7.20. Профили температур и плотностей для сильной ударной волны в плазме (рисунок взят из работы [43]). Электронная температура на скачке равна $T_e^0 = 0,93 T_1$; ионные температуры перед и за скачком $T_{i1} = 0,16 T_1$; $T_{i2} = 1,24 T_1$. Плотности перед и за скачком: $\varrho_{01}/\varrho_0 = 1,13$, $\varrho_{02}/\varrho_0 = 3,53$

Систему уравнений, описывающих структуру фронта, можно решить только путем численного интегрирования. Это было сделано В. Д. Шафрановым [43] для предельного случая сильной волны ($p_1/p_0 \gg 1$) в водородной плазме ($Z = 1$) с нулевой начальной температурой. Профили температуры и плотности приведены на рис. 7.20. Температура T_1 здесь произвольна (она пропорциональна квадрату скорости волны D). За единицу длины принята величина $0,019 D \tau_{ei1}$, где τ_{ei1} — характерное время обмена в конечном состоянии за фронтом ударной волны; например, при начальной плотности $n_{i0} = n_{e0} = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и температуре за фронтом $T_1 = 10^5 \text{ К}$, $\tau_{ei1} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ с}$, $D = 94 \text{ км/с}$ и единица длины равна $5,9 \cdot 10^{-4} \text{ см}$.

§ 13. Поляризация плазмы и возникновение электрического поля в ударной волне. В предыдущем параграфе предполагалось, что электроны и ионы жестко связаны друг с другом электрическими силами, и плазма в каждой точке ударной

волны электронейтральна: плотность электронов меняется от точки к точке в точности пропорционально плотности ионов. В действительности, это положение выполняется не вполне строго. Благодаря существованию больших градиентов электронной плотности в скачке уплотнения и высокой подвижности электронов, связанной с исключительной малостью их массы, создаются благоприятные условия для диффузии электронного газа относительно ионного, изменения концентрации электронов и возникновения объемных зарядов.

Эффекты диффузии при распространении ударной волны в бинарной смеси газов рассматривались в § 5. Однако диффузия в плазме существенным образом отличается от диффузии в смеси нейтральных газов. Дело в том, что малейшее изменение относительной концентрации электронов и ионов, которое приводит к образованию объемных зарядов, поляризации плазмы, сопровождается возникновением мощного электрического поля. Поле препятствует дальнейшей поляризации и сдерживает диффузионный ток электронов.

Оценим по порядку величины, как поляризуется плазма при наличии градиентов макроскопических величин, т. е. насколько выполняется в среднем условие электронейтральности.

Для простоты рассмотрим водородную плазму ($Z = 1$). Пусть температура электронов порядка T , числа электронов и ионов в 1 см^3 $n_e = n_i = n$. Пусть, далее, имеются градиенты макроскопических величин, скажем, плотности, давления и т. д., такие, что характерный размер области, в которой происходит заметное изменение величин, порядка x .

Вследствие диффузии электронов в области порядка x получается некоторая разница в плотностях электронов и ионов, $\delta n = n_i - n_e$, и появляется объемный заряд $e\delta n$. Возникают электрическое поле $E \sim 4\pi e \delta n x$ ¹⁾ и разность потенциалов на границах области $\delta\varphi \sim Ex \sim 4\pi e \delta n x^2$. Но в отсутствие внешних полей разделение электронов и ионов и разность потенциалов поддерживаются только за счет теплового движения электронов, следовательно, потенциальная энергия электронов $e\delta\varphi$ не может превысить величины порядка kT ; $e\delta\varphi \sim 4\pi e^2 \delta n x^2 \sim kT$. Отсюда степень поляризации, т. е. степень отклонения от электронейтральности в рассматриваемой области имеет порядок

$$\frac{\delta n}{n} \sim \frac{kT}{4\pi e^2 n x^2}.$$

Сильное разделение электронов и ионов, при котором $\delta n/n \sim 1$, может возникнуть только в тонком слое, толщина которого d определяется условием $\delta n/n \approx 1 \approx$

$\frac{kT}{4\pi e^2 n d^2}$. Отсюда

$$d \approx \left(\frac{kT}{4\pi e^2 n} \right)^{1/2} = 6,9 \left(\frac{T}{n} \right)^{1/2} \text{ см.}$$

Длина d есть не что иное, как дебаевский радиус (см. § 11 гл. III)²⁾. Дебаевский радиус характеризует расстояние, на котором плазма экранирует электрическое поле любого заряженного тела, т. е. толщину так называемого двойного слоя, образующе-

¹⁾ Напоминаем, что уравнения электростатики для напряженности поля $\mathbf{E}$ и потенциала φ гласят:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e \delta n, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

²⁾ Точнее, дебаевский радиус, помноженный на $\sqrt{2}$, так как n в (3.78) — суммарное число ионов и электронов.

гося около заряженного тела. В частности, «заряженным телом» может служить отдельный ион (именно так и было введено понятие дебаевского радиуса в § 11 гл. III).

С помощью определения d величину отклонения от электронейтральности можно записать в виде $\delta n/n \sim (d/x)^2$.

Наибольшие градиенты в плазме возникают в вязком скачке уплотнения при распространении сильной ударной волны, когда макроскопические величины сильно меняются на расстоянии порядка длины пробега заряженных частиц:

$$l \sim \frac{(kT)^2}{ne^4 \ln \Lambda} \sim 3,5 \cdot 10^4 \frac{T^2}{n} \text{ см}^2).$$

Среднее отклонение от электронейтральности в зоне скачка уплотнения ($x = x_{\min} \sim l$):

$$\frac{\delta n}{n} \sim \left(\frac{d}{l}\right)^2 \sim \frac{e^6 n (\ln \Lambda)^2}{4\pi (kT)^3} \approx 3,9 \cdot 10^{-8} \frac{n}{T^3}.$$

Эта величина очень мала при всех разумных значениях плотностей и температур; например, при $T = 10^5$ K, $n = 10^{18}$ см⁻³, $d \approx 0,8 \cdot 10^{-6}$ см, $l \approx 3,5 \cdot 10^{-4}$ см, $\delta n/n \sim 4 \cdot 10^{-5}$, $\delta\varphi = kT/e = 8,6$ В³), $E \sim \delta\varphi/l \sim 2,5 \cdot 10^4$ В/см.

Заметим, что сжатие электронного газа в сильном скачке уплотнения, ширина которого порядка длины пробега l , происходит только за счет электрических сил, действующих со стороны ионов (ионный газ сжимается, как обычно, за счет действия вязкости). Следовательно, разность потенциалов на скачке уплотнения определяется работой сжатия электронного газа, приходящейся на один электрон,

$$e(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = kT_{e0} \ln \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}}.$$

При сжатии в несколько раз логарифм порядка единицы и, следовательно, $e\delta\varphi \sim kT$, как и утверждалось выше.

Распределения заряда, электрического поля и потенциала во фронте ударной волны в плазме схематически показаны на рис. 7.21.

Существенное отличие распределения концентраций компонентов в плазме от распределения концентраций в смеси нейтральных газов состоит в том, что наряду с областью повышенной концентрации электронов в передней части фронта ударной волны возникает область пониженной концентрации в задней части волны. В смеси нейтральных газов во фронте ударной волны происходит только концентрирование легкого компонента (избыточная масса легкого компонента натекает из «бесконечности»).

В случае плазмы такое положение невозможно. Концентрирование электронов без одновременного концентрирования положительных ионов в соседней области привело бы к появлению электрического поля на «бесконечности», т. е. потребовало бы затраты бесконечной энергии.

В работе [45] рассматривалась структура фронта слабой ударной волны в плазме с учетом только диффузии электронов, сдерживаемой электрическими силами, но без учета вязкости и теплопроводности, подобно тому как это делал Каулинг [22] для смеси электрически нейтральных газов (см. § 5) ¹⁾. Как и там, диффузия обеспечивает размазывание ударного разрыва не слишком большой интенсивности. Благодаря

²⁾ Логарифмический множитель в длине пробега (см. § 20 гл. VI) имеет обычно порядок $\ln \Lambda \sim 10$.

³⁾ Величина $\delta\varphi$ численно порядка температуры, выраженной в электронвольтах.

¹⁾ См. также работы [44, 46].

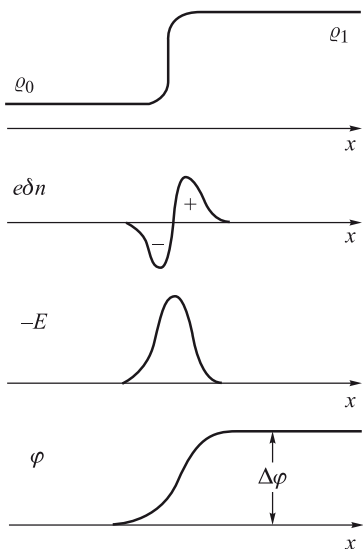


Рис. 7.21. Распределения массовой плотности, плотности объемного заряда, напряженности электрического поля и электростатического потенциала во фронте ударной волны, распространяющейся по плазме, при учете диффузии электронов

сдерживающей роли электрического поля ширина переходного слоя получается меньшей, чем в смеси нейтральных газов.

В работе Жаффена и Пробстейна [89] структура ударной волны в полностью ионизованной плазме рассматривалась в общем виде с одновременным учетом вязкости, теплопроводности и поляризации плазмы. Авторы исходили из системы уравнений гидродинамики для смеси электронного и ионного газов и уравнения Пуассона для электрического поля.

Полученные в этой работе профили массовой плотности и электронной и ионной температур согласуются с распределениями, описанными в предыдущем параграфе. В качественном отношении подтверждаются и представления о возникновении в области вязкого скачка уплотнения двойного электрического слоя, схематически показанного на рис. 7.21. Однако в сильной ударной волне появляется еще один электрический двойной слой такого же типа, расположенный на переднем краю зоны прогревания электронной теплопроводностью, там, где происходит резкий подъем электронной температуры. Физическая природа этого второго слоя такая же, что и у основного: подъем температуры на краю прогревного слоя сопровождается очень небольшим, по сравнению со скачком уплотнения, но весьма

резким сжатием, а в области сжатия газа электроны диффундируют относительно ионов, что и приводит к возникновению поляризации.

3. Лучистый теплообмен во фронте ударной волны

§ 14. Качественная картина. Когда ударная волна распространяется по газу, занимающему большой объем, и размеры нагретой области очень велики по сравнению с длиной пробега света, так что температура газа мало меняется на расстояниях порядка длины пробега, тепловое излучение в объеме приходит в локальное термодинамическое равновесие с веществом. Излучение равновесно и непосредственно за фронтом ударной волны.

Плотность энергии и давление излучения становятся сравнимыми с плотностью энергии и давлением вещества только при чрезвычайно высоких температурах или чрезвычайно низких плотностях газа. Например, в воздухе нормальной плотности это происходит при температуре $2,7 \cdot 10^6$ К. В ударных волнах не столь большой амплитуды лучистые давление и энергия гораздо меньше давления и энергии вещества и потому почти не влияют на параметры за фронтом. Иной порядок имеет соотношение потоков энергии излучения и вещества, так как скорости ударных волн, с которыми реально приходится иметь дело, на много порядков меньше скорости света. Отношение потоков энергии $\sigma T^4 / D \rho \varepsilon \sim (U_{\text{изл}} / \rho \varepsilon) (c / D)$, грубо говоря, в c / D раз больше отношения плотностей энергии. Так, при $D = 100$ км/с $c / D = 3 \cdot 10^3$. В воздухе нормальной плотности, например, оба потока становятся одинаковыми уже при температуре $\sim 300\,000$ К, при которой плотность излучения еще очень мала.

Казалось бы, отвод энергии излучением от фронта ударной волны большой амплитуды должен играть важную роль, и в третье из ударных соотношений (7.4) следовало бы наряду с потоком энергии вещества включить и поток энергии, уносимой с поверхности фронта излучением, $S = \sigma T_1^4$. Это существенным образом повлияло бы на конечное состояние за фронтом ударной волны, приводя к большему сжатию за фронтом, подобно тому как к большему сжатию ведет увеличение теплоемкости газа. На самом же деле потери энергии на излучение с поверхности фронта волны весьма ограничены и их эффект обычно незначителен. Дело в том, что в непрерывном спектре газы прозрачны лишь для сравнительно малых квантов. Атомы и молекулы сильно поглощают кванты, энергия которых превышает потенциал ионизации и которые вызывают фотоэффект, а молекулы, как правило, поглощают даже меньшие кванты; например, граница прозрачности холодного воздуха лежит при $\lambda \sim 2000 \text{ \AA}$, $h\nu \sim 6 \text{ эВ}$.

При высокой температуре за фронтом энергия, заключенная в области малых частот, составляет лишь небольшую долю от полной энергии спектра. Так, при температуре за фронтом $T = 50\,000 \text{ К}$ в области прозрачности воздуха $h\nu < 6 \text{ эВ}$ сосредоточено только 4,5 % энергии планковского спектра. При этом малые кванты находятся в рэлей–джинсовской части спектра и их поток, т. е. возможные потери энергии, во всяком случае пропорциональны не четвертой, а только первой степени температуры.

Излучение с фронта ударной волны, действительно, уходит в основной своей части на «бесконечность» лишь при таких амплитудах, при которых максимум планковского спектра лежит в спектральной области прозрачности газа, т. е. при температурах за фронтом порядка 1–2 эВ. Но при такой температуре абсолютная величина потока излучения σT_1^4 весьма мала и дополнительное сжатие за счет потерь на излучение в воздухе нормальной плотности не превышает процента.

Таким образом, существование теплового излучения мало сказывается на параметрах газа за фронтом ударной волны не слишком большой амплитуды. Другое дело — влияние излучения на внутреннюю структуру переходного слоя между начальным и конечным термодинамически равновесным состояниями газа, т. е. на строение самого фронта ударной волны. Здесь роль излучения в волнах больших (но представляющих реальный интерес) амплитуд оказывается чрезвычайно существенной и, более того, именно лучистым теплообменом определяется структура фронта. Задача о структуре фронта ударной волны с учетом лучистого теплообмена, которой посвящены § 14–17 этой главы, была рассмотрена авторами в работах [42, 47–49]. Хотя поток излучения, уходящий с фронта волны на «бесконечность», весьма мал и не оказывает никакого энергетического влияния на параметры ударной волны, тот факт, что он существует, имеет огромное значение, так как позволяет наблюдать волну оптическими методами. Вопрос о свечении ударной волны и яркости поверхности фронта тесно переплетается с вопросом о структуре фронта. Он будет рассмотрен в гл. IX.

Вследствие непрозрачности холодного газа, излучение, выходящее с поверхности ударного разрыва, в волнах большой амплитуды почти полностью поглощается перед разрывом, нагревая слои газа, втекающие в разрыв. Эта энергия, идущая на нагревание, черпается за счет высвечивания слоев газа, уже испытавших ударное сжатие, которые, следовательно, охлаждаются излучением. Эффект сводится, таким образом, к перекачиванию энергии из одних слоев газа в другие посредством излучения. Лучистый теплообмен разыгрывается на расстояниях, измеряемых длиной пробега квантов для поглощения. Обычно длина пробега квантов на несколько порядков больше газокинетического пробега частиц (см. гл. V) и больше ширины релаксационного слоя, где устанавливается термодинамическое равновесие в самом веществе.

Так, в воздухе нормальной плотности длины пробега квантов с энергиями $h\nu \sim 10\text{--}100$ эВ, соответствующими температурам за фронтом $T_1 \sim 10^4\text{--}10^5$ К, имеют порядок $10^{-2}\text{--}10^{-1}$ см, тогда как газокINETический пробег порядка 10^{-5} см.

Ширина фронта ударной волны, в которой лучистый теплообмен играет существенную энергетическую роль, определяется длиной пробега света — самым большим масштабом длины. В каком-то смысле можно говорить о релаксации излучения во фронте ударной волны, об установлении равновесия излучения с веществом за фронтом.

Проследим качественно, как меняется строение фронта при переходе от волн малой амплитуды к волнам большой амплитуды. При этом будем рассматривать явление в «крупном масштабе», не интересуясь «мелкомасштабными» деталями, связанными с релаксацией в различных степенях свободы газа, т.е. полагая, что в каждой точке волны вещество находится в состоянии термодинамического равновесия. Вязкий скачок уплотнения вместе с релаксационной зоной за ним будем рассматривать как математический разрыв.

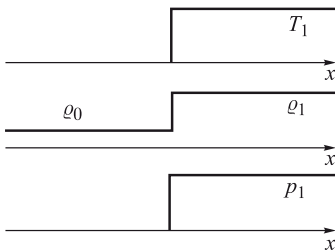


Рис. 7.22. Профили температуры, плотности и давления в «классической» ударной волне

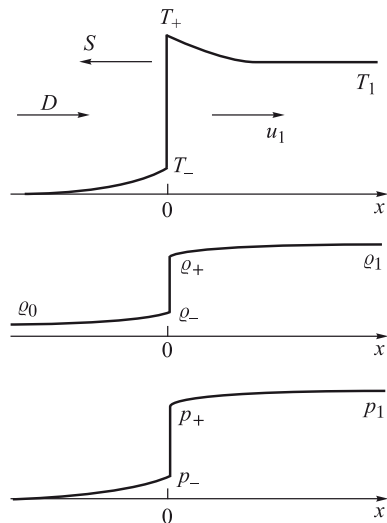


Рис. 7.23. Профили температуры, плотности и давления во фронте ударной волны не слишком большой амплитуды при учете лучистого теплообмена

В предельном случае достаточно слабой волны, когда энергетическая роль излучения мала, профили всех величин в ударной волне имеют характер «классических» ступенек (рис. 7.22). При возрастании амплитуды быстро растет поток излучения σT_1^4 с поверхности фронта. Излучение поглощается перед разрывом на расстоянии порядка пробега квантов и нагревает газ, причем нагревание спадает по мере удаления от разрыва вследствие поглощения потока излучения. Скачок уплотнения распространяется теперь не по холодному, а по нагретому газу и температура за скачком T_+ выше, чем в отсутствие нагревания, т.е. выше, чем в конечном состоянии. За скачком уплотнения температура уменьшается от T_+ до T_1 . Другими словами, частица газа, протекающая через ударную волну, сначала нагревается излучением, а испытывая ударное сжатие, охлаждается, высвечивая часть энергии, которая и идет на создание

потока излучения. Нагревание газа перед разрывом приводит к повышению его давления и некоторому сжатию (а также торможению в системе координат, где фронт покоится). В скачке уплотнения газ сжимается до плотности несколько меньшей конечной. Охлаждение газа за скачком уплотнения способствует его дальнейшему сжатию до конечной плотности (как и в случае понижения температуры вследствие возбуждения дополнительных степеней свободы). Давление при этом возрастает.

Профили температуры, плотности и давления в волне, отвечающие описанной картине, изображены схематически на рис. 7.23.

Температура прогревания перед разрывом T_- пропорциональна потоку излучения, выходящего с поверхности разрыва $-S_0 \approx \sigma T_1^4$, и потому быстро увеличивается с возрастанием амплитуды волны. Так, в воздухе нормальной плотности $T_- \approx 1400$ К при $T_1 = 25\,000$ К; $T_- = 4000$ К при $T_1 = 50\,000$ К; $T_- = 60\,000$ К при $T_1 = 150\,000$ К. Соответственно увеличивается превышение температуры за скачком T_+ над конечной T_1 (грубо говоря, $T_+ - T_1 \approx T_-$).

При некоторой температуре за фронтом $T_1 = T_{\text{кр}}$ температура прогревания T_- достигает величины T_1 и профиль температуры приобретает вид, показанный на рис. 7.24. Эта температура $T_{\text{кр}}$, равная примерно $300\,000$ К для воздуха, может быть названа критической, так как разделяет два существенно различных случая структуры фронта ударной волны.

Рассмотрим волну большой, сверхкритической амплитуды с температурой за фронтом $T_1 > T_{\text{кр}}$. Потока энергии квантов, излучаемых газом за скачком уплотнения и выходящих с поверхности разрыва в сторону холодного газа, хватило бы на то, чтобы нагреть слой порядка длины пробега, в котором поглощаются кванты, до очень высокой температуры, большей, чем T_1 . Может ли на самом деле осуществиться столь высокое нагревание? Очевидно, нет, так как при этом прогретый слой сам стал бы интенсивно излучать и быстро охладился бы до температуры T_1 . Возникновение состояния с $T_- > T_1$ означало бы, что в замкнутой системе тепло самопроизвольно перекачивается от менее нагретых слоев газа к более нагретым, в противоречие со вторым законом термодинамики¹⁾. На самом деле энергия, отбираемая излучением от газа, нагретого в скачке уплотнения, просто затрачивается на прогревание более толстых слоев перед разрывом. Кванты, выходящие из-за поверхности разрыва, поглощаются перед разрывом в слое порядка длины пробега, а нагретое при этом до температуры, близкой к T_1 , вещество само излучает, нагревая соседние слои, и т. д. Мы имеем дело с типичным случаем прогревания газа путем лучистой теплопроводности.

Перед разрывом распространяется теплопроводная волна, захватывающая тем более толстый слой газа, чем больше амплитуда ударной волны. Явление вполне аналогично ударной волне с электронной теплопроводностью, которая рассматривалась в § 12 (лучистая теплопроводность тоже нелинейна).

Профили температуры и плотности в ударной волне сверхкритической амплитуды изображены на рис. 7.25. За скачком уплотнения по-прежнему имеется пик

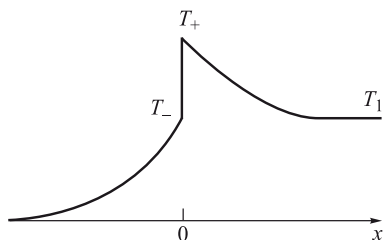


Рис. 7.24. Профиль температуры в ударной волне «критической» амплитуды

¹⁾ Подробнее о невозможности состояния с $T_- > T_1$ будет сказано в § 17. Строгое доказательство этого положения дано в работе [42].

температуры, появляющийся в результате ударного сжатия. Как и раньше, частицы газа, испытавшие ударное сжатие, охлаждаются, высвечивая часть своей энергии, и отдают ее на создание тепловой волны перед разрывом.

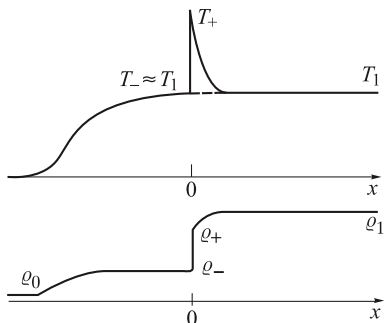


Рис. 7.25. Профили температуры и плотности во фронте ударной волны очень большой амплитуды при учете лучистого теплообмена. Пунктир соответствует приближению лучистой теплопроводности (изотермическому скачку)

В последующих параграфах набросанная здесь в общих чертах физическая картина будет обоснована математически.

§ 15. Приближенная формулировка задачи о структуре фронта. Рассмотрим, как обычно, одномерный стационарный режим в системе координат, где фронт покоится. Для выяс-

нения особенностей строения фронта, связанных с лучистым теплообменом, введем ряд упрощений. Газ будем считать идеальным, обладающим постоянной теплоемкостью, так что давление и удельная внутренняя энергия его выражаются простыми формулами:

$$p = A \varrho T, \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} AT.$$

Вязкий скачок уплотнения вместе с релаксационным слоем, где происходит установление термодинамического равновесия в веществе, заменим математическим разрывом. В зоне лучистого теплообмена пренебрегаем релаксационными явлениями, вязкостью и теплопроводностью вещества, а также электронной теплопроводностью¹⁾. Ударную волну считаем сильной (начальные давление и энергия вещества малы по сравнению с конечными). Не будем рассматривать волны чрезвычайно большой амплитуды; в этом случае можно пренебречь энергией и давлением (но не потоком!) излучения.

Небольшой поток малых квантов, уходящих с фронта волны на «бесконечность», во внимание не принимаем, полагая, что перед фронтом поток излучения равен нулю.

При сделанных предположениях система интегралов уравнений гидродинамики (7.10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \varrho u &= \varrho_0 D, \\ p + \varrho u^2 &= \varrho_0 D^2, \\ \varepsilon + \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + \frac{S}{\varrho_0 D} &= \frac{D^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

¹⁾ Оценки показывают, что в ряде реальных случаев, в том числе в таком практически важном процессе, как ударная волна в воздухе нормальной плотности, электронная теплопроводность играет меньшую роль, чем перенос энергии излучением (см. [48]).

Здесь S — поток энергии излучения. Заметим, что он направлен навстречу потоку газа, который движется в положительную сторону оси x , так что $S < 0$ ($D, u > 0$).

Перед фронтом, при $x = -\infty$, и за фронтом ударной волны, при $x = +\infty$, поток $S = 0$, а все величины принимают свои начальные и конечные значения, которым, как всегда, приписываем индексы «0» и «1». Координату x будем отсчитывать от точки, где расположен скачок уплотнения.

Для определения потока излучения к уравнениям гидродинамики (7.40) необходимо присоединить уравнение переноса излучения. Будем рассматривать угловое распределение квантов в диффузионном приближении, заменяя строгое кинетическое уравнение для интенсивности двумя уравнениями для плотности и потока излучения (см. § 10 гл. II).

Подчеркнем, что в диффузионном приближении формально не содержится никаких предположений о близости плотности излучения к равновесной и диффузионное приближение отнюдь не эквивалентно приближению лучистой теплопроводности. С его помощью мы описываем и существенно неравновесное излучение, лишь приближенным образом учитывая угловое распределение квантов (см. об этом § 13 гл. II).

Будем оперировать только интегральными по спектру величинами плотности и потока излучения U и S для чего введем некоторую среднюю по спектру длину пробега света l . Как отмечалось в гл. II, такое приближение, строго говоря, возможно лишь в определенных предельных случаях. Однако оно не искажает качественных закономерностей лучистого переноса и для наших целей является достаточным.

Перепишем уравнения для излучения в указанных приближениях (см. формулы (2.62), (2.65)):

$$\frac{dS}{dx} = \frac{c(U_p - U)}{l}, \quad S = -\frac{lc}{3} \frac{dU}{dx}.$$

Здесь $U_p = 4\sigma T^4/c$ — плотность энергии равновесного излучения, соответствующего температуре вещества в данной точке x .

Уравнения гидродинамики и переноса излучения не содержат в явном виде координату x , поэтому в них можно перейти к новой координате — оптической толщине τ , которую будем отсчитывать от точки $x = 0$ в положительном направлении оси x :

$$d\tau = \frac{dx}{l}, \quad \tau = \int_0^x \frac{dx}{l}. \quad (7.41)$$

Если длина пробега l известна как функция температуры и плотности газа, то в окончательном решении легко с помощью уравнений (7.41) перейти от распределений различных величин по оптической координате к распределениям по x (при $l = \text{const}$ оба типа профилей, очевидно, совпадают). В терминах оптической толщины уравнения переноса приобретают такой вид:

$$\frac{dS}{d\tau} = c(U_p - U), \quad (7.42)$$

$$S = -\frac{c}{3} \frac{dU}{d\tau}. \quad (7.43)$$

Уравнения гидродинамики (7.40) и переноса излучения (7.42), (7.43) вместе с естественными граничными условиями, выражающими отсутствие излучения в холодном газе перед волной и термодинамически равновесный характер излучения за

фронтом волны ¹⁾,

$$\tau = -\infty, \quad S = 0, \quad U = 0, \quad T = 0, \quad (7.44)$$

$$\tau = +\infty, \quad S = 0, \quad U = U_{p1} = \frac{4\sigma T_1^4}{c}, \quad T = T_1, \quad (7.45)$$

полностью описывают структуру фронта ударной волны в изложенной постановке. Система дифференциальных уравнений имеет второй порядок. Порядок можно понизить, если исключить из системы координату τ , поделив уравнения (7.42) и (7.43) одно на другое:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{c^2}{3} \frac{U - U_p}{S}. \quad (7.46)$$

Для пояснения физического смысла закономерностей структуры фронта очень удобны диаграммы $p, V; T, V; S, V$, рассмотренные в § 3. Вводя, как и там, относительный удельный объем $\eta = V/V_0$, равный обратной величине сжатия и безразмерной скорости,

$$\eta = \frac{V}{V_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{u}{D},$$

найдем из первых двух уравнений (7.40), что в областях, где газодинамические величины непрерывны, давление меняется вдоль прямой:

$$p = \varrho_0 D^2 (1 - \eta). \quad (7.47)$$

Температура и поток зависят от сжатия по формулам, аналогичным (7.13) и (7.14). Эти формулы получаются из уравнений (7.40) в случае газа с постоянной теплоемкостью. Введем в формулы (7.13) и (7.14) вместо числа Маха температуру за фронтом ударной волны T_1 . Получим

$$T = \frac{T_1 \eta (1 - \eta)}{\eta_1 (1 - \eta_1)}, \quad (7.48)$$

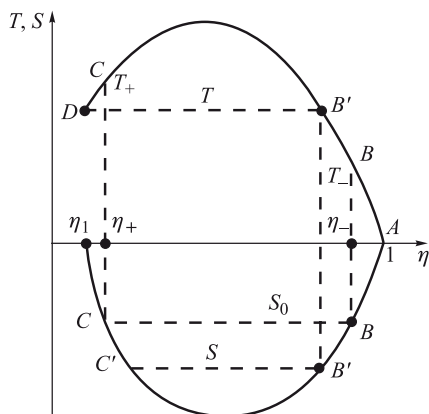
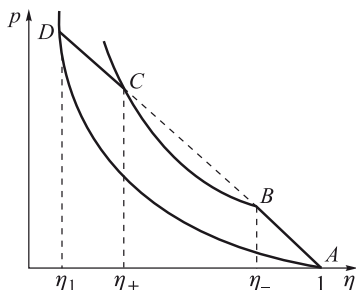
$$S = -\frac{\varrho_0 D A T_1 (1 - \eta)(\eta - \eta_1)}{2\eta_1^2 (1 - \eta_1)}, \quad (7.49)$$

где $\eta_1 = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. Излучение в ударной волне играет существенную роль только при высоких температурах, когда газ сильно ионизован. Эффективный показатель адиабаты в области ионизации для численных оценок можно принять равным $\gamma = 1,25$. Соответствующее сжатие за фронтом волны $1/\eta_1 = 9$, $\eta_1 = 0,111$.

Функции $T(\eta)$, $S(\eta)$, $p(\eta)$ изображены на рис. 7.26, 7.27. Функция $T(S)$, которую можно получить из уравнений (7.48), (7.49), как это видно из рис. 7.26, имеет две ветви: одна из них, которая в пределе $S \rightarrow 0$ дает $T \rightarrow 0$ ($\eta \rightarrow 1$), соответствует состояниям, близким к начальным, т. е. зоне прогрева перед разрывом, другая — с пределом $S \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_1$ ($\eta \rightarrow \eta_1$), соответствует состояниям, близким к конечным, т. е. области за разрывом.

В последующих двух параграфах мы найдем приближенные решения уравнений режима для двух крайних случаев, описанных в § 14: для ударных волн докритической и сверхкритической амплитуд. Следует отметить, что переход от одного случая к другому является непрерывным. Просто для промежуточных значений амплитуд, близких к критическим, не удастся найти решения в аналитическом виде. Численное интегрирование для промежуточных амплитуд не составляет труда. Однако в нем нет особой необходимости, так как найденные предельные аналитические решения

¹⁾ Из этих условий независимы только два, остальные есть следствия уравнений.

Рис. 7.26. T, η - и S, η -диаграммы для ударной волны с учетом лучистого теплообменаРис. 7.27. p, η -диаграмма для ударной волны с учетом лучистого теплообмена

справедливы вплоть до амплитуд, весьма близких к критической с той и с другой стороны.

§ 16. Ударная волна докритической амплитуды. Рассмотрим ударную волну небольшой амплитуды, в которой все эффекты, связанные с излучением, невелики. Температура за скачком уплотнения при этом близка к конечной температуре и с поверхности разрыва выходит поток излучения, равный по абсолютной величине $|S_0| \approx \sigma T_1^4$. Проследим за состоянием частицы газа, втекающей в волну. Текущая точка на диаграммах $T, \eta; S, \eta; p, \eta$ движется от начального положения A в сторону сжатия вплоть до положения B , в котором поток равен S_0 . Плотность газа, температура, давление и поток излучения в частице монотонно растут при приближении к разрыву. Из формул (7.48), (7.49) следует, и это видно из рис. 7.26, что на тех ветвях кривых, которые выходят из начальной точки A , т.е. в зоне прогретания, сжатие очень мало. Даже при $T = T_1$ на этой ветви сжатие составляет только $1/(1 - \eta_1) = 1,13$ (если $\gamma = 1,25$, $\eta_1 = 0,111$), а при температурах перед разрывом T_- меньших, чем T_1 , сжатие в зоне прогретания еще меньше. Если приблизительно исключить η из уравнений (7.48), (7.49) и выразить S через T с точностью до малых второго порядка относительно η_1 , то получим

$$-S = \frac{D \varrho_0 A T}{\gamma - 1} = D \varrho_0 \varepsilon. \quad (7.50)$$

Это уравнение, которое получается из интеграла энергии (7.40), если опустить в нем члены p/ϱ , $D^2/2$, $u^2/2$, имеет простой физический смысл. Оно означает, что энергия поглощающегося излучения в зоне прогретания тратится только на повышение температуры газа, и действительно, легко показать, что работа сжатия p/ϱ и изменение кинетической энергии $D^2/2 - u^2/2$, которые в основном пропорциональны η_1 с точностью до малых второго порядка, пропорциональных η_1^2 , компенсируют друг друга.

Уравнение сохранения энергии в отсутствие торможения и сжатия газа, записанное в форме

$$-S = D \varrho_0 \varepsilon(T, \varrho_0), \quad (7.51)$$

справедливо и в общем случае, когда теплоемкость зависит от температуры. Если отнести его к точке $x = 0$ непосредственно перед разрывом, то найдем максимальную температуру прогрева T_- :

$$|S_0| \approx \sigma T_1^4 = D \varrho_0 \varepsilon(T_-). \quad (7.52)$$

В газе с постоянной теплоемкостью $D \sim \sqrt{T_1}$ и $T_- \sim T_1^{3,5}$, т.е. прогрев быстро растет с возрастанием амплитуды волны. По уравнению (7.52) можно приближенно оценить и ту температуру за фронтом, при которой температура перед скачком уплотнения T_- достигает величины T_1 (мы назвали такую волну критической). Приближение заключается в том, что поток с поверхности разрыва, по-прежнему, предполагается равным σT_1^4 , тогда как в действительности он несколько больше, ибо температура за разрывом несколько выше, чем T_1 . Приближенное уравнение для определения критической амплитуды $T_1 = T_{\text{кр}}$ есть

$$\sigma T_{\text{кр}}^4 = D(T_{\text{кр}}) \varrho_0 \varepsilon(T_{\text{кр}}). \quad (7.53)$$

В табл. 7.2 приведены рассчитанные по формуле (7.52) значения температуры перед скачком уплотнения в воздухе нормальной плотности при учете реальной зависимости $\varepsilon(T)$. Из таблицы видно, что критическая температура в воздухе равна примерно 300 000 К (285 000 К по уравнению (7.53)). Как следует из определения (7.53), критическая температура есть такая температура, при которой становятся примерно одинаковыми потоки энергии вещества и излучения (вспомним замечание в начале § 14).

Таблица 7.2

D , км/с	T_1 , К	ε_- , эВ/молекула	T_- , К	D , км/с	T_1 , К	ε_- , эВ/молекула	T_- , К
23,3	50 000	3,7	4 000	56,5	150 000	122	60 000
28,5	65 000	8,4	9 000	81,6	250 000	635	175 000
32,1	75 000	13,1	12 000	86,2	275 000	910	240 000
40,6	100 000	32,7	25 000	88,1	285 000	1020	285 000

Возвращаясь к исходным уравнениям для газа с постоянной теплоемкостью, найдем приближенное решение в зоне прогрева докритической волны. Если температура в зоне прогрева мала по сравнению с температурой за фронтом ($T_- < T_1$), то равновесная плотность излучения, пропорциональная четвертой степени температуры газа ($U_p \sim T^4$), гораздо меньше фактической плотности U , которая определяется пронизывающим газ излучением, выходящим из-за поверхности разрыва и имеющим температуру T_1 ($U \sim |S_0| \sim T_1^4$).

Излучение, рожденное в самой зоне прогрева, при этом дает малый вклад в полный поток и плотность. Плотность излучения, таким образом, существенно неравновесна в зоне прогрева. Пренебрегая в уравнениях (7.42), (7.46) U_p , по сравнению с U , найдем решение перед разрывом при $\tau < 0$:

$$-S = \frac{cU}{\sqrt{3}} = -S_0 e^{-\sqrt{3}|\tau|}, \quad (7.54)$$

$$T = T_- e^{-\sqrt{3}|\tau|}, \quad (7.55)$$

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0} = \frac{\varrho_- - \varrho_0}{\varrho_0} e^{-\sqrt{3}|\tau|}, \quad (7.56)$$

$$p = p_- e^{-\sqrt{3}|\tau|}. \quad (7.57)$$

Все величины экспоненциально падают по оптической толщине при удалении от разрыва (рис. 7.28). Значения T_- , ϱ_- , p_- легко вычислить с помощью формул (7.52), (7.48) и уравнения состояния.

В точке ударного разрыва плотность и поток излучения остаются непрерывными. В самом деле, разрыв в плотности излучения соответствовал бы по формуле (7.43) бесконечному потоку, который в действительности ограничен законами сохранения энергии, а разрыв в потоке приводил бы к нестационарному накоплению или убыли энергии излучений в точке разрыва. Следовательно, текущая точка на диаграммах T, η и S, η при прохождении вязкого скачка перескакивает из положения B на одной ветви кривых на другую ветвь в положение C , соответствующее тому же самому потоку S_0 . (Производная потока при этом, конечно, терпит разрыв.) То же происходит и с точкой на диаграмме p, η : газ сжимается в скачке уплотнения в соответствии с ударной адиабатой CB , проходящей через точку B . После ударного сжатия состояние частицы монотонно приближается к конечному, к точке D . Температура и поток излучения при этом уменьшаются, а плотность газа и давление — возрастают.

В волне небольшой амплитуды превышение температуры за разрывом T_+ над температурой за фронтом T_1 , как видно из диаграммы T, η , так же как и изменение объема за разрывом, невелики. Исключая, как и раньше, η из уравнений (7.48), (7.49), для второй ветви найдем с точностью до малых второго порядка относительно η_1 связь потока и температуры за разрывом:

$$-S = \frac{3-\gamma}{\eta_1} D \varrho_0 A (T - T_1). \quad (7.58)$$

Чтобы приближенно решить уравнение переноса излучения в области за разрывом, заметим, что температура здесь меняется мало и можно положить $U_p \approx U_{p1} = 4\sigma T_1^4/c = \text{const}$. Получим при $\tau > 0$:

$$-S = \frac{c}{\sqrt{3}} (U_{p1} - U) = -S_0 e^{-\sqrt{3}\tau}, \quad (7.59)$$

$$T - T_1 = (T_+ - T_1) e^{-\sqrt{3}\tau}, \quad (7.60)$$

где $T_+ - T_1 = [(3-\gamma)/(\gamma+1)]T_- \approx 0,78 T_-$ при $\gamma = 1,25$.

Значение плотности излучения в точке разрыва найдем, сшивая в точке $\tau = 0$ две ветви кривых $U(S)$, которые даются формулами (7.54), (7.59). Получим ¹⁾

$$U_0 = \frac{1}{2} U_{p1} = 2\sigma T_1^4. \quad (7.61)$$

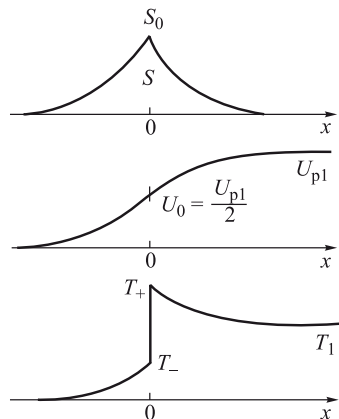


Рис. 7.28. Профили потока и плотности излучения и температуры в ударной волне докритической амплитуды

¹⁾ Заметим, что при этом появляется новое значение потока — $S_0 = (2/\sqrt{3}) \sigma T_1^4$, немного отличающееся от прежнего: $-S_0 = \sigma T_1^4$. Эта небольшая несогласованность является следствием несовершенства диффузионного приближения и исчезает при использовании точного уравнения переноса излучения; см. об этом в работе [47].

Профили плотности и потока излучения в докритической волне изображены на рис. 7.28, где для сопоставления приведен также профиль температуры.

Посмотрим, каковы пределы применимости приближенного решения уравнений в зоне прогревания. Формула (7.50) имеет большую точность даже в волне критической амплитуды, так как при $\gamma = 1,25$ сжатие перед разрывом мало: $\varrho_-/\varrho_0 \leq 1,13$.

Что же касается решения уравнения переноса излучения (7.54), то оно получено в приближении $U_p \ll U$ и теряет силу, когда плотность излучения U становится сравнимой с равновесной. Из формул (7.54), (7.50) следует, что это происходит при температуре T_k , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{4\sigma T_k^4}{\sqrt{3}} = \frac{D\varrho_0 AT_k}{\gamma - 1}. \quad (7.62)$$

Сравнивая это уравнение с выражением (7.53), в котором полагаем теплоемкость постоянной $\left(\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}AT\right)$, и замечая, что D слабо зависит от температуры ($D \sim \sqrt{T_1}$ при $\gamma = \text{const}$), мы видим, что температура T_k весьма близка к критической температуре $T_{кр}$. Отсюда следует, что плотность излучения в зоне прогревания всегда неравновесна при температурах ниже критической и наше приближенное решение справедливо для волн с амплитудами вплоть до критической.

Существенно, что плотность излучения становится порядка равновесной, когда сравниваются потоки энергии излучения и гидродинамический. Как видно из формул (7.54)–(7.57), оптическая толщина зоны прогревания в волне докритической амплитуды имеет порядок единицы. Геометрическая ширина зоны, следовательно, порядка среднего по спектру пробега излучения. В воздухе нормальной плотности эта ширина порядка 10^{-2} – 10^{-1} см. Она тем больше, чем выше температура за фронтом, так как пробег растет с увеличением энергии квантов. Такой же примерно порядок имеет и ширина зоны за скачком уплотнения, где происходит приближение к конечным состояниям газа и излучения.

§ 17. Ударная волна сверхкритической амплитуды. Рассмотрим ударную волну большой, сверхкритической амплитуды, когда температура за фронтом $T_1 > T_{кр}$. Температура в зоне прогревания возрастает от нуля до величины T_- , которая равна конечной T_1 и, следовательно, тоже больше, чем $T_{кр}$. Поскольку температура T_k , определенная формулой (7.62), близка к критической $T_{кр}$, T_- больше, чем T_k . Сжатие в зоне прогревания невелико и уравнение (7.50) остается в силе.

На переднем краю зоны, где температура ниже T_k , излучение по-прежнему неравновесно и справедливо решение типа (7.54), (7.55), в котором T, S и U экспоненциально спадают с оптической толщиной. В точке, где температура достигает величины T_k , плотность излучения становится порядка равновесной и поток S порядка степен-Больцмановского потока σT^4 . При дальнейшем продвижении по направлению к разрыву поток излучения растет в силу закона сохранения (7.50) пропорционально температуре ($S \sim T$), т. е. становится меньше степен-Больцмановского потока σT^4 . Это означает, что в области температур, где $T > T_k$, односторонние потоки противоположного направления (которые порядка σT^4) в значительной степени компенсируют друг друга, генерация излучения в каждой точке сравнима с поглощением и, следовательно, плотность излучения близка к термодинамически равновесной. Другими словами, в указанной области зоны прогревания излучение находится в локальном равновесии с веществом и перенос излучения имеет характер лучистой теплопроводности. Поток S теперь определяется градиентом температуры и малость его по сравнению со степен-Больцмановским соответствует тому, что температура мало меняется на расстоянии порядка длины пробега света. Чтобы

получить решение в зоне лучистой теплопроводности, следует заменить в уравнении диффузии (7.43) плотность излучения U равновесной величиной $U_p \approx U$:

$$S = -\frac{c}{3} \frac{dU_p}{d\tau} = -\frac{16\sigma c T^3}{3} \frac{dT}{d\tau}. \quad (7.63)$$

Решая это уравнение совместно с алгебраическим уравнением (7.50), найдем профили температуры, потока и плотности излучения в равновесной области зоны прогрева. Они должны быть сшиты с решением на переднем краю в неравновесной области в точке с температурой $T = T_k$, эффективно разграничивающей обе области. Оптическую координату этой точки обозначим через τ_k . После элементарного вычисления получим решение в неравновесной области, при $\tau < |\tau_k|$, $|\tau| > |\tau_k|$,

$$\frac{T}{T_k} = \frac{cU}{4\sigma T_k^4} = \frac{\sqrt{3}S}{4\sigma T_k^4} = e^{-\sqrt{3}|\tau - \tau_k|}; \quad (7.64)$$

в равновесной области, при $\tau_k < \tau < 0$, $0 < |\tau| < |\tau_k|$,

$$\frac{T}{T_k} = \frac{\sqrt{3}S}{4\sigma T_k^4} = \left(\frac{cU}{4\sigma T_k^4} \right)^{1/4} = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} |\tau - \tau_k| \right)^{1/3}, \quad (7.65)$$

причем τ_k выражается через температуру перед разрывом

$$|\tau_k| = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left[\left(\frac{T_-}{T_k} \right)^3 - 1 \right]. \quad (7.66)$$

Поскольку температура в неравновесной зоне падает экспоненциально, уменьшаясь в несколько раз на оптическом расстоянии, равном единице, величина $|\tau_k|$ в случае очень сильной волны, когда $T_-^3 \gg T_k^3$, представляет собой оптическую толщину зоны прогрева.

Следует отметить, что в равновесной области длина пробега света усредняется по Росселанду (см. § 12 гл. II). Температура перед разрывом в сверхкритической волне T_- почти совпадает с температурой за фронтом T_1 .

Температура перед разрывом T_- никогда не может стать выше, чем конечная температура за фронтом T_1 . В самом деле, если $T_- > T_1$, то плотность излучения в зоне прогрева перед разрывом, которая равна примерно $U_- \approx 4\sigma T_-^4/c$, становится больше плотности излучения за фронтом $U_{p1} = 4\sigma T_1^4/c$. Следовательно, в зоне между разрывом и областью конечного состояния ($0 < \tau < +\infty$) плотность излучения уменьшается при удалении от разрыва. Поток $S \sim -dU/d\tau$, положителен и направлен в сторону движения газа. Но это противоречит формулам (7.48), (7.49), которые являются следствием законов сохранения и которые свидетельствуют о том, что поток в ударной волне везде отрицателен и направлен противоположно движению газа.

Таким образом, температура T_- ограничена сверху величиной T_1 . Принципиальная невозможность нагревания газа перед скачком уплотнения до температуры, превышающей температуру за фронтом T_1 , одновременно свидетельствует и о необходимости возникновения разрыва в решении (текущая точка на диаграммах T, η и S, η , чтобы достичь конечного положения D , обязательно должна «перепрыгнуть» из положения B' на другую ветвь кривых). Изложенные физические соображения о невозможности превышения температуры T_- над T_1 и необходимости возникновения разрыва находят свое подтверждение в строгом исследовании уравнений режима (см. работу [42]).

Поскольку в сверхкритической волне $T_- \approx T_1$, а плотность излучения перед разрывом близка к равновесной, она еще перед разрывом почти достигает своего конечного значения. Таким образом,

$$U_0 = U_- \approx \frac{4\sigma T_-^4}{c} \approx \frac{4\sigma T_1^4}{c} = U_{p1}, \quad (7.67)$$

и в области за разрывом плотность излучения остается практически постоянной:

$$U(\tau) \approx U_{p1} = \frac{4\sigma T_1^4}{c} \quad \text{при } \tau > 0. \quad (7.68)$$

Из формулы (7.65) следует, что поток в точке разрыва равен

$$S_0 = \frac{4\sigma T_k^4}{\sqrt{3}} \frac{T_1}{T_k}. \quad (7.69)$$

На диаграммах T, η и S, η текущая точка в сверхкритической волне движется вдоль кривых от точки A до точки B' , а затем перескакивает в точку C' , где поток тот же самый. Температуру за разрывом T_+ можно вычислить по формулам (7.48), (7.49). Она равна

$$T_+ = (3 - \gamma)T_1. \quad (7.70)$$

Если пользоваться приближением лучистой теплопроводности в области за разрывом, то, в соответствии с полученным условием постоянства плотности излучения в этой области, постоянной оказывается и температура газа. Температура на скачке уплотнения непрерывна и равна конечной T_1 . Текущая точка на диаграммах T, η и S, η из положения B' непосредственно перед разрывом попадает прямо в конечное положение D . Поток при этом, конечно, испытывает разрыв, так как перед скачком уплотнения он отличен от нуля и равен S_0 , а в конечном состоянии (точка D) он равен нулю.

Таким образом, мы имеем дело с типичным случаем «изотермического скачка», с которым мы уже сталкивались в § 3 и 12.

Возникновение «изотермического скачка» есть следствие математического приближения, в котором поток считается пропорциональным градиенту температуры. Это исключает возможность существования скачка температуры, так как при разрыве температуры поток становится бесконечным.

На самом же деле в силу стационарности процесса в скачке уплотнения непрерывен поток, а температура испытывает разрыв.

Противоречия здесь никакого нет: просто в области за разрывом излучение неравновесно (плотность ниже равновесной, так как плотность соответствует температуре $T_- \approx T_1$, а температура газа $T_+ > T_1$) и поток, который определяется градиентом истинной плотности излучения, не выражается через градиент температуры. За ударным разрывом по-прежнему имеется пик температуры, и профиль температуры в сверхкритической волне имеет вид, изображенный на рис. 7.25.

Оценим оптическую толщину пика температуры за разрывом из простых физических соображений. Геометрическая толщина пика Δx такова, что рожденное в этой зоне излучение дает поток S_0 , выходящий с поверхности разрыва и идущий на прогревание втекающего в волну газа.

Энергия, излучаемая в 1 с в слое Δx (на 1 см^2 поверхности разрыва), порядка

$$\frac{\sigma T_+^4}{l} \Delta x \sim \frac{\sigma T_1^4}{l} \Delta x.$$

Эта величина приближенно равна потоку S_0 , который по формуле (7.69) порядка $\sigma T_K^3 T_1$. Отсюда получается толщина пика температуры:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{l} \sim \left(\frac{T_K}{T_1} \right)^3. \quad (7.71)$$

Она быстро уменьшается с увеличением амплитуды волны и в очень сильной волне пик гораздо тоньше пробега излучения. Поэтому он и «срезается» в приближении лучистой теплопроводности, из которого выпадают детали, связанные с расстояниями, меньшими пробега излучения.

В заключение приведем значение ширины зоны прогрева в ударной волне сверхкритической амплитуды, распространяющейся по воздуху нормальной плотности. Эти значения оценены с помощью формулы (7.66) и рассчитанных по методу § 8 гл. V росселандовых пробегов излучения в реальном воздухе. При $T_1 = 500\,000$ К, $\tau_K = 3,4$, а ширина порядка 40 см. При $T_1 = 750\,000$ К $\tau_K = 14$, а ширина порядка 2 м. Поскольку пик температуры очень узкий, эти ширины в то же время представляют собою и ширины всего фронта ударной волны.

§ 18. Ударная волна при больших плотности энергии и давлении излучения.

В § 3 было показано, что в не слишком слабой ударной волне в случае, когда имеется теплопроводность, но отсутствует вязкость, непрерывный переход газа из начального состояния в конечное невозможен. Неминуемо возникает разрыв, который соответствует вязкому скачку уплотнения, и в рамках данного приближения является бесконечно тонким (так как с самого начала была исключена из рассмотрения вязкость вещества). Если теплопроводностный поток пропорционален градиенту температуры, то на разрыве испытывают скачок все величины, за исключением температуры: имеет место «изотермический» скачок. В § 12 и 17 были рассмотрены конкретные примеры «изотермических» скачков, к которым приводят электронная и лучистая теплопроводности.

Однако при чрезвычайно больших амплитудах ударной волны, когда плотность энергии и давление излучения становятся достаточно большими по сравнению с энергией и давлением вещества, положение меняется. Разрыв исчезает, и газ в ударной волне переходит непрерывным образом из начального состояния в конечное только за счет лучистой теплопроводности, даже если вязкость вещества не принимается во внимание. Этот вопрос рассматривали С. З. Беленький и (позднее) В. А. Белоконь [50].

Для описания внутренней структуры фронта ударной волны исходим из общих гидродинамических уравнений (7.40), где S — поток лучистой теплопроводности. Полные давление и энергия складываются из величин, относящихся к веществу и к излучению, причем излучение считаем термодинамически равновесным. Точка, описывающая состояние в волне на диаграмме p, V , движется вдоль прямой,

$$p = \varrho_0 D^2 (1 - \eta), \quad \eta = \frac{V}{V_0}, \quad (7.72)$$

причем

$$p = A \varrho_0 \frac{T}{\eta} + \frac{4}{3} \frac{\sigma T^4}{c}. \quad (7.73)$$

Температура и относительный объем T_1, η_1 за фронтом волны связаны между собой уравнением ударной адиабаты (в переменных температура — объем), которое при

учете давления и энергии излучения было выведено в § 10 гл. III (формула (3.76)). Перепишем его здесь в виде

$$\frac{A\varrho_0 T_1}{\eta_1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_{10}} - 1 \right) = \frac{4\sigma T_1^4}{3c} (1 - 7\eta_1), \quad (7.74)$$

где $\eta_{10} = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ — конечный объем без учета плотности и давления излучения. Из этой формулы видно, что при $p_{\text{изл}} \gg p_{\text{газ}}$, $\eta_1 = 1/7$; при $p_{\text{изл}} \ll p_{\text{газ}}$, $\eta_1 = \eta_{10}$.

Рассмотрим зависимость температуры от объема при сжатии газа во фронте волны, для чего подставим выражение (7.73) в уравнение прямой (7.72):

$$A\varrho_0 \frac{T}{\eta} + \frac{4}{3} \frac{\sigma T^4}{c} = \varrho_0 D^2 (1 - \eta).$$

Эту формулу удобнее переписать иначе, заменить в ней $\varrho_0 D^2$ через T_1 и η_1 :

$$A\varrho_0 \frac{T}{\eta} + \frac{4}{3} \frac{\sigma T^4}{c} = \left(A\varrho_0 \frac{T_1}{\eta_1} + \frac{4}{3} \frac{\sigma T_1^4}{c} \right) \frac{1 - \eta}{1 - \eta_1}. \quad (7.75)$$

Функция $T(\eta)$ в интервале $0 < \eta < 1$ имеет максимум (обозначим координаты максимума через T_{max} , η_{max}).

Поток излучения в волне S , как и в случае, когда плотность и давление излучения малы, направлен всегда в одну сторону, навстречу потоку газа, и обращается в нуль только при $x = -\infty$ и $x = +\infty$, перед и за фронтом волны. Поэтому температура в волне обязана монотонно возрастать от начальной $T = 0$ до конечной T_1 , в противном случае поток, $S \sim -dT/dx$, менял бы знак внутри волны.

Если давление излучения мало, $p_{\text{изл}} \ll p_{\text{газ}}$, то, как следует из формулы (7.75), $\eta_{\text{max}} = 1/2 > \eta_1 \approx \eta_{10} = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. При этом точка на диаграмме T, η перескакивает с одной ветви кривой $T(\eta)$ на другую, минуя максимум, и возникает изотермический скачок (см. § 3, 17).

Если же давление излучения велико, $p_{\text{изл}} \gg p_{\text{газ}}$, то точка η_{max} , где функция $T(\eta)$ проходит через максимум, лежит за интервалом реально осуществляющихся объемов, $1/2 \approx \eta_1 < \eta < 1 : \eta_{\text{max}}$ близко к нулю (это видно из уравнения (7.75)). Таким образом, в этом случае плотность газа в волне меняется непрерывным образом вместе с температурой и разрыва в волне нет. Этот случай показан на диаграмме T^4, η (рис. 7.29). Профили температуры, плотности газа и потока излучения в такой волне изображены схематически на рис. 7.30.

Найдем амплитуду волны, при которой исчезает разрыв. Она, очевидно, соответствует такому случаю, когда точка максимума температуры $T_{\text{max}}, \eta_{\text{max}}$ совпадает с конечной точкой T, η_1 (точно так же как и в § 3). В самом деле, при $\eta_1 < \eta_{\text{max}}$ («малые» амплитуды) разрыв существует, при $\eta_{\text{max}} < \eta_1$ («большие» амплитуды) разрыва нет. Обозначим параметры фронта, соответствующие переходной амплитуде, разграничивающие области непрерывного решения и изотермического скачка через T^*, η^* .

Дифференцируя уравнение (7.75) для функции $T(\eta)$ и полагая $dT/d\eta = 0$, $T = T^*$, $\eta = \eta^*$, а также полагая в этом уравнении и в уравнении ударной адиабаты (7.74) $T_1 = T^*$, $\eta_1 = \eta^*$, получим систему двух уравнений для неизвестных T^*, η^* :

$$\frac{A\varrho_0 T^*}{\eta^{*2}} = \left(A\varrho_0 \frac{T^*}{\eta^*} + \frac{4}{3} \frac{\sigma T^{*4}}{c} \right) \frac{1}{1 - \eta^*}, \quad \frac{A\varrho_0 T^*}{\eta^*} = \left(\frac{\eta^*}{\eta_{10}} - 1 \right) = \frac{4\sigma T^{*4}}{3c} (1 - 7\eta^*).$$

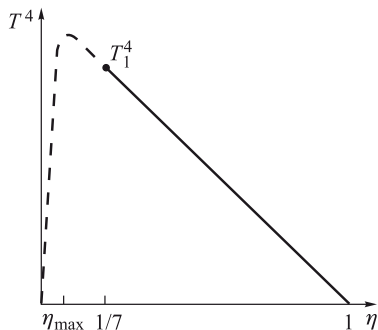


Рис. 7.29. T^4, η -диаграмма для ударной волны с излучением в отсутствие разрыва

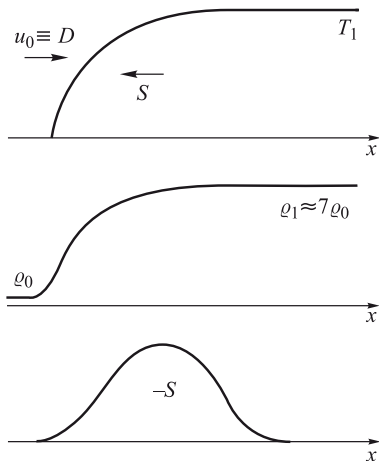


Рис. 7.30. Профили температуры, плотности газа и потока излучения в ударной волне с учетом энергии и давления излучения в случае, когда скачок отсутствует

Исключая из этой системы T^* , получим квадратное уравнение для η^* , один из корней которого, отвечающий реальному состоянию, равен

$$\eta^* = \frac{1}{4 + \sqrt{2 + 1/\eta_{10}}}. \quad (7.76)$$

Так, например, при $\gamma = 5/3$, $\eta_{10} = 1/4$, $\eta^* = 1/6,45$ (это значение несколько больше предельного объема при $p_{\text{изл}} \gg p_{\text{газ}}$, равного $1/7$). Переходная амплитуда согласно (7.74) соответствует отношению давлений излучения и вещества, в конечном состоянии равному $(p_{\text{изл}}/p_{\text{газ}})^* = \frac{4\sigma T^{*4}}{3c} / \frac{A\rho_0 T^*}{\eta^*} = 4,45$.

Заметим, что при этой амплитуде скорость газа за фронтом относительно фронта в точности равна изотермической скорости звука в конечном состоянии (а при амплитудах больших, чем переходная, когда разрыва нет, скорость газа за фронтом больше изотермической скорости звука: фронт движется со сверхзвуковой скоростью относительно газа за ним).

Профиль температуры в ударной волне без разрыва можно найти, воспользовавшись, как обычно, уравнениями гидродинамики (7.40) и уравнением для потока энергии, переносимой лучистой теплопроводностью, $S = -\frac{cl}{3} \frac{d}{dx} \frac{4\sigma T^4}{c}$. Мы здесь на этом останавливаться не будем.

В работе В. С. Имшенника [51] рассматривается ударная волна в двухтемпературной плазме с учетом излучения (температуры электронов и ионов не предполагаются одинаковыми). В работе [88] исследуется структура фронта ударной волны с учетом переноса энергии и импульса излучением на основе уравнений радиационной гидродинамики (в нерелятивистском приближении).

Глава VIII

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

1. Динамика неравновесного газа

§ 1. Уравнения газовой динамики при отсутствии термодинамического равновесия. В предыдущей главе, при изучении структуры фронта ударной волны в газе с замедленным возбуждением некоторых степеней свободы, мы уже имели возможность познакомиться с одной из простейших задач динамики неравновесного газа. Параметры за фронтом ударной волны в области, где устанавливается полное термодинамическое равновесие, не зависят от механизма и скоростей неравновесных процессов, однако кинетика этих процессов существенным образом сказывается на распределении гидродинамических величин в неравновесной области и на ее ширине. Искажения газодинамических потоков, вносимые неравновесными процессами, связаны главным образом с изменениями теплоемкости и эффективного показателя адиабаты неравновесного газа, от которых зависит ход газодинамического процесса. Влияние показателя адиабаты на газодинамические решения можно видеть на примерах тех задач, которые были рассмотрены в гл. I. Так, при нестационарном истечении газа из трубы в пустоту скорость истечения ранее покоившегося газа равна $u = \frac{2c_0}{\gamma - 1}$, где c_0 — скорость звука в исходном состоянии, $c_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$.

Предположим, что первоначально равновесный двухатомный газ, нагретый до такой температуры, что в нем колебания возбуждены «классически», с открытием заслонки трубы настолько быстро расширяется, что колебания остаются замороженными, и энергия колебаний при расширении не успевает превращаться в кинетическую энергию истечения¹⁾.

Это означало бы, что скорость истечения соответствует не равновесному показателю адиабаты $\gamma = 9/7$, а показателю $\gamma' = 7/5$, т.е. будет, грубо говоря, в $7/5 = 1,4$ раза меньше.

Уже из этого простейшего рассуждения видно, какое значительное влияние может оказать неравновесность газа на динамику процесса. Необходимость учета кинетики установления равновесия возникает всякий раз, когда мы имеем дело с быстропере-

¹⁾ При расширении плотность газа уменьшается, кинетические процессы замедляются, и переход колебательной энергии в энергию поступательного теплового движения молекул, который необходим для последующего превращения последней в энергию направленного, гидродинамического движения, затягивается надолго.

менными процессами или с процессами, характерные масштабы которых сравнимы с «длинами» релаксации.

Одной из важнейших практических задач такого типа является задача обтекания тела сильно разреженным газом, в котором времена релаксации сравнимы с временем обтекания тела, т.е. «длина» релаксации сравнима с характерными размерами тела. При входе в атмосферу баллистических ракет с большой сверхзвуковой скоростью перед телом образуется так называемая головная ударная волна, как показано на рис. 8.1. Расстояние отхода ударной волны от передней точки тела обычно в несколько или раз в десять меньше радиуса кривизны передней части тела. Если газ настолько разрежен, что на расстоянии отхода укладывается не очень большое число газокинетических пробегов, то в частицах газа за фронтом ударной волны не успевают возбуждаться медленно релаксирующие степени свободы, например, не успевает устанавливаться химическое равновесие. Благодаря этому температуры в сжатом ударной волной газе оказываются более высокими, чем при условии термодинамического равновесия, что меняет режим нагревания тела. По существу, мы имеем дело здесь со случаем, когда важен характер газодинамических распределений в неравновесной зоне ударной волны, возникающей за скачком уплотнения.

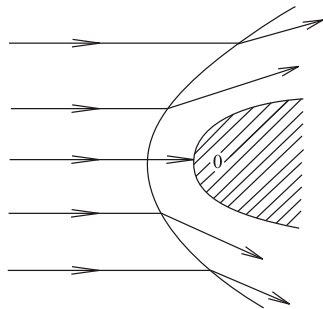


Рис. 8.1. Головная ударная волна при сверхзвуковом обтекании тела

В ряде задач оказывается возможным приближенное описание динамики неравновесного газа путем использования некоторого эффективного значения показателя адиабаты, соответствующего той или иной степени заморозенности части теплоемкости, например, когда изменением энергии в тех или иных степенях свободы за характерные гидродинамические времена вообще можно пренебречь.

В общем же случае приходится рассматривать газодинамический процесс одновременно с кинетикой неравновесных процессов, что вносит усложнение в систему уравнений, описывающих явление.

Динамика невязкого и нетеплопроводного термодинамически равновесного газа описывается уравнениями непрерывности, движения и адиабатичности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (8.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad (8.2)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (8.3)$$

к которым присоединяется термодинамическая связь энтропии с давлением и плотностью: $S(p, \rho)$ (например, в газе с постоянной теплоемкостью $S = c_V \ln(p \rho^{-\gamma}) + \text{const}$).

Будем интересоваться движением газа, состояние которого отклоняется от термодинамического равновесия. При этом мы по-прежнему, не будем учитывать вязкость и теплопроводность, считая, что неравновесность связана исключительно с замедленным протеканием внутренних процессов, не выходящих за рамки данной частицы вещества, скажем, замедленным возбуждением молекулярных колебаний.

В неравновесном случае вместо уравнения адиабатичности (8.3), которое теперь несправедливо, следует пользоваться более общим уравнением, выражающим закон сохранения энергии; оно справедливо всегда. Полагая, что внешние источники

энергии отсутствуют¹⁾, запишем вместо (8.3)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0. \quad (8.4)$$

В состоянии термодинамического равновесия уравнения (8.4) и (8.3) в силу термодинамического тождества

$$T dS = d\varepsilon + p dV \quad (8.5)$$

эквивалентны. Если в равновесном случае внутренняя энергия ε определяется только давлением и плотностью, $\varepsilon = \varepsilon(p, \varrho)$, то в отсутствие равновесия она зависит еще и от других параметров, характеризующих состояние системы, которые не являются равновесными (например, от степени диссоциации). Не конкретизируя эти параметры, назовем их λ .

Чтобы замкнуть систему уравнений газодинамики, к уравнениям (8.1), (8.2), (8.4) следует присоединить соотношение, связывающее внутреннюю энергию с давлением, плотностью и параметрами состояния λ : $\varepsilon = \varepsilon(p, \varrho, \lambda)$, а также уравнения кинетики, которыми описываются изменения параметров λ в газовой частице с течением времени:

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda, p, \varrho).$$

Обычно функции $\varepsilon(p, \varrho, \lambda)$ и $f(\lambda, p, \varrho)$ выражаются не непосредственно через плотность и давление, а при помощи температуры:

$$\varepsilon = \varepsilon(\varrho, T, \lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda, \varrho, T).$$

При этом дополнительно вводится уравнение состояния $p = p(T, \varrho, \lambda)$.

Под температурой T везде, где это не оговаривается особо, подразумевается температура, соответствующая поступательным степеням свободы молекул (атомов, ионов), которые обычно равновесны даже в самых быстрых газодинамических процессах, так как максвелловское распределение молекул по скоростям устанавливается чрезвычайно быстро.

Рассмотрим в качестве примера неравновесной системы двухатомный газ без диссоциации, но с замедленным возбуждением молекулярных колебаний (будем интересоваться не слишком высокими температурами, при которых степень диссоциации еще ничтожно мала). Роль параметра λ при этом играет неравновесная энергия колебаний ε_k (на 1 г газа). Упомянутые выше соотношения, которые следует добавить к системе уравнений (8.1), (8.2), (8.4), в данном случае можно записать в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_k = \frac{5}{2} AT + \varepsilon_k, \quad (8.6)$$

$$p = A\varrho T, \quad (8.7)$$

$$\frac{d\varepsilon_k}{dt} = \frac{\varepsilon_k(T) - \varepsilon_k}{\tau(T, \varrho)}. \quad (8.8)$$

Здесь ε_1 — сумма энергий поступательных и вращательных степеней свободы молекул (вращательная энергия предполагается равновесной, т. е. соответствующей поступательной температуре T); $\varepsilon_k(T)$ — энергия колебаний, находящихся в термо-

¹⁾ Тепловой эффект обратимой химической реакции не является внешним источником энергии; он учитывается путем введения соответствующего слагаемого в выражение для внутренней энергии газа.

динамическом равновесии с поступательными степенями свободы молекул; $\tau(T, \rho)$ — время релаксации для установления колебательного равновесия.

Аналогичные, но по форме более сложные уравнения можно выписать и для всех других случаев, когда имеются неравновесные диссоциация, химические реакции, ионизация или когда отличаются поступательные температуры электронного и атомного (ионного) газов. Все эти случаи были разобраны в предыдущей главе при рассмотрении структуры неравновесного слоя во фронте ударной волны.

§ 2. Возрастание энтропии. Чрезвычайно важной особенностью газодинамических процессов, в которых газ неравновесен, является возрастание энтропии газа и диссипация механической энергии. Как и внутренняя энергия ε , энтропия неравновесного газа уже не определяется только двумя величинами, давлением и плотностью или температурой и плотностью, но зависит от других параметров, характеризующих неравновесное состояние: $S = S(p, \rho, \lambda)$ или $S(T, \rho, \lambda)$. Приращение энтропии dS теперь не равняется притоку тепла от внешних источников, поделенному на температуру, как в равновесном случае ($dS \neq dQ/T$). Энтропия растет с течением времени даже в отсутствие притока тепла (когда $dQ = 0$), только за счет неравновесных внутренних процессов.

Поясним это на том же примере неравновесных колебаний. Полная удельная энтропия газа S складывается из энтропии, соответствующих поступательным и вращательным степеням свободы, которые в силу равновесности можно объединить вместе, и энтропии колебаний¹⁾. Обозначим эти две части энтропии через S_1 и S_K :

$$S = S_1 + S_K. \quad (8.9)$$

Для энтропии поступательных и вращательных степеней свободы можно записать термодинамическое тождество:

$$T dS_1 = d\varepsilon_1 + p dV. \quad (8.10)$$

Обычно обмен колебательной энергией у молекул происходит гораздо быстрее, чем обмен между колебательной и поступательной энергиями. Поэтому больцмановское распределение по колебательным возбуждениям у молекул устанавливается довольно быстро, и колебаниям можно приписать определенную температуру T_K . Эта температура отвечает фактическому запасу колебательной энергии молекул $\varepsilon_K = \varepsilon_K(T_K)$; если обозначить колебательную теплоемкость c_K , то $d\varepsilon_K = c_K dT_K$. При этом, конечно, колебательная температура T_K может сильно отличаться от поступательной температуры молекул T , в чем и заключается неравновесность газа²⁾. Если колебаниям можно приписать определенную температуру T_K , то для колебательной части энтропии также можно записать термодинамическое тождество:

$$T_K dS_K = d\varepsilon_K. \quad (8.11)$$

(Энергия и энтропия колебаний не зависят от объема газа.)

Легко видеть, что энтропия неравновесной системы только растет с течением времени, независимо от того, какие превращения претерпевает газ. В самом деле,

¹⁾ При неравновесных диссоциации или ионизации следует записывать выражение для энтропии через числа частиц разных сортов (молекул и атомов, например), которые не предполагаются равновесными.

²⁾ С подобным положением мы уже встречались при рассмотрении плазмы. Максвелловские распределения и температуры в электронном и ионном газах устанавливаются очень быстро. Однако электронная и ионная температуры отличаются друг от друга вследствие замедленности обмена энергией между электронным и ионным газами.

в силу уравнений (8.9), (8.10), (8.11), (8.4), (8.6) имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_k}{dt} = \frac{1}{T} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + p \frac{dV}{dt} \right) + \frac{1}{T_k} \frac{d\varepsilon_k}{dt} = \frac{d\varepsilon_k}{dt} \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T} \right). \quad (8.12)$$

Принимая во внимание уравнение кинетики (8.8), в котором

$$\varepsilon_k = \int_0^{T_k} c_k(T') dT', \quad \text{а} \quad \varepsilon_k(T) = \int_0^T c_k(T') dT',$$

видим, что при $T_k < T$ колебания отбирают энергию от поступательных и вращательных степеней свободы, $d\varepsilon_k/dt > 0$ и $dS/dt > 0$. При $T_k > T$ колебания отдают свою энергию, $d\varepsilon_k/dt < 0$, но по-прежнему $dS/dt > 0$. Рассмотренный пример иллюстрирует второй закон термодинамики, согласно которому без участия внешних воздействий тепло всегда передается от более нагретого объекта к менее нагретому, в результате чего энтропия всей системы повышается. В данном случае «объектами» являются не соприкасающиеся тела, а различные степени свободы одного и того же тела.

Если в какой-то момент газ был термодинамически равновесным, затем участвовал в быстропротекающем процессе, в течение которого в нем было нарушено равновесие, а потом вступил в область медленных изменений состояния, чтобы снова прийти в равновесие, то в газе повышается энтропия.

Повышение энтропии газа сопровождается диссипацией механической энергии, необратимым превращением ее в тепло. Если процесс идет без участия внешних источников энергии, подчиняясь уравнению энергии (8.4), то диссипируемая энергия уже никогда и ни при каких условиях не сможет снова превратиться в механическую.

С явлением диссипации мы познакомимся более подробно в следующем параграфе при рассмотрении поглощения звука в релаксирующей среде. Поглощение звуковых волн представляет собой характерный пример диссипации механической энергии. Примером неполного использования энергии вследствие «необратимости» может служить рассмотренный выше идеализированный случай истечения газа в пустоту с полностью замороженными колебаниями. В кинетическую энергию разлета идет только «обратимая» часть внутренней энергии: энергия поступательных и вращательных степеней свободы, а энергия колебаний так и остается в молекулах, благодаря чему скорость истечения оказывается меньшей. Подобные эффекты необратимости при наличии неравновесных процессов могут привести к дополнительным потерям в высокоскоростных турбинах при высоких температурах, в соплах ракетных двигателей и т. д. На использовании эффекта повышения энтропии с течением времени основан независимый метод измерения времени колебательной релаксации τ , примененный Кантровицем [1] для исследования релаксации в CO_2 .

Газодинамическим расчетам с учетом неравновесных процессов, относящихся главным образом к проблеме обтекания и аэродинамического нагрева тел, входящих в атмосферу (спутников, баллистических ракет), посвящена обширная литература (см., например, [2, 2a]; там же имеются ссылки на многие другие работы). Мы здесь не будем останавливаться на вопросах обратного влияния физико-химической кинетики на газодинамику процессов.

Нас будет интересовать в этой главе другой вопрос: кинетика неравновесных процессов не с точки зрения влияния ее на движение газа, а с точки зрения определения концентраций различных компонентов в условиях существенно неравновесного протекания химических реакций, ионизации, конденсации паров в различных гидродинамических явлениях. При этом гидродинамика, как правило, будет

рассматриваться приближенным образом, путем использования некоторых эффективных значений показателя адиабаты, и на уже известное гидродинамическое решение будет «накладываться» кинетика интересующих процессов.

Исключение составят только следующие два параграфа, в которых будут рассмотрены явления поглощения и дисперсии звука в релаксирующей среде (т. е. будет учтено влияние неравновесных процессов на газодинамический — распространение звуковых волн).

§ 3. Аномальные дисперсия и поглощение ультразвука. Обычно заметные дисперсия и поглощение звука в газах, связанные с вязкостью и теплопроводностью, возникают только при очень малых длинах звуковых волн, сравнимых с длиной пробега частиц в газе, и частотах, сравнимых с частотой газокинетических столкновений (см. § 22 гл. I).

Однако при распространении ультразвуковых волн в молекулярных газах иногда наблюдаются аномально высокие дисперсия и поглощение в области гораздо больших длин волн и меньших частот. Эти явления связаны с релаксационными процессами установления равновесия в медленно возбуждающихся степенях свободы газа. В предельном случае низких частот времена релаксации для установления равновесия в тех степенях свободы, которые дают заметный вклад в теплоемкость, малы по сравнению с периодом звуковых колебаний. В этих условиях состояние частицы газа в каждый момент является термодинамически равновесным и «следит» за изменениями давления и плотности в звуковой волне.

Скорость звука, равная корню квадратному из адиабатической производной от давления по плотности, соответствует своему термодинамически равновесному значению:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{A}{c_v}. \quad (8.13)$$

Наоборот, в предельном случае очень высоких частот медленно релаксирующие степени свободы не успевают возбуждаться в звуковой волне, их энергия попросту соответствует температуре невозмущенного состояния T_0 . Эти степени свободы не участвуют в периодическом изменении состояния газа, «заморожены», и не влияют на адиабатическую связь изменений давления и плотности. Активная часть теплоемкости теперь меньше равновесной, показатель адиабаты и скорость звука больше, чем при низких частотах.

В промежуточной области частот происходит постепенное изменение скорости звука от равновесного значения a_0 до значения a_∞ , соответствующего «замороженной» части теплоемкости, т. е. возникает дисперсия. Так, например, измерения Кнезера [3, 4] показали, что скорость звука в углекислом газе при комнатной температуре меняется от $a_0 = 260$ м/с при частоте ν порядка 10^4 с⁻¹ (10 кГц) до $a_\infty = 270$ м/с при $\nu \sim 10^6$ с⁻¹ (1 МГц). Низкая скорость звука соответствует равновесному значению теплоемкости:

$$c_v = c_{\text{пост}} + c_{\text{вращ}} + c_{\text{кол}} = \frac{3}{2}A + A + 0,8A = 3,3A$$

(молекула CO₂ линейна, так что $c_{\text{вращ}} = A$; при комнатной температуре возбуждаются только низкочастотные колебания молекулы с $h\nu/k = 954$ К, причем колебательная теплоемкость еще меньше своего классического значения A). Высокая скорость звука соответствует замороженным колебаниям, т. е. теплоемкости

¹⁾ Мы пользуемся всегда удельными теплоемкостями: A — газовая постоянная, рассчитанная на 1 г. Во избежание путаницы скорость звука здесь будем обозначать буквой a вместо c .

$c_V = c_{\text{пост}} + c_{\text{вращ}} = 2,5 A$. Из этих измерений следует, что время релаксации для возбуждения колебаний в молекуле CO_2 (при атмосферном давлении) соответствует некоторой промежуточной частоте звука, а именно $\tau_{\text{кол}} \sim 1/\nu \sim 10^{-5}$ с. Вращения в молекулах при комнатной температуре возбуждаются очень быстро, и дисперсия, связанная с замедленным возбуждением вращений, могла бы наблюдаться при атмосферном давлении только при чрезвычайно больших частотах $\nu \sim 1/\tau_{\text{вращ}} \sim 10^9\text{--}10^{10}$ с⁻¹ (исключение составляет только водород, см. § 2 гл. VI).

Дисперсия звука наблюдается и в газах, в которых происходят медленные химические превращения при изменениях температуры (и плотности) в звуковой волне. Примером может служить реакция полимеризации двуокиси азота $2\text{NO}_2 \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4$, которая легко протекает при комнатной температуре, так как теплота активации ее в обеих направлениях мала. Именно применительно к такого рода системам теория дисперсии звука была впервые развита А. Эйнштейном в 1920 г. [5]. По-видимому, аналогичные явления происходят и при распространении ультразвука в некоторых жидкостях.

Измерения дисперсии и поглощения ультразвука служат одним из важнейших методов изучения релаксационных процессов и экспериментального определения времен релаксации. Этому вопросу посвящена большая литература¹⁾, и мы не будем здесь подробно его обсуждать. Остановимся только на основных физических особенностях и закономерностях явления.

Дисперсия звука в релаксирующем веществе всегда сопровождается повышенным поглощением, которое значительно превышает «естественное» поглощение за счет обычной вязкости и теплопроводности. В звуковой волне частица вещества совершает последовательные циклические превращения, возвращаясь по окончании каждого цикла к исходному состоянию. Если в частице протекают внутренние неравновесные процессы, то они неизбежно приводят к повышению энтропии, диссипации механической энергии, т.е. к поглощению звука. Следует подчеркнуть, что при наличии диссипации состояние частицы по окончании цикла несколько отличается от начального (так как энтропия ее повышается).

Однако это отличие, скажем, приращение температуры, пропорциональное приращению энтропии, есть величина второго порядка малости по отношению к малой амплитуде звуковой волны Δp или ΔT , поскольку приращение энтропии ΔS пропорционально звуковой энергии, которая в свою очередь пропорциональна $(\Delta p)^2$ (см. § 3 гл. I). Поэтому в первом приближении движение в звуковой волне даже при наличии поглощения является адиабатическим и циклы можно рассматривать как замкнутые.

Механизм диссипации механической энергии и поглощения звука легко себе уяснить, рассматривая цикл в газе на диаграмме p, V . На рис. 8.2 проведено два семейства адиабат, одно из которых (I) отвечает равновесным изменениям состояния, а другое (II) — замороженной части теплоемкости. Адиабаты проведены вблизи невозмущенного состояния газа, обозначенного точкой O . При очень медленных звуковых колебаниях точка, описывающая состояние газа p, V , колеблется около центра O вдоль одной (равновесной) адиабаты, обозначенной на рис. 8.2 как I'. В предельном случае очень высокой частоты точка колеблется около центра вдоль одной «замороженной» адиабаты, обозначенной через II'. И в том и в другом случаях неравновесные процессы не протекают, энтропия газа не меняется и поглощения звука нет. Работа, совершенная над газом за цикл, численно равна площади фигуры, описываемой точкой на диаграмме p, V , равна нулю, что и свидетельствует об отсутствии поглощения. В том, что во втором случае энтропия газа, как и в первом,

¹⁾ Обзор ее и ссылки можно найти, например, в [6].

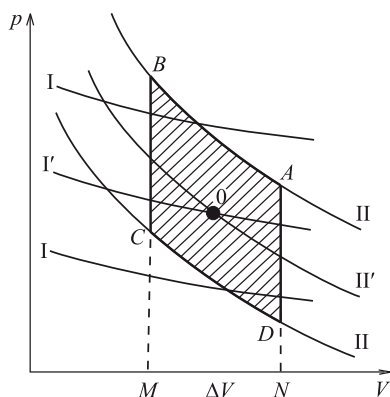


Рис. 8.2. p, V -диаграмма для цикла в звуковой волне с прямоугольным профилем

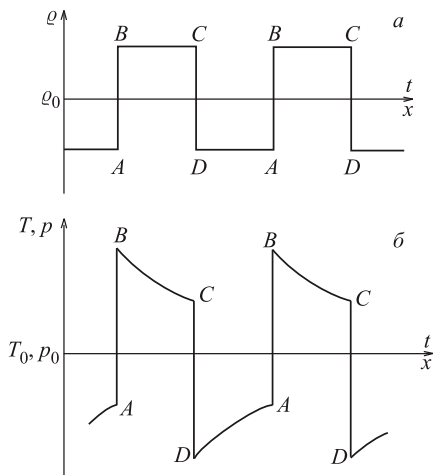


Рис. 8.3. Акустическая волна в релаксирующем газе со ступенчатым профилем плотности: а) профиль плотности; б) профиль температуры

термодинамически равновесном, не меняется, легко убедиться на примере колебательной релаксации. Как видно из формулы (8.12), скорость изменения энтропии в неравновесном процессе пропорциональна скорости изменения энергии колебаний. Но при строго замороженных колебаниях их энергия вообще не меняется, $\varepsilon_k = \text{const}$ и $dS/dt = 0$.

Рассмотрим теперь звуковые волны промежуточных частот, при которых существенно протекание релаксационных процессов (для определенности снова рассматриваем колебательную релаксацию). Для простоты представим себе, что звуковая волна имеет своеобразный, ступенчатый профиль плотности, изображенный на рис. 8.3, а¹⁾.

Этот график можно рассматривать как распределение плотности по координате в данный момент времени или же как закон изменения плотности в данной частице газа во времени. То же относится и к рис. 8.3, б, на котором показан соответствующий профиль температуры (или давления; профили температуры и давления в данном случае подобны друг другу).

Будем следить за изменением состояния газовой частицы в волне как на диаграмме p, V рис. 8.2, так и на рис. 8.3, а и б. При очень быстром сжатии газа от точки А до точки В состояние его меняется вдоль «замороженной» адиабаты II. При этом энтропия не меняется, над газом совершается положительная работа, численно равная площади $NABM$. Температура и давление газа резко возрастают, а колебательная энергия остается неизменной, соответствующей старой, низкой температуре. Затем в течение некоторого времени плотность газа остается неизменной (переход $B \rightarrow C$). Происходит возбуждение колебаний, часть энергии отбирается от поступательных и вращательных степеней свободы, температура и давление понижаются, энтропия возрастает (см. формулу (8.12)): $T_k < T$, $d\varepsilon_k/dt > 0$, $dS/dt > 0$.

¹⁾ Этот весьма наглядный пример рассматривался и ранее, например в книге Г. С. Горелика [7].

Поскольку объем газа не меняется, работа в период перехода $B \rightarrow C$ не совершается.

Далее, газ очень быстро расширяется (переход $C \rightarrow D$) вдоль «замороженной» адиабаты II. Температура и давление падают, энтропия не меняется, колебательная энергия также не меняется, сохраняя свое значение, приобретенное к моменту C . Газ совершает работу, численно равную площади $MCDN$ (над газом совершается отрицательная работа). И, наконец, при медленном переходе $D \rightarrow A$ при постоянном объеме колебания частично дезактивируются, так как их энергия превышает значение, соответствующее упавшей температуре, колебательная энергия частично переходит в поступательную и вращательную, температура и давление возрастают, энтропия также возрастает: $T_k > T$, $d\varepsilon_k/dt < 0$, $dS/dt > 0$. Работа при этом не совершается.

Таким образом, в стадии расширения $C \rightarrow D$ газовая частица совершает над окружающим газом меньшую работу, чем была совершена окружающим газом над нею в стадии сжатия $A \rightarrow B$; частица «возвращает назад» работу не полностью. Часть затраченной в период сжатия энергии «навсегда» остается в ней.

Эта энергия, численно равная разности работ, т.е. площади фигуры $ABCD$, и представляет собой механическую энергию, необратимо перешедшую в тепло. В соответствии с диссипацией механической энергии ослабляется (поглощается) и звуковая волна, причем поглощение энергии звука за период (или на длине волны) как раз равно площади $ABCD$.

С другой стороны, необратимое выделение тепла связано с приростом энтропии за цикл: оно равно $T_0 \Delta S$. Эта величина, как видно из рис. 8.2, пропорциональна $\Delta V \cdot \Delta p \sim (\Delta p)^2$. Отсюда следует, что смещение точки конечного состояния A' относительно точки начального состояния $\delta p = (\partial p / \partial S)_V \Delta S \sim (\Delta p)^2$ есть величина второго порядка малости относительно амплитуды Δp . Поскольку $(\partial p / \partial S)_V > 0$, $\delta p > 0$, т.е. давление после окончания цикла чуть выше начального. Точно так же чуть выше и температура: $\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_V \Delta S = \frac{T \Delta S}{c_V} \approx \frac{T_0 \Delta S}{c_V}$. Приращение температуры равно энергии, которая диссипируется за цикл, поделенной на теплоемкость при постоянном объеме.

В синусоидальной (гармонической) звуковой волне точка на диаграмме p, V описывает сглаженную кривую. Все параметры состояния: плотность, давление, температура меняются с течением времени по гармоническому закону. Однако вследствие замедленных возбуждения и дезактивации колебаний в молекулах изменения температуры или давлений не успевают следовать за изменениями плотности, и синусоида давления сдвинута по фазе по отношению к синусоиде плотности (объема). Можно показать, что точка на диаграмме p, V описывает при этом эллиптическую траекторию, причем оси эллипса наклонены по отношению к осям координат p, V .

При малых частотах ν (или «круговых» частотах $\omega = 2\pi\nu$) эллипс вытянут вдоль равновесной адиабаты (см. фигуру 1 на рис. 8.4). Толщина его в пределе малых частот пропорциональна частоте (первому члену разложения по малой величине ω). Энергия звука, поглощаемая за период, пропорциональна ω , а за единицу времени — еще и числу циклов, т.е. ω^2 . При больших частотах эллипс вытянут около «замороженной» адиабаты (фигура 2). Толщина его пропорциональна $1/\omega$ (первому члену разложения по малой величине $1/\omega$), а поглощение в единицу времени пропорционально $\omega \cdot 1/\omega$, т.е. не зависит от частоты. Наибольшее поглощение за период происходит в промежуточном случае, когда частота порядка обратного времени релаксации. Эллипс при этом имеет наибольшую толщину (фигура 3); эта толщина порядка вертикального расстояния между равновесной и «замороженной» адиабатами

при максимальном изменении давления, равном амплитуде волны (расстояние между точками Q и Q' на рис. 8.4).

Если относительная разность равновесного и «замороженного» показателей адиабаты велика (именно ею характеризуется угол между адиабатами I и II, т.е. расстояние QQ'), то толщина эллипса может даже стать порядка его длины.

Этому соответствует большой сдвиг, порядка $\pi/2$, по фазе между давлением и плотностью (если бы эллипс превратился в круг, сдвиг по фазе стал бы точно равным $\pi/2$).

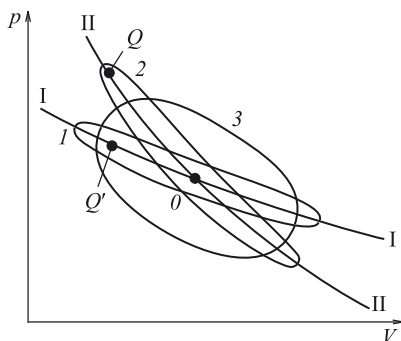


Рис. 8.4. p, V -диаграмма для циклов в гармонических звуковых волнах различной частоты

§ 4. Закон дисперсии и коэффициент поглощения ультразвука.

Изложенные в предыдущем параграфе качественные соображения относительно дисперсии и поглощения звука при наличии релаксационных процессов в веществе облекаются в изящную математическую форму. В общем виде это было сделано Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем [8]¹⁾; формулы для дисперсии и поглощения, включающие в себя время релаксации τ , служат обычно для экспериментального определения этого времени по измеренным на опыте кривым дисперсии или поглощения в зависимости от частоты ультразвука.

Покажем, как можно вывести закон дисперсии и коэффициент поглощения звука в релаксирующей среде. При этом для простоты и наглядности все вычисления проведем на конкретном примере газа с неравновесными колебаниями, для которого в § 1 была сформулирована полная система уравнений газодинамики (8.1), (8.2), (8.4), (8.6), (8.7), (8.8). Запишем все переменные величины в звуковой волне: давление, плотность и т.д. в виде $f = f_0 + f'$, где f_0 — среднее значение, соответствующее невозмущенному газу, а f' — переменная часть, которую будем считать малой величиной (скорость $u = u_0 + u' = u'$, так как невозмущенный газ покоится: $u_0 = 0$). Фактическую энергию колебаний также можно представить в форме $\varepsilon_k = \varepsilon_{k0} + \varepsilon'_k$, где ε_{k0} — колебательная энергия в невозмущенном газе, которая, естественно, равновесна. Переменную часть равновесной колебательной энергии запишем в виде $\varepsilon'_k(T) = c_k T'$, где c_k — колебательная теплоемкость, соответствующая средней температуре T_0 (если при температуре T_0 колебания классические, $c_k = A$, в противном случае c_k выражается квантовой формулой (см. § 2 гл. III)).

Подставим в уравнения все величины в указанной форме и пренебрежем членами второго порядка малости, т.е. линеаризируем уравнения, как это делается в акустике (см. § 3 гл. I). Получим в одномерном плоском случае систему уравнений для переменных частей величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0, & \varepsilon' &= \frac{5}{2} A T' + \varepsilon'_k, & \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, & \frac{p'}{\rho_0} &= \frac{T'}{T_0} + \frac{\varrho'}{\varrho_0}, \\ \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} - \frac{p_0}{\varrho_0^2} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \varepsilon'_k}{\partial t} &= \frac{c_k T' - \varepsilon'_k}{\tau}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

¹⁾ Изложение этой теории можно найти в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [9].

Здесь в уравнении энергии (8.4) вместо удельного объема введена плотность, а обе части уравнения состояния разделены на $p_0 = A\rho_0 T_0$. Время релаксации τ считается постоянным и равным $\tau = \tau(T_0, \rho_0)$.

Будем искать решение системы (8.14) в виде гармонической плоской волны, записывая все штрихованные величины в форме

$$f' = f'^* e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (8.15)$$

Волновое число k в общем случае является комплексным: $k = k_1 + ik_2$. Действительная часть k_1 пропорциональна обратной длине волны, $k_1 = 2\pi/\lambda$, и определяет фактическую скорость звука — фазовую скорость распространения волны $a_1 = \omega/k_1$; мнимая часть k_2 дает коэффициент поглощения звука:

$$f' = f'^* \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right) \exp(-k_2 x). \quad (8.16)$$

Величину $a = \omega/k$ можно назвать комплексной скоростью звука.

Амплитуды f'^* в общем случае также комплексны: $f'^* = |f'^*|e^{i\varphi}$. Комплексный характер амплитуд свидетельствует о сдвиге по фазе одних величин относительно других (на разности углов φ).

Подставляя в уравнения (8.14) все величины в форме (8.15) и замечая, что $\partial f'/\partial t = -i\omega f'$, $\partial f'/\partial x = ik f'$, получим систему алгебраических уравнений для штрихованных величин (или же амплитуд, если сократить на экспоненциальный множитель):

$$\begin{aligned} -i\omega \varrho' + \rho_0 i k u' &= 0, & \varepsilon' &= \frac{5}{2} A T' + \varepsilon'_k, \\ -i\omega u' + \frac{1}{\rho_0} i k p' &= 0, & \frac{p'}{p_0} &= \frac{T'}{T_0} + \frac{\varrho'}{\varrho_0}, \\ -i\omega \varepsilon' + \frac{p_0}{\varrho_0^2} i\omega \varrho' &= 0, & -i\omega \varepsilon'_k &= \frac{c_k T' - \varepsilon'_k}{\tau}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Последнее уравнение, будучи разрешенным относительно ε'_k , дает

$$\varepsilon'_k = \frac{c_k T'}{1 - i\omega\tau}. \quad (8.18)$$

Именно благодаря этой комплексной связи переменных частей фактической колебательной энергии и температуры и возникают дисперсия и поглощение. Уже отсюда видно, что в предельных случаях $\omega\tau \rightarrow 0$, и $\omega\tau \rightarrow \infty$, когда $\varepsilon'_k = c_k T'$ и $\varepsilon'_k = 0$, мнимая единица полностью выпадает из системы уравнений (8.17), все величины действительны (если под p' , ϱ' и т. д. понимать амплитуды p^* , ϱ^* и т. д.). Никаких поглощений и сдвигов по фазе при этом нет.

Первые два уравнения системы (8.17), которые получились из уравнений непрерывности и движения после исключения скорости, дают обычную связь:

$$p' = \frac{\omega^2}{k^2} \varrho' = a^2 \varrho', \quad (8.19)$$

где a — комплексная скорость звука. Исключая из остальных четырех уравнений ε'_k , T' , найдем еще одну связь p' и ϱ' :

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \varrho', \quad \gamma = \frac{\frac{7}{2} A + \frac{c_k}{1 - i\omega\tau}}{\frac{5}{2} A + \frac{c_k}{1 - i\omega\tau}}. \quad (8.20)$$

Величину γ можно назвать комплексным показателем адиабаты. Вводя обозначения:

$$c_{V0} = \frac{5}{2}A + c_k, \quad c_{p0} = \frac{7}{2}A + c_k$$

— равновесные теплоемкости при постоянных объеме и давлении и

$$c_{V\infty} = \frac{5}{2}A, \quad c_{p\infty} = \frac{7}{2}A$$

— теплоемкости при полностью замороженных колебаниях, запишем комплексный показатель адиабаты и выражение для комплексной скорости звука, которое следует из уравнений (8.19), (8.20), в виде

$$a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \gamma = \frac{c_{p0} - i\omega\tau c_{p\infty}}{c_{V0} - i\omega\tau c_{V\infty}}. \quad (8.21)$$

¹⁾ В книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [9] выводится несколько отличная формула (гл. VIII, § 78, формула (78.3)), которая дает

$$\gamma = \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left[\frac{c_{p0}}{c_{V0}} - i\omega\tau \frac{c_{p\infty}}{c_{V\infty}} \right].$$

Это расхождение связано с различием в определениях времени релаксации τ , которое фигурирует в уравнении кинетики. Величина $\varepsilon_k(T)$ в нашем уравнении (8.8) представляет собой равновесную энергию колебаний, которая соответствует поступательной температуре T . Отметим время релаксации в нашем уравнении кинетики индексом « T ». Если объем газа постоянен и поступательная температура также поддерживается постоянной: $T = \text{const}$, то уравнение (8.8) дает экспоненциальный закон приближения к равновесию с характерным временем τ_T :

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(T) + [(\varepsilon_k)_{t=0} - \varepsilon_k(T)] \exp\left(-\frac{t}{\tau_T}\right).$$

Энергия газа $\varepsilon = c_{V\infty}T + \varepsilon_k$ при этом не постоянна.

Если же считать постоянной энергию ε (и, конечно, объем) и пользоваться уравнением (8.8), то мы получим вместо простого экспоненциального более сложный закон приближения к равновесию.

В книге [9] уравнение кинетики типа (8.8) записывается таким образом, что под равновесной следует понимать энергию колебаний, которая соответствует равновесной температуре T_p , общей для поступательных и колебательных степеней свободы и отвечающей данному объему V и энергии ε газа.

Обозначим время релаксации, которое фигурирует в уравнении кинетики (по [9]) через τ_S . Уравнение дает экспоненциальный закон приближения к равновесию,

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(T_p) + [(\varepsilon_k)_{t=0} - \varepsilon_k(T_p)] \exp\left(-\frac{t}{\tau_S}\right),$$

если постоянны объем, энергия газа, т. е. равновесная температура T_p , и время τ_S (фактически τ_S зависит от поступательной температуры, но предполагается, что отклонение от равновесия мало, так что при $T_p = \text{const}$ поступательная температура T меняется мало). При малом отклонении от равновесия условие $V = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ можно рассматривать как условие приближенного постоянства энтропии $S \approx \text{const}$.

Будем рассматривать малые изменения всех величин в звуковой волне около средних значений. Воспользовавшись определением

$$\varepsilon' = c_{V\infty}T' + \varepsilon'_k = c_{V\infty}T'_p + \varepsilon'_k(T_p) = c_{V0}T'_p,$$

можно перейти от одного уравнения кинетики к другому. При этом получается, что $\tau_S = (c_{V\infty}/c_{V0})\tau_T$.

В предельном случае малых частот $\omega\tau \ll 1$, $\gamma = c_{p0}/c_{v0} = \gamma_0$, $a^2 = \gamma_0 p_0/\varrho_0 = a_0^2$, получаем равновесные показатель адиабаты и скорость звука. В пределе высоких частот $\omega\tau \gg 1$,

$$\gamma = \frac{c_{p\infty}}{c_{v\infty}} = \gamma_\infty, \quad a^2 = \gamma_\infty \frac{p_0}{\varrho_0} = a_\infty^2,$$

получаем показатель адиабаты и скорость звука, соответствующие замороженным колебаниям. В обоих предельных случаях скорость звука и, следовательно, волновое число $k = \omega/a$ — действительны, т. е. поглощения нет.

В промежуточной области частот скорость звука a и волновое число $k = \omega/a$ комплексны. Если составить выражение для $k = \omega/a$ с помощью формулы (8.21) и отделить в нем действительную и мнимую части, получим закон дисперсии $a_1(\omega) = \omega/k_1(\omega)$ и коэффициент поглощения $k_2(\omega)$ ¹⁾.

В общем случае эта операция приводит к весьма громоздким выражениям. В пределе малых частот $\omega\tau \ll 1$ приближенно получим

$$k = k_1 + ik_2 = \frac{\omega}{a_0} + i \frac{\omega^2 \tau c_{v\infty}}{2a_0 c_{v0}} \left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} - 1 \right). \quad (8.22)$$

Коэффициент поглощения $k_2 \sim \omega^2$; поглощение на расстоянии, равном длине волны, $k_2 \lambda \sim \omega$.

В пределе больших частот $\omega\tau \gg 1$ имеем

$$k = k_1 + ik_2 = \frac{\omega}{a_\infty} + i \frac{1}{2a_\infty \tau c_{p\infty}} \frac{c_{p0}}{\gamma_0} \left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} - 1 \right). \quad (8.23)$$

Коэффициент поглощения $k_2 \approx \text{const}$ не зависит от частоты, поглощение на длине волны $k_2 \lambda \sim 1/\omega$.

Кривая дисперсии $a_1(\omega)$ и частотная зависимость поглощения на длине волны $k_2 \lambda = k_2 a_1 2\pi/\omega = 2\pi k_2/k_1$ схематически изображены на рис. 8.5. Нетрудно показать, что величина k_2/k_1 имеет максимум при $\omega\tau = \sqrt{\frac{c_{v0}c_{p0}}{c_{v\infty}c_{p\infty}}} \sim 1$. При близком, но отличном от приведенного выше, значении $\omega\tau$ кривая дисперсии имеет перегиб.

Из формулы (8.19) следует, что давление в звуковой волне сдвинуто по фазе относительно плотности. В самом деле, если скорость звука — комплексная величина, то $p' = a^2 \varrho' = |a^2| e^{i\varphi} \varrho'$. В предельных случаях $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$, когда мнимая часть скорости звука стремится к нулю, сдвиг по фазе φ исчезает. При $\omega\tau \sim 1$, когда действительная и мнимая части сравнимы, сдвиг по фазе φ значителен.

Если в веществе протекает несколько неравновесных процессов с сильно различающимися временами релаксации, сильные поглощение и дисперсия возникают каждый раз, когда $\omega\tau \sim 1$, и эти частотные области четко разделены. В случае же

В формуле для γ , приведенной в начале сноски, под τ следует понимать τ_S , в нашей формуле (8.21) — τ_T . Легко проверить с помощью связи τ_S и τ_T , что обе формулы в точности совпадают.

Метод « τ_S », принятый Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем [8], позволяет получить общую формулу для γ , приведенную выше, независимо от конкретного релаксационного механизма. При рассмотрении же частного случая колебательной релаксации представляется более наглядным использование метода « τ_T », что и было сделано в тексте. Заметим, что именно так и рассматривалась колебательная релаксация в ультразвуке в старых работах (Кнезер [3], Ландау и Теллер [10]).

¹⁾ Заметим, что между функциями $k_1(\omega)$ и $k_2(\omega)$ существует совершенно общая связь, независимо от механизма дисперсии и поглощения. Эта связь была выведена В. Л. Гинзбургом [11].

близких времен релаксации области сливаются и экспериментально разделить их, т. е. извлечь из опытных данных времена релаксации, весьма трудно.

Дисперсия и поглощение звука, связанные с неравновесными процессами, определяются колебаниями плотности вещества, т. е. в силу уравнения непрерывности, $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, связаны с дивергенцией скорости. Формально их можно описать коэффициентом второй вязкости ζ , который характеризует диссипативный член в уравнении движения, пропорциональный дивергенции скорости (см. § 20, 21 гл. I). Коэффициент второй вязкости можно формально связать с величиной $\omega\tau$ и предельными скоростями звука a_0 и a_∞ (см., например, [9]).

Однако описать аномальное поглощение путем введения коэффициента второй вязкости можно только при не слишком больших частотах. Коэффициент поглощения за счет вязкости растет пропорционально $k_2 \sim \omega^2$ (см. § 22 гл. I). Поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ поглощение, связанное с вязкостью, неограниченно возрастает, тогда как в действительности коэффициент аномального поглощения при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине: $k_2 = \text{const}$ (см. формулу (8.23)).

Некоторые экспериментальные данные по временам релаксации для возбуждения колебаний и вращений в молекулах, полученные путем изучения дисперсии и поглощения ультразвука, уже приводились нами в § 2 и 4 гл. VI.

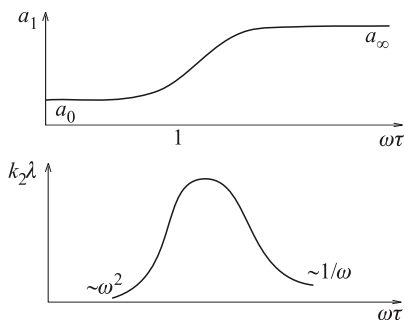


Рис. 8.5. Частотные зависимости скорости распространения a_1 и коэффициента поглощения на длине волны $k_2\lambda$ ультразвука в области релаксации

2. Химические реакции

§ 5. Окисление азота при сильном взрыве в воздухе. Атмосферный воздух состоит из молекул азота и кислорода; химически он равновесен и очень устойчив. Для диссоциации молекул на атомы или частичного превращения их в молекулы окиси азота NO необходимо нагреть воздух до нескольких тысяч градусов. Реакция окисления азота требует большой энергии активации. Несколько меньше, но тоже велика энергия активации, необходимая для распада молекул окиси на кислород и азот. Поэтому, несмотря на энергетическую выгодность превращения окиси азота в кислород и азот при низких температурах, молекулы окиси NO чрезвычайно устойчивы по отношению к распаду.

В § 8 гл. VI было показано, что если при температуре 4000 К время установления равновесной концентрации окиси азота в воздухе нормальной плотности составляет $\sim 10^{-6}$ с, то при 2000 К оно равно примерно 1 с, а при 1000 К имеет колоссальную величину порядка 10^{12} с, т. е. примерно 30 тысяч лет! Однажды образовавшаяся и охлажденная до нормальной температуры окись азота пребывает в воздухе неопределенно долгое время. В действительности окисленный азот продолжает свое длительное существование в виде двуокиси NO₂ (или даже комплексов N₂O₄, в которые предпочитают объединяться молекулы NO₂), так как окись азота весьма быстро реагирует с кислородом воздуха и окисляется до двуокиси. Эта экзотермическая реакция требует очень небольшой энергии активации и легко протекает даже при комнатной температуре (см. § 9 гл. VI).

Таким образом, химический процесс в нагретом, а потом охлажденном воздухе приводит к существенно неравновесным состояниям, находящимся в резком противоречии с законами химического равновесия, согласно которым окислы азота при низких температурах должны были бы полностью превратиться в азот и кислород. Этот эффект, хорошо известный из лабораторной практики, носит название эффекта «закалки» окислов азота.

Большое количество окислов азота образуется при сильном взрыве в воздухе. Атмосферный азот окисляется в той стадии процесса, когда воздух во взрывной волне нагрет до температуры в несколько тысяч градусов, причем окисляется несколько процентов азота. При распространении взрывной волны первоначально нагретый во

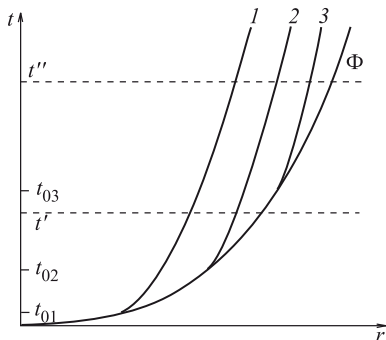


Рис. 8.6. r, t -диаграмма для сильного взрыва в воздухе. Φ — линия фронта ударной волны; 1, 2, 3 — линии трех частиц, через которые фронт проходит в моменты t_{01} , t_{02} , t_{03}

фронте ударной волны воздух быстро охлаждается. Образовавшаяся в нем окись азота не успевает распасться при охлаждении и остается в воздухе «навсегда». Всего при взрыве с энергией 10^{21} эрг, эквивалентной примерно 20 000 т тротила, в воздухе образуется около 100 т окислов азота. Через несколько десятков секунд или минуту после окончания взрыва вся окись превращается в двуокись.

В обычном состоянии двуокись азота представляет собой резко окрашенный газ буровато-красного цвета, что связано с преимущественным поглощением молекулами NO_2 зеленых и синих лучей. Она придает красноватый оттенок облаку, которое поднимается вверх после окончания взрыва ¹⁾, что было отмечено на опыте и описано в книге [12]; см. также § 5 гл. IX.

Присутствие окислов, в особенности небольшого количества двуокиси азота, в нагретом воздухе, охваченном взрывной волной, сильно

влияет на оптические свойства воздуха в волне, так как, в отличие от молекул кислорода и азота, молекулы двуокиси интенсивно поглощают и излучают свет в видимой части спектра (молекулы NO также не поглощают видимого света).

Специфические особенности кинетики химических реакций образования и распада окислов азота в взрывной волне приводят к возникновению интересных оптических явлений, наблюдаемых при сильном взрыве, которые также описаны в книге [12].

Эти явления: свечение ударной волны при сравнительно низких температурах за фронтом порядка 4000–2000 К, когда газ, состоящий только из молекул и атомов кислорода и азота, не должен был бы светиться, довольно резкое прекращение свечения ударной волны при температуре около 2000 К и отрыв фронта волны от границы светящегося тела, так называемого «огненного шара», своеобразный эффект минимума яркости огненного шара в момент отрыва, когда свечение сначала затухает, а потом шар как бы снова разгорается, — будут рассмотрены в § 5–7 гл. IX. Здесь же мы остановимся несколько подробнее на рассмотрении кинетики реакций окисления азота во взрывной волне, что является необходимой основой для

¹⁾ Молекулярные комплексы N_2O_4 не поглощают видимого света, т. е. газ N_2O_4 бесцветен. Однако двуокись исчезает уже после рассеяния облака взрыва в атмосфере, так как реакция $2\text{NO}_2 \rightarrow \text{N}_2\text{O}_4$ идет не слишком быстро.

объяснения указанных оптических явлений. Эта задача рассматривалась одним из авторов [13]. Следует отметить, что изучение кинетики представляет и самостоятельный интерес, как характерный пример существенно неравновесного химического процесса в газодинамическом явлении сильного взрыва.

Газодинамика сильного взрыва была описана в § 25 гл. I. Процесс является автомодельным, фронт ударной волны распространяется от центра взрыва по закону $R_\Phi \sim t^{2/5}$. Распределения всех газодинамических величин по радиусу представлены на рис. 1.50. Эти распределения неизменны во времени в силу автомодельности; с течением времени меняются только масштабы.

Нас интересует здесь протекание химической реакции в определенных частицах воздуха. Для этого прежде всего нужно знать, как меняется с течением времени термодинамическое состояние данной частицы.

На диаграмме r, t рис. 8.6 схематически изображены линии фронта ударной волны и нескольких частиц за фронтом, обозначенных цифрами 1, 2, 3. Нагретые и сжатые в моменты прохождения фронта волны t_{01}, t_{02}, t_{03} частицы увлекаются взрывной волной, разлетаясь от центра, и при этом адиабатически расширяются и охлаждаются до тех пор, пока давление в них не упадет до атмосферного и частицы не остановятся.

Кривые охлаждения и расширения частиц воздуха с течением времени схематически показаны на рис. 8.7 и 8.8.

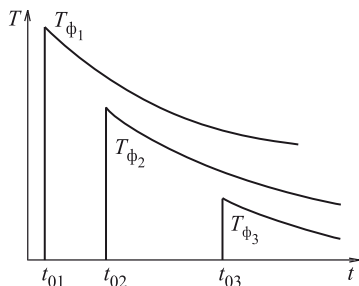


Рис. 8.7. Схематическая зависимость температуры от времени в трех частицах, нагретых взрывной волной

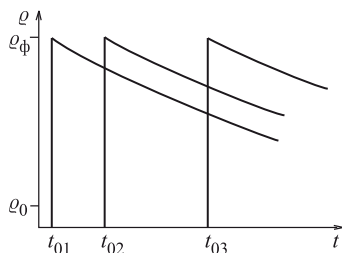


Рис. 8.8. Схематическая зависимость плотности от времени в трех частицах, сжатых взрывной волной

Вычисления по формулам § 25 гл. I показывают, что при взрыве с энергией $E = 10^{21}$ эрг, к которому будут относиться все наши численные примеры, температура на фронте ударной волны падает до величины $T_\Phi = 2000$ К за время порядка 10^{-2} с от момента энергосвободения. Такой же порядок имеют времена охлаждения частиц воздуха от температуры, скажем, 5000 К до 2000–1500 К. Время $t \sim 10^{-2}$ с — временной масштаб газодинамического процесса при взрыве с энергией $E = 10^{21}$ эрг, с которым следует сравнивать времена, характерные для протекания химических реакций.

Проследим сначала за кинетикой реакций в какой-нибудь определенной частице воздуха. Пусть, например, частица 1 была нагрета во фронте ударной волны до температуры $T_{\Phi_1} = 3000$ К. Скорость окисления азота при такой температуре очень высока и равновесная концентрация достигается за время порядка 10^{-6} с. В частице воздуха «мгновенно» окисляется примерно 5% азота и в дальнейшем концентрация окиси «медленно» изменяется (уменьшается) в соответствии с законами химического равновесия, «следуя» за охлаждением и расширением. Распад молекул окиси начинает отставать от охлаждения только тогда, когда частица остынет до температуры

порядка 2300 К, при которой время релаксации τ возрастает от начальной малой величины $\sim 10^{-6}$ с до величины, сравнимой с газодинамическим масштабом времени охлаждения, 10^{-2} с. При дальнейшем охлаждении распад быстро прекращается. Так,

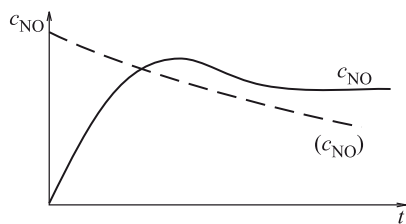


Рис. 8.9. Схематическая зависимость от времени равновесной (c_{NO}) и фактической c_{NO} концентраций окиси азота в определенной частице воздуха во взрывной волне

уже при 2000 К скорость распада характеризуется временем релаксации $\tau \sim 1$ с. Остаточное «закаленное» количество окиси в данной частице соответствует примерно той концентрации, которая была в ней в момент, когда время релаксации τ было сравнимо с характерным временем охлаждения $t \sim 10^{-2}$ с, т.е., когда температура в частице была порядка 2300 К. Но чуть раньше концентрация была равновесной, а равновесная концентрация довольно слабо меняется при понижении температуры на несколько сотен градусов, которые очень существенно меняют скорость распада (см. § 4 гл. III и § 8 гл. VI). Поэтому остаточная концентрация окиси в частицах воздуха

просто равна равновесной концентрации при температуре около 2300 К, а это — величина порядка 1 %.

Зависимость от времени концентрации окиси в частице схематически показана на рис. 8.9. Конечно, точное значение остаточной концентрации зависит от конкретной частицы, т.е. от плотности, с которой она пришла к переломной для реакции температуре 2300 К, при которой $\tau \sim t$, от времени охлаждения, однако эти детали не влияют на порядок величины остаточной концентрации. Реакция окисления окиси до двуокиси при температурах ~ 2000 К идет довольно быстро (см. § 9 гл. VI). Поэтому концентрация двуокиси все еще остается равновесной, но двуокись находится при этом в равновесии не с равновесным, а с фактическим, «закаленным» количеством окиси. При температурах порядка 2000 К концентрация двуокиси составляет примерно 10^{-2} % (см. табл. 5.9, § 21 гл. V). В дальнейшем вся окись постепенно окисляется до двуокиси, причем вначале этот процесс «следит» за охлаждением, а потом, при температуре ~ 1500 К и ниже, отстает от охлаждения. Полное окисление окиси происходит уже в совсем холодной частице, через десятки секунд после взрыва.

В частицах воздуха, которые фронт ударной волны нагрел до температуры ниже ~ 2200 – 2000 К, окись азота вообще не образуется, так как скорость окисления при такой температуре весьма мала, и частица быстро проскакивает ту область температур около 2000 К, в которой скорость реакции составляет еще заметную величину. Таким образом, сферический слой воздуха, нагретый во фронте ударной волны до температуры ~ 2200 – 2000 К, ограничивает массу воздуха, в которой вообще появились окись, а затем и двуокись (закон движения этого слоя изображается на диаграмме r, t рис. 8.6, скажем, линией 3). Отсюда следует и оценка полного количества окислов азота, которое образуется при сильном взрыве. Оно определяется массой воздуха, нагретого во фронте ударной волны до температуры выше ~ 2200 – 2000 К, и равновесной концентрацией окиси при такой температуре (при чуть более высокой, 2300 К), так как именно при таких температурах происходит закалка¹⁾. При взрыве с энергией 10^{21} эрг радиус фронта ударной волны при температуре фронта $T_{\text{ф}} = 2000$ К равен примерно 100 м. Масса воздуха в сферическом объеме такого

¹⁾ Напоминаем, что равновесная концентрация окиси азота в воздухе зависит только от температуры, но не от плотности (см. § 4 гл. III и § 8 гл. VI).

радиуса составляет примерно 5000 т, и при концентрации $\sim 1\%$ масса окиси получится равной ~ 50 т. Масса двуокиси после присоединения к каждой молекуле NO еще одного атома кислорода составит ~ 75 т, т. е. около 100 т, как было сказано выше.

Рассмотрим теперь, каково распределение концентрации окислов по радиусу в данный момент времени. Здесь возможны два типичных случая. Если в рассматриваемый момент t' (рис. 8.10) температура на фронте волны выше ~ 2300 К, то практически во всех частицах за фронтом концентрации окиси и двуокиси равновесны и распределения концентраций определяются просто распределениями температуры и плотности за фронтом. Исключение составляет только очень тонкий слой воздуха непосредственно за фронтом, в котором еще не успели к данному моменту образоваться окислы (рис. 8.10).

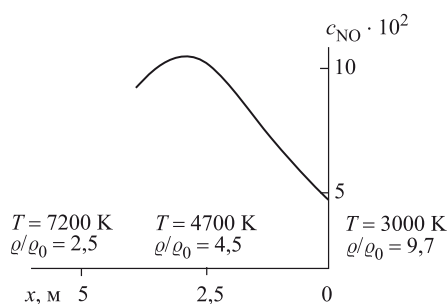


Рис. 8.10. Распределение концентрации окиси азота за фронтом ударной волны при взрыве с энергией $E = 10^{21}$ эрг. Температура на фронте $T_f = 3000$ К. Концентрация практически везде равновесна. Указаны значения температур и плотностей в нескольких точках

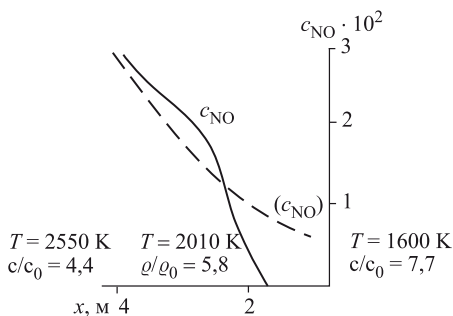


Рис. 8.11. Распределение концентрации окиси азота за фронтом ударной волны при взрыве с $E = 10^{21}$ эрг. Температура на фронте $T_f = 1600$ К. Сплошная кривая — фактическая концентрация, пунктирная — равновесная концентрация. При $x > 4$ м $c_{NO} \approx (c_{NO})_0$. Указаны значения температур и плотностей в нескольких точках

Если же мы интересуемся моментом t'' , в который температура за фронтом меньше ~ 2000 К, например 1600 К, то около фронта находятся частицы, нагретые фронтом до температуры ниже 2000 К и в них окиси вообще нет; далеко за фронтом при температуре выше ~ 2500 К концентрация равновесна, а в промежуточном слое окись есть, но концентрация ее неравновесна. Ближе к фронту она меньше равновесной, а несколько дальше, в тех частицах, в которых уже началась закалка, выше равновесной (рис. 8.11).

Для расчета концентрации окиси в неравновесной области, а также для более точного определения количества «закаленной» окиси необходимо решить уравнение кинетики реакции окисления азота (6.45) в данной частице воздуха с учетом законов ее охлаждения и расширения во взрывной волне. Законы расширения и охлаждения воздуха, которые следуют из решения задачи о сильном взрыве (§ 25 гл. I), можно неплохо аппроксимировать следующими формулами, удобными для расчета кинетики:

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2b}, \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{a}{T_0} \ln \frac{t}{t_0},$$

где T_0 и ϱ_0 — температура и плотность в частице в начальный момент t_0 , когда через нее прошел фронт ударной волны; a и b — численные постоянные, зависящие только

от эффективного показателя адиабаты в газодинамическом решении. При $\gamma = 1,30$ $a = 0,44$, $b = 0,75$.

Оказывается (см. [13]), что путем соответствующего выбора новых переменных в уравнении кинетики (6.45) это уравнение вместе с указанными законами охлаждения и расширения можно привести к универсальному безразмерному виду

$$\frac{dy}{dx} = x^{3-\delta}(y^2 - x^2), \quad (8.24)$$

где величина x связана с переменной — временем, а y пропорциональна концентрации окиси; δ — численная константа меньше единицы. Начальное условие, соответствующее отсутствию окиси в начальный момент $t = t_0$, сводится к условию $y = 0$, когда x равняется некоторой величине x_0 , зависящей только от момента t_0 , параметров начального состояния и констант, входящих в уравнение кинетики (6.45).

Я. Б. Зельдович, П. Я. Садовников и Д. А. Франк-Каменецкий [14] изучали кинетику реакции окисления азота в лабораторных условиях при законе охлаждения типа $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} + \frac{a'}{T_0}t$ и постоянной плотности.

При этом уравнение кинетики (6.45) с помощью введения новых переменных также приводится к уравнению типа (8.24) с начальным условием $y = 0$ при $x = x_0$. В книге [14] табулировано решение уравнения $y = y(x, x_0)$ ¹⁾.

Зная из газодинамического решения задачи о сильном взрыве параметры начального состояния частицы воздуха, можно таким образом получить полное решение, т.е. зависимость концентрации окиси c_{NO} от времени. Оно вполне соответствует качественным соображениям, изложенным выше. Так была рассчитана кривая, изображенная на рис. 8.11.

3. Нарушение термодинамического равновесия при разлете газа в пустоту

§ 6. Разлет газового облака. Явление разлета в пустоту газового облака встречается в самых разнообразных естественных, лабораторных и технических процессах. При ударах метеоритов о поверхность планет происходит резкое торможение метеорита и превращение кинетической энергии в тепло. Если скорость удара велика, порядка нескольких десятков км/с, развиваются очень высокие температуры в десятки и сотни тысяч градусов. Тело метеорита и часть грунта планеты при этом испаряются. Явление напоминает сильный взрыв на поверхности планеты²⁾. Если планета лишена атмосферы, например, как Луна, то образующееся облако паров, обладая большими скоростями разлета, преодолевает силы тяготения и беспрепятственно расширяется в пустоту. Существует предположение, что в результате таких «взрывов» при ударах огромных метеоритов образовались лунные кратеры.

Аналогичные явления происходят и при гораздо более частых столкновениях малых тел в солнечной системе — астероидов. Разлет в пустоту колоссальных газовых облаков наблюдается при вспышках новых звезд, когда в результате нарушения энергетического баланса звезды происходит выделение большой энергии, и от центральных слоев к периферии распространяется ударная волна, отрывающая от звезды и выбрасывающая в мировое пространство газовое облако.

¹⁾ Как отметил А. С. Компанеец, уравнение (8.24) с $\delta = 0$ решается точно, в функциях Бесселя.

²⁾ Гидродинамика этого процесса будет рассмотрена ниже, в гл. XII.

До некоторой степени подобные явления, но, разумеется, в несоизмеримо меньших масштабах, встречаются и в лабораторных условиях, например, при испарении анодных игл в импульсных рентгеновских трубках под действием мощного электронного импульса (В. А. Цукерман и М. А. Манакова [15]), при взрыве проволочек электрическим током в откачанных установках и т. д. Конечно, в лабораторных условиях расширение не является беспредельным, так как оно ограничивается стенками откачанного сосуда, однако в той стадии, когда газ еще не достиг стенок, разлет в пустоту происходит так же, как будто пустота «беспредельна».

Опыты, в которых получается газовое облако, разлетающееся в пустоту, ставились и при ракетных исследованиях верхних слоев атмосферы, когда в пространство выпускались пары натрия и окись азота. То же явление имело место и при создании искусственной кометы при полете на Луну советской космической ракеты.

Динамика разлета газового облака в пустоту довольно проста; идеализированная задача об адиабатическом разлете в пустоту газового шара, когда газ обладает постоянной теплоемкостью, рассматривалась в § 28, 29 гл. I. Здесь нас будут интересовать более тонкие вопросы состояния газа в стадии большого расширения, так сказать, при разлете на бесконечность, которые можно рассматривать на основе самой простой схемы разлета. В этой схеме принимается во внимание поведение только средних по массе параметров газа. Ясно, что параметры какой-либо конкретной частицы газа меняются во времени точно так же, как и средние величины, и отличаются от средних значений только численными множителями порядка единицы, которые для нас несущественны.

Рассмотрим газовый шар массы M , обладающей энергией E ¹⁾. В стадии сильного расширения почти вся начальная энергия уже превратилась в кинетическую энергию разлета, вещество разлетается инерционно со средней скоростью $u = \sqrt{2E/M}$. Радиус шара порядка $R = ut$; плотность газа падает с течением времени по закону

$$\varrho = \frac{M}{4\pi R^3/3} = \varrho_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^3, \quad (8.25)$$

где масштаб времени приближенно выражается через начальные радиус шара R_0 и плотность вещества ϱ_0 :

$$t_0 = \left(\frac{M}{\varrho_0 4\pi u^3/3} \right)^{1/3} = \frac{R_0}{u}. \quad (8.26)$$

Если интересоваться температурой газа в стадии большого расширения, то нужно рассматривать ту малую внутреннюю энергию, которая еще осталась в газе и которой мы пренебрегали при вычислении скорости разлета. Примем во внимание, что при адиабатическом разлете остается постоянной удельная энтропия газа S . Полагая для простоты, что вещество ведет себя как газ с некоторым постоянным эффективным значением показателя адиабаты, получим закон охлаждения газа:

$$T = A(S)\varrho^{\gamma-1} \sim t^{-3(\gamma-1)}, \quad (8.27)$$

где $A(S)$ — энтропийная константа, вычисляемая по известным формулам статистической механики. Если рассматриваются сравнительно высокие температуры, то с учетом процессов ионизации, диссоциации и т. д. можно принять ориентировочные значения показателя адиабаты $\gamma = 1,2-1,3$. Во всяком случае показатель не больше $5/3 = 1,66$, что соответствует полному замораживанию всех внутренних степеней свободы газа.

¹⁾ Мы для удобства напомним здесь некоторые выводы § 28 гл. I.

§ 7. Эффект «закалки». Посмотрим, как протекают физико-химические процессы в газе, расширяющемся по кубическому закону $\varrho \sim t^{-3}$ и охлаждающемся по закону $T \sim t^{-3(\gamma-1)}$.

Предположим, что вначале температура была высока, так что молекулы были диссоциированы и атомы сильно ионизованы. Предположим также, что велика была и начальная плотность газа, как это бывает, если газовое облако образовалось в результате быстрого выделения энергии в первоначально твердом веществе. Тогда на ранней стадии разлета при больших плотности и температуре все релаксационные процессы протекают очень быстро и газ находится в термодинамическом равновесии, причем характеристики его состояния, например степени ионизации или диссоциации, «следят» за охлаждением и расширением. Если бы газ в течение всего разлета продолжал оставаться термодинамически равновесным, то по мере расширения и охлаждения все электроны довольно скоро должны были бы объединиться с ионами в нейтральные атомы, а все атомы, обладающие химическим сродством, объединились бы в молекулы.

В самом деле, равновесные степени ионизации и диссоциации α зависят от температуры по экспоненциальному закону, а от плотности только по степенному, $\alpha \sim \varrho^{-1/2} \exp(-I/2kT)$, где I — потенциал ионизации или энергия диссоциации. При расширении и охлаждении до низких температур равновесные степени ионизации и диссоциации очень быстро стремятся к нулю, так как при $T \sim \varrho^{\gamma-1} \rightarrow 0$ экспоненциальный член уменьшается чрезвычайно быстро, гораздо быстрее, чем возрастает предэкспоненциальный множитель.

Легко видеть, однако, что как бы ни была велика вначале скорость установления термодинамического равновесия по сравнению со скоростями охлаждения и расширения, обязательно наступит момент, когда соотношение скоростей этих процессов станет обратным, термодинамическое равновесие перестанет устанавливаться, а степени ионизации и диссоциации начнут отклоняться от равновесных значений все больше и больше.

Действительно, равновесные степени ионизации и диссоциации устанавливаются в результате компенсации прямых и обратных процессов. Но при низких температурах ионизация и диссоциация, требующие большой затраты энергии, резко замедляются. Скорости этих процессов зависят от температуры по экспоненциальным законам $\exp(-I/kT)$ и при $kT \ll I$ чрезвычайно сильно зависят от температуры, а следовательно, и от времени. Между тем скорости обратных процессов — рекомбинации, зависят от плотности, температуры, а значит, и от времени лишь по степенным законам. Таким образом, в некоторый момент процессы ионизации и диссоциации прекратятся, после чего степени ионизации и диссоциации будут уменьшаться с течением времени по степенным законам, тогда как равновесные величины падают по экспоненциальным.

Скорости рекомбинационных процессов вследствие расширения уменьшаются, и эти процессы могут вообще прекратиться. Убедимся в этом на примере рекомбинации атомов в молекулы (рекомбинация электронов с ионами будет рассмотрена в следующих параграфах).

При больших плотностях рекомбинация идет в тройных столкновениях, при малых — в парных, так что, интересуясь стадией сильного расширения, достаточно рассмотреть последнюю. Пусть N — число атомов в 1 см^3 , $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ — тепловая скорость, σ — сечение рекомбинации, которое не больше газокинетического. Скорость рекомбинации $dN/dt = -N\bar{v}\sigma$, и характерное время, в течение которого происходит заметное изменение степени диссоциации, $\tau \approx 1/N\bar{v}\sigma$. Даже если не учитывать уменьшения числа атомов за счет рекомбинации, число атомов N в 1 см^3 будет

уменьшаться пропорционально $1/t^3$ вследствие расширения газа: $\bar{v} \sim \sqrt{T} \sim t^{-\frac{3}{2}(\gamma-1)}$, так что $\tau \sim t^{3+\frac{3}{2}(\gamma-1)} = t^{\frac{3}{2}(\gamma+1)}$, т. е. характерное время τ растет быстрее, чем t , и, следовательно, в какой-то момент станет больше t . Между тем, масштабом времени, характеризующим изменение плотности и температуры, является само время t от начала разлета, так как $dT/dt \sim -T/t$, $d\rho/dt \sim -\rho/t$. Таким образом, с какого-то момента рекомбинация начинает все сильнее «отставать» от охлаждения. Более того, примерно с этого момента вероятность рекомбинации данного атома со всеми другими в течение всего последующего процесса разлета, вплоть до бесконечности, оказывается меньше единицы, т. е. рекомбинация вообще не идет до конца. Действительно, эта вероятность равна

$$w = \int_{t_1}^{\infty} N \bar{v} \sigma dt = \int_{t_1}^{\infty} \frac{dt}{\tau} \lesssim \frac{1}{\tau_1} \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{3}{2}(\gamma+1)} dt \approx \frac{t_1}{\tau_1} = \text{const.} \quad (8.28)$$

Начиная с момента t_1 , при котором $\tau_1 > t_1$, вероятность рекомбинации данного атома $w < 1$. Таким образом, газ разлетается на бесконечность диссоциированным. Этот эффект можно назвать «закалкой» или «замораживанием» диссоциации.

Начиная с некоторого момента, в газе почти прекращаются и газокинетические столкновения. Прекращается дезактивация колебательного и вращательного возбуждения молекул ударами частиц. Это следует из сходимости того же интеграла столкновений (8.28). Однако закалки молекулярных колебаний и вращений не происходит: колебательная и вращательная энергии молекул уносятся вследствие спонтанного испускания световых квантов. Колебательные переходы дают излучение в инфракрасной области спектра, а вращательные — в радиодиапазоне.

Ввиду сходимости интеграла столкновений с подставленным в него газокинетическим сечением (нейтральных атомов) при сферическом разлете с течением времени прекращается и обмен энергией хаотического поступательного движения атомов. Дальнейший разлет продолжается вообще без столкновений¹⁾.

Все частицы летят по инерции со скоростями, которые они приобрели в результате последнего столкновения. При этом частицы, вообще говоря, обладают нерадиальной («хаотической») составляющей скорости. Казалось бы, должна происходить «закалка» хаотической скорости, т. е. «температуры». В действительности, как заметил В. А. Белоконов [16], этого нет по причинам чисто геометрического характера. Вопрос состоит в определении понятий «гидродинамической» и «внутренней» энергий в условиях отсутствия столкновений частиц. Внутренняя энергия единицы объема газа равна разности между полной кинетической энергией $N \frac{m \bar{v}^2}{2}$ (N — число частиц в 1 см^3 , m — их масса, а $\bar{v}^2$ — средний квадрат скорости) и кинетической энергией «гидродинамического» движения: $N \frac{m (\bar{v})^2}{2}$, где $(\bar{v})^2$ — квадрат средней скорости:

$$E_{\text{внутр}} = E_{\text{полн}} - E_{\text{гидрод}} = N \frac{m}{2} (\bar{v}^2 - (\bar{v})^2).$$

Пусть столкновения прекращаются в момент t_1 , когда газ занимает сферу радиуса r_1 (рис. 8.12). В точки A и B частицы приходят из этой сферы в моменты t' и

¹⁾ Любопытно отметить, что формально при разлете с $\gamma = 5/3$ частота «кулоновских столкновений» заряженных частиц не уменьшается, так как $\sigma \sim T^{-2}$ и $n v \sigma \sim n T^{-3/2} \sim n^{5/2-3\gamma/2} = \text{const.}$

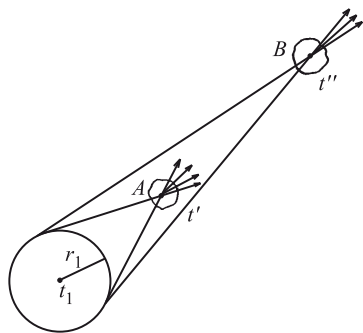
t'' , обладая скоростями, направления которых заключены в конусах, показанных на рис. 8.12.

Ясно, что чем больше расстояние от центра, тем меньше раcтвор конуса и тем ближе $\bar{v}^2$ к $(\bar{v})^2$, т.е. тем меньше разность $\bar{v}^2 - (\bar{v})^2$. В пределе $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ все частицы летят в строго радиальном направлении и $\bar{v}^2 = (\bar{v})^2$, т.е. вся кинетическая энергия превращается в «гидродинамическую».

Что касается цилиндрического и плоского случаев разлета, то термодинамическое равновесие здесь также обязательно нарушается, но, конечно, степени диссоциации и ионизации изменяются с течением времени по другим законам. Надо сказать, что если масса газа конечна, то при достаточно большом расширении «плоский» и «цилиндрический» случаи обязательно превратятся в «сферический».

Отметим ряд работ [15а, 24–26], посвященных различным вопросам свободномолекулярного разлета газа в пустоту, при котором нет столкновений (в этих статьях можно найти ссылки и на некоторые другие работы). В работе [27]

Рис. 8.12. К вопросу о разлете газа в пустоту без столкновений



рассматривался разлет ионизованного газа в пустое пространство, в котором имеется магнитное поле.

§ 8. Нарушение ионизационного равновесия. Остановимся подробнее на вопросе о нарушении ионизационного равновесия при расширении газа и покажем, как можно приближенно установить момент нарушения равновесия (излагаемый ниже метод был предложен одним из авторов [17]).

Предположим, что в начале температура газа была высока и атомы были многократно ионизованы. При охлаждении расширяющегося газа электроны «сажаются на свои места» в атомы и степень ионизации уменьшается. Пусть ионизационное равновесие нарушается только в стадии достаточно сильного расширения и охлаждения, когда «сажаются на свои места» последние электроны, т.е. когда идет процесс, обратный первой ионизации атомов. Газ к этому моменту разлетается уже практически инерционно, с постоянной скоростью, т.е. плотность изменяется как $1/t^3$. Механизмы рекомбинации электронов и ионов подробно обсуждались в гл. VI. Электроны захватываются ионами при тройных столкновениях с участием электрона в качестве третьей частицы; при не очень высоких температурах электроны, как правило, захватываются на верхние уровни атомов. Возможны захваты при парных столкновениях с излучением светового кванта (в этом случае электроны захватываются преимущественно на основной уровень). Фоторекомбинация существенна лишь при очень малых плотностях электронов N_e , см^{-3} , тем меньших, чем ниже температура. По формуле (6.105) она преобладает только при условии

$$N_e < 3,1 \cdot 10^{13} T_{\text{эВ}}^{3,75} = 3,2 \cdot 10^9 T_{\text{тыс. К}}^{3,75} \text{ см}^{-3}.$$

Между тем в большинстве интересных случаев разлета в стадии нарушения равновесия при температурах в несколько тысяч градусов плотность электронов гораздо больше и фоторекомбинация роли не играет ни в момент нарушения равновесия, ни позднее.

Если в стадии, еще близкой к равновесию, основную роль играет рекомбинация при тройных столкновениях, то ионизация происходит в результате обратного про-

цесса — отрыва электронов преимущественно от возбужденных атомов при ударах свободных электронов. Скорость ионизации по принципу детального равновесия выражается через коэффициент рекомбинации и константу равновесия или равновесную степень ионизации.

При этом уравнение кинетики для степени ионизации $x = N_e/N$ (N — число ядер, т. е. атомов и ионов в 1 см^3) приобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = bN(x_p^2 - x^2); \quad (8.29)$$

здесь b — коэффициент рекомбинации, который при не слишком высоких температурах, не выше нескольких тысяч градусов, выражается формулой (6.106):

$$b = \frac{ANx}{T^{9/2}}, \quad (8.30)$$

$$A = 8,75 \cdot 10^{-27} \text{ см}^6 \cdot \text{эВ}^{9/2}/\text{с} = 5,2 \cdot 10^{-23} \text{ см}^6 \cdot (\text{тысяч К})^{9/2}/\text{с};$$

x_p — равновесная степень ионизации, которая определяется формулой Саха. При x_p , небольших по сравнению с единицей, приближенно

$$x_p \approx 7 \cdot 10^7 \left(\frac{g_+ T_K^{3/2}}{g_a N} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{I}{2kT} \right). \quad (8.31)$$

При известных законах расширения и охлаждения $N(t)$, $T(t)$, которые даются формулами (8.25) и (8.27), выражение (8.29) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомой функции $x(t)$. Поскольку нас интересует главным образом качественная сторона дела, будем решать это уравнение приближенно.

Сначала скорости ионизации и рекомбинации, пропорциональные слагаемым в правой части уравнения (8.29), велики по сравнению со скоростями расширения и охлаждения. (Для сопоставления скоростей различных процессов рассматриваем относительные скорости, измеренные в обратных секундах, например, $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$, $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$.) Ионизация и рекомбинация почти полностью компенсируют друг друга; степень ионизации «следит» за расширением и охлаждением, оставаясь близкой к равновесной. Приближенно $x(t) \approx x_p \equiv x_p[T(t), N(t)]$ и разность $|x_p^2 - x^2| \ll x_p^2$.

Малое отклонение степени ионизации от равновесной, которое неизбежно существует, поскольку температура и плотность меняются во времени, можно оценить приближенно, полагая в левой части уравнения (8.29) $dx/dt \approx dx_p/dt$, заменяя x в выражении для коэффициента рекомбинации (8.31) на x_p , а также полагая $x_p - x^2 \approx 2x_p(x_p - x)$. Легко проверить, что относительное отклонение $|x_p - x|/x_p$ растет с течением времени (так как скорость релаксационного процесса становится все меньше и меньше по сравнению со скоростью изменения макроскопических параметров — температуры и плотности).

Ионизационное равновесие заметно нарушается, когда разность скоростей ионизации и рекомбинации возрастает до величины порядка самих скоростей, т. е. когда величина $|x_p^2 - x^2|$ становится порядка x_p^2 .

Оценить момент нарушения равновесия t_1 и величины T_1, N_1, x_1 в этот момент можно, полагая, как и раньше, $dx/dt \approx dx_p/dt$, $x \approx x_p$ в коэффициенте рекомбинации и приравнивая разность $x^2 - x_p^2$ к величине x_p^2 .

Дифференцируя по времени равновесную степень ионизации по формуле (8.31) с учетом того, что быстрее всего меняется экспоненциальный больцмановский фактор, и воспользовавшись законом охлаждения (8.27), который дает

$dT/dt = -3(\gamma - 1)T/t$, найдем уравнение, определяющее момент нарушения равновесия:

$$b_1 N_1 x_{p1} t_1 = \frac{3}{2}(\gamma - 1) \frac{I}{kT_1}. \quad (8.32)$$

Здесь $b_1 = b(T_1 N_1 x_{p1})$. Это уравнение совместно с выражениями для законов расширения и охлаждения (8.25), (8.27) и формулой Саха (8.31), отнесенными к моменту t_1 , сводится к трансцендентному уравнению для температуры T_1 . Найдя T_1 , легко вычислить и остальные величины t_1 , N_1 и x_{p1} . (В данном приближении фактическую степень ионизации x_1 можно считать равной равновесной x_{p1} .)

§ 9. Кинетика рекомбинации и охлаждение газа после нарушения ионизационного равновесия¹⁾. После нарушения равновесия скорость ионизации, пропорциональная x_p^2 , продолжает быстро уменьшаться с течением времени по экспоненциальному закону $\exp(-I/kT(t))$. Скорость рекомбинации, пропорциональная квадрату фактической степени ионизации, уменьшается гораздо медленнее и вскоре становится значительно больше скорости ионизации: $x(t) \gg x_p(t)$. В этих условиях актами ионизации можно пренебречь, полагая, что идет только рекомбинация. Уравнение кинетики (8.29) тогда приближенно запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = -bNx^2 \quad \text{при } t > t_1. \quad (8.33)$$

Если бы коэффициент рекомбинации b вообще не зависел или слабо зависел от температуры, то вследствие быстрого уменьшения плотности скорость рекомбинации быстро бы упала и рекомбинация вскоре бы совсем прекратилась. Именно таково положение при рекомбинации атомов в молекулу (см. § 7). В данном случае коэффициент рекомбинации (8.30), напротив, очень чувствителен к температуре ($b \sim T^{-9/2}$) и уменьшение скорости рекомбинации, связанное с уменьшением плотности расширяющегося газа, в значительной мере компенсируется повышением коэффициента рекомбинации за счет охлаждения. Поэтому особую важность приобретает вопрос о законе понижения температуры с течением времени. В самом деле, запишем формальное решение дифференциального уравнения (8.33) с коэффициентом рекомбинации (8.30):

$$x = \frac{x'_1}{\left[1 + 2Ax_1'^2 \int_{t'_1}^t \frac{dt N^2}{T^{9/2}}\right]^{1/2}}; \quad (8.34)$$

здесь значения t'_1, x'_1 определяются начальными условиями (в порядке приближения можно потребовать, чтобы интегральная кривая $x(t)$ проходила через точку нарушения равновесия; тогда $t'_1 = t_1, x'_1 = x_1$). Будем, как и раньше, характеризовать падение температуры с течением времени степенной функцией $T \sim t^{-m}$.

По формуле (8.34) асимптотическое поведение степени ионизации существенным образом зависит от скорости охлаждения, т.е. от показателя m . Если газ охлаждается «медленно» и $m < 10/9$ (чему соответствует показатель адиабаты $\gamma = 1 + \frac{m}{3} < 1,37$), то интеграл в (8.34) при $t \rightarrow \infty$ сходится и степень ионизации стремится к постоянному, отличному от нуля значению: рекомбинация не идет до конца.

Если же газ охлаждается «быстро» и $m > 10/9$, то интеграл расходится и степень ионизации при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю как $x \sim t^{(-9/4)(m-10/9)}$. При $m = 10/9$ она

¹⁾ В основу этого параграфа положена работа Н. М. Кузнецова и одного из авторов [28].

также стремится к нулю, только по логарифмическому закону $x \sim (\ln t)^{-1/2}$. Таким образом, при электроны и ионы должны в конце концов полностью рекомбинировать.

Но скорость охлаждения газа сама зависит от хода рекомбинации, так как при рекомбинации выделяется энергия свободных электронов, ранее оторванных от атомов, которая частично переходит в тепло. Следовательно, решение вопроса о поведении степени ионизации во времени требует совместного рассмотрения кинетики рекомбинации и баланса тепловой энергии газа.

При рекомбинации электрона в тройном соударении электрон сначала захватывается ионом на один из высоких уровней атома с энергией связи E порядка kT (см. гл. VI). Затем под действием электронных ударов второго рода, а впоследствии и за счет спонтанных радиационных переходов связанный электрон спускается по энергетическим уровням атома на основной уровень. Процесс дезактивации возбужденного атома обычно происходит быстро по сравнению со скоростями захватов электронов ионами и изменения температуры газа. Поэтому приближенно можно считать, что образовавшийся возбужденный атом дезактивируется немедленно вслед за захватом и потенциальная энергия I при рекомбинации немедленно трансформируется в другие виды энергии. Часть ее E^* непосредственно передается свободным электронам при электронных ударах второго рода (а затем распределяется и по всему газу в результате обмена энергией между электронами и ионами). Другая часть энергии связи $I - E^*$, выделяющаяся при радиационных переходах, первоначально переходит в излучение в линейчатом спектре. Это излучение частично покидает газовый объем, а частично поглощается атомами, причем поглощается главным образом резонансное излучение, соответствующее переходу возбужденного атома прямо в основное состояние.

При поглощении резонансного кванта атом возбуждается, затем излучает, новый квант поглощается другим атомом и т. д. до тех пор, пока квант не выйдет из газового объема наружу. Происходит так называемая диффузия резонансного излучения. В течение времени диффузии кванта возбужденный атом может испытать удар второго рода и отдать энергию возбуждения в тепло. Таким образом, некоторая часть энергии связи $I - E^*$, первоначально превращающейся в излучение, со временем также перейдет в тепло. Эта часть тем меньше, чем прозрачнее газ, т. е. чем меньше длится диффузия резонансного излучения.

Положим для простоты, что энергия $I - E^*$ полностью теряется газом (что соответствует прозрачности газового объема). Это предположение занижает тепловыделение в газе и приводит к занижению температуры, т. е. расчет кинетики рекомбинации при таком условии приводит к занижению степени ионизации газа, дает ее нижний предел. Указанное допущение тем более справедливо, чем прозрачнее газ, т. е. чем более позднюю стадию разлета мы рассматриваем, так что асимптотически оно верно.

Составляя здесь уравнение баланса энергии газа, будем для простоты считать, что температуры электронов и ионов (атомов) одинаковы. Оценки показывают, что во многих случаях в течение еще довольно продолжительного времени после нарушения ионизационного равновесия обмен энергией между электронным и ионным газами происходит быстро и температуры этих газов близки друг к другу¹⁾. Запишем уравнение энергии газа из расчета на одну тяжелую частицу (на один исходный атом). Тепловая энергия равна $\varepsilon = \frac{3}{2}(1+x)kT$, удельный объем $V = 1/N$, давление

¹⁾ В работе [28] уравнения составлены с учетом различия электронной и ионной температур.

газа $p = N(1 + x)kT$. Тогда

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = E^* \left(-\frac{dx}{dt} \right). \quad (8.35)$$

Отсюда с учетом закона расширения $N \sim t^{-3}$ получаем уравнение для температуры

$$\frac{dT}{dt} + 2 \cdot \frac{T}{t} = \frac{\frac{2}{3} \frac{E^*}{k} + T}{1 + x} \left(-\frac{dx}{dt} \right). \quad (8.36)$$

Для вычисления тепловыделения на один акт рекомбинации E^* рассмотрим процесс дезактивации возбужденного атома, образовавшегося при захвате электрона ионом. Как отмечалось выше, электрон при тройном столкновении, как правило, захватывается на один из очень высоких уровней атома с энергией связи $E \sim kT$. Расстояния между уровнями в этой области состояний гораздо меньше kT . При столкновениях со свободными электронами связанный электрон в возбужденном атоме переходит на соседние уровни, причем переходы «вверх» и «вниз» почти равновероятны, так что изменение энергии возбужденного атома под действием электронных ударов имеет характер диффузии по энергетической оси; при рекомбинации диффузионный поток направлен вниз, в сторону основного состояния атома (см. § 18 гл. VI). Скорость дезактивации, т. е. скорость нарастания энергии связи связанного электрона dE/dt , можно вычислить, если умножить нестационарное уравнение диффузии (6.109) на энергию E и проинтегрировать по всему спектру. Поскольку мы рассматриваем нестационарный случай движения электрона по оси энергии E от источника, расположенного в области малых энергий, в области больших энергий следует поставить граничное условие: функция распределения и диффузионный поток равны нулю. Указанная операция дает приближенное выражение для скорости изменения энергии связи электрона:

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{D}{kT},$$

где D — коэффициент диффузии, выписанный в § 18 гл. VI. Эта формула теряет силу в области, где расстояния между уровнями больше kT , так как в этой области переходы на нижние уровни значительно более вероятны, чем переходы на верхние уровни, и движение имеет односторонний характер. В этой области

$$\frac{dE}{dt} \approx \beta_{n,n-1} N_e \Delta E_{n,n-1},$$

где $\beta_{n,n-1} N_e$ — вероятность (в с^{-1}) перехода с уровня n на уровень $n-1$; $\Delta E_{n,n-1}$ — энергетическое расстояние между уровнями. (Выражение для константы скорости дезактивационного перехода $\beta_{n,n-1}$ приведено в § 15 гл. VI.)

Переход от диффузионного к одностороннему движению связанного электрона по энергетической оси происходит при энергии связи E' , при которой расстояние между уровнями $\Delta E_{n,n-1}$ равно kT . Эта энергия равна

$$E' = \frac{1}{2} kT \left(\frac{2I}{kT} \right)^{1/3} = 2,1 \cdot 10^{-4} T^{2/3}$$

(для атома водорода). Как известно (см. § 13 гл. V), скорость радиационной дезактивации, очень малая при малых энергиях связи, быстро возрастает по мере уменьшения степени возбуждения. После дезактивации атома ударами до некоторого уровня на первый план выступают радиационные переходы. Скорость излучения,

соответствующая радиационным переходам на ближайшие уровни, которая определяет скорость радиационной дезактивации $(dE/dt)_{\text{рад}}$, приведена в § 13 гл. V.

Переход от ударной к радиационной дезактивации происходит при такой энергии связи, при которой сравниваются скорости $(dE/dt)_{\text{удар}}$ и $(dE/dt)_{\text{рад}}$. Эта энергия связи, очевидно, и представляет собою искомое тепловыделение E^* . Надо сказать, что радиационной дезактивации способствуют также и радиационные переходы в атоме с высоких уровней прямо в основное состояние, при которых атом выходит из игры (см. § 13 гл. V). Расчеты [28] показывают, что вклад этого процесса сравним с вкладом постепенного излучения, происходящего при переходах на соседние уровни.

Вычисление тепловыделения E^* , сделанное в [28], дает приближенно¹⁾

$$E^* = I \begin{cases} 4,3 \cdot 10^{-4} N_e^{1/3} T^{-1/2}, & \text{если } kT < E^* < E', \\ 3,1 \cdot 10^{-4} N_e^{1/6} T^{1/12}, & \text{если } E^* > E'. \end{cases} \quad (8.37)$$

Теперь, после того как определено тепловыделение E^* , можно интегрировать систему уравнений (8.33)–(8.36). Как показано в [28], система допускает понижение порядка и сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Качественный анализ уравнения и численное решение показывают, что в зависимости от условий в момент нарушения ионизационного равновесия осуществляется тот или иной режим изменения степени ионизации.

Если газовое облако расширяется быстро (малая масса облака, большая скорость разлета) и ионизационное равновесие нарушается рано, то при высокой степени ионизации, когда запас потенциальной энергии ионизации в газе больше тепловой энергии, в процессе рекомбинации выделяется много тепла. Это препятствует быстрому охлаждению газа и затормаживает рекомбинацию. Рекомбинация в этих условиях быстро прекращается, и степень ионизации стремится к постоянной, отличной от нуля, величине. Происходит закалка электронов и ионов. Практически это случается, если в момент нарушения ионизационного равновесия все атомы газа, по крайней мере, однократно ионизованы ($x_1 \gtrsim 1$).

Если же газовое облако расширяется сравнительно медленно (большая масса, малая скорость разлета) и ионизационное равновесие нарушается поздно, то при малой степени ионизации, когда запас потенциальной энергии меньше, чем тепловая энергия, выделение небольшого количества тепла при рекомбинации не в состоянии задержать быстрое охлаждение газа, связанное с его расширением, и скорость рекомбинации оказывается достаточно большой. Рекомбинация при этом продолжается все время, и степень ионизации непрерывно уменьшается, стремясь к нулю. Так продолжается до тех пор, пока не нарушается обмен энергией между электронным и ионным газами. Последнее происходит, когда характерное время обмена τ_{ei} (см. § 21 гл. VI) становится больше времени t от начала разлета, которое характеризует относительные скорости расширения и охлаждения: $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}, \frac{1}{T} \frac{dT}{dt}$.

После нарушения обмена тепло, выделяющееся при рекомбинации, уже не распределяется равномерно между всеми частицами газа, а остается только в электронном

¹⁾ Если при каких-либо значениях T и N_e окажется, что $E^* < kT$, это означает, что радиационная дезактивация должна идти с самого начала захвата электрона. Такое положение обычно не реализуется, так как в этом случае фоторекомбинация преобладает над рекомбинацией в тройных столкновениях, а при фоторекомбинации электрон захватывается обычно не на верхние, а на нижние уровни атомов. Если E^* , вычисленное по формуле (8.37), оказывается по порядку больше потенциала ионизации I , это означает, что вся энергия связи I переходит в тепло, формула (8.37) неприменима и $E^* = I$.

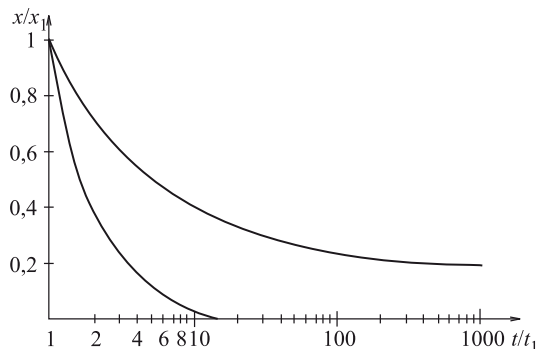


Рис. 8.13. Изменение степени ионизации при расширении газа в пустоту (пояснения см. в тексте)

газе. (Ионы и атомы охлаждаются быстрее, чем электроны, и их температура уменьшается по сравнению с температурой электронов.) В этих условиях тепловыделение в электронном газе относительно повышается, так как энергия рекомбинации теперь передается лишь небольшому количеству электронов. Благодаря этому уменьшение электронной температуры замедляется, затормаживается и рекомбинация. В этих новых условиях теплообмена стремление степени ионизации к нулю прекращается и в газе сохраняется остаточная ионизация (происходит закалка). Однако, в отличие от предыдущего случая, остаточная ионизация теперь очень мала, так как до момента нарушения обмена энергией между электронами и ионами значительная часть свободных электронов успевает прорекомбинировать.

На рис. 8.13 приведены рассчитанные в работе [28] кривые $x(t)$ для двух типичных случаев разлета газового облака.

При расчетах потенциал ионизации атомов был принят равным 13,5 эВ, атомный вес равен 14. Верхняя кривая относится к случаю, когда степень ионизации в момент нарушения ионизационного равновесия равна $x_1 = 0,58$, а температура и плотность газа равны $T_1 = 12\,000$ К, $N_1 = 1,7 \cdot 10^{16}$ см⁻³. Сам момент нарушения равновесия $t_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ с. Радиус газового облака в этот момент равен $R_1 = 4,9$ см, скорость разлета $u = 24$ км/с. Данные параметры газа в момент нарушения равновесия могут получиться при различных начальных условиях. В частности, им соответствуют следующие начальные температура, плотность и радиус шара: $T_0 = 50\,000$ К, $N_0 = 2 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $R_0 = 1$ см. Как видно из рисунка, при указанных условиях степень ионизации газа стремится к довольно значительному постоянному значению 0,2, т. е. происходит заметная закалка.

Нижняя кривая относится к следующим значениям параметров в момент нарушения равновесия: $t_1 = 2,1 \cdot 10^{-6}$ с, $T_1 = 11\,700$ К, $N_1 = 4 \cdot 10^{16}$ см⁻³, $x_1 = 0,34$, $R_1 = 5$ см, $u = 24$ км/с. Этому случаю соответствуют, например, такие начальные условия: $T_0 = 50\,000$ К, $N_0 = 5 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $R_0 = 1$ см. При этом степень ионизации стремится к нулю, т. е. закали, казалось бы, не происходит. Как отмечалось выше, в действительности рекомбинация на какой-то стадии также прекратится (когда затормозится передача энергии от электронов тяжелым частицам), однако степень ионизации при этом будет очень малой.

В заключение этого параграфа подчеркнем еще раз, что не учтенная здесь диффузия резонансного излучения способствует повышению тепловыделения в газе, уменьшению скорости рекомбинации и увеличению остаточной ионизации. Этот процесс следует рассматривать применительно к конкретным условиям задачи, так

как диффузия резонансного излучения зависит от размеров и степени прозрачности газового облака, характера уширения спектральных линий, состава газа и т. д.

4. Конденсация паров при адиабатическом расширении

§ 10. Насыщение паров и возникновение центров конденсации. Если пар любого вещества адиабатически расширяется и охлаждается, то он в некоторый момент становится насыщенным, а затем пересыщенным, после чего начинается конденсация. Известно, что конденсация сильно облегчается в присутствии ионов, пылинок, инородных частиц, которые становятся центрами конденсации и вокруг которых образуются капельки жидкости. Ионы и пылинки создают лишь более благоприятные условия для скорейшего образования центров конденсации, но их присутствие совсем не обязательно. В чистом пересыщенном паре центры конденсации появляются в результате слипания молекул в молекулярные комплексы. По достижении так называемых критических размеров комплексы делаются устойчивыми, не распадаются и обнаруживают тенденцию к дальнейшему росту и превращению в капельки жидкости.

Явление конденсации паров при адиабатическом расширении встречается в технике, в лаборатории, в природе. Оно лежит в основе работы камеры Вильсона, широко используемой в ядерной физике для регистрации быстрых заряженных частиц. Камера Вильсона представляет собою сосуд, наполненный парами воды, спирта или других жидкостей. Нужно пересыщение создается благодаря адиабатическому расширению паров при быстром выдвигании поршня. Пары конденсируются на ионах, которые образуются вдоль траектории быстрой частицы, и капельки жидкости регистрируются оптическими методами. Конденсация паров воды, содержащихся в воздухе, часто наблюдается при расширении воздуха в аэродинамических трубах.

То, что при адиабатическом расширении пара в некоторый момент обязательно должна начаться конденсация, легко пояснить с помощью диаграммы температура — удельный объем. Как известно из термодинамики, давление насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью, подчиняется уравнению Клапейрона–Клаузиуса (см., например, [18]). Если пар можно рассматривать как идеальный газ, то это уравнение приводит к следующей связи между удельным объемом насыщенного пара $V_{\text{пар}}$ и температурой T :

$$V_{\text{пар}} = BT \exp\left(\frac{U}{RT}\right), \quad T = \frac{U}{R} \left(\ln \frac{V_{\text{пар}}}{BT}\right)^{-1}, \quad (8.38)$$

где U — теплота испарения; R — газовая постоянная, а B — коэффициент, который приближенно можно считать постоянным.

Из этой формулы видно, что температура насыщения зависит от объема пара очень слабо, по логарифмическому закону. С другой стороны, адиабата Пуассона для паров представляет собой кривую степенного типа $T \sim V^{-(\gamma-1)}$, которая обязательно пересекает кривую насыщения (рис. 8.14). В точке пересечения O ранее ненасыщенный расширяющийся пар становится насыщенным.

Проследим за ходом процесса во времени. Если пар все время расширяется, то удельный объем монотонно растет с течением времени. Вместо того чтобы рассматривать изменение температуры во времени $T(t)$, можно рассматривать изменение

¹⁾ Это следует из формул $p = \text{const} \exp(-U/RT)$, $pV = RT$, где p — давление насыщенного пара.

температуры при увеличении объема $T(V) = T[V(t)]$, воспользовавшись диаграммой T, V (рис. 8.14).

Перейдя состояние насыщения, пар продолжает расширяться, следуя адиабате Пуассона, и становится пересыщенным (переохлажденным). Скорость образования

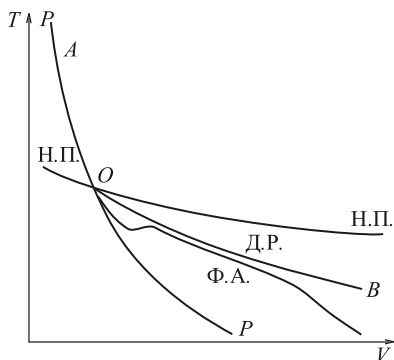


Рис. 8.14. T, V -диаграмма для процесса конденсации при адиабатическом расширении пара. P — адиабата Пуассона для пара; Н.П. — кривая насыщенного пара; O — точка насыщения; Д.Р. — адиабата равновесной двухфазной системы пар–жидкость; Ф.А. — фактическая адиабата системы пар–жидкие капли с учетом кинетики конденсации

центров конденсации чрезвычайно резко зависит от степени пересыщения. Поэтому, при дальнейшем увеличении степени пересыщения, число зародышей жидкой фазы быстро возрастает. Уже вскоре после прохождения состояния насыщения скорость конденсации достигает такой величины, что выделение скрытой теплоты останавливает рост пересыщения (если, конечно, расширение происходит не слишком быстро).

Конденсация ускоряется даже при постоянном числе центров вследствие увеличения поверхности капелек, к которым прилипают молекулы пара. Ускоряющаяся конденсация не только останавливает рост пересыщения, но приводит даже к уменьшению степени пересыщения. Образование новых зародышей, которое в высшей степени чувствительно к величине пересыщения, сразу же прекращается и в дальнейшем конденсация идет путем прилипания молекул к уже имеющимся каплям. Таким образом, все центры конденсации, как правило, рождаются в самом начале процесса конденсации, как только достигается достаточно большое пересыщение.

При работе с камерой Вильсона пар быстро расширяют до определенного объема, так что в нем создается известное начальное пересыщение. Это пересыщение выбирается столь большим, чтобы все ионы стали центрами конденсации и по числу капелек можно было сосчитать число ионов¹⁾. Таким образом, вопрос о числе центров конденсации здесь не возникает.

Другое дело — в газодинамических процессах, таких, как расширение газа в аэродинамических трубах, истечение из сопла или разлет газового облака, образующегося в результате нагревания и испарения первоначально твердого вещества, например металла. Здесь скорость расширения определяется общей динамикой процесса и число центров конденсации, т. е. в конечном счете число капелек конденсата, неизвестно и зависит от скорости расширения. Даже если в газе имеются ионы (что бывает, конечно, не всегда), при достаточно медленном расширении они далеко не все становятся центрами конденсации. В силу изложенных выше причин пересыщение в системе вследствие интенсивно протекающей конденсации может упасть после того, как только часть ионов превратится в центры конденсации. Тем более неизвестно число центров в чистом паре в отсутствие посторонних частиц. Число центров конденсации зависит от максимально достижимого пересыщения (переохлаждения) и определяется игрой противоположных влияний: охлаждения пара за счет совершения

¹⁾ В то же время зародыши, не содержащие ионов, практически не образуются.

работы расширения и нагревания его вследствие выделения скрытой теплоты при конденсации.

В § 12 будет показано, как можно вычислить число центров конденсации, зная скорость расширения и охлаждения пара.

§ 11. Термодинамика и кинетика процесса конденсации. Рассмотрим процесс конденсации в адиабатически расширяющемся веществе с чисто термодинамической точки зрения, т. е. полагая, что в каждый момент времени имеется термодинамическое равновесие. До момента насыщения пар расширялся, следуя адиабате Пуассона. После достижения состояния насыщения и начала конденсации вещество представляет собой уже двухфазную систему пар–жидкость, и уравнение адиабаты усложняется как вследствие превращения части газовой фазы в жидкую с иными термодинамическими свойствами, так и за счет выделения скрытой теплоты. Уравнение адиабаты двухфазной системы можно записать в следующем виде:

$$[c_1(1-x) + c_2x]dT + RT(1-x)\frac{dV}{V} - [U - (c_2 - c_1)T]dx = 0. \quad (8.39)$$

Здесь c_1 — теплоемкость пара при постоянном объеме; c_2 — теплоемкость жидкости; x — степень конденсации, определенная как отношение числа молекул в жидкой фазе к общему числу молекул в заданной массе вещества; V — удельный объем вещества, который меньше удельного объема пара в отношении $1-x$: $V = V_{\text{пар}}(1-x)$ ¹⁾. В этом уравнении мы пренебрегли поверхностной энергией капелек жидкости, которая очень мала по сравнению со скрытой теплотой, если капельки содержат много молекул. Уравнение адиабаты (8.39) справедливо и в отсутствие термодинамического равновесия. Если состояние неравновесно, степень конденсации x определяется кинетикой конденсации. В условиях термодинамического равновесия, т. е. при «бесконечно» медленном расширении пар в каждый момент находится в равновесии с жидкостью, т. е. является насыщенным. Состояние вещества меняется при этом вдоль кривой насыщения (8.38), которая, если заменить удельный объем пара на удельный объем вещества, приобретает вид

$$\frac{V}{1-x} = BT \exp\left(\frac{U}{RT}\right). \quad (8.40)$$

Если исключить из двух уравнений (8.39) и (8.40) степень конденсации x , то получим дифференциальное уравнение, которое описывает адиабатический процесс в двухфазной системе в переменных T, V . Решение этого уравнения дает адиабату $T(V)$. Константа интегрирования в общем решении определяется энтропией вещества. Ее можно выразить через температуру и объем в точке насыщения O , так как адиабата, очевидно, проходит через эту точку. Мы не будем здесь выписывать решения, а изобразим адиабату на рис. 8.14. Она проходит несколько ниже кривой насыщения, что видно из сопоставления формул (8.38) и (8.40), если учесть, что $x > 0$, $1-x < 1$. При небольшой степени конденсации, когда $x \ll 1$, адиабата двухфазной системы почти совпадает с кривой насыщения. Расхождение обеих кривых определяет степень конденсации x :

$$1-x = \frac{V(T)}{V_{\text{пар}}(T)}.$$

¹⁾ Удельный объем двухфазной системы $V = V_{\text{ж}}x + V_{\text{пар}}(1-x)$, где $V_{\text{ж}}$ — удельный объем жидкой фазы. Поскольку плотность жидкости гораздо больше плотности пара, при степени конденсации, не слишком близкой к единице, первым членом можно пренебречь: $V \approx V_{\text{пар}}(1-x)$. Теплоемкости жидкости и пара c_2, c_1 в формуле (8.39) предполагаются постоянными.

Степень конденсации монотонно возрастает вдоль адиабаты при увеличении объема.

Любопытно отметить, что при адиабатическом расширении вещества до бесконечности, $V \rightarrow \infty$ (и охлаждении до нуля температуры, $T \rightarrow 0$), степень конденсации вдоль термодинамически равновесной адиабаты стремится к единице: $x \rightarrow 1$.

Иными словами, при неограниченном расширении вещества, согласно законам термодинамики, пар должен был бы полностью сконденсироваться. При адиабатическом расширении до определенного объема конденсируется только определенная часть пара.

В действительности, конечно, состояние вещества в процессе конденсации никогда не может точно следовать равновесной адиабате, она только больше или меньше приближается к равновесному, причем тем ближе к равновесному, чем медленнее меняются внешние условия, т. е. чем медленнее происходит расширение.

Выше было уже отмечено, что центры конденсации зарождаются в основном сразу же после прохождения состояния насыщения, в момент достижения максимального пересыщения. После этого, если только расширение происходит не слишком быстро, ускоряющаяся конденсация снимает рост пересыщения и новые зародыши не появляются. Состояние вещества, пройдя через максимальное отклонение от равновесной адиабаты Д. Р. (рис. 8.14, максимальное переохлаждение), приближается к равновесному.

Однако степень переохлаждения не падает до нуля и фактическая адиабата Ф. А. никогда не достигает термодинамически равновесной Д. Р., проходя все время ниже последней. Конденсация теперь идет за счет роста капель. Одновременно протекают два процесса: прямой — прилипание молекул пара к каплям — и обратный — испарение капель. Скорость роста капель (т. е. скорость конденсации) определяется разностью скоростей прямого и обратного процессов, причем она тем больше, чем выше степень пересыщения. В насыщенном паре, т. е. на равновесной адиабате, прилипание и испарение в точности компенсируют друг друга и роста капель нет ¹⁾.

В ходе конденсации степень пересыщения, регулируя баланс между прилипанием и испарением, автоматически подстраивается к процессу таким образом, чтобы существовал избыток прилипания над испарением и чтобы скорость конденсации «следила» за расширением вещества. В системе поддерживается состояние, близкое к равновесному, т. е. к насыщению.

Значительное отклонение от термодинамического равновесия может произойти лишь при очень сильном расширении, когда акты прилипания становятся слишком редкими.

Так, при разлете паров в пустоту скорость прилипания, которая пропорциональна плотности пара, т. е. t^{-3} , с некоторого момента уже не в состоянии следить за расширением; конденсация прекращается, и остаток паров разлетается на бесконечность, вновь следуя адиабате Пуассона газа (рис. 8.14). Происходит закалка, т. е. на бесконечность разлетается вещество, не полностью сконденсировавшееся, как требуют законы термодинамики, а частично в виде газа, частично в виде капель конденсата (подробнее об этом см. в следующем параграфе).

При быстром расширении вещества конденсация не успевает «следить» за расширением и с самого начала состояние значительно отклоняется от термодинамически равновесного. При очень быстром расширении до определенного объема, как это

¹⁾ Термодинамически равновесная адиабата, строго говоря, соответствует состоянию насыщения по отношению к плоской поверхности жидкости, т. е. по отношению к каплям «бесконечно большого» радиуса.

имеет место в камере Вильсона, конденсация не успевает произойти за время расширения и начинается только после того, как расширение прекратилось. При очень быстром расширении в пустоту конденсация вообще не происходит и вещество разлетается на бесконечность в газовой фазе. Это соответствует наибольшему отклонению от термодинамического равновесия и максимальной закалке.

§ 12. Конденсация в облаке испаренного вещества, разлетающегося в пустоту. В этом параграфе более подробно рассматривается процесс конденсации при расширении пара, намечаются основные пути количественного расчета и приводятся численные результаты. Посмотрим, как протекает конденсация в облаке испаренного вещества, расширяющегося в пустоту. При этом будем иметь в виду явление «взрыва» больших метеоритов при ударе о поверхность планет (лишенных атмосферы) или при столкновениях с астероидами; об этом упоминалось в начале § 6. Нас интересует вопрос о том, в каком виде разлетается в межпланетное пространство испаренное вещество грунта планеты и тела метеорита: в виде чистого газа или же в виде мельчайших частиц и каковы размеры последних. Решение этой задачи было получено в работе одного из авторов [19] ¹⁾.

Все численные результаты будут относиться к конденсации паров железа, применительно к случаю испарения тела железных метеоритов. Посмотрим, когда достигается состояние насыщения при расширении паров железа. Ниже в таблице представлены рассчитанные температура T_1 и плотность (число атомов в см^3 , n_1) паров в момент насыщения для нескольких значений энтропии паров S . Предполагая, что процесс расширения протекает адиабатически, можно сказать, что той же самой энтропией обладало и «твердое» железо в момент нагревания. В таблице представлены значения начальной энергии нагревания ε_0 и температуры T_0 железа при нормальной плотности твердого металла, соответствующие этим значениям энтропии. Эти величины были рассчитаны с помощью метода, изложенного в § 14 гл. III (учтены как ядерная, так и электронная части тепломкости). В последнем столбце стоят средние скорости разлета газового шара из атомов железа, оцененные по формуле $u = \sqrt{2\varepsilon_0}$ (см. § 6), т. е. в предположении, что к моменту конденсации пары уже сильно остыли и вся начальная энергия нагревания превратилась в кинетическую энергию разлета.

Перейдем к оценке числа центров конденсации, т. е. числа частиц конденсата в конечном состоянии. Теория образования зародышей жидкой фазы в чистом пересыщенном паре была развита рядом авторов: Фольмером, Берингом и Дерингом, Фаркашем, Я. Б. Зельдовичем, Я. И. Френкелем. Подробное изложение ее со ссылками на оригинальные работы можно найти в книге Я. И. Френкеля [21] (см. также [22]). Мы напомним здесь лишь основные положения этой теории.

ε_0 , эВ/атом	T_0 , эВ	S , кал/(моль · К)	T_1 , К	n_1 , см^{-3}	u , км/с
25,6	5	48,3	3100	$8,01 \cdot 10^{19}$	9,2
71,9	10	60,8	2130	$7,15 \cdot 10^{16}$	15,5
138	15	71,5	1700	$2,86 \cdot 10^{14}$	21,4
222	20	81,3	1430	$1,43 \cdot 10^{12}$	27,2

В паровой фазе время от времени происходят флуктуации, при которых молекулы пара слипаются, образуя молекулярные комплексы — зародыши жидкой фазы. В ненасыщенном паре, когда устойчива газовая фаза, комплексы неустойчивы и

¹⁾ Некоторые качественные замечания о явлении конденсации испаренного вещества были сделаны в работе авторов [20].

вскоре распадаются (испаряются). В пересыщенном паре неустойчивы лишь комплексы очень малых размеров. Увеличение мельчайших комплексов за счет прилипания новых молекул энергетически невыгодно из-за возрастания поверхностной энергии на границе раздела между жидкой и газовой фазами. Рост комплексов достаточно больших размеров энергетически выгоден, так как благоприятный объемный энергетический эффект (выделение скрытой теплоты) при достаточно больших размерах становится больше неблагоприятного поверхностного. При каждой степени пересыщения существуют определенные, критические, размеры комплексов. Сверхкритические зародыши (с радиусом больше критического) устойчивы, «жизнеспособны» и обнаруживают тенденцию к дальнейшему росту и превращению в капельки жидкости. Скорость образования жизнеспособных зародышей центров конденсации пропорциональна вероятности появления комплексов критических размеров. Для образования таких комплексов должна быть затрачена некая энергия $\Delta\Phi_{\max}$, нужно преодолеть потенциальный барьер, поэтому вероятность таких флуктуаций по закону Больцмана пропорциональна $\exp(-\Delta\Phi_{\max}/kT)$.

Величина потенциального барьера $\Delta\Phi_{\max}$ или энергия активации зависит от критического радиуса комплекса и однозначно связана со степенью пересыщения, которую можно характеризовать, например, величиной переохлаждения,

$$\theta = \frac{T_p - T}{T_p}.$$

Здесь T_p — температура пара, насыщенного при данной плотности, а T — фактическая температура пара.

Скорость образования жизнеспособных зародышей, т. е. число центров конденсации из расчета на одну молекулу пара, появляющихся в 1 с в стационарных условиях, когда в системе поддерживается постоянное пересыщение (переохлаждение), а сверхкритические зародыши удаляются из системы с заменой эквивалентным количеством пара, равна

$$I = C e^{-b/\theta^2}, \quad (8.41)$$

где

$$C = n\bar{v}2\omega\sqrt{\frac{\sigma}{kT}}, \quad b = \frac{16\pi\sigma^3\omega^2}{3k^3q^2T}.$$

Здесь n — число молекул пара в см^3 ; $\bar{v}$ — их тепловая скорость; σ — поверхностное натяжение; ω — объем в жидкости, приходящийся на одну молекулу; $q = U/R$ — выраженная в градусах теплота испарения. Критический радиус r^* зародыша связан со степенью переохлаждения формулой $\theta = 2\sigma\omega/kqr^*$.

Теорию можно обобщить и на случай электрически заряженных зародышей, внутри которых сидит ион (см. [19]). Скорость образования зародышей при этом по-прежнему описывается формулой (8.41), только константа b уменьшается.

Составим уравнения кинетики конденсации. Сделаем основное предположение о том, что процесс расширения паров происходит настолько медленно, что процесс образования зародышей можно считать квазистационарным. Скорость образования при этом в каждый момент времени совпадает со стационарной скоростью (8.41), соответствующей фактическому переохлаждению θ , которое существует в системе в данный момент.

Если $I(t')$ — число центров конденсации, возникающих в 1 с в момент t' (из расчета на одну молекулу пара), а $g(tt')$ — число молекул к моменту t в капле жидкости, которая выросла из зародыша, появившегося в момент t' , то степень

конденсации $x(t)$ к моменту t можно записать в виде

$$x(t) = \int_{t_1}^t I(t') g(tt') dt'. \quad (8.42)$$

Интегрирование по времени здесь ведется от момента насыщения, т. е. от момента, когда начали появляться зародыши.

Скорость роста капли сверхкритических размеров равна разности скоростей прилипания молекул пара к поверхности капли и испарения капли. Ее можно приближенно записать в виде (см. [19, 21])

$$\frac{dg}{dt} = 4\pi r^2 n\bar{v} \left(1 - e^{-q\theta/T} \right), \quad (8.43)$$

где $4\pi r^2$ — площадь поверхности капли; $n\bar{v}$ — поток молекул пара. Множитель в скобках пропорционален разности скоростей прилипания и испарения. В состоянии насыщения, когда $\theta = 0$, прилипание и испарение компенсируют друг друга и скорость роста равна нулю¹⁾. В пересыщенном паре $\theta > 0$ и капля в среднем растет, $dg/dt > 0$, в ненасыщенном — $\theta < 0$ и капля в среднем испаряется, $dg/dt < 0$.

Уравнения (8.42), (8.43), (8.41) вместе с уравнением адиабаты двухфазной системы (8.39), формулой насыщенного пара (8.38) и законом расширения вещества, который в случае разлета в пустоту дается выражением (8.25), образуют полную систему уравнений для расчета кинетики конденсации.

В соответствии с качественной картиной, изложенной в предыдущих параграфах, решение этой системы можно разбить на два независимых этапа. Первый этап — рассмотрение небольшого интервала времени сразу же после достижения состояния насыщения, когда переохлаждение сначала растет, а затем, пройдя через максимум, уменьшается вследствие начавшейся конденсации. На этой короткой стадии появляются зародыши. Вычисление их количества, равного

$$\nu = \int_{t_1}^{\infty} I(t') dt',$$

дает полное число частиц конденсата (из расчета на одну исходную молекулу). Фактически интегрирование по времени здесь распространяется не до $t = \infty$, а на весьма короткий промежуток времени, так как в силу формулы (8.41) скорость I очень резко уменьшается, как только переохлаждение, пройдя через максимум, начинает убывать.

Второй этап — это рассмотрение роста уже известного числа капель в течение всей последующей стадии, вплоть до $t \rightarrow \infty$.

Строгое решение системы уравнений представляет, конечно, большие трудности. В работе [19] находится приближенное решение. Приближенное рассмотрение первого этапа основано на чрезвычайно резкой зависимости $I(\theta)$, в силу которой можно полагать, что практически все зародыши образуются в течение очень короткого времени вблизи момента, когда переохлаждение максимально (решение действительно приводит к экстремальному виду зависимости $\theta(t)$).

Отсылая за подробностями решения к работе [19], приведем результаты расчета для конкретного примера.

¹⁾ Здесь пренебрегается влиянием кривизны капли.

Рассмотрим шар из атомов железа с массой 33 000 т, который нагрелся и превратился в плотный газ, скажем, при ударе огромного железного метеорита о поверхность Луны. Пусть скорость удара была такой, что начальная энергия нагревания железа при нормальной плотности составляла $\varepsilon_0 = 72$ эВ/атом. Начальная температура при этом была $T_0 = 10$ эВ = 116 000 К. В стадии сильного охлаждения к моменту насыщения пары разлетаются практически инерционно, со средней скоростью $u = 15,5$ км/с. Пары становятся насыщенными в момент времени $t_1 = 6,8 \cdot 10^{-2}$ с от начала разлета, при расширении до радиуса 1050 м. При этом $T_1 = 2130$ К, $n_1 = 7,15 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$.

При разлете первоначально высокоионизованного газа в пустоту в нем даже в стадии сильного охлаждения сохраняется остаточная ионизация, которая гораздо выше термодинамически равновесной. Центры конденсации при этом будут содержать ионы. Как показывают расчеты, число центров конденсации очень слабо зависит от того, заряжены они или нет, так что предположение о том, что конденсация идет на ионах, не является существенным.

Максимально достижимое переохлаждение в нашем примере оказывается равным $\theta_{\max} = 0,0765$ ($b/\theta_{\max} = 43,1$). Зародыш критических размеров при таком переохлаждении содержит 46 атомов. Число центров конденсации $\nu = 4 \cdot 10^{-11}$ на атом, что гораздо меньше, чем число ионов на атом, в отличие от процесса в камере Вильсона, где все ионы становятся центрами конденсации. Рассмотрение второй стадии роста капель показывает, что в течение продолжительного времени конденсация «следит» за расширением вещества и в системе поддерживается состояние, близкое к насыщению. Лишь к моменту $t_2 \sim 2,5$ с, при разлете шара на 40 км, плотность вещества становится столь малой, что дальнейший рост капель прекращается и наступает закалка. К этому моменту конденсируется примерно половина паров железа и конденсация прекращается. Зная степень конденсации x_∞ и число частиц конденсата, можно найти и их размеры (число атомов в частичке равно $x_\infty \nu^{-1}$). В нашем примере на бесконечность разлетаются железные частички радиусом $3,1 \cdot 10^{-5}$ см; всего их $\sim 3 \cdot 10^{21}$. Примерно половина вещества уходит на бесконечность в виде газа.

Теория позволяет установить приближенные законы подобия для перехода к другим начальным условиям. Оказывается, что при условии достаточной медленности расширения, когда справедливы исходные предположения, степень конденсации данного вещества при разлете на бесконечность не зависит от начальных условий, а размеры частиц конденсата пропорциональны начальным линейным размерам испаренного тела (корню кубическому из массы) и быстро убывают с возрастанием начального нагревания.

§ 13. К вопросу о механизме образования космической пыли. Замечания о лабораторном исследовании конденсации. Надо думать, что рассмотренный в предыдущем параграфе процесс конденсации испаренного вещества при разлете в пустоту является одним из механизмов образования космической пыли в солнечной системе (это предположение было высказано в работе [19]). В межпланетном пространстве присутствуют маленькие частицы разнообразных размеров, которые называют космической пылью. Иногда эти частицы выпадают на Землю в виде метеорных дождей. При своем обращении вокруг Солнца частицы испытывают некоторое торможение под действием абберационной составляющей светового давления¹⁾. Самые

¹⁾ Само световое давление в основном действует в радиальном направлении. Сила давления обратно пропорциональна квадрату расстояния частицы до Солнца, и ее действие эквивалентно лишь небольшому уменьшению силы тяготения, т.е. радиальная составляющая светового давления влияет только на радиус орбиты. Торможение же вызывает только касательная к ор-

мельчайшие частицы с размерами порядка 10^{-6} – 10^{-5} см при этом выпадают на Солнце и исчезают (см. об этом в [23]). Следовательно, в солнечной системе должен существовать источник восполнения запасов мельчайших частиц космической пыли.

Отмечалось (в частности, К. П. Станюковичем), что таким источником может служить механическое раздробление вещества при столкновениях малых тел солнечной системы — астероидов или при ударах метеоритов о поверхность планет, лишенных атмосферы, когда частицы, приобретающие значительную скорость, вырываются из поля притяжения и, не тормозясь в атмосфере, уходят в пространство.

Можно думать, что описанное выше явление конденсации испаренного вещества грунта планеты, метеорита или астероидов также является поставщиком мельчайших частиц.

При энергичных столкновениях астероидов, когда кинетическая энергия удара достаточна для полного испарения обоих сталкивающихся тел, механический эффект раздробления твердого вещества вообще отсутствует, так как вся масса полностью испаряется. В этом случае для образования мельчайших частиц механизм конденсации является единственным.

Жидкие капельки, выросшие в процессе конденсации, постепенно остывают благодаря потерям энергии на тепловое излучение и затвердевают. Можно показать, что процесс охлаждения излучением протекает гораздо скорее, чем испарение нагретых частиц, которое чрезвычайно резко замедляется по мере остывания. Таким образом, однажды родившиеся частицы конденсата будут продолжать свое существование в виде твердых пылинок. Поскольку в космосе происходят столкновения тел самых различных размеров и скоростей, рождаются частицы конденсата также самых разнообразных размеров.

Явление конденсации испаренного вещества при газодинамическом расширении можно использовать и для лабораторного изучения конденсации паров металлов или других твердых (и жидких) веществ и изучения оптических свойств мельчайших частиц.

Размеры частиц конденсата зависят от начальных условий, поэтому путем соответствующего выбора этих условий можно добиться получения в лаборатории частиц желаемых размеров. Приведем результаты грубой оценки для условий, близких к лабораторным. Если быстро испарить 1 г железа, сообщив ему тем или иным путем начальную энергию $\varepsilon_0 = 13$ эВ/атом, соответствующую начальной температуре (при плотности твердого металла) $T_0 = 35\,000$ К, то конденсация паров при разлете в пустоту (в откачанном сосуде) заканчивается к моменту $t = 5 \cdot 10^{-5}$ с при разлете облачка на 30 см. Частицы конденсата имеют при этом размеры порядка 10^{-4} см.

Расчеты кинетики конденсации легко переносятся и на другие возможные законы расширения вещества, которые имеют место, скажем, в аэродинамической трубе или при истечении из сопла. Эти расчеты не содержат ничего принципиально нового по сравнению со случаем разлета в пустоту, и мы на них останавливаться не будем. Заметим, что если степень конденсации паров невелика или же полная энергия паров гораздо больше теплоты испарения, то конденсация мало сказывается на газодинамике процесса. Кинетику конденсации можно при этом рассчитывать на основе известного газодинамического решения, найденного в первом приближении без учета конденсации. Именно так мы и поступали в предыдущем параграфе.

бите составляющая светового давления, возникающая вследствие aberrации света. Подробнее об этом см. в книге В. Г. Фесенкова [23].

Глава IX

СВЕТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В УДАРНЫХ ВОЛНАХ И ПРИ СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ В ВОЗДУХЕ

1. Яркость фронта ударных волн большой амплитуды в газах

§ 1. Качественная зависимость яркостной температуры от истинной температуры за фронтом. Оптические измерения имеют большое значение для определения температуры сильно нагретых тел и вообще для исследования высокотемпературных процессов. Обычная методика состоит в измерении тем или иным способом яркости поверхности светящегося тела (фотографическим путем, с помощью фотозлементов, электронно-оптических умножителей). Затем по яркости находят эффективную температуру излучения, которая, по определению, совпадает с температурой абсолютно черного излучателя, посылающего с поверхности точно такой же световой поток, как и исследуемый объект (см. § 8 гл. II). Особенно распространены фотографические методы определения яркости и эффективной температуры, основанные на сравнении степеней почернения, которые производят на фотопленке свет, исходящий от тела, и свет от эталонного источника с известными температурой и спектром, скажем, от Солнца. Для большей точности фотографируют обычно в узком спектральном участке, так как изучаемый объект и эталонный источник, обладая разными температурами, посылают различные спектры излучения, а кроме того, от длины волны света зависит чувствительность фотоматериалов, что создает трудности при пересчете степени почернения на температуру.

Оптические (в частности, фотографические) методы широко применяют и при изучении ударных волн. Газ, нагретый в сильной ударной волне до высокой температуры, излучает, и поверхность фронта волны светится. Яркость свечения зависит от амплитуды ударной волны и размеров нагретой области за фронтом. Чтобы по измеренной на опыте эффективной или, что то же самое, яркостной температуре можно было судить об истинной температуре вещества за фронтом волны, необходима уверенность в том, что светящийся объект излучает как абсолютно черное тело.

Если фронт ударной волны представляет собой «классический» скачок и за ним простирается достаточно протяженная, оптически толстая область с более или менее постоянной температурой, равной температуре за фронтом, то нагретое вещество, ограниченное поверхностью фронта, излучает с поверхности как абсолютно черное тело ¹⁾. Измеряя яркость поверхности фронта, можно в таком случае непосредственно

¹⁾ Если область нагретого газа за «классическим» скачком оптически тонка (например, ударная волна отошла еще на малое расстояние от создающего ее поршня,двигаемого в газ), газ испускает свет как объемный излучатель. Световой поток, выходящий с поверхности

определить температуру за фронтом ударной волны, т. е. амплитуду волны, что важно не только для экспериментальных исследований, но и имеет большое практическое значение. Опыт показывает, что в некотором интервале амплитуд (и, конечно, при достаточно большой толщине нагретой области за фронтом) фронт ударной волны, действительно, излучает как черное тело. Это подтверждается тем, что яркостная температура совпадает с температурой за фронтом, вычисленной на основе ударных соотношений и уравнения состояния по одному из других экспериментально определяемых параметров фронта, скажем, по скорости распространения ударной волны.

Однако опыт и теоретическое рассмотрение показывают, что такое совпадение не может наблюдаться при любых амплитудах. Яркостная температура достаточно сильной ударной волны становится меньше истинной температуры за фронтом, причем, начиная с некоторой амплитуды, она очень быстро падает при возрастании амплитуды, достигает предельного, сравнительно низкого значения (красного света), и в дальнейшем почти не меняется при сколь угодно большом увеличении амплитуды. Типичная зависимость яркостной температуры фронта ударной волны от истинной температуры за фронтом изображена на рис. 9.1, где представлена полученная на основе теоретических оценок (сделанных в следующих параграфах) кривая эффективной температуры красного света для ударной волны в воздухе нормальной плотности. Рис. 9.1 свидетельствует о существовании эффекта «насыщения» яркости. Сколь сильно ни нагревался бы газ ударной волной, даже до миллионов градусов, все равно невозможно «увидеть» температуры выше сотни тысяч градусов; существует верхний предел температуры за фронтом ударной волны, которую еще можно «увидеть». Этот эффект можно легко объяснить на основе представлений о структуре фронта ударной волны с учетом излучения, изложенных в разд. 3 гл. VII. Вопрос о яркости фронта ударных волн большой амплитуды был рассмотрен в работах авторов [2–4].

Будем полагать, что за фронтом плоской ударной волны простирается достаточно протяженная, оптически толстая область с постоянной высокой температурой, и посмотрим, каков поток видимого излучения, который выходит с поверхности фронта волны и регистрируется прибором, расположенным далеко от фронта, на «бесконечности».

Рассмотрим сначала ударную волну не слишком большой амплитуды, в которой роль излучения ничтожна и никакого прогрева газа перед скачком уплотнения нет. Если отвлечься от изменения температуры во фронте, связанного с релаксационными процессами в газе, то распределение температуры в ударной волне представляет собой «классический» скачок, показанный на рис. 9.2, а. Толщина скачка вместе с релаксационным слоем обычно гораздо меньше длины пробега излучения, поэтому

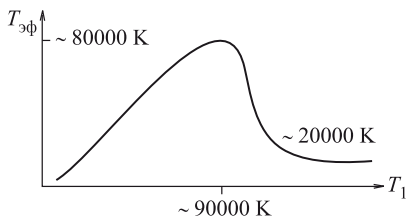


Рис. 9.1. Зависимость яркостной температуры поверхности фронта ударной волны в воздухе от истинной температуры за фронтом (для красного света)

оптически тонкого слоя в направлении нормали к поверхности, равен, как показано в § 7 гл. II, $S_\nu = S_{\nu p}[1 - \exp(-\kappa'_\nu d)]$, где $S_{\nu p}$ — поток, соответствующий абсолютно черному телу той же температуры, κ'_ν — коэффициент поглощения, а d — толщина нагретого ударной волной слоя. При малой оптической толщине $\kappa'_\nu d \ll 1$, $S_\nu = S_{\nu p} \kappa'_\nu d \ll S_{\nu p}$. В пределе $\kappa'_\nu d \gg 1$ поток стремится к планковскому $S_\nu = S_{\nu p}$. Как отмечалось в § 21 гл. V, изучая нарастание яркости S_ν со временем $t = d/D$ (D — скорость волны), И. Ш. Модель измерил коэффициенты поглощения красного света в ударной волне [1].

мы имеем типичный пример абсолютно черного излучателя: оптически толстый слой нагретого до постоянной температуры T_1 вещества ограничен поверхностью с очень

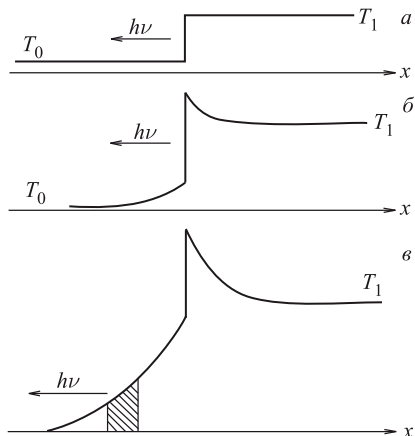


Рис. 9.2. К вопросу о свечении ударной волны

образуется нагретый слой, а профиль температуры в ударной волне приобретает вид, изображенный на рис. 9.2, б (в воздухе, например, при $T_1 = 65\,000$ К максимальная температура прогрева перед самым разрывом $T_- = 9000$ К).

В отличие от холодного, нагретый газ всегда поглощает маленькие кванты видимого света ($h\nu \sim 2-8$ эВ). В одноатомных газах кванты, с энергией меньше потенциала ионизации атомов I , поглощаются возбужденными атомами, энергия возбуждения которых превышает $I - h\nu$; в соответствии с законом Больцмана, концентрация возбужденных атомов пропорциональна $\exp\left[-\frac{I-h\nu}{kT}\right]$, так что и коэффициент поглощения очень резко, по больцмановскому закону, возрастает с повышением температуры, $\kappa_\nu \sim \exp\left(-\frac{I-h\nu}{kT}\right)$. В молекулярных газах, таких как воздух, имеется еще ряд других механизмов поглощения видимого света; во всяком случае коэффициент поглощения видимого света всегда весьма чувствителен к температуре и быстро растет при нагревании.

Теперь кванты видимого света, которые излучаются с поверхности ударного разрыва и поток которых у самого разрыва соответствует, грубо говоря, температуре T_1 ¹⁾, прежде чем попасть в регистрирующий прибор, расположенный на «бесконечности», должны проникнуть через прогревный слой. Они частично поглощаются в этом слое. Поэтому эффективная температура видимого излучения фронта ударной волны будет меньше истинной температуры за фронтом: прогревный слой как бы экранирует высоконагретый газ за фронтом ударной волны. Экранировка и, следовательно, отклонение $T_{\text{эф}}$ от T_1 тем сильнее, чем больше оптическая толщина прогревного

резким скачком температуры. Если холодный газ перед фронтом, как это обычно бывает, прозрачен в видимой части спектра (бесцветен), прибор зарегистрирует световой поток, соответствующий планковскому излучению температуры T_1 ; эффективная температура излучения будет равна истинной температуре газа за фронтом.

Рассмотрим теперь ударную волну большой амплитуды, скажем, с температурой за фронтом $T_1 = 65\,000$ К. С поверхности ударного разрыва, в основном, излучаются кванты с энергиями порядка десяти или нескольких десятков эВ. (Максимум планковского спектра при температуре $T = 65\,000$ К приходится на кванты $h\nu = 2,8kT = 16$ эВ.) Такие кванты превышают потенциалы ионизации атомов и молекул, очень сильно поглощаются в холодном газе перед ударным разрывом и прогревают его. Перед ударным разрывом

¹⁾ В действительности поток квантов несколько больше, так как непосредственно за разрывом температура выше, чем температура за фронтом (см. рис. 9.2, б).

слоя τ_ν ¹⁾ для видимого света, т. е. чем выше температура прогревания, тем выше амплитуда волны.

Пока оптическая толщина $\tau_\nu \ll 1$, экранировка ничтожна, и отклонение $T_{\text{эф}}$ от T_1 очень мало; фронт светится как черное тело с температурой T_1 . В силу резкой зависимости поглощения видимого света от температуры, и в свою очередь, довольно резкой зависимости температуры прогревания от амплитуды волны (см. § 16 гл. VII), начало сильной экранировки, соответствующее достижению оптической толщиной τ_ν значения порядка единицы, выступает при возрастании амплитуды волны весьма явственно. В воздухе сильная экранировка начинается при температуре за фронтом около $T_1 = 90\,000\text{ К}$ (см. § 3).

В ударной волне еще большей амплитуды оптическая толщина прогревного слоя для видимого света больше единицы и слой почти совершенно непрозрачен для видимых квантов, излучаемых высоконагретым газом за фронтом волны: экранировка этой области почти полная. Таким образом, при повышении амплитуды волны эффективная температура видимого света вначале совпадает с температурой за фронтом, затем начинает отставать от нее, проходит через четко выраженный максимум («насыщение» яркости) и быстро падает.

Возникновение сильного экранирования прогревным слоем не означает, однако, что яркость фронта ударной волны очень большой амплитуды падает до нуля и волна перестает светиться. Нагретый газ перед ударным разрывом не только поглощает, но и сам излучает видимый свет. Пока температура прогревания не очень высока и слой прозрачен, собственное излучение его теряется на фоне проходящего видимого излучения, испускаемого гораздо более сильно нагретым газом за фронтом. Когда же прогревный слой совершенно перестает пропускать проходящий высокотемпературный свет, на первый план выступает его собственное свечение.

Чтобы получить представление о яркости этого собственного свечения прогревного слоя, заметим, что температура в нем монотонно возрастает, начиная от «нуля», точнее, от температуры холодного газа перед фронтом. Вследствие резкой температурной зависимости поглощения видимого света в самых передних слоях зоны прогрева, где температура низка, свет не поглощается и не излучается. В более глубоких слоях при высокой температуре видимые кванты интенсивно испускаются, но тут же снова поглощаются, будучи не в состоянии выйти наружу в силу непрозрачности газа. На «бесконечность» с поверхности фронта выходят кванты, рожденные в некотором промежуточном, излучающем слое зоны прогрева, отстоящем от «бесконечности» на оптическом расстоянии (соответствующем частотам видимого света) порядка единицы. На рис. 9.2, в излучающий слой заштрихован. Очевидно, эффективная температура излучения совпадает со средней температурой излучающего слоя. Положение слоя определяется только профилем температуры газа $T(x)$ и температурной зависимостью поглощения $\kappa_\nu(T)$ из условия, что слой отстоит от холодного газа на оптическом расстоянии порядка единицы. Как показано в § 17 гл. VII, профиль температуры на переднем краю зоны прогрева в ударных волнах большой амплитуды почти не зависит от амплитуды волны. Следовательно, не зависит от амплитуды и собственное свечение прогревного слоя, т. е. эффективная

¹⁾ Подчеркиваем, что оптическая толщина прогревного слоя для видимого излучения τ_ν не имеет ничего общего с усредненной по спектру оптической толщиной слоя, соответствующей большим квантам, «ведущим» прогрев. Как показано в § 16 гл. VII, температура в прогревном слое падает примерно экспоненциально по усредненной оптической толщине, $T = T_- \times \exp(-\sqrt{3}|\tau|)$ (при $T_- < T_1$), так что усредненная толщина слоя порядка единицы.

температура очень сильной ударной волны. В воздухе нормальной плотности эта предельная яркостная температура в красном свете равна примерно 20 000 К (см. § 4).

Эффект экранировки и резкого занижения яркостной температуры фронта ударной волны по сравнению с истинной температурой за фронтом наблюдался экспериментально И. Ш. Моделем [1]. В его опытах фотографическим путем измерялась яркостная температура фронта ударных волн в тяжелых инертных газах: ксеноне, криптоне и аргоне, в которых удается получить высокие температуры в ударной волне. Скорость фронта в этих опытах была равна 17 км/с. Оптическая толщина нагретой области за фронтом ударной волны была заведомо большой, так что в отсутствие экранировки фронт должен был бы излучать как черное тело. Однако на опыте наблюдалась яркостная температура 30 000–35 000 К, которая в несколько раз ниже температур за фронтом T_1 , рассчитанных по скорости фронта и ударным соотношениям (в Xe $T_1 \approx 110\,000$ К, в Kr $T_1 \approx 90\,000$ К, в Ar $T_1 \approx 60\,000$ К). Если учесть, что точность экспериментального определения эффективной температуры видимого (красного) света была не менее $\pm 20\%$, то указанное расхождение следует отнести именно за счет экранировки прогревным слоем. К сожалению, в опытах И. Ш. Моделя регистрировалась только одна точка по амплитуде волны, что не дает возможности проследить характер всей кривой зависимости яркостной температуры от истинной температуры за фронтом.

Следует отметить, что явление «насыщения» яркости при высоких температурах наблюдалось многими авторами в искровых разрядах¹⁾. Известно, что увеличение скорости поступления энергии в канал искрового разряда, начиная с некоторой скорости, не приводит к увеличению яркостной температуры выше $\sim 45\,000$ К в воздухе. Также ограничена температура свечения и при разрядах в аргоне, ксеноне (при разрядах в капиллярах наблюдается более высокая температура — около 90 000 К в воздухе).

Эффект насыщения, быть может, связан с экранировкой высоких температур в канале, в какой-то мере подобной экранировке в ударной волне, однако возможно ограничена истинная температура в канале за счет потерь на излучение и т. д.

§ 2. Поглощение световых квантов в холодном воздухе. Особенно большой практический интерес представляет вопрос о яркости сильных ударных волн в воздухе нормальной плотности, который мы рассмотрим более подробно. Необходимо определить верхнюю границу амплитудного интервала, в котором фронт ударной волны излучает видимый свет как абсолютно черное тело, оценить максимальную и предельную яркостные температуры. Задача сводится, очевидно, к оценке оптической толщины прогревного слоя для видимого излучения, которой определяется степень экранирования высоконагретой области за фронтом, и к нахождению собственного свечения прогревного слоя.

Для этого следует прежде всего уточнить, каковы геометрическая толщина прогревного слоя и распределение температуры в нем по геометрической координате, что в свою очередь зависит от того, как поглощаются в воздухе сравнительно большие кванты с энергиями порядка десятка–сотни электронвольт, ответственные за прогревание газа перед ударным разрывом. Подытожим известные из литературы данные о поглощении таких квантов в холодном воздухе.

Выше уже неоднократно отмечался тот общеизвестный факт, что холодный воздух совершенно прозрачен для видимого света. Заметное поглощение начинается

¹⁾ Литературные данные можно найти в обзоре М. П. Ванюкова и А. А. Мака [5] об импульсных источниках света высокой яркости, а также в статье [1].

в ультрафиолетовой области спектра при длине волны $\lambda = 1860 \text{ \AA}$ ($h\nu = 6,7 \text{ эВ}$)¹⁾. За поглощение ответственна система полос Шумана–Рунге молекулы кислорода, которая при $\lambda = 1760 \text{ \AA}$ ($h\nu = 7,05 \text{ эВ}$) переходит в континуум, связанный с диссоциацией молекулы при поглощении света. Поглощение быстро возрастает с увеличением энергии квантов (при $\lambda = 1860 \text{ \AA}$ $\kappa_\nu = 0,0044 \text{ см}^{-1}$), а при $h\nu \approx 8 \text{ эВ}$ достигает значения порядка $\kappa_\nu \approx 100 \text{ см}^{-1}$. Экспериментальная кривая зависимости коэффициента поглощения от длины волны в этой области спектра приведена на рис. 9.3²⁾. Кванты, превышающие потенциалы ионизации молекул кислорода и азота $I_{O_2} = 12,1 \text{ эВ}$, $I_{N_2} = 15,6 \text{ эВ}$, испытывают сильное фотоэлектрическое поглощение. Эффективные сечения поглощения с основного уровня молекул слабо зависят от частоты в интервале энергий от $h\nu = I$ и $h\nu \sim 25 \text{ эВ}$ и равны примерно $\sigma_O = 3,10^{-18} \text{ см}^2$, $\sigma_N = 5,10^{-18} \text{ см}^2$, что дает коэффициент поглощения $\kappa_\nu \approx 120 \text{ см}^{-1}$. При дальнейшем увеличении частоты коэффициент поглощения должен испытывать скачки, связанные с последовательным включением в поглощение различных электронов, заполняющих L -оболочки атомов азота и кислорода. Уровни в L -оболочках, по-видимому, не слишком далеко отстоят друг от друга, так что скачки, вероятно, лежат в области энергий $h\nu$ от 13 до 30–40 эВ (экспериментальных данных о скачках, насколько нам известно, нет).

После этого коэффициент поглощения монотонно уменьшается с увеличением частоты вплоть до энергии квантов $h\nu_K = 410 \text{ эВ}$, равной энергии связи K -электрона в атоме азота (у кислорода граница K -поглощения $h\nu'_K = 530 \text{ эВ}$). При энергии $h\nu_K = 410 \text{ эВ}$ коэффициент поглощения резко возрастает, так как кванты, большие $h\nu_K$, способны выбивать K -электроны из атомов азота, а затем монотонно уменьшается вплоть до $h\nu'_K = 530 \text{ эВ}$, когда в поглощение включаются K -электроны кислорода. Коэффициенты поглощения квантов $h\nu_K = 410 \text{ эВ}$ перед и за скачком K -поглощения в азоте, рассчитанные по данным [7, 8], равны 1,6 и 35 см^{-1} . Экспериментальный материал по поглощению воздуха в промежуточной области частот от десятков до сотен электронвольт чрезвычайно скуден: измерения, насколько нам известно, были сделаны только для двух линий, $h\nu = 182 \text{ эВ}$ [9] и $h\nu = 280 \text{ эВ}$ [10].

На основании всех этих отрывочных сведений составлена табл. 9.1, которая дает более или менее наглядное представление о коэффициентах поглощения и пробегах квантов в десятки и сотни электронвольт в холодном воздухе нормальной плотности.

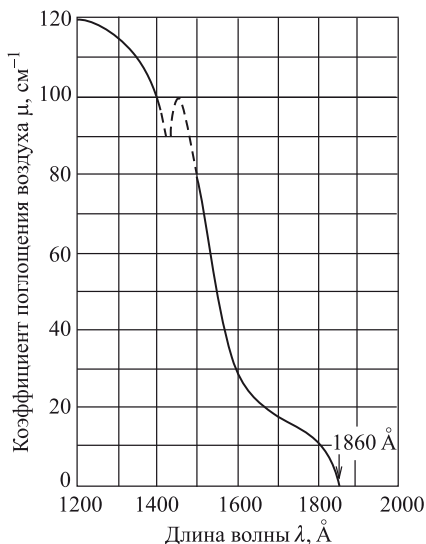


Рис. 9.3. Коэффициент поглощения ультрафиолетового излучения в холодном воздухе

¹⁾ Сильное поглощение близкого ультрафиолетового излучения Солнца в области $\lambda \sim 2000\text{--}3000 \text{ \AA}$ связано с существованием озонного слоя на высоте $\sim 25 \text{ км}$. Кислород и азот не поглощают в этой части спектра, поэтому, говоря об ударных волнах в воздухе вблизи поверхности Земли, следует установить верхнюю границу прозрачности воздуха для $\lambda \sim 1860 \text{ \AA}$.

²⁾ Кривая взята из работы Шнайдера [6].

Таблица 9.1

$h\nu$, эВ	κ_ν , см ⁻¹	l_ν , см
8	100	0,01
13–25	~ 120	0,0083
182	12	0,083
280	5,3	0,19
410 (до скачка)	1,6	0,63
410 (после скачка)	35	0,029

§ 3. Максимальная яркостная температура для воздуха. В § 16 гл. VII было показано, что если амплитуда ударной волны меньше критической (а в воздухе нормальной плотности критической амплитуде соответствует температура за фронтом $T_1 \approx 285\,000$ К), то перенос излучения из высоконагретой области за фронтом в слои, расположенные перед ударным разрывом, не имеет диффузионного характера. Воздух в них нагревается до температур гораздо меньших температуры за фронтом, и испускание излучения в зоне прогревания не вносит практически никакого вклада в проходящий поток излучения, рожденного за разрывом. Воздух нагревается просто в силу поглощения проходящих квантов на расстояниях порядка длин пробегов для поглощения, и толщина зоны прогревания Δx по порядку величины равна длине пробега l тех квантов, которые несут основную энергию спектра. Математически это выражается формулой (7.55), определяющей экспоненциальное спадание прогревания по усредненной оптической толщине τ , соответствующей некоторому среднему по спектру коэффициенту поглощения $\kappa = 1/l$:

$$\varepsilon = \varepsilon_- \exp\left(-\sqrt{3}|\tau|\right), \quad \tau = \int_0^x \kappa dx^1. \quad (9.1)$$

Эта формула показывает, что эффективная оптическая толщина прогревного слоя порядка единицы, т. е. геометрическая толщина порядка $\Delta x \sim 1/\kappa = l$.

Из табл. 9.1 следует, что длины пробегов квантов с энергиями порядка 10–100 эВ в холодном воздухе меняются от 10^{-2} до 10^{-1} см.

Легко видеть, что таковы же примерно пробеги этих квантов и в не слишком сильно нагретом воздухе в зоне прогревания.

Рассмотрим, например, ударную волну с температурой за фронтом $T_1 = 65\,000$ К. Максимум планковского спектра приходится на кванты $h\nu = 16$ эВ, т. е. значительная часть энергии спектра сосредоточена в области энергий от квантов, превосходящих потенциалы ионизации атомов и молекул $h\nu > I \approx 13$ эВ.

Наибольшая температура прогревания, как показывает табл. 7.2, $T_- = 9000$ К. При такой температуре степень ионизации и возбуждения атомов мала, т. е. кванты $h\nu \geq I$ поглощаются практически так же, как и в холодном воздухе. Если взять более мощную ударную волну, скажем, с температурой за фронтом $T_1 = 100\,000$ К, то максимуму спектра соответствуют кванты $h\nu = 24$ эВ и основная энергия спектра сосредоточена в области более высоких энергий квантов, порядка нескольких десятков эВ.

При температуре прогревания $T_- = 25\,000$ К первая ионизация атомов заметна, но второй практически нет. Кванты с энергиями в несколько десятков электронвольт выбивают из атомов главным образом не внешние, оптические, а более глубоко

¹⁾ Формула (7.55) записана не для удельной внутренней энергии, а для температуры. Формула (9.1) является более общей, она справедлива и в тех случаях, когда теплоемкость зависит от температуры, как это имеет место в воздухе.

лежащие электроны, которые при температуре $\sim 25\,000$ К еще не затрагиваются термической ионизацией и возбуждением. Таким образом, и в этом случае кванты, осуществляющие прогревание, поглощаются примерно так же, как и в холодном воздухе.

Отсюда можно сделать вывод, что толщина зоны прогревания перед ударным разрывом в волнах докритической амплитуды ($T_1 < 285\,000$ К) имеет порядок длин пробега десяти-ста электронвольтовых квантов в холодном воздухе, т.е. $\Delta x \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ см. При этом Δx увеличивается в указанных пределах, если переходить к волнам все большей амплитуды в интервале температур за фронтом от десятков тысяч градусов до $T_1 \sim 200\,000$ К, чему соответствует сдвиг по характерным энергиям квантов от $h\nu \sim 10 - 30$ эВ до $h\nu \sim 30 - 100$ эВ.

Рассмотрим теперь, насколько экранирует видимый свет зона прогревания. В табл. 9.2 приведены коэффициенты поглощения и длины пробега красного света $\lambda \sim 6500$ Å в воздухе нормальной плотности при различных температурах.

Заметная экранировка наступает, когда длина пробега l_ν , быстро уменьшающаяся с ростом температуры, становится сравнимой с толщиной зоны прогревания, т.е. с длиной пробега прогревающего излучения l (средней по спектру). Введем для удобства понятие «температуры прозрачности» T^* , которую определим условием

$$l_\nu(T^*) = l. \quad (9.2)$$

Смысл этого понятия очевиден: температура прозрачности разграничивает две температурные области в ударной волне. При $T < T^*$ $l_\nu > \Delta x$ и воздух в зоне прогревания прозрачен для видимого света. При $T > T^*$ $l_\nu < \Delta x$ и воздух непрозрачен.

Поскольку поглощение видимого света очень резко зависит от температуры, а усредненная длина пробега меняется сравнительно мало (всего на порядок), определенная равенством (9.2) температура прозрачности заключена в довольно узких пределах, а именно: $T^* \approx 17\,000 - 20\,000$ К. Оценить оптическую толщину зоны прогревания для видимого света можно, задавшись для простоты бальмовской температурной зависимостью коэффициента поглощения видимого света $\kappa_\nu = \text{const} \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right)$ и считая средний коэффициент поглощения κ постоянным. Имея в виду, что внутренняя энергия воздуха при нормальной плотности и температурах порядка десятков тысяч градусов, грубо говоря, $\varepsilon \sim T^{1.4}$, с помощью формулы (9.1) найдем приближенно оптическую толщину $\tau_\nu(T)$ в прогревной зоне от «бесконечности» (т.е. от области холодного воздуха) до точки с температурой T (полная оптическая толщина зоны прогревания есть $\tau_\nu(T_-)$):

$$\begin{aligned} \tau_\nu(T) &= \int_{-\infty}^x \kappa_\nu dx = \int_0^T \kappa_\nu \frac{dx}{dT} dT = \int_0^T \frac{\text{const}}{\kappa} \frac{1.4}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right) \frac{dT}{T} \approx \\ &\approx \frac{1}{\kappa} \frac{1.4}{\sqrt{3}} \frac{kT}{I - h\nu} \text{const} \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right) = \frac{1.4}{\sqrt{3}} \frac{kT}{I - h\nu} \frac{\kappa_\nu(T)}{\kappa}. \quad (9.3) \end{aligned}$$

В ударной волне с $T_1 = 90\,000$ К, в которой температура перед разрывом равна температуре прозрачности, $T_- = T^* = 20\,000$ К, оптическая толщина зоны про-

гревания, равна в соответствии с определением температуры прозрачности (9.2),
 $\tau_\nu = 0,81 \frac{kT^*}{I - h\nu} \approx 0,12$ ($I \approx 14$ эВ, $h\nu \approx 2$ эВ).

Следовательно, если смотреть на поверхность фронта ударной волны в направлении, нормальном к поверхности, поток видимого излучения, выходящий с поверхности ударного разрыва, будет ослаблен прогревным слоем примерно на 12 %, а эффективная температура вместо 90 000 К будет равна примерно 80 000 К (при таких температурах маленькие видимые кванты лежат в рэлей-джинсовской части спектра и их интенсивность пропорциональна первой степени температуры; поэтому эффективная температура просто пропорциональна яркости).

При дальнейшем увеличении амплитуды волны оптическая толщина слоя растет и яркость уменьшается; например, при повышении температуры за фронтом всего на 10 000 К при $T_1 = 100\,000$ К, $T_- = 25\,000$ К, $\tau_\nu(T_-) \approx 0,37$, $T_{\text{эф}} \approx T_1 e^{-0,37} \approx 67\,000$ К, т. е. эффективная температура уже меньше 80 000 К.

Максимум яркости соответствует температуре за фронтом около $T_1 = 90\,000$ К, а максимальная эффективная температура равна примерно $T_{\text{эф max}} = 80\,000$ К ¹⁾. При температуре за фронтом $T_1 = 140\,000$ К, $T_- \approx 50\,000$ К, $\tau_\nu(T_-) \approx 1,5$ и экранировка почти полная.

§ 4. Предельная яркость очень сильной волны в воздухе. Оценим собственное свечение прогревного слоя в волне большой амплитуды, определяющее предельную яркость фронта ударной волны. Рассмотрим ударную волну сверхкритической амплитуды с температурой за фронтом гораздо больше критической, равной 285 000 К. В § 17 гл. VII было показано, что распределение температуры во фронте волны по усредненной оптической толщине τ имеет вид, изображенный на рис. 9.4. Температура прогревания перед самым ударным разрывом совпадает с температурой за фронтом T_1 . Температура в прогревном слое монотонно падает до температуры холодного воздуха, причем усредненная оптическая толщина всей зоны прогрева может быть очень большой; она тем больше, чем выше амплитуда волны. Основную часть зоны прогрева составляет область с температурами от $T_- = T_1$ и до температуры порядка критической $T_k \approx 300\,000$ К. Эта часть зоны, собственно, и расширяется при увеличении амплитуды (рис. 9.4).

На переднем краю зоны, где температуры ниже 300 000 К, распределение температуры, так же как и в докритической волне, имеет экспоненциальный характер и почти не зависит от амплитуды:

$$\varepsilon = \varepsilon_k \exp\left(-\sqrt{3}|\tau - \tau_k|\right), \quad T = T_k \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{1,4}|\tau - \tau_k|\right) \quad (9.4)$$

(см. § 17 гл. VII, формулу (7.64), а также рис. 9.4; оптическая координата τ_k относится к точке, где температура равна примерно $T \approx T_k \approx 300\,000$ К).

В конце § 1 уже было отмечено, как излучает видимый свет тело с подобным распределением температуры. При низких температурах воздух прозрачен и не излучает; при высоких — совершенно непрозрачен и «не выпускает» наружу видимые кванты. Излучающий слой, который посылает в основном поток видимого света на «бесконечность» в холодный воздух, лежит где-то между прозрачной и непрозрачной

¹⁾ Мы подчеркиваем, что все эти значения представляются оценочными, так как коэффициенты поглощения видимого света в нагретом воздухе, вычисленные по формуле Крамерса, не могут быть признаны вполне достоверными.

областями (он заштрихован на рис. 9.4). Температура в излучающем слое, очевидно, близка к температуре прозрачности воздуха, определенной равенством (9.2), где l — средняя по спектру длина пробега в области, где лежит излучающий слой. Яркостная температура видимого излучения также приблизительно совпадает с температурой прозрачности. Если средняя длина пробега по-прежнему заключена в интервале 10^{-2} – 10^{-1} см, та предельная яркостная температура должна быть равной 17 000–20 000 К (см. табл. 9.2).

Убедимся в том, что эта оценка действительно справедлива, иначе говоря, в том, что прогрев на переднем краю зоны прогрева в очень сильной ударной волне ведут кванты, которые имеют именно такую длину пробега. Для этого заметим, что при температурах выше критической в зоне прогрева имеет место локальное равновесие, а при более низких температурах излучение неравновесно, так же как в прогревном слое докритической ударной волны.

Приближенно можно считать, что с поверхности, где температура равна $T_k \approx 300\,000$ К, влево (см. рис. 9.4) выходит планковский спектр излучения такой температуры, независимо от того, как высоко поднимается температура за этой поверхностью.

Общая тенденция поглощения больших квантов, соответствующих спектру с температурой 300 000 К (максимум спектра приходится на кванты $h\nu \approx 70$ эВ), такова, что коэффициент поглощения κ_ν уменьшается с ростом частоты. Как видно из табл. 9.1, в области энергий квантов в сотни электронвольт величина κ_ν монотонно уменьшается при увеличении частоты.

Поэтому при продвижении в сторону снижения температуры от поверхности, где $T = 300\,000$ К, вначале поглощаются небольшие кванты, потом более высоко энергетичные. По мере продвижения в область низких температур спектр становится все жестче и жестче. Вычисление, сделанное в работе [4], показывает, что в область температур порядка температуры прозрачности, где, как мы ожидаем, лежит излучающий слой, проникают только весьма жесткие кванты с энергиями $h\nu \approx 200$ эВ. В табл. 9.3 представлены энергии квантов, «ведущих» прогрев в области низких температур на переднем краю зоны прогрева. Там же указаны и соответствующие этим квантам длины пробега, как раз равные приблизительно усредненным по спектру пробегам.

Мы видим, что в области температур $T \sim 20\,000$ К средняя длина пробега $l \sim 10^{-1}$ см, т. е. температура прозрачности скорее ближе к 17 000 К.

Таким образом, предельная яркостная температура очень сильной ударной волны равна примерно 17 000 К, независимо от амплитуды. Общая зависимость яркостной температуры (в красном свете) от температуры за фронтом показана на рис. 9.1. Следует отметить, что коэффициенты поглощения в видимой области спектра довольно слабо зависят от частоты, поэтому оцененные значения яркостных температур приблизительно относятся не только к красной, но и вообще ко всей видимой области спектра.

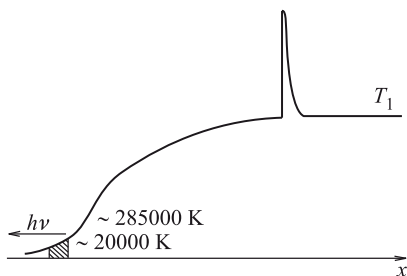


Рис. 9.4. Положение излучающего слоя (заштрихован) в ударной волне очень большой амплитуды

Таблица 9.3

$T, \text{ К}$	$h\nu, \text{ эВ}$	$l, \text{ см}$	$\kappa, \text{ см}^{-1}$
50 000	140		
20 000	200	$0,95 \cdot 10^{-1}$	10,5
15 000	212	$1,02 \cdot 10^{-1}$	9,8
21 000	225	$1,16 \cdot 10^{-1}$	8,6

2. Оптические явления, наблюдаемые при сильном взрыве, и охлаждение воздуха излучением

§ 5. Общее описание световых явлений. При атомном взрыве в воздухе получаются мощная ударная волна и очень высокие температуры. Температура за фронтом волны пробегает непрерывный ряд значений в широком диапазоне от сотен тысяч градусов вплоть до нормальной. При взрыве наблюдается ряд интересных и весьма своеобразных оптических явлений. Ниже приводится общее описание физического процесса развития взрыва в воздухе, вблизи поверхности Земли (т.е. в воздухе нормальной плотности). Это описание полностью заимствовано из американской книги «The Effects of Atomic Weapons» [11], изданной в 1950 г.¹⁾

«При делении ядер урана или плутония в атомной бомбе происходит выделение огромного количества энергии в весьма малом исходном объеме в течение очень короткого промежутка времени. В дальнейшем будем считать, что энергия, освобождающаяся при взрыве бомбы, примерно эквивалентна энергии, выделяющейся при взрыве 20 000 т тротила, что составляет около 10^{21} эрг (точнее, $8,4 \cdot 10^{20}$ эрг). Такую бомбу называют номинальной атомной бомбой. В результате чрезвычайно высокой концентрации энергии температура делящегося вещества достигает миллиона градусов. Поскольку взрыв происходит в ограниченном объеме, занимаемом бомбой, давление резко возрастает и достигает нескольких сотен тысяч атмосфер.

При разогреве вещества до чрезвычайно высокой температуры происходит выделение энергии в виде электромагнитного излучения, спектр которого охватывает широкий диапазон длин волн, простирающийся от инфракрасных (тепловых) лучей через видимую область спектра к области ультрафиолетовых лучей и выходит за ее пределы. Большая часть излучения поглощается в слоях воздуха, непосредственно примыкающих к бомбе, в результате чего воздух нагревается до свечения. Таким образом, через несколько микросекунд после взрыва взорвавшаяся бомба приобретает вид светящегося шара, называемого огненным шаром.

По мере распространения лучистая энергия нагревает окружающий воздух; в результате огненный шар увеличивается в размере, а температура, давление и яркость соответственно уменьшаются. По истечении 0,1 мс (10^{-3} с) радиус огненного шара становится равным примерно 14 м, а температура его поверхности — примерно равной 300 000 К. В это мгновение освещенность, наблюдаемая на расстоянии 10 000 м, примерно в 100 раз больше, чем освещенность поверхности Земли Солнцем.

При описанных выше условиях во всем объеме огненного шара сохраняется почти одинаковая температура; поскольку лучистая энергия может быстро распространяться между любыми двумя точками внутри сферы, то там не создается значительных температурных градиентов. Так как температура внутри огненного шара всюду одинакова, то его можно отождествить с изотермическим шаром, который на данной стадии идентичен с огненным шаром.

¹⁾ Мы цитируем пункты 2.1; 2.6–2.16; 2.22; 6.2; 6.19, 6.20 второй и шестой глав книги, а также приводим фотографию 2 и рис. 6.6; 6.18; 6.20. В 1957 г. в США появилось второе издание этой книги, которое было переведено на русский язык [12]. Второе издание переработано по сравнению с первым. В нем значительно расширены разделы, касающиеся поражающего действия взрыва, но сокращены разделы, посвященные описанию физических явлений в огненном шаре. Поскольку нас здесь интересуют именно эти, последние вопросы, мы заимствуем описание физики взрыва из первого издания. Все длины, измеренные в футах, ярдах, милях, мы перевели в метры.

По мере расширения огненного шара в воздухе появляется ударная волна; вначале фронт ударной волны совпадает с поверхностью изотермического шара. После снижения температуры примерно до 300 000 К скорость ударной волны становится больше скорости расширения изотермического шара. Другими словами, перенос энергии ударной волной начинает происходить быстрее, чем путем излучения. Тем не менее, сходящийся шар продолжает увеличиваться в размере, поскольку сильное сжатие воздуха, обусловленное прохождением ударной волны, вызывает повышение температуры, достаточное, чтобы довести шар до свечения.

На этой стадии изотермический шар является зоной высокой температуры внутри большего по размерам огненного шара, образованного резко очерченным фронтом ударной волны. Поверхность разделяет между сердцевиной этого шара, обладающей очень высокой температурой, и несколько более «холодным» воздухом, нагретым ударной волной, называется фронтом излучения.

Описанные выше явления схематически представлены на серии фотографий огненного шара (рис. 9.5), соответствующих различным моментам времени после взрыва атомной бомбы; качественные температурные градиенты показаны слева, градиенты давления — справа. Вначале температура одинакова в пределах всего огненного шара, который в это время является также изотермическим шаром; затем появляются две различные температурные зоны; в этот момент огненный шар становится больше остающегося внутри изотермического шара. Изотермический шар перестает быть видимым, так как его закрывает ярко светящийся фронт ударной волны. К этому моменту давление повышается до максимума, а затем уже на поверхности огненного шара резко снижается, что свидетельствует об идентичности огненного шара с фронтом ударной волны.

Огненный шар продолжает быстро увеличиваться в размерах в течение примерно 15 мс; за это время его радиус достигает приблизительно 90 м, а температура поверхности снижается приблизительно до 5000 К, хотя внутри огненного шара она значительно выше. При этом температура и давление ударной волны снижаются настолько, что воздух, через который проходит ударная волна, перестает светиться. Слабо видимый фронт ударной волны продолжает двигаться впереди огненного шара; это явление называют отрывом ударной волны от сходящегося шара. Скорость распространения ударной волны в этот период равна примерно 4500 м/с.

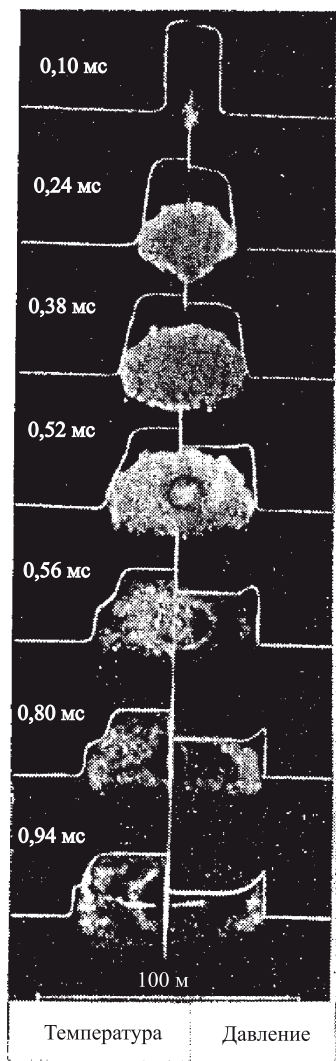


Рис. 9.5. Качественная картина изменения температуры и давления в огненном шаре. Энергия взрыва — около 10^{21} эрг, что эквивалентно 16 кг урана $\approx$ 20 000 т тротила

Несмотря на постепенное уменьшение со временем скорости распространения фронта ударной волны, она все время остается больше скорости расширения огненного шара. Через 1 с огненный шар достигает своего максимального радиуса 140 м, а фронт ударной волны к этому времени уходит вперед примерно на 180 м. Через 10 с, когда огненный шар поднимается приблизительно на 450 м, ударная волна удаляется от места взрыва примерно на 3700 м и выходит за пределы зоны своего максимального разрушающего действия.

Существенной особенностью атомного взрыва в воздухе является особый эффект, который наблюдается в момент отрыва фронта ударной волны от светящегося шара. Температура поверхности светящейся области понижается приблизительно до 2000 К и затем начинает вновь повышаться, достигая второго максимума около 7000 К. Минимальная температура достигается примерно через 15 мс после взрыва, а приблизительно через 0,3 с вновь повышается до максимума. В дальнейшем происходит непрерывное снижение температуры огненного шара вследствие его расширения и происходящей потери энергии.

Интересно отметить, что излучение большей части лучистой энергии атомного взрыва происходит после того, как яркость огненного шара становится минимальной. До этого времени излучается только около 1 % общей энергии, несмотря на то, что температура поверхности в этот период очень высока. Это объясняется тем, что длительность указанного периода 15 мс чрезвычайно мала по сравнению с временем, в течение которого происходит излучение после достижения минимума яркости.

Как было упомянуто выше, огненный шар чрезвычайно быстро, менее чем за 1 с после взрыва, достигает максимального радиуса 140 м. Следовательно, если бомба взорвется на высоте менее 140 м, то огненный шар должен коснуться поверхности земли; это наблюдалось при испытании «Тринити» у Аламогордо (штат Нью-Мексико).

Ввиду своей малой плотности огненный шар всплывает вверх подобно воздушному шару. Через несколько секунд после начала движения скорость шара достигает максимального значения, равного 90 м/с.

Непосредственные эффекты атомного взрыва могут считаться закончившимися примерно через 10 с, когда огненный шар почти перестает светиться и избыточное давление ударной волны уменьшается до практически безопасных значений.

Как было указано ранее, плотность веществ внутри огненного шара очень мала, так как они обладают высокой температурой, поэтому шар поднимается выше места взрыва бомбы; по мере подъема огненный шар охлаждается. Охлаждение примерно до 1800 К происходит главным образом за счет потери энергии вследствие светового излучения; затем снижение температуры происходит в результате адиабатического расширения газов и смешивания их с окружающим воздухом за счет турбулентной конвекции. После прекращения свечения огненный шар можно рассматривать как большой пузырь раскаленных газов, температура которого снижается по мере подъема.

Весьма важное различие между атомным и обычным взрывом состоит в том, что в первом случае количество освобожденной энергии на единицу массы неизмеримо больше. В результате создается более высокая температура, а следовательно, большая часть энергии, освобожденная в момент взрыва, испускается в виде светового излучения. Например, около 1/3 всей освобожденной при атомном взрыве энергии испускается в форме светового излучения. Для номинальной атомной бомбы это составляет примерно $6,7 \cdot 10^{12}$ кал, что эквивалентно $2,8 \cdot 10^{20}$ эрг.

Количество энергии, проходящей через всю сферическую поверхность огненного шара, т. е. через пространственный угол 4π , равно $\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$, где R — радиус шара, а T — температура поверхности (зависимости R и T от времени показаны на рис. 9.6).

Поскольку в воздух проникает только часть энергии f_0 ¹⁾, количество лучистой энергии, достигающей всех точек на сферической поверхности, расположенной на умеренном расстоянии от точки взрыва, будет равно $f_0 \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$. Отсюда поток лучистой энергии φ на единицу площади на расстоянии D получается путем деления этого выражения на площадь поверхности шара $4\pi D^2$, т. е. $\varphi = f_0 \sigma T^4 (R/D)^2$.

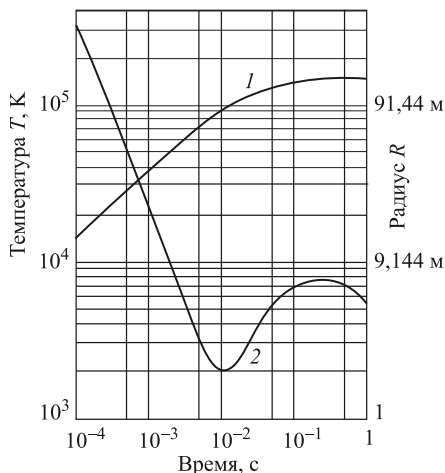


Рис. 9.6. Зависимость радиуса огненного шара (кривая 1) и температуры (кривая 2) от времени, начиная с момента взрыва

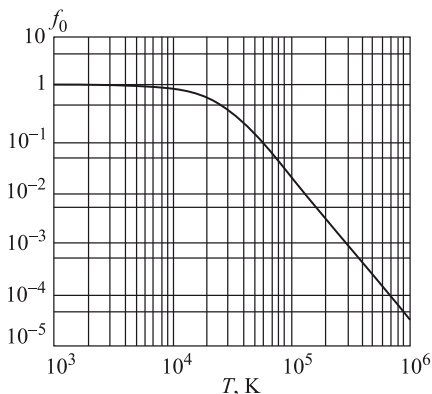


Рис. 9.7. Доля равновесного излучения, заключенная в интервале длин волн от $\lambda = 1860 \text{ \AA}$ до $\lambda = \infty$ в зависимости от температуры

Из этой формулы можно вычислить поток лучистой энергии в данной точке на расстоянии D для различных моментов времени после атомного взрыва, используя при этом значения R и T из рис. 9.6, а f_0 — из рис. 9.7. Чтобы не строить кривую для различных расстояний, величина φD^2 , равная $f_0 \sigma T^4 R^2$, дана на рис. 9.8 как функция времени; поток энергии измеряется в $\text{кал/см}^2 \cdot \text{с}$, а расстояние — в м. По кривой можно легко определить поток энергии на любом данном расстоянии в любой момент.

Чтобы получить некоторое представление об освещенности, целесообразно ввести единицу сан, которая определяется как поток энергии, равный $0,032 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{с}$, и принимается равной солнечной энергии, падающей на верхнюю границу атмосферы. Правая ордината на рис. 9.8 дает значение φD^2 , где φ выражено в санах, а D — в метрах.

При минимальной яркости величина φD^2 равна примерно $6,8 \cdot 10^6 \text{ сан} \cdot \text{м}^2$, так что в этот момент огненный шар, наблюдаемый на расстоянии 2600 м, должен казаться примерно таким же ярким, как Солнце. В действительности он будет несколько менее ярким в зависимости от чистоты воздуха, а также вследствие поглощения излучения в атмосфере».

На этом мы закончим описание, заимствованное из книги [11].

¹⁾ Считается, что воздух пропускает только длины волн, превышающие $\lambda_0 = 1860 \text{ \AA}$, так что f_0 — это доля энергии планковского спектра температуры T , заключенная в интервале длин волн от $\lambda_0 = 1860 \text{ \AA}$ до $\lambda = \infty$. Функция $f_0(T)$ показана на рис. 9.7.

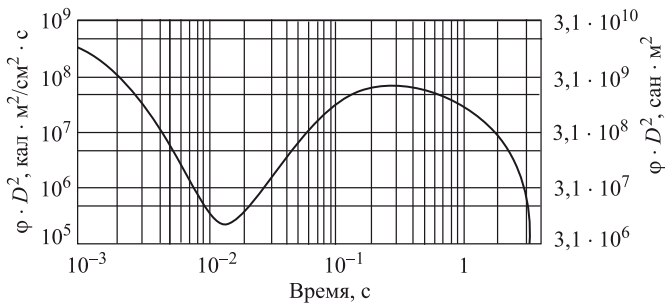


Рис. 9.8. Зависимость потока энергии, испускаемого огненным шаром, от времени, прошедшего после взрыва

До тех пор пока не произошел отрыв фронта ударной волны от границы светящегося тела и последняя просто совпадает с фронтом ударной волны, закон распространения огненного шара очень хорошо описывается формулой $R \sim t^{2/5}$, которая следует из решения задачи о сильном взрыве, рассмотренной в § 25 гл. I. К моменту отрыва температура на фронте ударной волны равна примерно 2000 К, что соответствует давлению $p_f \approx 50$ атм. Это давление намного выше атмосферного, т.е. исходные предположения, лежащие в основе решения ($p_f \gg p_0$), выполняются.

Сравнение теоретического закона $R \sim t^{2/5}$ с экспериментальными данными сделано в книге Л. И. Седова [13].

В книге построен график прямой $5/2 \lg R$ в зависимости от $\lg t$, на который нанесены экспериментальные точки, относящиеся к взрыву атомной бомбы в Нью-Мексико в 1945 г. Экспериментальные точки очень хорошо ложатся на теоретическую прямую. По формуле (1.110) наклон прямой связан с энергией взрыва E :

$$R = \left[\alpha(\gamma) \frac{E}{\varrho_0} \right]^{1/5} t^{2/5}; \quad \frac{5}{2} \lg R = \frac{1}{2} \lg \left(\alpha \frac{E}{\varrho_0} \right) + \lg t.$$

Здесь $\alpha = \xi_0^5$, где ξ_0 — коэффициент в формуле (1.110).

При плотности воздуха $\varrho_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$ г/см³ величина αE получается равной $8,45 \cdot 10^{20}$ эрг. Зависимость коэффициента α от показателя адиабаты γ приводится в книге Л. И. Седова [13].

Если положить $\gamma = 1,4$, как это сделал Л. И. Седов, получается $\alpha = 1,175$ и $E = 7,19 \cdot 10^{20}$ эрг. В действительности эффективный показатель адиабаты несколько меньше, так как при высоких температурах воздух сильно диссоциирован и ионизован; коэффициент α при этом меньше и энергия взрыва оказывается большей. Так, например, если взять $\gamma = 1,32$, получается $\alpha = 0,88$ и $E = 9,6 \cdot 10^{20}$ эрг.

§ 6. Отрыв фронта ударной волны от границы огненного шара. Посмотрим, какова природа свечения огненного шара при температурах за фронтом ударной волны порядка нескольких тысяч градусов, и выясним причины явлений отрыва фронта ударной волны от границы светящегося тела и минимума яркости огненного шара. Эти вопросы были рассмотрены в работах одного из авторов [14, 15].

В поглощении (и испускании) видимого света в нагретом воздухе участвует целый ряд механизмов: фотоионизация высоковозбужденных атомов и молекул кислорода и азота и молекул окиси азота, выбивание дополнительных, слабо связанных электронов из отрицательных ионов кислорода, молекулярное поглощение (без отрыва электрона) молекулами O_2 , N_2 , NO , пребывающими в возбужденных состояниях,

наконец, молекулярное поглощение молекулами NO_2 , присутствующими в небольшом количестве в нагретом воздухе. Коэффициенты поглощения, связанные со всеми этими механизмами, были оценены в гл. V. Сравнительная роль различных механизмов поглощения и абсолютные величины коэффициентов сильно меняются в зависимости от температуры и плотности воздуха. При температурах выше 12 000–15 000 К в основном происходит фотоионизация молекул и атомов кислорода и азота. При плотности воздуха примерно в 10 раз больше нормальной, которая имеет место за фронтом ударной волны, и температурах 12 000–15 000 К длина пробега квантов света оказывается порядка миллиметров. Длина пробега резко уменьшается при возрастании температур.

В области более низких температур, 8000–6000 К, на первый план выступают фотоионизация молекул NO , поглощение отрицательными ионами кислорода и молекулярное поглощение молекулами O_2 , N_2 и NO . Длины пробега видимого света в этом интервале температур также сильно зависят от температуры и имеют порядок 10–100 см (при десятикратном сжатии в ударной волне). При еще более низких температурах, ниже ~ 5000 К, все перечисленные механизмы приводят к чрезвычайно слабому и притом быстро уменьшающемуся с понижением температуры поглощению. Практически единственным механизмом поглощения видимого света в воздухе при $T < 5000$ К является поглощение молекулами двуокиси азота NO_2 . Несмотря на малую концентрацию, двуокись азота довольно сильно поглощает видимый свет, обеспечивая длины пробега, измеряемые метрами. Так, при температуре $T = 3000$ К и плотности в пять раз больше нормальной, концентрация двуокиси равна $c_{\text{NO}_2} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ ¹⁾, а длина пробега красного света, вычисленная с сечением поглощения $\sigma_{\text{NO}_2} = 2,15 \cdot 10^{-19}$ см², есть $l_\nu = 220$ см.

Известно, что за фронтом ударной волны сильного взрыва температура возрастает от фронта к центру (см. § 25 гл. I). Если рассматривать ту стадию взрыва, когда температура на фронте равна нескольким тысячам градусов, то при номинальной энергии взрыва $E = 10^{21}$ эрг (соответствующей примерно 20 000 т тротила) взрывная волна охватывает шар радиусом порядка сотни метров, и температура за фронтом заметно возрастает при удалении от фронта к центру на расстояние порядка метров.

В этой стадии лучистое прогревание воздуха перед ударным разрывом и экранировка поверхности фронта, рассмотренные в § 1 и 3, пренебрежимо малы. Поскольку толщина релаксационного слоя во фронте ударной волны, где устанавливаются равновесные значения диссоциации и ионизации, гораздо меньше пробега квантов, можно утверждать, что до тех пор, пока длина пробега квантов меньше величины порядка метра, за фронтом ударной волны простирается оптически толстая область с почти постоянной температурой, и фронт излучает как абсолютно черное тело.

Яркостная температура огненного шара, измеренная по видимому излучению, не отличается при этом от температуры фронта ударной волны. Положение меняется, когда амплитуда ударной волны падает настолько, что поглощение за фронтом становится слабым и длина пробега света сравнивается с характерным масштабом, на котором заметно меняется температура за фронтом, т.е. становится порядка и больше метра.

Однако прежде чем рассматривать отклонение яркостной температуры от температуры фронта, что будет сделано в следующем параграфе, выясним, когда воздух, захватываемый ударной волной, перестает светиться.

¹⁾ Концентрация c_i определяется как отношение числа i -х частиц к исходному числу молекул в холодном воздухе.

Выше было отмечено, что при температурах ниже ~ 5000 К за поглощение и испускание видимого света ответственны молекулы двуокиси азота. Но в силу особенностей кинетики окисления азота во взрывной волне (см. § 5 гл. VIII) молекулы окиси азота, из которых затем получаются молекулы двуокиси, практически не образуются в частицах воздуха, нагретых ударной волной ниже ~ 2000 К. Это связано с большой энергией активации реакции окисления азота и вытекающей отсюда крайне резкой температурной зависимостью скорости реакции. При температурах ниже ~ 2000 К время, необходимое для образования сколько-нибудь заметного количества окиси, оказывается чрезвычайно большим по сравнению с временем существования нагретых частиц в ударной волне, и реакция не успевает протекать.

Таким образом, в слоях воздуха, нагретых фронтом ударной волны до температуры ниже ~ 2000 К, двуокись азота, единственный поглощающий агент, уже никогда не образуется; эти слои совершенно прозрачны для видимого света и сами не светятся.

В момент времени, когда температура на фронте T_Φ меньше 2000 К, скажем, когда $T_\Phi = 1000$ К, издалека будет виден светящийся диск, радиус которого меньше радиуса фронта ударной волны. Горизонтальное сечение взрывной волны изображено на рис. 9.9. Лучи типа B пересекают слои воздуха, нагретые ударной волной до температуры, меньшей ~ 2000 К, и потому несветящиеся.

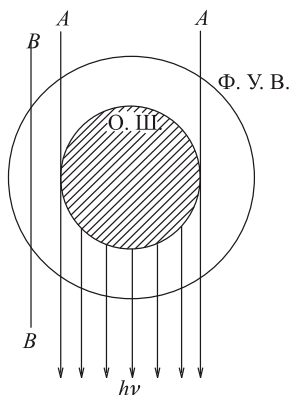


Рис. 9.9. Схема свечения огненного шара после отрыва. Внутренний круг: О. Ш. — граница светящегося тела, огненного шара; внешний: Ф. У. В. — фронт ударной волны

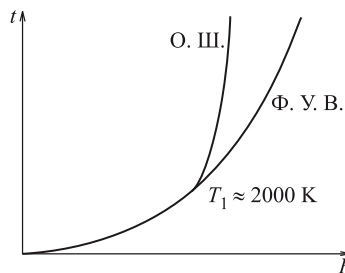


Рис. 9.10. Линии фронта ударной волны Ф. У. В. и границы огненного шара О. Ш. на диаграмме R, t

Огненный шар ограничен лучами A , отстоящими от центра O как раз на расстоянии $R_{O.Ш.}$, соответствующем радиусу тех слоев воздуха в данный момент, которые ранее были нагреты фронтом до температуры ~ 2000 К и в которых еще имеется необходимое для заметного свечения количество двуокиси азота. Поскольку частицы воздуха во взрывной волне разлетаются от центра (правда, медленнее, чем бежит сам фронт ударной волны), радиус огненного шара $R_{O.Ш.}$ увеличивается. Огненный шар расширяется до тех пор, пока давление во взрывной волне не падает до атмосферного и движение не прекращается¹⁾. Несветящийся фронт ударной волны, оторвавшись

¹⁾ При адиабатическом расширении до атмосферного давления частиц воздуха с начальной температурой $T_\Phi \approx 2000$ К, соответствующей давлению на фронте $p_\Phi \approx 50$ атм, частицы

от огненного шара в момент, когда температура на нем была ~ 2000 К, уходит при этом далеко вперед. (Траектории фронта и огненного шара схематически изображены на рис. 9.10.)

§ 7. Эффект минимума яркости огненного шара. Посмотрим, как меняются с течением времени яркость и эффективная температура поверхности огненного шара в стадии отрыва ударной волны от границы светящегося тела. Когда температура фронта падает ниже ~ 5000 К, длина пробега видимого света вырастает до величины порядка метра и огненный шар перестает излучать как абсолютно черное тело. Эффективную температуру в этих условиях следует вычислять по общей формуле (2.52) в соответствии с распределениями температуры и коэффициента поглощения по радиусу за фронтом волны ¹⁾.

Рассмотрим для примера момент времени $t = 1,5 \cdot 10^{-2}$ с, когда радиус фронта $R = 107$ м и температура на фронте $T_{\Phi} = 3000$ К (все расчеты относятся к взрыву с энергией $E = 10^{21}$ эрг). На рис. 9.11 показано распределение коэффициента поглощения красного света $\lambda = 6500$ Å по радиусу за фронтом ударной волны (координата x отсчитывается от фронта в глубь шара). Там же указаны температуры и относительные плотности воздуха (сжатия $\eta = \rho/\rho_0$) в нескольких точках. Распределения температуры и плотности за фронтом взяты из решения задачи о сильном взрыве; концентрации двуоксида азота вычислялись, как это было изложено в § 5 гл. VIII. Поскольку точные значения эффективных сечений поглощения красного света возбужденными молекулами NO_2 неизвестны, для ориентировочных расчетов были приняты следующие, видимо, правдоподобные значения сечений (см. § 21 гл. V).

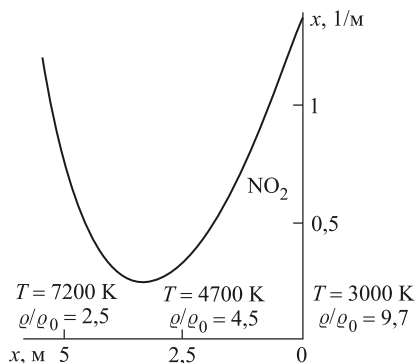


Рис. 9.11. Распределение поглощения красного света за фронтом ударной волны при температуре $T_{\Phi} = 3000$ К для взрыва с $E = 10^{21}$ эрг. Указаны значения температур и плотностей в нескольких точках. Показатель адиабаты $\gamma = 1,23$

$T, \text{ К}$	4000	3000	2600	2000
$\sigma_{\text{NO}_2} \cdot 10^{19}, \text{ см}^2$	3,0	2,15	1,8	0,84

остывают до $T \sim 800$ К. Вероятно, с течением времени граница светящейся области несколько сдвигается вглубь, в слои с температурами, более близкими к 2000 К, так как лучеиспускательная способность, пропорциональная $\exp(-h\nu/kT)$, быстро уменьшается с понижением температуры даже при неизменном коэффициенте поглощения ($h\nu \gg kT$ при $h\nu \approx 2$ эВ, $T \sim 2000$ –1000 К). Точнее, граница огненного шара определяется чувствительностью регистрирующего прибора.

¹⁾ Излучающий слой имеет толщину порядка десятка метров, что значительно меньше радиуса шара, $R_{0, \text{ш}} \sim 100$ м. Поэтому кривизной слоя можно пренебречь и считать его плоским, т.е. пользоваться формулой (2.52). Заметим, что формула (2.52), в которую входит интегральная экспонента, появившаяся в результате учета косых лучей, дает среднюю по диску яркостную температуру. Если интересоваться яркостью в центре диска, то вместо интегральной экспоненты $E_2(\tau_{\nu})$ следует писать обычную $\exp(-\tau_{\nu})$, где τ_{ν} — оптическая толщина, отсчитываемая по радиусу от поверхности фронта в глубь шара. В дальнейшем вычисляется средняя яркостная температура.

Из рис. 9.11 видно, что при температурах выше 6000–7000 К поглощение, связанное с многими механизмами, перечисленными выше, весьма велико и быстро растет при удалении от фронта, когда температура повышается. В районе $T \sim 6000$ К поглощение ослабевает и проходит через минимум, так как при такой температуре все эти механизмы дают очень малый коэффициент, а концентрация двуокиси еще мала (равновесие реакции $\text{NO} + \frac{1}{2}\text{O}_2 \rightleftharpoons \text{NO}_2$ при столь высоких температурах сдвинуто в сторону распада двуокиси). Концентрация двуокиси возрастает при более низких температурах, ~ 4000 –3000 К, что и приводит к повышению поглощательной способности вблизи фронта волны.

По существу, слой воздуха с температурами выше ~ 6000 –7000 К оказываются совершенно непрозрачными и из внутреннего «горячего» шара с такой температурой на поверхности выходит наружу поток планковского излучения. Наружный слой воздуха, содержащий двуокись, играет двойную роль. С одной стороны, он поглощает это высокотемпературное излучение, выходящее с поверхности «горячего» шара, а с другой — сам излучает свет. Формально это положение можно описать, разбивая интеграл по τ_ν в формуле (2.51) на две части: один — по наружному слою двуокиси с оптической толщиной τ_ν^* , а другой — по внутренней «горячей» области $\tau_\nu^* < \tau_\nu < \infty$:

$$S_\nu(T_{\text{эф}}) = 2 \int_0^\infty S_{\nu p} E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu = 2 \int_0^{\tau_\nu^*} S_{\nu p} E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu + 2 \int_{\tau_\nu^*}^\infty S_{\nu p} E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu.$$

В отличие от формулы (2.51) мы здесь вместо плотности излучения пишем поток, что все равно.

Во втором интеграле можно вынести некоторое среднее значение $S_{\nu p}$, соответствующее эффективной температуре «горячего» шара T^* ($T^* \sim 7000$ К), и, воспользовавшись свойствами интегральных экспонент, записать:

$$S_\nu(T_{\text{эф}}) = 2 \int_0^{\tau_\nu^*} S_{\nu p} E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu + S_{\nu p}(T^*) E_3(\tau_\nu^*).$$

Первый член дает собственное излучение слоя двуокиси, а во втором — множитель $E_3(\tau_\nu^*)$ учитывает экранировку этим слоем «высокотемпературного» излучения «горячего» шара. Расчеты показывают, что с течением времени относительная роль второго члена возрастает, а собственное свечение двуокиси становится малым, т. е. роль двуокиси сводится в основном к экранировке высокотемпературного излучения. В рассмотренном примере $T_\Phi = 3000$ К, оптическая толщина слоя двуокиси $\tau_\nu^* = 2,42$, а эффективная температура огненного шара получается равной $T_{\text{эф}} = 4110$ К.

Другая типичная картина распределения коэффициента поглощения по радиусу возникает, когда температура на фронте ударной волны падает ниже 2000 К. При этом поглощение начинается не сразу за фронтом, а несколько глубже, так как в слоях, близких к фронту и нагретых при прохождении фронта до температуры ниже 2000 К, двуокиси нет, и эти слои не поглощают света. Такая картина изображена на рис. 9.12 ($t = 2,64 \cdot 10^{-2}$ с, $R = 138$ м, $T_\Phi = 1600$ К).

Проследим за тем, как меняется эффективная температура излучения с течением времени. Пока температура на фронте ударной волны больше ~ 2000 К, во вновь захватываемых фронтом слоях воздуха образуется двуокись, полная оптическая толщина слоя двуокиси возрастает и яркость падает. Яркостная температура при $T_\Phi \lesssim 5000$ К превышает температуру фронта, ибо слой двуокиси не полностью экранирует высокотемпературное излучение (с $T^* \sim 7000$ К), идущее из глубины.

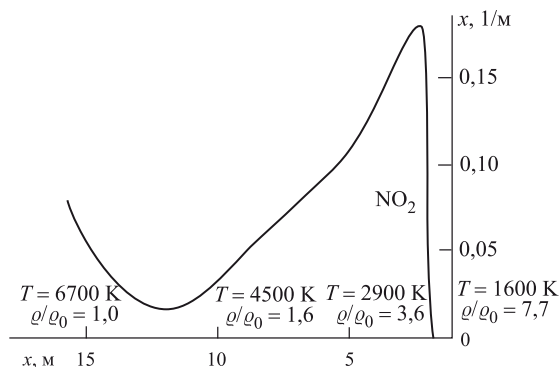


Рис. 9.12. Распределение поглощения красного света за фронтом ударной волны при температуре на фронте $T_\Phi = 1600$ К для взрыва с $E = 10^{21}$ эрг. Указаны значения температур и плотностей в нескольких точках. Показатель адиабаты $\gamma = 1,30$

Когда температура фронта становится ниже 2000 К, во вновь захватываемых слоях воздуха двуокись уже не образуется. Даже если бы полное количество молекул NO_2 , имеющих к этому моменту в воздухе, оставалось неизменным, оптическая толщина экранирующего слоя двуокиси все равно уменьшалась бы с течением времени, так как вследствие разлета воздуха одно и то же число молекул NO_2 распределялось бы по сферическому слою все большего и большего радиуса. Легко видеть, что оптическая толщина слоя двуокиси

$$\tau_\nu^* = \int_0^R n_{\text{NO}_2} \sigma_{\text{NO}_2} dr,$$

где n_{NO_2} — число молекул NO_2 в 1 см^3 , уменьшается при неизменном полном числе

$$N_{\text{NO}_2} = \int_0^R 4\pi r^2 n_{\text{NO}_2} dr \approx 4\pi R^2 \int_0^R n_{\text{NO}_2} dr,$$

грубо говоря, пропорциональна $R^{-2} \sim t^{-4/3}$.

В действительности же полное количество двуокиси, после того как прекращается ее образование, даже несколько падает вследствие распада молекул NO_2 (см. § 5, гл. VIII), что приводит к еще более быстрому падению оптической толщины τ_ν^* .

Таким образом, начиная с момента, когда температура на фронте становится меньше ~ 2000 К, экранировка слоем двуокиси уменьшается и постепенно «обнажается» внутренняя горячая область. Эффективная температура огненного шара, пройдя через минимум, повышается; шар как бы снова разгорается, что и наблюдается на опыте.

Изложенные соображения о природе минимума яркости иллюстрируются табл. 9.4, в которой представлены результаты расчета эффективных температур для взрыва с энергией $E = 10^{21}$ эрг. T_{Φ} проходит через минимум, равный 3600 К, а τ_ν^* — через максимум при температуре фронта $T_\Phi = 2600$ К, близкой к температуре отрыва $T_\Phi = 2000$ К.

Таблица 9.4. Рассчитанные в работе [15] значения яркостной температуры огненного шара в красном свете;
 $\lambda = 6500 \text{ \AA}$ в стадии минимума яркости

$t \cdot 10^2, \text{ с}$	$R, \text{ м}$	$T_{\text{ф}}, \text{ К}$	$T_{\text{эф}}, \text{ К}$	τ_{ν}^*
$E = 10^{21} \text{ эрг}$				
0,75	82	5000	5930	1,06
1,05	93	4000	4810	1,96
1,50	107	3000	4110	2,42
1,81	109	2600	3600	3,23
1,95	112	2300	4150	2,16
2,25	128	2000	4520	1,80
2,39	132	1800	4810	1,61
2,64	138	1600	5400	1,15
2,94	143	1400	5600	1,11
$E = 10^{20} \text{ эрг}$				
0,43	49	5000	6380	0,61
0,61	53	4000	5560	1,16
0,72	58	3000	5060	1,42
0,82	60	2600	4800	1,77
0,95	65	2300	5380	1,18
1,01	66	2000	5850	0,96
1,16	70	1800	6050	0,88
1,38	73	1600	6510	0,71
1,41	75	1400	6980	0,54

Интересно проследить за тем, что происходит с минимумом яркости при переходе от одной энергии взрыва к другой. Все времена и размеры в сильной взрывной волне изменяются подобным образом, пропорционально $E^{1/3}$ (благодаря приближенной справедливости автомодельного решения задачи о сильном взрыве). Грубо говоря, оптические толщины в соответствующие моменты времени (при одинаковой температуре фронта), также меняются, как $E^{1/3}$ (так как концентрация двуокиси в основной области равновесна и зависит главным образом от температуры и плотности частицы, но не от времени существования ее в нагретом состоянии). Отсюда следует, что экранировка слоем двуокиси уменьшается с уменьшением энергии взрыва, а превышение $T_{\text{эф}}$ над $T_{\text{ф}}$ возрастает: минимум становится менее глубоким. В качестве примера в табл. 9.4 приведены результаты расчета $T_{\text{эф}}(T_{\text{ф}})$ для энергии взрыва $E = 10^{20}$ эрг. Положение минимума не изменилось, а минимальная яркость стала выше: $T_{\text{эф min}} \approx 4800 \text{ К}$.

В пределе очень малых энергий взрыва минимум должен вообще исчезать. Наоборот, в пределе очень больших энергий взрыва все размеры и оптические толщины становятся большими, излучение огненного шара все более и более приближается к излучению черного тела и $T_{\text{эф}}$ приближается к $T_{\text{ф}}$ вплоть до момента, когда $T_{\text{ф}}$ становится равной примерно 2000 К, т. е. минимум становится глубже $T_{\text{эф min}} \approx 2000 \text{ К}$. Ниже 2000 К яркостная температура упасть не может, так как даже при очень больших энергиях взрыва и больших временах процесса двуокись все равно не образуется при $T < 2000 \text{ К}$ и воздух, нагретый в ударной волне до температуры $T_{\text{ф}} < 2000 \text{ К}$, прозрачен и не излучает.

§ 8. Охлаждение воздуха излучением. Представим себе, что газодинамический процесс при сильном взрыве в воздухе с энергией $E \sim 10^{21}$ эрг протекает адиабатически, как описано в § 25 гл. I. Разлет воздуха, охваченного взрывной волной, сильно замедляется к моменту, когда давление в нем уменьшается до величины порядка атмосферного. В дальнейшем ударная волна постепенно ослабевает, превращается в акустическую и уносит с собой далеко вперед большую долю полной энергии взрыва. В центральных же областях после достижения атмосферного давления и прекращения движения остается большая масса воздуха, необратимо нагретого ударной волной. В ней сосредоточена «остаточная» энергия взрыва, которая также составляет весьма значительную (порядка десятков процентов) долю от полной энергии взрыва. Воздух оказывается нагретым до весьма высоких температур. Так, например, слои воздуха, через которые фронт ударной волны прошел с амплитудой $p_{\text{ф}} = 750$ атм, нагрев их до температуры $T_{\text{ф}} = 11000$ К, после расширения до атмосферного давления остаются нагретыми до температуры порядка 2000 К¹⁾.

Более близкие к центру слои, первоначально нагретые фронтом ударной волны до нескольких сотен тысяч градусов (давления на фронте порядка сотни тысяч атмосфер), остаются нагретыми до десятка тысяч градусов и т. д.

Таким образом, после взрыва образуется огромный объем воздуха с радиусом порядка сотен метров, нагретый до высоких температур. В центральных областях температура достигает сотни тысяч градусов, к периферии она постепенно спадает до тысячи градусов и ниже, вплоть до нормальной атмосферной температуры.

Зададимся вопросом: какова дальнейшая судьба остаточной энергии воздуха, необратимо нагретого взрывной волной, и как остывает этот воздух? Этот вопрос был рассмотрен в работах А. С. Компанейца и авторов [16, 17].

Ясно, что рассеивание энергии путем молекулярной теплопроводности не играет никакой роли. При коэффициенте диффузии тепла (теплопроводности) воздуха порядка $1 \text{ см}^2/\text{с}$ объем с радиусом $\sim 10^4$ см остывал бы год. Конвективный подъем нагретого шара за счет различия плотностей холодного и горячего воздуха при одинаковом атмосферном давлении и связанное с подъемом перемешивание горячего газа с окружающими массами холодного более существенны. Однако в первые 2–3 с после взрыва подъем невелик. Подъем не может превышать величины $gt^2/2$, где g — ускорение силы тяжести, что составляет 5 м за 1 с, 20 м за 2 с, 45 м за 3 с. Поэтому, интересуясь первыми несколькими секундами после момента взрыва, можно не учитывать и конвекцию.

Основным процессом, приводящим к охлаждению воздуха и рассеянию энергии необратимого нагревания в пространстве, является световое излучение. Сама возможность лучистого охлаждения является следствием того, что холодный воздух прозрачен в некотором спектральном «окне»: в видимой части спектра и прилегающих по соседству областях ультрафиолетового и инфракрасного излучения. Именно благодаря существованию такого «окна» прозрачности соответствующие кванты, излучаемые нагретым газом, могут беспрепятственно уходить на большие расстояния, унося за собою энергию из нагретого объема.

Характерной особенностью процесса высвечивания энергии из нагретого воздуха является его нестационарность. В этом отношении имеется принципиальное отличие от похожего, с первого взгляда, процесса излучения звезд (в частности Солнца, питающего высвечиваемой энергией нашу планету). В звездах потеря энергии за счет излучения с поверхности компенсируется притоком энергии изнутри, выделяемой

¹⁾ Остаточная температура, грубо говоря, равна $T_{\text{ост}} \approx T_{\text{ф}} (1 \text{ атм}/p_{\text{ф}} \text{ атм})^{(\gamma-1)/\gamma}$. Для оценки можно взять эффективное значение показателя адиабаты $\gamma \approx 1,3$.

вследствие протекающих в центральных частях ядерных реакций (см. гл. II, § 14). В результате устанавливается режим, в котором каждый элемент объема получает столько же лучистой энергии, сколько испускает, и распределение температуры по радиусу звезды имеет установившийся, стационарный (на протяжении обозримых времен) характер.

В рассматриваемом случае никаких источников энергии нет; начальное распределение температуры определяется предыдущей историей явления, газодинамикой процесса распространения взрывной волны, и воздух постепенно остывает за счет того, что энергия уносится излучением.

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как протекает процесс охлаждения, как меняется температура в различных местах нагретого объема и, наконец, что самое существенное, каковы скорость лучистого охлаждения и поток излучения с поверхности нагретого тела.

§ 9. Возникновение температурного уступа — волны охлаждения. Основным фактором, определяющим своеобразие процесса, является крайне резкая температурная зависимость прозрачности воздуха, о которой уже неоднократно говорилось выше. Если рассматривать температурную зависимость длины пробега некоторого среднего по спектру излучения, характерного для данной температуры, скажем, для энергии квантов $h\nu$, в 3–5 раз превышающих kT ¹⁾, и иметь в виду, что при постоянном давлении, близком к атмосферному, плотность воздуха уменьшается с увеличением его температуры, то мы приходим к следующим выводам. Длина пробега квантов меняется от километров при температурах порядка 6000 К до сотни метров при $T \sim 8000$ К, десятков метров при $T \sim 10000$ К и десятка сантиметров при $T \sim 15000$ К.

Очевидно, поток излучения, выходящего наружу из нагретого объема с плавным распределением температуры, определяется температурой того слоя (излучающего), в котором длина пробега имеет порядок характерных размеров задачи, порядка десятка метров. Наружные, менее нагретые слои прозрачны и сами практически не излучают света. Более глубокие — непрозрачны, и рожденные в них кванты не в состоянии уйти на значительное расстояние. С подобным положением мы уже сталкивались при рассмотрении излучения прогревной зоны воздуха перед разрывом в очень сильной ударной волне. По аналогии можно и в настоящей задаче ввести понятие температуры прозрачности T_2 , как такой температуры, при которой длина пробега света имеет порядок характерного расстояния, где заметно меняется температура. В отличие от задачи о свечении прогревного слоя, где размеры были 10^{-2} – 10^{-1} см и температура прозрачности ~ 20000 К, здесь масштаб порядка 10 м и температура прозрачности $T_2 \sim 10000$ К.

Представим себе теперь сферический объем неподвижного воздуха с плавным в начальный момент распределением температуры, меняющейся по радиусу от ~ 100000 К в центре до нескольких тысяч градусов на периферии, и посмотрим, как меняется это распределение с течением времени (при этом будем пренебрегать движением воздуха, которое могло бы возникнуть за счет градиентов давления).

В соответствии со сказанным выше, можно ожидать, что излучать и охлаждаться начнет слой с температурой порядка температуры прозрачности ($T_2 \sim 10000$ К); в следующий момент в плавном вначале распределении температуры образуется «выемка», как показано на рис. 9.13. В дальнейшем эта «выемка» приобретает вид

¹⁾ Напоминаем, что максимум планковского спектра по частоте приходится на кванты, $h\nu = 2,8kT$; максимум весовой функции при росселандовом способе усреднения длины пробега лежит в области $h\nu \approx 4kT$.

температурного уступа, который распространяется в глубь нагретого шара, к центру. Один за другим слои воздуха охлаждаются от начальной температуры до температуры порядка 10 000 К, после чего становятся прозрачными и практически перестают излучать. Внутренние слои почти не меняют при этом своей температуры до тех пор, пока к ним не подойдет уступ, так как в этих слоях длина пробега света очень мала, и испущенные кванты тут же поглощаются обратно.

Таким образом, воздух охлаждается в результате распространения по нему некоего узкого температурного уступа, который можно назвать «волной охлаждения». Температура в волне охлаждения резко (по сравнению с начальным плавным распределением) падает от начального значения T_1 , равного температуре в том месте, к которому в данный момент подошла верхняя граница волны, до нижнего значения — температуры прозрачности T_2 , при которой воздух практически перестает излучать.

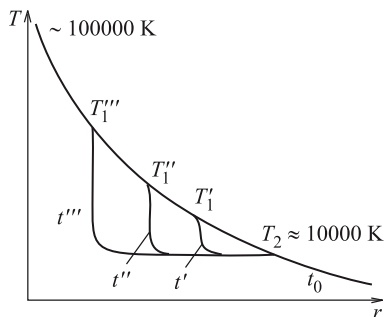


Рис. 9.13. Возникновение уступа (волны охлаждения) из непрерывного распределения температуры и его распространение в покоем воздухе; $t_0 < t' < t'' < t'''$

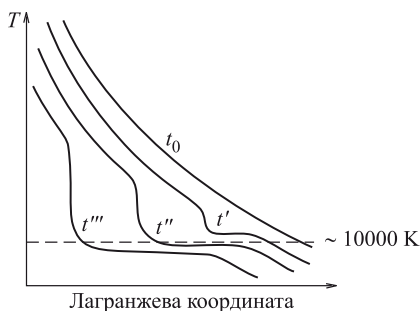


Рис. 9.14. Возникновение и распространение волны охлаждения в разлетающемся и адиабатически охлаждающемся воздухе; $t_0 < t' < t'' < t'''$

Изображая последовательные изменения распределения температуры на рис. 9.13, мы отвлеклись от изменения температуры за счет газодинамического движения, считая воздух неподвижным. В действительности уступ образуется еще до того, как давление воздуха снижается до атмосферного и движение прекращается, а именно, когда скорость охлаждения излучением слоя с температурой $\sim 10\,000$ К становится сравнимой со скоростью адиабатического охлаждения, связанного с разлетом и расширением воздуха во взрывной волне. На более ранней стадии взрыва скорость адиабатического охлаждения велика и воздух не успевает высвечивать своей энергии, так как область температур $\sim 10\,000$ К, при которых мог бы образоваться уступ, очень быстро «проскакивается», и воздух становится прозрачным, так и не успев потерять заметного количества энергии на излучение. В дальнейшем же, когда адиабатическое охлаждение по мере падения давления и замедления разлета уменьшается, на первый план выступает охлаждение излучением. Оценки показывают, что при взрыве с энергией $E = 10^{21}$ эрг уступ за фронтом ударной волны начинает выявляться в слое с $T \sim 10\,000$ К в момент $t \sim 10^{-2}$ с, когда температура на фронте порядка 2000 К, а давление порядка 50 атм (давление во взрывной волне мало меняется от фронта к центру, см. § 25 гл. I).

С учетом адиабатического охлаждения картина распределений температуры в воздухе, по которому распространяется волна охлаждения, изображена на рис. 9.14. По оси абсцисс отложена не эйлерова, а лагранжева координата, т. е. рис. 9.14

показывает, как меняется температура данных частиц воздуха и как распространяется волна охлаждения не по пространству, а по «массе» газа.

§ 10. Энергетический баланс и скорость распространения волны охлаждения. Волна охлаждения бежит по воздуху, практически не возмущенному излучением. Температура газа к моменту подхода верхней границы уступа определяется только предыдущей историей процесса и гидродинамическим движением (если таковое существует). Это объясняется тем, что при температурах порядка десятков тысяч градусов и градиентах температуры порядка тысячи градусов на метр, которые имеют место в начальном распределении, лучистая теплопроводность слишком мала для того, чтобы создать сколько-нибудь заметный поток энергии в непрозрачной области, к которой еще не подошла волна охлаждения. Лучистая теплопроводность, коэффициент которой пропорционален расселандовой длине пробега $l(T)$ и кубу температуры ¹⁾, быстро возрастает с увеличением температуры и становится существенной лишь в области температур порядка сотен тысяч градусов, вблизи центра взрыва. Она ограничивает подъем температуры в центре величиной такого порядка и выравнивает температуру вблизи центра.

Коэффициент теплопроводности становится снова большим в области температур ниже 10 000 К, где длина пробега, резко возрастающая с уменьшением температуры, становится очень большой ²⁾. Однако это не означает, что при низких температурах лучистая теплопроводность также выравнивает температуру, так как в этой области нагретый воздух становится прозрачным и понятие теплопроводности вообще теряет смысл — перенос излучения приобретает существенно иной характер, в частности, приводящий к образованию волны охлаждения.

Итак, благодаря малой теплопроводности на верхнем краю волны охлаждения поток энергии излучения, поступающий в волну изнутри, близок к нулю и не может повлиять на свойства волны. Весь поток излучения, отводящий энергию частиц воздуха, которые охлаждаются в волне, генерируется внутри самой волны. Определение этого потока, который мы обозначим через S_2 , и составляет основную задачу теории (решению ее будет посвящен 3-й раздел этой главы). Эта задача представляется нетривиальной, так как внутри волны имеется весьма резкое распределение температуры. Ясно только, что поток заключен в пределах $\sigma T_1^4 > S_2 > \sigma T_2^4$, так как излучающий слой в волне лежит при температурах ниже верхней T_1 , при которой воздух совершенно непрозрачен, но выше нижней T_2 , ниже которой воздух прозрачен, не излучает и не охлаждается за счет высвечивания энергии.

Если известен поток S_2 , то скорость u распространения волны охлаждения по массе, от которой в конечном счете зависит и время охлаждения нагретого объема, можно найти из условия энергетического баланса. Дело в том, что по оценкам волна охлаждения распространяется по невозмущенному излучением воздуху со скоростью, меньшей скорости звука. При этом давление на протяжении тонкого слоя — «фронта» волны — успевает выравниваться и оказывается практически постоянным. Плотность газа автоматически «подстраивается» к изменению температуры так, что, проходя через волну и охлаждаясь, частица воздуха сжимается пропорционально $1/T$ (если считать, что давление $p \sim \rho$). Это иллюстрируется рис. 9.15.

Процесс охлаждения воздуха в волне протекает при постоянном давлении. Если ρ_1 — начальная плотность воздуха в момент подхода волны, то количество воздуха,

¹⁾ Напоминаем, что поток энергии, переносимой путем лучистой теплопроводности, $S = -\kappa \partial T / \partial r$, где коэффициент лучистой теплопроводности $\kappa = 16\sigma l(T) T^3 / 3$ (см. § 12 гл. II).

²⁾ $l(T)$ проходит через минимум при $T \sim 50\,000$ К, а коэффициент лучистой теплопроводности, пропорциональный $l(T) T^3$, — при $T \sim 10\,000$ К.

протекающего через 1 см^2 поверхности фронта в 1 с, равно $\rho_1 u$. Изменение энергии его при охлаждении от температуры T_1 , до T_2 есть (при постоянной теплоемкости) $\rho_1 u c_p \times (T_1 - T_2)$. Это изменение равно, очевидно, энергии, отводимой от поверхности фронта волны излучением, т. е. равно потоку S_2 .

Таким образом, получаем основное уравнение энергетического баланса на волне охлаждения, которую мы рассматриваем здесь как разрыв:

$$S_2 = \rho_1 u c_p (T_1 - T_2). \quad (9.5)$$

Если учесть, что теплоемкость c_p не постоянна, то получим более общее выражение:

$$S_2 = \rho_1 u (w_1 - w_2), \quad (9.6)$$

где w — удельная энтальпия воздуха.

Если γ — эффективный показатель адиабаты, то $w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ и скорость волны равна

$$u = S_2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{w_2}{w_1} \right). \quad (9.7)$$

В третьем разделе главы будет показано, что излучение, выходящее с поверхности волны охлаждения, всегда генерируется на нижнем краю уступа, независимо от «амплитуды» волны, которую можно характеризовать отношением T_1/T_2 или w_1/w_2 , т. е. при сколь угодно высоких температурах исходного газа T_1 температура уходящего излучения близка к T_2 .

Поток S_2 определяется в основном температурой прозрачности и приближенно равен

$$S_2 = 2\sigma T_2^4. \quad (9.8)$$

Сама температура прозрачности не есть величина строго определенная. Как уже было сказано выше, она ориентировочно разграничивает прозрачную и непрозрачную температурные области и находится из условия, что средняя по спектру длина пробега излучения при температуре, равной температуре прозрачности, порядка характерного масштаба задачи d , например расстояния, на котором температура воздуха уменьшается от T_2 до достаточно малой величины, скажем, 2000 К.

Когда волна распространяется по расширяющемуся воздуху, этот масштаб определяется гидродинамикой процесса в целом; он тем меньше, чем больше скорость адиабатического охлаждения. Если приближенно описать коэффициент поглощения воздуха Больцмановской зависимостью $\kappa \sim \exp(-I/kT)$ с некоторым эффективным значением «потенциала ионизации»¹⁾, то температура прозрачности оказывается только слабо, логарифмически, зависящей от масштаба d , так же как и от плотности

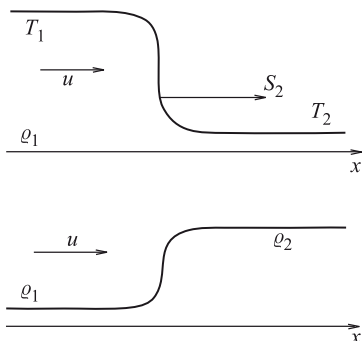


Рис. 9.15. Схематическое изображение профилей температуры и плотности газа во фронте волны охлаждения. Стрелка u показывает направление скорости воздуха, втекающего в волну

¹⁾ В действительности, κ есть сумма членов типа $e^{-I/kT}$, где I — потенциалы ионизации для компонентов, соответствующих фотоэлектрическому поглощению, и энергии возбуждения для компонентов молекулярного поглощения. Все значения I порядка 5–10 эВ; если рассматривать не очень большой температурный интервал, то всегда можно проинтерполировать $\kappa(T)$ зависимостью типа $e^{-I/kT}$.

воздуха, которая входит только в предэкспоненциальный множитель:

$$l(T_2) = \text{const } e^{I/kT_2} = d; \quad T_2 = \frac{I}{k} \left(\ln \frac{d}{\text{const}} \right)^{-1}. \quad (9.9)$$

Выше уже было сказано, что $T_2 \sim 10\,000$ К при $d \sim 10$ м и атмосферном давлении (при $d \sim 100$ м $T_2 \sim 8000$ К; при $d \sim 1$ м $T_2 \sim 12\,000$ К). Таким образом, поток $S_2 = 2\sigma T_2^4$ меняется в довольно узких пределах и, если рассматривать сильные волны охлаждения с большим перепадом температуры ($T_1 \gg T_2$, $w_1 \gg w_2$), то окажется, что скорость распространения волны по исходному газу зависит в основном только от давления газа p , независимо от верхней температуры T_1 :

$$u \approx S_2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{p} \quad \text{при } w_1 \gg w_2.$$

Для иллюстрации в табл. 9.5 приведены скорости u для атмосферного давления и нескольких значений T_1 и T_2 . Из таблицы видно, что скорости волны охлаждения порядка 1 км/с.

§ 11. Стягивание волны охлаждения к центру. Характер охлаждения и зависимость времени охлаждения от размеров нагретого объема в рассматриваемом случае существенно отличны от тех, которые имели бы место при растекании тепла механизмом обычной теплопроводности. При обычной теплопроводности постепенно происходит подобное понижение температуры всей массы тела, и время охлаждения тела с радиусом R пропорционально квадрату радиуса $t \sim R^2 c_p \rho / \kappa$, где κ — коэффициент теплопроводности. При охлаждении же излучением по телу бежит волна и время пропорционально первой степени радиуса $t \sim R/u$.

Если размеры нагретого тела имеют порядок $R \sim 100$ м и давление порядка атмосферного, то при скорости волны охлаждения $u \sim 1$ км/с она стягивается от периферии к центру за время $t \sim 0,1$ с. За это время воздух охлаждается от высоких температур порядка десятков и ста тысяч градусов до температуры прозрачности $T_2 \sim 10\,000$ К.

Линии распространения волны охлаждения вместе с линиями фронта ударной волны и границы огненного шара на диаграмме радиус–время изображены схематически на рис. 9.16.

Волна возникает в момент времени, когда температура на фронте порядка 2000 К¹⁾. Уступ образуется в слое с $T \sim 10\,000$ К, который отстоит примерно на 10 м от поверхности фронта. Вначале, пока давление еще велико ($p \sim 50$ атм в момент зарождения уступа), скорость распространения волны по массе невелика и несмотря на то, что по массе волна бежит вглубь, к центру, в пространстве она движется вперед, увлекаясь быстро разлетающимся воздухом. Постепенно волна замедляется (в пространстве), затем поворачивает назад и «схлопывается» в центре.

Точка поворота, определяющая максимальный радиус поверхности фронта волны охлаждения, соответствует нулевой скорости волны в пространстве, т. е. равенству противоположно направленных скорости газодинамического разлета частиц воздуха и скорости распространения волны по массе.

¹⁾ Несмотря на приближенное совпадение моментов возникновения волны охлаждения и отрыва фронта ударной волны от границы огненного шара, непосредственной физической связи между этими двумя совершенно различными явлениями нет.

После прохождения по воздуху, нагретому взрывом, волны охлаждения, его температура повсюду оказывается ниже $\sim 10\,000$ К, и весь объем становится более или менее прозрачным. В дальнейшем охлаждение излучением идет значительно медленнее и имеет объемный характер, т.е. каждая частица испускает свет в соответствии со своей лучеиспускательной способностью, и этот свет почти без поглощения уходит от места взрыва на большие расстояния. Конечно, объем не полностью прозрачен и какая-то доля излучения застревает по пути в наружных слоях, т.е. происходит некоторое перекачивание энергии из центральных областей в периферийные. В частности, этому способствует двуокись азота, содержащаяся в наружных слоях с температурой $3000\text{--}1000$ К (которые ранее в ударной волне были нагреты до температуры выше 2000 К).

Подобное же перекачивание энергии происходит и во время прохождения волны охлаждения, так как поток излучения, выходящий с поверхности волны, частично поглощается в «прозрачных» (а в действительности не вполне прозрачных) периферийных слоях. В ультрафиолетовой области спектра вообще поглощение сильно и ультрафиолетовые кванты поглощаются вблизи фронта волны. Это, однако, не вносит существенных изменений во всю описанную выше качественную картину охлаждения воздуха волной, основанную на предположении о высокой степени прозрачности при температурах ниже T_2 , так как в области сильного поглощения с длинами волн $\lambda < 2000$ Å содержится меньше 4% энергии спектра, соответствующего температуре $10\,000$ К.

Не следует думать, что после момента «схлопывания» волны охлаждения в центре охлажденный воздух перестает светиться и что поверхность волны охлаждения на той стадии, когда она еще существует, и является границей огненного шара. Воздух, прошедший через волну охлаждения, излучает вполне достаточно для того, чтобы ярко светиться даже тогда, когда энергетический эффект испускания становится малым и дальнейшее охлаждение прекращается.

Волна находится внутри огненного шара и схлопывается к центру, оставляя за собой еще достаточно сильно нагретый и ярко светящийся воздух. Границей огненного шара (т.е. границей свечения) служат на поздней стадии взрыва слои с температурами порядка $2000\text{--}3000$ К, которые охлаждаются излучением чрезвычайно медленно. После того как давление становится равным атмосферному и движение практически прекращается, эти слои оказываются практически неподвижными. Граница огненного шара сначала движется вперед от центра вместе с разлетающимся воздухом, а затем тормозится и останавливается, как показано на рис. 9.16.

Приближение волны охлаждения к центру сопровождается некоторым оттоком массы воздуха от периферии к центру, так как волна оставляет за собой резко охлажденные частицы, а охлаждение при постоянном давлении сопровождается сжатием. Например, если вначале в центре температура была $100\,000$ К, а после «схлопывания» волны стала $10\,000$ К, причем давление в момент схлопывания не изменилось (осталось равным атмосферному), то плотность воздуха в центре повышается при этом в несколько десятков раз, что происходит за счет оттока масс к центру. Этот

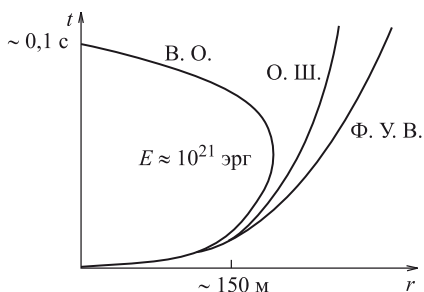


Рис. 9.16. Линии фронта ударной волны (Ф.У.В.), границы огненного шара (О.Ш.) и фронта волны охлаждения (В.О.) на диаграмме r, t . Примерные масштабы относятся к энергии взрыва $E \approx 10^{21}$ эрг

отток, однако, не сказывается на далеких от центра слоях со сравнительно низкими температурами порядка 2000–3000 К, так что положение границы огненного шара остается неизменным.

На этом мы закончим рассмотрение процесса охлаждения воздуха в целом, закономерностей распространения волны охлаждения и свечения огненного шара, т. е. рассмотрение «макроскопической» картины¹⁾.

В следующем разделе мы займемся изучением внутренней структуры волны охлаждения, подобно тому как в газодинамике, наряду с изучением общих течений газа с ударными волнами, занимаются исследованием «микроскопической» картины — внутренней структуры фронта ударной волны. Именно рассмотрение внутреннего строения волны охлаждения позволяет найти важнейшую характеристику волны — поток излучения с поверхности волны.

§ 12. Искровой разряд в воздухе. Гидродинамические явления взрывного характера возникают в воздухе и при искровых разрядах. Эти явления исследовали С. Л. Мандельштам и его сотрудники [19–24]. Общая картина процесса такова. В воздушном разрядном промежутке между электродами сразу после пробоя образуется тонкий токопроводящий канал. В этом канале за счет выделения джоулева

тепла воздух нагревается до температур порядка нескольких десятков тысяч градусов и сильно ионизируется (не менее чем однократно). Благодаря повышению давления, канал расширяется и действует на окружающий воздух как поршень, посылая в него цилиндрическую ударную волну²⁾.

На ранней стадии распределения плотности воздуха по радиусу имеют характер, свойственный цилиндрическому взрыву. В работе [22] распределение плотности в последовательные моменты времени измерялось интерферометрическим методом. Типичная эволюция показана на рис. 9.17 (в этом опыте электрические параметры контура имели следующие значения: $C = 0,25$ мкФ, $L = 2$ мкГн, $V = 10$ кВ; длина разрядного промежутка 5 мм). Как видно из рисунка, вначале ударная волна еще довольно сильна (скорость около 2 км/с) и распределение плотности соответствует течению при сильном взрыве. На более поздней стадии волна ослабевает и начинает

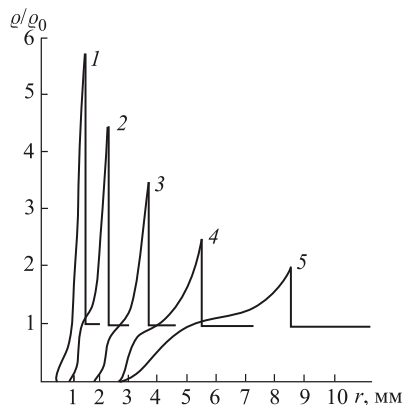


Рис. 9.17. Распределение плотности воздуха по радиусу искры. Кривые 1–5 относятся к следующим моментам времени: 1,0; 1,7; 2,9; 5,6; 9,8 мкс

сказываться противодавление воздуха перед ударной волной (см. § 27 гл. I). При этом в периферийной части взрывной волны плотность не сильно отличается от нормальной, а в центральных областях плотность очень мала. Поскольку давление во взрывной волне выравнено по пространству, в центральных областях очень высока

¹⁾ Заметим, что волна охлаждения образуется и в оболочках сверхновых звезд после выхода ударной волны на поверхность. Это было показано В. С. Имшенником и Д. К. Надежиным [18], которые численно решали задачу о разлете массивной звезды в результате выделения большой энергии в центре звезды.

²⁾ После того как ударная волна проходит расстояние, превышающее длину канала, ее форма постепенно приобретает черты сферичности.

температура. Эта центральная, сильно разреженная и высокотемпературная область и является токопроводящим каналом. Средняя плотность воздуха в канале составляет примерно 10^{-3} от плотности невозмущенного воздуха, а средняя температура — примерно 40 000 К.

Такой же результат дают и спектроскопические измерения. (Термодинамическое равновесие в канале устанавливается довольно быстро [23, 24], так что спектроскопические методы позволяют определить действительную температуру газа.)

Теория взрывной волны, возникающей при искровом разряде, была развита С. И. Драбкиной [20]. Надо сказать, что течение несколько отличается от того, которое имеет место при мгновенном выделении энергии, так как в данном случае время выделения джоулева тепла в канале, которое определяется полупериодом разряда, сравнимо с временем, в течение которого наблюдается ударная волна. Это было учтено в работе [20]. Скорость энерговыделения, входящая в найденный закон движения ударной волны, при этом бралась из эксперимента. В работе С. И. Брагинского [25] рассматривается теоретически не только движение воздуха, но и механизм разряда с учетом проводимости и расширения искрового канала. Это дает возможность связать параметры ударной волны непосредственно с законом нарастания разрядного тока.

Явления, подобные исследованным в лаборатории, но в значительно больших масштабах, происходят при грозе. Молния представляет собою тот же искровой разряд, а гром производится образующейся при этом ударной волной, которая на больших расстояниях вырождается в акустическую. Ю. Н. Живлюк и С. Л. Мандельштам [26] спектроскопическими методами измерили среднюю температуру в канале молнии, которая оказалась равной примерно 20 000 К. Это значение согласуется с вычислениями, основанными на формулах [25], если в качестве типичных значений тока и времени принять 30 кА и 100–1000 мкс (радиус канала молнии ~ 10 см). Оцененные давления на фронте ударной волны оказались такими, что на расстояниях порядка нескольких метров «гром» может производить значительные разрушения.

3. Структура фронта волны охлаждения

§ 13. Постановка задачи. До сих пор, говоря о волне охлаждения, мы рассматривали ее как некий разрыв, в котором температура газа претерпевает резкий скачок. При этом указывалось условие энергетического баланса, эквивалентное соотношению, описывающему сохранение полного потока энергии при протекании газа через разрыв, подобно тому как это делается при рассмотрении ударных волн. В отличие от ударных волн, здесь достаточно было сформулировать только одно энергетическое соотношение, так как движение в волне охлаждения дозвуковое и изменением давления при переходе через фронт волны можно пренебречь (в этом отношении волна охлаждения подобна фронту медленного горения). Такое «макроскопическое» рассмотрение не позволяет сделать никаких заключений относительно важнейшей величины, определяющей скорость волны, потока излучения S_2 , который уходит с фронта волны на «бесконечность». Для нахождения потока S_2 необходимо исследовать внутреннюю структуру переходного слоя фронта волны, т. е. найти непрерывное решение уравнений, описывающих перенос излучения в волне. Это было сделано в уже цитированных работах [16, 17].

Отвлекаясь от конкретных размеров и формы охлаждающейся массы газа, будем искать решение нестационарных уравнений лучистого теплообмена в виде $T(x - ut)$, соответствующем плоской волне, которая распространяется с постоянной скоростью u по газу с заданными значениями температуры и плотности T_1, ρ_1 .

Скорость u сама должна быть найдена из уравнений, наподобие определения скорости пламени в горючей смеси.

На самом деле уравнения не имеют точного решения вида $T(x - ut)$. По мере распространения волны увеличивается толщина слоя охлажденного газа, в котором поглощение света хотя и мало, но все же отлично от нуля, и температура прозрачности, определенная соотношением $l(T_2) = d$, где под d можно подразумевать толщину охлажденного слоя, уменьшается с течением времени.

В неограниченной среде, при обратной зависимости длины пробега от температуры, температура прозрачности вообще оказывается равной нулю, так как слой газа, охлажденный до сколь угодно низких температур, из-за своей бесконечной протяженности оказывается совершенно непрозрачным даже при огромной длине пробега излучения; поток излучения с фронта волны при этом равен нулю и режима волны охлаждения, в строгом смысле слова, вообще не существует. До некоторой степени аналогичная ситуация имеет место в теории стационарного распространения пламени. Если не предполагать, что скорость химической реакции в несгоревшей смеси тождественно равна нулю, несмотря на то, что в действительности окорость конечна, хотя и исчезающе мала, смесь сгорит раньше, чем к ней подойдет фронт пламени.

Этот момент, принципиальный в случае неограниченной среды, создает лишь кажущуюся трудность в реальных условиях. Ведь на самом деле нагретая и, следовательно, охлажденная волной область всегда ограничена, температура прозрачности только логарифмически зависит от размеров охлажденной области, т. е. слабо меняется с увеличением пройденного волной расстояния, будучи заключенной для реальных тел в весьма узких пределах. Дополнительная, очень медленная зависимость решения от времени $T(x - ut, t)$ возникает лишь на самом нижнем, сильно растянутом краю волны, в области уже охлажденного, почти прозрачного газа. Существование адиабатического охлаждения в случае, когда волна распространяется по расширяющемуся газу, делает эту дополнительную зависимость еще менее существенной, так как воздух, прошедший через волну, охлаждается за счет расширения до низких температур и быстро «проскакивает» температурную область, в которой он еще не вполне прозрачен.

Дополнительная, медленная зависимость от времени $T(x - ut, t)$ будет существовать лишь в области чисто адиабатического охлаждения и почти не будет влиять на профиль температуры в самой волне.

Чтобы найти распределение температуры внутри фронта волны охлаждения, которым в свою очередь определяется и поток S_2 , следует, как это обычно делается в теории режимов, проиллюстрированной в гл. VII на примере ударной волны, рассмотреть плоский стационарный процесс в системе координат, связанной с фронтом.

Чтобы избавиться от указанной выше трудности и сделать задачу стационарной, т. е. перейти от истинного решения $T(x - ut, t)$ к идеализированному $T(x - ut)$ (в лабораторной системе координат), можно воспользоваться одним из двух формально искусственных, но в силу сказанного физически совершенно оправданных приемов, отвечающих реальному положению вещей.

Можно, во-первых, ввести в энергетическое уравнение дополнительный постоянный член A , играющий роль адиабатического охлаждения. Величина A задает постоянный масштаб d , определяющий температуру прозрачности T_2 , и ограничивает поглощение в охлажденной излучением области, делая оптическую толщину этой области конечной.

Можно, во-вторых, не учитывать адиабатического охлаждения, но зато с самого начала ввести температуру прозрачности T_2 , на основе оценки типа (9.9), и положить формально, что при $T < T_2$ среда абсолютно прозрачна (длина пробега $l = \infty$). Тогда

газ будет охлаждаться только до температуры T_2 , после чего имеет место испускание, пропорциональное $\varkappa = 1/l$, и дальнейшее охлаждение прекратится.

Поскольку движение газа в волне охлаждения дозвуковое (об этом свидетельствуют оценки), кинетической энергией потока газа можно пренебречь по сравнению с тепловой. При этом уравнение энергии в текущей точке x внутри волны записывается в общем случае с учетом дополнительного члена, описывающего адиабатическое охлаждение, в виде

$$u \rho_1 c_p \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dx} = -A, \quad A > 0. \quad (9.10)$$

Если не предполагать теплоемкость постоянной, то это уравнение удобно записать через удельную энтальпию газа:

$$u \rho_1 \frac{dw}{dx} + \frac{dS}{dx} = -A. \quad (9.11)$$

Здесь S — поток энергии излучения в точке x волны; в силу сохранения потока массы $\rho u(x) = \rho_1 u$, где u — скорость волны, равная скорости втекания газа в волну, ρ_1 — исходная плотность газа, а ρ и $u(x)$ — величины в текущей точке x .

Направления потока, оси x и скорости показаны на рис. 9.15, где схематически изображен перепад температуры во фронте волны. Газ втекает в волну слева направо, волна же распространяется по невозмущенному газу справа налево. Перед волной, при $x = -\infty$, температура имеет заданную величину $T = T_1$, а поток $S = 0$, в соответствии со сделанным в § 10 замечанием о том, что лучистая теплопроводность в высоко нагретом газе не существенна и поток в этой области мал. Поток излучения S меняется при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ от нуля до величины S_2 , равной потоку, уходящему с фронта волны на «бесконечность».

Если не учитывать адиабатическое охлаждение, а предполагать температуру прозрачности T_2 заданной (второй прием), то уравнение энергии (9.11) дает интеграл

$$S = u \rho_1 (w_1 - w). \quad (9.12)$$

Здесь постоянная интегрирования выражена через энтальпию исходного газа, $w_1 = w(T_1)$, в соответствии с граничным условием $x = -\infty$, $T = T_1$, $S = 0$. Будучи примененным к нижней точке волны, где $T = T_2$, а поток равен потоку, уходящему на бесконечность $S = S_2$, интеграл энергии (9.12) приводит, как и следовало ожидать, к уравнению энергетического баланса (9.6), связывающему значения величин по обе стороны фронта волны, если последний рассматривать как разрыв.

К уравнению энергии необходимо присоединить уравнение переноса излучения, которым определяется поток S . Будем, как и при рассмотрении структуры фронта ударной волны с учетом излучения (см. гл. VII, разд. 3), описывать перенос излучения в диффузионном приближении.

Кроме того, введем, как и раньше, некоторую среднюю по спектру длину пробега квантов l . Уравнения диффузионного приближения записываются тогда в виде

$$\frac{dS}{dx} = c \frac{U_p - U}{l}, \quad (9.13)$$

$$S = -\frac{lc}{3} \frac{dU}{dx}, \quad (9.14)$$

где U — истинная плотность излучения, а U_p — равновесная, соответствующая температуре вещества в точке x : $U_p = 4\sigma T^4/c$.

Как будет показано ниже, плотность излучения в значительной части волны близка к равновесной. В этих условиях, как известно (см. § 12 гл. II), спектральная длина пробега l_ν усредняется по Росселанду. В области сильно охлажденного воз-

духа локального равновесия уже нет и росселандов способ усреднения не годится. Способ усреднения, однако, не может внести качественных изменений в результаты рассмотрения, так как экспоненциальный больцмановский множитель типа $e^{l/kT}$, эффективным образом описывающий основную температурную зависимость длины пробега, сохраняется при любом усреднении, а от предэкспоненциального множителя, который, конечно, меняется при перемене. способа усреднения, все эффекты в волне зависят очень слабо, логарифмически, как и температура прозрачности T_2 . Поэтому для простоты мы будем подразумевать всегда под $l(T)$ росселандов пробег.

В уравнениях (9.13), (9.14) удобно перейти к оптической координате τ , которую будем отсчитывать от точки $x = +\infty$, где газ прозрачен и $l = \infty$ (ось τ направлена противоположно оси x):

$$d\tau = -\frac{dx}{l}, \quad \tau = - \int_{+\infty}^x \frac{dx}{l} = \int_x^{+\infty} \frac{dx}{l}.$$

При этом уравнения (9.13), (9.14) принимают форму

$$\frac{dS}{d\tau} = -c(U_p - U), \quad (9.15)$$

$$S = \frac{c}{3} \frac{dU}{d\tau}. \quad (9.16)$$

К уравнениям переноса излучения нужно присоединить граничные условия. На верхнем краю волны при $\tau = \infty$, как уже было сказано выше,

$$\tau = \infty, \quad S = 0, \quad T = T_1. \quad (9.17)$$

На нижнем краю волны, который является границей между поглощающей и абсолютно прозрачной средами (вакуумом), следует подчинить поток и плотность излучения известному диффузионному условию на границе среды с вакуумом (см. формулу (2.66)):

$$\tau = 0, \quad S_2 = \frac{cU_2}{2}. \quad (9.18)$$

Уравнения переноса излучения вместе с уравнением энергии и граничными условиями полностью определяют структуру фронта волны, поток S_2 и скорость u .

§ 14. Поток излучения с поверхности фронта волны. Практический интерес представляют главным образом сильные волны охлаждения, в которых газ, охлаждаясь от исходной температуры T_1 до температуры прозрачности T_2 , высвечивает значительную долю своей энергии: $T_1 \gg T_2$. Слабые волны, где различие между T_1 и T_2 мало ¹⁾, интересны в основном с методической точки зрения, постольку, поскольку в этом случае удастся получить точное аналитическое решение уравнений. Ясно, что в слабой волне поток излучения с фронта S_2 , заключенный в интервале $\sigma T_1^4 > S_2 > \sigma T_2^4$, определен довольно точно в силу близости крайних значений, поэтому вопрос о потоке, являющийся главным, фактически не возникает: $S_2 \approx \sigma T_2^4 \approx \sigma T_1^4$. Аналитическое решение для слабой волны можно найти в работе [16]; здесь мы на нем останавливаться не будем и перейдем прямо к рассмотрению сильной волны охлаждения.

¹⁾ При этом, однако, несмотря на близость T_1 и T_2 , предполагается, что температурная зависимость длины пробега $l(T)$ настолько резкая, что $l(T_1) \ll l(T_2)$. Последнее является условием самого существования волны охлаждения.

В предыдущем параграфе было указано, что для нахождения стационарного режима необходимо воспользоваться одним из двух приемов: либо ввести в энергетическое уравнение постоянный член адиабатического охлаждения, либо с самого начала определить температуру прозрачности T_2 , и считать, что при $T < T_2$ газ абсолютно прозрачен ($l = \infty$), тем самым исключив из рассмотрения уже охлажденную излучением область, которая поглощает свет очень слабо. Первый прием дает более полную картину распределения температуры, так как позволяет исследовать ход температуры в охлажденном воздухе и учесть слабое поглощение в нем. Однако он приводит к излишним математическим усложнениям при рассмотрении профиля температуры внутри самой волны (при температурах выше температуры прозрачности) и определении потока, уходящего с фронта волны на бесконечность. Между тем внутри волны адиабатическое охлаждение мало по сравнению с охлаждением за счет излучения, поэтому предпочтительнее исследовать внутреннюю структуру волны, воспользовавшись вторым приемом. В § 16 будут отмечены некоторые особенности режима, связанные с существованием адиабатического охлаждения.

В отсутствие адиабатического охлаждения интеграл энергетического уравнения дается формулой (9.12), которую мы перепишем, полагая для простоты теплоемкость постоянной:

$$S = u \varrho_1 c_p (T_1 - T). \quad (9.19)$$

Задача состоит в решении системы уравнений (9.15), (9.16), (9.19) вместе с граничными условиями (9.17), (9.18).

Прежде чем исследовать эту систему, попытаемся оценить поток излучения S_2 , уходящий с фронта, исходя из самых общих физических соображений. Это рассмотрение подскажет нам и то приближение, которое можно сделать при решении системы уравнений и нахождении профиля температуры в волне.

В силу самой постановки задачи температура ни в одной точке волны не может быть ниже температуры прозрачности T_2 , так как, охладившись до температуры T_2 , газ перестает поглощать и испускать излучение, и дальнейшее охлаждение прекращается. Следовательно, T_2 есть наименьшая температура в волне и вблизи нижнего края волны температура растет по мере удаления от границы с «вакуумом» — с абсолютно прозрачной областью, где $T = T_2$ и $l = \infty$. Таким образом, на нижнем краю, при $\tau = 0$, $dT/d\tau \geq 0$. Из энергетического уравнения (9.19) следует, что поток при удалении от нижнего края в глубь волны уменьшается, т. е. при $\tau = 0$ $dS/d\tau \leq 0$. Уравнение «непрерывности» излучения (9.15) свидетельствует о том, что при этом плотность излучения на нижнем краю волны не выше равновесной: $U_2 \leq U_{p2} = 4\sigma T_2^4/c$ (дивергенция потока dS/dx не отрицательна; вещество не нагревается излучением). В диффузионном приближении поток на границе среды с вакуумом связан с плотностью излучения условием (9.18): $S_2 = cU_2/2$. Замечая, что $U_2 \leq U_{p2}$, получим, что поток S_2 ограничен сверху величиной $2\sigma T_2^4$. Действительно,

$$S_2 = \frac{cU_2}{2} \leq \frac{cU_{p2}}{2} = 2\sigma T_2^4.$$

С другой стороны, эффективная температура излучения $T_{\text{эф}}$, определяемая равенством $S_2 = \sigma T_{\text{эф}}^4$, совпадает с некоторой температурой средней излучающей среды и, следовательно, не может быть ниже T_2 , так как температура вещества в излучающем слое, как и в любой другой точке волны, всегда выше, чем T_2 . Отсюда следует, что $S_2 > \sigma T_2^4$, и поток S_2 , уходящий с фронта волны на бесконечность, оказывается заключенным в весьма узких пределах:

$$\sigma T_2^4 < S_2 < 2\sigma T_2^4, \quad (9.20)$$

$$T_2 < T_{\text{эф}} < \sqrt[4]{2} T_2. \quad (9.21)$$

Таким образом, независимо от амплитуды волны, при сколь угодно высоких начальных температурах T_1 излучает всегда самый нижний край волны, и поток излучения с поверхности фронта волны соответствует температуре, близкой к T_2 . Ни в коем случае не следует думать, что здесь сыграло какую-то роль принятое нами для описания переноса излучения диффузионное приближение, приводящее к граничному условию (9.18). В самом деле, диффузионное условие (9.18) соответствует предположению о том, что кванты, выходящие из среды в вакуум, распределены по углам изотропно, а из вакуума в среду кванты не поступают (в вакууме нет источников света).

Даже если бы мы приняли другое крайнее предположение о том, что имеется резко выраженная анизотропия излучения на границе с вакуумом и все кванты выходят из среды нормально к ее поверхности, диффузионное условие (9.18) сменилось бы условием $S_2 = cU_2$, что привело бы к неравенствам $\sigma T_2^4 < S_2 < 4\sigma T_2^4$, $T_2 < T_{\text{эф}} < \sqrt[4]{4}T_2$, отличающимся от (9.20), (9.21) несущественным численным множителем.

В действительности ограничение потока $S_2 < 2\sigma T_2^4$ связано со стационарностью режима охлаждения, в силу которой профиль температуры, полностью определяющий поток, не может быть произвольным и устанавливается вполне определенным образом в соответствии с уравнениями режима.

Из неравенства (9.21) вытекает важное следствие, которое позволяет решить всю задачу о структуре фронта, описываемую нелинейными уравнениями, простейшим способом. Излучение нагретого тела, граничащего с прозрачной средой (или вакуумом), генерируется в основном в слое около поверхности тела, имеющем оптическую толщину порядка единицы или нескольких единиц (кванты, рожденные в более глубоких слоях, не в состоянии выйти наружу, почти полностью поглощаясь по пути). Эффективная температура излучения совпадает с некоторой средней температурой этого излучающего слоя. Но в силу неравенства (9.21) эффективная температура очень близка к температуре нижнего края волны T_2 . Значит, температура вещества за точкой $\tau = 0$, где $T = T_2$, меняется очень мало на оптическом расстоянии порядка нескольких единиц в глубь волны. Это позволяет сделать следующие заключения.

В сильной волне охлаждения, в которой $T_1 \gg T_2$, поток излучения на нижнем краю волны, в излучающем слое, мало меняется и почти постоянен. В самом деле, при изменении температуры на $\Delta T \lesssim T_2$ поток меняется на величину

$$|\Delta S| \sim u \varrho_1 c_p \Delta T \lesssim u \varrho_1 c_p T_2,$$

а при $T_1 \gg T_2$ сам поток в точке $\tau = 0$, $T = T_2$ равен приближенно $S_2 \approx u \varrho_1 c_p T_1$ (см. (9.19)). Следовательно,

$$\frac{|\Delta S|}{S_2} \approx \frac{T_2}{T_1} \ll 1.$$

Поскольку поток на нижнем краю сильной волны почти постоянен, ситуация вполне аналогична положению в фотосферах стационарных звезд, где поток излучения есть строго постоянная величина. Таким образом, задача определения связи потока S_2 с температурой прозрачности T_2 (температурой на границе среды с вакуумом) в пределе сильной волны эквивалентна известной проблеме Милна (см. § 15 гл. II). Она имеет точное решение при строгом учете углового распределения излучения,

$$S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma T_2^4, \quad (9.22)$$

лишь немного отличающееся от решения в диффузионном приближении:

$$S_2 = 2\sigma T_2^4. \quad (9.23)$$

Отсюда, кстати сказать, видно, что в рамках диффузионного приближения величина потока S_2 в пределе сильной волны совпадает с верхней границей неравенства (9.20).

§ 15. Распределение температуры во фронте сильной волны. Тот факт, что температура мало меняется на протяжении излучающего слоя с оптической толщиной порядка нескольких единиц, свидетельствует о существовании локального равновесия излучения с веществом. Относительное отклонение плотности излучения на нижнем краю волны от равновесной тем меньше, чем сильнее волна, т.е. чем больше отношение T_1/T_2 . Действительно, из уравнения (9.15) следует, что

$$\left(\frac{U_p - U}{U_p} \right)_{\tau=0} = \frac{U_{p2} - U_2}{U_{p2}} = -\frac{1}{cU_{p2}} \left(\frac{dS}{d\tau} \right)_2.$$

Но в силу сказанного выше

$$\left| \frac{dS}{d\tau} \right|_2 \sim \frac{|\Delta S|}{\Delta\tau} \lesssim S_2 \frac{T_2}{T_1} = 2\sigma T_2^4 \frac{T_2}{T_1},$$

так как $|\Delta S| \sim S_2(T_2/T_1)$ есть изменение потока на протяжении оптического расстояния $\Delta\tau \sim 1$. Следовательно, относительное отклонение плотности излучения от равновесной в сильной волне

$$\frac{U_{p2} - U_2}{U_{p2}} \sim \frac{S_2}{cU_{p2}} \frac{T_2}{T_1} \sim \frac{T_2}{T_1} \ll 1.$$

Можно показать, что при удалении в глубь волны от ее нижнего края относительное отклонение, т.е. степень неравномерности излучения, только уменьшается, так что если волна достаточно сильная и отклонение на нижнем краю мало, то условие локального равновесия выполняется на всем протяжении волны¹⁾. Таким образом, уравнения, описывающие структуру фронта сильной волны охлаждения, можно решать в приближении лучистой теплопроводности, полагая

$$S \approx \frac{c}{3} \frac{dU_p}{d\tau} = \frac{16\sigma T^3}{3} \frac{dT}{d\tau}.$$

Комбинируя это уравнение с выражением (9.19), получим уравнение для функции $T(\tau)$, которое интегрируется в квадратурах.

На нижнем краю волны получаем приближенную форму решения, которая, естественно, совпадает с диффузионным решением проблемы Милна, так как поток $S \approx \text{const}$ (см. § 15 гл. II):

$$T = T_2 \left(1 + \frac{3}{2}\tau \right)^{1/4}. \quad (9.24)$$

Асимптотический профиль температуры на верхнем краю сильной волны имеет вид

$$T = T_1 \left(1 - e^{-\tau/\tau_k} \right), \quad \tau \gg \tau_k, \quad (9.25)$$

где величина τ_k , которая может рассматриваться как эффективная оптическая толщина волны, зависит только от амплитуды волны:

$$\tau_k \approx \frac{8}{3} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4.$$

¹⁾ Это доказывает, между прочим, что в случае сильной волны в качестве длины пробега излучения можно пользоваться Росселандовым средним.

Оптическая толщина волны резко возрастает с увеличением отношения T_1/T_2 . Мы не будем приводить здесь общего выражения для профиля $T(\tau)$, которое на нижнем и

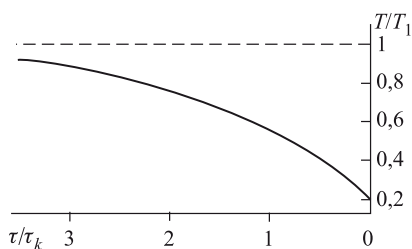


Рис. 9.18. Распределение температуры по оптической координате в волне охлаждения с $T_2/T_1 = 5$; $\tau_k = 1670$

ба длины принята величина $l_2 = l(T_2)$; температура прозрачности взята равной $T_2 = 10\,000$ К. Рис. 9.19 показывает, что волна имеет вид уступа. На самом деле больцмановская зависимость $l(T)$, обеспечивающая резкий уступ температуры в волне, имеет место только до температур 30 000–40 000 К, пока не начинается многократная ионизация газа. При более высоких температурах длина пробега проходит через минимум и начинает расти с возрастанием температуры. Поэтому верхний край достаточно сильной волны с $T \sim 50\,000$ – $100\,000$ К сильно растягивается (при $l = \text{const}$ профиль $T(x)$ на верхнем краю совпадал бы с профилем $T(\tau)$) по формуле (9.25). Примерное распределение температуры в волне с $T = 40\,000$ К показано на рис. 9.20.

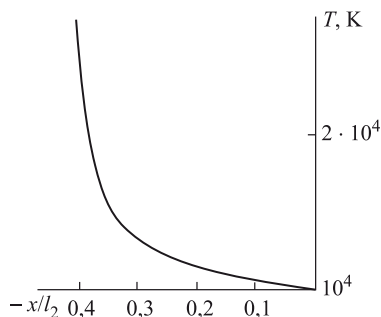


Рис. 9.19. Распределение температуры по геометрической координате на нижнем краю волны охлаждения; $T_2 = 10\,000$ К

верхнем краях упрощается, приобретая формы (9.24) и (9.25) (см. [17]), а изобразим профиль температуры на графике. Рис. 9.18 относится к случаю $T_2/T_1 = 5$; $\tau_k = 1670$.

Зная профиль $T(\tau)$ и длину пробега в зависимости от температуры, легко найти распределение температуры по геометрической координате с помощью определения

$$-x = \int_0^{\tau} l(T) d\tau \quad (1).$$

На рис. 9.19 представлено распределение температуры $T(x)$ на нижнем краю волны для случая больцмановской зависимости, $l(T) = \text{const exp}(I/kT)$. В качестве масшта-

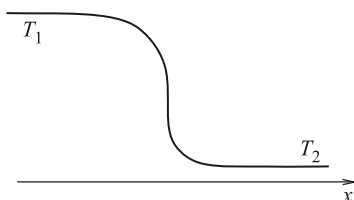


Рис. 9.20. Профиль температуры в волне охлаждения

Если отвлечься от растянутости верхнего края волны, которая несущественно сказывается на режиме охлаждения воздуха (так как поток и дивергенция потока, определяющая охлаждение на верхнем краю, очень малы), то геометрическая ширина

¹⁾ Поскольку на самом деле $l(T_2) \neq \infty$, температура на нижнем краю стремится к величине T_2 не асимптотически, а с отличным от нуля наклоном. Поэтому начало координат $x = 0$ можно поместить в точку, где $\tau = 0$, $T = T_2$.

уступа составит, как видно из рис. 9.19, несколько десятых долей длины пробега $l(T_2)$. При $T_2 \sim 10\,000$ К и $l_2 \sim 10$ м ширина волны оказывается порядка нескольких метров, т. е. волна охлаждения, распространяющаяся по большому объему воздуха радиусом в сотню метров, действительно узкая и может рассматриваться как разрыв температуры и плотности вещества (но не давления, которое меняется мало на протяжении волны).

§ 16. Учет адиабатического охлаждения. В предыдущих параграфах путем искусственного обрезания поглощения при температуре прозрачности T_2 ($l = \infty$ при $T < T_2$) была исключена из рассмотрения область охлажденного воздуха с температурами ниже температуры прозрачности. В действительности в этой области поглощение хотя и малó, но все же конечно, поэтому естественно поинтересоваться тем, как ведет себя температура в зоне охлажденного газа и что происходит с потоком излучения, выходящим с фронта волны. Процесс в этой области является существенно нестационарным, он зависит от конкретных условий: размеров, гидродинамического движения, механизмов поглощения света. Мы рассмотрим здесь тот практически важный случай, когда волна охлаждения распространяется не по неподвижному, а по расширяющемуся воздуху, и воздух, охлажденный излучением, продолжает охлаждаться адиабатически. Адиабатическое охлаждение быстро выводит воздух в температурную зону полной прозрачности, которая уже не оказывает никакого влияния на режим волны охлаждения. На протяжении сравнительно небольшого времени, пока адиабатически охлаждающийся воздух еще сколько-нибудь заметно поглощает свет, скорость адиабатического охлаждения меняется мало. Поэтому процесс с адиабатическим охлаждением приближенно можно считать стационарным и описывать его энергетическим уравнением (9.10) с постоянным членом A . Интеграл этого уравнения имеет вид

$$u\varrho_1 c_p T + S = -Ax + \text{const.} \quad (9.26)$$

Константа интегрирования здесь произвольна, так как она определяется просто выбором начала отсчета координаты x ; ее можно положить равной нулю.

На верхнем краю волны при $x \rightarrow -\infty$ поток $S \rightarrow 0$. Может показаться, что это искусственно налагаемое условие противоречит факту существования градиента температуры, связанного с наличием адиабатического охлаждения. Однако предполагается, что длина пробега $l(T)$ столь быстро убывает с ростом температуры, что $S \sim -l(T)T^3 \frac{dT}{dx}$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, что физически оправдано, так как поток лучистой теплопроводности изнутри, из зоны горячего воздуха, очень мал. На нижнем краю волны при $x \rightarrow +\infty$ поток стремится к постоянной величине S_0 — потоку, уходящему на бесконечность¹⁾. Поэтому температура в волне при $x \rightarrow \pm\infty$ асимптотически стремится к двум прямым:

$$\begin{aligned} u\varrho_1 c_p T &= -Ax & \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ u\varrho_1 c_p T &= -Ax - S_0 & \text{при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Эти прямые сдвинуты по ординате на величину S_0 (на рис. 9.21 сдвинуты на отрезок $S_0/u\varrho_1 c_p$). Задача заключается в определении этой величины S_0 . Мы не будем излагать здесь математического решения (см. [17]), ограничимся качественным рассмотрением хода процесса.

¹⁾ Этот поток, как мы увидим ниже, несколько отличен от потока S_2 , уходящего с эффективным образом определенной поверхности фронта волны.

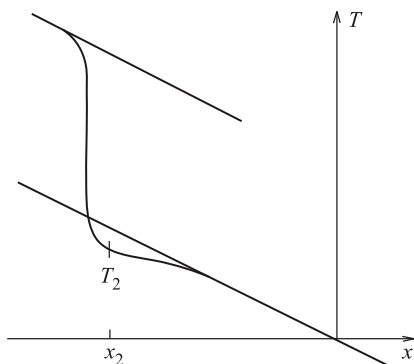


Рис. 9.21. Профиль температуры в волне охлаждения при учете адиабатического охлаждения

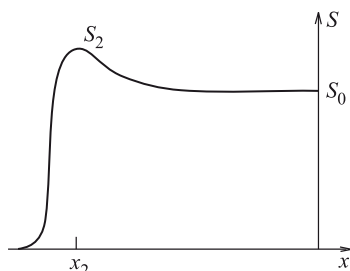


Рис. 9.22. Распределение потока излучения в волне охлаждения при учете адиабатического охлаждения

Проследим за последовательным изменением состояния частицы газа, вступающей в волну охлаждения, т. е. будем продвигаться из $-\infty$ в положительном направлении оси x (рис. 9.21). Сначала, при очень больших температурах, лучистая теплопроводность ничтожна, и частица охлаждается чисто адиабатически, температура ее понижается вдоль верхней прямой. Затем частица начинает все больше и больше охлаждаться излучением и температура ее спускается ниже верхней прямой. Плотность излучения в частице при этом меньше равновесной (частица испускает света больше, чем поглощает), и поток излучения в ней растет.

В этой стадии скорость лучистого охлаждения значительно больше скорости адиабатического, и температура круто падает (частица проходит через волну охлаждения). Так продолжается до тех пор, пока частица не охладится до столь низкой температуры, что скорость лучистого теплообмена не станет меньше скорости адиабатического охлаждения.

Вследствие чрезвычайно резкого падения поглощения (и испускания) с понижением температуры уже небольшое адиабатическое охлаждение после этого момента делает частицу совсем прозрачной и лучистый теплообмен вовсе прекращается.

При этом плотность излучения, которая определяется потоком, рождающимся в более нагретых слоях и проходящим через частицы, остается, почти неизменной. Равновесная же плотность излучения, пропорциональная T^4 , быстро уменьшается. Поэтому в «прозрачной» области, в отличие от «непрозрачной», плотность излучения больше равновесной, поглощение превышает испускание, и частица нагревается излучением; поток излучения ослабляется, как показано на рис. 9.22¹⁾.

Следовательно, на оси x существует такая точка $x = x_2$ (соответствующие ей температуру и поток обозначим через T_2 , S_2), которая разделяет области «непрозрачного» воздуха, интенсивно охлаждающегося излучением, и почти прозрачного воздуха, слабо нагревающегося излучением. В этой точке плотность излучения в точности равна равновесной $U_2 = U_{p2}$, дивергенция потока равна нулю и поток максимален $S_{\max} = S_2$.

¹⁾ Эта ситуация несколько напоминает положение во фронте ударной волны с излучением: за ударным разрывом плотность излучения меньше равновесной, газ охлаждается излучением и посылает поток в область перед разрывом, где поток поглощается, плотность излучения выше равновесной, и газ нагревается.

Естественно эту точку, в которой прекращается охлаждение воздуха излучением, считать нижней границей волны охлаждения, температуру в ней T_2 — температурой прозрачности, а поток S_2 — потоком, выходящим с поверхности фронта волны. Поглощение этого потока в «прозрачной» зоне невелико, так что на бесконечность уходит поток S_0 , лишь немного меньший, чем S_2 .

Профили температуры и потока $T(x)$, $S(x)$, отвечающие описанной картине, изображены на рис. 9.21, 9.22. При низких температурах кривая $T(x)$ проходит ниже нижней асимптотической прямой, приближаясь к ней снизу, так как газ нагревается излучением: максимум потока лежит в точке, где температура сильнее всего отклоняется от прямой вниз (это следует из уравнения (9.26)).

Можно показать, что поток S_2 связан с температурой прозрачности тем же соотношением, что и в волне без адиабатического охлаждения $S_2 = 2\sigma T_2^4$. Что касается самой температуры прозрачности, то ее можно оценить из условия, что при температуре, близкой к T_2 , скорость лучистого охлаждения сравнивается со скоростью адиабатического охлаждения A , чем приближенно и определяется нижний край волны.

Температура T_2 зависит от произвольно задаваемой величины A только логарифмически в силу экспоненциальной зависимости $l(T)$, подобно тому как раньше она логарифмически зависела от произвольно задаваемого характерного масштаба длины d (согласно условию $l(T_2) = d$). В данном случае характерным масштабом служит расстояние, на котором температура падает вследствие адиабатического охлаждения от величины T_2 до нуля, что, кстати, и определяет положение нижнего края волны, т. е. координату x_2 . Фактически для определения температуры прозрачности остается условие $l(T_2) \approx d$, только теперь задается не сама величина d , а величина A , с которой связан масштаб d .

Глава X

ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ

§ 1. Теплопроводность вещества. Если тело нагрето неравномерно или же в нем происходит выделение энергии, то появляется поток тепла, переносимый путем теплопроводности. Теплопроводность способствует распространению энергии и выравниванию температуры. Наряду с градиентами температуры, вообще говоря, возникают и градиенты давления, благодаря чему вещество приходит в движение. Во многих случаях гидродинамический перенос энергии преобладает над теплопроводным. Однако часто движение и гидродинамический перенос энергии несут существенны и тепло от источников распространяется только путем теплопроводности. При невысоких температурах механизмом переноса тепла является обычная теплопроводность вещества.

При обычной теплопроводности тепловые возмущения распространяются в среде сравнительно медленно (в дальнейшем это будет показано на примере газа). Небольшие возмущения давления распространяются со звуковой скоростью, за счет некоторого перераспределения плотности, и давление выравнивается гораздо скорее, чем температура. Если изменения температуры в среде невелики, скорости движения вещества гораздо меньше скорости звука и при изучении распространения тепла путем теплопроводности движением вещества часто можно пренебречь, считая, что процесс происходит при постоянном давлении.

Уравнение баланса энергии при этом имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S} + W, \quad (10.1)$$

где ρ — плотность, которую приближенно можно считать постоянной; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; $\mathbf{S}$ — вектор потока тепла; W — энерговыделение в 1 см^3 в 1 с за счет посторонних источников.

Теплопроводный поток тепла в первом приближении пропорционален градиенту температуры:

$$\mathbf{S} = -\kappa \operatorname{grad} T, \quad (10.2)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, зависящий от свойств вещества. Подставляя выражение (10.2) в уравнение баланса энергии (10.1), получим общее уравнение теплопроводности, которое описывает температуру среды в зависимости от координат и времени:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) + W. \quad (10.3)$$

В не слишком большом диапазоне температур коэффициент теплопроводности и теплоемкость вещества меняются мало и практически постоянны. Уравнение теп-

лопроводности (10.3) при этом является линейным (за исключением случаев, когда энерговыделение W зависит от температуры нелинейным образом).

При $\varkappa = \text{const}$ имеем

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T + W. \quad (10.4)$$

Если разделить уравнение теплопроводности (10.4) на ϱc_p , оно принимает форму, в которой свойства вещества характеризуются только одним параметром, коэффициентом температуропроводности $\chi = \varkappa / \varrho c_p$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T + q, \quad q = \frac{W}{\varrho c_p}. \quad (10.5)$$

В газах коэффициент температуропроводности приближенно равен коэффициенту диффузии молекул:

$$\chi = \frac{l_a \bar{v}}{3},$$

где l_a — длина пробега молекул, а $\bar{v}$ — их средняя тепловая скорость; например, в воздухе при нормальных условиях $\chi = 0,205 \text{ см}^2/\text{с}$. В жидкостях и твердых телах механизмы теплопроводности более сложны. На этом вопросе мы здесь останавливаться не будем. Укажем, что в воде при комнатной температуре $\chi = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$.

К уравнению теплопроводности следует добавить начальные и граничные условия. В начальный момент задается распределение температуры в среде:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z). \quad (10.6)$$

На границах двух сред 1 и 2 с разными свойствами непрерывен поток тепла

$$(\varkappa \text{ grad } T)_1 = (\varkappa \text{ grad } T)_2. \quad (10.7)$$

На границах рассматриваемого тела задаются как функции времени температура или поток тепла или, в общем случае, связь между ними.

Математическая теория линейной теплопроводности, которая занимается решением уравнения (10.5) применительно к различным конкретным задачам, хорошо разработана и широко применяется в самых различных областях физики и техники.

§ 2. Нелинейная (лучистая) теплопроводность. При высоких температурах порядка десятков и сотен тысяч градусов появляется совершенно иной механизм переноса тепла — лучистая теплопроводность. С процессом лучистой теплопроводности мы подробно ознакомились в гл. II, а также в гл. VII и IX, где рассматривались задачи о структуре фронта очень сильной ударной волны и об охлаждении воздуха излучением.

Существенное отличие лучистой теплопроводности от обычной заключается в том, что коэффициент лучистой теплопроводности сильно зависит от температуры, благодаря чему уравнение теплопроводности является нелинейным.

Поток тепла, переносимый механизмом лучистой теплопроводности, равен (см. формулу (2.76)):

$$\mathbf{S} = -\frac{lc}{3} \text{ grad } U_p = -\frac{lc}{3} \text{ grad } \frac{4\sigma T^4}{c}, \quad (10.8)$$

где $U_p = 4\sigma T^4/c$ — плотность энергии равновесного излучения, а l — расселандов пробег света¹⁾. Поток энергии (10.8) можно записать через градиент температуры

¹⁾ Напоминаем, что перенос излучения имеет характер теплопроводности, если плотность энергии излучения в каждой точке среды близка к равновесной. Для этого нужно, чтобы размеры нагретой области значительно превышали длину пробега излучения.

в виде (10.2), если определить коэффициент лучистой теплопроводности формулой

$$\kappa = \frac{lc}{3} \frac{dU_p}{dT} = \frac{16\sigma T^3 l}{3}. \quad (10.9)$$

Коэффициент лучистой теплопроводности зависит от температуры как за счет пропорциональности теплоемкости излучения $c_{\text{изл}} = dU_p/dT \sim T^3$, так и вследствие зависимости от температуры пробега излучения l .

При лучистом механизме теплопроводности энергия может распространяться со скоростью гораздо большей, чем скорость звука в веществе. Это связано с тем, что скорость света при нерелятивистских температурах во много раз больше скорости звука. Если в теле произошло выделение энергии и вещество нагревается до достаточно высокой температуры, то эта энергия вначале быстро растекается путем лучистой теплопроводности. Пока скорость распространения тепла гораздо больше скорости звука, вещество не успевает прийти в движение, давление в нем не успевает выравниваться и тепло растекается по неподвижному веществу. В дальнейшем будет дана оценка условий, при которых возникает движение. Мы будем рассматривать здесь распространение тепла путем лучистой теплопроводности только в неподвижной среде, плотность которой не меняется с течением времени.

Баланс энергии по-прежнему описывается уравнением (10.1) или (10.3) (но не (10.4), так как $\kappa \neq \text{const}$), с той лишь разницей, что вместо теплоемкости при постоянном давлении c_p в уравнение следует подставлять теплоемкость при постоянном объеме c_v . При этом предполагается, что плотностью энергии излучения U_p можно пренебречь по сравнению с плотностью энергии вещества $\varrho \varepsilon(T)$.

Если приближенно рассматривать теплоемкость c_v как величину, не зависящую от температуры, и разделить уравнение теплопроводности на ϱc_p , получим уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\chi \text{ grad } T) + q, \quad (10.10)$$

соответствующее уравнению (10.5). Коэффициент лучистой температуропроводности χ равен

$$\chi = \frac{\kappa}{\varrho c_v} = \frac{lc}{3} \frac{c_{\text{изл}}}{\varrho c_v}. \quad (10.11)$$

Имеется глубокая параллель между этой величиной и коэффициентом обычной температуропроводности газа $\chi = l_a \bar{v}/3$. Последний совпадает с коэффициентом диффузии молекул, являющихся переносчиками тепла.

При лучистой теплопроводности нагревается и охлаждается вещество, а переносчиком энергии служит излучение, которое играет роль «посредника». Поэтому коэффициент лучистой температуропроводности не просто равен коэффициенту диффузии излучения $lc/3$, но пропорционален еще и отношению теплоемкостей излучения и вещества.

Во многих случаях длину пробега квантов l приближенно можно считать степенной функцией температуры (плотность среды считаем постоянной):

$$l = AT^m, \quad m > 0. \quad (10.12)$$

В полностью ионизованном газе, где механизм излучения и поглощения света чисто тормозной, $m = 7/2$. В области многократной ионизации газов $m \sim 1,5-2,5$.

При степенном законе (10.12) коэффициент лучистой теплопроводности также представляется степенной функцией:

$$\kappa = \frac{16\sigma A}{3} T^n = BT^n, \quad n = m + 3, \quad (10.13)$$

причем показатель $u \sim 4,5-5,5$ в области многократной ионизации. В том приближении, в котором теплоемкость газа считается постоянной, приходим к уравнению (10.10) с коэффициентом лучистой температуропроводности, равным

$$\chi = \frac{\varkappa}{\rho c_V} = \frac{B}{\rho c_V} T^n = a T^n. \quad (10.14)$$

Уравнение нелинейной теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \operatorname{div} (T^n \operatorname{grad} T) + q. \quad (10.15)$$

Обычно при высоких температурах в области многократной ионизации удельные теплоемкость и внутреннюю энергию газа можно аппроксимировать степенными функциями температуры:

$$\varepsilon = \alpha T^{k+1}, \quad c_V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = (k+1) \alpha T^k,$$

где α — константа, а k — величина, равная примерно 0,5 (см. § 8 гл. III). При степенном законе теплоемкости уравнение теплопроводности также можно привести к виду (10.15). Введем вместо температуры в качестве неизвестной функции внутреннюю энергию единицы объема

$$E = \rho \alpha T^{k+1}, \quad T = \left(\frac{E}{\rho \alpha} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} = a' \operatorname{div} (E^{n'} \operatorname{grad} E) + q', \quad (10.16)$$

где

$$n' = \frac{n-k}{k+1}, \quad a' = \frac{B}{(k+1)(\rho \alpha)^{(n+1)/(k+1)}}, \quad q' = W. \quad (10.17)$$

Уравнение (10.16) не отличается от уравнения (10.15), совпадают и их решения. Чтобы перейти от решения уравнения (10.15) $T = T(x, y, z, t)$ для какой-нибудь конкретной задачи к решению уравнения (10.16) $E = E(x, y, z, t)$ для той же задачи, следует только заменить константы a и n на a' и n' , а также заменить функцию источника q на $q' = W = q \rho c_V$. Заметим, что при $n = 5$ и $k = 0,5$ $n' = 3$.

В дальнейшем для удобства сопоставления выводов теорий нелинейной и линейной теплопроводностей мы будем исходить из уравнения (10.15) для температуры. При этом будем иметь в виду, что найденное решение любой конкретной задачи можно сразу же записать и для случая степенной зависимости теплоемкости от температуры.

Помимо лучистой теплопроводности, которая представляет наибольший интерес, существует еще один пример нелинейной теплопроводности. Это — электронная теплопроводность в плазме, о которой шла речь в § 12 гл. VII. (Ионная теплопроводность плазмы также сильно зависит от температуры, но она играет значительно меньшую роль, чем электронная.) Коэффициент электронной температуропроводности $\chi_e \sim T_e^{5/2}$.

Интересно, что нелинейным уравнением теплопроводности типа (10.15) описывается совершенно иной процесс, а именно движение политропического газа (давление и плотность которого связаны уравнением $p = \text{const } \varrho^n$) в пористой среде. Плотность газа ϱ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = b \operatorname{div} (\varrho^n \operatorname{grad} \varrho),$$

где n — показатель политропы, а b — константа, которая определяется пористостью и проницаемостью среды и свойствами фильтрующегося газа.

Конкретным задачам нелинейной теплопроводности соответствуют такие же задачи теории фильтрации.

Процессы нелинейной теплопроводности впервые рассматривались Я. Б. Зельдовичем и А. С. Компанейцем [1], которые, в частности, нашли точное решение задачи о распространении тепла от мгновенного плоского источника. Соответствующие вопросы теории фильтрации независимо исследовал Г. И. Баренблатт [2]. Он получил то же самое решение для случая мгновенного сосредоточенного источника, а также решил ряд других конкретных задач.

§ 3. Особенности распространения тепла при линейной и нелинейной теплопроводностях. Основные черты процесса нелинейной теплопроводности и особенно, отличающие его от процесса линейной теплопроводности, лучше всего выяснить на примере задачи о распространении в неограниченной первоначально холодной среде тепла от мгновенного плоского источника энергии. Пусть в начальный момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ выделилась энергия $\mathcal{E}$ на 1 см^2 поверхности ($\mathcal{E}$ в эрг/см²). В последующие моменты тепло растекается в обе стороны от плоскости $x = 0$.

Уравнение теплопроводности (10.10) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10.18)$$

причем распределение температуры в пространстве подчиняется условию сохранения энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} T \, dx = Q. \quad (10.19)$$

Величина Q равна $\mathcal{E}/\rho c_p$, если процесс происходит при постоянном давлении, и $\mathcal{E}/\rho c_v$ — если постоянен удельный объем.

В данном случае два уравнения, (10.18) и (10.19), эквивалентны одному уравнению теплопроводности (10.10) с дельтаобразным источником (как по времени, так и по координате):

$$q(x, t) = Q \delta(x) \delta(t).$$

В начальный момент $t = 0$ температуру среды считаем тождественно равной нулю везде, кроме точки, где произошло энерговыделение:

$$T(x, 0) = Q \delta(x).$$

Решение поставленной задачи в случае линейной теплопроводности $\chi = \text{const}$ хорошо известно. Оно дается выражением

$$T = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\chi t}} e\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right). \quad (10.20)$$

Характерное свойство линейной теплопроводности состоит в том, что тепло сосредоточено в точке энерговыделения только в начальный момент $t = 0$ (при $x = 0$ $T \rightarrow \infty$ как $t^{-1/2}$). В последующие моменты времени тепло мгновенно распространяется на все пространство и температура стремится к нулю на бесконечности, при $x \rightarrow \pm\infty$, лишь асимптотически. Основное количество энергии сосредоточено в области с размерами порядка $x \sim \sqrt{4\chi t}$, которая растет с течением времени пропорционально $\sqrt{t}$. Соответственно как $1/\sqrt{t}$ падает и температура, так что полное количество тепла,

пропорциональное $\int T dx \sim T x \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{t} \sim 1$, остается постоянным. Распределение температуры в последовательные моменты времени показаны на рис. 10.1.

Асимптотический характер убывания температуры на бесконечности и мгновенность распространения тепла на неограниченное расстояние в рамках теплопроводностной теории связано с конечностью коэффициента теплопроводности при нулевой температуре.

Практически, конечно, на большое расстояние к данному моменту времени проникает лишь ничтожно малое количество тепла; закон спада температуры на бесконечности крайне резкий, гауссов; однако в принципе на любом, сколь угодно большом, но конечном расстоянии от источника повышение температуры сразу же после момента энергоснабжения отлично от нуля. Следует заметить, что гауссов закон спада температуры на бесконечности связан с приближенным описанием распространения тепла в рамках теплопроводностной теории. В действительности на больших расстояниях температура определяется не диффузией «горячих» молекул из нагретой области (в газе), а прямыми, «прострельными» молекулами, попадающими из нагретой области на большие расстояния, не испытывая при этом ни одного соударения. Поэтому на самом деле на бесконечности закон спада температуры не гауссов (10.20), а только экспоненциальный, $T \sim e^{-x/l_a}$, где l_a — длина пробега молекулы. Ясно, что при любом предэкспоненциальном множителе на данный момент времени простая экспонента $\exp(-x/l_a)$ в конце концов станет больше, чем гауссова экспонента $\exp(-x^2/4\chi t)$ ($\chi = l_a \bar{v}/3$). Однако в этой области на больших расстояниях заключается столь ничтожное количество тепла, что рассмотрение ее не представляет никакого интереса. Проверим предположение о возможности пренебречь движением вещества.

Если среда газовая, от места энергоснабжения (в данном случае от плоскости $x = 0$) распространяется волна сжатия (или ударная волна). Скорость ее распространения по невозмущенному веществу порядка скорости звука в нагретой области, т. е. порядка тепловой скорости нагретых молекул $\bar{v}$. Скорость распространения тепла путем теплопроводности

$$\frac{dx}{dt} \sim \frac{d}{dt} \sqrt{\chi t} \sim \sqrt{\frac{\chi}{t}} \sim \frac{\chi}{x} \sim \frac{l_a \bar{v}}{x},$$

т. е. как только тепло распространится на расстояние, большее среднего пробега молекул, скорость теплопроводностная станет меньше скорости гидродинамической. Поскольку вообще нет смысла рассматривать расстояния, меньшие пробега молекул, постольку можно считать, что тепло распространяется всегда с дозвуковой скоростью. Если количество выделившейся энергии невелико, волна сжатия слабая, скорость вещества мала по сравнению со скоростью звука. Можно считать, как это и было отмечено с самого начала, что роль гидродинамики сводится просто к выравниванию давления, и процесс распространения тепла идет при постоянном давлении.

Если же энергоснабжение велико и волна сжатия, уйдя на значительное расстояние от места энергоснабжения, является ударной, то мы имеем дело с чисто

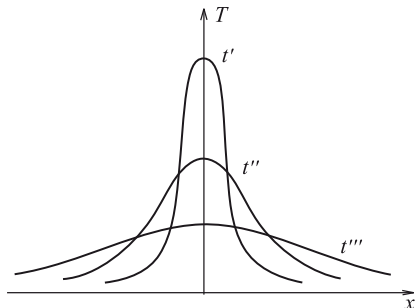


Рис. 10.1. Распространение тепла от мгновенного плоского источника при линейной теплопроводности

гидродинамическим процессом сильного взрыва, который рассматривался в § 25 гл. I; роль теплопроводности вещества в распространении энергии оказывается несущественной.

Пусть теперь коэффициент теплопроводности зависит от температуры, причем он уменьшается с падением температуры и обращается в нуль при нулевой температуре, как это имеет место при лучистой теплопроводности. В этом случае тепло не может

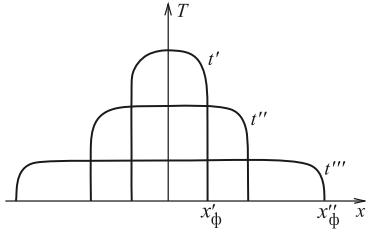


Рис. 10.2. Распространение тепловой волны от мгновенного плоского источника

мгновенно проникнуть на сколь угодно большие расстояния, а распространяется от источника с конечной скоростью таким образом, что существует четкая граница, отделяющая нагретую область от холодной, до которой еще не дошло тепловое возмущение. Тепло распространяется от источника в виде волны, фронтом которой является указанная граничная поверхность. Такую волну называют тепловой. Распределение температуры в тепловой волне в последовательные моменты времени схематически показано на рис. 10.2. В холодной невозмущенной среде температура и поток тепла равны нулю, поскольку

обращается в нуль коэффициент теплопроводности. В силу непрерывности поток на фронте волны также обращается в нуль. При линейной теплопроводности, когда $\chi = \text{const}$, обращение в нуль потока тепла может быть связано только с исчезновением градиента температуры. При нелинейной теплопроводности с коэффициентом, убывающим до нуля при $T \rightarrow 0$, поток может исчезать и при отличном от нуля градиенте температуры, только за счет обращения в нуль коэффициента теплопроводности. С этим обстоятельством, в частности, и связано возникновение резкого фронта тепловой волны.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим слой вблизи фронта волны. Если ограничиться небольшими временами, в течение которых волна распространяется на расстояния, малые по сравнению с размером области, охваченной волной, т. е. с координатой фронта x_ϕ (см. рис. 10.2), то в течение такого времени скорость фронта можно приближенно считать постоянной.

Распределение температуры вблизи фронта можно искать в виде стационарной волны $T = T(x - vt)$, где v — скорость фронта. Профиль температуры вблизи фронта квазистационарен в системе координат, связанной с фронтом.

Подставляя в уравнение (10.18) решение в виде $T = T(x - vt)$, получим для профиля температуры вблизи фронта уравнение

$$-v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (10.21)$$

Полагая $\chi = aT^n$ ($n > 0$) и интегрируя дважды это уравнение с граничным условием $T = 0$ при $x = x_\phi$, получим профиль температуры:

$$T = \left[\frac{nv}{a} |x_\phi - x| \right]^{1/n}. \quad (10.22)$$

Он и показан схематически на рис. 10.2.

Координата фронта x_ϕ и скорость фронта $v = dx_\phi/dt$ в этой формуле представляют собой неопределенные функции времени. Они находятся путем решения полной задачи для всего пространства.

То, что температура обращается в нуль по закону (10.22), подтверждает и справедливость утверждения о существовании резкой границы прогретой области —

фронта тепловой волны. Если показатель $n \leq 0$, коэффициент температуропроводности χ не обращается в нуль при $T = 0$ и уравнение (10.21) не имеет решений, обращающихся в нуль на конечном расстоянии, что и соответствует мгновенному характеру распространения тепла на сколь угодно большие расстояния.

Из формулы (10.22) следует, что градиент температуры вблизи фронта тепловой волны $dT/dx \sim |x_\Phi - x|^{\frac{1}{n}-1}$.

Если $n > 1$, градиент температуры на фронте (при $x = x_\Phi$) обращается в бесконечность — фронт крутой. Если $n < 1$, $(dT/dx)_{x_\Phi} = 0$. Поток же всегда равен нулю при $x = x_\Phi$: $S \sim T^n dT/dx \sim |x_\Phi - x|^{1/n} \rightarrow 0$ при $n > 0$.

В § 12 и 17 гл. VII при рассмотрении структуры фронта ударной волны с учетом электронной и лучистой теплопроводностей было показано, как перед скачком уплотнения, который распространяется по газу, вырывается «язык» прогрева за счет теплопроводности.

Профиль температуры перед скачком описывается формулой (10.22) (если движением газа перед скачком можно пренебречь), причем скорость v представляет собой скорость движения фронта ударной волны. Профиль имеет вид, показанный на рис. 10.3, а. «Язык» вырывается на вполне определенное, конечное расстояние $\Delta x = x_\Phi - x_1$ (рис. 10.3, а), которое зависит от температуры T_1 на скачке уплотнения:

$$T_1 = \left(\frac{nv}{a} \Delta x \right)^{1/n}, \quad \Delta x = \frac{a T_1^n}{nv} = \frac{\chi(T_1)}{nv} = \frac{\chi_1}{nv}.$$

В случае линейной теплопроводности $\chi = \text{const}$, «язык» прогрева простирается до бесконечности, хотя эффективная ширина его конечна и постоянна (при постоянной скорости движения ударной волны). Решение уравнения (10.21) при $\chi = \text{const}$ имеет в этом случае вид

$$T = T_1 \exp \left(-\frac{x - x_1}{\Delta x'} \right), \quad \Delta x' = \frac{\chi}{v}.$$

Профиль температуры в прогревном слое показан на рис. 10.3, б. Как уже отмечалось, температура обращается в нуль только на бесконечности.

При молекулярной теплопроводности закон спада температуры на бесконечности за счет «прострельных» молекул отличается от того, который диктуется теплопроводностной теорией, не принимающей во внимание движение отдельных молекул. Подобно этому и при переносе тепла излучением профиль тепловой волны вблизи границы имеет вид (10.22) только в рамках приближения лучистой теплопроводности. Если учесть существование «прострельных» квантов, т. е. неравновесность излучения на переднем краю волны, мы придем к экспоненциальному закону спада температуры на переднем краю тепловой волны: $T \sim e^{-x/l}$, где l — длина пробега излучения. Этот эффект был подробно изучен в разд. 3 гл. VII при рассмотрении структуры фронта ударной волны с учетом переноса излучения.

До сих пор мы рассматривали распространение тепла в среде с нулевой начальной температурой. Если $T_0 \neq 0$, то коэффициент нелинейной теплопроводности в невоз-

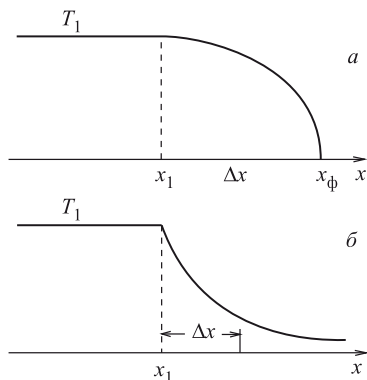


Рис. 10.3. Теплопроводностный прогрев перед скачком уплотнения: а) при нелинейной теплопроводности; б) при линейной теплопроводности

мущенном веществе конечен и закон спадания температуры отличен от (10.22); однако практически при небольших начальных температурах коэффициент лучистой теплопроводности при $T = T_0$ столь мал, что этим эффектом можно пренебречь. Гораздо существеннее отмеченная выше неравновесность излучения на переднем краю тепловой волны, которая приводит к экспоненциальному спаду температуры $T \sim e^{-x/l}$ вместо степенного закона (10.22).

Отметим еще одно существенное отличие нелинейной теплопроводности от линейной. В линейном случае имеет место принцип суперпозиции. Если имеется совокупность источников энергии, тепло от каждого из них растекается совершенно независимым образом. Решение уравнения теплопроводности при наличии протяженных источников можно представить в виде интеграла «по источникам» от решений, соответствующих сосредоточенным источникам. При нелинейной теплопроводности принцип суперпозиции несправедлив. Распространение тепла от одного источника зависит от температуры, до которой нагреется среда, за счет теплового возмущения, идущего от другого источника. В общем случае протяженных источников решение нельзя представить в виде интеграла по источникам.

§ 4. Закон распространения тепловой волны от мгновенного плоского источника. Закон распространения тепла от источника легко получить и без точного решения уравнения путем оценки порядка величины характерного размера нагретой области, либо же из размерностных соображений. Задачи о распространении тепла от мгновенного сосредоточенного источника (плоского, точечного, нитевого) решаются точно (см. ниже). Однако подобные полукачественные оценки делают весьма наглядным физический смысл закономерностей и, кроме того, часто бывают полезными при рассмотрении более сложных задач, для которых точные решения найти не удастся.

Рассмотрим распространение тепла от плоского мгновенного источника. Результаты для случая линейной теплопроводности были уже изложены в предыдущем параграфе, где приводилось точное решение задачи. Для того чтобы продемонстрировать общий ход полукачественных рассуждений, мы повторим эти результаты снова. Пусть коэффициент теплопроводности постоянен.

В уравнение (10.18) входит один-единственный параметр — коэффициент температуропроводности χ см²/с. Другим размерным параметром является энергия на 1 см²: $\mathcal{E}$ эрг/см² поверхности или же величина Q град·см. Если x — ширина области, в которой сосредоточено основное количество тепла к моменту t , то из соображений размерности ясно, что $x^2 \sim \chi t$, $x \sim \sqrt{\chi t}$. Скорость распространения тепла $dx/dt \sim \sqrt{\chi}/t \sim \chi/x \sim x/t$. Средняя температура в нагретой области порядка $T \sim Q/x \sim Q/\sqrt{\chi t}$. Эти простые результаты, которые совпадают по порядку величины с тем, что дает точное решение задачи (10.20), можно получить и непосредственно из уравнения (10.18). Заменяя в нем производные $\partial T/\partial t$, $\partial T/\partial x$ равными им по порядку величины отношениями $\frac{T}{t}$, $\frac{T}{x}$, а $\frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial T}{\partial x}$ заменяя на $\frac{\chi T}{x^2}$, немедленно приходим к тем же самым закономерностям.

Обратимся теперь к случаю распространения нелинейной тепловой волны. Для коэффициента температуропроводности примем степенную зависимость $\chi = aT^n$, при которой уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} T^n \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (10.23)$$

В уравнение входит единственный параметр a см²/с·Кⁿ. Другой размерный параметр — это Q К·см. Из них можно составить единственную (независимую) размерную комбинацию, содержащую только длину и время: aQ^n смⁿ⁺² с⁻¹. Отсюда

следует закон движения фронта тепловой волны:

$$x_{\Phi} \sim (aQ^n t)^{\frac{1}{n+2}} = (aQ^n)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{1}{n+2}}.$$

Скорость распространения тепловой волны порядка

$$\frac{dx_{\Phi}}{dt} \sim (aQ^n)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{1}{n+2}-1} \sim \frac{x_{\Phi}}{t} \sim \frac{aQ^n}{x_{\Phi}^{n+1}}.$$

Видно, что при большом показателе n тепловая волна очень быстро замедляется по мере распространения. Это связано с тем, что при распространении тепла температура падает и очень резко уменьшается коэффициент температуропроводности. Имея в виду, что средняя температура в тепловой волне порядка $T \sim Q/x_{\Phi}$, а средний коэффициент температуропроводности $\chi = aT^n \sim aQ^n/x_{\Phi}^n$, можно записать закон распространения тепловой волны в форме, соответствующей линейной теории: $x_{\Phi} \sim \sqrt{\chi t}$. При этом следует иметь в виду, что средний коэффициент температуропроводности в этой формуле сам зависит от времени по закону

$$\chi \sim \frac{aQ^n}{x_{\Phi}^n} \sim \frac{aQ^n}{(aQ^n)^{\frac{n}{n+2}} t^{\frac{n}{n+2}}} = (aQ^n)^{\frac{2}{n+2}} t^{-\frac{n}{n+2}}.$$

Закон распространения тепловой волны можно получить и из уравнения теплопроводности, заменяя приближенно производные отношениями величин: $\partial T/\partial t \rightarrow T/t$; $\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \frac{T}{x_{\Phi}}$; $\frac{\partial}{\partial x} T^n \frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow \frac{T^{n+1}}{x_{\Phi}^2}$. Получим таким образом $x_{\Phi}^2 \sim aT^n t \sim \chi t$; воспользовавшись соотношением $T \sim Q/x_{\Phi}$, придем к уже найденным законам.

§ 5. Автомодельная тепловая волна от мгновенного плоского источника. Найдем точное решение плоской задачи о распространении тепловой волны в неограниченной среде при мгновенном выделении энергии в момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$. Процесс описывается нелинейным уравнением теплопроводности (10.23), причем решение удовлетворяет закону сохранения энергии (10.19).

Из размерностных соображений, изложенных в предыдущем параграфе, ясно, что решение поставленной задачи — автомодельное¹⁾. В самом деле, единственная безразмерная комбинация, которую можно составить из координаты x , времени t и параметров задачи a и Q , есть

$$\xi = \frac{x}{(aQ^n t)^{\frac{1}{n+2}}}. \quad (10.24)$$

Величина размерности температуры есть $\frac{Q}{(aQ^n t)^{\frac{1}{n+2}}} = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{\frac{1}{n+2}}$. Поэтому решение $T(x, t)$ следует искать в виде

$$T = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{\frac{1}{n+2}} f(\xi), \quad (10.25)$$

где $f(\xi)$ — новая неизвестная функция.

Подставляя выражение (10.25) в уравнение (10.23) и переходя к дифференцированию по автомодельной переменной, с помощью формул

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{n+2} \frac{df}{d\xi} \frac{\xi}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(aQ^n t)^{\frac{1}{n+2}}} \frac{df}{d\xi}$$

¹⁾ О понятии автомодельности см. § 11, 25 гл. I. См. также гл. XII.

получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции f :

$$(n+2) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f^n \frac{df}{d\xi} \right) + \xi \frac{df}{d\xi} + f = 0. \quad (10.26)$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условиям, которые следуют из физических условий задачи: $T = 0$ при $x = \pm\infty$ или $T = 0$ при $x = +\infty$ и $\partial T / \partial x = 0$ при $x = 0$ (в силу симметрии относительно плоскости $x = 0$). Отсюда

$$f(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty; \quad \frac{df}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (10.27)$$

Решение уравнения (10.26), удовлетворяющее условиям (10.27), было найдено в работах [1, 2]. Оно имеет вид

$$f(\xi) = \left[\frac{n}{2(n+2)} (\xi_0^2 - \xi^2) \right]^{1/n} = \left[\frac{n}{2(n+2)} \xi_0^2 \right]^{1/n} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right]^{1/n} \quad \text{при} \quad \xi < \xi_0, \\ f(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_0, \quad (10.28)$$

где ξ_0 — постоянная интегрирования. Постоянная ξ_0 находится из уравнения сохранения энергии (10.19), которое принимает вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi = \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} f(\xi) d\xi = 1. \quad (10.29)$$

Вычисление дает

$$\xi_0 = \left[\frac{(n+2)^{1+n} 2^{1-n}}{n\pi^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n(1/n)} \right]^{\frac{1}{n+2}} \quad (10.30)$$

(Γ — гамма-функция). Закон движения фронта тепловой волны $\xi = \xi_0$ есть

$$x_\Phi = \xi_0 (aQ^n t)^{\frac{1}{n+2}}. \quad (10.31)$$

Он, как и следовало ожидать, с точностью до численного коэффициента ξ_0 совпадает с законом, найденным в предыдущем параграфе из полукачественных соображений.

Температуру в плоской тепловой волне удобно представить в форме

$$T = T_c \left(1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right)^{1/n}, \quad (10.32)$$

где x_Φ — координата фронта, определяемая в зависимости от времени формулами (10.31), (10.30), а T_c — температура в плоскости $x = 0$. Ее можно выразить через среднюю температуру в волне (среднюю по нагретому объему):

$$T_c = \bar{T} / J, \quad (10.33)$$

где

$$\bar{T} = \frac{Q}{2x_\Phi}; \quad J = \int_0^1 (1 - z^2)^{1/n} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{n+2} \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Например, при $n = 5$, $\xi_0 = 0,77$ и $T_c = 1,12\bar{T}$.

При учете переменности теплоемкости профиль температуры отличается от (10.32) лишь очень немного. Действительно, профиль энергии есть

$$E = E_c \left(1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right)^{\frac{1}{n'}}.$$

Но $E \sim T^{1+k}$, $n' = (n - k)/(k + 1)$, откуда

$$T = T_c \left(1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Поскольку $n \sim 5$, $k \sim 0,5$, это выражение мало отличается от (10.32) (в первом случае показатель $1/n = 1/5$; во втором $1/(n - k) = 1/4,5$). Также мало отличается и новая константа $\xi_0(n')$ в законе распространения тепловой волны. Сам же закон распространения меняется сильнее. При $n = 5$ $k = 0$ (постоянная теплоемкость) $x_\Phi \sim t^{1/7}$; при $n = 5$ $k = 0,5$ (т. е. $c_V \sim T^{0,5}$), $x_\Phi \sim t^{\frac{1}{n'+2}} \sim t^{1/5}$.

Профиль температуры T/T_c в зависимости от x/x_Φ изображен на рис. 10.4, а для случая $n = 5$. Для тепловой волны с сильно зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности характерно существование «плато» температуры: температура почти постоянна, выравнена теплопроводностью во всей нагретой области, за исключением сравнительно тонкого слоя вблизи фронта, где она быстро падает до нуля. Такая тенденция выражается тем резче, чем больше показатель нелинейности n . Распределение потока по координате дается выражением

$$S \sim -T^n \frac{\partial T}{\partial x} \sim \left(1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right)^{1/n} x.$$

Поток почти линейно растет от начала $x = 0$ до самого края волны и быстро падает до нуля лишь вблизи края, как показано на рис. 10.4, б. Дивергенция потока $\partial S/\partial x$ почти постоянна во всей области плато. Основная область нагретого газа охлаждается почти равномерно и лишь около края волны газ нагревается за счет тепла, отнятого от основной массы газа (см. рис. 10.4, в).

Процесс распространения тепла идет таким образом, что объем нагретого газа почти равномерно охлаждается и потерянная им энергия поглощается около фронта волны, за счет чего волна и захватывает все новые и новые слои холодного газа.

Вблизи фронта распределение температуры приближенно можно представить в виде

$$T \sim \left(1 - \frac{x^2}{x_\Phi^2} \right)^{1/n} \sim \left[\frac{2}{x_\Phi} (x_\Phi - x) \right]^{1/n} \sim (x_\Phi - x)^{1/n},$$

что было уже найдено раньше (см. формулу (10.22)).

Устремим в решении (10.25), (10.28), (10.30) показатель n к пределу $n \rightarrow 0$, что соответствует переходу к линейной теплопроводности (постоянная a в уравнении

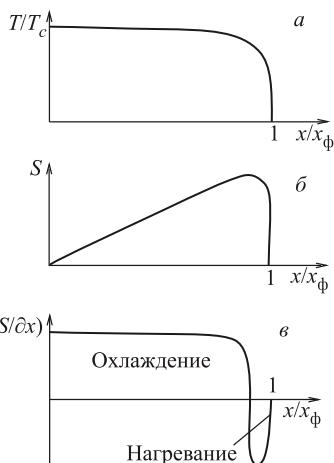


Рис. 10.4. Профили температуры, потока и дивергенции потока в тепловой волне

(10.23) в пределе $n = 0$ играет роль постоянного коэффициента температуропроводности $\chi = \text{const}$.

При $n \rightarrow 0$ $\xi_0 \rightarrow 2/\sqrt{n}$

$$T = \frac{Q}{\sqrt{at}} [f(\xi)]_{n \rightarrow 0} = \frac{Q}{\sqrt{at}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\left(1 - \frac{nx^2}{4at} \right)^{1/n} \right]_{n \rightarrow 0} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi at}} \exp \left(-\frac{x^2}{4at} \right), \quad a = \chi,$$

т. е. приходим к известному решению линейного уравнения теплопроводности (10.20).

В заключение этого параграфа отметим, что нелинейное уравнение второго порядка (10.26) допускает группу преобразований, оставляющих уравнение инвариантным. Действительно, легко проверить непосредственной подстановкой, что если ввести вместо ξ и f новую независимую переменную ξ' и функцию f' по формулам

$$\xi' = C^n \xi, \quad f' = C^2 f, \quad C = \text{const},$$

то в переменных ξ' , f' новое уравнение будет иметь такой же вид, как и (10.26). Согласно теореме Ли, порядок обыкновенного дифференциального уравнения, допускающего однопараметрическую группу преобразований, можно понизить на единицу. Для понижения порядка удобно ввести новые переменные:

$$y = \xi^{-2/n} f, \quad z = \ln \xi.$$

В этих переменных новое уравнение содержит z только под знаком дифференциала, так что можно ввести новую переменную $p = dy/dz$ и исключить z , получив уравнение первого порядка в переменных p, y :

$$y^n p \frac{dp}{dy} + np^2 y^{n-1} + \frac{4+3n}{n} p y^n + \frac{1}{n+2} p + \frac{4+2n}{n^2} y^{n+1} + \frac{y}{n} = 0.$$

Следовательно, задача решения уравнения второго порядка (10.26) сводится к решению уравнения первого порядка и квадратуре. Такое положение характерно для многих автомодельных задач теории нелинейной теплопроводности¹⁾.

§ 6. Распространение тепла от мгновенного точечного источника. Рассмотрим сферически-симметричную задачу. Пусть в момент $t = 0$ в точке $r = 0$ выделилась энергия $\mathcal{E}$ эрг. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \chi \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (10.34)$$

Закон сохранения энергии дает

$$\int_0^\infty T 4\pi r^2 dr = \frac{\mathcal{E}}{\rho c_V} = Q \text{ К} \cdot \text{см}^3.$$

Решение задачи для линейной теплопроводности $\chi = \text{const}$ известно:

$$T = \frac{Q}{(4\pi\chi t)^{3/2}} \exp \left(-\frac{r^2}{4\chi t} \right). \quad (10.35)$$

Тепло растекается так, что основная энергия сосредоточена в сфере, радиус которой $r \sim \sqrt{4\chi t}$, аналогично плоскому случаю, когда $x \sim \sqrt{4\chi t}$. Температура в центре падает как $T \sim Q/r^3 \sim Q/(\chi t)^{3/2}$.

¹⁾ А также и для автомодельных задач газовой динамики. См. об этом подробно в гл. XII.

Эти закономерности следуют непосредственно из соображений размерности, их можно получить и путем оценки из уравнений (10.34), (10.35), если заменить производные отношениями величин (см. § 4).

Рассмотрим теперь случай нелинейной теплопроводности с $\chi = aT^n$, $n > 0$. Уравнение принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 T^n \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (10.36)$$

Найдем закон движения фронта тепловой волны, так же как и в плоском случае. Имеем

$$r_\Phi^2 \sim \chi t,$$

где χ — коэффициент температуропроводности, соответствующий средней температуре нагретой области в момент t . Но

$$T \sim Q/r_\Phi^3, \quad (10.37)$$

так что $r_\Phi^2 \sim aT^n t \sim aQ^n r_\Phi^{-3n} t$, откуда

$$r_\Phi \sim (aQ^n)^{\frac{1}{3n+2}} t^{\frac{1}{3n+2}}. \quad (10.38)$$

Скорость фронта тепловой волны пропорциональна

$$\frac{dr_\Phi}{dt} \sim \frac{r_\Phi}{t} \sim \frac{(aQ^n)^{\frac{1}{3n+2}}}{t^{\frac{3n+1}{3n+2}}} \sim \frac{aQ^n}{r_\Phi^{3n+1}}. \quad (10.39)$$

Она чрезвычайно резко уменьшается по мере распространения волны. Например, при $n = 5$ $dr_\Phi/dt \sim 1/r^{16}$. Точное решение уравнения теплопроводности ищем в автомодельной форме

$$T = \left(\frac{Q^{\frac{2}{3}}}{at} \right)^{\frac{3}{3n+2}} \varphi(\xi), \quad (10.40)$$

где автомодельная переменная ξ определяется как

$$\xi = \frac{r}{(aQ^n t)^{\frac{1}{3n+2}}}. \quad (10.41)$$

Подставляя (10.40) в уравнение (10.36), получим обыкновенное уравнение для функции $\varphi(\xi)$, несколько отличающееся от уравнения (10.26) для плоского случая. Это уравнение было решено С. З. Беленьким и независимо Г. И. Баренблаттом [2] ¹⁾.

Окончательное решение можно записать в виде, аналогичном (10.32),

$$T = T_c \left(1 - \frac{r^2}{r_\Phi^2} \right)^{1/n}, \quad (10.42)$$

где радиус фронта

$$r_\Phi = \xi_1 (aQ^n t)^{\frac{1}{3n+2}}. \quad (10.43)$$

¹⁾ Распространение тепловой волны, близкой к сферической, рассматривали Э. И. Андрианкин и О. С. Рыжов [3]. В работе Э. И. Андрианкина [4] рассматривается сферическая тепловая волна с учетом энергии излучения.

Постоянная ξ_1 равна

$$\xi_1 = \left\{ \frac{3n+2}{2^{n-1}n\pi^n} \frac{\Gamma^n\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma^n\left(\frac{3}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{3n+2}}.$$

Температура в центре T_c равна

$$T_c = \frac{4\pi}{3} \xi_1^3 \left[\frac{n\xi_1^2}{2(3n+2)} \right]^{1/n} T, \quad (10.44)$$

где

$$\bar{T} = Q / \frac{4\pi}{3} r_\Phi^3$$

— средняя по объему температура в момент, когда радиус фронта волны равен r_Φ .

Например, при $n = 5$ $\xi_1 = 0,79$ и $T_c = 1,28 \bar{T}$. При переменной теплоемкости $c_V \sim T^{0,5}$ ($k = 0,5$)

$$E = E_c \left(1 - \frac{r^2}{r_\Phi^2} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad T = T_c \left(1 - \frac{r^2}{r_\Phi^2} \right)^{\frac{1}{n-k}},$$

как и в плоском случае. В законе распространения тепловой волны вместо $r_\Phi \sim t^{\frac{1}{3n+2}}$ получаем $r_\Phi \sim t^{\frac{1}{3n'+2}}$. При $n = 5$ $k = 0$, $r_\Phi \sim t^{1/17}$, $dr_\Phi/dt \sim r_\Phi^{-16}$; при $n = 5$ $k = 0,5$, $n' = 4,5$ и $r_\Phi \sim t^{1/15,5}$, $dr_\Phi/dt \sim r_\Phi^{-14,5}$.

Распределение температуры по радиусу в сферическом случае точно такое же, как и в плоском. Поток почти во всей области от центра и до фронта линейно растет по радиусу и лишь около самого фронта падает до нуля:

$$S \sim -T^n \frac{\partial T}{\partial r} \sim \left(1 - \frac{r^2}{r_\Phi^2} \right)^{1/n} r.$$

Дивергенция потока почти постоянна во всей сфере за исключением тонкого слоя вблизи фронта: объем газа охлаждается сравнительно равномерно, посылая энергию, которая поглощается вблизи фронта, прогревая все новые и новые слои вещества.

Представим себе, что в маленьком объеме газа произошло очень быстрое выделение большого количества энергии, в результате чего вещество нагрелось до очень высокой температуры. От места энерговыделения по окружающему газу распространяется тепловая волна.

Скорость распространения тепловой волны, согласно формуле (10.39), уменьшается по мере распространения и падения температуры нагретой сферы по закону $dr_\Phi/dt \sim aQ^n/r_\Phi^{3n+1}$. Но $r_\Phi \sim (Q/T)^{1/3}$, так что $dr_\Phi/dt \sim aT^{n+1/3}Q^{-1/3}$. При лучистой теплопроводности $n = 5$ и $dr_\Phi/dt \sim T^{5,3}$. Скорость звука в нагретом газе, грубо говоря, пропорциональна $\sqrt{T}$. Следовательно, если вначале температура очень высока («бесконечна»), то скорость распространения тепловой волны обязательно больше скорости звука. При распространении волны по неподвижному холодному газу постоянной плотности в нем повышается давление. Грубо говоря, давление за фронтом тепловой волны пропорционально температуре $p \sim \varrho T$, так что профиль давления примерно совпадает с профилем температуры. Существование градиента давления в волне приводит к тому, что газ разгоняется, разлетаясь от центра, масса его

перераспределяется, стремясь сосредоточиться около периферии, у фронта тепловой волны. Возмущения распространяются по газу со скоростью звука. Поэтому вначале, пока тепловая волна движется гораздо быстрее звука, вещество за нею не успевает прийти в заметное движение. Как мы видели, тепловая волна по мере распространения чрезвычайно быстро замедляется. Через некоторое время скорость ее падает до величины порядка скорости звука и потом становится меньше последней. С этого момента теплопроводная волна уже не обгоняет звуковые возмущения, вещество приходит в движение и образуется ударная волна, которая вырывается вперед, распространяясь перед тепловой со скоростью, по порядку величины совпадающей со скоростью звука в нагретом газе за нею. Постепенно процесс выходит на режим, описываемый решением задачи о сильном взрыве (см. § 25 гл. I). Таким образом, момент образования ударной волны и вырывания ее перед тепловой приближенно совпадает с моментом, когда скорость тепловой волны падает до скорости звука в нагретом газе.

Оценка показывает, что в воздухе нормальной плотности это происходит, когда температура в нагретой сфере падает до величины порядка 300 000 К. Если начальная температура воздуха в момент энергосвечения гораздо больше этой величины, то существует четко выраженная стадия, на которой энергия распространяется по неподвижному воздуху путем лучистой теплопроводности, в виде тепловой волны. Когда температура в расширяющейся нагретой сфере падает до $\sim 300\,000$ К, образуется и вырывается вперед ударная волна, а роль лучистой теплопроводности сводится исключительно к выравниванию температуры в центральной области.

Если же концентрация энергии вначале такова, что температура воздуха ниже 300 000 К, то тепловая волна вообще не возникает, а энергия с самого начала распространяется гидродинамическим путем за счет ударной волны.

В конце § 3 отмечалось, что профиль температуры на нижнем краю тепловой волны совпадает с профилем температуры в прогревной зоне очень сильной ударной волны (в очень сильной ударной волне впереди скачка уплотнения вырывается «язык» прогрева лучистой теплопроводностью). В частности, на самом переднем краю тепловой волны излучение неравновесно за счет «прострельных квантов» и температура падает до нуля по экспоненциальному закону в зависимости от оптической координаты. Это означает, что видимая яркость поверхности фронта тепловой волны совпадает с яркостью поверхности фронта очень сильной ударной волны. В § 4 гл. IX было показано, что эта предельная яркость в воздухе нормальной плотности соответствует эффективной температуре в видимой части спектра, примерно 17 000 К. Такова же эффективная температура и поверхности фронта тепловой волны. Таким образом, наблюдая издалека тепловую волну, распространяющуюся по воздуху, мы будем «видеть» температуру порядка 17 000 К, несмотря на то, что в центральных областях волны температура может достигать многих сотен тысяч градусов.

§ 7. Некоторые автомоделные плоские задачи. Рассмотрим несколько автомоделных задач. Две из них исследуем полукачественным методом, изложенным в § 4. Для одной получим точное решение.

Постоянная температура на границе. Пусть на границе плоского полупространства $x = 0$ с нулевой начальной температурой поддерживается постоянная температура T_0 . От границы внутрь среды распространяется тепловая волна, как показано на рис. 10.5. Поскольку имеется масштаб температуры T_0 , коэффициент температуропроводности по порядку величины равен $\chi \sim aT_0^n$, и фронт тепловой волны распространяется по закону

$$x_{\text{ф}} \sim \sqrt{\chi t} \sim (aT_0^n t)^{1/2}.$$

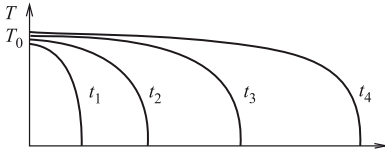


Рис. 10.5. Распространение тепловой волны при заданной температуре на границе

Значение численного коэффициента в этой формуле, так же как и профиль температуры, который, очевидно, автомоделей, можно найти путем численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения для безразмерной функции $f(\xi)$:

$$T = T_0 f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{(aT_0^n t)^{1/2}}$$

при граничных условиях $f(0) = 1, f(\infty) = 0$.

Поток тепла через границу уменьшается с течением времени по закону

$$S \sim aT_0^n \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{aT_0^{n+1}}{x_\Phi} \sim \frac{aT_0^{n+1}}{(aT_0^n t)^{1/2}} \sim \frac{a^{1/2} T_0^{n+2}}{t^{1/2}}.$$

Как меняется со временем количество энергии в тепловой волне, можно оценить любым из двух способов:

$$\mathcal{E} \sim \int_0^{x_\Phi} T dx \sim T_0 x_\Phi \sim t^{1/2}, \quad \mathcal{E} \sim \int_0^t S dt \sim \int_0^t \frac{dt}{t^{1/2}} \sim t^{1/2}.$$

Постоянный поток на границе. Предположим, что на границе задан постоянный поток тепла S_0 , поступающий в тело извне:

$$S_0 = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 = -c_V \varrho a T^n \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 = \text{const при } x = 0.$$

Закон распространения тепловой волны и изменения температуры волне во времени найдем, заменяя производные отношениями величин.

Поток в зоне тепловой волны меняется от S_0 до нуля. Средняя температура в волне по порядку величины дается соотношением:

$$S_0 \sim c_V \varrho \frac{aT^{n+1}}{x_\Phi}.$$

Но из уравнения теплопроводности следует, что по порядку величины

$$\frac{T}{t} \sim \frac{S_0}{x_\Phi}.$$

Из этих двух приближенных уравнений найдем закон распространения тепловой волны и закон изменения температуры во времени:

$$x_\Phi \sim (c_V \varrho a S_0^n)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{n+1}{n+2}}, \quad T \sim \left(\frac{S_0}{c_V \varrho a} \right)^{\frac{1}{n+2}} t^{\frac{1}{n+2}}.$$

При $n = 5$, $x_\Phi \sim t^{6/7}$, $T \sim t^{1/7} \sim x_\Phi^{1/6}$, $\frac{dx_\Phi}{dt} \sim t^{-1/7}$.

Скорость тепловой волны уменьшается очень медленно, средняя температура медленно растет. Возрастание температуры объясняется тем, что по мере распространения волны градиент температуры уменьшается, и для того чтобы поддержать постоянство потока, должен расти коэффициент теплопроводности. Распространение волны показано на рис. 10.6.

Решение типа диполя. Пусть вблизи плоской границы полупространства в каком-то слое произошло энерговыделение. Предположим, что тепло растекается в теле настолько быстро, что температура очень скоро падает до малой величины, практически до нуля. Несмотря на то, что температура на границе очень мала, поток тепла через границу остается конечным (соответственно очень велик градиент температуры), так что энергия вытекает из тела. В задаче не существует интеграла энергии.

Идеализируем поставленную задачу с тем, чтобы исключить из нее размерные параметры длины (например, толщину слоя, где произошло энерговыделение, или расстояние его от границы). Будем считать, что энерговыделение произошло мгновенно в бесконечно тонком слое на поверхности тела $x = 0$, причем в пределе, когда толщину слоя энерговыделения устремляем к нулю и сам слой приближаем к поверхности $x = 0$, остается конечным «момент» температуры:

$$\int_0^{\infty} xT(x, 0) dx < \infty \quad \text{при} \quad T(x, 0) \rightarrow \delta(x).$$

Легко показать, что в этом случае при условии, что температура на границе равна нулю, вместо интеграла энергии, как в задаче о плоском мгновенном источнике, имеется интеграл «момента»: сохраняется во времени момент температуры. Это положение было установлено Г. И. Баренблаттом [5].

Умножим на x уравнение теплопроводности (10.23) и проинтегрируем от 0 до ∞ , принимая во внимание, что поток на бесконечности отсутствует. Интегрируя по частям, найдем

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} xT(x, t) dx = -\frac{a}{n+1} T^{n+1}(0, t).$$

Если на границе $T(0, t) = 0$, то момент сохраняется во времени, сохраняется «дипольный момент» температуры:

$$\int_0^{\infty} xT(x, t) dx = P = \text{const.} \quad (10.45)$$

Задача при этом автомоделна, так как имеются только два размерных параметра, P К·см² и a см²·с⁻¹·К⁻ⁿ. Она была решена в работе Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича [6] применительно к процессу фильтрации газа. Фронт тепловой волны распространяется по закону

$$x_{\Phi} = \xi_0 (aP^n t)^{\frac{1}{2(n+1)}}.$$

Температуру можно представить в виде

$$T = \left(\frac{P}{at}\right)^{\frac{1}{n+1}} M\left(\frac{x}{x_{\Phi}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \left(\frac{x}{x_{\Phi}}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}\right]^{\frac{1}{n}}, \quad (10.46)$$

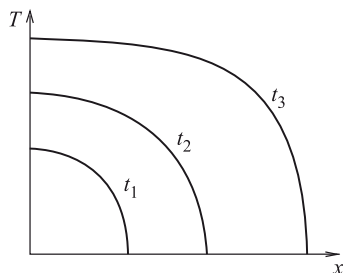


Рис. 10.6. Распространение тепловой волны при заданном потоке на границе

численные константы ξ_0 и M равны

$$\xi_0 = (n+2)^{1/2} (n+1)^{-\frac{n}{2(n+1)}} n^{-\frac{1}{2(n+1)}} 2^{\frac{1}{2(n+1)}} \left[B \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n+2} + 1 \right) \right]^{-\frac{n}{2(n+1)}},$$

$$M = \left[\frac{n}{2(n+2)} \right]^{1/n} \xi_0^{2/n}$$

(здесь $B(p, q)$ — так называемая бета-функция, значения которой можно найти в таблицах).

При $n = 5$ функция температуры имеет вид

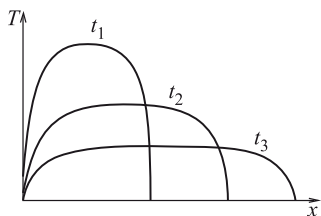
$$T \sim \frac{1}{t^{1/6}} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right)^{1/6} \left[1 - \left(\frac{x}{x_\Phi} \right)^{7/6} \right]^{1/5},$$

а фронт распространяется по закону

$$x_\Phi \sim t^{1/12}, \quad \frac{dx_\Phi}{dt} \sim \frac{1}{t^{11/12}} \sim \frac{1}{x_\Phi^{11}}.$$

Распространение тепловой волны показано на рис. 10.7.

Легко видеть, что поток через границу $x = 0$ отличен от нуля, т.е. энергия вытекает из среды. Действительно, при $x/x_\Phi \ll 1$



$$T \sim \left(\frac{x}{x_\Phi} \right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$S \sim T^n \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x_\Phi} \right) \neq 0. \quad (10.47)$$

Рис. 10.7. Решение типа диполя

В своей работе [2] Г.И. Баренблатт исследовал целый класс автомодельных решений плоских задач с весьма общими условиями на границе полупространства:

$$T = \text{const } t^q, \quad q \geq 0$$

или

$$S = \text{const } t^q, \quad q \geq 0$$

(температура или поток на границе растут со временем по степенному закону). Он рассмотрел также задачи с цилиндрической и сферической симметриями.

§ 8. Замечания о проникновении тепла в среду при учете движения. Выше отмечалось, что возможность пренебрежения движением среды при рассмотрении тепловых волн связана с тем, что на ранней стадии распространения тепловой волны от источника, при очень высокой температуре, скорость распространения гораздо больше скорости звука и вещество просто не успевает «сдвинуться с места».

В некоторых случаях, однако, движение среды оказывается существенным с самого начала.

Предположим, что температура на границе среды растет с течением времени по степенному закону $T_0 = \text{const } t^q$ ($q \sim 0$).

Расстояние, на которое тепло проникает в среду механизмом лучистой теплопроводности,

$$x_\Phi \sim \sqrt{\chi t} \sim T^{\frac{n}{2}} t^{\frac{1}{2}} \sim t^{\frac{nq+1}{2}} \quad (\chi \sim T^n). \quad (10.48)$$

Скорость распространения тепловой волны

$$\frac{dx_{\Phi}}{dt} \sim \frac{x_{\Phi}}{t} \sim t^{\frac{nq-1}{2}}.$$

Ударная волна от энергетического источника на границе среды распространяется в глубь среды со скоростью порядка скорости звука в нагретом веществе:

$$D \sim \sqrt{T} \sim t^{q/2}.$$

Сопоставим скорости распространения тепловой и ударной волн, dx_{Φ}/dt и D . Если $\frac{nq-1}{2} < \frac{q}{2}$, $q < \frac{1}{n-1}$, то в начале процесса, при $t \rightarrow 0$, скорость тепловой волны всегда больше, чем скорость ударной, тепловая волна обгоняет ударную. В этой стадии движением среды можно пренебречь, как это и делалось выше. Лишь начиная с некоторого момента t' , когда скорость D станет больше dx_{Φ}/dt , ударная волна вырвется вперед, обгонит тепловую, и вещество в области тепловой волны придет в движение (разумеется, четкой временной границы t' не существует, и процесс «разгона» вещества происходит постепенно; t' представляет собой эффективную границу между двумя стадиями).

Если $\frac{nq-1}{2} > \frac{q}{2}$, $q > \frac{1}{n-1}$, положение обратное: при $t \rightarrow 0$, $D > dx_{\Phi}/dt$ ударная волна обгоняет тепловую, и тепловая волна с самого начала процесса распространяется по движущемуся веществу. Начиная с некоторого «эффективного» момента t'' , тепловая волна вырывается перед ударной и распространяется по неподвижной среде. Масса вещества, охваченного движением, которая пропорциональна $Dt \sim t^{\frac{q}{2}+1}$ (на 1 см^2 поверхности), составляет при этом все меньшую и меньшую долю от массы, прогретой тепловой волной, которая пропорциональна $x_{\Phi} \sim t^{\frac{nq+1}{2}}$.

В промежуточном случае $\frac{nq-1}{2} = \frac{q}{2}$, $q = \frac{1}{n-1}$ скорости распространения тепловой и ударной волн нарастают с течением времени по одинаковому закону. При этом, вообще говоря, не существует четко выраженных стадий, когда энергия проникает в среду только одним способом (либо гидродинамическим путем, либо путем теплопроводности), как в крайних случаях $q \leq \frac{1}{n-1}$. Вещество прогревается теплопроводностью и приходит в движение почти одновременно.

Замечательно, что в частном случае $n = 6$ (когда длина пробега излучения $l \sim T^3$) уравнения гидродинамики с учетом лучистой теплопроводности (но без учета энергии и давления излучения) допускают автомодельное решение. Это решение соответствует закону нарастания температуры на границе среды $T_0 \sim t^{1/5}$ (существование такого автомодельного решения указано в работе Маршака [7]). Масштаб плотности при этом постоянен и равен начальной плотности среды ϱ_0 , давление $p \sim \varrho T \sim t^{1/5}$, скорость вещества $u \sim \sqrt{p/\varrho} \sim t^{1/10}$.

Координата границы возмущенной области (фронта тепловой или ударной волны) растет с течением времени по закону

$$x \sim ut \sim \sqrt{\chi t} \sim \sqrt{T^6 t} \sim t^{11/10}. \quad (10.49)$$

Автомодельной переменной служит комбинация $\xi = \text{const } xt^{-11/10}$, так что решение уравнений представляется в виде

$$T = \text{const } t^{1/5} f_1(\xi), \quad u = \text{const } t^{1/10} f_2(\xi) \quad \text{и т. д.}$$

Существенно, что автомодельное решение возможно при произвольном законе зависимости теплопроводности (длины пробега излучения) от плотности: $\chi = f(\varrho)T^6$ (так как масштаб плотности не зависит от времени).

В том, что уравнения газодинамики с учетом лучистой теплопроводности действительно допускают указанное автомодельное решение, легко убедиться путем непосредственного рассмотрения этих уравнений ¹⁾.

Характер автомодельного режима зависит от того, что больше: скорость звука $c \sim \sqrt{T}$ или скорость распространения возмущений путем теплопроводности $x/t \sim \sqrt{\chi/t}$. Обе величины нарастают со временем по одинаковому закону $t^{1/10}$, и соотношение их определяется коэффициентами пропорциональности. Поэтому характер процесса зависит от численного значения коэффициента в законе нарастания температуры на границе среды с течением времени $T_0 \sim t^{1/5}$. Возможен такой режим, в котором впереди по невозмущенному веществу бежит ударная волна, а за нею по нагретому и сжатому веществу следует тепловая. Возможен режим, когда границей между невозмущенной и возмущенной областями является фронт тепловой волны, за которым вещество приходит в движение.

Отметим работу И. В. Немчинова [8], в которой рассматриваются некоторые задачи переноса тепла излучением с учетом движения среды.

§ 9. Автомодельное решение как предельное решение неавтомодельной задачи. Автомодельные решения интересны не столько как частные решения отдельных узких классов задач, но главным образом как пределы, к которым асимптотически стремятся решения более общих задач, не автомодельных в своей постановке. Этот вопрос исследовался в работе Я. Б. Зельдовича и Г. И. Баренблатта [9] применительно к задаче Коши для нелинейного уравнения теплопроводности в одномерном плоском случае (10.23).

Основные физические особенности асимптотического поведения решения удобнее всего выяснить на примере линейной теплопроводности, когда решение особенно просто. Пусть в начальный момент $t = 0$ задано распределение температуры по оси x : $T(x, 0) = T_0(x)$, причем температура отлична от нуля только на конечном отрезке оси x ²⁾.

Как известно, решение уравнения теплопроводности (10.18) в этом случае имеет вид ($\chi = \text{const}$):

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\chi t}\right) dy. \quad (10.50)$$

Оно представляет собой обобщение решения (10.20) на случай распределенного источника.

Рассмотрим поведение температуры при $t \rightarrow \infty$ на больших расстояниях от места, где было сосредоточено тепло в начальный момент, т. е. при $x \gg y$. Разлагая ядро подынтегрального выражения в ряд по степеням малой величины y/x , получим

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}} e^{-\xi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) dy + \frac{\xi}{\sqrt{\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) y dy + \frac{2\xi^2 - 1}{\sqrt{4\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) y^2 dy + \dots \right], \quad (10.51)$$

¹⁾ Напоминаем, что уравнения непрерывности и движения при учете лучистой теплопроводности не меняются, а в уравнение энергии вводится дополнительный поток энергии (10.8) (см. § 9 гл. II).

²⁾ Такое начальное условие ставится применительно к задаче о нелинейной теплопроводности. В линейном случае допустимо более общее условие достаточно быстрого убывания температуры на бесконечности.

где

$$\xi = x / \sqrt{4\pi\chi t}.$$

Решение представляется в виде суммы автомодельных слагаемых, в которых степени времени каждый раз возрастают на $1/2$, а коэффициенты выражаются через последовательные моменты функции начального распределения температуры. В пределе $t \rightarrow \infty$ остается первый член в квадратной скобке, соответствующий решению (10.18) для сосредоточенного источника, причем следующий член разложения, который характеризует отличие истинного решения от предельного, порядка $1/t^{1/2}$ по отношению к главному члену

$$T = T_{\text{пред}} \left[1 + \frac{\varphi(\xi)}{t^{1/2}} + \dots \right]. \quad (10.51')$$

Благодаря тому, что уравнение (10.18) допускает произвол в выборе начал отсчета координаты и времени и масштаба температуры (допускает группы преобразований $x' = x - x_0$, $t' = t + \tau$, $T' = kT$), уравнению (10.18) удовлетворяет более общее, чем (10.20), автомодельное решение вида

$$T_{\text{авт}}(x - x_0, t + \tau, Q) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\chi(t + \tau)}} \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\chi(t + \tau)} \right). \quad (10.52)$$

Это решение соответствует мгновенному выделению определенного количества тепла $E = c_V \rho Q$ в точке $x = x_0$ в момент $t = -\tau$.

Легко убедиться в том, что путем соответствующего выбора параметров x_0 , τ и Q можно добиться того, чтобы автомодельное решение типа (10.52) лучше описывало точное решение (10.51), чем автомодельное решение (10.20), в котором $x_0 = 0$, $\tau = 0$.

Действительно, разложим функцию (10.52) по степеням малых величин x_0/x и τ/t (в пределе $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$). Путем сравнения разложения с точным решением (10.51) увидим, что если выбрать значения Q , x_0 и τ равными

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) dy, \quad x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) y dy}{\int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) dy}, \quad \tau = -\frac{\int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) y^2 dy}{\chi \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) dy}, \quad (10.53)$$

то члены порядка $t^{-1/2}$ и t^{-1} в разложении исчезают, так что

$$T(x, t) = T_{\text{авт}}(x - x_0, t + \tau, Q) \left[1 + \psi t^{-3/2} + \dots \right]. \quad (10.54)$$

Второй член в квадратных скобках более высокого порядка малости при $t \rightarrow \infty$, чем в выражении (10.51').

Физическая причина лучшего совпадения автомодельного решения (10.52) с точным состоит в том, что автомодельное решение (10.52) отвечает мгновенному выделению того же самого количества тепла в точке x_0 , являющейся «центром тяжести» $\bar{x}$ начального распределения температуры $T_0(x)$. Момент выделения как раз соответствует времени, которое необходимо, чтобы тепло путем теплопроводности растеклось от точки $x = 0$ до «центра тяжести» $\bar{x} = x_0$. «Эффективное» количество

тепла $E = c_V \varrho Q$ в улучшенном автомодельном решении (10.52) оказалось в точности равным фактическому количеству тепла $c_V \varrho \int_{-\infty}^{\infty} T_0(x) dx$.

Аналогично можно найти автомодельное решение, которое наилучшим образом приближается к точному решению с распределенными источниками тепла и в случае нелинейной теплопроводности.

Аutomодельное решение уравнения (10.23), соответствующее мгновенному выделению тепла в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, было описано в § 5 (формулы (10.32), (10.33), (10.31), (10.30)). В работе [9], в которой можно познакомиться с математической стороной исследования, показано, что путем соответствующего сдвига по координате и времени, т. е. выбора x_0 и τ , можно добиться того, чтобы автомодельное решение $T(x - x_0, t + \tau, Q)$ отличалось от точного $T(x, t, Q)$ членами более высокого порядка, чем $t^{-\frac{2n+3}{n+2}}$.

§ 10. О переносе тепла неравновесным излучением. Представим себе, что в разреженном воздухе образовалась сферическая область радиуса R_0 с очень высокой температурой T , столь высокой, что нагретая сфера совершенно прозрачна для собственного теплового излучения и излучает как объемный излучатель. Если средний пробег излучения, характеризующий лучеиспускательную способность воздуха — $l_1(T)$, то условие прозрачности есть $l_1(T) \gg R_0$. (Напоминаем, что пробег излучения, как правило, быстро возрастает при повышении температуры.)

Световые кванты, рождающиеся в высоконагретой области, почти беспрепятственно выходят из нее и поглощаются в окружающих слоях холодного воздуха. Таким образом, воздух в центральной сфере охлаждается за счет испускания света, а периферийные слои нагреваются за счет поглощения света. Нагретая область расширяется, а температура в ней падает. Процесс весьма сходен с процессом распространения тепловой волны с той, однако, разницей, что излучение, которое переносит энергию, теперь существенно неравновесно. Описанный процесс переноса тепла неравновесным излучением рассматривался А. С. Компанейцем и Е. Я. Ланцбургом [10, 11].

Излучение, поглощаясь в непрозрачных сначала периферийных слоях сферы, нагревает их до такой температуры T^* , при которой воздух становится прозрачным. Пусть пробег квантов, несущих основную долю энергии спектра излучения центральной сферы с температурой T , в периферийной области есть l_T . Он зависит как от характерных частот, т. е. от T , так и от температуры воздуха, где происходит поглощение. Очевидно, приближенное условие, которое определяет температуру прозрачности T^* , есть

$$l_T(T^*) = R, \quad (10.55)$$

где R — радиус нагретой сферы, который через некоторое время вырастает по сравнению с начальным радиусом R_0 .

Если вначале температура T в центральной сфере очень высока и воздух в ней сильно прозрачен для излучения, то температура прозрачности T^* оказывается заметно более низкой, чем T , и собственным излучением периферийных слоев с температурами порядка T^* можно пренебречь.

В этом случае скорость расширения нагретой области определяется просто уравнением баланса энергии. За время dt в момент t высоконагретая центральная область излучает энергию порядка

$$\frac{cU_p(T)}{l_1(T)} \cdot \frac{4\pi R_0^3}{3} dt,$$

где $U_p = \frac{4\sigma T^4}{c}$. Эта энергия поглощается в периферийном слое толщины dR и радиуса R , и воздух в этом слое нагревается до температуры порядка температуры прозрачности T^* .

Следовательно,

$$\frac{cU_p(T)}{l_1(T)} \cdot \frac{4\pi R_0^3}{3} dt = 4\pi R^2 dR \varrho \varepsilon(T^*),$$

где ϱ — плотность, а ε — удельная внутренняя энергия воздуха. Отсюда получаем скорость расширения сферы

$$v = \frac{dR}{dt} = c \frac{U_p(T)}{\varrho \varepsilon(T^*)} \frac{R_0}{3l_1(T)} \cdot \left(\frac{R_0}{R} \right)^2, \quad (10.56)$$

причем сама температура T в излучающей центральной области падает в соответствии с уравнением охлаждения

$$\varrho \frac{d\varepsilon(T)}{dt} = - \frac{cU_p(T)}{l_1(T)}. \quad (10.57)$$

При взгляде на формулу (10.56) может показаться, что v , скорость границы сферы, может быть сколь угодно большой и даже больше скорости света (если плотность энергии излучения U , порядок величины которой $U_p R/l_1$, больше, чем плотность энергии вещества $\varrho \varepsilon$). На самом деле это, конечно, не так. Просто формула (10.56) годится только для случая, когда $v \ll c$. Если скорость расширения сферы оказывается сравнимой со скоростью света, то это означает, что излученная энергия затрачивается не только на нагревание вещества, но и на «заполнение» расширяющейся сферы излучением. Математически это выражается тем, что скорость v оказывается пропорциональной не $\frac{U}{\varrho \varepsilon}$, а $\frac{U}{U + \varrho \varepsilon}$; это автоматически ставит верхний предел для скорости $v < c$.

По мере расширения нагретой сферы и охлаждения воздуха в центральной области последняя становится все менее и менее прозрачной, а температуры T и T^* сближаются. Когда они оказываются сравнимыми, наступает непрозрачность. Одновременно становится существенным и собственное излучение периферийных слоев, которые посылают кванты не только наружу, как центральная часть, но и внутрь сферы.

Плотность излучения в сфере приближается к равновесной для данной температуры величине, и постепенно процесс приобретает характер тепловой волны, которая рассматривалась в предыдущих параграфах.

Для того чтобы лучше представить себе, как происходит переход от одного режима к другому при условии «прозрачности» всей сферы, $T \approx T^*$, $l_1 \approx R$, оценим скорость распространения границы нагретой сферы в переходном случае по формулам и неравновесной, и тепловой волн.

В неравновесном режиме при стремлении R к l_1 (со стороны $R \ll l_1$) и T к T^* излучающей становится не только центральная сфера, но и вся нагретая область, так что в уравнении баланса энергии и формуле (10.56) следует вместо R_0 писать R . Тогда по порядку величины при $T \sim T^*$, $R \sim l_1$:

$$v \sim c \frac{U_p}{\varrho \varepsilon} \frac{R}{l_1} \sim c \frac{U_p}{\varrho \varepsilon}. \quad (10.58)$$

С другой стороны, в равновесном режиме скорость тепловой волны равна примерно (см. § 6)

$$v = \frac{dR}{dt} \sim \frac{\chi}{R} \quad (R \sim \sqrt{\chi t}),$$

где коэффициент лучистой температуропроводности χ , согласно определению (10.11), можно представить в виде $\chi \sim lcU_p/\varrho\varepsilon$. Следовательно, скорость тепловой волны по порядку величины равна

$$v \sim c \frac{U_p}{\varrho\varepsilon} \frac{l}{R},$$

причем в равновесном случае $R \gg l$. Если теперь устремить R к l , то получим при условии прозрачности, $R \sim l \sim l_1$, ту же величину (10.58): $v \sim c \frac{U_p}{\varrho\varepsilon}$.

Замечание. Интересно, что теория нелинейных тепловых волн нашла неожиданное приложение при рассмотрении совершенно другого и очень важного явления: формирования сильного разрушающего тока при ударе молнии в землю или заземленное сооружение. Распространяющаяся вверх от земли волна снятия высокого электрического потенциала плазменного проводника, замкнувшего промежуток между грозовым облаком и землей, описывается уравнением нелинейной теплопроводности. Роль температуры выполняет потенциал, роль потока тепла — электрический ток, а нелинейность возникает из-за резкого изменения погонного сопротивления проводника при разогреве его джоулевым теплом тока [12].

Глава XI

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 1. Введение. Изучение законов распространения ударных волн в конденсированном веществе: в металлах, воде, и т. д. имеет большое теоретическое и практическое значение. В частности, оно необходимо для понимания и расчета взрывных явлений. Теоретическая обработка материалов этих исследований дает нам сведения об уравнении состояния твердых и жидких тел в области высоких давлений, что весьма важно для решения целого ряда проблем геофизики, астрофизики и других разделов науки.

Для описания гидродинамических процессов нужно знать термодинамические свойства вещества.

Если для газов расчеты термодинамических функций не вызывают больших затруднений, то теоретическое описание термодинамических свойств твердых и жидких тел при тех высоких давлениях, которые развиваются в мощных ударных волнах, представляет собой очень сложную задачу, в настоящее время весьма далекую от своего окончательного решения. Поэтому особую роль приобретают экспериментальные методы исследования конденсированного вещества в сжатом состоянии.

До недавнего времени физика высоких давлений ограничивалась изучением вещества, сжатого в статических условиях в пьезометрах различной конструкции. Таким путем, однако, невозможно без строительства огромных установок сжать вещество до давлений выше ста тысяч атмосфер и, главное, обеспечить условия для надежных измерений, так как при более высоких давлениях начинает сказываться деформация пьезометрических бомб, мешающая проведению точных измерений физических параметров. Между тем для современной науки и техники представляют интерес давления в сотни тысяч и миллионы атмосфер.

В послевоенные годы в СССР и за рубежом были предложены совершенно иные, динамические методы осуществления высоких давлений и сжатий, основанные на использовании мощных ударных волн. Были получены и исследованы ударные волны в металлах и других конденсированных телах с давлениями в сотни тысяч и миллионы атмосфер. В СССР новые методы были развиты в работах Л. В. Альтшулера, С. Б. Кормера, К. К. Крупникова, Б. Н. Леденева, А. А. Бакановой, М. В. Синицына, А. И. Фунтикова, В. И. Жучихина и др. [1–5], в США — в работах Уолша, Христиана, Меллори, Горансона, Банкрофта, Мак-Куина, Марша и др. [22–26].

Особенно больших успехов в этом направлении добились советские ученые, которые достигли рекордных давлений в пять миллионов атмосфер (американские авторы изучали ударные волны меньшей интенсивности; работы по самым высоким

достигнутым ими давлениям, до двух миллионов атмосфер, были опубликованы позднее работ советских авторов)¹⁾.

Впервые в человеческой практике твердое тело было сжато в два и большее число раз; до сих пор со столь плотным веществом можно было «встретиться» только в центральных областях земного шара и других космических тел. Эти выдающиеся достижения в области получения высоких давлений и плотностей твердых тел позволили сделать целый ряд интереснейших выводов, касающихся термодинамического поведения вещества в столь необычных условиях, и полуэмпирическим путем определить важные термодинамические характеристики сильно сжатых металлов.

Чрезвычайно малая длительность ударных нагрузок потребовала изыскания новых методов измерений, позволяющих определять физические параметры в условиях высокоскоростного процесса, и создания соответствующих приборов. Большой вклад в этом направлении был сделан советскими исследователями В. А. Цукерманом, Г. Л. Шнирманом, А. С. Дубовиком, П. В. Кевлишвили, Е. К. Завойским и др. [6–12].

Основной характерной чертой, отличающей конденсированное состояние от газообразного и определяющей поведение твердых и жидких тел при сжатии их ударными волнами, является сильное взаимодействие атомов (или молекул) тела друг с другом. Радиус действия межуатомных сил весьма ограничен. Он порядка размеров самих атомов и молекул, т.е. порядка 10^{-8} см. В достаточно разреженном газе, где средние расстояния между частицами много больше размеров частиц, взаимодействие проявляется в основном только при столкновениях, в момент тесного сближения атомов или молекул.

Давление в газе имеет тепловое происхождение; оно связано с переносом импульса частицами, участвующими в тепловом движении и всегда пропорционально температуре: $p = nkT$.

Для того чтобы сильно сжать газ, требуются сравнительно небольшие давления. Предельное сжатие атмосферного газа в ударной волне, диктуемое законами сохранения, достигается при давлениях за фронтом в несколько десятков или сотню атмосфер, так что ударная волна такой амплитуды уже может рассматриваться как сильная.

Иначе ведет себя по отношению к сжатию конденсированное вещество. В твердом и жидком телах атомы или молекулы находятся на близких расстояниях друг от друга и сильно взаимодействуют. Это взаимодействие, в частности, и удерживает атомы в теле. Силы взаимодействия имеют двоякий характер. С одной стороны, частицы, разделенные достаточно большим расстоянием, притягиваются друг к другу; с другой стороны, при более тесном сближении в результате проникновения друг в друга электронных оболочек атомы отталкиваются. Равновесные расстояния, на которых находятся атомы твердого тела в отсутствие внешнего давления, соответствуют взаимной компенсации сил притяжения и отталкивания, т.е. минимуму потенциальной энергии взаимодействия. Для того чтобы развести атомы на большие расстояния, необходимо преодолеть силы сцепления и затратить энергию, равную энергии связи, которая для металлов имеет порядок нескольких десятков или сотен ккал/моль (порядка нескольких эВ/атом)²⁾. Чтобы сжать вещество, необходимо пре-

¹⁾ Это относится к первым публикациям (отечественным и американским). В последующие годы появились работы с описанием исследований и при еще более высоких давлениях. См. обзор [55].

²⁾ Силы сцепления в твердых телах бывают различного происхождения. В соответствии с их природой твердые тела обычно подразделяют на пять групп: 1) ионные кристаллы, например NaCl, энергия связи $U = 180$ ккал/моль; 2) кристаллы с ковалентной связью, например алмаз, $U = 170$ ккал/моль; 3) металлы, $U \sim 30\text{--}200$ ккал/моль; 4) молекулярные кристаллы,

одолеет силы отталкивания, которые чрезвычайно быстро возрастают при сближении атомов. Сжимаемость металлов, равная, по определению, $\kappa_0 = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial p}$, имеет при нормальных условиях порядок $10^{-12} \text{ см}^2/\text{дин} \approx 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$. Для того чтобы сжать холодный металл на 10 %, необходимо приложить к нему внешнее давление порядка 10^5 атм; сжимаемость обычно уменьшается при повышении давления; для сжатия металлов вдвое требуются давления порядка нескольких миллионов атмосфер.

Таким образом, при сильном сжатии конденсированного вещества в нем развивается колоссальное внутреннее давление, даже в отсутствие всякого нагревания, только за счет отталкивания атомов друг от друга. Существование этого давления нетеплового происхождения, совершенно не свойственного газам, и определяет основные особенности поведения твердых и жидких тел при сжатии их ударными волнами. В ударных волнах очень большой амплитуды, как мы увидим ниже, происходит и сильное нагревание вещества, приводящее к появлению давления, связанного с тепловым движением атомов (и электронов), которое называют «тепловым», в отличие от упругого, или «холодного» давления, обусловленного силами отталкивания. В принципе, если амплитуду ударной волны устремить к бесконечности, относительная роль теплового давления возрастает и в пределе упругое давление становится малым по сравнению с тепловым; в волнах чрезвычайно большой амплитуды первоначально твердое вещество ведет себя как газ. Однако в ударных волнах с давлениями в миллионы атмосфер, полученными в лабораторных условиях, давления обоих типов сравнимы друг с другом. В менее сильных волнах, с давлением порядка сотен тысяч атмосфер и ниже, упругое давление преобладает. Мала в этом случае и тепловая энергия вещества, сжатого ударной волной. Вся внутренняя энергия, приобретаемая веществом в волне, затрачивается на преодоление сил отталкивания при сжатии тела и сосредоточена в форме потенциальной, упругой энергии. Скорость распространения малых возмущений в конденсированном веществе, в отличие от газов, никак не связана с температурой. Она определяется упругой сжимаемостью вещества.

Меняется и численная характеристика «силы» ударной волны. В газах мерой «силы» волны служит отношение давлений по обе стороны фронта. Предельное сжатие в несколько или десятков раз достигается, когда это отношение равно нескольким десяткам или сотне. При этом скорость распространения ударной волны значительно превышает скорость звука в исходном газе и газе за фронтом разгоняется до скоростей, близких к скорости ударной волны. Если газ вначале находился при атмосферном давлении, то ударная волна с амплитудой в сотню атмосфер является уже «сильной».

В твердом или жидком веществе ударная волна с амплитудой даже в сто тысяч атмосфер является «слабой». Такая волна мало отличается от акустической: она распространяется со скоростью, близкой к скорости звука, сжимает вещество всего на несколько или десятков процентов и сообщает ему скорость за фронтом, в десятки раз меньшую скорости распространения самой волны.

Если характеризовать «силу» ударной волны отношением ее скорости к скорости звука в невозмущенном веществе или близостью сжатия к предельному, то для конденсированных тел «сильными» являются волны с давлениями не менее десятков или сотен миллионов атмосфер.

В этой главе мы подробно рассмотрим физические особенности поведения твердых тел при высоких давлениях и плотностях, познакомимся со свойствами ударного

связанные ван-дер-ваальсовыми силами, связь слабая, например у CH_4 $U = 2,4$ ккал/моль; 5) кристаллы с водородными связями, например лед, $U = 12$ ккал/моль. Мы будем здесь в основном интересоваться металлами.

сжатия, опишем экспериментальные методы изучения ударных волн, распространяющихся в твердых телах, и расскажем о полученных этими методами результатах. Будут рассмотрены некоторые физические явления, наблюдаемые при распространении ударных волн в металлах и других телах, а также при разгрузке вещества после выхода ударной волны на свободную поверхность.

Много ценных сведений по этим вопросам можно найти в недавно опубликованном обзоре Л.В.Альтшулера [55], где собран и проанализирован большой экспериментальный материал.

1. Термодинамические свойства твердых тел при высоких давлениях и температурах

§ 2. Сжатие холодного вещества. Давление p и удельную внутреннюю энергию ϵ твердого вещества можно разделить на две части. Одни из них, упругие составляющие p_x , ϵ_x , связаны исключительно с силами взаимодействия, действующими между атомами тела ¹⁾, и совершенно не зависят от температуры. Другие, тепловые составляющие, связанные с нагреванием тела, т. е. с температурой. Упругие составляющие p_x , ϵ_x зависят только от плотности вещества ρ или удельного объема $V = 1/\rho$ и равны полному давлению и удельной внутренней энергии при абсолютном нуле температуры, почему их иногда называют «холодными» давлением и энергией.

В этом параграфе будут рассмотрены только упругие члены давления и энергии. Поэтому будем предполагать, что тело находится при абсолютном нуле температуры.

Механически равновесное состояние твердого тела при нуле температуры и нулевом давлении ²⁾ характеризуется взаимной компенсацией межатомных сил притяжения и отталкивания и минимумом потенциальной упругой энергии, который можно принять за начало ее отсчета $\epsilon_x = 0$ ³⁾.

Обозначим удельный объем тела в этом состоянии ($p = 0$, $T = 0$) через $V_{0к}$. Этот объем немного меньше объема тела V_0 при нормальных условиях ($p = 0$ или 1 атм, что все равно, и $T_0 \approx 300$ К), так как при нагревании вещества от абсолютного нуля до комнатной температуры T_0 происходит тепловое расширение, о котором мы скажем в следующем параграфе. Нормальный объем металлов V_0 обычно больше объема $V_{0к}$, который мы будем называть нулевым, на 1–2 %. Во многих случаях этим небольшим различием объемов V_0 и $V_{0к}$ можно пренебречь.

Рассматривая здесь поведение твердого вещества при изменении объема, мы будем иметь в виду всестороннее сжатие (и расширение) тела, отвлекаясь от эффектов, связанных с анизотропией упругих свойств, деформацией сдвига, прочностью и т. д., которые проявляются при сравнительно небольших давлениях и сжатиях.

Кривая потенциальной энергии тела в зависимости от его удельного объема V качественно имеет такой же характер, как и кривая потенциальной энергии взаимодействия двух атомов в молекуле в зависимости от расстояния между ядрами. Эта кривая схематически изображена на рис. 11.1. Если объем V больше нулевого

¹⁾ Мы будем здесь в основном заниматься металлами, которые состоят не из молекул, а из атомов.

²⁾ Атмосферное давление ничтожно мало по сравнению с давлениями, возникающими даже при чрезвычайно малых изменениях объема тела. Поэтому совершенно безразлично, находится ли тело в вакууме ($p_x = 0$) или при атмосферном давлении ($p_x = 1$ атм).

³⁾ При абсолютном нуле температуры атомы совершают так называемые нулевые колебания, с которыми связана энергия $h\nu/2$ на одно нормальное колебание частоты ν . Эту энергию можно включить в потенциальную энергию $\epsilon_x(V)$, так что ϵ_x отсчитывается от уровня нулевых колебаний в равновесном состоянии тела при $p_x = 0$.

$V_{0к}$, преобладают силы притяжения. Силы взаимодействия быстро убывают при удалении атомов друг от друга, поэтому при увеличении объема, т. е. при разведении атомов, потенциальная энергия, возрастающая асимптотически, стремится к постоянному значению U , равному энергии связи атомов в теле.

U — это энергия, которую нужно затратить, чтобы развести все атомы одного грамма вещества на «бесконечность»; она равна примерно теплоте испарения тела (строго говоря, равна теплоте испарения при абсолютном нуле температуры). Теплоты испарения металлов обычно имеют порядок нескольких десятков или сотен ккал/моль, т. е. нескольких электронвольт на атом¹⁾. Силы сцепления ослабевают на расстояниях порядка размеров атомной ячейки, так что кривая $\varepsilon_x(V)$ приближается к своей асимптоте $\varepsilon_x(V) = U$ при расширении тела на порядок (при увеличении межуатомного расстояния вдвое).

При сжатии тела преобладающую роль играют силы отталкивания, которые резко возрастают по мере сближения атомов, поэтому при объемах, меньших нулевого, потенциальная энергия $\varepsilon_x(V)$ быстро увеличивается. Чтобы представить себе скорость возрастания и порядки величин энергии, укажем, что по данным работы [1] энергия холодного сжатия железа на 7 % есть $\varepsilon_x = 5,25 \cdot 10^8$ эрг/г = 0,03 эВ/атом, а при сжатии в полтора раза $\varepsilon_x = 2,42 \cdot 10^{10}$ эрг/г = 1,4 эВ/атом (давления при этом равны $p_x = 1,31 \cdot 10^5$ атм и $p_x = 1,36 \cdot 10^6$ атм соответственно).

Упругое давление связано с потенциальной энергией соотношением

$$p_x = -\frac{d\varepsilon_x}{dV}, \quad (11.1)$$

которое имеет естественный механический смысл (приращение энергии равно работе сжатия) и может рассматриваться как уравнение изотермы или адиабаты холодного сжатия. В самом деле, формула (11.1) следует из общего термодинамического соотношения $TdS = d\varepsilon + p dV$, если учесть, что температура T равна нулю. Но при $T = 0$ энтропия S по теореме Нернста также равна нулю, т. е. остается постоянной. Поэтому изотерма $T = 0$ является одновременно и адиабатой $S = 0$.

Кривая давления $p_x(V)$ также схематически изображена на рис. 11.1. В точке $V = V_{0к}$ упругое давление равно нулю; при сжатии давление быстро возрастает, а при расширении формально становится отрицательным.

Отрицательный знак давления описывает тот физический факт, что для расширения тела от нулевого объема, отвечающего механическому равновесию при $T = 0$, $p = 0$, к телу необходимо приложить растягивающее усилие. Это усилие должно преодолеть силы сцепления, стремящиеся вернуть тело к равновесному объему $V_{0к}$.

На опыте нельзя непосредственно исследовать ход кривой холодного расширения $p_x(V)$ при $V > V_{0к}$, так как невозможно практически осуществить сильное всестороннее растяжение металла. О величине отрицательных давлений можно судить по

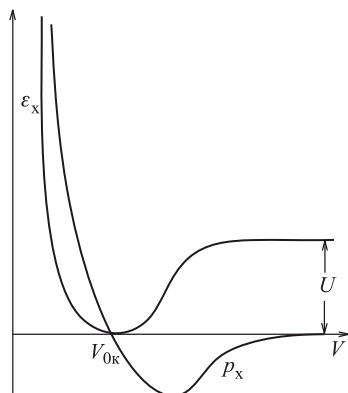


Рис. 11.1. Кривые потенциальной энергии и упругого давления тела в зависимости от удельного объема

¹⁾ Например, у железа — 94 ккал/моль = 4,1 эВ/атом = $6,96 \cdot 10^{10}$ эрг/г, у алюминия — 55 ккал/моль = 2,4 эВ/атом = $8,45 \cdot 10^{10}$ эрг/г.

теплоте испарения вещества. По определению, площадь кривой холодного расширения тела от нулевого объема до бесконечности равна

$$\int_{V_{0к}}^{\infty} p_x(V) dV = -U. \quad (11.2)$$

Если силы сцепления заметно ослабевают при расширении тела примерно в 10 раз (увеличении межуатомного расстояния вдвое), то максимальная величина отрицательного давления имеет порядок $p_{\max} \sim \sim U/10 V_{0к}$, что для железа, например, составляет $p_{\max} \sim 6 \cdot 10^{10}$ бар = $6 \cdot 10^4$ атм¹⁾.

Наклон кривой упругого давления в точке, где давление равно нулю, соответствует определяемой в обычных условиях сжимаемости вещества (адиабатическая сжимаемость очень мало отличается от изотермической; при $T = 0$ они строго совпадают). Сжимаемость железа

$$\kappa_0 = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T_0} = 5,9 \cdot 10^{-13} \text{ бар}^{-1},$$

откуда

$$-V_{0к} \left(\frac{\partial p_x}{\partial V} \right)_{V_{0к}} \approx 1,7 \cdot 10^{12} \text{ бар}.$$

Наклон кривой холодного сжатия определяет скорость распространения упругих волн в теле — скорость «звука». В дальнейшем будет показано, что у твердого тела существует несколько скоростей «звука». Пока что отметим, что скорость звука, определенная обычным образом через сжимаемость $c_0 = V |\partial p / \partial V|_S^{1/2}$, равна в железе при нормальных условиях 5,85 км/с.

Теоретические расчеты кривых холодного сжатия $p_x(V)$ или $\varepsilon_x(V)$ в практически достижимом диапазоне сжатий и давлений основываются на квантовомеханическом рассмотрении межуатомного взаимодействия. В ряде случаев при этом удается получить удовлетворительное согласие с опытными данными по сжимаемости, в частности для щелочных и щелочноземельных металлов при небольших давлениях. Подробное изложение этих расчетов и сравнение с экспериментальными данными Бриджмена по статическому сжатию веществ до нескольких десятков тысяч атмосфер можно найти в книге Гомбаша [13]; там же приведены ссылки на литературу.

Подробные данные о кривых холодного сжатия ряда металлов (а также хлористого натрия) вплоть до давлений в несколько миллионов атмосфер и плотностей, примерно в два раза больших нормальной, были получены в работах Л. В. Альтшулера, К. К. Крупникова, С. Б. Кормера, А. А. Банановой, Р. Ф. Трунина, М. Н. Павловского,

¹⁾ Эта величина гораздо больше предела прочности железа на разрыв, который обычно порядка 10^9 бар = 10^3 атм. Малая величина прочности на разрыв связана с односторонним характером растяжения, с существованием трещин в реальном металле, поликристаллической структурой и т. д. Заметим, что пределы прочности некоторых сортов стали достигают $(1-2) \cdot 10^4$ атм.

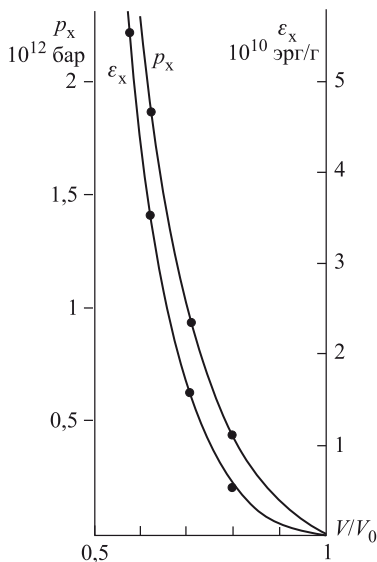


Рис. 11.2. Упругое давление p_x и энергия ε_x железа (по данным [1])

Л. В. Кулешовой, В. Д. Урлина [1–5, 14, 15], на основе теоретической обработки результатов опытов по ударному сжатию (см. обзор [55]).

Речь об этих опытах еще пойдет впереди; здесь же для иллюстрации приведем кривые $p_x(V)$ и $\varepsilon_x(V)$ для железа (рис. 11.2).

Теоретически можно установить предельный закон для холодного сжатия вещества при очень больших давлениях и плотностях. В условиях очень сильного сжатия электронные оболочки атомов в какой-то мере теряют свою индивидуальную структуру. Состояние вещества при этом можно приближенно описать с помощью статистической модели атома Томаса–Ферми, или, чуть точнее, с помощью модели Томаса–Ферми–Дирака (в последней учитывается обменная энергия)¹⁾. Об уравнении состояния вещества в модели Томаса–Ферми речь шла в § 13 гл. III. В пределе очень больших давлений и плотностей давление холодного сжатия

$$p_x \sim \rho^{5/3} \sim V^{-5/3}. \quad (11.3)$$

Этот закон является предельным и для самой статистической модели атома, так как при не слишком больших сжатиях модель приводит к иной зависимости $p_x(V)$. Для того чтобы сравнить фактические кривые упругого давления с кривыми, получающимися в статистической

модели, мы приводим заимствованный из работы [1] график, на котором изображены в логарифмическом масштабе опытная кривая для железа и кривые, рассчитанные по методам Томаса–Ферми и Томаса–Ферми–Дирака (рис. 11.3).

Из рисунка видно, что при сжатиях в 1,2–1,8 раза, осуществленных на опыте, статистические модели дают сильно завышенные значения давления. Квантовомеханические расчеты кривой холодного сжатия железа в широком диапазоне давлений были проведены Г. М. Гандельманом [37].

§ 3. Тепловое движение атомов. При нагревании атомы вещества приходят в движение. С тепловым движением атомов связаны определенные энергия и давление. При температурах порядка тысячи градусов и выше существенную роль играет тепловое возбуждение электронов.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, полные энергию и давление можно представить в виде суммы упругих и тепловых составляющих. В свою очередь тепловые члены разобьем на две части: слагаемые, соответствующие тепловому движению атомов (ядер) — ε_T , p_T , и слагаемые, отвечающие тепловому возбуждению

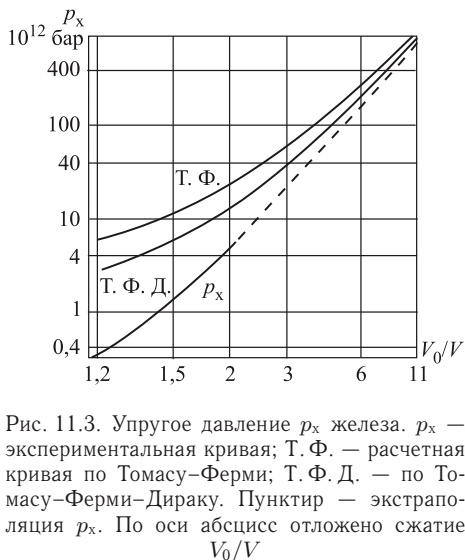


Рис. 11.3. Упругое давление p_x железа. p_x — экспериментальная кривая; Т. Ф. — расчетная кривая по Томасу–Ферми; Т. Ф. Д. — по Томасу–Ферми–Дираку. Пунктир — экстраполяция p_x . По оси абсцисс отложено сжатие V_0/V

¹⁾ Вычисления по методу Томаса–Ферми–Дирака имеют реальный смысл только в тех случаях, когда обменная поправка мала. Они, по существу, указывают пределы применимости метода Томаса–Ферми. Если обменная поправка оказывается большой, то это означает, что метод Томаса–Ферми–Дирака уже не имеет силы.

электронов — ε_e , p_e . Удельная внутренняя энергия и давление твердого тела запишутся при этом в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_T + \varepsilon_e, \quad (11.4)$$

$$p = p_x + p_T + p_e. \quad (11.5)$$

Электронными членами мы займемся в дальнейшем. При температурах ниже примерно десяти тысяч градусов электронные члены малы и в выражениях (11.4), (11.5) можно ограничиться только первыми двумя слагаемыми.

Рассмотрим тепловое движение атомов. При этом не будем делать различия между твердым телом и жидкостью и не будем останавливаться на эффекте плавления. Тепловое движение в жидкости мало чем отличается от теплового движения атомов в твердом теле. Энергетически плавление мало сказывается на термодинамических функциях вещества при высоких температурах порядка десяти тысяч градусов и выше, так как теплота плавления сравнительно невелика. Например, у свинца при нормальном давлении температура плавления $T_{\text{пл}} = 600$ К, а теплота плавления $U_{\text{пл}} = 1,3$ ккал/моль, что соответствует 650 К, если разделить эту величину на газовую постоянную $R = 2$ кал/моль · град; у железа $T_{\text{пл}} = 1808$ К, $U_{\text{пл}} = 3,86$ ккал/моль, $U_{\text{пл}}/R = 1940$ К.

Если температура не слишком высока, атомы твердого тела (и жидкости) совершают малые колебания около положений равновесия (узлов кристаллической решетки в твердом теле). Колебания являются гармоническими до тех пор, пока амплитуда их гораздо меньше межуатомного расстояния, иначе говоря, пока энергия колебаний, которая порядка kT на атом, значительно меньше высоты потенциального барьера для перескоков атомов из узлов решетки в межузлия или в другие свободные узлы. При нормальной плотности твердого тела высота барьеров имеет порядок одного или нескольких электронвольт¹⁾, т. е. величина kT сравнивается с высотой потенциального барьера при температурах порядка десятка или нескольких десятков тысяч градусов. При более высоких температурах атомы могут почти свободно перемещаться по телу. Тепловое движение при этом теряет характер колебаний и приближается скорее к хаотическому, наподобие газового: вещество превращается в плотный газ из сильно взаимодействующих атомов.

Положение, однако, меняется, если одновременно с нагреванием вещество сжимается. При сжатии очень резко возрастают силы отталкивания между соседними атомами, благодаря чему резко возрастает высота потенциального барьера, который нужно преодолеть атому, чтобы уйти из своей ячейки (из своего узла кристаллической решетки). Свободные перемещения атомов в теле при этом сильно затрудняются и движение атома остается ограниченным пространством своей ячейки. Это поясняется рис. 11.4.

В каком-то грубом приближении тепловое движение атомов в сжатом веществе можно рассматривать как малые колебания около положений равновесия даже при тех максимальных температурах в 20 000–30 000 К, которые достигаются в наиболее мощных ударных волнах, исследованных на опыте.

При температурах выше нескольких сотен кельвинов квантовые эффекты в колебаниях не играют никакой роли, и теплоемкость тела, атомы которого совершают гармонические колебания, равна своему классическому значению $3k$ на 1 атом или $c_V = 3Nk$ на 1 г, где N — число атомов в грамме. Принимая во внимание отличие

¹⁾ Это есть величина, равная примерно энергии активации для самодиффузии атомов в теле ΔU . Она обычно несколько меньше энергии связи, но такого же порядка, что и последняя, $\Delta U \approx (0,5 \div 0,7)U$.

теплоемкости от этого значения при низких температурах в квантовой области, запишем выражение для тепловой энергии, связанной с колебаниями атомов, в виде

$$\varepsilon_T = c_V(T - T_0) + \varepsilon_0, \quad c_V = 3Nk, \quad (11.6)$$

где $\varepsilon_0 = \int_0^{T_0} c_V(T) dT$ — тепловая энергия при комнатной температуре T_0 , которую можно взять из соответствующих таблиц.

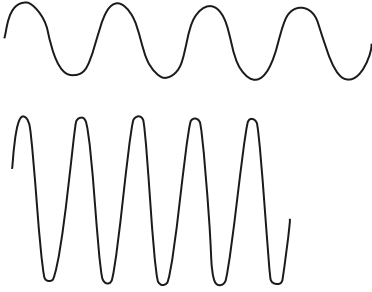


Рис. 11.4. Схема, поясняющая изменение высоты потенциальных барьеров для атомов в твердом теле при сжатии

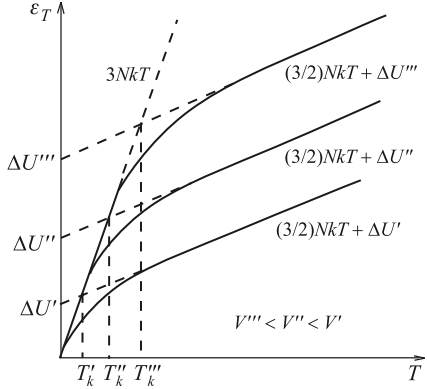


Рис. 11.5. Зависимость тепловой энергии от температуры при разных плотностях (объемах)

При температурах T , значительно превышающих T_0 , можно пренебречь отличием $c_V T_0$ от ε_0 , так как обе эти величины малы по сравнению с $c_V T$. При этом

$$\varepsilon_T = c_V T, \quad c_V = 3Nk. \quad (11.7)$$

Теплоемкость равна $3k$ на атом лишь в том случае, если тепловое движение атомов имеет колебательный характер. При достаточно высоких температурах атомы свободно перемещаются по телу; теплоемкость соответствует только поступательным степеням свободы атомов и равна $(3/2)k$ на атом, как в одноатомном газе. Переход от колебательного движения атомов к поступательному и связанное с ним уменьшение теплоемкости происходит постепенно в области таких температур, при которых кинетическая энергия атома $(3/2)kT$ порядка высоты потенциального барьера для перемещений атомов в теле $\Delta U/N$. Эффективной границей, разделяющей области с предельными значениями теплоемкости $3k$ и $(3/2)k$, может служить температура:

$$T_k = \frac{2}{3} \frac{\Delta U}{kN}. \quad (11.8)$$

При высоких температурах $T \gg T_k$ тепловую энергию одного атома можно представить в виде суммы кинетической энергии поступательного движения $(3/2)kT$ и среднего значения потенциальной, которая в случае малых колебаний также равнялась $(3/2)kT$, а теперь порядка $\Delta U/k$.

Это находится в соответствии с эффективным определением теплоемкости разрывной формулой:

$$c_V = 3Nk \quad \text{при} \quad T < T_\kappa; \quad c_V = \frac{3}{2}Nk \quad \text{при} \quad T > T_\kappa.$$

Если $T > T_\kappa$, энергия равна при этом

$$\varepsilon_\tau = \int_0^T c_V dT = \int_0^{T_\kappa} 3Nk dT + \int_{T_\kappa}^T \frac{3}{2}Nk dT = \frac{3}{2}NkT + \Delta U. \quad (11.9)$$

Для примера укажем, что в железе нормальной плотности

$$\Delta U \approx 2,5 \text{ эВ} \quad \text{и} \quad T_\kappa \approx 20\,000 \text{ К.}$$

При сжатии тела высота потенциального барьера возрастает, растет и граничная температура T_κ , так что кривые зависимости тепловой энергии от температуры при разных плотностях (объемах) имеют вид, схематически изображенный на рис. 11.5.

В предельном случае $T \gg T_\kappa$, когда тепловое движение атомов (точнее, ядер) не отличается от газового, тепловое давление, связанное с этим движением, равно, как обычно,

$$p_\tau = nkT = \frac{NkT}{V} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_\tau}{V}.$$

§ 4. Уравнение состояния тела, атомы которого совершают малые колебания. Будем считать, что атомы тела совершают малые колебания около положений равновесия, и найдем отвечающую этим колебаниям величину теплового давления $p_\tau(V, T)$. Если температура не слишком высока и электронным возбуждением можно пренебречь, уравнение состояния и внутреннюю энергию тела при этом можно записать в виде

$$p = p_x(V) + p_\tau(V, T), \quad (11.10)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x(V) + 3NkT. \quad (11.11)$$

Температурную зависимость теплового давления можно сразу же установить при помощи общего термодинамического тождества:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (11.12)$$

Упругие члены, в соответствии с уравнением (11.1), удовлетворяют этому соотношению автоматически. Замечая, что теплоемкость $c_V = 3Nk$ не зависит от объема, получим из формулы (11.12), что тепловое давление пропорционально температуре: $p_\tau = \varphi(V)T$, где $\varphi(V)$ — некоторая функция объема.

Перепишем эту формулу в виде

$$p_\tau = \Gamma(V) \frac{c_V T}{V} = \Gamma(V) \frac{\varepsilon_\tau}{V}. \quad (11.13)$$

Величина Γ , характеризующая отношение теплового давления к тепловой энергии решетки, называется коэффициентом Грюнайзена. Коэффициент Грюнайзена при нормальном объеме тела $\Gamma_0 = \Gamma(V_0)$ связан с другими параметрами вещества известным термодинамическим соотношением (см., например, [16]):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -1. \quad (11.14)$$

Поскольку $-1/V_0 (\partial V/\partial p)_T = \kappa_0$ есть изотермическая сжимаемость вещества при нормальных условиях, а $1/V_0 (\partial V/\partial T)_p = \alpha$ — коэффициент объемного теплового расширения, получим

$$\Gamma_0 = \frac{V_0 \alpha}{c_V \kappa_0} = \frac{\alpha}{\varrho_0 c_V \kappa_0} = \frac{\alpha c_0^2}{c_V} \quad (11.15)$$

(c_0 — скорость звука, определяемая сжимаемостью).

Параметры нескольких металлов при нормальных условиях приведены в табл. 11.1, взятой из работы [3]¹⁾.

Коэффициент Грюнайзена Γ соответствует уменьшенному на единицу показателю адиабаты в случае идеального газа с постоянной теплоемкостью (вспомним уравнение состояния газа $p = (\gamma - 1) \frac{\varepsilon}{V}$).

Таблица 11.1. Некоторые характеристики металлов при нормальных условиях

	Al	Cu	Pb
ϱ_0 , г/см ³	2,71	8,93	11,34
$c_V \cdot 10^{-6}$, эрг/г · К	8,96	3,82	1,29
$\kappa_0 \cdot 10^{12}$, см ² /дин	1,37	0,73	2,42
$\alpha \cdot 10^5$, К ⁻¹	2,31	1,65	2,9
Γ_0	2,09	1,98	2,46
c_0 , км/с	5,2	3,95	1,91
$\varepsilon \cdot 10^{-8}$, эрг/г	16,1	7,71	3,23
β_0 , эрг/г · К ²	500	110	144

В силу принятого при выводе формулы (11.13) условия, что теплоемкость c_V не зависит от объема, коэффициент Грюнайзена оказался не зависящим от температуры. В действительности же, в пределе очень высоких температур, когда тепловое движение атомов (ядер) становится хаотическим, уравнение (11.13) должно превращаться в уравнение состояния одноатомного газа, т. е. $\Gamma \rightarrow 2/3$ при $T \rightarrow \infty$. Если представить себе, что атомы тела разъединяются и разводятся на большие расстояния внешней силой (объем растет), вещество превращается в газ даже при низкой температуре, так что формально при $V \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow 2/3$. Как видно из таблицы, в нормальных условиях коэффициенты Грюнайзена металлов близки к двум.

Для того чтобы выяснить физический смысл произвольной функции — коэффициента Грюнайзена $\Gamma(V)$, которая появилась формально в результате интегрирования термодинамического тождества (11.12), следует обратиться к известному из статистической физики выражению для свободной энергии тела, атомы которого совершают гармонические колебания. При высоких температурах, когда kT много больше энергии колебательных квантов $h\nu$, удельная свободная энергия равна (см. [16])

$$F = \varepsilon_x(V) + 3NkT \ln \frac{h\bar{\nu}}{kT}, \quad (11.16)$$

где $\bar{\nu}$ — некоторая средняя частота колебаний, которая связана с дебаевской температурой θ соотношением $h\bar{\nu} = e^{-1/3} k\theta = 0,715 k\theta$ (например, у железа $\theta = 420$ К). Первый член в (11.16) представляет собой потенциальную энергию взаимодействия атомов, совпадающую с энергией холодного тела. Второй член описывает тепловую

¹⁾ О том, что такое β_0 , будет сказано в следующем параграфе.

часть свободной энергии. Из формулы (11.16) с помощью общих термодинамических соотношений легко найти удельную внутреннюю энергию и давление тела:

$$\varepsilon = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \varepsilon_x(V) + 3NkT = \varepsilon_x + \varepsilon_T$$

(мы, естественно, пришли к формуле (11.11)) и

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = -\frac{d\varepsilon_x}{dV} - 3NkT \frac{\partial \ln \bar{v}}{\partial V}.$$

Первое слагаемое дает уже известное нам упругое давление, а второе — тепловое. Принимая во внимание определение коэффициента Грюнайзена (11.13), найдем

$$\Gamma(V) = -\frac{\partial \ln \bar{v}}{\partial \ln V}. \quad (11.17)$$

Коэффициент Грюнайзена можно связать с функцией холодного сжатия путем следующего простого рассуждения. Средняя частота спектра упругих колебаний решетки $\bar{v}$, очевидно, близка к максимальной частоте. Максимальная частота по порядку величины равна отношению скорости распространения упругих волн объемного сжатия c_0 к минимальной длине волны, которая в свою очередь порядка межатомного расстояния r_0 , так что $\bar{v} \sim c_0/r_0$. Но скорость звука $c_0 = \left(-V^2 \frac{dp_x}{dV}\right)^{1/2}$, а $r_0 \sim V^{1/3}$, откуда

$$\bar{v} \sim V^{2/3} \left(-\frac{dp_x}{dV}\right)^{1/2}.$$

Взяв логарифмическую производную от этого выражения, получим

$$\Gamma(V) = -\frac{\partial \ln \bar{v}}{\partial \ln V} = -\frac{2}{3} - \frac{V}{2} \left(\frac{d^2 p_x}{dV^2}\right) / \left(\frac{dp_x}{dV}\right). \quad (11.18)$$

Эта формула была получена Слэтером [17] и Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем [18].

Опыт показывает, что коэффициенты Грюнайзена несколько уменьшаются при сжатии (при уменьшении удельного объема V).

Чтобы представить себе порядок величины теплового давления (11.13), укажем, что если, например, нагреть алюминий при постоянном объеме, равном нормальному, до температуры 1000 К, то давление в нем поднимется до величины $p_T = 51\,000$ атм.

При нагревании твердого тела в обычных условиях, т. е. при постоянном атмосферном давлении, тело расширяется. Причина теплового расширения тел совершенно ясна, стоит только взглянуть на формулу для давления (11.10). При нагревании положительное тепловое давление p_T возрастает. Для того чтобы полное давление осталось неизменным, упругое давление p_x должно стать отрицательным, т. е. тело должно расшириться до тех пор, пока силы сцепления, удерживающие атомы в решетке, или отрицательное давление не уравновесят расталкивающее действие положительного теплового давления. Отсюда становится ясной связь между коэффициентами Грюнайзена, теплового расширения и сжимаемости, которая выражается формулой (11.15). В самом деле, небольшое расширение при постоянном давлении

связано с небольшим нагреванием условием

$$dp = dp_x + dp_\tau \approx \frac{dp_x}{dV} dV + \frac{\partial p_\tau}{\partial T} dT = \frac{dp_x}{dV} dV + \Gamma_0 \frac{c_V}{V_0} dT = 0,$$

откуда и следуют соотношения (11.14) и (11.15) ¹⁾.

Оценим для примера, насколько расширяется алюминий, если нагреть его при постоянном давлении (нулевом или атмосферном, что практически все равно) от абсолютного нуля до комнатной температуры $T = 300$ К. Пользуясь константами, приведенными в табл. 11.1, найдем $\frac{\Delta V}{V} \approx \Gamma_0 \frac{c_V}{V_0} \approx 0.02 \Delta T \approx 2\%$ ($\Delta T = 300$ К).

При этом в состоянии с $T_0 = 300$ К тепловое давление так же, как и абсолютная величина упругого, равно $p_{T_0} = 17\,000$ атм. Отсюда и видно, что атмосферное давление всегда можно считать равным нулю, так как оно ничтожно мало по сравнению с обеими составляющими давления даже при комнатной температуре.

Если известна функция $\Gamma(V)$, легко найти и энтропию вещества. Рассматривая состояния, мало отличающиеся по плотности от нормального, можно считать Γ постоянным и равным своему нормальному значению Γ_0 . При этом для энтропии получим уравнение

$$dS = \frac{d\varepsilon + p dV}{T} = \frac{d\varepsilon_\tau + p_\tau dV}{T} = c_V \frac{dT}{T} + \Gamma_0 c_V \frac{dV}{V},$$

откуда удельная энтропия равна

$$S = c_V \ln \frac{T}{T_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\Gamma_0} + S_0, \quad (11.19)$$

где S_0 — энтропия при нормальных условиях T_0, V_0 , которую обычно можно найти в таблицах. Адиабатическая связь температуры и объема дается уравнением

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\Gamma_0} \quad 2). \quad (11.20)$$

Выражая температуру через давление с помощью уравнения состояния

$$p = p_x(V) + \Gamma_0 \frac{c_V T}{V}, \quad (11.21)$$

найдем адиабатическую связь давления и объема:

$$\frac{p - p_x(V)}{p_{T_0}} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\Gamma_0 + 1}, \quad (11.22)$$

где $p_{T_0} = \Gamma_0 c_V T_0 / V_0$ — тепловая составляющая давления при нормальных условиях ³⁾. При небольших сжатиях, которые тем не менее сопровождаются резким повышением давления (по сравнению с атмосферным, но не с p_{T_0}), адиабата $p(V)$ стелется на почти постоянном расстоянии от кривой холодного сжатия $p_x(V)$.

¹⁾ Мы рассматриваем только вещества с нормальными свойствами, расширяющиеся при нагревании.

²⁾ Сравните с адиабатической связью T и V в газе с постоянной теплоемкостью $T \sim V^{-(\gamma-1)}$; Γ соответствует $\gamma - 1$.

³⁾ Изотерма есть $[p - p_x(V)]/p_{T_0} = V_0/V$. При малых изменениях объема изотерма почти совпадает с адиабатой (изменение давления при этом большое).

При относительно больших сжатиях (в 1,5–2 раза) $p \gg p_{T_0}$ и относительное отклонение адиабаты от кривой холодного сжатия $[p - p_x(V)]/p_x(V)$ становится малым.

§ 5. Тепловое возбуждение электронов. В простейшей модели металлических тел внешние, валентные электроны атомов металла сорваны со своих мест в атомах и все вместе образуют свободный электронный газ, целиком заполняющий кристаллическое тело, в узлах которого располагаются ионы или атомные остатки ¹⁾. Электронный газ подчиняется квантовой статистике Ферми–Дирака, элементы которой были изложены в § 12 гл. III.

При абсолютном нуле температуры электронный газ полностью вырожден; в соответствии с принципом Паули электроны занимают наиболее низкие энергетические состояния и обладают кинетической энергией, не превышающей граничной энергии Ферми (3.88):

$$E_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}$$

(n_e — число свободных электронов в 1 см³; m_e — масса электрона).

Энергия E_0 в металлах имеет обычно порядок нескольких электронвольт, а соответствующая ей температура вырождения $T^* = E_0/k$ — порядка нескольких десятков тысяч градусов ²⁾.

Кинетическая энергия полностью вырожденного электронного газа, которая порядка E_0 на один электрон, включается в упругую энергию тела и не имеет отношения к тепловой энергии. Точно так же соответствующее ей «кинетическое» давление включается в упругое давление наряду с «потенциальным» давлением, обусловленным электростатическим взаимодействием электронов и ионов. В сумме это полное давление нетеплового происхождения равно нулю, если тело находится в вакууме при абсолютном нуле температуры.

При повышении температуры электроны частично переходят в более высокие энергетические состояния, превышающие граничную энергию Ферми, и энергия электронного газа повышается.

Если температура T гораздо меньше температуры Ферми T^* , то, грубо говоря, из первоначальной сферы Ферми в пространстве импульсов вырываются электроны, отстоящие от границы Ферми на энергетическом расстоянии порядка kT . Число возбужденных электронов составляет долю порядка kT/E_0 от полного числа электронов. Каждый из них приобретает дополнительную энергию порядка kT . Таким образом, тепловая энергия на один электрон по порядку величины равна $(kT/E_0)kT$ и пропорциональна $V^{2/3}T^2$ (так как $E_0 \sim n_e^{2/3} \sim V^{-2/3}$). С учетом численного коэффициента тепловая энергия электронов, рассчитанная на 1 г металла при $T \ll T^*$, оказывается равной (см., например, [16])

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}\beta T^2, \quad (11.23)$$

где коэффициент β зависит от плотности вещества и равен

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{2/3}, \quad \beta_0 = \frac{4\pi^4}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{k^2 m_e}{h^2} N_e^{1/3} V_0^{2/3} \quad (11.24)$$

¹⁾ Мы ограничимся здесь элементарными представлениями, не касаясь современной электронной теории металлов.

²⁾ Например, $T^* = 37\,000$ К у Na; $24\,000$ К у K; $64\,000$ К у Ag; $82\,000$ К у Cu.

(N_e — число свободных электронов в 1 г металла; V_0 — нормальный удельный объем металла). Удельная теплоемкость при постоянном объеме пропорциональна температуре и равна

$$c_{Ve} = \beta T. \quad (11.25)$$

Зная число свободных электронов, приходящихся на атом металла, можно по формуле (11.24) вычислить коэффициент β_0 и найти электронную теплоемкость при данной температуре. На опыте электронную теплоемкость измеряют при очень низких температурах, при которых теплоемкость решетки подчиняется квантовым законам и пропорциональна T^3 . При достаточно низких температурах преобладает электронная теплоемкость, пропорциональная только первой степени T , и ее можно измерить. При комнатной же температуре электронная теплоемкость обычно в десятки и даже в сто раз меньше теплоемкости решетки, которая в этих условиях постоянна и равна своей классической величине $c_V = 3Nk$.

Экспериментальные значения коэффициентов электронной теплоемкости β_0 для нескольких металлов приведены в табл. 11.1¹⁾.

Если сопоставить значения теплоемкостей электронов и решетки при различных температурах, то можно видеть, что уже при температуре порядка 10 000 К электронная теплоемкость становится весьма заметной, а, скажем, при 50 000 К даже больше, чем теплоемкость решетки. Следует, однако, иметь в виду, что зависимость (11.25) справедлива только до тех пор, пока температура меньше температуры Ферми.

При $T \gg T^*$ свободный электронный газ с постоянным числом электронов не вырожден, и его теплоемкость равна классическому значению $c_{Ve} = (3/2)N_e k$. В действительности же при высоких температурах возрастает само число «свободных» электронов, и электронная теплоемкость вещества не описывается простыми формулами. Вопрос об электронной теплоемкости плотного газа при высоких температурах подробно обсуждался в § 14 гл. III.

При температурах порядка 10 000–20 000 К, которые были достигнуты в опытах по ударному сжатию металлов, до такого положения еще далеко, и теплоемкость электронов можно приближенно считать пропорциональной температуре, как это следует из формулы (11.25). Надо сказать, что температура вырождения T^* возрастает при сжатии металла ($T^* \sim V^{-2/3}$), так что температурная область, в которой справедливо приближение $\varepsilon_e \sim T^2$, $c_{Ve} \sim T$, в сжатом веществе больше, чем при нормальной плотности.

Согласно уравнению состояния для свободного электронного газа (как вырожденного, так и невырожденного), тепловая часть давления электронов равна

$$p_e = \frac{2\varepsilon_e}{3V} = \frac{1}{3}\beta \frac{T^2}{V} \sim V^{1/3}T^2. \quad (11.26)$$

Если определить «коэффициент Грюнайзена» для электронов Γ_e соотношением, аналогичным (11.13),

$$p_e = \Gamma_e \frac{\varepsilon_e}{V}, \quad (11.27)$$

то для свободного электронного газа он окажется равным 2/3.

С. Б. Кормером [3] был проведен детальный анализ температурного поведения электронов на основе статистических моделей атомной ячейки по Томасу–Ферми и Томасу–Ферми–Дираку (см. § 12–14 гл. III). Были привлечены приближенные расчеты Гильвари [19], который рассматривал температурные члены как поправку по отношению к модели холодного атома Томаса–Ферми, расчеты Латтера [20],

¹⁾ Они совпадают по порядку величины с вычисленными по формуле (11.24).

о которых шла речь в § 14 гл. III, и экспериментальные данные. Этот анализ показал, что до температур порядка 30 000–50 000 К теплоемкость электронов, как и в модели свободных электронов, пропорциональна температуре: $c_{Ve} \sim T$, $\varepsilon_e \sim T^2$, причем с ростом плотности такая закономерность сохраняется до все более высоких температур.

Что же касается теплового давления, то коэффициент Γ_e оказывается равным $2/3$ только в предельных случаях очень высоких температур или очень больших плотностей, когда кинетическая энергия электронов гораздо больше кулоновской. В реализованной на опытах по ударному сжатию области температур и плотностей величина Γ_e несколько меньше; она равна примерно 0,5–0,6. В результате оказалось, что можно с достаточной степенью точности принять $\Gamma_e = \text{const} = 1/2$.

Для того чтобы не вступить при этом в противоречие с термодинамическим тождеством (11.12), вместе с изменением коэффициента Γ_e необходимо одновременно изменить связанный с ним показатель степени в зависимости энергии от объема, а именно, следует вместо $\varepsilon_e \sim V^{2/3}T^2$ принять зависимость $\varepsilon_e \sim V^{1/2}T^2$ ¹⁾.

Полагая коэффициент электронной теплоемкости при нормальном объеме равным своему экспериментальному значению, можно согласно С. Б. Кормеру записать приближенно, при $T < 30\,000\text{--}50\,000\text{ К}$:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2}\beta T^2, \quad \beta = \beta_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/2}, \quad (11.28)$$

$$p_e = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_e}{V}. \quad (11.29)$$

§ 6. Трехчленное уравнение состояния. Резюмируем коротко результаты § 2–5. Удельную внутреннюю энергию и давление твердого или жидкого вещества можно представить в виде сумм трех составляющих, которые описывают упругие свойства холодного тела, тепловое движение атомов (ядер) и тепловое возбуждение электронов. Рассматривая не слишком высокие температуры, не выше нескольких десятков тысяч градусов (и большие сжатия), можно в порядке приближения считать, что атомы совершают малые колебания и что теплоемкость их равна $c_V = 3Nk$. Электронные члены при таких температурах описываются приближенными формулами (11.28), (11.29). Таким образом, энергия и давление равны:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_x(V) + \varepsilon_T + \varepsilon_e, & p &= p_x(V) + p_T + p_e, \\ \varepsilon_x(V) &= \int_V^{V_{0k}} p_x(V) dV, \\ \varepsilon_T &= 3Nk(T - T_0) + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_e &= \frac{1}{2}\beta_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/2} T^2, \\ p_T &= \Gamma(V) \frac{\varepsilon_T}{V}, & p_e &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_e}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (11.30)$$

T_0 — комнатная температура; ε_0 — тепловая энергия атомной решетки при комнатной температуре, которая берется из таблиц. Коэффициент электронной теплоемкости при нормальном объеме β_0 берется из опытов по измерению теплоемкости при очень низких температурах.

¹⁾ Легко проверить, что при зависимости $\varepsilon_e \sim V^\kappa T^2$ и уравнении состояния $p = \Gamma_e \varepsilon_e / V$ с $\Gamma_e = \text{const}$ термодинамическое тождество удовлетворяется только при $\kappa = \Gamma_e$.

Коэффициент Грюнайзена $\Gamma(V)$ связан с функцией $p_x(V)$ дифференциальным соотношением (11.18). Остается только одна неизвестная величина — упругое давление как функция объема $p_x(V)$, которая должна находиться экспериментальным путем.

2. Ударная адиабата

§ 7. Ударная адиабата конденсированного вещества. Законы сохранения потоков массы импульса и энергии на фронте ударной волны (1.61)–(1.63) имеют совершенно общее значение, безотносительно к агрегатному состоянию вещества, по которому распространяется волна. Поскольку даже в очень слабых ударных волнах давления измеряются тысячами атмосфер, начальным атмосферным давлением всегда можно пренебречь, считая его равным нулю. Обозначим, как обычно, через D — скорость распространения ударной волны по невозмущенному веществу, а через u — скачок массовой скорости во фронте, равный скорости вещества за фронтом (в лабораторной системе координат), если перед фронтом вещество покоится. Опуская индекс у величин за фронтом, запишем законы сохранения массы и импульса в виде

$$\frac{V_0}{V} = \frac{D}{(D - u)}, \quad (11.31)$$

$$p = \frac{Du}{V_0}. \quad (11.32)$$

Исключая из этих уравнений скорость u , получим

$$p = \frac{D^2}{V_0} \left(1 - \frac{V}{V_0} \right). \quad (11.33)$$

В качестве третьего, энергетического соотношения возьмем уравнение ударной адиабаты (1.71) с $p_0 = 0$:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{2} p (V_0 - V). \quad (11.34)$$

Полная энергия, приобретаемая 1 г вещества в результате ударного сжатия $p(V_0 - V)$, распределяется поровну между кинетической $u^2/2$ и внутренней $\varepsilon - \varepsilon_0$ энергиями (в системе координат, где невозмущенное вещество покоится). Изменение внутренней энергии в свою очередь складывается из изменений упругой энергии и тепловой.

Рассмотрим сначала ударную волну, распространяющуюся по телу с нулевой температурой: $T_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $V_0 = V_{0к}$. Проведем на диаграмме p, V (рис. 11.6) адиабату холодного сжатия $p_x(V)$ и ударную адиабату $p_H(V)$, которая, естественно, проходит выше, так как полное давление за фронтом складывается из упругого и теплового. Упругая энергия ε_x , приобретаемая веществом, численно равна площади криволиней-

ного треугольника OBC , заштрихованного горизонтально $\left(\varepsilon_x = \int_V^{V_{0к}} p_x dV \right)$. Полная

внутренняя энергия ε , согласно (11.34), равняется площади треугольника OAC ; разность площадей, заштрихованная вертикально, и составляет тепловую энергию вещества, которое подверглось ударному сжатию. Как видно из рис. 11.6, площадь OAC обязательно больше площади OBC , если только кривая холодного сжатия выпуклая по отношению к оси объемов ($d^2 p_x / dV^2 > 0$), что обычно всегда и бывает. Поэтому в ударной волне вещество всегда нагревается, и энтропия его повышается. Это совершенно общее положение, наглядно продемонстрированное в гл. I на конкретном примере идеального газа с постоянной теплоемкостью, с не меньшей наглядностью вытекает в случае твердого тела из упругих свойств вещества.

Рассмотрим теперь ударное сжатие тела, первоначально находившегося при нормальных условиях V_0 , T_0 . При этом начальное упругое давление отрицательно, и кривая $p_x(V)$ располагается так, как это изображено на рис. 11.7. Обычная адиабата или изэнтропа $p_S(V, S_0)$, проходящая через начальное состояние, при уменьшении объема несколько отклоняется вверх от кривой холодного сжатия.

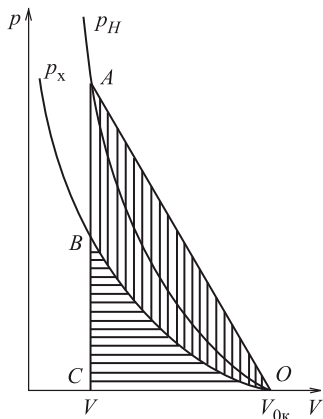


Рис. 11.6. p, V -диаграмма для ударного сжатия холодного вещества. p_H — ударная адиабата; p_x — кривая холодного сжатия

становится значительным вследствие усиления роли тепловых составляющих энергии и давления, или, что то же самое, вследствие заметного возрастания энтропии. Картина при этом такая же, как и на рис. 11.6, где можно считать $V_{0к} = V_0$ и адиабату p_{S_0} совпадающей с кривой холодного сжатия.

В ударных волнах с давлениями порядка миллиона атмосфер тепловая энергия, связанная с увеличением энтропии вещества, сравнима с полной энергией. Точно так же тепловое давление сравнимо с полным давлением. Это иллюстрируется рис. 11.8, взятым из работы [3], на котором представлены экспериментальные ударные адиабаты меди и свинца до давлений порядка $4 \cdot 10^6$ атм и полученные на основе опытов расчетным путем кривые холодного сжатия (по оси абсцисс отложен не объем, а величина сжатия, $\varrho/\varrho_0 = V_0/V$)¹⁾.

Рассматривая табл. 11.2, можно получить представление об относительной роли всех составляющих давления и энергии при разных давлениях ударного сжатия²⁾.

Из таблицы следует, что при ударном сжатии свинца в 2,2 раза вещество за фронтом нагревается до температуры 26 400 К; при этом тепловое давление составляет 32 % от полного, а тепловая энергия — 69 % от полной, причем половина тепловой энергии принадлежит электронам, а половина — колебаниям атомов. Тепловое давление электронов составляет 34 % от суммарного теплового давления.

В качественном отношении поведение всех других исследованных металлов при увеличении амплитуды волны одинаково. Количественные данные можно найти в работе [3] и обзоре Л. В. Альтшулера [55]; мы их здесь приводить не будем.

¹⁾ Об этих опытах и о методике получения экспериментальной кривой холодной сжимаемости см. § 12, 13.

²⁾ Таблица взята из работы [3]. Для полноты картины в нее добавлены некоторые величины. Эти величины вычислены с помощью приведенных в [3] констант.

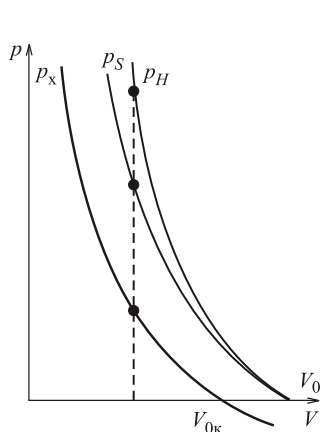


Рис. 11.7. p, V -диаграмма для ударного сжатия твердого тела, нагретого до комнатной температуры. p_H — ударная адиабата; p_s — изэнтропа; p_x — кривая холодного сжатия

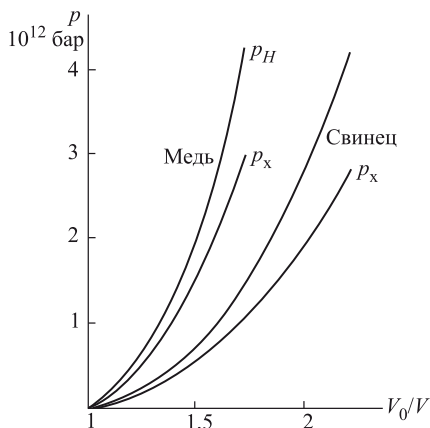


Рис. 11.8. Ударные адиабаты и кривые холодного сжатия меди и свинца

Таблица 11.2. Параметры за фронтом ударной волны в свинце

ϱ/ϱ_0	p	p_x	p_τ	p_e	$\varepsilon - \varepsilon_0$	ε_x	$c_V(T - T_0)$	ε_e	Γ	$T, \text{ K}$
	$\text{B } 10^{10} \text{ дин/см}^2 = 10^4 \text{ атм}$				$\text{B } 10^8 \text{ эрг/г}$					
1,3	25,0	21,6	3,35	0,051	25,4	15,3	9,6	0,69	1,9	1045
1,5	65,5	51,0	13,9	0,63	96,3	46,7	42,3	7,4	1,77	3580
1,7	133,0	95,3	34,0	3,8	242,0	95,8	107,0	39,4	1,60	8600
1,9	225,5	156,0	56,0	12,7	471,0	163,2	191,0	118,0	1,35	15100
2,1	335,5	233,0	73,0	29,0	775,0	248,0	284,0	243,0	1,07	22300
2,2	401,0	277,0	93,0	41,5	965,0	297,0	337,0	332,0	0,98	26400

Чем больше амплитуда ударной волны, тем большую роль играют тепловые составляющие давления и энергии. При очень высоких давлениях порядка сотен миллионов атмосфер и выше, роль «упругих» составляющих становится малой, и вещество ведет себя практически как идеальный газ (идеальный в смысле отсутствия взаимодействия между частицами). Соответственно и ударная адиабата в этих условиях в принципе не отличается от ударной адиабаты идеального газа (с учетом процессов «ионизации»; см. гл. III), т.е. и для твердого тела существует предельное сжатие в ударной волне. В пределе $p \rightarrow \infty$ температура также стремится к бесконечности, атомы полностью ионизируются, и вещество превращается в идеальный, классический электронно-ядерный газ с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, которому соответствует предельное сжатие, равное 4 (если отвлечься от эффектов, связанных с излучением; см. гл. III).

§ 8. Аналитические представления ударной адиабаты. С помощью термодинамических функций $p(V, T)$, $\varepsilon(T, V)$ в принципе можно найти в явной форме уравнение ударной адиабаты $p_H(V, V_0)$. Фактически же это сделать нельзя, так как неизвестна теоретическая зависимость упругого давления от объема — функция $p_x(V)$. Полезно, однако, записать уравнение ударной адиабаты, оставляя в нем неизвестную

функцию $p_x(V)$. Будем рассматривать ударные волны не слишком большой амплитуды, в которых можно пренебречь электронными составляющими давлениями энергии и считать коэффициент Грюнайзена Γ постоянным и равным своему значению при нормальных условиях Γ_0 . В то же время будем считать, что волна и не слишком слабая, так что можно пренебречь начальной энергией невозмущенного вещества ε_0 . Фактически это соответствует тому, что мы считаем начальную температуру равной нулю и не делаем различия между нормальным объемом V_0 и нулевым объемом $V_{0к}$.

Подставим в уравнение ударной адиабаты (11.34) энергию $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_\tau$, выразив тепловую часть ее ε_τ через давление по формуле (11.21):

$$p - p_x = p_\tau = \Gamma_0 \frac{\varepsilon_\tau}{V}; \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \frac{V(p - p_x)}{\Gamma_0}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно p , найдем уравнение ударной адиабаты в форме

$$p_H = \frac{(h - 1)p_x(V) - 2\varepsilon_x(V)/V}{h - V_0/V}, \quad \varepsilon_x = \int_V^{V_{0к}} p_x(V) dV, \quad (11.35)$$

где через h обозначена величина $h = 2/\Gamma_0 + 1$.

Если формально распространить формулу (11.35) на ударные волны очень большой амплитуды, то получим, что в пределе $p_H \rightarrow \infty$, $V_0/V = h$, т. е. формально h представляет собой «предельное сжатие» в ударной волне. Положение здесь вполне аналогично тому, которое имеет место в идеальном газе с постоянной теплоемкостью. Вспомним, что показатель Грюнайзена Γ соответствует уменьшенному на единицу показателю адиабаты γ . Отсюда «предельное сжатие» h соответствует величине $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ — предельному сжатию для газов.

Формальная аналогия с газами связана с тем, что в пределе $p_H \rightarrow \infty$ тепловое давление играет основную роль ($p_\tau = p_H - p_x \rightarrow \infty$, тогда как $p_x(V) \rightarrow \text{const}$), и уравнение состояния в этом случае не отличается от газового.

Иногда бывает удобно представить ударную адиабату в аналитическом виде, воспользовавшись какой-либо интерполяционной формулой. Опыт показывает, что в широком диапазоне амплитуд ударных волн зависимость между скоростью фронта и скоростью вещества за фронтом (относительно невозмущенного) является линейной:

$$D = A + Bu. \quad (11.36)$$

Так, например, для железа $A = 3,8$ км/с, $B = 1,58$ ¹⁾. С помощью соотношения (11.36) по формуле (11.34), (11.32) легко найти уравнение ударной адиабаты:

$$p_H = \frac{A^2(V_0 - V)}{(B - 1)^2 V^2 \left[\frac{B}{B - 1} - \frac{V_0}{V} \right]^2}. \quad (11.37)$$

Ударную адиабату $p_H(V, V_0)$ можно интерполировать полиномами типа

$$p_H = \sum_{k=1}^m a_k \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^k,$$

¹⁾ Формулу (11.36) нельзя экстраполировать к малым амплитудам $p \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, так что константа A не есть скорость звука в нормальном состоянии.

определяя постоянные коэффициенты частично из результатов опытов по ударному сжатию, а частично через параметры вещества в нормальном состоянии.

§ 9. Ударные волны слабой интенсивности. Область давлений порядка нескольких десятков и сотни тысяч атмосфер имеет большое значение для практики. Это — типичные давления, которые развиваются при детонации взрывчатых веществ, при взрывах в воде, при ударе продуктов детонации о металлические преграды и т. д. В области изэнтропического течения часто используют эмпирическое уравнение состояния конденсированного вещества типа

$$p = A(S) \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^n - 1 \right], \quad (11.38)$$

в котором показатель n считается постоянным, а коэффициент A — зависящим от энтропии; фактически его тоже всегда считают константой. Постоянные A и n связаны между собой соотношением, в которое входит сжимаемость вещества при нормальных условиях (скорость звука):

$$c_0^2 = -V_0^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = V_0 A n. \quad (11.39)$$

Ф. А. Баум, К. П. Станюкович и Б. И. Шехтер [21] в соответствии с данными Иенсена принимали для металлов показатель n равным 4 и вычисляли по формуле (11.39) постоянные A для ряда металлов через опытные значения сжимаемости.

При этом в ряде случаев получалось хорошее совпадение со значениями A , которые определялись теми же авторами на опыте. Так, например, для железа $A_{\text{расч}} = 5 \cdot 10^5$ атм, что на 11 % больше экспериментального. Для меди $A_{\text{расч}} = 2,5 \cdot 10^5$ атм, что на 6 % больше экспериментального; для дюралюминия $A_{\text{расч}} = 2,03 \cdot 10^5$ атм и практически совпадает с опытным значением. Для воды обычно принимают $n \approx 7-8$ и $A \approx 3000$ атм.

При расчетах течений с ударными волнами в области указанных давлений можно в первом приближении пренебрегать изменением энтропии в ударной волне и пользоваться адиабатическим уравнением состояния (11.38) с $A = \text{const}$ для связи давления и сжатия во фронте волны. При этом скорости D и u находятся из первых двух соотношений на фронте ударной волны (11.31), (11.32) или (11.31), (11.33). Энергетическое уравнение (11.34) можно при этом использовать для того, чтобы в следующем приближении оценить приращение внутренней энергии, связанное с необратимостью ударного сжатия. В самом деле, если рассматривать (11.38) как уравнение изэнтропы, то внутреннюю энергию в зависимости от V можно найти, воспользовавшись уравнением $TdS = d\varepsilon + p dV = 0$:

$$\varepsilon(V) - \varepsilon_0 = - \int_{V_0}^V p dV = A V_0 \left\{ \frac{1}{n-1} \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{n-1} - 1 \right] - \left[1 - \frac{V}{V_0} \right] \right\}.$$

Уравнение энергии (11.34) на фронте ударной волны с этим значением энергии и значением давления по (11.38), естественно, не удовлетворяется. Разность

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{2} p (V_0 - V) - \int_V^{V_0} (p dV)_{S=\text{const}},$$

по определению, равняется приращению внутренней энергии, связанному с возрастанием энтропии в ударной волне. Малость этой величины по сравнению с полным

приращением энергии в ударной волне $\varepsilon - \varepsilon_0$ и является условием справедливости приближения «адиабатичности» ударного сжатия.

Вычисление отношения $\Delta\varepsilon/(\varepsilon - \varepsilon_0)$ при $n = 4$ показывает, что при $V_0/V = 1,1$ это отношение равно 4,5%, а при $V_0/V = 1,2$ равно 17,5% (отношение не зависит от A). Сжатие в 1,1 раза соответствует давлениям порядка 100 000 атм (у алюминия — 90 000 атм, у железа — 210 000 атм).

Таким образом, при давлениях $\sim 10^5$ атм приближение «адиабатичности» ударного сжатия дает ошибку не более 5% по энергии (по давлению еще меньше), что и позволяет рассматривать ударную волну как акустическую во многих практических расчетах.

§ 10. Ударное сжатие пористого вещества. Своеобразными особенностями обладает процесс ударного сжатия пористых тел. Экспериментальное изучение ударного сжатия одного и того же вещества при различных начальных плотностях позволяет получить значительно более полную информацию о термодинамических свойствах вещества при высоких давлениях и температурах. Пористые тела могут иметь самую различную природу и структуру (порошки, тела с внутренними пустотами, волокнистые тела и т. д.). Все они характеризуются наличием более или менее крупных частиц или участков сплошного вещества с нормальной плотностью

$\varrho_0 = 1/V_0$ и пустых участков, благодаря чему средний удельный объем V_{00} больше нормального V_0 (а средняя плотность ϱ_{00} меньше нормальной ϱ_0). Представим себе, что пористое тело подвергается медленному, всестороннему сжатию. Сначала работа сил внешнего давления затрачивается только на «закрытие» пустот, на уплотнение вещества и приведение его к нормальному объему. Эта работа связана с преодолением сил трения между частицами, с раздроблением частиц, со смятием волокон и т. д.

Для совершения этой работы требуются сравнительно небольшие давления, масштабом которых служат пределы прочности материалов, т. е. для металлов давления порядка тысячи атмосфер, а для многих веществ гораздо меньшие. Если рассматривать сжатия в диапазоне давлений, измеряемых сотней тысяч

атмосфер, то практически на том участке адиабаты, где происходит уплотнение вещества до нормального объема, давление можно считать равным нулю, а адиабату, выходящую из точки V_{00} , представить в виде отрезка оси абсцисс от V_{00} до V_0 ($p = 0$), а затем при сжатии выше нормальной плотности — в виде изэнтропы сплошного вещества (рис. 11.9).

Рассмотрим теперь ударное сжатие пористого тела. Для простоты будем рассматривать ударное сжатие до высоких давлений, измеряемых сотнями тысяч и миллионами атмосфер, так что обычную адиабату сплошного вещества можно считать совпадающей с кривой холодного сжатия.

При этом пренебрегаем эффектами, связанными с прочностью, и отличием начальной температуры $T_0 \approx 300$ от нуля.

Будем считать, что в конечном состоянии за фронтом ударной волны вещество является сплошным и однородным. Из законов сохранения на фронте ударной волны и уравнения состояния вещества следует, что ударная адиабата имеет вид, изображенный на рис. 11.10 (это будет пояснено ниже). Точка, соответствующая нормальному объему V_0 и нулевому давлению $p = 0$, лежит на ударной адиабате. Внутренняя

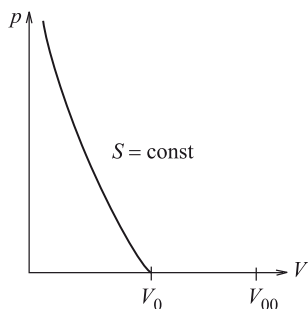


Рис. 11.9. Изэнтропа сжатия пористого вещества

энергия, приобретаемая веществом в ударной волне $\varepsilon = 1/2 p (V_{00} - V)$, равна площади треугольника, заштрихованного горизонтально. Упругая часть ее равна площади криволинейного треугольника, ограниченного кривой $p_x(V)$ и покрытого на рис. 11.10 густой штриховкой. Чем больше начальный объем V_{00} , т. е. чем выше пористость вещества, тем больше разность площадей, отвечающая тепловой части энергии при сжатии пористого вещества до одного и того же конечного объема (упругая энергия при заданном объеме остается неизменной, а полная — растет). Но чем больше тепловая энергия, тем выше и тепловое давление. Поэтому чем выше пористость, тем круче проходит ударная адиабата. В частности, ударная адиабата пористого вещества проходит выше, чем ударная адиабата сплошного, как это показано на рис. 11.10.

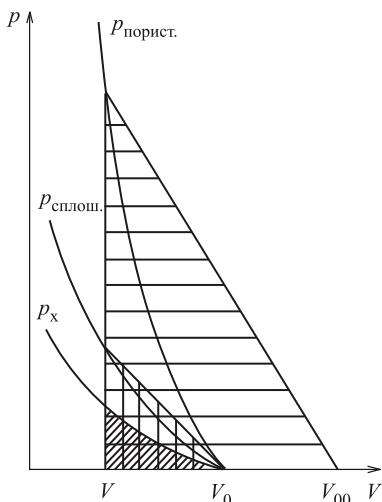


Рис. 11.10. p, V -диаграмма для ударного сжатия пористого вещества. $p_{\text{порист.}}$ — ударная адиабата пористого тела; $p_{\text{сплош.}}$ — ударная адиабата сплошного тела; p_x — кривая холодного сжатия сплошного тела

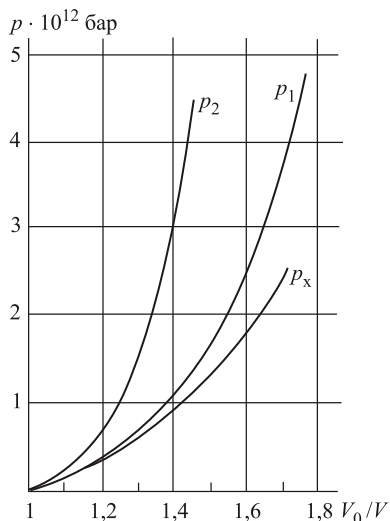


Рис. 11.11. Ударные адиабаты сплошного (p_1) и пористого (p_2) железа. p_x — кривая холодного сжатия

Чтобы сжать пористое вещество до того же самого объема, что и сплошное, нужны более высокие давления, при том тем более высокие, чем выше степень пористости.

Картина не меняется в качественном отношении, если считать начальную температуру (и энтропию) отличными от нуля.

Для того чтобы получить представление о том, насколько резко возрастают тепловые составляющие давления и энергии при ударном сжатии пористого тела по сравнению со сжатием сплошного, приведем экспериментальные кривые ударных адиабат железа с нормальной плотностью и пористого железа с плотностью, пониженной в 1,4 раза ($V_{00} = 1,412 V_0$). Эти кривые (рис. 11.11) взяты из работы [1] (по оси абсцисс отложен не объем, а сжатие по отношению к нормальной плотности V_0/V). Например, при сжатии по отношению к нормальному объему $V_0/V = 1,22$, что соответствует уменьшению объема пористого железа в 1,74 раза ($V_{00}/V = 1,74$), давление в случае пористого железа оказывается в 2,63 раза больше, чем давление для сплошного, а энергия — в 8,64 раза больше.

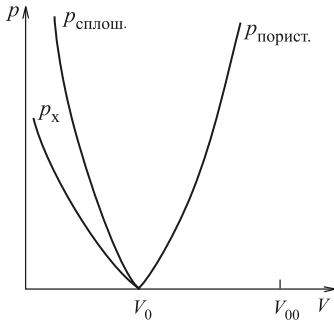


Рис. 11.12. Аномальный ход ударной адиабаты при высокой пористости вещества

в котором под начальным объемом V_0 следует понимать начальный объем пористого вещества V_{00} (при выводе уравнения (11.35) нигде не оговаривалось, что вещество в начальном состоянии — сплошное):

$$p_H(V, V_{00}) = \frac{(h-1)p_x(V) - \frac{2\varepsilon_x(V)}{V}}{h - (V_{00}/V)},$$

$$h = \frac{2}{\Gamma_0} + 1. \quad (11.40)$$

Уравнение (11.40) описывает семейство ударных адиабат, соответствующих различным начальным объемам V_{00} , т.е. различным степеням пористости, которые можно характеризовать коэффициентом $k = V_{00}/V_0 \geq 1$. При $k = 1$, $V_{00} = V_0$ имеем ударную адиабату сплошного вещества. Точка $V = V_0$, $p_H = 0$ удовлетворяет уравнению (11.40) при любом начальном объеме V_{00} (так как $p_x(V_0) = 0$, $\varepsilon_x(V_0) = 0$), так что семейство адиабат представляет собой пучок кривых, выходящих из этой точки. По формуле (11.40) при $V_{00}/V \rightarrow h$, $p_H \rightarrow \infty$, т.е. предельный объем равен $V_{пр} = V_{00}/h$. Если эта величина меньше V_0 , что имеет место при небольшой пористости $k < h$, то ударные адиабаты имеют нормальный ход, причем проходят тем выше, чем больше начальный объем. Если же $V_{пр} > V_0$ (что бывает при высокой пористости, когда $k > h$), то ход кривых аномален: при возрастании давления конечный объем увеличивается. Семейство ударных адиабат, соответствующих различным коэффициентам пористости, показано на рис. 11.13.

Рис. 11.13. Ударные адиабаты при различных степенях пористости:
 $k_4 > k_3 > h$; $h > k_2 > k_1 > 1$

Подчеркнем еще раз, что уравнение (11.40) описывает только начальный ход ударных адиабат, в области небольших давлений. В действительности при больших давлениях существенна роль электронных членов, и коэффициент Грюнайзена не постоянен. Но это не нарушает справедливости качественного вывода о возможности аномального хода ударной адиабаты сильно пористого вещества.

В работе С. Б. Кормера, А. И. Фунтикова, В. Д. Урлина и А. Н. Колесниковой [56] описаны результаты исследования ударного сжатия пористых металлов при давлениях от 0,7 до 9 миллионов атмосфер. Там же сделан ряд теоретических выводов об уравнении состояния пористых веществ и на основе экспериментальных данных определены параметры, входящие в уравнение состояния.

§ 11. Выход не очень сильной ударной волны на свободную поверхность тела. При опытном определении ударной адиабаты твердого тела, которое будет рассмотрено в следующем параграфе, широко используется так называемое правило удвоения скоростей в волне разгрузки.

Когда ударная волна, распространяющаяся по твердому телу, выходит на свободную поверхность, сжатое вещество расширяется, или, как говорят, разгружается практически до нулевого давления. Волна разгрузки (разрежения) бежит назад по веществу со скоростью звука, соответствующей состоянию за фронтом ударной волны, а само разгружающееся вещество приобретает дополнительную скорость в направлении первоначального движения ударной волны ¹⁾.

В этом параграфе мы будем рассматривать только не очень сильные ударные волны, которые сообщают твердому веществу энергию, недостаточную для его плавления, а тем более испарения ²⁾, так что конечное состояние вещества после разгрузки будем предполагать твердым. При этом конечный объем разгруженного вещества V_1 мало отличается от нормального объема твердого тела V_0 .

В то же время будем считать ударную волну и не слишком слабой, так, чтобы можно было пренебречь эффектами, связанными с прочностью твердого тела. Давление в теле, сжатом ударной волной, предполагаем изотропным, как в газе или жидкости. Это справедливо, когда давление велико по сравнению с пределом прочности, критическим напряжением сдвига и т. д. Скорость звука при этом определяется сжимаемостью вещества, модулем всестороннего сжатия, точно так же как в газе и жидкости. В противном случае разгрузка описывается формулами теории упругости, о чем будет сказано в дальнейшем.

Пусть по твердому телу распространяется плоская ударная волна постоянной амплитуды (давление p , массовая скорость u , объем V , который лишь немного меньше нормального объема V_0). В определенный момент времени волна выходит на свободную поверхность, которую считаем параллельной поверхности фронта ударной волны. Не слишком сильная ударная волна, в которой сжатие мало, $V_0 - V \ll V_0$, не отличается от акустической волны сжатия и описывается формулами акустики. Она распространяется по телу со скоростью звука c_0 . Давление в ней связано с массовой скоростью соотношением $p = \rho_0 c_0 u$ ($\rho_0 = 1/V_0$). Начиная с момента $t = 0$ выхода ударной волны на свободную поверхность, по телу назад распространяется волна разгрузки, которая также является акустической. Она бежит по веществу со скоростью звука (мало отличающейся от скорости звука в нормальных условиях c_0). Давление в волне падает от начального p до нуля, а вещество приобретает ско-

¹⁾ Если тело граничит не с вакуумом, а с воздухом, то движущаяся граница разгруженного вещества играет по отношению к воздуху роль поршня и «толкает» впереди себя воздушную ударную волну. Поэтому, строго говоря, вещество разгружается не до нулевого давления, а до давления в воздушной ударной волне. Однако это давление, которое по сравнению с атмосферным может быть большим, столь мало по сравнению с начальным давлением в твердом теле, сжатом ударной волной, что им всегда можно пренебречь и считать, что разгрузка в воздух не отличается от разгрузки в вакуум. Амплитуда ударной волны в воздухе определяется при этом скоростью «поршня», т. е. скоростью разгруженного твердого вещества.

²⁾ Об испарении твердого тела, первоначально сжатого мощной ударной волной, речь пойдет в § 21, 22.

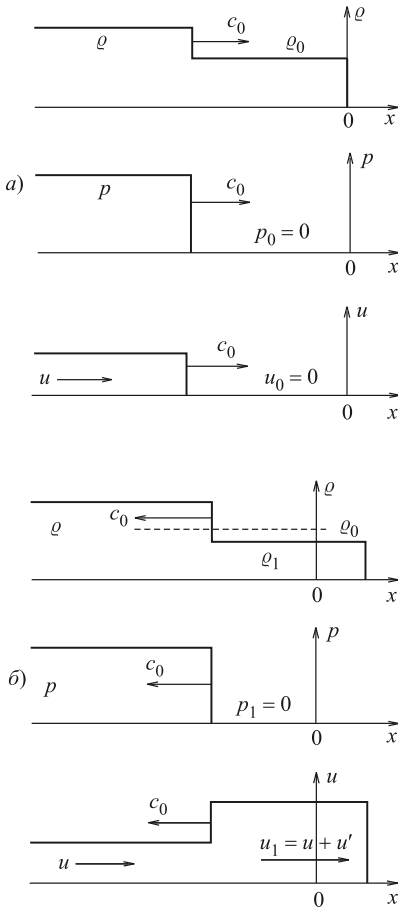


Рис. 11.14. Профили плотности, давления и скорости при выходе не сильной ударной волны на свободную поверхность: а) до момента выхода $t < 0$; б) после момента выхода $t > 0$

рость u' , связанную с изменением давления $\Delta p = -p$ акустической формулой $u' = -\Delta p / \rho_0 c_0 = p / \rho_0 c_0$ (рис. 11.14; плотность уменьшается немного: конечная плотность σ_1 мало отличается от нормальной плотности твердого тела: $V_1 - V_0 \ll V_0$). Из сопоставления формул $p = \rho_0 c_0 u$ и $u' = p / \rho_0 c_0$ видно, что дополнительная скорость, приобретаемая веществом при разгрузке u' , равна массовой скорости в ударной волне u , т.е. при выходе не слишком сильной ударной волны на свободную поверхность скорость вещества удваивается; $u_1 = u + u' \approx 2u$.

Правило удвоения скоростей можно получить и из общих уравнений для ударной волны и волны разрежения, если перейти в них к предельному случаю малых амплитуд волн.

Из газодинамики известно (см. § 10, гл. I), что дополнительная скорость, приобретаемая веществом при разгрузке от начального давления p до конечного $p_1 = 0$, равна

$$u' = \int_0^p \frac{dp}{\rho c} = \int_0^p \left(-\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S^{1/2} dp = \int_V^{V_1} \left(-\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S^{1/2} dV,$$

где производные в силу адиабатичности процесса разгрузки берутся при постоянной энтропии, равной энтропии во фронте ударной волны. Начальная массовая скорость вещества в ударной волне в силу законов сохранения (11.31), (11.32) равна

$$u = \sqrt{p(V_0 - V)}.$$

В ударной волне небольшой амплитуды, где изменение энтропии мало, сжатие также невелико; в первом приближении приращение объема можно представить в виде

$$V - V_0 = \left(-\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S p,$$

подразумевая под S энтропию исходного состояния вещества до сжатия ударной волной. Тогда массовая скорость в ударной волне равна

$$u \approx \left(-\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S^{1/2} p \approx \frac{p}{\rho_0 c_0}.$$

В том же приближении можно пренебречь изменением адиабатической сжимаемости в диапазоне давлений от 0 до p и в формуле для u' считать производную

постоянной. Получим

$$u' = \int_0^p \left(-\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S^{1/2} dp \approx \left(-\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S^{1/2} p \approx \frac{p}{\rho_0 c_0} \approx u.$$

Уолш и Христиан [22] из весьма общих соображений установили верхний и нижний пределы для возможных вариаций величины дополнительной скорости u' и нашли, что при давлениях $p \sim 4 \cdot 10^5$ атм для целого ряда металлов правило удвоения скоростей справедливо с точностью до 2%. Как показала экспериментальная проверка, проведенная авторами работы [3], правило удвоения скоростей для железа выполняется приближенно вплоть до весьма высоких давлений $\sim 1,5 \cdot 10^6$ атм. Вообще говоря, отклонение от правила удвоения скоростей тем больше, чем выше амплитуда ударной волны.

Примем теперь во внимание, что ударная волна, даже слабая, не является акустической, и энтропия в ней повышается. При этом в первом приближении по-прежнему считаем, что дополнительная скорость после разгрузки u' равна u , а плотность и температуру в конечном состоянии рассматриваем в следующем приближении.

При адиабатической разгрузке тела до начального, нулевого давления, оно оказывается нагретым и расширенным по сравнению с исходным состоянием, до сжатия ударной волной. Легко найти энергию необратимого нагревания и конечную температуру разгруженного вещества T_1 , если известны термодинамические функции и начальное состояние в ударной волне. Для этого следует воспользоваться уравнением адиабаты разгрузки $d\varepsilon + p dV = 0$, согласно которому конечная энергия ε_1 равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \int_V^{V_1} (p dV)_S. \quad (11.41)$$

Поскольку энергия в ударной волне есть $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}p(V_0 - V)$, необратимое приращение энергии после разгрузки равно

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}p(V_0 - V) - \int_V^{V_1} (p dV)_S. \quad (11.42)$$

Величина этой энергии изображается разностью площадей криволинейного треугольника $DBCS$ и треугольника ABC на рис. 11.15, на котором кривая H представляет собой ударную адиабату, а кривая S — адиабату разгрузки. Численно эта энергия равна разности площадей верхней и нижней заштрихованных фигур.

Предположим, что амплитуда ударной волны невелика, так что все три объема V, V_0, V_1 мало отличаются друг от друга и коэффициент Грюнайзена можно считать постоянным и равным своему нормальному значению Γ_0 . В этом случае адиабатическая связь температуры и объема дается формулой (11.20), так что конечная температура T_1 связана с температурой в ударной волне T соотношением

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\Gamma_0}. \quad (11.43)$$

С другой стороны, рассматривая процесс теплового расширения тела при постоянном, нулевом, давлении от исходного объема V_0 до объема V_1 , можно записать

$$V_1 - V_0 = V_0 \alpha (T_1 - T_0), \quad (11.44)$$

где α — коэффициент объемного теплового расширения. Необратимое приращение энергии (11.42) выражается через приращение температуры формулой

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = c_p(T_1 - T_0),$$

где c_p — теплоемкость тела при постоянном давлении ¹⁾.

Если известны объем и температура в ударной волне, то из системы двух уравнений (11.43), (11.44) можно вычислить объем и температуру в конечном состоянии.

В качестве примера приведем результаты для алюминия, полученные в работе [23]. При ударном сжатии алюминия до давления $p = 2,5 \cdot 10^5$ атм объем уменьшался до величины $V = 0,82 V_0$, а температура повышалась на $T - T_0 = 331$ К (исходная температура T_0 была равна 300 К). После разгрузки остаточное нагревание составляло $T_1 - T_0 = 134$ К ²⁾.

При $p = 3,5 \cdot 10^5$ атм, $V = 0,78 V_0$, $T - T_0 = 522$ К, а $T_1 - T_0 = 216$ К.

Естественно, чем сильнее ударная волна, тем большую энтропию она сообщает веществу и тем выше остаточное нагревание.

Если по плоской пластине распространяется ударная волна, за фронтом которой давление и скорость не постоянны, а падают, например, импульс сжатия треугольной формы (рис. 11.16), то после выхода такой волны на свободную поверхность тела может произойти откол. Явление откола заключается в следующем. После отражения волны сжатия от свободной поверхности профиль давления в теле образуется в результате сложения двух волн: падающей — волны сжатия и отраженной — волны разгрузки. В акустическом приближении (см. § 3 гл. I)

$$p = \rho c [f_1(x - ct) + f_2(x + ct)],$$

где функция f_1 описывает падающую волну, которая распространяется со скоростью звука вправо, а f_2 — отраженную волну, распространяющуюся влево. В данном случае функция f_1 отвечает треугольному профилю давления, показанному на рис. 11.16. Функцию f_2 можно установить, исходя из граничного условия — равенства нулю давления на свободной поверхности.

Функции f_1 и f_2 , а также составленные из них распределения давления в теле в момент выхода ударной волны на свободную поверхность и в два последующих момента времени изображены на рис. 11.17. Если координата свободной поверхности есть x_1 (рис. 11.17), то область $x > x_1$ соответствует пустоте и определение функций f_1 и f_2 в области $x > x_1$ является чисто формальным. Физически реальными являются лишь значения

¹⁾ В твердых телах в небольшом диапазоне изменений температуры она практически не отличается от теплоемкости при постоянном объеме c_v .

²⁾ Остаточная температура в работе [23] вычислялась точнее, чем это дает формула (11.43), с учетом небольшого изменения коэффициента Грюнайзена при изменении объема; для этого интегрировалось «точное» уравнение адиабаты с переменным $\Gamma(V)$.

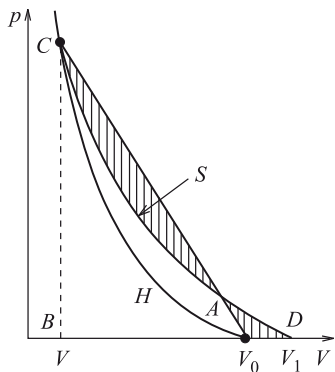


Рис. 11.15. p, V -диаграмма для ударного сжатия и разгрузки твердого тела

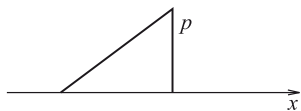


Рис. 11.16. Импульс сжатия треугольной формы

f_1, f_2 и давления при $x < x_1$, т.е. в теле. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, функции f_1 и f_2 при $x > x_1$ на рис. 11.17 показаны пунктиром.

Из рис. 11.17 видно, что после отражения волны сжатия от свободной поверхности в теле возникают отрицательные давления, т.е. на тело действует растягивающее усилие. Если растягивающее напряжение превышает предел прочности вещества на разрыв, то в соответствующем месте тела происходит разрыв, «откол»: от поверхности тела откалывается пластинка материала и отделяется от остального тела, отлетая от поверхности с определенной скоростью. Так, например, сталь при импульсивных нагрузках разрушается при усилиях порядка 30 000 кГ/см².

§ 12. Экспериментальные методы отыскания ударной адиабаты твердых тел. Законы сохранения массы и импульса (11.31), (11.32) связывают между собой четыре параметра фронта ударной волны: скорость распространения ударной волны по невозмущенному веществу D , скачок массовой скорости u , равный скорости движения сжатого вещества относительно невозмущенного, давление p и удельный объем V (или плотность $\rho = 1/V$). Если измерить на опыте скорости D и u , то по формулам (11.31), (11.32) можно найти давление и объем, а затем, воспользовавшись уравнением энергии (11.34), вычислить удельную внутреннюю энергию ε .

Таким образом, задача отыскания всех механических параметров фронта ударной волны сводится к экспериментальному определению каких-либо двух из них, в частности наиболее доступных для измерения кинематических параметров: скоростей D и u .

Скорость фронта D можно измерить на опыте сравнительно просто, регистрируя моменты прохождения фронта ударной волны через известные координатные точки, отстоящие друг от друга на заданном расстоянии. Измерить столь же непосредственным образом скачок массовой скорости u экспериментально гораздо труднее, поэтому для отыскания второго параметра прибегают к различным косвенным методам, привлекая для этой цели те или иные механические соображения.

Излагаемые ниже экспериментальные методы исследования сжимаемости твердых тел с помощью мощных ударных волн и измерения параметров фронта были предложены и разработаны Л. В. Альтшулером, К. К. Крупниковым, Б. Н. Леденевым и А. А. Бакановой [1–5], а также американскими авторами Уолшем и Христианом и др. [22–26] (последними — за исключением метода «торможения»; см. ниже). Однако советскими учеными был исследован гораздо более широкий диапазон давлений, до 4 миллионов атмосфер.

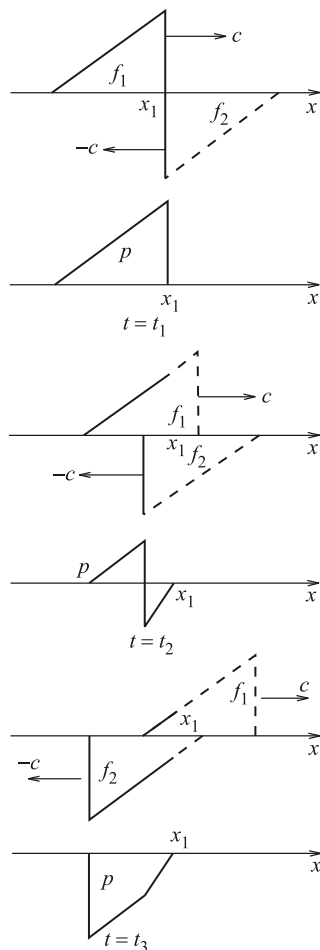


Рис. 11.17. Отражение акустической волны сжатия треугольного профиля от свободной поверхности: а) $t = t_1$ относится к моменту выхода переднего фронта волны на свободную поверхность; б) $t = t_2$ и в) $t = t_3$ относятся к последующим моментам

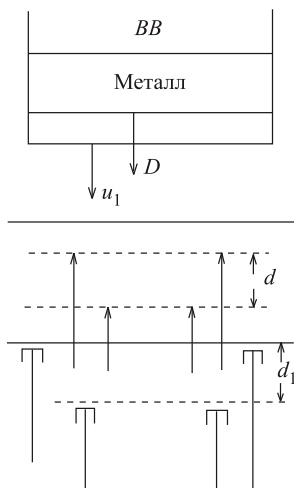


Рис. 11.18. Схема опыта в методе «откола»

но на рис. 11.18 (соответствующая диаграмма движения на плоскости x, t изображена на рис. 11.19). Когда детонационная волна выходит из BB на границу с металлом,

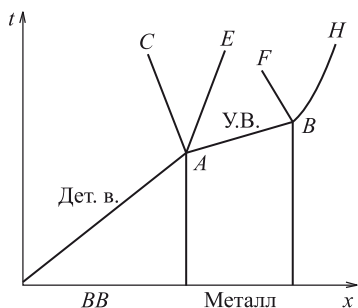


Рис. 11.19. x, t -диаграмма для «откольного» опыта

импульс, регистрируемый с помощью специальной электрической схемы и осциллографа.

Разделив расстояние d на время, можно было найти среднюю скорость фронта на «базе» измерения d (базы d были порядка 5–8 мм, скорости $D \sim 5$ –10 км/с, время $\sim 10^{-6}$ с. Это потребовало разработки специальных методов регистрации столь малых времен). Аналогичным образом с помощью электроконтактных датчиков измерялись и моменты прохождения через заданные координатные точки границы разгружающегося вещества¹⁾ (см. рис. 11.18). Электроконтактный метод измерения

Мысль об использовании измерения кинематических параметров с целью изучения ударной адиабаты независимо от предыдущих исследований развивалась в работах Ф. А. Баума, К. П. Станюковича и Б. И. Шехтера [21], которые проводили измерения со сравнительно слабыми ударными волнами.

В работах [1–3] описаны три метода измерения параметров ударной волны, сущность которых мы сейчас изложим (см. также [55]).

1. Метод «откола» основан на измерении скорости движения свободной поверхности тела, разгружающегося после выхода на поверхность ударной волны, и применении правила удвоения скоростей, согласно которому массовая скорость u приблизительно равна половине скорости движения свободной поверхности u_1 . Этот метод имеет ограниченную применимость, так как при очень больших давлениях начинают заметные отклонения от правила удвоения, что приводит к экспериментальным ошибкам в определении u . Принципиальная схема опыта состоит в следующем.

С зарядом взрывчатого вещества соприкасается плоская пластина исследуемого материала, как показано на рис. 11.18 (соответствующая диаграмма движения на плоскости x, t изображена на рис. 11.19). Когда детонационная волна выходит из BB на границу с металлом, происходит распад разрыва; по металлу со скоростью D идет ударная волна (линия AB), скорость движения контактной границы между BB и металлом (линия AE) равна массовой скорости металла u (по BB распространяется отраженная волна AC). После выхода ударной волны на свободную поверхность (точка B) снова происходит распад разрыва, по образцу назад бежит волна разгрузки BF , а граница металла приобретает удвоенную скорость $u_1 \approx 2u$ (линия BH). Для измерения скорости фронта D в работах [1–5] на определенных расстояниях внутри образца, как показано на рис. 11.18, устанавливались электроконтактные датчики, которые замыкались в моменты прохождения фронта волны и посылали

¹⁾ Для предохранения от замыкания датчиков воздушной ударной волной, которую «гонит» граница металла, на датчики надевались защитные колпачки.

скоростей был предложен В. А. Цукерманом и К. К. Крупниковым. Таким путем была промерена ударная адиабата железа до давлений $p \sim 1,5 \cdot 10^6$ атм ($D \sim 7,5$ км/с, $u \sim 2,4$ км/с).

Метод «откола» не годится для исследования пористых материалов, так как в этом случае дополнительная скорость u' при разгрузке оказывается значительно меньше скорости u и правило удвоения не имеет силы.

2. Метод «торможения». Для изучения более мощных ударных волн, для которых правило удвоения скоростей вносит заметную ошибку, авторами работы [1] был использован другой метод, названный ими методом «торможения». Данный метод в принципе является абсолютно точным и пригодным для изучения любых материалов, в том числе и пористых.

В этом методе с помощью заряда $ВВ$ разгоняется до скорости w пластина, сделанная из исследуемого материала. Пластина (ударник $У$) ударяет по другой, покоящейся пластине (мишени $М$), сделанной из того же самого материала.

Схема опыта показана на рис. 11.20, а диаграмма x, t — на рис. 11.21. В момент удара возникают две ударные волны, распространяющиеся по обоим телам (AB и AC на диаграмме x, t). Давления p и массовые скорости u по обе стороны контактной границы между телами одинаковы и равны тем же величинам на фронте обеих ударных волн до тех пор, пока последние не достигают других границ образцов¹⁾. Той же скоростью u обладает и сама контактная граница (линия AE). Профили давлений и скоростей после удара изображены на рис. 11.22.

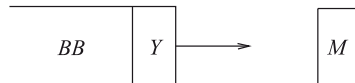


Рис. 11.20. Схема опыта в методе торможения

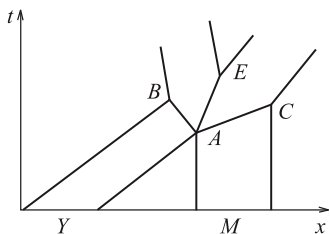


Рис. 11.21. x, t -диаграмма для опыта с торможением

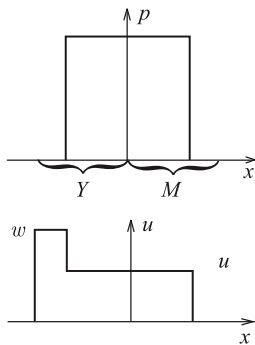


Рис. 11.22. Профили давления и скорости после удара в методе торможения

В силу идентичности материалов идентичны и обе ударные волны, т. е. равны скачки массовых скоростей в обеих волнах. Для мишени скачок скорости совпадает со скоростью движения сжатого вещества u , поскольку мишень первоначально покоилась. Что же касается ударника, то перед ударной волной вещество движется со скоростью полета ударника w , а за волной — со скоростью u , так что скачок скорости по абсолютной величине равен $w - u = u$ и $u = w/2$. Таким образом, задача сводится к измерению скорости фронта D в мишени и скорости

¹⁾ См. § 24 гл. I.

полета ударника w . Эта задача экспериментально решается так же, как и в методе «откола», с помощью системы электроконтактных датчиков.

Методом торможения в работе [1] была снята ударная адиабата железа вплоть до давлений $p \sim 5 \cdot 10^6$ атм ($D \sim 12$ км/с, $u \sim 5$ км/с, $V_0/V \sim 1,75$). Было исследовано также пористое железо с плотностью в 1,4 раза меньшей нормальной.

Метод торможения можно перенести и на тот случай, когда исследуемая мишень и ударник сделаны из разных материалов, однако при этом в качестве ударника необходимо брать вещество с известной ударной адиабатой. В ряде случаев это оказывается более целесообразным, чем делать ударник из исследуемого материала, так как путем соответствующего выбора вещества ударника можно от одного и того же заряда ВВ получить в исследуемом веществе более мощную ударную волну.

Если материалы ударника и мишени различны, то, несмотря на равенство давлений в обеих ударных волнах, скачки скоростей уже не одинаковы, так что $w - u \neq u$.

Однако если ударная адиабата ударника известна, то известна зависимость давления от скачка массовой скорости, т. е. функция $p = f(w - u)$. С другой стороны, давление p связано со скачком массовой скорости в мишени, равным скорости контактной границы u , формулой (11.32): $p = Du/V_0$.

Измеряя, как и раньше, скорость ударной волны в мишени и скорость ударника w , можно найти скорость u из уравнения

$$f(w - u) = \frac{Du}{V_0}. \quad (11.45)$$

Для этой цели очень удобен графический метод, основанный на использовании диаграммы давление — скорость (см. § 24, гл. I). Эти диаграммы широко применяют при рассмотрении различных процессов с ударными волнами, в которых участвуют две соприкасающиеся среды, так как на контактной границе между средами давления и скорости одинаковы.

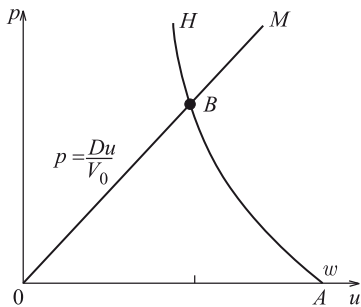


Рис. 11.23. p, u -диаграмма для опыта с торможением: HBA — ударная адиабата ударника; OBM — геометрическое место состояний мишени после удара

Рассмотрим столкновение ударника и мишени с помощью диаграммы p, u , где u — массовая скорость вещества в лабораторной системе координат, в данном случае в системе, в которой мишень вначале покоится. На рис. 11.23 начальные состояния мишени ($p = 0, u = 0$) и летящего ударника $p = 0, u = w$ изображаются точками O и A . Если измеренная скорость ударной волны на мишени есть D , то геометрическим местом состояний вещества мишени в ударной волне служит прямая $p = Du/V_0$ с известным наклоном D/V_0 . Изобразим ударную адиабату вещества ударника, имея в виду зависимость давления не от объема, а от скачка скорости, равного в данном случае $w - u$: $p = f(w - u)$. Точка пересечения B обеих линий

согласно уравнению (11.45) и определяет состояние (давление и массовую скорость) в обеих ударных волнах. Если ударник и мишень сделаны из одного материала, то, как мы уже знаем, точка пересечения лежит как раз посередине между абсциссами точек O и A ($u = w/2$).

3. Метод «отражения». В этом методе используются закономерности, которым подчиняется процесс распада произвольного разрыва, возникающего при отражении ударной волны от границы двух сред (см. § 24 гл. I). Он обладает тем преимуществом по сравнению с предыдущими, что не нуждается в измерении массовых скоростей,

которое в экспериментальном отношении гораздо сложнее, чем измерение скорости фронта ударной волны. Однако для этого метода необходимо иметь эталонное вещество с известным уравнением состояния. Метод был разработан авторами работы [2] совместно с Г. М. Гандельманом.

Рассмотрим переход сильной ударной волны из среды A в среду B . По веществу B при этом всегда идет ударная волна, отраженная же волна в A может быть либо ударной, если вещество B «жестче», чем A , либо волной разрежения, если B «мягче», чем A (это проще всего себе представить, если рассмотреть такие предельные случаи: A — газ, B — твердое тело и A — твердое тело, B — газ).

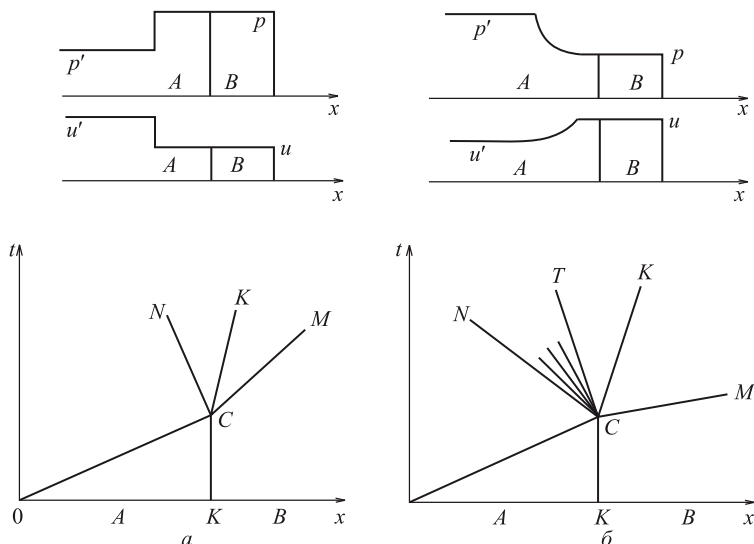


Рис. 11.24. Профили давления и скорости и x, t -диаграмма для опыта с отражением. а) Случай, когда отраженная волна — ударная: OC — ударная волна в A ; CM — ударная волна в B ; CN — отраженная ударная волна в A ; KCK — линия контакта A и B . б) Случай, когда отраженная волна — волна разрежения: OC — ударная волна в A ; CM — ударная волна в B ; CN — голова волны разрежения; CT — хвост волны разрежения; KCK — линия контакта A и B

Профили скоростей и давлений в обоих случаях изображены на рис. 11.24. Там же даны соответствующие диаграммы x, t .

Рассмотрим этот процесс с помощью диаграммы давление — скорость (в исходном состоянии оба вещества, A и B , покоятся в лабораторной системе координат).

Предположим, что уравнение состояния вещества A известно. Изобразим на p, u -диаграмме (рис. 11.25) ударную адиабату вещества A $p_A(u)$ для первой ударной волны, распространяющейся по невозмущенному материалу. Если измерить на опыте скорость фронта начальной ударной волны D_1 , то состояние в ней изобразится точкой $a(p_a, u_a)$ — точкой пересечения прямой $p = D_1 u / V_{0A}$ с ударной адиабатой $p_A(u)$.

После отражения этой ударной волны от границы между средами A и B в веществе A возникает новое состояние. Если отраженная волна ударная, то состояние лежит на ударной адиабате вторичного сжатия, для которой исходным является состояние $a(p_a, V_a, u_a)$; эта ударная адиабата изображается кривой p_H , выходящей вверх из точки a .

Если же отраженная волна — адиабатическая волна разрежения, то новое состояние лежит на изэнтропе разрежения, идущей из точки a вниз (кривая p_S). Поскольку уравнение состояния вещества A предполагается известным, то как ударную адиабату вторичного сжатия $p_H(V, V_a, p_a)$, так и изэнтропу разрежения с энтропией, равной $S_a = S(p_a, V_a)$, можно преобразовать так, чтобы вместо объема в качестве аргумента вошла скорость. В первом случае это делается путем использования соотношений на фронте ударной волны, во втором с помощью соотношений, справедливых для волны разрежения (см. § 10 гл. I).

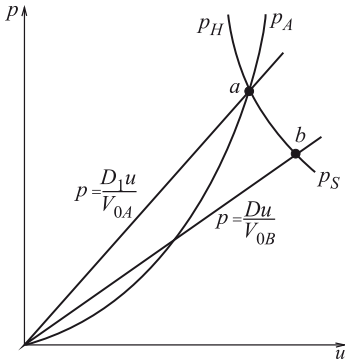


Рис. 11.25. p, u -диаграмма для опыта с отражением

Если измерить на опыте и скорость ударной волны D в среде B , то геометрическим местом состояний в этой волне служит прямая $p = Du/V_{0B}$. Точка пересечения b этой прямой с кривой $p_H ap_S$ — геометрическим местом возможных состояний в веществе A после отражения ударной волны — и определяет давление и скорость в ударной волне в B , равные давлению и скорости контактной границы A и B (см. рис. 11.24).

На диаграмме p, u рис. 11.25 изображен второй случай, когда при отражении возникает волна разрежения. В первом случае прямая $p = Du/V_{0B}$ проходит выше точки a и точка пересечения b лежит выше точки a на ударной адиабате вторичного сжатия вещества A , которая описывается кривой ap_H ¹⁾.

Итак, методика «отражения» состоит в следующем. В пластине из материала A с известным уравнением состояния создается ударная волна либо непосредственно от заряда BB , либо путем удара другой пластины, предварительно разогнанной BB до большой скорости. Эта волна выходит в образцы исследуемых материалов B , среди которых в том числе имеется и образец из материала A (схема опыта показана на рис. 11.26). Регистрируя моменты замыкания электроконтактных датчиков, расположенных в местах, указанных на рис. 11.26 стрелками, определяют скорости фронта D_1 и D . Построив ударную адиабату $p_A(u)$ на p, u -диаграмме и проведя прямую $p = D_1 u/V_{0A}$, находят точку a — состояние в ударной волне в A . Затем проводят через точку a вверх ударную адиабату вторичного сжатия, а вниз — обычную адиабату и наносят прямую $p = Du/V_{0B}$, тем самым определяя искомое состояние $b(p, u)$ в ударной волне в исследуемом образце.

Фактически (на опыте) изменения давления между состояниями a и b всегда были небольшими. В этих условиях, как показали расчеты, кривая $p_H ap_S$ с большой точностью может быть представлена как зеркальное отображение ударной адиабаты первичного сжатия в точке a . Заметим, что наклон кривой $p_H ap_S$ в точке a определяется скоростью звука за фронтом первичной ударной волны в A . В самом деле, в волне разрежения, так же как и в слабой волне сжатия $dp = \pm \rho c du$ (см. формулу (1.59)), т. е. наклон кривой $p_H ap_S$ в точке a есть $|dp/du| = \rho c = c/V$, где c и V —

¹⁾ Отсюда, между прочим, видно, какой величиной характеризуется «жесткость» вещества. Предположим, что ударные волны не очень сильные и их скорости близки к скоростям звука: $D \approx c_B$, $D_1 \approx c_A$. Вещество B жестче, чем A , и отраженная волна — ударная, если $c_B/V_B > c_A/V_A$ или $\rho_B c_B > \rho_A c_A$.

Величину ρc называют иногда акустическим импедансом. Она определяет связь давления и скорости в акустической или слабой ударной волне: $p = \rho c u$.

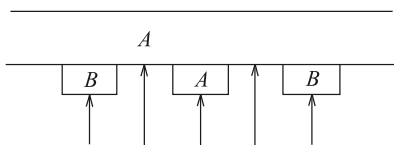


Рис. 11.26. Схема опыта с отражением

скорость звука и объем в веществе A , сжатом первой ударной волной. Методы экспериментального определения скорости звука за фронтом ударной волны будут рассмотрены ниже.

Методом отражения в работе Л. В. Альшулера, К. К. Крупникова и М. И. Бражник [2] были сняты ударные адиабаты целого ряда металлов (Cu, Zn, Pb и др.). Метод был исполь-

зован для изучения сжимаемости хлористого натрия в работе [5], а также применялся в большинстве работ зарубежных ученых. Чаще всего в качестве материалов экрана A использовались железо, алюминий или латунь.

§ 13. Извлечение кривой холодного сжатия из результатов опытов по ударному сжатию. Одним из наиболее ценных результатов опытов по ударному сжатию твердых тел является определение кривых холодного сжатия вещества $p_x(V)$, которые характеризуют силы отталкивания, действующие между атомами тела. Функции $p_x(V)$ и $\varepsilon_x(V)$ находят путем теоретической обработки экспериментальных данных по ударной адиабате вещества. Для отыскания кривой холодного сжатия в широком диапазоне сжатий и давлений в работе [3] были использованы трехчленные представления термодинамических функций $p(V, T)$, $\varepsilon(V, T)$ (11.30). Электронные члены p_e и ε_e записывались на основе чисто теоретических соображений (см. § 5, 6), причем для коэффициентов электронной теплоемкости β_0 брались известные экспериментальные значения.

Принимая экспериментальные зависимости $p(V)$, $\varepsilon(V)$ вдоль ударной адиабаты, соотношение (11.30) можно рассматривать как два уравнения относительно трех неизвестных функций $p_x(V)$, $\Gamma(V)$ и $T(V)$, где $T(V)$ — зависимость температуры от объема вдоль ударной адиабаты.

В качестве третьего, недостающего уравнения можно использовать связь между коэффициентом Грюнайзена $\Gamma(V)$ и кривой холодной сжимаемости $p_x(V)$, которая дается формулой Слэтера–Ландау (11.18) ¹⁾. Численное решение этой системы уравнений дает кривую холодного сжатия $p_x(V)$, функцию $\Gamma(V)$ и температуры в ударной волне T . Таким путем и были получены данные, содержащиеся в табл. 11.2 и на графиках рис. 11.8 (§ 7).

Конкретные результаты для других исследованных металлов можно найти в таблицах работы [3].

Если известны из опыта ударные адиабаты для пористого и сплошного веществ, то можно обойтись и без привлечения связи между функциями $\Gamma(V)$ и $p_x(V)$. А именно, рассматривая не слишком высокие температуры и пренебрегая электронными членами p_e , ε_e , можно записать:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{\Delta \varepsilon_T}{V \Delta p_T} = \frac{1}{V} \frac{\varepsilon_{\text{порист}}(V) - \varepsilon_{\text{сплош}}(V)}{p_{\text{порист}}(V) - p_{\text{сплош}}(V)},$$

где величины в правой части — опытные значения на ударных адиабатах сплошного и пористого вещества при сжатии их до одного и того же объема. Упругие составляющие давления и энергии при этом в обоих случаях одинаковы, так что разности ε и p равны превышениям чисто тепловых энергии и давления в сжатом пористом веществе по сравнению со сжатым сплошным веществом.

¹⁾ В ряде случаев была использована несколько иная связь между функциями $\Gamma(V)$ и $p_x(V)$, которая дается формулой Дугдала–Макдональда [27].

Таким способом в работе [1] была получена кривая холодной сжимаемости железа (она изображена на рис. 11.2 в § 2).

В работе [5] была найдена кривая холодного сжатия хлористого натрия. Сопоставление с выражениями для сил отталкивания в ионных кристаллах позволило определить входящие в эти формулы параметры, характеризующие силы взаимодействия.

Метод вычисления температуры на ударной адиабате в волнах сравнительно низкой амплитуды, когда тепловые члены малы по сравнению с упругими, а ударная адиабата близко совпадает с кривой холодного сжатия, описан в работе [22] (электронные члены при этом, естественно, не учитываются).

Для аналитического описания ударной адиабаты и кривой холодного сжатия вещества $p_x(V)$ часто пользуются интерполяционными формулами различного типа. Для этого задаются функциями определенного вида, содержащими несколько параметров, которые определяют с помощью тех или иных опытных данных. Примером может служить широко распространенная формула $p_x = A[(V_0/V)^n - 1]$, содержащая два параметра, A и n . В работе [5] при исследовании хлористого натрия кривая $p_x(V)$ получалась в аналитической форме путем использования степенного или экспоненциального представления для сил отталкивания в ионных кристаллах. Входящие в выражение константы определялись путем сравнения с данными по динамической сжимаемости.

С. Б. Кормер и В. Д. Урлин [14] построили интерполяционную формулу для кривой холодного сжатия в виде

$$p_x = \sum_{n=1}^6 a_n \left(\frac{V_{0K}}{V} \right)^{\frac{n}{3}+1}.$$

Коэффициенты a_n определялись без привлечения опытных данных по ударному сжатию только из условий связи коэффициентов с известными параметрами нормального состояния (сжимаемостью, коэффициентом Грюнайзена и др.) и условия, чтобы при больших давлениях кривая смыкалась с зависимостью, следующей из модели Томаса–Ферми–Дирака. При этом получилось хорошее совпадение с кривыми $p_x(V)$, извлеченными из опыта ¹⁾.

3. Акустические волны и расщепление волн

§ 14. Статическая деформация твердого тела. Выше, при изучении ударного сжатия твердых тел, всегда предполагалось, что давление в сжатом веществе изотропно, имеет гидростатический характер, как в жидкости или газе. Увеличение плотности рассматривалось при этом как результат всестороннего сжатия вещества. Соответственно, упругие свойства вещества характеризовались одной-единственной величиной, сжимаемостью $\kappa = -1/V (\partial V / \partial p)_S$, которая определяла скорость распространения акустических волн сжатия (и разрежения) — скорость «звука»:

$$c_0 = \sqrt{-V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S} = \sqrt{\frac{V}{\kappa}}.$$

Так можно поступать только в том случае, когда давления достаточно велики, и эффекты, связанные с прочностью твердых тел и существованием сдвиговых дефор-

¹⁾ В дальнейшем С. Б. Кормер, В. Д. Урлин и Л. Т. Попова [15] усовершенствовали этот метод, добавив к ряду еще один член с использованием одной экспериментальной точки на ударной адиабате. Получилось очень хорошее совпадение с экспериментальными кривыми.

маций и напряжений, не играют роли. Если нагрузки малы, необходимо принимать во внимание упругостные свойства твердого тела, отличающие его от жидкости. Это существенным образом влияет на характер динамических процессов и, в частности, на распространение упругих волн сжатия и разрежения. Так, оказывается, что в твердом теле акустические волны могут распространяться с различными скоростями, в зависимости от конкретных условий. Прежде чем рассматривать эти динамические явления, посмотрим, как ведет себя твердое тело при статических нагрузках. При этом считаем, что деформации и нагрузки малы, так что справедлива линейная теория упругости.

Состояние деформированного тела описывается двумя тензорами: тензором деформаций и тензором напряжений. В дальнейшем мы остановимся только на нескольких простейших случаях однородных деформаций (когда каждый элемент тела деформирован одинаковым образом), которые характеризуются простыми и наглядными величинами. Поэтому не будем вводить тензор деформации в общем виде ¹⁾.

Компонента тензора напряжений σ_{ik} , где индексы i и k обозначают координатные направления x, y, z , представляет собой проекцию на i -ю ось силы, которая действует на единичную площадку в теле с направлением нормали вдоль оси k . Компоненты $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ представляют собой нормальные напряжения, $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ — касательные или сдвиговые (рис. 11.27). Тензор σ_{ik} симметричен, т. е. $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

Рассмотрим несколько примеров деформаций.

1. Представим себе цилиндрический стержень длины L и диаметра d , к торцам которого приложено сжимающее усилие — давление p . Ось z направим вдоль оси стержня, как показано на рис. 11.28. Боковую поверхность стержня предполагаем свободной. Под действием нагрузки стержень укорачивается на длину ΔL и утолщается (диаметр увеличивается на Δd).

В данном случае отлично от нуля только нормальное напряжение в осевом направлении σ_{zz} , которое равно внешнему давлению $\sigma_{zz} = p$. Нормальные напряжения в поперечных направлениях σ_{xx}, σ_{yy} отсутствуют, так как боковая поверхность стержня свободна и ничто не препятствует стержню расширяться в этом направлении. Касательные или сдвиговые напряжения $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ в выбранной системе координат также равны нулю, что очевидно.

По закону Гука при малых деформациях относительное укорочение стержня пропорционально приложенному усилию:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{p}{E} = \frac{\sigma_{zz}}{E}, \quad (11.46)$$

где E — модуль Юнга (это есть определение модуля Юнга).

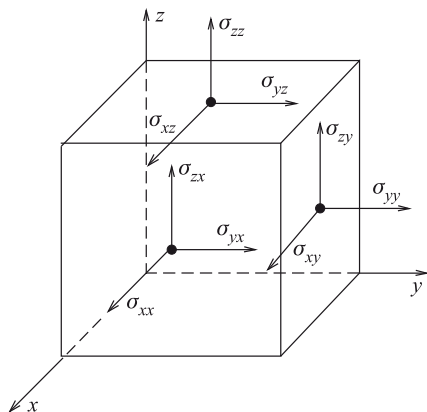


Рис. 11.27. Схема, иллюстрирующая смысл компонент тензора напряжений

¹⁾ См. об этом, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [28].

Относительное утолщение стержня пропорционально относительному укорочению:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}, \quad (11.47)$$

где σ — коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона всегда положителен и меньше $1/2$. Это следует из того, что при сжатии стержня последний становится толще, причем объем его может при этом только сократиться, но не увеличиться (при неизменном объеме $d^2 L = \text{const}$, $\Delta d/d = -(1/2)\Delta L/L$, $\sigma = 1/2$).

2. Пусть боковая поверхность стержня зажата таким образом, что при осевом сжатии стержень не может деформироваться в поперечном направлении (стержень помещен в гильзу с жесткими стенками). При этом возникают нормальные напряжения в поперечном направлении $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, которые как раз уравнивают внешнее боковое усилие, действующее со стороны стенок гильзы.

Нормальное осевое напряжение σ_{zz} по-прежнему равно внешнему сжимающему давлению p . В теории упругости доказывается, что относительное укорочение стержня при односторонней, осевой деформации связано с внешним давлением соотношением, аналогичным (1.46):

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{p}{E'} = \frac{\sigma_{zz}}{E'}, \quad (11.48)$$

где

$$E' = \frac{E(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}. \quad (11.49)$$

Величина E' всегда больше, чем модуль Юнга E : чтобы укоротить стержень, зажатый сбоку так же, как и свободный, необходимо приложить к нему большее сжимающее усилие. Нормальные напряжения в поперечных направлениях равны

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \sigma_{zz} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} p. \quad (11.50)$$

Касательные напряжения в выбранной системе координат отсутствуют. Все соотношения в рассмотренных двух примерах справедливы и в случае растяжения стержня.

3. При всестороннем сжатии (и расширении) тело меняет объем, сохраняя свою форму, т.е. остается подобным самому себе. Чтобы осуществить всестороннее сжатие, к поверхности тела нужно приложить постоянное давление. Тензор напряжения при всестороннем сжатии диагоналей ($\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$); все три нормальные компоненты одинаковы и равны давлению. Это имеет место при любом выборе системы координат. «Давление» в теле в этом случае «изотропно» и имеет гидростатический характер, как в жидкости.

При малых деформациях относительное изменение объема¹⁾ пропорционально давлению:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p = -\frac{p}{K}, \quad (11.51)$$

¹⁾ Сумма диагональных компонент тензора деформации равна $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta V/V$. При всестороннем сжатии $u_{xy} = u_{yz} = u_{xz} = 0$.

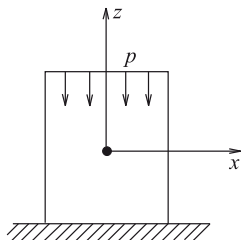


Рис. 11.28. Схема сжатия стержня

где κ — сжимаемость, а обратная величина $K = 1/\kappa$ — модуль всестороннего сжатия.

4. Рассмотрим еще деформацию чистого сдвига в одном направлении, как показано на рис. 11.29. При чистом сдвиге тело только меняет свою форму, но не меняет объема. В примере, показанном на рис. 11.29, отлично от нуля только одно касательное напряжение σ_{xz} . Все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. По закону Гука угол сдвига пропорционален скалывающему усилию τ (на единицу площади), которое равно напряжению σ_{xz} :

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\tau}{G} = \frac{\sigma_{xz}}{G}, \quad (11.52)$$

где G — модуль сдвига.

Как известно (см. [28]), произвольную деформацию можно представить в виде суммы сдвиговых деформаций и всестороннего сжатия (расширения). Благодаря такой внутренней связи деформаций одностороннего сжатия стержня и элементарных деформаций всестороннего сжатия и сдвига четыре характеристики материала E, σ, K, G не независимы, а связаны между собою двумя соотношениями.

Можно показать (см., например [28]), что

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{3K-2G}{3K+G}, \quad (11.53)$$

и обратно,

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad ^1). \quad (11.54)$$

Так, закон Гука для односторонней деформации стержня, зажатого с боков (11.48), можно записать через модули K и G в виде

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{p}{E'}, \quad E' = K + \frac{4}{3}G. \quad (11.55)$$

Для ориентации в численных значениях параметров материала укажем, что для железа (обработанного с 1 % углерода)

$$E \approx 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \quad G \approx 0,82 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \\ K \approx 1,61 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \quad \sigma \approx 0,28.$$

При всестороннем сжатии или растяжении тела, в любой системе координат тензор напряжения диагонален, и все три компоненты его одинаковы. При прочих деформациях тензор напряжения диагонален и касательные напряжения отсутствуют лишь в некоторых специально выбранных системах координат. Примером тому служат рассмотренные выше деформации сжатия стержня: свободного и зажатого сбоку. Неравенство диагональных элементов тензора напряжений связано с тем, что в действительности деформация не является всесторонним сжатием (растяжением) и содержит в себе элемент сдвига. Это проявляется в явной форме, если перейти к другой системе координат или, что то же самое, рассмотреть силы, действующие на наклонные к оси стержня площадки. При этом сразу же становится ясным, что

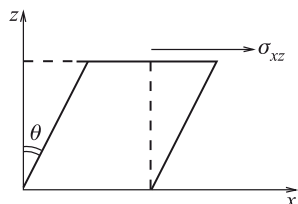
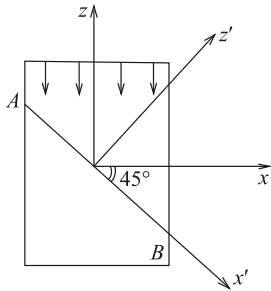


Рис. 11.29. Схема сжатия стержня

²⁾ Из формулы видно, что $\sigma \leq 1/2$, так как $K > 0$.

на наклонные площадки действуют касательные напряжения, что и свидетельствует о существовании сдвиговых деформаций.

Вычислим касательное напряжение, действующее на площадку, наклоненную к направлению действия внешнего давления под углом 45° (рис. 11.30). Для простоты рассмотрим не цилиндрический стержень, а плоский слой, бесконечный в направлении y и зажатый сбоку так, что в направлении x смещений нет. В системе координат x, y, z имеются напряжения σ_{zz} и $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$. Чтобы найти касательное напряжение, действующее на плоскость AB , введем новую систему координат $x'y'z'$, повернутую относительно старой вокруг оси y (оси y и y' совпадают). По правилу преобразования тензоров при повороте системы координат найдем



$$\sigma_{x'z'} = \sigma_{zz} \cos^2 45^\circ - \sigma_{xx} \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{xx}).$$

Рис. 11.30. Схема сжатия стержня

Это есть касательное напряжение, действующее в направлении оси x' на площадку AB , нормаль к которой направлена вдоль оси z' .

§ 15. Переход твердого тела в текучее состояние. Одним из характерных свойств твердого тела, отличающим его от жидкости, является устойчивость формы твердого тела, сопротивляемость по отношению к сдвигу. В жидкости отсутствует сопротивление по отношению к сдвигу, жидкость с легкостью принимает любую форму, лишь бы при этом не менялся ее объем (плотность). Касательные, сдвиговые напряжения в жидкости отсутствуют в статическом состоянии¹⁾.

Жидкость характеризуется нулевым модулем сдвига $G = 0$. Формально при $G = 0$ коэффициент Пуассона по формуле (11.53) равен $\sigma = 1/2$. Тензор напряжений при этом в любой системе координат диагонален, причем все три нормальные компоненты его одинаковы и равны «гидростатическому» давлению, которое «изотропно». Упругие свойства жидкости характеризуются только ее сжимаемостью или модулем всестороннего сжатия.

Известно, что при достаточно больших нагрузках, не сводящихся к всестороннему сжатию, твердое тело меняет свои упругие свойства и становится пластичным, текучим, в некотором отношении подобным жидкости.

Текучее состояние твердого тела характеризуется не полным отсутствием касательных напряжений, как в жидкости, но отсутствием возрастания касательных напряжений при возрастании сдвиговых деформаций. Начиная с некоторых критических сдвиговых деформаций и напряжений, твердое тело перестает сопротивляться дальнейшему увеличению сдвига.

Выше модуль сдвига G был определен как коэффициент пропорциональности между касательным напряжением при чистом сдвиге и сдвиговой деформацией (см. формулу (11.52)). В силу линейности зависимости напряжения и деформации при этом одновременно пропорциональны и приращения деформации и напряжения:

$$\sigma_{xz} = G\theta, \quad d\sigma_{xz} = G d\theta$$

(при чистом сдвиге на угол θ , как показано на рис. 11.29).

¹⁾ Они возникают только в момент изменения формы и зависят не от самих деформаций, а от скорости их изменения.

В текучем состоянии твердого тела, после того как сдвиг θ и напряжение σ_{xz} станут больше критических $\theta_{кр}$, $\sigma_{кр}$, дальнейший рост напряжения при увеличении деформации прекращается (или резко замедляется). Это иллюстрируется диаграммой $\sigma_{xz}(\theta)$ рис. 11.31. Если формально определить модуль сдвига в этом состоянии как коэффициент пропорциональности между приращениями $d\sigma_{xz}$ и $d\theta$, но не между самими величинами σ_{xz} и θ , то его следует положить равным нулю.

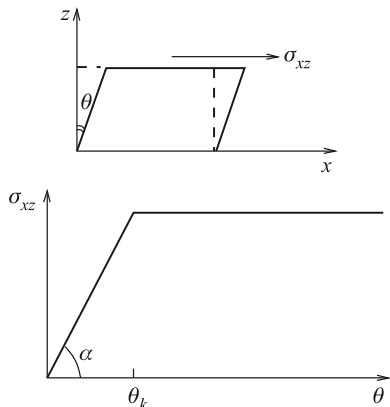


Рис. 11.31. Диаграмма касательное напряжение — угол сдвига

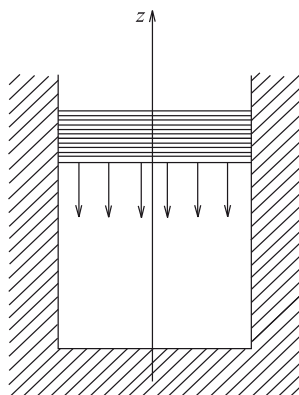


Рис. 11.32. Схема одностороннего сжатия стержня

Рассмотрим одностороннее сжатие нетекучего и текучего тел. Пусть тело цилиндрической формы заключено в цилиндрический сосуд с жесткими стенками и сжимается поршнем вдоль оси (рис. 11.32). Изобразим схематически, как меняется при этом расположение атомов тела (рис. 11.33). Решетку считаем для простоты кубической. Если тело нетекучее, то межатомные расстояния в направлении оси сокращаются, а в поперечных направлениях остаются неизменными; при этом атомы остаются на «своих местах». Это показано на рис. 11.33, б.

Если же тело текучее, то сокращаются все межатомные расстояния, происходит перестройка решетки, такое перераспределение атомов, что решетка и в сжатом состоянии остается кубической (рис. 11.33, в). Для наглядности «атомы» на рис. 11.33 перенумерованы ¹⁾.

Первый случай (рис. 11.33, б) содержит в себе элемент сдвига. Действительно, в недеформированном состоянии (рис. 11.33, а) проекция атома 2 на наклонную плоскость AB , проходящую через атомы 1–6 двух соседних горизонтальных рядов, ложится в точку C , находящуюся на середине отрезка AB . При деформации нетекучего тела (рис. 11.33, б) точка C сдвигается ближе к точке B . Наклонные ряды атомов сдвигаются по отношению друг к другу: верхний ряд 2–7–12 сдвигается по отношению к нижнему ряду 1–6–11 вправо и вниз.

При деформации же текучего тела решетка по-прежнему кубическая, проекция атома 5 на наклонную плоскость AB , проходящую через атомы 1–13, точка C , как и в недеформированном состоянии, лежит посередине отрезка AB . Наклонные ряды

¹⁾ Не следует, конечно, думать, что перемещение определенных атомов происходит именно так, как показано на рис. 11.33.

атомов 5–10 и 1–13 не сдвинуты по отношению друг к другу, как и в недеформированном состоянии.

При деформации тело приобретает упругую энергию за счет работы внешних сил, производящих деформацию. Если тело нетекущее, эта энергия связана как с изменением объема, так и со сдвигом. При данном объеме упругая энергия минимальна, если сжатие всестороннее и сдвиговых деформаций нет. Поэтому при одностороннем сжатии нетекущего тела до данного объема находится в неравновесном состоянии. Равновесное состояние при данном объеме соответствовало бы всестороннему сжатию, т.е. перестроенной кристаллической решетке.

Для перестройки решетки нужна «энергия активации», атомам нужно преодолеть потенциальные барьеры¹⁾. При небольших нагрузках перестройки не происходит, твердое тело ведет себя по отношению к деформации как нетекущее.

Однако при достаточно больших нагрузках твердое тело утрачивает свою «жесткость», нетекущее и уподобляется жидкости, т.е. приобретает способность перестраиваться таким образом, чтобы энергия его при данном объеме была минимальной.

В частности, при одностороннем сжатии тела это случается, когда касательное напряжение в плоскости, наклоненной под углом 45° к направлению сжимающего усилия $\sigma_{x'z'}$ (см. конец предыдущего параграфа), превышает предел — критическое напряжение сдвига $\sigma_{кр}$.

Замечая, что

$$\sigma_{x'z'} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \sigma_{zz} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} p,$$

Рис. 11.33. Схема, иллюстрирующая деформацию нетекущего (б) и текучего (в) тел; а) недеформированное состояние

найдем критическую сжимающую нагрузку $p_{кр}$, выше которой происходит переход тела в текучее состояние:

$$p_{кр} = \frac{1 - \sigma}{1 - 2\sigma} 2\sigma_{кр}. \quad (11.56)$$

В отличие от термодинамических констант вещества (модуля Юнга или сжимаемости), критическое напряжение сдвига, как величина, характеризующая прочность, сильно зависит от обработки металла, примесей и т.д. Для железа примерно $\sigma_{кр} = 600 \text{ кГ/см}^2$, $p_{кр} = 1900 \text{ кГ/см}^2$.

Рассмотрим одностороннее сжатие тела в направлении z под действием сжимающего усилия p . В поперечных направлениях x, y деформаций нет (стержень зажат

¹⁾ Возможно, перестройка связана с макроскопическим раздроблением частиц тела.

сбоку). Будем формально описывать переход из нетекучего в текучее состояние, полагая в законе пропорциональности между приращениями напряжения и деформации модуль сдвига равным нулю при нагрузках, превышающих критическую. По формулам (11.48), (11.55) или $p = \sigma_{zz} < p_{кр}$

$$\sigma_{zz} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\Delta L}{L}, \quad \frac{d\sigma_{zz}}{d(\Delta L/L)} = K + \frac{4}{3}G.$$

По формулам (11.50), (11.53) при этом

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right) \frac{\Delta L}{L}, \quad \frac{d\sigma_{xx}}{d(\Delta L/L)} = K - \frac{2}{3}G; \\ \sigma_{x'z'} &= \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) = G \frac{\Delta L}{L}, \quad \frac{d\sigma_{x'z'}}{d(\Delta L/L)} = G. \end{aligned}$$

После того как нагрузка достигла критической величины, положим в формулах для производных от напряжений (но не в формулах для самих напряжений) $G = 0$. Получим при $p > p_{кр}$:

$$\frac{d\sigma_{zz}}{d(\Delta L/L)} = \frac{d\sigma_{xx}}{d(\Delta L/L)} = K, \quad \frac{d\sigma_{x'z'}}{d(\Delta L/L)} = 0. \quad (11.57)$$

Нормальные напряжения σ_{zz} , σ_{xx} , σ_{yy} растут теперь одинаково в соответствии с модулем всестороннего сжатия (при одностороннем сжатии $\Delta L/L = \Delta V/V$). Касательное напряжение в наклонной плоскости остается неизменным и равным $\sigma_{x'z'} = \sigma_{кр}$ (критическая деформация равна $(\Delta L/L)_{кр} = \sigma_{кр}/G$). Диаграмма напряжение–деформация изображена на рис. 11.34.

При нагрузках меньших критической и порядка критической $\sigma_{zz} \neq \sigma_{xx}$ «давление» имеет существенно негидростатический характер. В пределе, когда нагрузки достаточно велики, $p \gg p_{кр}$, относительная разность $(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})/\sigma_{zz} = 2\sigma_{кр}/\sigma_{zz} \rightarrow 0$, т. е. все три нормальных напряжения становятся почти одинаковыми. Касательное напряжение $\sigma_{x'z'} = \sigma_{кр}$ становится малым по сравнению с нормальным. Оно остается постоянным или же медленно возрастает, гораздо медленнее, чем раньше.

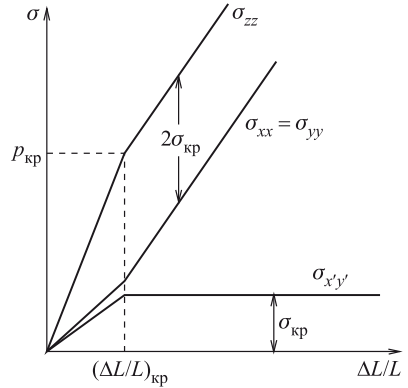


Рис. 11.34. Диаграмма напряжение–деформация для одностороннего сжатия тела

§ 16. Скорость распространения акустических волн. Перенесем результаты предыдущих параграфов на случай динамических нагрузок и найдем скорости распространения акустических волн объемного сжатия (и разрежения) в различных условиях.

Пусть к торцу тонкого стержня со свободной боковой поверхностью в начальный момент приложено постоянное сжимающее усилие — давление p ¹⁾.

¹⁾ Такая постановка задачи аналогична задаче о поршне, рассматриваемой в газодинамике (см. гл. I).

По телу побежит волна сжатия. Обозначим скорость ее распространения через c_1 . Вещество между фронтом волны и торцом деформируется, как в примере 1 § 14, и приобретает в направлении действия силы, вдоль оси постоянную скорость u . Как видно из рис. 11.35, относительное укорочение стержня в сжатой области равно $[c_1 t - (c_1 - u)t] / c_1 t = u / c_1$.

Если рассматривать небольшие нагрузки и деформации, то по закону Гука (11.46)

$$\frac{u}{c_1} = \frac{p}{E} \quad (11.58)$$

За время t масса вещества, охваченного волной, $\rho c_1 t$ (на единицу поперечного сечения стержня), приобретает импульс $\rho c_1 t u$, который по закону Ньютона равен pt , так что

$$p = \rho u c_1. \quad (11.59)$$

Эта формула вполне аналогична соответствующей формуле в газодинамике. Из соотношений (11.58), (11.59) следует выражение для скорости распространения волн сжатия по стержню (скорости «звука»):

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11.60)$$

С такой же скоростью распространяется и волна растяжения или волна разгрузки, если снять со сжатого стержня сжимающую нагрузку.

Представим себе теперь, что стержень зажат с боковой стороны, как в примере 2 § 14, т. е. в волне сжатия вещество не деформируется в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны²⁾.

Повторяя предыдущие рассуждения и воспользовавшись формулой (11.55), найдем скорость «звука» для этого случая:

$$c_1 = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + (4/3)G}{\rho}}. \quad (11.61)$$

Скорость c_1 есть не что иное, как «продольная» скорость звука — скорость распространения продольных волн в неограниченной упругой среде³⁾.

Действительно, когда волна сжатия распространяется по неограниченной среде, никаких смещений в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, не происходит, явление протекает так же, как и в случае стержня, зажато боку.

²⁾ В динамическом процессе, который протекает адиабатически, модуль Юнга несколько отличается от употребляемого в статике и соответствующего изотермическим условиям. Это отличие обычно ничтожно мало (см. [28]). То же относится и к коэффициенту Пуассона и модулю всестороннего сжатия. Адиабатический и изотермический модули сдвига не отличаются друг от друга, так как сдвиг не сопровождается изменением объема тела.

²⁾ Стержень можно считать свободным, но рассматривать времена, за которые волна сжатия проходит расстояния, значительно меньшие диаметра. Волна разгрузки с боковой поверхности распространяется к оси с конечной скоростью, так что к рассматриваемому времени она охватывает только периферийный слой. В центральных же областях, близких к оси, никаких поперечных смещений при этом еще не происходит, и деформация этих слоев — односторонняя.

³⁾ Скорость распространения поперечных волн, в которых смещения частиц перпендикулярны к направлению распространения волны и в которых происходит только деформация сдвига, без сжатия и разрежения, равна: $c_t = \sqrt{G/\rho}$; $c_t < c_1$.

Скорость c_l всегда больше скорости волны в свободном стержне, так как $E' > E$ (см. § 14).

Со скоростью c_l распространяются лишь достаточно слабые волны сжатия (и разрежения), в которых «давление», точнее, нормальное напряжение, действующее на плоскость, перпендикулярную к направлению распространения, достаточно мало, меньше критического, определяемого формулой (11.56). Если волна распространяется по уже напряженному веществу (скажем, волна разгрузки), то меньше критического должна быть абсолютная величина перепада напряжения (см. об этом подробнее в § 17). Если же динамическая нагрузка велика, больше критической, то сжатое твердое вещество, как было указано в предыдущем параграфе, переходит в текучее состояние, подобное жидкости.

Скорость распространения волн, как мы знаем, определяется производной от «давления» по объему, в данном случае от нормального напряжения по объему. В текучем состоянии эта производная пропорциональна модулю всестороннего сжатия так, как если бы модуль сдвига был равен нулю. Поэтому скорость распространения достаточно сильных акустических волн сжатия и разрежения определяется только сжимаемостью материала:

$$c_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{V}{\kappa}}. \quad (11.62)$$

Скорость c_l иногда называют скоростью упругих волн, а скорость c_0 — скоростью пластических волн; c_0 всегда меньше, чем c_l ; например, у железа $c_l = 6,8$ км/с, $c_0 = 5,7$ км/с. Скорость распространения сильных волн сжатия (ударных волн) зависит от амплитуды волны. Она всегда больше c_0 или близка к этой величине. Скорость распространения слабых возмущений всегда равна c_l , независимо от амплитуды, поскольку возмущения распространяются с такой скоростью только в том случае, когда они малы.

Вопросы распространения волн разрежения и сжатия в упруго-пластической среде с нелинейной зависимостью между напряжением и деформацией, подобной зависимости $\sigma_{zz} (\Delta L/L)$, которая показана на рис. 11.34, подробно исследовал Х. А. Рахматулин. Ссылки на оригинальные работы в этой области можно найти в обзоре Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро [29].

В следующем параграфе будет рассмотрен простейший случай распространения волн при указанных свойствах вещества.

§ 17. Расщепление волн сжатия и разгрузки. Посмотрим, что реально происходит, если к поверхности плоского тела в начальный момент приложить постоянное давление p . Будем считать давление достаточно малым для того, чтобы деформация линейно зависела от давления, т. е. подчинялась закону Гука. Нарисуем диаграмму p, V для состояния сжатого вещества за фронтом волны. Учитывая «неизотропность» давления в случае слабых деформаций, будем вместо давления оперировать нормальной составляющей напряжения, действующей на площадку, параллельную поверхности фронта волны, σ_{zz} , если волна распространяется вдоль оси z . По оси абсцисс будем откладывать удельный объем тела. При малых деформациях и давлениях состояние описывается законом Гука в форме (11.55), который, согласно определению (11.61), можно переписать в виде

$$\sigma_{zz} = \frac{\Delta V}{V} \rho c_l^2, \quad \sigma_{zz} < p_{кр}.$$

Когда давление превышает критическое $p_{кр}$, а изменение объема превышает $\Delta V_{кр}/V = p_{кр}/\rho c_l^2$, тело становится текучим и наклон прямой $\sigma_{zz} (\Delta V)$ меняется. По

формулам (11.57), (11.62) имеем в этой области

$$\sigma_{zz} = \frac{\Delta V}{V} \rho c_0^2 + \text{const}, \quad \sigma_{zz} > p_{\text{кр}}.$$

Диаграмма σ_{zz}, V изображена на рис. 11.36.

Если внешнее давление $p < p_{\text{кр}}$, по телу побежит одна «упругая» волна сжатия со скоростью c_l (рис. 11.37, а; состояние 1 на диаграмме σ_{zz}, V , рис. 11.36). Если же приложенное давление $p > p_{\text{кр}}$, то в теле окончательно достигается состояние 2 на диаграмме σ_{zz}, V . Однако в этом случае по телу бежит уже не одна, а две волны: «упругая» с амплитудой $p_{\text{кр}}$ и состоянием за фронтом 1', а вслед за нею «пластическая» с состоянием за фронтом 2 (см. рис. 11.37, б). Поскольку $c_0 < c_l$, пластическая волна не догоняет упругую, так что комбинация двух волн устойчива¹⁾. Пластическая волна бежит по чуть сжатому веществу, которое движется со скоростью $u_{\text{кр}} = p_{\text{кр}}/\rho c_l$. Эта скорость весьма мала, например, в железе сжатие в упругой волне равно $\Delta V_{\text{кр}}/V = 5 \cdot 10^{-4}$, а скорость $u_{\text{кр}} = 3,6$ м/с. Массовая скорость в пластической волне равна $u' = (p - p_{\text{кр}})/\rho c_0$ относительно вещества, движущегося в упругой волне, и $u' + u_{\text{кр}}$ относительно невозмущенного вещества.

Если рассматривать волны сжатия большой амплитуды, а тем более ударные волны с давлениями в сотни тысяч атмосфер и выше, то эффектами предварительного сжатия вещества упругой волной до одной-двух тысяч атмосфер и разгона его

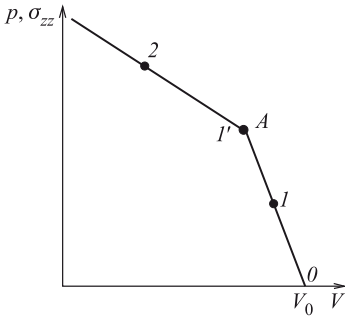


Рис. 11.36. Диаграмма напрядение (давление)–объем

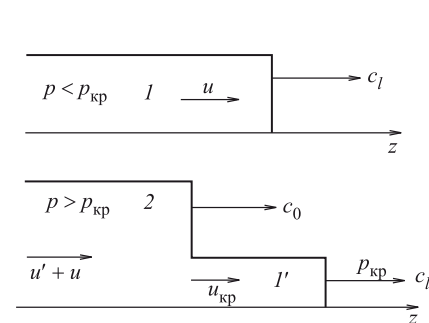


Рис. 11.37. Два случая распространения акустической волны сжатия: а) одна упругая волна; б) система пластической и упругой волн

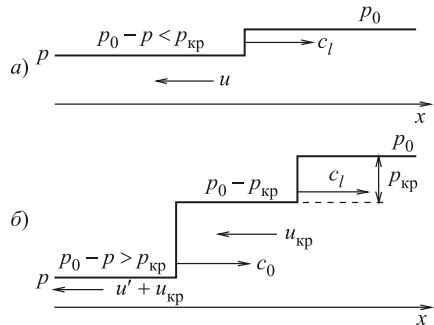


Рис. 11.38. Два случая распространения акустической волны разгрузки: а) одна упругая волна; б) система пластической и упругой волн

до скорости порядка нескольких метров в секунду можно пренебречь, считая, что пластическая волна распространяется по неподвижному невозмущенному веществу со скоростью c_0 , соответствующей сжимаемости.

¹⁾ Эффект существования комбинации упругой и пластической волн сжатия отмечался в работе Банкрофта [30] и др., посвященной фазовому переходу в железе (см. об этом § 19).

Ударные волны достаточно большой амплитуды распространяются со скоростью, заметно превышающей c_0 . Если скорость ударной волны $D > c_l$, то расщепления волн вообще не происходит: ударная волна как бы с самого начала бежит скорее упругой и слита с нею в одну волну.

Расщепление волн на упругую и пластическую происходит и в случае достаточно сильной разгрузки предварительно сжатого вещества. Пусть вещество разгружается от давления p_0 до давления p (например, сначала по телу путем сжатия его поршнем была запущена волна сжатия с давлением p_0 , а затем через какое-то время давление на поршне падает до величины p). Если $p_0 - p < p_{кр}$, по сжатому веществу бежит одна упругая волна разгрузки со скоростью c_l . Если же $p_0 - p > p_{кр}$, то впереди бежит упругая волна разгрузки, в которой давление падает от p_0 до $p_0 - p_{кр}$, а вслед за нею с меньшей скоростью распространяется пластическая волна разгрузки, в которой давление падает до величины p , равной давлению на «поршне» (в частности, если поршень вообще «убирается», p может быть равным нулю). Эти два случая показаны на рис. 11.38.

Явление расщепления волны разгрузки на две наблюдалось экспериментально в работе [4], которая будет описана в следующем параграфе. Авторы этой работы дали наблюдаемым явлениям приведенное выше объяснение.

§ 18. Измерение скорости звука в веществе, сжатом ударной волной. Большой интерес представляет экспериментальное определение скорости звука за фронтом ударной волны. С этой скоростью распространяются возмущения, догоняющие ударную волну и воздействующие на ее амплитуду¹⁾. Скоростью звука (или адиабатической сжимаемостью) определяется наклон обычной адиабаты на диаграмме p, V , которая проходит через точку, описывающую состояние за фронтом ударной волны, т.е. ею определяется начальное поведение сжатого вещества при разгрузке и поведение его в слабой вторичной ударной волне. Знание скорости звука важно для установления уравнения состояния вещества, для правильной постановки опытов по ударному сжатию. Наконец, значения скорости звука и в твердом веществе при высоких давлениях интересны и для ряда проблем геофизики.

Методика измерения скорости звука за фронтом ударной волны была разработана Л. В. Альтшулером, С. В. Кормером совместно с М. П. Сперанской, Л. А. Владимировым, А. И. Фунтиковым и М. И. Бражник [4]. Один из методов (метод боковой разгрузки) состоит в следующем. Ударно-му сжатию подвергается цилиндрический образец ступенчатой формы (рис. 11.39). После прохождения фронтом волны угла O начинается боковая разгрузка. Возмущения от разгрузки догоняют фронт и ослабляют ударную волну. На ослабленном периферийном участке поверхности фронта скорость фронта уменьшается и поверхность искривляется, как показано на рис. 11.39, центральный же участок поверхности, до которого возмущения к данному моменту времени еще не успели добежать, остается плоским, а скорость ударной волны на нем — прежней. Точку, где начинается ослабление ударной волны, легко найти из

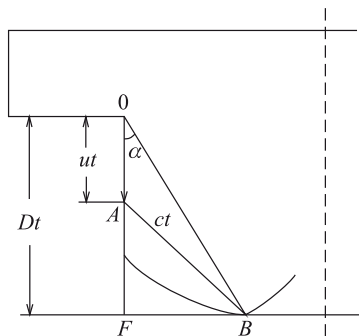


Рис. 11.39. Геометрическое построение в опыте с боковой разгрузкой

¹⁾ Напоминаем, что ударная волна распространяется по веществу за ее фронтом с дозвуковой скоростью.

простых геометрических соображений. За время t от момента прохождения фронтом угла O фронт уходит на расстояние Dt . Вещество, ранее находившееся около угла, сносится вперед на расстояние ut , а самые ранние возмущения, которые родились в момент прохождения угла и которые распространяются по веществу со скоростью звука c , к этому моменту достигают сферы радиуса ct , описанной из точки A , так что ослабление ударной волны начинается в точке B (см. рис. 11.39). Рассматривая треугольники OBF и ABF , можно связать скорость звука со скоростями D, u и тангенсом «угла разгрузки» α :

$$c = D \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha)^2 + \left[\left(\frac{D-u}{D} \right) / D \right]^2}.$$

Задача сводится к определению скорости фронта D и угла α (ударная адиабата вещества предполагается известной, так что массовую скорость u можно вычислить). Экспериментально она разрешается таким образом. При выходе ударной волны на свободную поверхность последняя летит вперед с определенной скоростью. На центральном (неослабленном) участке поверхности фронта эта скорость везде одинакова, а на периферийном (ослабленном) — меньше, как показано стрелками на рис. 11.40.

На опыте регистрируют моменты прихода свободной поверхности к плексигласовой пластинке Π (это делается фотографическим путем с разверткой во времени). На пленке получается картина, изображенная на рис. 11.40 (в момент удара вещества о плексиглас возникает свечение, которое и дает кривую на пленке). По пленке определяют точку B и, зная геометрию опыта, — угол разгрузки α . (Заметим, что B — не угловая точка.)

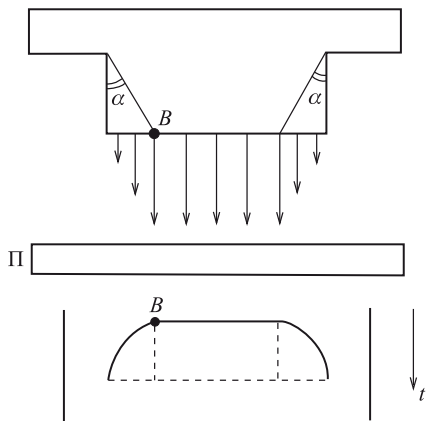


Рис. 11.40. Схема опыта с боковой разгрузкой

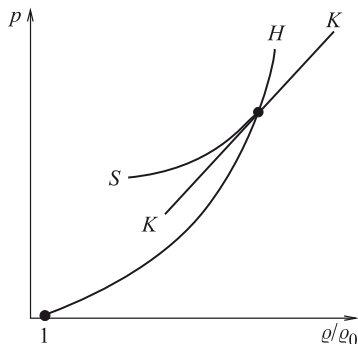


Рис. 11.41. Диаграмма давление–плотность. H — ударная адиабата; S — изэнтропа разгрузки; KK — касательная к изэнтропе в точке, соответствующей состоянию в ударной волне

Оказалось, что у воды граница ослабленной и невозмущенной областей поверхности фронта довольно резкая и вычисленный по скорости звука c модуль сжатия $\varrho_0 c^2$ меньше наклона ударной адиабаты $\varrho_0 \frac{dp}{d\varrho}$ (в переменных $p, \varrho/\varrho_0$) в точке, соответствующей состоянию за фронтом, что находится в полном согласии с взаимным расположением ударной адиабаты и изэнтропы, показанных на рис. 11.41.

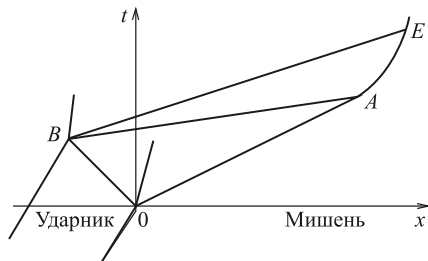
У металлов же (железа, меди) кривые на пленке имеют закругленную форму без четко выраженной границы, так, как будто периферийные участки поверхности фронта разгружены сильно, а более близкие к центру (к оси образца) — очень слабо.

Модуль сжатия $\varrho_0 c^2$, вычисленный по точке начала слабого искривления поверхности фронта, оказался больше соответствующего наклона ударной адиабаты $\varrho_0 \frac{dp}{dQ}$ примерно в 1,5 раза. Экспериментальные данные приведены в табл. 11.3, взятой из работы [4].

Таблица 11.3

Вещество	α , град	D , км/с	u , км/с	Упругая c_l , км/с	Упругая $\varrho_0 c_l^2$, 10^{10} бар	$\varrho_0(dp/dQ)$, 10^{10} бар	Пластическая $\varrho_0 c_0^2$, 10^{10} бар
Вода	47,5	4,42	1,52	5,6	31,4	34,2	
Медь	41,0	5,24	0,87	6,33	357,8	288,8	240
Железо	46,5	5,34	0,98	7,15	401,3	298,2	240

Это явление было объяснено авторами на основе представлений о существовании двух скоростей звука в твердом теле, о которых было рассказано в § 15, 16. Слабые возмущения разрежения распространяются по сжатому веществу со скоростью упругих волн c_l (в сжатом сильной ударной волной веществе давление «изотропно»). Эта повышенная «упругая» скорость звука и соответствует началу слабого искривления поверхности фронта; отвечающий ей модуль сжимаемости $\varrho_0 c_l^2$ оказывается слишком большим, больше наклона ударной адиабаты $\varrho_0 \frac{dp}{dQ}$, так как скорость ударной волны соответствует меньшей, «пластической» скорости звука. По несколько разгруженному веществу бежит «пластическая» волна с уменьшенной, «пластической» скоростью звука. С этой скоростью распространяются значительные возмущения, оказывающие существенное ослабляющее влияние на фронт ударной волны. Скорость пластической волны определяется только сжимаемостью и именно с ней должен сравниваться наклон ударной адиабаты. Модуль сжатия $\varrho_0 c_0^2$, вычисленный с «пластической» скоростью звука c_0 , оказывается у металлов, как и у воды, меньше, чем наклон $\varrho_0 \frac{dp}{dQ}$, в полном соответствии с теорией ударной адиабаты (вода, как жидкость, обладает только одной, пластической, скоростью звука c_0). Существование двух скоростей звука сильно затрудняет точное определение границы «пластической» разгрузки, которая и представляет основной интерес, так как именно ею определяется сжимаемость вещества. Для того чтобы освободиться от влияния этого эффекта, авторами работы [4] был разработан другой метод (метод догоняющей разгрузки, который в своей первоначальной форме был предложен Е. И. Забабахиным). В этом методе рассматривается соударение разогнанной пластинки и образца, сделанных из одного и того же исследуемого материала с известной ударной адиабатой; x, t -диаграмма процесса показана на рис. 11.42.

Рис. 11.42. x, t -диаграмма для опыта с догоняющей разгрузкой

От точки соударения O по обоим телам распространяются ударные волны OA и OB . После того как ударная волна в ударнике доходит до свободной границы B , там начинается разгрузка, и волна разрежения бежит по веществу, догоняя фронт ударной волны в образце в точке A . С этого момента амплитуда ударной волны ослабляется и траектория фронта загибается, как показано на рис. 11.42.

Таблица 11.4. Измеренные на опыте скорости звука при высоких давлениях

Металл	$p, 10^{10}$ бар	V_0/V	c_0 , км/с	c_0 , км/с (при нормальных условиях)
Al	195,5	1,76	11,74	5,2
	160,0	1,701	11,23	
Cu	379,6	1,694	9,48	3,9
	311,7	1,638	8,93	
Fe	347,8	1,650	9,48	5,7
	284,9	1,600	9,53	

Определяя на опыте траекторию фронта ударной волны в стадии заметного ослабления AE и рассматривая процесс распространения возмущений разрежения, можно найти скорость звука в сжатом веществе за фронтом. Поскольку рассматривается стадия сильного ослабления ударной волны, к которому приводит только пластическая волна, но не упругая, несущая слабые возмущения, определяемая на опыте скорость звука есть «пластическая» скорость, связанная со сжимаемостью вещества (подробности этого метода см. в [4]).

Для иллюстрации в табл. 11.4 приводим некоторые результаты измерений. Для сравнения там же указаны скорости звука (пластические) c_0 при нормальных условиях.

§ 19. Фазовые превращения и расщепление ударных волн. Многие твердые вещества могут при разных условиях пребывать в различных кристаллических модификациях. При некоторых значениях температур и давлений, связанных определенной зависимостью, возможны переходы из одной модификации в другую. Эти переходы сопровождаются изменением объема и выделением (или поглощением) скрытой теплоты, являясь фазовыми переходами первого рода. Подобные переходы часто называют полиморфными превращениями вещества ¹⁾.

Примером вещества, способного испытывать полиморфное превращение, может служить железо. При атмосферном давлении и температуре 910°C железо превращается из α -фазы в γ -фазу; переход сопровождается уменьшением объема на 2,5% и поглощением скрытой теплоты 203 кал/моль. Полиморфные превращения часто происходят при высоких давлениях. В частности, указанный переход в железе при температуре, немного превышающей нормальную, протекает при давлении 130 000 атм.

Своеобразные явления возникают при ударном сжатии вещества, способного испытывать полиморфные превращения при высоких давлениях. Эти явления рассматривались теоретически (главным образом качественно) в работах Банкрофта,

¹⁾ В волнах достаточно большой амплитуды происходит плавление твердого вещества, которое также является фазовым переходом первого рода. Вопросы плавления в ударных волнах в настоящее время не изучены ни экспериментально, ни теоретически.

Петерсона и Миншэлла [30], Даффа и Миншэлла [31], Драммонда [32]. Экспериментально ударные волны при наличии полиморфных превращений изучались в первых двух работах (в первой — в железе, во второй — в висмуте); в работах А. Н. Дремина и Г. А. Ададунова [33] (мрамор), А. Н. Дремина [34] (парафин). В некотором диапазоне давлений по телу, способному испытывать полиморфные превращения, распространяются не одна, а две ударные волны, следующие одна за другой. Такое расщепление ударной волны связано с аномальным ходом ударной адиабаты вещества в области фазового перехода. При не слишком больших давлениях в ударной волне происходит незначительное увеличение энтропии, поэтому ударная адиабата близка к изэнтропе и при рассмотрении указанного явления можно исходить из обычной адиабаты.

Адиабата вещества, испытывающего полиморфное превращение, схематически изображена на рис. 11.43.

При сжатии от нормального объема по достижении некоторого состояния A начинается переход из фазы I в фазу II. Кристаллическая решетка перестраивается таким образом, что новые равновесные положения атомов соответствуют меньшим межатомным расстояниям, поэтому сокращение объема в области перехода требует гораздо меньшего увеличения давления, чем в начальной фазе I (при абсолютном нуле температуры фазовый переход I–II происходит при постоянном давлении и участок AB адиабаты $S = 0$ — это прямая горизонтальная линия, как показано на рис. 11.43, б). Если бы перестройки не было, кривая давления продолжалась бы от точки A вверх так, как это показано на рис. 11.43 пунктиром. В области AB вещество находится в двухфазном состоянии. Полная перестройка решетки и полное превращение вещества из фазы I в фазу II заканчивается к моменту B , после чего адиабата второй фазы снова круто идет вверх. Сжимаемости вещества в разных фазах различны, так что наклоны кривых, соответствующих однофазному состоянию в точках A и B , вообще говоря, различны.

Представим себе теперь тело, ударная адиабата которого принадлежит описанному типу, и предположим, что в начальный момент к его поверхности приложено постоянное давление p (рассматриваем одномерный плоский случай). Будем считать, что это давление достаточно велико для того, чтобы можно было пренебречь эффектами прочности и считать давление гидростатическим, т. е. отвлечемся от возможного существования «упругой» волны (см. § 17), считая, что ударная волна — «пластическая».

Если давление p ниже давления p_A , при котором начинается фазовый переход, по телу бежит обычная ударная волна, состояние вещества в которой соответствует точке, лежащей на ударной адиабате (точке C на рис. 11.44); скорость распространения ударной волны D определяется, как известно, наклоном прямой, проведенной из точки начального состояния O в точку конечного состояния на ударной адиабате,

$$D = V_0 \sqrt{\frac{p - p_0}{V_0 - V}}.$$

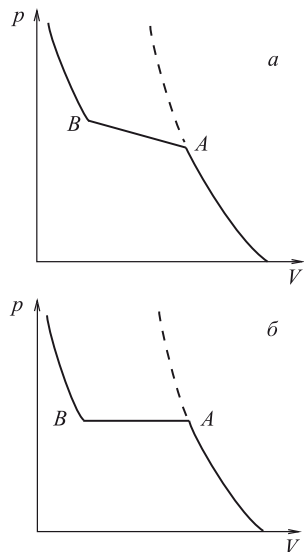


Рис. 11.43. Изэнтропа (обычная адиабата) вещества, испытывающего полиморфное превращение: а) при отличной от нуля температуре $T > 0$; б) при абсолютном нуле, $T = 0$

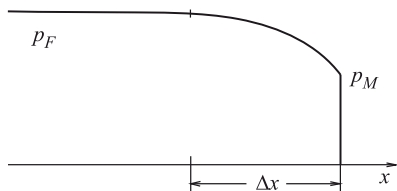


Рис. 11.45. Профиль давления в ударной волне с «релаксацией» фазового перехода

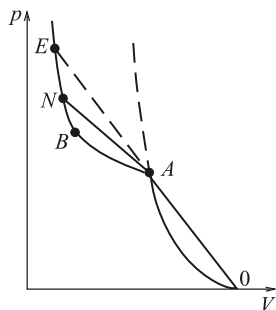


Рис. 11.46. Диаграмма p, V , иллюстрирующая расщепление ударной волны

волны по сжатому и движущемуся веществу, пребывающему в состоянии A , определяется наклоном прямой AN и равна

$$D_2 = V_A \sqrt{\frac{p_N - p_A}{V_A - V_N}}.$$

Скорость распространения второй ударной волны относительно неподвижного исходного вещества равна сумме скорости D_2 и массовой скорости вещества в первой ударной волне u_A :

$$D'_2 = D_2 + u_A.$$

Легко видеть, что вторая волна не догоняет первую, т.е. комбинация двух ударных волн является устойчивой. В самом деле, скорость распространения первой волны относительно вещества за нею равна

$$D''_1 = V_A \sqrt{\frac{p_A - p_0}{V_0 - V_A}}.$$

Поскольку наклон прямой OA по определению ($p_N < p_E$) больше наклона прямой AN , имеем $(p_A - p_0)/(V_0 - V_A) > (p_N - p_A)/(V_A - V_N)$, $D''_1 > D_2$, т.е. первая волна бежит по веществу быстрее, чем вторая по тому же самому веществу.

Во фронте второй ударной волны происходит фазовый переход: в начальном состоянии A вещество находится в первой фазе, а в конечном N либо во второй, если $p_N > p_B$, либо в двухфазном состоянии, если $p_N < p_B$ (переход в этом последнем случае происходит не полностью). В силу замедленности фазового превращения фронт второй ударной волны оказывается сильно размытым, в отличие от тонкого фронта первой волны. Профиль давления в случае системы двух волн схематически изображен на рис. 11.47. С течением времени расстояние между фронтами обеих волн увеличивается, поскольку скорости их различны; распределение же давления во второй волне является стационарным, и профиль во второй волне распространяется как целое.

Комбинация двух ударных волн при наличии фазового перехода во многом аналогична комбинации двух волн сжатия: «упругой» и «пластической», которая рассматривалась в § 17. Причиной возникновения двух волн в обоих случаях является аномальный ход адиабаты и ударной адиабаты, при котором существует область на адиабате, где последняя обращена выпуклостью вверх.

В гл. I было показано, что от знака второй производной $\partial^2 p / \partial V^2$ зависит, возрастает или уменьшается энтропия в ударной волне, т.е. знак обуславливает чисто термодинамические выводы. Здесь мы убеждаемся в том, что аномальный ход

ударной адиабаты приводит к аномальным кинематическим следствиям — расщеплению ударной волны на две. Предельное условие $p > p_E$ для объединения двух волн в одну соответствует тому положению в случае комбинации упругой и пластической волн, когда скорость пластической волны вследствие отклонения адиабаты от закона Гука становится больше скорости упругой, так что вторая волна догоняет первую и сливается с ней.

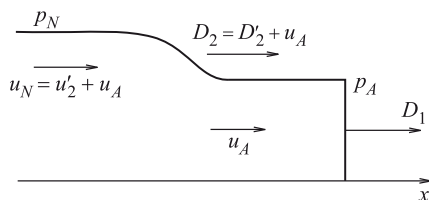


Рис. 11.47. Профиль давления в случае расщепления ударной волны в две

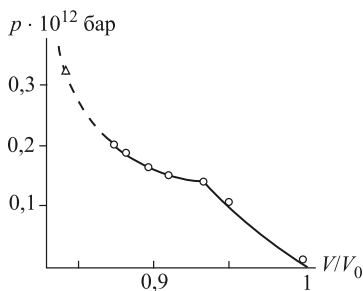


Рис. 11.48. Ударная адиабата железа в области фазового перехода: $\triangle$ — по данным [24]; $\circ$ — по данным [30]

Как уже было сказано выше, явление расщепления ударной волны в веществах, испытывающих полиморфные превращения, наблюдалось экспериментально. Для иллюстрации на рис. 11.48 приводим ударную адиабату железа в области фазового перехода, найденную экспериментально в работе [30]. Заметим, что в висмуте фазовый переход происходит при давлении $\sim 28\,500$ атм, причем время релаксации для перехода при 42°C оказалось меньшим 1 мс.

Альдер и Христиан [35] обнаружили фазовый переход первого рода в йоде J_2 (кристаллы йода являются молекулярными) при давлении $p \approx 7 \cdot 10^5$ атм и относительном объеме $V/V_0 \approx 0,53$. Переход был зафиксирован по изменению наклона в линейной зависимости скорости фронта ударной волны от массовой скорости. Расчеты показывают, что температура в волне в точке фазового перехода $T \approx 1$ эВ. Она сравнима с энергией диссоциации молекул йода 1,53 эВ. Предполагается, что фазовый переход связан с превращением молекулярного двухатомного кристалла в одноатомное металлическое состояние.

Интересно, что аномалии в кривой холодного сжатия металлов, а следовательно, и в ударной адиабате, подобные тем, которые появляются при наличии полиморфных превращений, могут возникать и в отсутствии перестройки атомной решетки вследствие изменения структуры электронных зон, перекрытия отдельных зон при сжатии. Возможность изменения свойств металлов при изменении зонной структуры отмечена в работе И. М. Лифшица [36]. Влияние этих изменений на кривую холодного сжатия металлов и появление участков аномального хода кривой, где $\partial^2 p / \partial V^2 < 0$, изучал Г. М. Гандельман [37].

При достаточной амплитуде в ударной волне происходит плавление твердого вещества, что приводит к излому в ходе ударной адиабаты. Вопросы плавления в ударной волне рассматривались в работах [44, 57–59].

§ 20. Ударная волна разрежения в среде, испытывающей фазовый переход. Согласно общей теории, изложенной в § 17, 18, 19 гл. I, при аномальном ходе адиабаты, когда имеются участки, где адиабата обращена выпуклостью вверх ($\partial^2 p / \partial V^2 < 0$), возможно возникновение скачков разрежения. Адиабата твердо-

го тела, испытывающего фазовый переход, как раз предоставляет такую возможность. Это было отмечено в работе [32]. Режимы с ударными волнами разрежения в металле при наличии фазовых превращений изучали А. Г. Иванов, С. А. Новиков и Ю. П. Тарасов [38], которые впервые дали четкое экспериментальное доказательство существования скачков разрежения в железе (стали).

На адиабате вещества, испытывающего полиморфное превращение, в районе точки излома A (рис. 11.43) ход адиабаты аномален. Хотя во всех точках, где адиабата не имеет особенностей, вторая производная $\partial^2 p / \partial V^2$ положительна, тем не менее имеется участок в районе точки A , где хорда, соединяющая какие-нибудь две точки 1 и 2 , целиком лежит ниже адиабаты (рис. 11.49). Это является следствием того, что среднее значение второй производной на участке $1-2$ отрицательно:

$$\left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right\rangle_{12} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_2 - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_1 \right] / (V_2 - V_1) < 0^1).$$

Как известно из общей теории, именно такое положение и приводит к аномалиям в гидродинамических закономерностях.

Распространение ударных волн сжатия в подобном веществе рассматривалось в предыдущем параграфе.

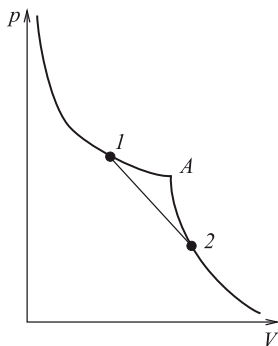


Рис. 11.49. Аномальный участок адиабаты

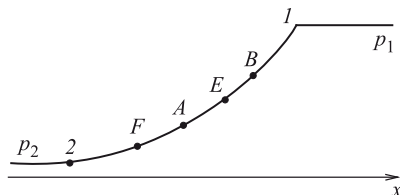


Рис. 11.50. К вопросу об эволюции области разрежения: начальный профиль давления

Будем теперь интересоваться разгрузкой вещества, предварительно сжатого ударной волной. Предположим, что в момент $t = 0$ в теле, ранее сжатом ударной волной до состояния 1 (p_1, V_1), имеется область разрежения, в которой давление и объем плавно меняются до значений p_2, V_2 (состояние 2; $p_2 < p_1$, $V_2 > V_1$). Начальное распределение давления по координате показано на рис. 11.50. Предполагаем, что точки начального и конечного состояний 1 и 2 , а также и все промежуточные точки в плавном распределении лежат на изэнтропе и процесс адиабатичен²⁾. Некоторые из соответствующих точек обозначены на рис. 11.50 и адиабате рис. 11.51 одинаковыми буквами и цифрами.

¹⁾ Во всех точках участка $1-2$, кроме точки излома A , $\partial^2 p / \partial V^2 > 0$, но в самой точке A $\partial^2 p / \partial V^2 = -\infty$, так что среднее значение на участке $1-2$ все равно отрицательно.

²⁾ Рассматриваем только небольшие давления, при которых тепловые эффекты малы и ударная адиабата практически совпадает с изэнтропой. Кроме того, считаем, что фазовые превращения происходят достаточно быстро, «мгновенно», так что состояния вещества никогда не отклоняются от термодинамически равновесной адиабаты.

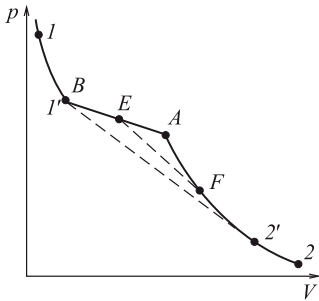


Рис. 11.51. К вопросу об эволюции области разрежения: состояния на диаграмме p, V соответствуют профилю, изображенному на рис. 11.50

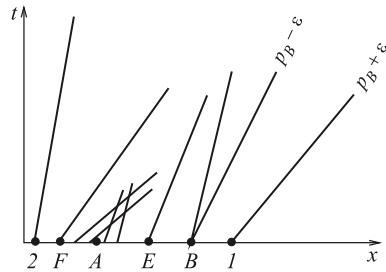


Рис. 11.52. Диаграмма x, t , иллюстрирующая эволюцию начального разрежения в веществе с аномальной адиабатой

Будем считать волну разрежения простой (см. § 8 гл. I), распространяющейся вправо по сжатому веществу. Для того чтобы волна была простой, нужно, чтобы начальные распределения давления и скорости по координате $p(x, 0)$, $u(x, 0)$ удовлетворяли условию постоянства инварианта Римана $J_-(x, 0) = \text{const}$. Тогда и в последующие моменты времени $J_-(x, t) = \text{const}$.

Предположим, что это условие выполнено. Как известно (см. § 8 гл. I), в простой волне, распространяющейся вправо, C_+ -характеристики представляют собой прямые линии на плоскости x, t ; вдоль них переносятся постоянные значения давления и других величин.

Рассмотрим, что произойдет с нашим начальным профилем давления в последующие моменты времени. Для этого проведем на плоскости x, t рис. 11.52

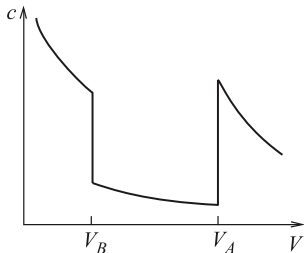


Рис. 11.53. Зависимость скорости звука от объема, соответствующая адиабате, изображенной на рис. 11.51

C_+ -характеристики: прямые с наклонами $dx/dt = u + c$. Скорости распространения возмущений («скорости звука») в различных точках начального распределения определяются наклонами касательных к адиабате в соответствующих точках. В двух точках излома A и B скорость звука испытывает скачок (зависимость скорости звука от объема показана на рис. 11.53). Скорость вещества, равная в силу условия $J_- = \text{const}$, $u = - \int c \frac{d\rho}{\rho} + \text{const}$, непрерывна в точках A и B, так что наклоны характеристик скачкообразно меняются вместе со скачками скорости звука.

Из «нормальной» точки излома B выходят две C_+ -характеристики с разными наклонами, несущие одинаковые значения давления, но разные значения скорости звука. Эти скорости звука соответствуют значениям по обе стороны излома на адиабате, причем чуть большее значение давления $p_B + \varepsilon$ (ε — бесконечно малая) распространяется скорее, чем чуть меньшее $p_B - \varepsilon$.

Иное положение в «аномальной» точке излома A. Здесь из точки A также выходят сразу две характеристики, но большее давление $p_A + \varepsilon$ распространяется медленнее, чем меньшее $p_A - \varepsilon$. Характеристики, проведенные из точек, соседних с A, стремятся пересечься (см. рис. 11.52), а предельные характеристики, выходящие из самой точки A, как бы пересеклись уже с самого начала. Это означает, что в начальном

распределении давления в точке A с самого начала образуется маленький разрыв (в пределе $t \rightarrow 0$ бесконечно малый), который растет с течением времени¹⁾.

Распространение волны разрежения и профили давления в последовательные моменты времени изображены схематически на рис. 11.54. «Плато» давления p_B «ограничено» характеристиками, выходящими из точки B на рис. 11.52.

Скачок — ударная волна разрежения, возникшая в точке A , растет в соответствии с пересечением характеристик. Скачок растет, т. е. верхнее, начальное, давление повышается, а нижнее, конечное, — понижается до тех пор, пока верхняя точка скачка бежит по веществу перед скачком со сверхзвуковой скоростью, а нижняя — бежит по веществу за скачком с дозвуковой скоростью. При этом верхняя граница скачка как бы «съедает» участки плавного возрастающего распределения давления, а возмущения разрежения снизу за скачком догоняют скачок, усиливая разрыв. Процесс роста скачка прекратится, когда верхнее давление достигнет давления в плато, а скорость распространения нижней границы по веществу за скачком становится звуковой.

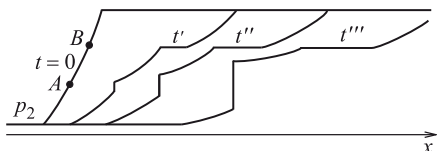


Рис. 11.54. Эволюция профиля давления в волне разрежения; образование ударной волны разрежения; $t = 0, t', t'', t'''$ — последовательные моменты времени

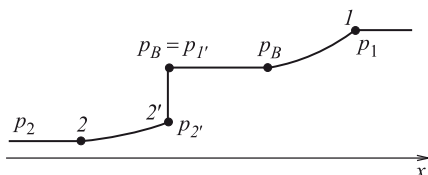


Рис. 11.55. Характер окончательного распределения давления в волне разрежения. Распределение растягивается с течением времени, не меняя своей формы

Установившееся положение разрыва (точки $1'-2'$ на адиабате рис. 11.51) и профиль давления в волне разрежения показаны на рис. 11.55. Как известно (см. § 14 гл. I), скорости распространения разрыва $1'-2'$ по веществу перед ним u_1 и по веществу за ним u_2 определяются наклоном прямой $1'-2'$:

$$u_1^2 = V_1^2 \frac{p_1' - p_2'}{V_2' - V_1'}, \quad u_2^2 = V_2^2 \frac{p_1' - p_2'}{V_2' - V_1'} \quad 2).$$

Из рис. 11.51 видно, что точка $2'$ определяется условием касания прямой $1'-2'$ с адиабатой, так как при этом $u_2 = c_2'$. Скорость распространения разрыва по веществу перед ним u_1 меньше верхней скорости звука в точке излома B , но больше нижней: прямая $1'-2'$ идет более полого и круче, чем соответствующие касательные к адиабате в точке B .

На практике волна разрежения обычно возникает, когда ударная волна выходит на свободную поверхность тела. При этом режим автомодельный, все C_+ -характеристики на плоскости x, t выходят из одной точки и весь «установившийся» профиль

¹⁾ Положение в плавной вначале волне сжатия в веществе с нормальными свойствами несколько иное. Характеристики в этом случае пересекаются не сразу (см. § 9, 12 гл. I), крутизна профиля давления нарастает постепенно и разрыв — ударная волна сжатия — образуется не сразу. Здесь же разрыв — ударная волна разрежения — возникает с самого начала, и амплитуда его растет пропорционально времени.

²⁾ Эти формулы следуют из законов сохранения массы и импульса на разрыве и одинаково справедливы как для скачков сжатия, так и для скачков разрежения.

давления, изображенный на рис. 11.55, образуется с самого начала, как в обычной автомодельной волне разрежения (см. § 11 гл. I). Таким образом, волна разрежения имеет сложный профиль, состоящий из двух участков плавного понижения давления, плато давления (все эти три участка растягиваются с течением времени в соответствии с автомодельностью режима) и скачка ударной волны разрежения (если поверхность тела свободная, точка 2 конечного состояния отвечает нулевому давлению), x, t -диаграмма для централизованной волны разрежения показана на рис. 11.56.

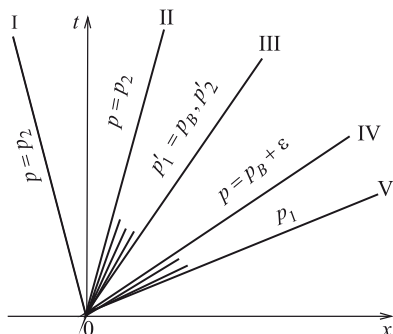


Рис. 11.56. x, t -диаграмма для автомодельной волны разрежения, образующейся при выходе ударной волны на поверхность. I — линия свободной поверхности; II — хвост волны разрежения; III — линия скачка разрежения; IV — начало плато давления; V — голова волны разрежения

В опытах, описанных в работе [38], были обнаружены необычные откольные явления при подрыве зарядов взрывчатого вещества на поверхности железных и стальных образцов. Поверхность откола была чрезвычайно гладкой. Это явление было истолковано как результат столкновения двух ударных волн разрежения, когда на некоторой поверхности возникает скачкообразное изменение давления от положительных до отрицательных значений. Обычно при плавной разгрузке зона растягивающих напряжений, вызывающих откол, размазанная, и поверхность откола — шероховатая, что связано с микронеоднородностью материала в протяженной зоне растягивающих напряжений. Анализ сложной картины движения в условиях опыта позволил авторам работы [38] заключить, что наблюдаемые явления связаны с существованием ударных волн разрежения. Подтверждением служит и то обстоятельство, что в других материалах, кроме железа и стали, в которых нет фазовых превращений в исследованной области давлений, никаких необычных отколов не было.

4. Явления при выходе мощной ударной волны на свободную поверхность тела

§ 21. Предельные случаи твердого и газообразного состояний разгруженного вещества. В § 11 рассматривался процесс разгрузки твердого тела, первоначально сжатого ударной волной, после того как волна выходит на свободную поверхность. При этом считалось, что ударная волна не очень сильная, температура за фронтом сравнительно невелика и разгруженное до нулевого давления вещество остается твердым. Ясно, что если ударная волна очень мощная и внутренняя энергия нагретого вещества ε_1 во много раз превосходит энергию связи атомов U (равную теплоте испарения при нуле температуры), то при расширении вещества до низкого (нулевого) давления после выхода ударной волны на свободную поверхность веще-

ство полностью испаряется и ведет себя при разгрузке как газ ¹⁾. В частности, при разгрузке в вакуум, т.е. до строго нулевого давления, плотность и температура на переднем краю вещества также равны нулю.

Распределения плотности, скорости и давления в волне разгрузки имеют при этом качественно такой же характер, как и в волне разрежения в газе (см. § 10 и 11 гл. I). Они изображены на рис. 11.57.

Гидродинамическое решение для автомодельной волны разгрузки можно записать в общем виде, независимо от термодинамических свойств вещества. Оно выражается формулами

$$\frac{x}{t} = u - c, \quad (11.63)$$

$$u + \int \frac{dp}{\rho c} = \text{const} \quad (11.64)$$

для волны, бегущей налево, как показано на рис. 11.57.

Интегрирование ведется при постоянной энтропии S , так как процесс разгрузки адиабатичен. В данном случае энтропия равна энтропии вещества за фронтом ударной волны. Константу можно выразить через параметры вещества во фронте ударной волны (которые отмечаем индексом «1»). При этом формула (11.64) приобретает вид

$$u = u_1 + \int_p^{p_1} \frac{dp}{\rho c}. \quad (11.65)$$

Скорость переднего края разгруженного вещества (скорость свободной поверхности) равна

$$u_2 = u_1 + \int_0^{p_1} \frac{dp}{\rho c}. \quad (11.66)$$

Формулой (11.66) мы уже пользовались в § 11, чтобы получить закон удвоения скоростей. Распределение гидродинамических величин в волне разгрузки можно найти, если известны термодинамические функции вещества (т.е. известны функции $\rho(p, S)$, $c(p, S)$, с помощью которых можно вычислить интеграл (11.65)). Соответствующие формулы для газа с постоянной теплоемкостью были выписаны в § 10 гл. I.

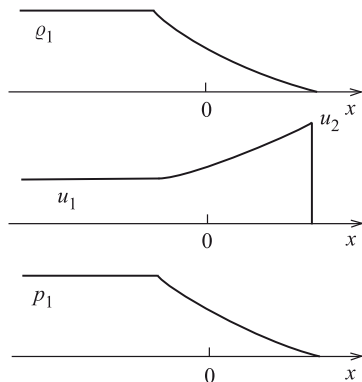


Рис. 11.57. Профили плотности, скорости и давления после выхода очень сильной ударной волны на свободную поверхность

¹⁾ Иногда говорят об «испарении» вещества в самой ударной волне. Такое утверждение является неправильным, если под «испарением» понимать фазовый переход в обычном термодинамическом смысле. Называть плотное вещество «жидкостью» или «газом» можно лишь в условном смысле, в зависимости от соотношения между кинетической энергией теплового движения атомов и потенциальной энергией их взаимодействия. Переход от «жидкости» к «газу», если нагревать вещество при постоянном объеме, осуществляется непрерывно. Вообще, нужно напомнить, что при давлениях и температурах выше критических все вещество однородно и разделения фаз не происходит. Следует заметить, что утверждение о том, что в достаточно сильной ударной волне вещество перестает быть твердым, имеет вполне реальный физический смысл (твердое вещество плавится).

В интересующем нас случае разгрузки твердых тел это сделать пока не удастся, так как для описания термодинамических функций вещества в области плотностей, несколько меньших нормальной плотности твердого тела, пока нет удовлетворительной теории (имеются в виду промежуточные температуры, при которых вещество нельзя считать ни твердым, ни идеальным газом). Поэтому мы здесь ограничимся описанием качественной картины и грубыми оценками.

Для простоты будем предполагать, что до сжатия ударной волной твердое тело находилось при нуле температуры и нулевом объеме $V_{0к}$, а также что разгрузка происходит в вакуум (до нулевого давления). Кроме того, не будем делать различия между твердым и жидким состояниями. Теплота плавления обычно гораздо меньше теплоты испарения¹⁾ (мало и изменение объема при плавлении), поэтому, рассматривая явления таких энергетических масштабов, при которых вещество полностью испаряется, эффектом плавления можно пренебречь.

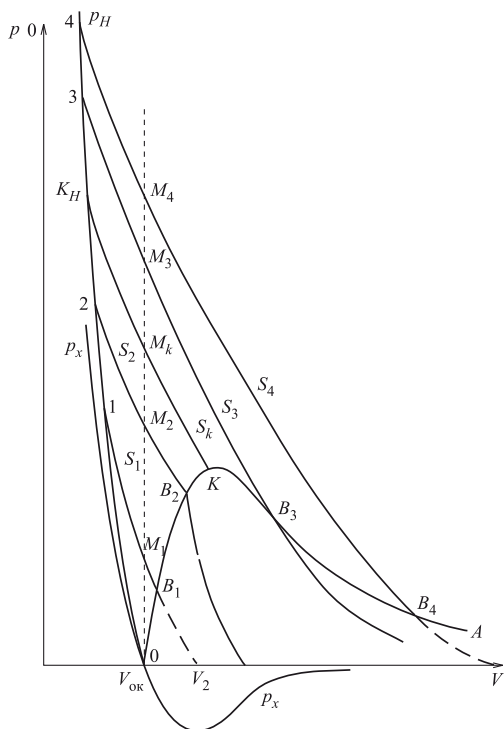


Рис. 11.58. Адибаты разгрузки на p, V -диаграмме

Проследим за процессом разгрузки данной частицы вещества на p, V -диаграмме. На рис. 11.58 проведены кривая упругого давления p_x , продолженная и в область отрицательных давлений, ударная адибата p_H , кривая $ОКА$, разделяющая области однофазного и двухфазного состояний. Ветвь $ОК$ до критической точки K представляет собой кривую кипения (начала парообразования), а ветвь $КА$ — кривую

¹⁾ Например, у свинца в 46 раз меньше, у алюминия — в 22 раза меньше.

насыщенного пара (начала конденсации). Кроме того, проведено несколько адиабат S , проходящих через различные состояния в ударной волне.

Рассмотрим наиболее простые предельные случаи. Пусть ударная волна слабая (состояние 1 на ударной адиабате). Сжатое вещество разгружается вдоль адиабаты S_1 , давление падает до точки B_1 , где адиабата пересекается с кривой кипения, после чего твердое тело (или жидкость) в принципе должны были бы вскипеть. Однако для образования зародышей новой фазы, т.е. пузырьков пара, требуется довольно значительная энергия активации, необходимая для разрыва сплошности вещества и образования поверхности пузырьков; скорость этого процесса столь ничтожна при низких температурах порядка сотен и даже тысяч градусов (для металлов), что практически твердое тело продолжает расширяться и охлаждаться до нулевого давления по адиабате «перегретой жидкости», проведенной на рис. 11.58 пунктиром от точки B_1 . В конечном состоянии вещество имеет объем V_2 ¹⁾, немного превышающий нулевой $V_{0к}$, и оказывается нагретым до температуры T_2 , связанной с разностью объемов $V_2 - V_{0к}$ законом теплового расширения (см. § 11). Даже если отвлечься от вопросов кинетики объемного парообразования, доля испаренного вещества не могла бы превысить величины порядка $c_V T_{B_1}/U$, которая очень мала при температурах T_{B_1} , порядка сотен градусов (для металлов $U/c_V \sim 10^4$ К). С этим случаем разгрузки мы имели дело в § 11.

В другом предельном случае, когда ударная волна очень мощная (состояние 4), адиабата разгрузки S_4 проходит гораздо выше критической точки K , в чисто газовой области, и вещество расширяется как газ до бесконечного объема. Вообще говоря, адиабата в какой-то момент пересечет кривую насыщенного пара (точка B_4), после чего должна начаться конденсация²⁾. Однако если время разлета паров ограничено, как это обычно бывает в лабораторных условиях, конденсация практически не успевает происходить, и вещество продолжает расширяться по адиабате переохлажденного пара (пунктир от точки B_4 на рис. 11.58).

§ 22. Критерий полного испарения вещества при разгрузке. Установим количественный критерий полного испарения вещества при разгрузке, более определенный, чем не вызывающее сомнений условие очень большого превышения энергии в ударной волне над теплотой испарения $\epsilon_1 \gg U$.

Мы будем говорить о полном испарении, если разгружающееся вещество, следуя законам термодинамики, проходит через стадию чисто газообразного состояния (мы не утверждаем, что конечное состояние при этом также является чисто газообразным, так как в принципе при расширении до бесконечного объема обязательно должна начаться конденсация).

Рассмотрим диапазон амплитуд ударных волн, промежуточный между двумя предельными случаями, когда волна слабая и разгруженное вещество — заведомо твердое, и когда волна очень мощная, и вещество при разгрузке заведомо ведет себя как газ.

Внутренняя энергия сжатого вещества в ударной волне состоит из упругой ϵ_{x1} и тепловой ϵ_{T1} (в последней не будем различать атомной и электронной). При расширении сжатого вещества до нулевого объема $V_{0к}$, упругая энергия, ранее

¹⁾ В отличие от обозначений § 11 здесь все величины в конечном, разгруженном состоянии отмечаются индексом «2», индекс «1» приписываем величинам во фронте ударной волны.

²⁾ Процесс конденсации при расширении паров в вакуум подробно рассматривался в гл. VIII.

приобретенная при сжатии, полностью «возвращается назад», она переходит в кинетическую энергию ускоряющегося при разгрузке вещества ¹⁾).

Часть начальной тепловой энергии ε_t , затраченная на совершение работы расширения и равная $\int_{V_1}^{V_{0k}} p_t dV$, также переходит в кинетическую. Обозначим тепловую энергию, оставшуюся в веществе к моменту расширения его до нулевого объема V_{0k} , через ε'_t . Она совпадает с полной внутренней энергией в этот момент. Совершенно ясно, что для полного испарения в процессе последующего расширения необходимо, чтобы эта энергия ε'_t превышала энергию связи U :

$$\varepsilon'_t > U.$$

Весь вопрос состоит в том, каково должно быть это превышение. При расширении до объемов, больших нулевого, запас энергии ε'_t расходуется частично на совершение работы расширения (эта часть энергии переходит в кинетическую энергию гидродинамического движения), а частично на преодоление сил сцепления, описываемых отрицательным давлением p_x (эта часть энергии переходит в потенциальную).

Предположим, что энергии ε'_t хватает на то, чтобы полностью испарить вещество, т.е. на то, чтобы давление $p = p_t + p_x = p_t - |p_x|$ не упало до нуля раньше, чем вещество расширится до бесконечного объема. Из уравнения адиабаты $d\varepsilon + p dV = 0$ в силу определения $d\varepsilon_x + p_x dV = 0$ следует, что $d\varepsilon_t + p_t dV = 0$. Интегрируя это уравнение от нулевого объема V_{0k} до бесконечного, при котором тепловая энергия обращается в нуль, получим

$$\varepsilon'_t = \int_{V_{0k}}^{\infty} p dV + \int_{V_{0k}}^{\infty} |p_x| dV = \int_{V_{0k}}^{\infty} p dV + U.$$

Первый член представляет собой ту часть запаса энергии, которая идет на совершение работы расширения, второй — энергию, затрачиваемую на разрыв связей атомов.

Изобразим на диаграмме p, V давления p, p_t, p_x (рис. 11.59). Там же показаны энергии, численно равные соответствующим площадям.

На пределе полного испарения давление в той стадии расширения, когда силы сцепления ослабевают ($V > V_{\max}$), близко к нулю (тепловое давление хватает ровно на столько, чтобы преодолевать силы сцепления: $p_t \approx |p_x|$). Однако на более ранней стадии, когда $V_{0k} < V < V_{\max}$, давление p велико, тепловое давление заметно больше, чем упругое $p_t > |p_x|$. Это ясно из того, что в состоянии с $V = V_{0k}$, $p' = p'_t = \Gamma \frac{\varepsilon'_t}{V_{0k}} > \Gamma \frac{U}{V_{0k}}$, где Γ — «эффективный коэффициент Грюнайзена», который порядка единицы ($|p_x|_{\max} \sim U/V_{0k}$). Тепловое давление при расширении падает более или менее монотонно (энергия ε_t уменьшается, объем V растет). Поэтому кривая $p_t(V)$ имеет именно такой вид, как это изображено на рис. 11.59. Из рис. 11.59 видно, что заштрихованная вертикальной штриховкой площадь, равная работе расширения $\int_{V_{0k}}^{\infty} p dV$, такого же порядка, как и площадь, соответствующая потенциальной энергии

¹⁾ Но не остается при этом сосредоточенной в той же самой частице, как это бывает при стационарном истечении, когда справедлив закон Бернулли; см. § 11 гл. I.

U , т.е. на пределе полного испарения запас энергии ε'_T должен раза в два превышать энергию связи U .

Для того чтобы облечь эти сугубо качественные соображения в количественную форму, необходимо знать термодинамические свойства вещества в области объемов, больших нормального объема конденсированного состояния, когда существенны силы сцепления. К сожалению, этот диапазон объемов $V_{0к} < V \lesssim 5 V_{0к}$ исследован хуже всего как теоретически, так и экспериментально. Можно подойти к оценке интенсивности ударной волны, разделяющей области полного и неполного испарения при разгрузке, несколько иначе, охарактеризовав границу полного испарения не величиной энергии ε'_T , а значением энтропии.

Из рис. 11.58 видно, что эффективной границей между полным и неполным испарением при адиабатической разгрузке является такое состояние в ударной волне K_H , в котором энтропия равна энтропии критической точки $S_{кр}$, т.е. когда расширяющееся вещество попадает в критическую точку K . Тот факт, что при энтропии большей, нежели $S_{кр}$, вещество в какой-то момент начинает конденсироваться (состояние 3, адиабата S_3 , точка конденсации B_3), и означает, что еще до этого были разорваны все межатомные связи, т.е. вещество стало газом. Наоборот, если энтропия меньше $S_{кр}$ (состояние 2, адиабата S_2 , точка кипения B_2), тепловой энергии не хватает на то, чтобы довести парообразование до конца. При энтропиях, близких к критической и с той и с другой стороны, вещество в разгрузке находится в двухфазном состоянии, т.е. в виде пара и жидких капель. Здесь существенную роль играет кинетика фазовых превращений. Эти очень интересные вопросы еще не рассматривались теоретически и не изучались экспериментально.

Энтропийный критерий, несмотря на всю его условность, обладает тем преимуществом по сравнению с энергетическим, что позволяет подойти к оценке граничной, критической энтропии $S_{кр}$ с «газовой стороны», минуя плохо исследованную область объемов, в два-три раза превышающих нормальный объем твердого тела¹⁾.

Для того чтобы проиллюстрировать изложенные качественные соображения, проведем оценки для свинца. Вычислим энтропию свинца в критической точке, воспользовавшись общей формулой для энтропии одноатомного идеального газа (4.16), каковыми являются пары свинца. Примем для оценки критическую температуру равной $T_{кр} = 4200$ К, а объем $V_{кр} = 3V_{0к}$ ²⁾ (обычно критический объем раза в три

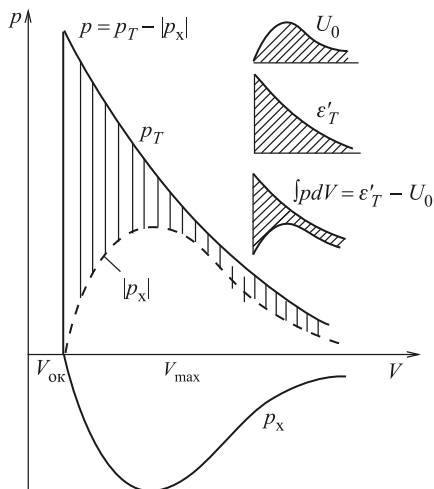


Рис. 11.59. К вопросу об испарении конденсированного вещества при расширении (пояснения см. в тексте)

¹⁾ Здесь, конечно, тоже существует неопределенность, связанная с тем, что критические параметры металлических жидкостей, как правило, неизвестны.

²⁾ Величина $T_{кр}$ была оценена в работе [39]; по формуле Ван-дер-Ваальса критическое давление: $p_{кр} = 3/8 \cdot n_{кр} kT_{кр} \approx 2400$ атм.

больше нормального объема жидкости). Статистический вес атомов свинца равен $g_0 = 9$. Вычисление с этими параметрами дает $S_{\text{кр}} = 42,8$ кал/моль · град¹⁾.

Энтропию в ударной волне можно вычислить, воспользовавшись термодинамическими функциями $\varepsilon(T, V)$, $p(T, V)$, описанными в § 6. Проще всего найти энтропию в состоянии T, V , проинтегрировав термодинамическое уравнение

$$dS = \frac{d\varepsilon + p dV}{T} = \frac{d\varepsilon_T + p_T dV}{T}$$

сначала при постоянной температуре, равной нормальной T_0 , от нормального объема V_0 до V , а затем при $V = \text{const}$, — по температуре от T_0 до T . В первом интеграле при этом можно пренебречь электронными членами, которые ничтожно малы при $T_0 \approx 300$ К. Полагая для оценки коэффициент Грюнрайzena равным $\Gamma(V) \approx \Gamma_0 (V/V_0)^m$, где показатель m для свинца по данным табл. 11.2 приближенно равен $m \approx 1$, получим в результате интегрирования

$$S(T, V) = S_0 + c_V \ln \frac{T}{T_0} + \beta_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/2} (T - T_0) - \frac{\varepsilon_0}{mT_0} [\Gamma_0 - \Gamma(V)]^2. \quad (11.67)$$

Здесь S_0 — энтропия металлического свинца при нормальных условиях T_0, V_0, ε_0 , которая по литературным данным [40] равна $S_0 = 15,5$ кал/моль · К. Подставляя в формулу (11.67) параметры ударной волны из табл. 11.2, найдем энтропию в волне. Энтропия, близкая к критической $S_{\text{кр}}$, достигается при следующих параметрах ударной волны: $V_0/V_1 = 1,9$, $p_1 = 2,25 \cdot 10^6$ атм, $T_1 = 15\,000$ К, $\varepsilon_1 = 4,71 \cdot 10^{10}$ эрг/г³⁾ (точнее, при этих параметрах $S_1 = 44,5$ кал/моль · К). Энергия ε'_T при адиабатическом расширении до нулевого объема $V_{0\text{к}}$ оказывается равной $1,9 \cdot 10^{10}$ эрг/г, т.е. вдвое больше энергии связи $U = 0,94 \cdot 10^{10}$ эрг/г, что вполне соответствует ожидаемой величине, как это было сказано выше ($T' = 9500$ К, $p'_T = p' \approx 5 \cdot 10^3$ атм).

Таким образом, следует ожидать, что в более мощных ударных волнах при разгрузке будет происходить полное испарение свинца. Приведем еще для примера некоторые результаты расчета для самой мощной из исследованных на опыте ударных волн в свинце. Именно, при $p_1 = 4 \cdot 10^{12}$ атм, $V_0/V_1 = 2,2$ энтропия $S_1 = 51,7$ кал/моль · К, а энергия к моменту расширения до нормального объема $\varepsilon'_T = 3,57 \cdot 10^{10}$ эрг/г, т.е. в 3,6 раза больше энергии связи U ($T' = 15\,000$ К). В этом случае, по-видимому, уже происходило полное испарение при разгрузке.

В заключение подчеркнем, что в волне разгрузки, распространяющейся по телу после выхода ударной волны на свободную поверхность, с самого начала имеются частицы вещества в самых различных состояниях, начиная от давления p_1 (в голове волны разрежения) и до нуля (на свободной поверхности). В волне представлены все состояния, через которые проходит данная частица в процессе эволюции от давления p_1 до нуля. Отметим также, что давление в частицах, близких к свободной поверхности, настолько быстро падает до нуля, что в случае полного испарения пар в этой области является сильно пересыщенным, хотя по условиям термодинамического равновесия вещество должно было бы находиться в двухфазном состоянии.

¹⁾ Использование уравнения Ван-дер-Ваальса для учета неидеальности газа приводит к очень малой поправке на энтропию $\Delta S_{\text{неид}} = R \ln 2/3 = -0,8$ кал/моль · К (при том же объеме, при котором вычисляется S идеальное). Эта поправка введена в значение $S_{\text{кр}}$.

²⁾ Последний член, зависящий от Γ , играет малую роль, так что ошибка, связанная с приближенной интерполяцией $\Gamma(V)$ степенной формулой, незначительна.

³⁾ Любопытно отметить, что энергия в ударной волне, при которой только начинается полное испарение, в пять раз больше энергии связи.

§ 23. Опытное определение температуры и энтропии в мощной ударной волне при помощи исследования разгруженного вещества в газовой фазе. Ряд параграфов этой главы был посвящен изучению термодинамических свойств твердых тел при высоких давлениях и температурах и описанию методов экспериментального исследования этих свойств при помощи измерений параметров ударного сжатия вещества. Общая особенность этих методов состоит в том, что таким путем можно найти только механические параметры вещества: давление, плотность и полную внутреннюю энергию. Измерение кинематических параметров ударной волны — скорости распространения фронта и массовой скорости вместе с использованием соотношений на фронте ударной волны — не дает возможности непосредственно определить такие важные термодинамические характеристики, как температуру и энтропию. Для нахождения температуры и энтропии по данным механических измерений необходимо задаваться теми или иными теоретическими схемами для описания термодинамических функций. Выше было использовано трехчленное представление давления и энергии, причем некоторые параметры, такие, как теплоемкость атомной решетки, коэффициенты электронной теплоемкости и электронного давления приходилось определять теоретическим путем.

Между тем было бы весьма интересным и важным изыскать какие-то пути непосредственного опытного установления температуры или энтропии в ударной волне, по возможности сократив число теоретических параметров. К сожалению, на этом пути приходится сталкиваться с большими трудностями, как экспериментальными, так и принципиального характера. Один из важнейших способов измерения высоких температур, оптический, может быть использован только в том случае, если тело прозрачно, в то время как подавляющее большинство твердых тел и, в частности, металлы, представляющие наибольший интерес, — непрозрачны.

Температура за фронтом ударной волны была измерена оптическим путем в плексигласе (Я. Б. Зельдович, С. Б. Кормер, М. В. Силицын и А. И. Курапин [41]). В этих опытах измерялась яркость поверхности фронта мощной ударной волны, распространяющейся в прозрачном веществе — плексигласе. Затем яркость пересчитывалась на температуру в предположении, что нагретая область, ограниченная поверхностью фронта, излучает как абсолютно черное тело. Яркость измерялась в красной и синей частях спектра, причем находились не только яркостная, но и цветовая температура (см. § 8 гл. II). В ударной волне с давлением $p \approx 2 \cdot 10^6$ атм и сжатием — $\rho/\rho_0 \approx 2,7$ температура оказалась равной $T \approx 10\,000$ – $11\,000$ К. Оценка температуры по известной из механических измерений внутренней энергии в разумных предположениях о балансе энергии (здесь существенна диссоциация молекул плексигласа) свидетельствует о правдоподобности измеренного значения температуры.

Можно было бы попытаться измерить оптическим путем температуру в момент выхода ударной волны на свободную поверхность. Однако для того чтобы измеренная при этом температура совпадала с действительной температурой в ударной волне, нужно предъявить к эксперименту совершенно невероятные требования. В самом деле, металлы непрозрачны для видимого света в очень тонких слоях $\sim 10^{-5}$ см. При скорости ударной волны порядка 10 км/с волна пробегает слой такой толщины за время $\sim 10^{-11}$ с. Даже если бы удалось построить регистрирующий свет прибор с колоссальной разрешающей способностью во времени $\sim 10^{-12}$ – 10^{-13} с, чтобы успеть уловить момент выхода волны на поверхность, когда от поверхности вещества волну отделяет уже прозрачный слой $\sim 10^{-6}$ – 10^{-7} см, все равно невозможно было бы обеспечить одновременность выхода ударной волны на свободную поверхность в различных точках с требуемой точностью. Иначе говоря, невозможно обеспечить параллельность поверхности фронта и свободной поверхности с точностью $\sim 10^{-6}$ см.

Если же измерять свечение поверхности через практически приемлемое время $\sim 10^{-8}$ с после момента выхода ударной волны, то зарегистрировано будет свечение вещества не во фронте волны, а в волне разгрузки, так как за время $\sim 10^{-8}$ с волна разгрузки охватывает оптически очень толстый слой порядка $10^6 \text{ см/с} \times 10^{-8} \text{ с} = 10^{-2} \text{ см}$; этот слой совершенно непрозрачен для света, рожденного в неразгруженной области, температура которой нас интересует. (Вопрос о свечении поверхности волны разгрузки будет подробно рассмотрен в следующем параграфе.)

Принципиальные возможности опытного определения температуры (и энтропии) в ударной волне были указаны в работе одного из авторов [42]. Пусть ударная волна настолько сильна, что после выхода волны на свободную поверхность вещество при разгрузке полностью испаряется. Тогда на переднем краю расширяющегося вещества последнее находится в газовой фазе. Если каким-либо методом измерить в газовой фазе механические величины: плотность и давление или же температуру, то энтропию можно рассчитать теоретически, так как термодинамические функции газов рассчитываются сравнительно просто (см. гл. III). Но в силу адиабатичности процесса разгрузки энтропия вещества в ударной волне в точности равна энтропии в газовой фазе при разгрузке. Таким образом, зная энтропию в газовой фазе, мы тем самым знаем ее и в ударной волне.

В работе [42] показано, как можно вычислить температуру вдоль всей адиабаты разгрузки, если известна удельная внутренняя энергия ε как функция давления и плотности вдоль адиабаты и одно значение температуры в какой-нибудь точке адиабаты. В самом деле, из термодинамического тождества

$$dS = \frac{d\varepsilon + p dV}{T} = \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} dp + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right) dV,$$

и условия, что энтропия есть функция состояния, а dS — полный дифференциал, следует, что

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right) \right].$$

Производя дифференцирование, получим после сокращений дифференциальное уравнение в частных производных для функции $T(p, V)$:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right) \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial V} = T. \quad (11.68)$$

Характеристиками этого уравнения являются линии, дифференциальное уравнение которых имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial V} = - \frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right)}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)}.$$

Но это есть уравнение адиабаты. Вдоль характеристик, т.е. вдоль адиабаты, согласно (11.68)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s = - \frac{T}{(\partial \varepsilon / \partial p)},$$

откуда

$$T = T_0 \exp \left(- \int_{V_0}^V \frac{dV}{(\partial \varepsilon / \partial p)} \right) = T_0 \exp \left(\int_{p_0}^p \frac{dp}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} + p \right)} \right),$$

где интегралы берутся вдоль адиабаты. Эта формула и доказывает сделанное утверждение.

Заметим, что, зная значение энтропии в двух ударных волнах, близких по амплитуде (даже не абсолютные значения энтропии, а только их разность), легко вычислить и температуру в ударной волне, воспользовавшись термодинамическим соотношением

$$T = \frac{\Delta \varepsilon + p \Delta V}{\Delta S},$$

поскольку $\Delta \varepsilon$, p и ΔV известны из механических измерений. Точно так же, зная значения температуры вдоль ударной адиабаты, можно найти и абсолютные значения энтропии, проинтегрировав термодинамическое соотношение

$$dS = \frac{d\varepsilon + p dV}{T}$$

вдоль ударной адиабаты и привязав константу интегрирования к табличному значению энтропии вещества при нормальных условиях.

§ 24. Свечение паров металла при разгрузке. В предыдущем параграфе было отмечено, что попытка «увидеть» высокотемпературное свечение фронта мощной ударной волны, распространяющейся по твердому телу в момент выхода ее на свободную поверхность, обречена на неудачу. Рассмотрим подробнее, что должно при этом наблюдаться, какое свечение регистрирует прибор, направленный на свободную поверхность, и как будет зависеть яркость поверхности от времени. Соответствующие опыты были поставлены С. Б. Кормером, М. В. Синицыным и А. И. Куряпиным, а теория явления была дана в работе авторов [43].

Пусть мощная ударная волна с температурой во фронте T_1 порядка нескольких десятков тысяч градусов в момент $t = 0$ выходит на плоскую свободную поверхность металла, граничащую с вакуумом (поверхность фронта волны предполагается строго параллельной свободной поверхности тела). Тело должно быть помещено в вакууме; в противном случае разгружающееся вещество будет толкать впереди себя ударную волну в воздухе, причем температура воздуха будет очень высока и мы вместо интересующего нас свечения металла увидим свечение высоконагретого воздуха. Ударную волну будем считать столь мощной, что при разгрузке металл полностью испаряется и расширяется в газовой фазе. Профили температуры в начальный момент $t = 0$ и в какой-то последующий момент времени изображены на рис. 11.60. К моменту t волна разрежения охватывает слой вещества толщины $c_1 t$, где c_1 — скорость звука в сжатом веществе за фронтом ударной волны.

Поскольку само вещество движется в лабораторной системе координат со скоростью u_1 , координата головы волны разрежения в момент t есть $x = (u_1 - c_1)t$ (начальному положению свободной поверхности приписывается координата $x = 0$). Передний край расширяющихся паров металла летит вперед со скоростью u_2 , которая дается формулой (11.66). Поскольку вещество в волне разгрузки находится в газовой фазе, температура на границе с вакуумом равна нулю, так же как плотность и давление.

В предыдущем параграфе было сказано, что металлы непрозрачны в очень тонких слоях $\sim 10^{-6}$ см. Это значит, что уже к моменту времени $t \sim 10^{-11}$ с (при скорости $c_1 \sim D \sim 10^6$ см/с) слой разгруженного металла почти полностью экранирует

высокотемпературное излучение температуры T_1 , и металл, первоначально нагретый ударной волной, становится невидимым.

Посмотрим, как светится поверхность вещества в непрерывном спектре и какое излучение попадает в регистрирующий прибор, направленный на плоскую свободную

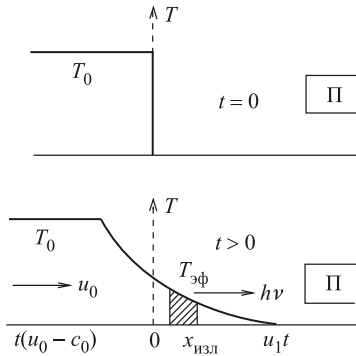


Рис. 11.60. Распределения температуры в момент выхода ударной волны на свободную поверхность $t = 0$ и через некоторое время, при $t > 0$. Излучающий слой заштрихован. П — прибор, регистрирующий свет

поверхность. Пары металла представляют собой одноатомный газ, оптические свойства которого в непрерывном спектре были подробно изучены в гл. V. Коэффициент поглощения видимого света чрезвычайно резко зависит от температуры, быстро возрастающей с повышением температуры, причем холодные пары совершенно прозрачны в непрерывном спектре. Свечение слоя с распределением температуры, подобным изображенному на рис. 11.60, уже было рассмотрено в гл. IX. Явление совершенно аналогично свечению воздуха в прогретом слое, образующемся перед скачком уплотнения в сильной (сверхкритической) ударной волне. При низких температурах у границы с вакуумом пары прозрачны и излучают очень слабо. Наоборот, в более глубоких слоях, где температура высока, пары совершенно непрозрачны для видимого света и «не выпускают» рожденные в этих слоях кванты. На «бесконечность» с поверхности вещества уходят кванты, рожденные в некотором промежуточном, излучающем слое, отстоящем от границы с вакуумом на оптическом расстоянии τ_ν порядка единицы (излучающий слой заштрихован на рис. 11.60).

Зная распределения температуры и плотности по координате и коэффициент κ_ν поглощения света данной частоты ν как функцию температуры и плотности, можно вычислить эффективную температуру излучения этой частоты по общей формуле (2.52).

Можно, однако, поступить проще, заметив, что эффективная температура совпадает с температурой излучающего слоя (геометрическая толщина излучающего слоя невелика, температура в нем меняется мало), т. е. составить выражение для оптической толщины, отсчитываемой от границы с вакуумом, и приравнять его единице:

$$\tau_\nu = - \int_{u_2 t}^{x(T_{эф})} \kappa_\nu(x) dx = 1. \quad (11.69)$$

Переходя к переменной интегрирования — температуре, запишем

$$- \int_0^{T_{эф}} \kappa_\nu(T) \frac{dx}{dT} dT = 1. \quad (11.70)$$

Это и есть уравнение для определения эффективной температуры. Для вычисления производной от распределения температуры воспользуемся общим решением для волны разрежения (11.63), (11.64).

Поскольку вещество на переднем краю, вблизи границы с вакуумом, т. е. как раз в той области, где лежит излучающий слой, находится в газовой фазе, то, задаваясь

эффективным показателем адиабаты газа γ , можно найти приближенное распределение всех величин в этой области в явном виде. Для этого следует проинтегрировать уравнение (11.64) не со стороны сжатого вещества, как это было сделано при выводе формулы (11.65), а со стороны границы с вакуумом,

$$u = u_2 - \int_0^p \frac{dp}{\varrho c} = u_2 - \int_0^p c \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad (11.71)$$

и воспользоваться адиабатической связью $c(\varrho, S)$.

В решение войдет в качестве параметров скорость движения границы u_2 и энтропия S . Мы не будем выписывать это решение, а найдем производную непосредственно из уравнения (11.63) и дифференциального соотношения $du = -c \frac{d\varrho}{\varrho}$:

$$\frac{1}{t} \frac{dx}{dT} = \frac{\partial u}{\partial T} - \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_S = -c \left(\frac{\partial \ln \varrho}{\partial T} \right)_S - \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_S,$$

или

$$\frac{dx}{dT} = -\frac{ct}{T} \left\{ \left(\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln T} \right)_S - \left(\frac{\partial \ln c}{\partial \ln T} \right)_S \right\} \approx -\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{ct}{T}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением $c \sim \sqrt{T}$, а также адиабатической связью $T \sim \varrho^{\gamma-1}$.

Уравнение (11.70) теперь принимает форму

$$\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} t \int_0^{T_{\text{эф}}} \kappa_\nu(T) \frac{c(T)}{T} dT = 1. \quad (11.72)$$

Отсюда видно, что с течением времени интеграл, а следовательно, и эффективная температура излучения убывают.

Физическая причина этого состоит в том, что с течением времени, когда волна разгрузки охватывает все большую и большую массу вещества, геометрическая и оптическая толщины слоя между границей с вакуумом и точкой с данной температурой непрерывно возрастают. Поэтому излучающий слой, отстоящий от границы на заданном оптическом расстоянии порядка единицы, сдвигается в область все более и более низких температур (рис. 11.61).

Замечательно, что из уравнения (11.72) для зависимости $T_{\text{эф}}(t)$ выпала скорость границы u_2 ¹⁾, которая нам неизвестна, так как она определяется термодинамическими функциями вещества вдоль всей адиабаты разгрузки, в том числе и в неисследованной области, где плотность немного меньше нормальной плотности твердого тела. В качестве параметра в уравнение (11.72) входит только энтропия S благодаря зависимости коэффициента поглощения κ_ν от плотности (числа атомов в 1 см^3 n), которая связана с температурой адиабатическим уравнением:

$$n = B(S) T^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (11.73)$$

где $B(S)$ — энтропийная константа.

Если основным механизмом поглощения видимого света в парах металлов является фотоэлектрическое поглощение высоковозбужденными атомами (а также тормоз-

¹⁾ Так как в выражение (11.70) не входит в явном виде координата x , а входит только производная dx/dT .

ное поглощение в поле ионов), то коэффициент поглощения κ_ν можно приближенно вычислять по формуле (5.44):

$$\kappa_\nu = \frac{a_\nu n}{T^2} \exp\left(-\frac{I - h\nu}{kT}\right), \quad (11.74)$$

где a_ν — постоянная, зависящая от частоты ($a_\nu \sim \nu^{-3}$); I — потенциал ионизации.

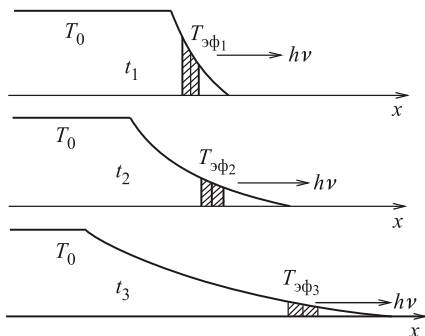


Рис. 11.61. Сдвиг излучающего слоя (заштрихован) в волне разгрузки с течением времени

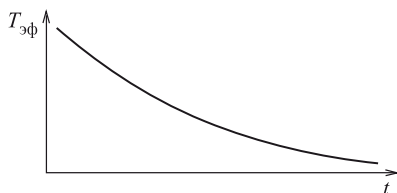


Рис. 11.62. Зависимость эффективной (яркостной) температуры поверхности волны разгрузки от времени

При очень слабой ионизации в плотных парах существенную роль может играть тормозное поглощение в поле нейтральных атомов (см. гл. V). В этом случае коэффициент поглощения κ_ν пропорционален числу свободных электронов n_e , т. е. степени ионизации, и основная температурная зависимость коэффициента поглощения также имеет больцмановский характер, но с иным показателем экспоненты:

$$\kappa_\nu \sim n n_e = b_\nu \exp\left(-\frac{I}{2kT}\right) n^{3/2}, \quad (11.75)$$

где b_ν слабо зависит от температуры. Общий характер температурной зависимости κ_ν в обоих случаях одинаков: $\kappa_\nu \sim e^{-E/kT}$, где $E = I - h\nu$ в первом случае и $E = I/2$ — во втором. Кстати сказать, и численно оба значения E различаются для металлов не сильно (при $I \approx 6-8$ эВ, $h\nu \approx 2-3$ эВ).

Вычислим приближенно интеграл в формуле (11.72) с учетом того, что основная зависимость подынтегрального выражения от температуры заключена в экспоненциальном множителе. Считая все медленно меняющиеся степенные температурные множители постоянными, получим $t e^{-E/kT_{\text{эф}}} = \text{const}$, т. е. получим логарифмический спад эффективной температуры излучения со временем (рис. 11.62):

$$T_{\text{эф}} = \frac{\text{const}}{\ln t + \text{const}}.$$

Конкретные расчеты показывают, что для металлов, независимо от предположения о том или другом из перечисленных механизмов поглощения, эффективная температура порядка 7000—4000 К в моменты $t \sim 10^{-7}-10^{-6}$ с¹⁾ (за эти времена свободная поверхность уходит примерно на $10^{-1}-1$ см при скоростях ~ 10 км/с).

¹⁾ Тогда как в ударной волне температура T_1 может достигать десятков тысяч градусов.

§ 25. Замечания о принципиальной возможности измерения энтропии в ударной волне по свечению при разгрузке. В уравнение (11.72) входит только один параметр, характеризующий ударную волну — энтропия S . Если известны оптические свойства вещества, т.е. функция $\kappa_\nu(T, \rho)$, то, снимая экспериментально кривую свечения $T_{\text{эф}}(t)$, можно найти абсолютное значение энтропии в ударной волне. Наоборот, задаваясь значениями энтропии из других соображений (вычисляя ее с помощью термодинамических функций сжатого твердого вещества и измеренных параметров ударной волны), можно из эксперимента по свечению поверхности разгрузки извлечь данные об оптических свойствах паров металлов, а именно определить предэкспоненциальный множитель в выражении для коэффициента поглощения. Любопытно отметить, что в предположении, что существует только один механизм поглощения и κ_ν выражается либо формулой (11.74), либо (11.75), в окончательное уравнение для функции $T_{\text{эф}}(t)$, которое получается при интегрировании (11.72), входит только произведение неизвестных параметров $a_\nu B(S)$ в случае (11.74) и $b_\nu B^{3/2}(S)$ в случае (11.75) (так как в (11.74) $\kappa_\nu \sim a_\nu n \sim a_\nu B$, а в (11.75) $\kappa_\nu \sim b_\nu n^{3/2} \sim b_\nu B^{3/2}$). Энтропийная константа B в адиабатическом уравнении (11.73) зависит от абсолютного значения энтропии S как $B \sim e^{-S/R}$ (R — газовая постоянная).

Значит, снимая кривые свечения в двух опытах с несколько различающимися амплитудами ударных волн и определяя параметры, скажем, произведение $a_\nu B$, мы тем самым находим разность энтропии в ударных волнах, даже не зная оптической константы a_ν : $\frac{a_\nu B'}{a_\nu B''} = \exp \left[-\frac{S' - S''}{R} \right]$, где один штрих и два штриха относятся к первому и второму опытам. По разности энтропии, как было отмечено в предыдущем параграфе, можно найти и температуру в ударной волне.

Описанный опыт может служить конкретным воплощением высказанных в предыдущем параграфе соображений об использовании измерений в газовой фазе в волне разгрузки для экспериментального определения энтропии и температуры в ударной волне.

5. Некоторые другие явления

§ 26. Электропроводность неметаллических тел в ударных волнах. При обычных условиях газы являются хорошими изоляторами. В достаточно сильных ударных волнах они становятся проводниками. Нечто подобное происходит и с твердыми диэлектриками, которые в сильных ударных волнах проводят электрический ток.

Однако если в газах наступление проводимости связано просто с термической ионизацией, которая имеет место при высоких температурах порядка десятка тысяч градусов и выше, достигаемых в ударной волне, то физическая причина превращения твердых диэлектриков в проводники в ударных волнах значительно сложнее, связана скорее со сжатием, чем с повышением температуры, и во многом еще не ясна.

Электропроводность конденсированных веществ в ударной волне изучалась несколькими авторами. А. А. Бриш, М. С. Тарасов и В. А. Цукерман разработали методику и измеряли проводимость продуктов детонации конденсированных взрывчатых веществ [45], а также воды, органического стекла, парафина [46] ¹⁾ в сильных ударных волнах с давлениями до миллиона атмосфер. Проводимость ионного кристалла хлористого натрия при давлениях до миллиона атмосфер изучалась в цитированной выше работе [5]. С более слабыми ударными волнами (до 250 000 атм) работали

¹⁾ В этой работе изучалась также проводимость воздуха.

Альдер и Христиан, которые измеряли электропроводность ионных и молекулярных кристаллов CsJ , J_2 , CsBr , LiAlH_4 и др. [47].

Сущность основного, электроконтактного метода, описанного в статье [45], с помощью которого были измерены проводимости в работах [45, 46, 5], состоит в следующем. В тело, по которому распространяется ударная волна, вводятся электроды (контакты) K , соединенные шунтирующим сопротивлением $R_{\text{ш}}$ (рис. 11.63). Пока ударная волна не подошла к контактам, сопротивление вещества — диэлектрика практически бесконечно. После достижения ударной волной контактов диэлектрик становится проводником, и искомое сопротивление R_x оказывается включенным параллельно сопротивлению $R_{\text{ш}}$.

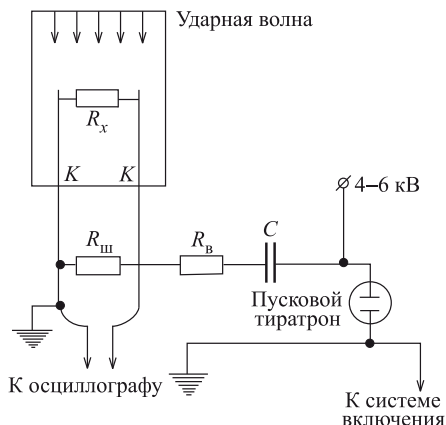


Рис. 11.63. Схема опыта по измерению электропроводности в ударной волне

Незадолго до подхода ударной волны к контактам через высоковольтное сопротивление $R_{\text{в}}$ и контакты разряжается конденсатор C , предварительно заряженный до высокого напряжения в несколько киловольт (это делается с помощью пускового тириатрона). Сопротивление $R_{\text{в}} \gg R_{\text{ш}}$, так что ток в сети определяется только сопротивлением $R_{\text{в}}$. Разность потенциалов на контактах пропорциональна сопротивлению между контактами. Последнее равно $R_{\text{ш}}$ до подхода ударной волны

и $R = \frac{R_{\text{ш}} R_x}{(R_{\text{ш}} + R_x)}$ после достижения ударной волной контактов (сопротивление $R_{\text{ш}}$

выбирается так, чтобы оно было порядка R_x). Если $U_{\text{ш}}$ и U_x соответствуют разности потенциалов на контактах, то $U_{\text{ш}}/U_x = R_{\text{ш}}/R = (R_{\text{ш}} + R_x)/R_x$. Напряжения $U_{\text{ш}}$ и U_x измеряются осциллографом; $R_{\text{ш}}$ — известно; искомое сопротивление R_x вычисляется с помощью этой формулы. Для перехода от измеренного сопротивления R_x к удельной электропроводности вещества применяется электролитическое моделирование. Для этого электроды при точном соблюдении геометрии опыта погружаются в электролитическую ванну. Изменяя плотность электролита, добиваются получения сопротивления, равного измеренному на опыте. При этом искомая проводимость равна известной проводимости электролита (о других примененных методах измерения проводимости веществ в ударной волне см. [45, 5]). Опыты [46] показали, что электропроводность диэлектриков в ударной волне повышается на много порядков. Если начальная проводимость дистиллированной воды составляла $\sigma \sim 10^{-5} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, то при давлении $p = 10^5 \text{ атм}$ было получено $\sigma = 0,2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. При этом проводимость

в ударной волне совершенно не зависела от начальной проводимости воды, связанной с примесями. То же самое значение σ в ударной волне было получено и для обычной воды с проводимостью $\sigma \sim 10^{-3} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

Такие совершенные диэлектрики, как парафин ($\sigma \sim 10^{-18} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) и органическое стекло ($\sigma \sim 10^{-15} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) при давлениях порядка 10^6 атм превращались в неплохие проводники с проводимостью $\sigma \sim 1 \div 2 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ¹⁾. В парафине заметное повышение проводимости наблюдается при давлениях $\sim 6\text{--}7 \cdot 10^5$ атм и при дальнейшем увеличении давления σ быстро растет. В органическом стекле происходит чрезвычайно резкое возрастание проводимости при давлении $8 \cdot 10^5$ атм.

Изменение электропроводности органического стекла и парафина в ударной волне на 15–20 порядков свидетельствует о «металлизации» этих диэлектриков при сжатии до давлений порядка миллиона атмосфер²⁾.

Это явление нельзя объяснить термической ионизацией. Оно связано с изменением структуры электронных зон твердого тела при сжатии. При сжатии зоны сближаются, расстояния между ними уменьшаются и тем самым облегчаются электронные переходы, приводящие к появлению свободных электронов и металлической проводимости в веществе, ранее бывшем диэлектриком³⁾. Качественные соображения о металлизации любого вещества при достаточно сильном сжатии высказывались в работе Я. Б. Зельдовича и Л. Д. Ландау [48], где рассматривался переход металлов из твердого в газообразное состояние (металлизацию водорода при больших плотностях изучал А. А. Абрикосов [49]).

Надо сказать, что детали механизма металлизации диэлектриков в ударной волне еще не вполне ясны, и это явление требует дальнейшего изучения как теоретического, так и экспериментального. В частности, интересно установить раздельно роли температуры и сжатия в повышении проводимости.

Опыты [5] с хлористым натрием, который при нормальных условиях обладает небольшой ионной проводимостью, позволяют считать, что основную роль в повышении электропроводности при увеличении амплитуды ударной волны, в отличие от предыдущего, играет температура. Кривая зависимости $\sigma(T)$ имеет больцмановский характер $\sigma \sim e^{-E/kT}$ с энергией активации $E \approx 1,2$ эВ, что и свидетельствует, по-видимому, об ионной природе проводимости NaCl в ударной волне.

Численно, на границах исследованного интервала амплитуд при $p = 10^5$ атм, $T = 440$ К, $V_0/V = 1,26$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$; при $p = 7,9 \cdot 10^5$ атм, $T = 6150$ К, $V_0/V = 1,85$, $\sigma = 3,26 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

§ 27. Измерение показателя преломления вещества, сжатого в ударной волне. Ширина фронта ударной волны в твердых и жидких телах сравнима с межатомными расстояниями и гораздо меньше длин волн видимого света $\lambda \sim 4000\text{--}7300$ Å. Поэтому свет, проходящий через прозрачное невозмущенное вещество и падающий на поверхность фронта ударной волны, которая отделяет невозмущенное

¹⁾ Для сравнения с металлической проводимостью укажем, что у меди $\sigma \sim 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, у железа $\sigma \sim 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, у ртути $\sigma \sim 10^4 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$.

²⁾ В опытах Альдера и Христиана [47] были измерены значительно меньшие электропроводности. Явление «металлизации» в тех сравнительно слабых волнах, с которыми работали эти авторы, было выражено гораздо слабее.

³⁾ Влияние давления на электропроводность диэлектриков изучалось и раньше (в области сравнительно небольших давлений). Так, Бриджмен [50] установил, что желтый фосфор, являющийся диэлектриком, при давлениях $1,2\text{--}1,3 \cdot 10^4$ атм и температуре 200°C переходит в новую модификацию — черный фосфор, обладающий металлической проводимостью. Плотность черного фосфора в 1,4 раза больше, чем у желтого.

вещество от сжатого, отражается также, как от обычной границы двух разных сред. Отражение света от поверхности фронта ударной волны в прозрачных телах, воде и плексигласе исследовалось в опытах, поставленных Я. Б. Зельдовичем, С. Б. Кормером, М. В. Синицыным и К. Б. Юшко [51].

Зная показатель преломления невозмущенного вещества и угол падения и измеряя коэффициент отражения, можно затем по известным формулам Френеля (см., например, [52]) вычислить показатель преломления n вещества, сжатого ударной волной¹⁾.

Такой способ, вообще говоря, применим и в тех случаях, когда сжатое ударной волной вещество непрозрачно. Если длина пробега для поглощения сравнима с длиной волны света, то в принципе можно измерить и действительную и мнимую части показателя преломления. Для этого надо определить зависимость коэффициента отражения от угла падения и поляризацию отраженного света [54].

В достаточно сильной ударной волне прозрачное в невозмущенном состоянии вещество становится непрозрачным. Нарушение прозрачности при высоких давлениях

может происходить по разным причинам: из-за растрескивания вещества, из-за фазовых переходов, вследствие перестройки электронных уровней, в частности, при «металлизации» диэлектриков, о которой упоминалось в предыдущем параграфе.

Принципиальная схема опытов [51] по изучению отражения света от фронта ударной волны в воде показана на рис. 11.64.

С плоской поверхностью торца заряда взрывчатого вещества соприкасается плексигласовая пластина, на которую нанесен слой воды. Поверх воды помещена плексигласовая призма. Ход лучей до взрыва показан на рис. 11.64, а. На призму падает луч I от источника света и из нее выходят лучи, отраженные от двух поверхностей воды — II и III.

Ход лучей после взрыва и выхода ударной волны в воду показан на рис. 11.64, б. Отражение от поверхности фронта ударной волны дает луч IV, отражение от движущейся границы между плексигласовой подложкой и сжатой водой — луч V. Луч V теперь заменяет луч III. Отраженные лучи регистрируются фотографическим путем с разверткой во времени. Схема фотографии

показана на рис. 11.65. До подрыва лучи II и III дают прямые светлые полосы на движущейся пленке. В момент t_1 выхода ударной волны в воду возникают две

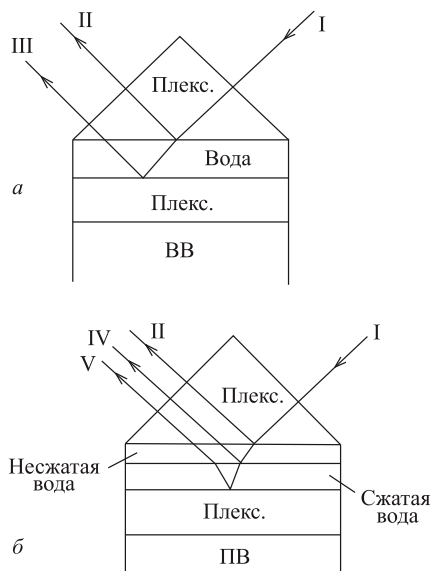


Рис. 11.64. Схема опыта по измерению отражения света от фронта ударной волны: а) до взрыва; б) в процессе распространения ударной волны по воде

¹⁾ В газах ширина фронта ударной волны, т. е. толщина переходного слоя между невозмущенным и сжатым веществами порядка длины волны света, поэтому формулы Френеля здесь неприменимы. Однако в газах показатель преломления при разных плотностях известен. Изучение отражения света позволяет в этих условиях определить ширину фронта ударной волны. Такие измерения были сделаны Хорнигом и Кованом [53] для ударных волн слабой интенсивности (см. гл. IV).

полоски, от лучей IV и V, причем полоска V теперь заменяет закончившуюся полоску III. Полоска II продолжается, оставаясь неизменной вплоть до выхода ударной волны на верхнюю поверхность воды (момент t_2). Как видно из рис. 11.64, б, по мере приближения фронта волны к верхней границе воды расстояние между лучами IV и II уменьшается. В момент выхода лучи IV и II совпадают; полоска IV на рис. 11.65 достигает полоски II.

Расстояние между лучами II и III в натуре составляло примерно 20 мм, а разность времен $t_2 - t_1 \sim 4 \cdot 10^{-6}$ с.

Скорость фронта ударной волны в воде измерялась по наклону полоски IV. Зная ударную адиабату воды, можно определить плотность и другие параметры за фронтом. Коэффициент отражения вычислялся по отношению интенсивностей падающего и отраженных лучей; интенсивности определялись фотометрическим путем.

Показатель преломления сжатой воды определялся двумя способами: геометрическим (по расстояниям между отраженными лучами) и по коэффициенту отражения. Средние по нескольким опытам значения, вычисленные тем и другим способом, оказались близкими друг к другу.

В пределах изменения плотности воды от $\rho/\rho_0 = 1,47$ до $\rho/\rho_0 = 1,81$, что соответствует давлениям от 50 до 150 тыс. атмосфер, показатель преломления почти не меняется и равен $n = -1,49 \pm 0,03$ (по геометрическому способу) и $n = 1,46 \pm 0,03$ (по отражению). В воде нормальной плотности и $n = n_0 = 1,333$. Экспериментальные результаты других авторов по измерению показателя преломления воды при небольших давлениях довольно хорошо описываются линейной зависимостью $n = 1 + 0,334\rho^1$, где ρ — плотность в г/см³. С этой формулой согласуются и данные для паров воды, а также показатель преломления льда при 0 °С и $\rho = 0,92$, равный 1,311.

Значение показателей, которые получены для воды, сжатой в ударной волне, заметно ниже значений, диктуемых приведенной формулой.

По всей вероятности, расхождение следует отнести за счет влияния температуры (при сжатии ударной волной до плотности $\rho = 1,8\rho_0$ вода нагревалась до 1100 °С). Механизм влияния температуры (чем выше температура, тем ниже показатель преломления) остается еще не выясненным.

Исследования отражения света от фронта ударной волны показали, что поверхность фронта гладкая (в противном случае отражение было бы диффузным, а не зеркальным).

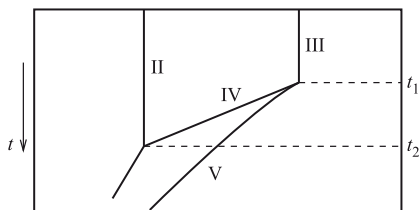


Рис. 11.65. Схема фотохронограммы

¹⁾ Формула Лоренц–Лорентца дает гораздо худшее согласие с опытом.

Глава XII

НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

1. Введение

§ 1. Группы преобразований, допускаемые уравнениями газовой динамики.

В гл. I мы уже познакомились с несколькими примерами автомодельных движений (с автомодельной волной разрежения, с задачей о сильном взрыве)¹⁾. В этой главе будут подробно изучены автомодельные движения одного из двух основных типов. Во вводном разделе главы будет показано, как в уравнениях газовой динамики заложена возможность существования автомодельных решений, и будет дана общая характеристика автомодельных движений. Представляется целесообразным предварительно познакомиться с общими групповыми свойствами уравнений газовой динамики.

Будем рассматривать одномерные адиабатические движения идеального газа с постоянной теплоемкостью, т. е. движения, обладающие плоской, цилиндрической или сферической симметрией. Выпишем систему уравнений для этого типа движений. В уравнении непрерывности (1.2) раскроем знак дивергенции и представим уравнение в единой форме, общий для всех трех видов симметрии; кроме того, поделим все уравнение на плотность ρ . В уравнение адиабатичности (1.13) подставим выражение для энтропии (1.14) (заменяв удельный объем на плотность). Уравнение движения (1.6) оставим без изменений. Получим следующую систему уравнений для плотности, давления и скорости как функций координаты и времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{u}{r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln p \rho^{-\gamma} + u \frac{\partial}{\partial r} \ln p \rho^{-\gamma} &= 0. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Число ν в уравнении непрерывности равно $\nu = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно. Переменная r играет роль координаты x в плоском случае и радиуса в цилиндрическом и сферическом.

Уравнения (12.1) допускают несколько групп преобразований, которые мы сейчас перечислим. При этом предполагается, что одновременно с преобразованиями в урав-

¹⁾ В гл. X были рассмотрены автомодельные задачи теории распространения тепла механизмом теплопроводности в неподвижном веществе.

нениях аналогичные преобразования делаются и в начальных и граничных условиях задачи.

1) Время t входит в уравнения только под знаком дифференциала, следовательно, сдвиг по времени, совершаемый путем введения новой переменной $t' = t + t_0$, не меняет уравнений. Возможность сдвига по времени связана с произволом в выборе начала отсчета времени.

2) В плоском случае ($\nu = 1$) координата также входит в уравнения только под знаком дифференциала. Поэтому в плоском случае возможен сдвиг и по координате, связанный с произволом в выборе начала отсчета координаты. Введение переменной $x' = x + x_0$ не меняет уравнений.

В сферическом и цилиндрическом случаях это невозможно, так как радиус входит в уравнение непрерывности не только под знаком дифференциала.

Уравнения газовой динамики содержат пять размерных величин: ϱ, p, u, r, t , из которых три обладают независимой размерностью. Например, если выбрать в качестве основных размерных величин плотность, координату и время, то размерности скорости и давления представляются в виде $[u] = [r]/[t]$; $[p] = [\varrho][r^2]/[t^2]$. В соответствии с существованием трех независимых размерных величин уравнения допускают три независимые группы преобразований подобия, которые связаны с произволом в выборе единиц измерения основных размерных величин.

1) Пусть функции $\varrho = f_1(r, t)$, $p = f_2(r, t)$ и $u = f_3(r, t)$ представляют собой решение уравнений для некоторого определенного движения. Изменим масштаб плотности, не меняя масштабы координаты и времени, для чего введем новые переменные $\varrho' = k\varrho$, $p' = kp$, оставив остальные без изменения. При этом уравнения не изменятся. Если одновременно изменить таким же образом начальные и граничные условия, увеличив плотность и давление в k раз, то новое движение будет описываться функциями

$$\varrho' = k f_1(r, t), \quad p' = k f_2(r, t), \quad u = f_3(r, t).$$

Новое движение подобно старому, отличаясь лишь масштабами плотности и давления.

2) Изменим масштаб длины, не меняя масштабы плотности и времени. Уравнения не меняются, если перейти в них к новым переменным: $r' = mr$, $u' = mu$, $p' = m^2 p$, оставив остальные, ϱ и t , без изменения: $\varrho' = \varrho$, $t' = t$. Это значит, что если какое-то движение описывается функциями $\varrho' = f_1(r, t)$, $p = f_2(r, t)$, $u = f_3(r, t)$, то путем простого изменения масштабов можно описать и новое движение, в котором расстояния и скорости увеличены в m раз, а давление увеличено в m^2 раз (плотность остается неизменной). Решением для нового движения являются функции:

$$\varrho' = f_1(r', t), \quad p' = m^2 f_2(r', t), \quad u' = m f_3(r', t).$$

3) Наконец, изменим масштаб времени, не меняя масштабы длины и плотности. Уравнения допускают преобразование:

$$t' = nt, \quad u' = \frac{u}{n}, \quad p' = \frac{p}{n^2}, \quad \varrho' = \varrho, \quad r' = r.$$

Это значит, что если в начальных и граничных условиях уменьшить скорости в n раз, а давление в n^2 раз, оставив плотность неизменной, то новый процесс будет подобен старому, но только будет протекать в n раз медленнее.

Путем последовательного применения трех групп преобразований подобия можно получить решения для бесчисленного множества новых движений с измененными масштабами плотности, длины и времени. В частности, если одновременно растянуть длину и время в одинаковое число раз $r' = lr$, $t' = lt$, то решение останется неизменным.

Такое преобразование эквивалентно последовательному применению преобразований 2) и 3) с $m = n = l$. В символической форме это можно записать так:

$$u(r, t) \rightarrow lu(lr, t) \rightarrow \frac{1}{l}lu(lr, lt) = u(lr, lt)$$

и аналогично для других функций, ϱ и p .

§ 2. Автомодельные движения. В предыдущем параграфе было показано, что уравнения газовой динамики допускают преобразования подобия, т.е. возможны различные движения, которые подобны друг другу и могут быть получены друг из друга путем изменения основных масштабов длины, времени и плотности. Что же касается данного движения, то оно может описываться самыми различными функциями двух переменных r и t : $\varrho(r, t)$, $p(r, t)$, $u(r, t)$, включающими в себя также параметры, которые входят в начальные и граничные условия задачи (и показатель адиабаты γ).

Существуют, однако, такие движения, отличительным свойством которых является подобие, сохраняющееся в самом движении. Такие движения называются автомодельными. Распределение любой из газодинамических величин по координате, скажем, давления p , в автомодельном движении эволюционирует со временем таким образом, что изменяются только масштаб давления $\Pi(t)$ и координатный масштаб области, охваченной движением $R(t)$, но остается неизменной форма профиля давления. Путем растяжения и сокращения масштабов Π и R можно добиться точного совпадения кривых $p(r)$, отвечающих различным моментам времени t . Функцию $p(r, t)$ можно представить в виде $p(r, t) = \Pi(t)\pi(r/R)$, где размерные масштабы Π и R как-то зависят от времени, а безразмерное отношение $p/\Pi = \pi(r/R)$ является «универсальной» (в смысле независимости от времени) функцией новой, безразмерной координаты $\xi = r/R$.

Растягивая и сокращая масштабы Π и R в соответствии с их зависимостью от времени, можно из «универсальной» функции $\pi(\xi)$ получить истинную кривую распределения давления по координате $p(r)$ для любого момента времени t . Аналогичным образом выражаются и другие газодинамические величины: плотность и скорость.

Для автомодельных движений система уравнений газовой динамики в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных функций автомодельной переменной $\xi = r/R$.

Выведем эти уравнения. Для этого представим решение уравнений в частных производных (12.1) в виде произведений масштабных функций на новые неизвестные функции новой, автомодельной, переменной ξ :

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad R = R(t). \quad (12.2)$$

Масштабы давления, плотности, скорости, длины не все независимы между собою. Если выбрать в качестве основных масштабы длины R и плотности ϱ_0 , то в качестве масштаба скорости можно взять величину $dR/dt \equiv \dot{R}$, а в качестве масштаба давления $\varrho_0 \dot{R}^2$. Это не нарушает общности, масштаб определяется с точностью до численного коэффициента, который всегда можно включить в новую неизвестную функцию. Будем искать решение в виде

$$p = \varrho_0 \dot{R}^2 \pi(\xi), \quad \varrho = \varrho_0 g(\xi), \quad u = \dot{R} v(\xi), \quad (12.3)$$

где π , g , v — новые, безразмерные функции автомодельной переменной ξ , для которых и следует составить дифференциальные уравнения. Эти функции иногда называют

представителями давления, плотности и скорости соответственно. Масштабы R , ϱ_0 , $\dot{R}$ как-то зависят от времени, пока неизвестным образом.

Подставим выражения (12.3) в уравнения (12.1), примем во внимание определение автомодельной переменной (12.2) и воспользуемся правилами дифференцирования типа:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} &= \frac{d\varrho_0}{dt} g - \varrho_0 \frac{dg}{d\xi} \frac{r}{R^2} \frac{dR}{dt} = \dot{\varrho}_0 g - \varrho_0 g' \xi \frac{\dot{R}}{R}, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial r} &= \frac{\varrho_0 g'}{R}\end{aligned}$$

(дифференцирование масштабов по времени будем обозначать точкой, а дифференцирование представителей по автомодельной переменной — штрихом).

В результате после простых преобразований получим уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\varrho}_0}{\varrho_0} + \frac{\dot{R}}{R} \left[v' + (v - \xi)(\ln g)' + (\nu - 1) \frac{v}{\xi} \right] &= 0, \\ \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} v + (v - \xi)v' + \frac{\pi'}{g} &= 0, \\ \frac{R}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left(\ln \varrho_0^{\gamma-1} \dot{R}^2 \right) + (v - \xi)(\ln \pi g^{-\gamma})' &= 0.\end{aligned}\tag{12.4}$$

Для того чтобы представление (12.3) имело смысл и можно было написать дифференциальные уравнения для новых неизвестных функций $\pi(\xi)$, $g(\xi)$, $v(\xi)$, необходимо, чтобы переменные t и ξ в уравнениях (12.4) разделились. Для этого во втором из уравнений следует положить $R\dot{R}/\dot{R}^2 = \text{const}$, откуда (при $\text{const} \neq 1$)

$$R = At^\alpha.\tag{12.5}$$

Здесь A и α — некоторые постоянные (A — размерная, α — число).

В первом уравнении (12.4) надо положить $\dot{\varrho}_0/\varrho_0 = \text{const}$, $\dot{R}/R$, что дает

$$\varrho_0 = Bt^\beta,\tag{12.6}$$

где B и β — также постоянные. Первый член в третьем уравнении (12.4) при этом превращается в константу автоматически.

Таким образом, все масштабы в автомодельном движении зависят от времени по степенным законам, а автомодельная переменная имеет вид ¹⁾

$$\xi = \frac{r}{R} = \frac{r}{At^\alpha}.\tag{12.7}$$

Уравнения (12.4) превращаются теперь в систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций $\pi(\xi)$, $g(\xi)$, $v(\xi)$. В систему входят показатели степеней: постоянные числа α и β . Аналогичным путем преобразуются к безразмерной форме и начальные и граничные условия задачи, которые превращаются в условия для функций π , g , v .

Не будем здесь выписывать систему уравнений в общем виде. Уравнения будут записаны в дальнейшем применительно к конкретным задачам. Во многих движениях

¹⁾ Как заметил К. П. Станюкович [1], кроме степенной, возможна еще и экспоненциальная автомодельность, при которой $R = A' e^{mt}$, $\varrho_0 = B' e^{nt}$, $\xi = r e^{-mt}/A'$, где A' , B' , m , n — константы. Экспоненциальное решение удовлетворяет уравнению $R\dot{R}/\dot{R}^2 = \text{const}$ при $\text{const} = 1$. В большинстве практически интересных задач автомодельность имеет степенной характер.

масштаб плотности ϱ_0 является постоянным (показатель $\beta = 0$). Это имеет место, например, во всех случаях, когда ударная волна (или волна разрежения) распространяется по исходному газу постоянной плотности.

Показатель β обычно отличается от нуля в тех задачах, в которых плотность исходного газа распределена в пространстве по степенному закону типа $\varrho_{00} = \text{const } r^\delta$. В этих случаях показатель β определяется через известный показатель δ и α (при $\delta = 0$, $\beta = 0$). Таким образом, в систему уравнений для функций π , g , v (и в граничные условия) входит только один новый параметр: показатель автомодельности α .

Показатели степеней в масштабных функциях однозначным образом связаны с показателями α и β (т. е. α и δ). Например, в случае, когда масштаб плотности — постоянный ($\beta = 0$, $\varrho_0 = \text{const}$), $R \sim t^\alpha$, $\dot{R} \sim t^{\alpha-1}$, $\Pi = \varrho_0 \dot{R}^2 \sim t^{2(\alpha-1)}$.

Поскольку масштаб длины R однозначным образом связан со временем, масштабы скорости, плотности и давления можно считать функциями не времени, а масштаба длины R ; с помощью соотношения $R \sim t^\alpha$ найдем:

$$\begin{aligned}\dot{R} &\sim t^{\alpha-1} \sim R^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, & \varrho &\sim t^\beta \sim R^{\beta/\alpha}, \\ \Pi &\sim \varrho_0 \dot{R}^2 \sim t^{\beta+2(\alpha-1)} \sim R^{\frac{\beta+2(\alpha-1)}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Из выражений для масштаба плотности $\varrho_0 \sim t^\beta \sim R^{\beta/\alpha}$ и закона распределения начальной плотности в пространстве $\varrho_{00} = \text{const } r^\delta$ видно, что $\varrho_0 = \varrho_{00}(R)$; например, масштабом плотности ϱ_0 служит начальная плотность газа в точке, где находится ударная волна в момент t (R — координата фронта ударной волны). Отсюда следует упоминавшаяся выше связь показателей β и δ : $\beta = \alpha\delta$.

При $\beta = 0$, $\varrho_0 = \text{const}$ функции p , ϱ и u по формулам (12.3) можно записать в любой из эквивалентных форм:

$$\begin{aligned}p &= \text{const } t^{2(\alpha-1)} \pi(\xi) = \text{const } R^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \pi(\xi), \\ u &= \text{const } t^{\alpha-1} v(\xi) = \text{const } R^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} v(\xi), \\ \varrho &= \text{const } g(\xi).\end{aligned}\tag{12.8}$$

§ 3. Условия автомодельности движения. Естественно поставить вопрос: каким требованиям должны удовлетворять условия задачи, чтобы движение было автомодельным? Для ответа на этот вопрос следует привлечь соображения размерности.

Уравнения газовой динамики (12.1) помимо переменных функций p , ϱ , u и независимых переменных r , t не содержат никаких размерных параметров (единственный параметр γ — безразмерный). Размерные параметры входят в начальные и граничные условия задачи. Это и дает возможность построить функции $p(r, t)$, $\varrho(r, t)$, ибо все пять переменных, p , ϱ , u , r , t , имеют различные размерности, причем три из них — независимые. Поскольку в размерности давления и плотности входит символ массы, по крайней мере в одном из параметров задачи также должен содержаться символ массы.

Во многих случаях это — постоянная начальная плотность газа ϱ_0 в $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$. В ряде задач начальная плотность распределена в пространстве по степенному закону $\varrho_{00} = br^\delta$. Тогда это — параметр b , с размерностью $[b] = \text{г} \cdot \text{см}^{-3-\delta}$. Обозначим параметр, содержащий символ массы, через a . В самом общем случае его размерность есть $[a] = \text{г} \cdot \text{см}^k \cdot \text{с}^\delta$. Имея в виду размерности функций: $[p] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$, $[\varrho] = \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, $[u] = \text{см} \cdot \text{с}^{-1}$, можно, не нарушая общности, представить их в форме, предложенной Л. И. Седовым [2]:

$$p = \frac{a}{r^{\kappa+1} t^{s+2}} P, \quad \varrho = \frac{a}{r^{\kappa+3} t^s} G, \quad u = \frac{r}{t} V, \tag{12.9}$$

где P, G, V — безразмерные функции независимых переменных, которые зависят от безразмерных комбинаций, содержащих r, t и параметры задачи.

В общем случае безразмерных переменных — две: r/r_0 и t/t_0 , где r_0 и t_0 — параметры с размерностями длины и времени, которые либо непосредственно входят в условия задачи, либо могут быть составлены путем комбинации параметров других размерностей. Функции P, G, V при этом зависят от r и t раздельно и задача не является автомодельной.

Можно привести множество примеров подобных движений. Сошлемся на один: задачу о волне разрежения, которая возникает, когда из газа выдвигается поршень с переменной скоростью $u_1 = U(1 - e^{-t/r})$ (см. § 10 гл. I). В этом примере роль параметра a играет постоянная начальная плотность газа ϱ_0 . Кроме того, в задачу входят размерные параметры $[\tau] = c$; $[U] = \text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ и начальная скорость звука $[c_0] = \text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ (или начальное давление p_0 ; $c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\varrho_0}$). Безразмерными переменными могут служить, например, t/τ и $r/c_0\tau$ или $r/U\tau$ ($r_0 = c_0\tau$ или $U\tau$).

Если из параметров задачи нельзя составить масштабов длины и времени, то переменные r и t не могут входить в функции P, G, V раздельно; функции могут зависеть только от безразмерной комбинации, составленной из r и t , $\xi = r/At^\alpha$, где A — некий параметр размерности $[A] = \text{см} \cdot \text{с}^{-\alpha}$. Выражения (12.9) приобретают вид

$$p = \frac{a}{r^{\kappa+1} t^{s+2}} P(\xi), \quad \varrho = \frac{a}{r^{\kappa+3} t^s} G(\xi), \quad u = \frac{r}{t} V(\xi). \quad (12.10)$$

В этом случае задача автомодельна и выражения (12.10) эквивалентны выражениям (12.3), отличаясь от последних только формой функций — представителей.

Продemonстрируем это на примере автомодельных движений с постоянным масштабом плотности. При этом $a = \varrho_0$, $\kappa = -3$, $s = 0$, так что выражения (12.10) принимают такой вид:

$$p = \varrho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi), \quad \varrho = \varrho_0 G(\xi), \quad u = \frac{r}{t} V(\xi). \quad (12.11)$$

Подставляя сюда $r = \xi R$ и замечая, что $\dot{R} = \alpha R/t$, найдем, что формулы (12.11) и (12.3) эквивалентны, если

$$P(\xi) = \alpha^2 \frac{\pi(\xi)}{\xi^2}; \quad G(\xi) = g(\xi); \quad V(\xi) = \alpha \frac{v(\xi)}{\xi}. \quad (12.12)$$

Изучение автомодельных движений представляет большой интерес. Возможность сведения системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для новых функций-представителей, чрезвычайно упрощает задачу с математической точки зрения и в ряде случаев позволяет находить точные аналитические решения.

Кроме того, часто автомодельные решения представляют собой те пределы, к которым асимптотически стремятся решения неавтомодельных задач. В дальнейшем это положение будет пояснено при рассмотрении конкретных задач.

§ 4. Два типа автомодельных решений. Существует два резко отличных типа автомодельных решений. Решения первого типа обладают тем свойством, что показатель автомодельности α , а вместе с ним показатели степеней при t или R во всех масштабах, определяются из соображений размерности или из законов сохранения. Показатели степеней при этом являются дробями с целочисленными числителями и знаменателями. В задачах этого типа всегда имеется два параметра с независимой размерностью. Из этих параметров составляется параметр, размерность которого содержит символ массы, a (см. формулу (12.10)), и другой параметр A , который

содержит только символы длины и времени. С помощью второго параметра A и можно построить безразмерную комбинацию — автомодельную переменную $\xi = r/At^\alpha$. Размерность параметра A — $\text{см} \cdot \text{с}^{-\alpha}$ определяет показатель автомодельности α . Два движения такого типа рассматривались в гл. I: задача об автомодельной волне разрежения (§ 11) и задача о сильном взрыве (§ 25). В первом случае двумя независимыми размерными параметрами являются начальные плотность и давление газа ϱ_0 и p_0 . Из них можно составить размерный параметр, не содержащий символа массы: начальную скорость звука $c_0 = (\gamma p_0/\varrho_0)^{1/2}$.

Роль параметра A играет скорость звука c_0 . Соответственно

$$\xi = \frac{r}{c_0 t}, \quad \alpha = 1.$$

В задаче о сильном взрыве параметрами служат начальная плотность газа ϱ_0 $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ и энергия взрыва E $\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, которой всегда равна полная энергия газа, охваченного движением, благодаря чему в задаче появляется интеграл энергии. (Напоминаем, что в задаче о сильном взрыве начальные давление и скорость звука p_0 , c_0 предполагаются равными нулю, т.е. эти величины не являются параметрами задачи.) Из параметров ϱ_0 и E составляется параметр, не содержащий массы $A = (E/\varrho_0)^{1/5} \text{см} \cdot \text{с}^{-2/5}$, так что автомодельная переменная есть $\xi = r/(E/\varrho_0)^{1/5} t^{2/5}$; $\alpha = 2/5$.

При сильном взрыве в среде с переменной начальной плотностью $\varrho_{00} = br^\delta$ параметрами служат энергия взрыва E $\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$ и коэффициент b $\text{г} \cdot \text{см}^{-3-\delta}$.

Из них можно составить параметр A , не содержащий массы,

$$A = \left(\frac{E}{b} \right)^{\frac{1}{5+\delta}} \text{см} \cdot \text{с}^{-\frac{2}{5+\delta}}.$$

Аutomодельная переменная имеет вид

$$\xi = \frac{r}{(E/b)^{\frac{1}{5+\delta}} t^{\frac{2}{5+\delta}}}; \quad \alpha = \frac{2}{5+\delta}.$$

(Аutomодельная задача о взрыве в среде с переменной плотностью рассматривалась Л. И. Седовым [2].) К этому же типу принадлежит и автомодельная задача о распространении тепловой волны от места, где выделилось определенное количество энергии (см. гл. X).

Как было показано в § 2, показатель автомодельности входит в систему дифференциальных уравнений для представителей в качестве параметра. Поскольку в автомодельных задачах рассматриваемого типа число α находится сразу же из соображений размерности (или законов сохранения), дело сводится к интегрированию системы уравнений с известными граничными условиями.

В автомодельных задачах второго типа показатель степени α нельзя найти из соображений размерности или законов сохранения без решения уравнений. В этом случае само определение показателя автомодельности требует интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений для функций — представителей. Оказывается, что показатель находится из условия, чтобы интегральная кривая проходила через особую точку, без чего не удастся удовлетворить граничным условиям.

Примерами автомодельных движений второго типа могут сложить известные задачи о схождении ударной волны к центру или о кратковременном ударе, о которых речь пойдет ниже.

Рассмотрение решений конкретных задач, принадлежащих ко второму типу, показывает, что во всех этих случаях в исходных условиях задачи имеется только один

размерный параметр, содержащий символ массы, и отсутствует второй, с помощью которого можно было бы образовать параметр A . Это и лишает нас возможности установить число α по размерности параметра A . На самом деле задаче, конечно, свойствен некий размерный параметр A $\text{см} \cdot \text{с}^{-\alpha}$; в противном случае невозможно было бы составить безразмерную комбинацию $\xi = r/At^\alpha$. Однако размерность этого параметра (т.е. число α) не диктуется исходными условиями задачи, а сама находится из решения уравнения. Численное значение параметра A нельзя найти из уравнений автомодельного движения. Его можно определить только зная, как возникло данное движение. Так, например, если автомодельное движение возникло в результате какого-то неавтомодельного течения, которое асимптотически вышло на автомодельный режим, то величину A можно найти только путем численного решения полной, неавтомодельной задачи, когда прослеживается сам процесс перехода неавтомодельного движения в автомодельное. Подробнее эти положения будут разъяснены при рассмотрении конкретных задач.

Автомодельные движения первого типа, в которых показатель автомодельности определяется из соображений размерности, подробно исследовал Л. И. Седов. Поскольку уже имеется книга Л. И. Седова [2], в которой дано исчерпывающее описание этих движений и решение ряда конкретных задач, мы в этой главе не будем останавливаться на автомодельных движениях первого типа и займемся изучением движений только второго типа.

2. Схождение к центру сферической ударной волны и захлопывание пузырьков в жидкости

§ 5. Постановка задачи о сходящейся ударной волне. Представим себе сферически-симметричное движение, в котором по газу постоянной начальной плотности ϱ_0 и нулевого давления к центру симметрии идет сильная ударная волна. Не будем заниматься причинами возникновения ударной волны. Волна могла быть создана, например, «сферическим поршнем», который толкнул газ внутрь, сообщив ему некоторое количество энергии. По мере схождения ударной волны к центру происходит концентрирование энергии на фронте (кумуляция), и волна усиливается. Будем интересоваться движением газа на малых расстояниях от центра (скажем, малых по сравнению с начальным радиусом «поршня»). В моменты, близкие к моменту фокусировки, и на малых радиусах движение, надо полагать, в значительной мере (в какой, будет сказано ниже) «забывает» о начальных условиях и выходит на некий предельный режим, который и надлежит найти.

В задаче нет характерных параметров длины или времени. Начальный радиус «поршня» не может служить масштабом для предельного движения и области, размеры которой очень малы по сравнению с ним. Единственным масштабом длины является сам переменный во времени радиус фронта ударной волны R . Масштабом скорости является меняющаяся во времени скорость фронта $dR/dt \equiv \dot{R} \equiv D$. Поэтому естественно предположить, что предельное движение будет автомодельным. При этом заранее нет никаких оснований для определения показателя автомодельности α . Помимо начальной плотности ϱ_0 , нет больше никаких видимых параметров, с помощью которых можно было бы построить автомодельную переменную. Конечно, энергия всего газа, равная энергии, сообщенной газу поршнем, имеет вполне определенное значение. Однако в автомодельной области, размеры которой малы (порядка R) и уменьшаются с течением времени по мере схождения волны к центру, сосредоточена лишь небольшая, и притом уменьшающаяся со временем доля полной

энергии¹⁾. Как будет показано ниже, энергия в автомодельной области, радиус которой порядка R , а масса порядка $\varrho_0 R^3$, уменьшается с течением времени по степенному закону. Однако она уменьшается при $R \rightarrow 0$ медленнее, чем R^3 , вследствие усиления ударной волны и возрастания плотности энергии (давления). Из сказанного ясно, что автомодельное движение должно принадлежать ко второму типу. В решение войдет некий параметр A , неизвестной заранее размерности, связанной с показателем автомодельности α ($[A] = \text{см} \cdot \text{с}^{-\alpha}$; см. § 2). Если показатель автомодельности, т.е. размерность A , найдется из самого предельного решения, то численное значение параметра A останется неопределенным. Оно зависит от начальных условий задачи, от движения всего газа в целом.

Как уже было сказано, предельное, автомодельное решение справедливо только в области малых размеров порядка радиуса фронта и притом вблизи момента фокусировки ударной волны, когда этот радиус мал.

Если численно решать задачу о движении всего газа в целом при каких-то начальных условиях, обеспечивающих возникновение сходящейся ударной волны (задачу со «сферическим поршнем», совершающим толчок внутрь), то истинное решение в области с радиусом, который уменьшается пропорционально радиусу фронта, будет все более и более приближаться к предельному автомодельному решению.

Вид предельного решения не зависит от начальных условий и характера движения газа на далеких расстояниях, в частности, от закона движения поршня.

Однако предельное решение не полностью «забывает» о начальных условиях. Оно «забывает» о форме начального движения, но выбирает из всей многообразной информации, предоставляемой начальными условиями, единственное число A , которое характеризует «интенсивность» начального толчка (более «сильному» толчку отвечает большее значение A).

Если сам вид предельного решения не зависит от начальных условий и движения газа на далеких расстояниях от центра, то характер приближения истинного решения к предельному, конечно, зависит от начальных условий. Чем ближе начальное движение к предельному, тем раньше выйдет истинное движение вблизи фронта на автомодельный режим. Однако этот выход рано или поздно обязательно произойдет, какими бы ни были начальные условия и движение на далеких расстояниях.

Итак, будем искать автомодельное решение задачи о схождении к центру ударной волны. Эта интересная и важная задача была решена независимо Л. Д. Ландау и К. П. Станюковичем [1] и Гудерлеем [3].

§ 6. Основные уравнения. За начало отсчета времени $t = 0$ примем момент фокусировки, когда $R = 0$. Тогда время до момента фокусировки оказывается отрицательным. В связи с этим определение автомодельной переменной следует несколько изменить, положив

$$R = A(-t)^\alpha, \quad \xi = \frac{r}{R} = \frac{r}{A(-t)^\alpha}. \quad (12.13)$$

Формально решение, которое мы ищем, охватывает все пространство, вплоть до бесконечности, так что интервалы изменения переменных таковы:

$$-\infty < t \leq 0; \quad R \leq r < \infty; \quad 1 \leq \xi < \infty$$

¹⁾ Предположение о равенстве нулю начального давления, т.е. о том, что волна сильная, исключает из задачи и параметр скорости — начальную скорость звука c_0 , которая вместе с начальным давлением равна нулю.

(фактически автомодельное решение справедливо лишь в области с радиусом порядка R , а на больших расстояниях как-то смыкается с решением полной, неавтомодельной задачи).

На фронте ударной волны $\xi = 1$. Скорость распространения фронта направлена к центру, т. е. отрицательна, $D \equiv \dot{R} = \alpha R/t = -\alpha R/|t| < 0$.

Подставим в уравнения газовой динамики (12.1) решение в автомодельной форме (12.3).

Система сводится к уравнениям (12.4), в которых $\nu = 3$, в соответствии со сферической симметрией движения. Масштаб плотности в задаче постоянный, $\varrho_0 = \text{const}$ (в этом довольно очевидном утверждении мы убедимся при рассмотрении граничных условий на фронте ударной волны). Поэтому член $\dot{\varrho}_0/\varrho_0$ в первом из уравнений (12.4) исчезает, и квадратная скобка обращается в нуль. Множители, зависящие от масштабов, в уравнениях (12.4) сводятся к следующим константам:

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}; \quad \frac{R}{\dot{R}} \frac{d}{dt} \left(\ln \varrho_0^{1-\gamma} \dot{R}^2 \right) = \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha}.$$

Получим систему уравнений для представителей:

$$\begin{aligned} (v - \xi) (\ln g)' + v' + \frac{2v}{\xi} &= 0, \\ (\alpha - 1) \alpha^{-1} v + (v - \xi) v' + g^{-1} \pi' &= 0, \\ (v - \xi) (\ln \pi g^{-\gamma})' + 2(\alpha - 1) \alpha^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (12.14)$$

В целях упрощения системы проделаем ряд преобразований. Перейдем к новым функциям-представителям — P , G , V , связанным со старыми π , g , v формулами (12.12) (можно, конечно, и с самого начала искать решение размерных уравнений (12.1) в виде (12.11)). Далее, введем вместо давления новую неизвестную функцию — квадрат скорости звука ¹⁾ и соответственно перейдем к представителю квадрата скорости звука.

В размерных переменных $c^2 = \gamma p/\varrho$. В представлении (12.3) $c^2 = \gamma \dot{R}^2 \pi/g = \dot{R}^2 z$, где представитель $z = \gamma \pi/g$.

В представлении (12.11), к которому мы перешли, $c^2 = \gamma \frac{r^2}{t^2} \frac{P}{G} = \frac{r^2}{t^2} Z$, где представитель $Z = \gamma P/G$. Формулы (12.12) дают связь между представителями z и Z :

$$Z = \alpha^2 \frac{z}{\xi^2}.$$

¹⁾ Систему уравнений газовой динамики (12.1) можно записать и относительно функций ϱ , u , c^2 вместо ϱ , u , p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \varrho}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{u}{r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial r} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial c^2}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \ln c^2 \varrho^{1-\gamma} + u \frac{\partial}{\partial r} \ln c^2 \varrho^{1-\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (12.1')$$

После введения новых переменных система (12.14) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d \ln \xi} + (V - \alpha) + \frac{d \ln G}{d \ln \xi} &= -3V, \\ (V - \alpha) \frac{dV}{d \ln \xi} + \frac{Z}{\gamma} \frac{d \ln G}{d \ln \xi} + \frac{1}{\gamma} \frac{dZ}{d \ln \xi} &= -\frac{2}{\gamma} Z - V(V - 1), \\ (\gamma - 1) Z \frac{d \ln G}{d \ln \xi} - \frac{dZ}{d \ln \xi} &= 2 \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha(V - \alpha)} + 1 \right] Z. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Это есть система трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех неизвестных функций V , G , Z от независимой переменной ξ .

Рассмотрим граничные условия. На фронте ударной волны выполняются законы сохранения, которые в предельном случае сильной ударной волны дают известные соотношения между газодинамическими величинами за фронтом и скоростью фронта (см. формулы (1.111)):

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \quad p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \varrho_0 D^2; \quad u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} D; \quad c_1^2 = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} D^2. \quad (12.16)$$

Подставляя сюда выражения размерных величин через представители (12.11) и имея в виду, что на фронте ударной волны $r = R$, $\xi = 1$, а также принимая во внимание, что $D \equiv \dot{R} = \alpha R/t$, получим граничные условия для представителей: при $\xi = 1$

$$V(1) = \frac{2}{\gamma + 1} \alpha; \quad G(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \alpha^2. \quad (12.17)$$

Отсюда, кстати сказать, непосредственно видно, что масштаб плотности не зависит от времени или радиуса фронта. В противном случае невозможно было бы удовлетворить условию $\varrho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_0 = \text{const}$ на фронте ударной волны.

Представители подчиняются также условиям на бесконечности. В момент фокусировки $t = 0$ скорость, давление, скорость звука на любом конечном радиусе r ограничены. Но при $t = 0$ и конечном r величина $\xi = \infty$. Чтобы при $t = 0$ и конечном r величины $u = \frac{r}{t} V$, $c^2 = \frac{r^2}{t^2} Z$ были ограниченными, необходимо, чтобы V и Z обращались в нуль. Таким образом, получаем еще условие, которому должно удовлетворять решение: при $\xi = \infty$

$$V(\infty) = 0; \quad Z(\infty) = 0. \quad (12.18)$$

Вообще говоря, граничных условий (12.17) достаточно для того, чтобы начать интегрирование уравнений (12.15) от точки $\xi = 1$ в сторону $\xi > 1$, задавшись каким-то значением числа α .

Однако исследование уравнений, о котором речь пойдет в следующем параграфе, показывает, что получить однозначное решение и прийти в точку (12.18) нельзя при произвольном значении α . Это оказывается возможным только при некотором избранном значении α , что и определяет выбор показателя автомодельности.

§ 7. Исследование уравнений. Покажем, как находится показатель автомодельности при решении уравнений (12.15). Для этой цели следует прежде всего произвести исследование уравнений. Мы не будем здесь стремиться к математической строгости обоснований и приводить подробные выкладки.

Остановимся только на наиболее важных принципиальных моментах, а также наметим основные пути решения задачи. При этом мы постараемся подчеркнуть некоторые особенности задачи, общие либо для всех автомодельных решений, либо для решений второго типа. Ниже мы следуем системе изложения, предложенной Н. А. Поповым, которому мы благодарны за ценные советы.

При взгляде на систему уравнений (12.15) сразу же бросается в глаза, что переменная $\ln \xi$, которую можно рассматривать как новую независимую переменную вместо ξ , входит в систему только в виде дифференциала $d \ln \xi$. Точно так же только в виде дифференциала $d \ln G$ входит и одна из искоемых функций — G . Это свойство уравнений (12.15), характерное для любых автомодельных движений, позволяет свести систему трех дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению относительно переменных V и Z и двум квадратурам ¹⁾. В самом деле, разрешим систему (12.15) относительно производных $dV/d \ln \xi$, $d \ln G/d \ln \xi$. Вместо того чтобы выписывать получающиеся весьма громоздкие выражения, запишем результат решения алгебраической системы в символической форме, через детерминанты

$$\frac{dV}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad \frac{d \ln G}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{dZ}{d \ln \xi} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (12.19)$$

где определитель системы Δ равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & V - \alpha & 0 \\ V - \alpha & \frac{Z}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & (\gamma - 1)Z & -1 \end{vmatrix} = -Z + (V - \alpha)^2. \quad (12.20)$$

Детерминанты Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 получаются после замены соответствующих столбцов в детерминанте (12.20) правыми частями уравнений (12.15).

Коэффициенты при производных и правые части в уравнениях (12.15) зависят только от V и Z , но не зависят от G и ξ , так что все величины Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 являются функциями только V и Z . Разделив третье из уравнений (12.19) на первое, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_3(Z, V)}{\Delta_1(Z, V)}. \quad (12.21)$$

После того как найдено решение этого уравнения $Z(V)$, его можно подставить в первое уравнение (12.19) и путем квадратуры определить функцию $V(\xi)$,

¹⁾ Отмеченное свойство не случайно и является следствием размерностной структуры уравнений газовой динамики, которые не содержат никаких размерных величин, кроме самих переменных. То, что какая-то величина входит под знаком дифференциала логарифма, свидетельствует о произволе в выборе единиц для измерения этой величины. Что касается плотности $\varrho = \varrho_0 G$, то это непосредственно видно из уравнений (12.1'), записанных для функций ϱ , u , c^2 (см. сноску на с. 587). Если в общих, неавтомодельных уравнениях перейти к новым независимым переменным: $\xi = r/At^\alpha$ и $\eta = r/r_0$, где A и r_0 — какие-то внесенные извне размерные параметры, то, поскольку выбор этих параметров ничем не ограничен, они должны выпадать из уравнений. И действительно, преобразование показывает, что новые переменные входят в уравнения только в виде $d \ln \xi$, $d \ln \eta$ (в случае автомодельных движений все функции зависят только от ξ и не зависят от η , так что члены $d \ln \eta$ исчезают).

Безразмерные величины V и Z составляются из самих размерных переменных: $V = t/ru$; $Z = t^2/r^2 c^2 = gt^2/r^2 \gamma p$, без участия каких-либо посторонних параметров, поэтому и в уравнения они входят в свободном виде, не под знаком $d \ln$.

а затем, подставляя $V(\xi)$ и $Z[V(\xi)]$ во второе уравнение, путем квадратуры найти функцию $G(\xi)$.

На самом деле достаточно одной квадратуры, так как система уравнений (12.15) обладает одним интегралом, представляющим собой алгебраическое соотношение между всеми переменными. Существование этого интеграла, интеграла адиабатичности, связано с выполнением закона

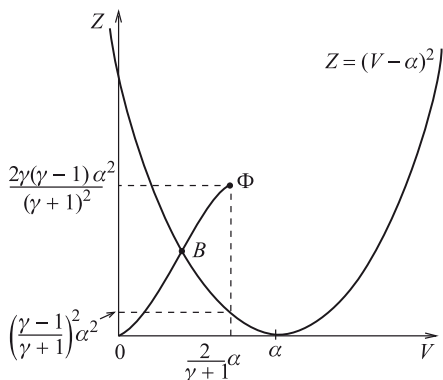


Рис. 12.1. Ход интегральной кривой на плоскости V, Z

сохранения энтропии в газовой частице¹⁾. Вообще, выполнение законов сохранения всегда сопровождается существованием соответствующих интегралов автомодельных уравнений. Так, в задаче о сильном взрыве (см. § 25 гл. I) уравнения обладают интегралом энергии.

Итак, основная задача сводится к решению уравнения (12.21) с граничными условиями (2.17), (2.18).

Рассмотрим, как проходит искомая интегральная кривая на плоскости V, Z . На фронте ударной волны, при $\xi = 1$, $V = V(1)$, $Z = Z(1)$ (см. формулы (2.17)). Нанесем эту точку на плоскость и обозначим ее буквой Φ . На бесконечности, при $\xi = \infty$, $V(\infty) = 0$, $Z(\infty) = 0$, т.е. интегральная кривая $Z(V)$ идет из точки Φ в начало координат 0 (рис. 12.1).

Чтобы решение уравнений газовой динамики имело физический смысл, оно должно быть однозначным. Каждому значению независимой переменной ξ должны соответствовать единственные значения V и Z . Это значит, что функции ξ от V и ξ от Z или, что все равно, $\ln Z$ от V и $\ln \xi$ от Z , не должны иметь экстремумов.

Производные $\frac{d \ln \xi}{dV} = \Delta / \Delta_1$ и $\frac{d \ln \xi}{dZ} = \Delta / \Delta_3$ в области изменения переменной $1 < \xi < \infty$, $0 < \ln \xi < \infty$ в истинном решении нигде не должны обращаться в нуль.

Но детерминант $\Delta = -Z + (V - \alpha)^2$ равен нулю на параболе $Z = (V - \alpha)^2$, проведенной на плоскости V, Z (рис. 12.1). Легко проверить путем непосредственного вычисления, что точка Φ лежит выше параболы, т.е. искомая интегральная кривая вдоль своего пути от точки Φ до точки 0 непременно должна пересечь параболу. Чтобы при этом производные $d \ln \xi / dV$ и $d \ln \xi / dZ$ не обратились в нуль, необходимо, чтобы в точке пересечения обращались в нуль определители Δ_1 и Δ_3 (можно проверить, что при $\Delta = 0$ Δ_1 и Δ_3 обращаются в нуль одновременно). Таким

¹⁾ Чтобы вывести интеграл адиабатичности, воспользуемся первым и третьим уравнениями (12.15). Первое (уравнение непрерывности) разделим на $V - \alpha$ и представим в виде

$$d \ln G + d \ln (V - \alpha) = -3d \ln \xi - \frac{3\alpha d \ln \xi}{V - \alpha}.$$

Третье (энтропийное) уравнение разделим на Z и представим в виде

$$d \ln G^{\gamma-1} Z^{-1} = \frac{2(\alpha-1)\alpha^{-1} d \ln \xi}{V - \alpha} + 2d \ln \xi.$$

Исключая из этих двух равенств $d \ln \xi / (V - \alpha)$ и собирая все члены в одну сторону, получим уравнение вида $d \ln \{ \xi, G, V, Z \} = 0$, которое дает интеграл $\{ \xi, G, V, Z \} = \text{const}$. Константа определяется с помощью граничного условия (12.17).

образом, точка пересечения истинной интегральной кривой $Z(V)$ и параболы есть особая точка уравнения (12.21) ($\Delta_1 = 0$, $\Delta_3 = 0$, $dZ/dV = 0/0$).

Если задаться каким-то произвольным значением показателя автомодельности α и начать интегрировать уравнение (12.21) от точки Φ , то интегральная кривая либо вообще не пересечет параболу, либо пересечет ее в какой-то обыкновенной точке, и эта кривая не будет отвечать истинному решению.

Только при специальном, избранном значении α интегральная кривая пересечет параболу, пройдя через нужную особую точку уравнения (12.21), и устремится к своей конечной точке O . Это условие обязательного прохождения истинной интегральной кривой через определенную особую точку уравнения (12.21) и определяет показатель α . Особая точка B и схематический ход истинной интегральной кривой показаны на рис. 12.1 (можно показать, что точка B лежит на левой ветви параболы).

В особой точке B , через которую проходит истинная интегральная кривая $Z(V)$, величины Z и V принимают определенные значения, связанные, кроме того, уравнением параболы $Z = (V - \alpha)^2$. Поскольку V и Z являются функциями ξ , особой точке соответствует определенное значение $\xi = \xi_0$.

В свою очередь значению $\xi = \xi_0$ соответствует некоторая линия на плоскости r, t , « ξ_0 -линия». Уравнение этой линии есть $r = R(t)$ $\xi_0 = A(-t)^\alpha \xi_0$, а дифференциальное уравнение для нее имеет вид $dr/dt = \dot{R}\xi_0$.

Линия фронта ударной волны есть: $\xi = 1$, $r = R(t)$, $dr/dt = \dot{R}$. Обе линии показаны на рис. 12.2 (заметим, что ось r есть линия $\xi = \infty$).

ξ_0 -линия обладает важным свойством; она является одной из C_- -характеристик. Чтобы убедиться в этом, перейдем в размерном уравнении для C_- -характеристик, $dr/dt = u - c$, к автомодельным переменным. При этом следует принять во внимание, что скорость звука c есть величина существенно положительная. Принятый масштаб ее $\dot{R}$ или r/t отрицателен. Следовательно, при извлечении корня из выражения $c^2 = \frac{r^2}{t^2} Z$ следует положить $c = -\frac{r}{t} |\sqrt{Z}|$.

Таким образом,

$$\frac{dr}{dt} = u - c = \frac{r}{t} V + \frac{r}{t} |\sqrt{Z}| = \frac{R}{t} \xi (V + |\sqrt{Z}|) = \frac{\dot{R} \xi}{\alpha} (V + |\sqrt{Z}|).$$

Будем интересоваться теми C_- -характеристиками, которые проходят через ξ_0 -линию на плоскости r, t . Для этого положим в уравнении характеристик $\xi = \xi_0$. Но при $\xi = \xi_0$

$$Z(\xi_0) = [V(\xi_0) - \alpha]^2, \quad |\sqrt{Z(\xi_0)}| = \alpha - V(\xi_0)$$

(так как $V < \alpha$; действительно, при $\xi = 1$, $V(1) = \frac{2}{\gamma+1} \alpha < \alpha$; при $\xi = \infty$ $V = 0$; функция $V(\xi)$ — монотонная). Поэтому рассматриваемые C_- -характеристики в каждой

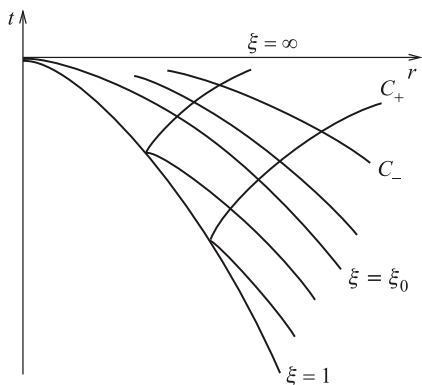


Рис. 12.2. r, t -диаграмма для процесса схождения ударной волны к центру. $\xi = 1$ — линия фронта ударной волны; $\xi = \xi_0$ означает ξ_0 -линию. Проведено несколько характеристик C_+ - и C_- -семейств

точке ξ_0 -линии имеют наклон $dr/dt = \dot{R}\xi_0/\alpha [V(\xi_0) + |\sqrt{Z(\xi_0)}|] = \dot{R}\xi_0$, совпадающий с наклоном самой ξ_0 -линии. Значит, ξ_0 -линия либо огибает семейство C_- -характеристик, либо просто совпадает с одной из них. Оказывается, что справедливо второе утверждение: ξ_0 -линия совпадает с C_- -характеристикой, т.е. сама является C_- -характеристикой.

Отсюда вытекает важное следствие, касающееся причинной связи явлений. Как известно, в области непрерывного течения характеристики одного семейства никогда не пересекаются. Значит, все те C_- -характеристики, которые проходят выше ξ_0 -линии (см. рис. 12.2), не догоняют фронт ударной волны до момента фокусировки. (C_- -характеристики, проходящие ниже ξ_0 -линии, догоняют фронт; C_+ -характеристики сами выходят с линии фронта.)

Таким образом, ξ_0 -линия ограничивает область влияния. Состояние движения в данный момент времени в тех точках, которые лежат правее ξ_0 -линии, т.е. на расстояниях r , больших чем $r_0 = R(t)\xi_0$, уже никак не повлияет на движение ударной волны.

Отмеченные выше свойства решения: прохождение истинной интегральной кривой через особую точку, возможное только при избранном значении показателя автомодельности α (откуда и определяется это значение), и существование ξ_0 -линии на плоскости r, t , которая соответствует особой точке, является характеристикой и ограничивает область влияния, — свойственны всем автомодельным режимам второго типа.

§ 8. Результаты решения. Практически решение и показатель автомодельности находят методом попыток. Задаваясь каким-то значением α , численно интегрируют уравнение (12.21) от начальной точки Φ ($\xi = 1$) и проверяют, как идет интегральная кривая. Исправляя значение α , путем последовательных приближений добиваются того, чтобы интегральная кривая пересекла параболу в нужной особой точке и устремилась к конечной точке O . Л. Д. Ландау и К. П. Станюкович [1] указали приближенный метод, с помощью которого можно найти значение α , весьма близкое к фактическому. Это, значение было использовано для первой попытки и затем уточнено. После того как найдены показатель α и функция $Z(V)$, отыскание функций $V(\xi)$, $Z(\xi)$, $G(\xi)$ не составляет труда.

Таким путем в работах [1, 3] было найдено значение показателя автомодельности $\alpha = 0,717$ для показателя адиабаты $\gamma = 7/5$. Кроме того, в работе [1] было найдено, что $\alpha = 0,638$ для $\gamma = 3$, а также установлено, что в пределе $\gamma \rightarrow 1$ $\alpha \rightarrow 1$. Законы изменения радиуса и скорости фронта ударной волны, а также давления за фронтом при $\gamma = 7/5$ таковы:

$$\begin{aligned} R &\sim |t|^\alpha \sim |t|^{0,717}, \\ |\dot{R}| &\sim |t|^{\alpha-1} \sim R^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \sim |t|^{-0,238} \sim R^{-0,395}, \\ p_1 &\sim |t|^{2(\alpha-1)} \sim R^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} \sim |t|^{-0,566} \sim R^{-0,79}. \end{aligned}$$

Распределения скорости u и давления p по радиусу в разные моменты времени при $\gamma = 7/5$ показаны на рис. 12.3, взятом из книги К. П. Станюковича [1]. Скорость за фронтом монотонно спадает, давление сначала немного увеличивается, а затем тоже падает¹⁾. Плотность за фронтом монотонно возрастает.

¹⁾ Такой ход давления не является общим; например, при $\gamma = 3$ давление, как и скорость, монотонно уменьшается за фронтом ударной волны.

Ударная волна непрерывно ускоряется и усиливается при схождении к центру. При $t \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$ давление и температура на фронте стремятся к бесконечности; плотность газа остается конечной; на фронте волны она постоянна и равна $[(\gamma + 1)/(\gamma - 1)] \rho_0$.

При схождении ударной волны происходит концентрирование энергии вблизи фронта ударной волны: температура и давление неограниченно растут. Однако вследствие того, что сами размеры автомодельной области уменьшаются с течением времени, полная энергия, сосредоточенная в ней, также уменьшается. Автомодельное решение справедливо только в некоторой сфере, радиус которой уменьшается вместе с радиусом фронта, пропорционально R , т.е. эффективной границей автомодельной области является некоторое постоянное значение $r/R = \xi = \xi_1$. Количество энергии, заключенной в автомодельной области, т.е. в сфере переменного радиуса $r_1 = \xi_1 R$, равно

$$E_{\text{авт}} = \int_R^{r_1} 4\pi r^2 dr \rho \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) =$$

$$= 4\pi R^3 \rho_0 \dot{R}^2 \int_1^{\xi_1} g \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{g} + \frac{v^2}{2} \right) \xi^2 d\xi.$$

Интеграл по ξ от 1 до ξ_1 есть постоянное число, так что энергия $E_{\text{авт}} \sim R^3 \dot{R}^2 \sim R^{5-(2/\alpha)}$.

Для всех реальных значений показателя адиабаты γ степень у R положительна. Например, при $\gamma = 7/5$, $\alpha = 0,717$

$$E_{\text{авт}} = R^{2,21} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow 0.$$

Если распространить интегрирование по ξ до бесконечности ($\xi_1 = \infty$), то интеграл расходится. (Это пояснено в сноске на с. 603.) Таким образом, энергия во всем пространстве в рамках автомодельного решения бесконечна. Это и свидетельствует, в частности, о неприменимости автомодельного решения к большим радиусам r (при данном радиусе фронта R).

Количество энергии, заключенной в сфере постоянного радиуса r , может возрастать (но не беспредельно), однако движение во всей области от R до $r = \text{const} > R$ не описывается автомодельным решением. Автомодельное решение относится только ко все уменьшающейся сфере, т.е. к области конечных ξ , тогда как $\xi = r/\infty$ при $r = \text{const}$, $R \rightarrow 0$.

Вид предельных распределений газодинамических величин по радиусу в момент фокусировки $t = 0$ можно установить на основе соображений размерности. В нашем

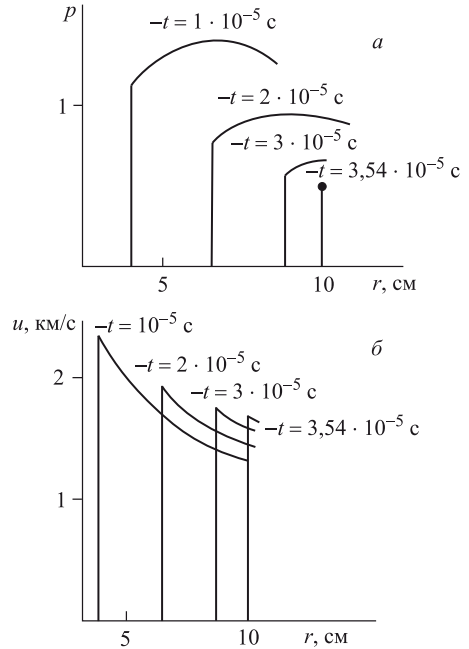


Рис. 12.3. Распределения давления в произвольных единицах (а) и скорости (б) в разные моменты времени при схождении ударной волны к центру; $\gamma = 7/5$. Графики взяты из книги [1]

распоряжении имеется один-единственный параметр $A \text{ см} \cdot \text{с}^{-\alpha}$, с помощью которого можно связать скорость u и скорость звука c с радиусом r .

Это дает предельный закон в момент $t = 0$:

$$u \sim c \sim A^{\frac{1}{\alpha}} r^{1-\frac{1}{\alpha}} = A^{\frac{1}{\alpha}} r^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Поскольку моменту $t = 0$ и $r \neq 0$ соответствует значение $\xi = \infty$, предельная плотность $\varrho = \varrho_0 G(\infty)$ постоянна по радиусу. Предельное распределение давления, следовательно, есть

$$p = \frac{1}{\gamma} \varrho c^2 \sim \varrho_0 A^{\frac{2}{\alpha}} r^{-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Предельные законы $u(r)$, $c(r)$, $p(r)$, естественно, совпадают с законами на фронте в ходе процесса $u_1(R)$, $c_1(R)$, $p_1(R)$ (с точностью до численных коэффициентов)¹⁾.

Численные коэффициенты в предельных законах для $u(r)$, $c(r)$, $p(r)$, так же как и предельное значение плотности $\varrho_{\text{пред}} = \varrho_0 G(\infty)$, можно найти только в результате решения уравнений автомодельного движения. При $\gamma = 7/5$ предельная плотность равна $\varrho_{\text{пред}} = 21,6 \varrho_0$ (плотность на фронте ударной волны $\varrho_1 = 6 \varrho_0$). Такое же значение $\varrho = 21,6 \varrho_0$ имеет плотность на больших расстояниях от фронта $r \rightarrow \infty$ и до момента фокусировки (так как при $R \neq 0$ и $r \rightarrow \infty$ $\xi = r/R \rightarrow \infty$) и $\varrho/\varrho_0 = G(\xi) \rightarrow G(\infty)$.

Количество энергии, сосредоточенной в сфере радиуса r в момент фокусировки, пропорционально

$$\int_0^r 4\pi r^2 dr \varrho \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} \right) \sim r^{5-\frac{2}{\alpha}}$$

(так же как и $E_{\text{авт}} \sim R^{5-\frac{2}{\alpha}}$; см. выше).

Энергия, сосредоточенная в сфере конечного радиуса, конечна, и при $r \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Чем больше сфера, тем больше заключено в ней энергии (в рамках автомодельного режима).

После момента фокусировки, при $t > 0$, отраженная от центра ударная волна распространяется по газу, движущемуся навстречу к ней, к центру. Движение в этой стадии также автомодельно, показатель автомодельности не меняется. Закон распространения фронта отраженной ударной волны при $t > 0$ есть $R \sim t^\alpha$.

Расчеты показывают, при что $\gamma = 7/5$ плотность газа за фронтом отраженной ударной волны равна $\varrho_{1 \text{ отр}} = 137,5 \varrho_0$, она в 23 раза больше, чем плотность за фронтом падающей волны, $\varrho_1 = 6 \varrho_0$. Скорость за фронтом положительна, т. е. газ

¹⁾ Предельные законы можно установить и аналитически, исходя из уравнений для представителей, если найти асимптотическое решение в окрестности точки $\xi = \infty$, $V = 0$, $Z = 0$. Получим: $V \sim \xi^{-1/\alpha}$, $Z \sim \xi^{-2/\alpha}$, что при переходе к размерным величинам и даст выписанные в тексте предельные законы. Величины v^2 и $z = \gamma\pi/g$ при $\xi \rightarrow \infty$, согласно определению (12.12), пропорциональны $v^2 \sim z \sim \xi^2 V^2 \sim \xi^{2-\frac{2}{\alpha}}$; $g(\infty) = G(\infty) = \text{const}$. Отсюда видно, что интеграл энергии расходится при $\xi_1 \rightarrow \infty$,

$$\int_1^{\xi_1} g \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{\pi}{g} + \frac{v^2}{2} \right) \xi^2 d\xi \sim \int_1^{\xi_1} \xi^{4-\frac{2}{\alpha}} d\xi \sim \xi_1^{5-\frac{2}{\alpha}} \rightarrow \infty,$$

и энергия во всем пространстве в рамках автомодельного решения бесконечна в любой момент времени.

разлетается от центра, причем скорость разлета уменьшается с течением времени, начиная от бесконечности, в соответствии с законами $R \sim t^\alpha$, $\dot{R} \sim t^{-(1-\alpha)}$ ¹⁾.

§ 9. Захлопывание пузырьков. Задача Рэлея. С процессом схождения ударной волны к центру имеет целый ряд общих черт процесс захлопывания пузырьков в жидкости (в воде). В реальной жидкости часто образуются маленькие пузырьки, заполненные паром жидкости и нерастворенными газами. Явление образования пузырьков носит название кавитации. В стационарных условиях пузырек устойчив, газовое давление изнутри уравнивает давление в жидкости. Когда жидкость участвует в движении и попадает из области низкого давления в область более высокого, внутреннее давление в пузырьке, который образовался раньше, при низком давлении, становится меньше нового, высокого давления в жидкости. Жидкость при этом устремляется к центру, захлопывая пузырек. При захлопывании пузырька, как и при фокусировке ударной волны, происходит концентрирование энергии. Скорость захлопывания и давление нарастают по мере уменьшения радиуса пузырька и в стадии фокусировки достигают весьма больших значений. После схлопывания в центральной области образуется пик давления и от центра распространяется ударная волна.

Когда подобный процесс протекает вблизи твердых поверхностей, ударная волна может привести к повреждениям материала поверхностей. Считается, что в этом состоит одна из причин быстрого износа гребных винтов и турбин.

Задачу о движении жидкости при захлопывании пузырька в идеализированной постановке решал Рэлей [4]. Жидкость считалась идеальной (невязкой) и несжимаемой. Сферически симметричная полость считалась пустой, т. е. давление внутри и на поверхности полости полагалось равным нулю²⁾.

Пусть в начальный момент в жидкости имеется сферическая полость радиуса R_0 . Давление в окружающей жидкости равно p_0 , и жидкость покоится. Распределение скорости по радиусу r после начала движения найдем из уравнения непрерывности при $\varrho = \text{const}$:

$$u = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} = \dot{R} \frac{1}{\xi^2}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad (12.22)$$

где $R(t)$ — радиус полости, а $\dot{R}$ — скорость границы. Подставляя выражение для скорости в уравнение движения и интегрируя его по r от r до ∞ , получим распределение давления:

$$p = p_0 + \varrho \frac{\ddot{R}R + 2\dot{R}^2}{\xi} - \varrho \frac{\dot{R}^2}{2\xi^4}. \quad (12.23)$$

¹⁾ В работе одного из авторов [26] построено семейство автомодельных решений для цилиндрического движения в акустическом приближении. Оно получается путем суперпозиции плоских волн. Показатель автомодельности является произвольным и выбирается по начальным условиям. Для сходящейся цилиндрической ударной волны (в акустическом приближении) давление на фронте $p \sim |t|^{-1/2}$, причем радиус фронта $R = c|t|$.

Интересно, что в отраженной ударной волне давление на фронте бесконечно при $R \neq 0$. Результаты для ударной волны были получены ранее Е. И. Забахахиным и М. Н. Нечаевым [27]. Давление на фронте обращается в бесконечность только в рамках акустического приближения, что разъяснено в [26, 27].

²⁾ По-видимому, в реальном процессе на последней стадии захлопывания давление паров внутри настолько возрастает, что сдерживает напор жидкости и заставляет ее отступить обратно. Благодаря очень быстрому сжатию пар не успевает конденсироваться и сжатие его в конце происходит по адиабате Пуассона. Однако рассматривая захлопывание до не слишком малых радиусов, давлением пара можно пренебречь. Также можно пренебречь и поверхностным натяжением на границе жидкости.

Если отнести это уравнение к границе полости $\xi = 1$, где $p = 0$, получим уравнение для функции $R(t)$:

$$0 = p_0 + \varrho \left(\ddot{R}R + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right). \quad (12.24)$$

Интегрируя уравнение один раз с начальным условием $\dot{R} = 0$ при $R = R_0$, получим закон нарастания скорости при захлопывании:

$$\dot{R}^2 = \frac{2p_0}{3\varrho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)^{1/2}. \quad (12.25)$$

Это уравнение можно получить и непосредственно из энергетических соображений. Примем за нуль энергию жидкости без пузырька. Потенциальная энергия жидкости, в которой имеется пузырек радиуса R , равна работе, потраченной на преодоление сил внешнего давления при образовании полости объемом $4\pi R^3/3$. Эта работа равна $p_0 4\pi R^3/3$, независимо от распределения давления в районе пузырька²⁾.

Кинетическая энергия жидкости равна

$$\int_R^\infty 4\pi r^2 \frac{\varrho u^2}{2} dr = \int_R^\infty 4\pi r^2 \varrho \frac{\dot{R}^2 R^4}{2r^4} dr = 2\pi \varrho \dot{R}^2 R^3.$$

Полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной, сохраняется:

$$2\pi \varrho \dot{R}^2 R^3 + \frac{p_0 4\pi R^3}{3} = E = \frac{p_0 4\pi R_0^3}{3}. \quad (12.26)$$

Отсюда и получается выражение (12.25).

С помощью соотношения (12.24) профиль давления (12.23) можно представить в форме

$$p = p_0 \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) + \frac{\varrho \dot{R}^2}{2} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^4} \right), \quad \xi = \frac{r}{R}.$$

(Профили скорости и давления схематически изображены на рис. 12.4.)

Из формулы для давления видно, что задача неавтомодельна (несмотря на, казалось бы, «автомодельный» вид скорости (12.22)). Это и понятно: в задаче имеются характерные масштабы длины R_0 и скорости $\sqrt{p_0/\varrho}$.

Однако в пределе, когда радиус полости стремится к нулю, $R \rightarrow 0$, а скорость и давление растут, стремясь к бесконечности, решение асимптотически принимает автомодельный характер:

$$p \approx \frac{\varrho \dot{R}^2}{2} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^4} \right); \quad \dot{R}^2 \approx \frac{2p_0}{3\varrho} \frac{R_0^3}{R^3}. \quad (12.27)$$

¹⁾ Интегрирование уравнения (12.25) дает время захлопывания пузырька $\tau = 0,915 R_0 \sqrt{\varrho/p_0}$. Например, в воде при $\varrho = 1 \text{ г/см}^3$, $p_0 = 1 \text{ атм}$, $R_0 = 1 \text{ мм}$, $\tau = 0,915 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

²⁾ Пояснить это положение можно следующим образом. Представим себе сосуд с жидкостью, находящейся под давлением p_0 , закрытый подвижным поршнем с площадью поверхности S . Если внутри образуется полость объемом Ω , жидкость в силу своей несжимаемости выдавливает поршень на расстояние l , такое, что $lS = \Omega$. При этом она совершает над поршнем работу $p_0 Sl = p_0 \Omega$, которая определяется только давлением p_0 вдали от пузырька и не зависит от распределения давления вблизи пузырька.

Масштаб длины, начальный радиус, становится слишком большим, а масштаб давления p_0 становится слишком малым, чтобы характеризовать истинный процесс, для которого теперь масштабами служат переменные во времени радиус полости R и скорость границы $\dot{R}$ ($R \ll R_0$, $\dot{R} \gg \sqrt{p_0/\rho}$; $p \sim \rho \dot{R}^2 \gg p_0$). Движение как бы «забывает» о начальных условиях. Это, в частности, проявляется в том, что параметры p_0 и R_0 входят теперь в уравнение движения границы не в отдельности, как раньше (см. формулу (12.25)), а только в комбинации, пропорциональной полной энергии жидкости $E = 4\pi R_0^3 p_0/3$ (см. формулу (12.27)).

Как видим, автомодельность принадлежит к первому типу — сохраняется энергия. Размерные параметры в автомодельном течении такие же, как и в задаче о сильном взрыве — энергия и плотность. Закон движения границы дается уравнением (12.27) $\dot{R}^2 \sim \frac{E}{\rho} \frac{1}{R^3}$,

а давление $p \sim E/R^3$. Отсюда получим $R \sim (E/\rho)^{1/5}(-t)^{2/5}$; $\dot{R} \sim (E/\rho)^{1/5}(-t)^{-3/5}$, как в задаче о сильном взрыве (за нуль времени принят момент фокусировки). Показатель автомодельности $\alpha = 2/5$.

В пределе $R \rightarrow 0$ из формул (12.22) и (12.27) получаем

$$u \sim \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \sim \frac{R^{1/2}}{r^2}; \quad p \sim \frac{1}{R^3} \left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{r^4} \right) \sim \frac{1}{R^2 r} - \frac{R}{r^4}.$$

Скорость границы стремится к бесконечности, $\dot{R} \sim R^{-3/2}$, но скорость на конечном радиусе $r \neq 0$ стремится к нулю. В пределе $R \rightarrow 0$ потенциальная энергия $p_0 4\pi R^3/3$ стремится к нулю, и вся энергия E , которая теперь является кинетической, концентрируется в точке начала координат. Плотность энергии в ней бесконечна. В отличие от скорости, давление в момент фокусировки бесконечно и на любом конечном радиусе $r \neq 0$ (с давлением в модели несжимаемой жидкости не связана энергия). Это свидетельствует о несовершенстве модели несжимаемой жидкости. Как будет показано в следующем параграфе, при учете сжимаемости давление на конечных расстояниях от центра ограничено.

§ 10. Захлопывание пузырьков. Учет сжимаемости и вязкости. Захлопывание пустой полости в воде с учетом сжимаемости (но без учета вязкости) рассматривал Хантер [5]. Уравнение состояния было принято в форме

$$p = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

с $\gamma = 7$. Однако фактически в пределе больших давлений единица опускалась, так что уравнение состояния имело форму, аналогичную газовому, $p = B(\rho/\rho_0)^\gamma$. Величина B предполагалась постоянной, не зависящей от энтропии (течение считалось изэнтропическим). Было принято $B = 3000$ атм.

Численное решение уравнений гидродинамики (в переменных u, c) с надлежащим образом выбранными начальными и граничными условиями показало, что в пределе, когда радиус полости становится очень маленьким, а скорость границы очень большой, решение становится автомодельным.

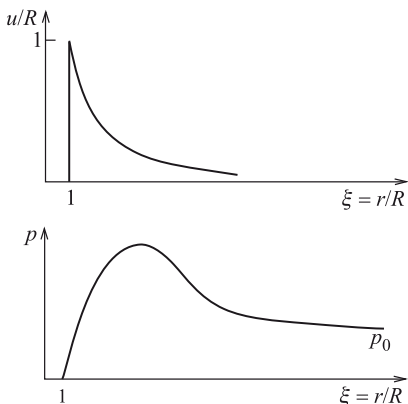


Рис. 12.4. Профили скорости и давления в задаче Рэлея

В соответствии с этим искалось решение уравнений в автомодельной форме $u = \dot{R}v(r/R)$, $c^2 = \dot{R}^2 z(r/R)$, где радиус полости $R = A(-t)^\alpha$ ¹⁾. Уравнения в автомодельных переменных, их общие свойства и ход исследования во многом аналогичны тому, что имеет место в задаче о схождении ударной волны к центру. В результате численного интегрирования показатель автомодельности α получился равным $\alpha = 0,555$ (для $\gamma = 7$).

Энергия всего течения бесконечна, как и в задаче о фокусировке ударной волны. (Энергия, заключенная в сфере радиуса r в момент фокусировки $t = 0$, $R = 0$, пропорциональна $r^{1,13}$.) Отсутствие интеграла энергии и относит автомодельную задачу ко второму типу. Распределения скорости, квадрата скорости звука и плотности по радиусу в момент схлопывания полости, когда $R = 0$, имеют вид

$$u \sim r^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}; \quad c^2 \sim r^{-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}; \quad \varrho \sim r^{-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha(\gamma-1)}}; \quad p \sim r^{-\frac{2(1-\alpha)\gamma}{\alpha(\gamma-1)}}.$$

В отличие от случая фокусировки ударной волны, когда распределения u и c^2 ($c^2 \sim p/\varrho$) имеют такой же вид, предельная плотность здесь переменная. Это связано с тем, что с самого начала задача считается изэнтропической. Резкое повышение c^2 и p связывается не с ростом энтропии, как в ударной волне, а с ростом плотности.

Автомодельное решение в какой-то мере описывает реальный процесс лишь в области очень малых радиусов, когда «забыты» начальные условия.

Сопоставление автомодельного решения с результатами численного интегрирования уравнений в частных производных при начальных условиях, соответствующих атмосферному давлению в воде и начальному радиусу $R_0 = 0,5$ см, показало следующее. В момент полного схлопывания $t = 0$, $R = 0$ автомодельное решение справедливо в области с радиусом порядка 10^{-2} см. В такой сфере содержится примерно 10–20% энергии жидкости, а давление на ее границе порядка нескольких десятков тысяч атмосфер. В работе Хантера найдено также автомодельное решение для ударной волны, которая распространяется от центра после схлопывания пузырька.

К интересным закономерностям приводит учет вязкости жидкости. Задачу о захлопывании пустой сферической полости в несжимаемой вязкой жидкости решал Е. И. Забабахин [6].

Исследование уравнений показывает, что характер движения зависит от значения числа Рейнольдса $Re = R_0/\nu\sqrt{p_0/\varrho}$, где $\nu = \eta/\varrho$ — кинематическая вязкость. При $Re > Re^*$, где Re — некоторое критическое число (малая вязкость), скорость границы полости R неограниченно возрастает при $R \rightarrow 0$ по такому же закону как и в задаче Рэлея, $\dot{R} \sim R^{-3/2}$, но с меньшим значением коэффициента пропорциональности (часть энергии превращается в тепло за счет диссипации). При $Re < Re^*$ (большая вязкость) вязкость сильно препятствует ускорению жидкости, захлопывание пузырька происходит медленно, за бесконечное время. Кумуляция энергии, характерная для задачи Рэлея, отсутствует. В промежуточном случае при $Re = Re^*$ пузырек захлопывается за конечное время; скорость $\dot{R}$ при $R \rightarrow 0$ неограниченно растет, но слабее, чем R^{-1} .

Численное интегрирование уравнений дает для критического числа Рейнольдса значение $Re^* = 8,4$. Для данной жидкости, находящейся под данным давлением, т. е. при заданных ϱ , ν , p_0 , можно говорить о критическом радиусе пузырька R_0^* . При $R_0 < R_0^*$ кумуляция полностью устраняется вязкостью. Реально, критический

¹⁾ Для исследования и решения уравнений оказалось более удобным выбрать в качестве автомодельной переменной не $\xi = r/R = r/A(-t)^\alpha$, а величину $\xi' = -(R/r)^{1/\alpha} = A^{1/\alpha} t r^{-1/\alpha}$ (на границе полости $r = R$, $\xi' = -1$; на бесконечности $r = \infty$, $\xi' = 0$).

радиус чрезвычайно мал; например, в воде ($\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $p_0 = 1 \text{ атм}$, $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$) $R_0^* = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}$.

Следовательно, вязкость слабо влияет на захлопывание пузырьков с радиусом, превышающим $0,8 \cdot 10^{-4} \text{ см}$.

3. Выход ударной волны на поверхность звезды

§ 11. Распространение ударной волны при степенном законе уменьшения плотности. Известно (см., например, [7]), что вблизи поверхности звезды плотность вещества спадает к нулю приблизительно по степенному закону

$$\rho_{00} = bx^\delta, \quad (12.28)$$

где x — координата, которая отсчитывается от поверхности внутрь звезды, а b и δ — постоянные. Такое распределение плотности устанавливается в результате совместного действия сил гравитации и теплового давления, причем в установлении распределения температуры, которой пропорционально давление газа, существенную роль играет лучистая теплопроводность (см. об этом также § 14 гл. II). Показатель степени δ в распределении плотности (12.28) связан с константами, входящими в закон лучистой теплопроводности; он обычно порядка 3.

Когда в центральных областях звезды происходят внутренние возмущения, сопровождающиеся повышением давления, образуется ударная волна, которая распространяется из центральных областей к периферии и выходит на поверхность. Распространение ударной волны по газу с падающей до нуля плотностью, как это имеет место вблизи поверхности, сопровождается концентрированием (кумуляцией) энергии, что представляет большой интерес для астрофизики и для проблемы возникновения космических лучей (см. следующий параграф).

Имеется некоторое физическое сходство между процессами кумуляции при распространении ударной волны по газу с падающей до нуля плотностью и при сжатии ударной волны в центр. В обоих случаях энергия сообщается неограниченно уменьшающейся массе вещества таким образом, что удельная энергия — энергия единицы массы — неограниченно растет. Различие состоит в причинах уменьшения массы, на которую падает энергия. В первом случае масса уменьшается вследствие уменьшения плотности газа, во втором — вследствие уменьшения объема.

Будем интересоваться предельным видом движения в той стадии, когда фронт ударной волны находится близко от поверхности звезды. В этих условиях можно пренебречь кривизной поверхностей звезды и фронта и считать движение плоским. Поскольку ударная волна — сильная, можно пренебрегать силами гравитации. Лучистая теплопроводность играет существенную роль в установлении стационарных распределений температуры плотности газа. За малое время прохождения очень сильной ударной волны она не успевает внести заметные изменения за счет перераспределения тепла, поэтому процесс можно приближенно считать адиабатическим.

В такой постановке задача о предельном виде движения была впервые решена Г. М. Гандельманом и Д. А. Франк-Каменецким [8]. Позднее ту же задачу рассматривал Сакураи [9], который нашел точно такое же решение, но для других численных значений показателя δ в законе (12.28) и адиабаты γ . Схематическое изображение процесса распространения ударной волны показано на рис. 12.5.

Единственным размерным параметром в условиях задачи является постоянная b , которая содержит символ массы. Никаких других размерных параметров нет. Поэтому естественно искать автомодельное решение задачи, причем автомодельность должна относиться ко второму типу. Представим решение в форме (12.3),

(12.5)–(12.7). В соответствии с плоской симметрией будем обозначать координату ударной волны, отсчитываемую от поверхности звезды $x = 0$, через $X(t)$.

В качестве масштаба плотности ϱ_0 следует принять величину плотности невозмущенного газа перед фронтом ударной волны. Поскольку волна распространяется по газу переменной плотности, этот масштаб зависит от времени, либо же от координаты фронта X , что все равно (см. конец § 2). Именно, масштаб ϱ_0 равен

$$\varrho_0 = \varrho_{00}(X) = bX^\delta. \quad (12.29)$$

Как и в задаче о схождении к центру ударной волны, примем за начало отсчета времени $t = 0$ момент выхода ударной волны на поверхность, в соответствии с чем изменим знак у t в автомодельном законе:

$$X = At^\alpha \rightarrow X = A(-t)^\alpha.$$

Итак, ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \varrho = \varrho_0 g(\xi), \quad p = \varrho_0 \dot{X}^2 \pi(\xi), \quad u = \dot{X} v(\xi), \\ \xi = x/X, \quad \varrho_0 = bX^\delta, \quad X = A(-t)^\alpha. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Уравнения (12.4) для представителей в данном случае принимают вид ($\nu = 1$)

$$\begin{aligned} \delta + (v - \xi)(\ln g)' + v' = 0, \quad (\alpha - 1)\alpha^{-1}v + (v - \xi)v' + \frac{\pi'}{g} = 0, \\ (v - \xi)(\ln \pi g^{-\gamma})' + \lambda = 0, \quad \lambda = 2(\alpha - 1)\alpha^{-1} - (\gamma - 1)\delta. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Граничные условия на фронте ударной волны, которая предполагается сильной, выражаются формулами (2.16), откуда следует граничное условие для представителей, аналогичное (2.17): при $\xi = 1$

$$g(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad v(1) = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \pi(1) = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (12.32)$$

В момент выхода ударной волны на поверхность, т. е. при $X = 0$, для любого значения x , отличного от нуля, автомодельная координата $\xi = \infty$. Газодинамические величины при любом конечном значении x в момент выхода должны быть ограниченными. Это накладывает дополнительное граничное условие на искомые функции при $\xi = \infty$.

Ход решения вполне аналогичен решению задачи о фокусировке ударной волны. Вводим новые представители: V, G, Z , и получаем систему, соответствующую (12.15). Система сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка относительно V и Z и двум квадратурам; фактически вместо двух квадратур получается одна квадратура и одно алгебраическое соотношение между переменными — интеграл адиабатичности. Собственное значение системы уравнений, показатель α , находится методом попыток, путем численного интегрирования уравнения для функции $Z(V)$, из условия, чтобы интегральная кривая прошла через нужную особую точку. Как и раньше, особой точке соответствует ξ_0 -линия на плоскости x, t , которая является C_- -характеристикой и ограничивает область влияния на движение фронта ударной волны.

В работе [8] было найдено значение показателя автомодельности для значений $\delta = 13/4 = 3,25$, $\gamma = 5/3$, равное $\alpha = 0,590$.

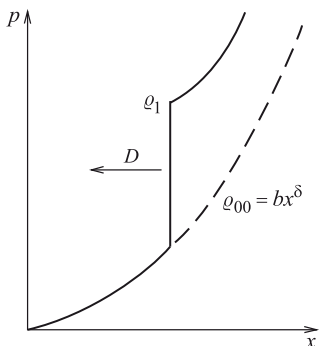


Рис. 12.5. Схема выхода ударной волны на поверхность звезды. Профиль плотности

В работе [9] были найдены показатели α для ряда других значений δ и γ . Эти результаты сведены в табл. 12.1.

Тот факт, что показатель автомодельности α всегда меньше единицы, свидетельствует о том, что ударная волна непрерывно ускоряется:

$$X \sim |t|^\alpha, \quad |\dot{X}| \sim |t|^{-(1-\alpha)} \sim X^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \\ |\ddot{X}| \sim \infty \text{ при } X \rightarrow 0.$$

В соответствии с этим неограниченно возрастает и температура на фронте, которая пропорциональна квадрату скорости фронта или квадрату скорости звука: $T \sim |\dot{X}|^2 \sim X^{-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$. Неограниченное возрастание температуры, как отмечалось выше, связано с тем, что конечное количество энергии сообщается неограниченно уменьшающемуся количеству газа. Давление на фронте ударной волны уменьшается по мере приближения фронта к поверхности, несмотря на возрастание скорости, так как плотность перед фронтом уменьшается быстрее, чем растет температура (или квадрат скорости):

$$p_1 \sim \rho_0 \dot{X}^2 \sim X^{\delta - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Легко проверить с помощью данных табл. 12.1, что показатель степени у X в этой формуле всегда положителен, т. е.

$$p_1 \rightarrow 0 \text{ при } X \rightarrow 0.$$

Предельные распределения величин по координате x в момент выхода ударной волны на поверхность $t = 0$, $X = 0$ ($t = 0$, $x \neq 0$ соответствуют $\xi = \infty$), очевидно, совпадают по форме с законами на фронте ударной волны. Это, как и в задаче о сходящейся к центру ударной волне, следует просто из соображений размерности. Получаем в момент $t = 0$:

$$u \sim x^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad T \sim u^2 \sim c^2 \sim x^{-\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}, \quad \rho \sim x^\delta, \quad p \sim x^{\delta - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

(Конечно, те же законы следуют из уравнений в пределе $\xi \rightarrow \infty$.) Плотность в конечном распределении увеличивается в определенное число раз по сравнению с плотностью в исходном состоянии.

Распределения величин по координате x до выхода и в момент выхода волны на поверхность схематически показаны на рис. 12.6.

Энергия газа при $t = 0$, заключенная в слое от $x = 0$ до x в столбе с сечением в 1 см^2 , пропорциональна величине

$$\int_0^x \rho u^2 dx \sim \int_0^x p dx \sim x^{\delta+1 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

При $x \rightarrow \infty$ энергия стремится к бесконечности; интеграла энергии нет. Энергия слоя конечной толщины конечна и при $x \rightarrow 0$ стремится к нулю. В отличие от сходящейся ударной волны на краю, при $x \rightarrow 0$ стремится к нулю и плотность энергии, пропорциональная давлению. Неограниченно возрастает только температура, т. е. энергия единицы массы.

«Бесконечная» энергия сообщается исчезающе малой массе газа. Конечно, в действительности, температура не может возрасти до бесконечности, как это

Таблица 12.1

γ	δ			
	3,25	2	1	0,5
5/3	0,590	0,696	0,816	0,877
7/5		0,718	0,831	0,906
6/5		0,752	0,855	0,920

получается в математическом решении. Так, например, когда ударная волна подходит настолько близко к поверхности, что в оставшейся малой массе слоя от $x = 0$ до

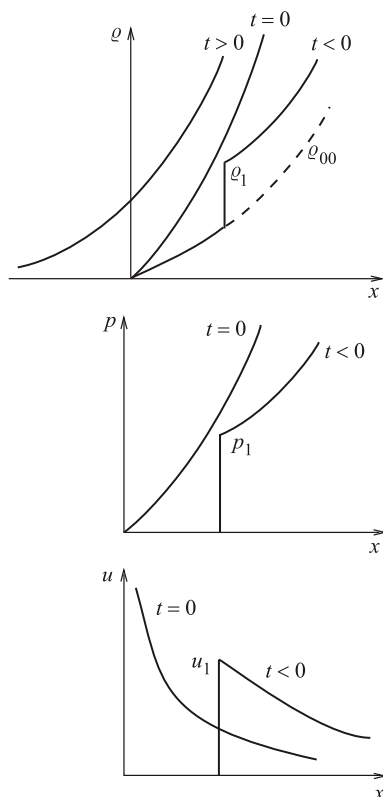


Рис. 12.6. Профили плотности, давления и скорости при выходе ударной волны на поверхность звезды: $t < 0$ — до выхода; $t = 0$ — момент выхода; $t > 0$ — после выхода

ходе ударной волны из глубины на поверхность звезды и может послужить причиной ускорения частиц до колоссальных энергий. Этой идеей воспользовались Колгейт и Джонсон; они подробно исследовали подобный процесс [11] и показали на основе расчетов, что некоторое количество вещества, выбрасываемого с поверхности при вспышке сверхновой, приобретает ультрарелятивистские скорости и кинетические энергии, соответствующие энергиям космических лучей. (Наибольшие энергии частиц, которые в настоящее время наблюдаются в спектре космических лучей, имеют порядок 10^8 ГэВ = 10^{17} эВ; 1 ГэВ = 10^9 эВ.) Ниже будут изложены результаты работы Колгейта и Джонсона.

В центре сверхновых звезд температура достигает $\sim 300\text{--}500$ кэВ ($\sim 5 \cdot 10^9$ К). При такой температуре ядерный синтез идет вплоть до образования наиболее стабильного элемента — железа. Более наружные слои состоят из более легких элементов: углерода, азота, кислорода, еще ближе к поверхности основным элементом

$x = X$ содержится небольшое число газокинетических пробегов, вообще теряет смысл газодинамическое рассмотрение. Беспредельный рост температуры может ограничиваться причинами физического характера: потерями энергии на излучение высоко нагретого вещества.

Как и в задаче о схождении ударной волны в центр, автомодельное решение справедливо только в ограниченной области с размерами порядка координаты фронта X . Далеко от фронта при $x \gg X$ решение не автомодельно и зависит от условий возникновения ударной волны. Неавтомодельное решение переходит в автомодельное при $x \sim X$.

После выхода ударной волны на поверхность газ истекает в вакуум, начальные распределения плотности, давления и скорости даются степенными законами при $t = 0$. Как показано в работе [9], решение в стадии истечения также автомодельно, но, конечно, имеет совсем иной характер (течение непрерывно, без ударных волн). Примерное распределение плотности в какой-то момент $t > 0$ показано на рис. 12.6.

§ 12. К вопросу о вспышках сверхновых звезд и происхождении космических лучей.

Высказывалась мысль о том, что происхождение космических лучей — протонов и ядер с колоссальной энергией, которые присутствуют во Вселенной и попадают на Землю, связано со вспышками сверхновых звезд. Такая теория разрабатывалась В. Л. Гинзбургом и И. С. Шкловским (см. обзор. [10]). Процесс «неограниченного» возрастания амплитуды ударной волны и кумуляции энергии при вы-

является гелий и, наконец, самые наружные слои состоят из водорода. Астрономические данные свидетельствуют о том, что при вспышке сверхновая звезда выбрасывает массу вещества порядка одной десятой всей массы звезды и порядка массы Солнца, равной $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ г.

Расчеты механического и лучистого равновесия звезды с массой, равной $10 M_{\odot}$, дают картину распределения плотности и температуры по радиусу, показанную на рис. 12.7¹⁾. В центре звезды плотность выше 10^8 г/см³, на поверхности спадает до нуля. Во всяком случае, распространение обычной ударной волны прослеживается до слоев с плотностью $\rho \sim 10^{-5}$ г/см³.

Принято считать, что энергетическим источником ударной волны является так называемая гравитационная неустойчивость, которая имеет место при адиабатическом уравнении состояния с показателем адиабаты $\gamma < 4/3$. В центральных областях звезды, при температуре ~ 500 кэВ, ядра сильно диссоциируют, в процессе диссоциации, как известно, резко увеличивается теплоемкость вещества и уменьшается показатель адиабаты. В результате гравитационной неустойчивости возмущения, однажды возникшие по тем или иным причинам, усиливаются. Возникший импульс давления разрастается, и это приводит к образованию ударной волны, которая направляется из центральных областей к поверхности. Вещество за ударной волной разлетается от центра, и наружные слои вследствие усиления волны приобретают очень большие скорости. Обладая большой кинетической энергией разлета, вещество в периферийных слоях преодолевает силы тяготения и после выхода ударной волны на поверхность отрывается от звезды: звезда как бы сбрасывает с себя оболочку. Это явление хорошо известно в астрофизике. Полагают, что таким образом образовалась Крабовидная туманность. Оценка показывает, что для преодоления сил гравитации при выбросе массы, равной массе Солнца, необходима энергия порядка 10^{52} эрг. Такова, следовательно, по порядку величины энергия, которая высвобождается в центре звезды и идет на образование ударной волны. Гидродинамический расчет распространения ударной волны от такого источника дает значения скорости за фронтом ударной волны, которые показаны на кривой I рис. 12.8. По оси абсцисс на этом рисунке отложена начальная плотность вещества перед фронтом. Кривая II показывает, какую скорость приобретает слой с данной плотностью после выхода волны на поверхность и расширения вещества. Скорость после расширения возрастает примерно

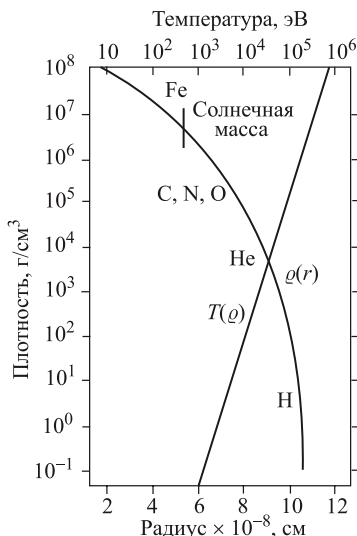


Рис. 12.7. Распределения плотности и температуры перед вспышкой звезды: $\rho \sim T^{3.25}$ в соответствии с условиями лучистого равновесия

¹⁾ В условиях лучистого равновесия плотность зависит от температуры по закону: $\rho \sim T^{13/4} = T^{3.25}$. Именно исходя из этого и был выбран [8] закон распределения плотности у поверхности $\rho \sim x^{3.25}$, так как в некотором слое около поверхности температура слабо зависит от координаты x (на поверхности звезды температура не равна нулю). На рис. 12.7 отмечен радиус наружного слоя, масса которого равна массе Солнца. Этот слой, надо полагать, и выбрасывается при вспышке. Отмечены примерно зоны, в которых находятся те или иные элементы.

вдвое по сравнению со скоростью в момент прохождения фронта ударной волны. Из рис. 12.8 видно, что периферийные слои, где плотность меньше примерно 30 г/см^3 , приобретают в усиливающейся ударной волне скорости большие, чем 10^{10} см/с , что составляет $1/3$ от скорости света c . Поэтому расчет движения ударной волны по этим периферийным слоям требует учета релятивистских эффектов.

В работе [11] был проделан численный расчет движения в рамках релятивистской газодинамики, а также было найдено приближенное аналитическое решение задачи,

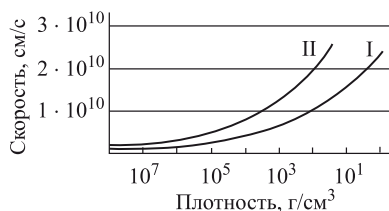


Рис. 12.8. Скорость вещества в зависимости от его плотности в начальный момент до прихода ударной волны. Кривая I — скорость непосредственно за фронтом волны; II — скорость после расширения

$\rho_0 \sim 10^{-5} \text{ г/см}^3$. Масса слоя звезды, наружного по отношению к сферической поверхности с такой начальной плотностью, составляет примерно 1 г/см^2 из расчета на единицу поверхности. Столь тонкий слой уже не в состоянии удерживать, «запирать» тепловое излучение, которое в еще более наружных слоях неравновесно. Поэтому распространение ударной волны по более наружным слоям уже не может происходить так, как в равновесных условиях.

Дальнейший процесс распространения ударной волны по газу еще более низкой плотности, как отмечают авторы [11], существенным образом связан с механизмом плазменных колебаний. Ударная волна доходит до такой поверхности, где дебаевская длина становится сравнимой с масштабом длины оставшегося наружного слоя. Расчеты показывают, что это происходит на радиусе, где начальная плотность $\rho_0 \sim 10^{-12} \text{ г/см}^3$. Частицы в ударной волне на таком радиусе ускоряются до энергий $\sim 10^8 \text{ ГэВ}$, совпадающих с наибольшими наблюдаемыми энергиями космических лучей.

Важно проверить, хватает ли количества частиц, ускоряемых при вспышке Сверхновой до энергий космических лучей, для того, чтобы обеспечить имеющийся «запас» космических лучей в Галактике. Начальная плотность вещества, которое после прохождения ударной волны ускоряется до энергии $\sim 10 \text{ ГэВ}$, равна примерно 1 г/см^3 . Масса звезды в слое, наружном по отношению к сферической поверхности, где $\rho_0 \sim 1 \text{ г/см}^3$ составляет $\sim 10^{26} \text{ г}$ или $6 \cdot 10^{49}$ протонов. Можно сказать, что при вспышке $6 \cdot 10^{49}$ протонов получают энергию, превышающую 10 ГэВ . Время «жизни» энергичного протона в Галактике при средней плотности материи в Галактике $\sim 0,1 \text{ частица/см}^3$ составляет $\tau \sim 5 \cdot 10^8 \text{ лет}$.

Значит, через $\sim 5 \cdot 10^8 \text{ лет}$ после «начала» вспышек в Галактике установится стационарное число протонов N . Вспышки сверхновых происходят примерно раз в 100 лет. Следовательно, в год рождается $6 \cdot 10^{49}/100 = 6 \cdot 10^{47}$ протонов, «погибает» N/τ протонов в год. Из условия стационарности, $N/\tau = 6 \cdot 10^{47}$ протонов/год, следует

основанное на использовании уравнений в характеристиках и релятивистских аналогах инвариантов Римана. Интересно отметить, что внутренняя энергия за фронтом столь мощной ударной волны почти целиком сосредоточена в равновесном тепловом излучении. Приближенное решение показывает, что окончательная кинетическая энергия на 1 г , которую приобретает вещество, находившееся в слое с начальной плотностью $\rho_0 \text{ г/см}^3$, по порядку величины равна $c^2 (30/\rho_0)^{0,64} \text{ эрг/г}$. Если учесть, что в водороде 1 эрг/г соответствует примерно $10^{-12} \text{ эВ/протон} = 10^{-21} \text{ ГэВ/протон}$, то получается, что кинетическую энергию порядка 10^4 ГэВ приобретают частицы, ранее находившиеся в слое с начальной плотностью

$N = 3 \cdot 10^{56}$. Объем Галактики $V \sim 5 \cdot 10^{68} \text{ см}^3$. Средняя плотность энергичных протонов $N/V \sim 6 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-3}$, а поток — порядка $Nc/V \sim 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Эта величина согласуется с наблюдениями. Для создания космических лучей в Галактике, согласно изложенной теории, потребовалось $\sim 5 \cdot 10^6$ вспышек сверхновых.

4. Движение газа под действием кратковременного удара

§ 13. Постановка задачи и общий характер движения. Представим себе полупространство $x > 0$, занятое идеальным газом с постоянной теплоемкостью. В начальный момент $t = 0$ плотность газа везде одинакова и равна ϱ_0 , а давление, температура и начальная скорость звука равны нулю. Полупространство $x < 0$ — пустое; поверхность $x = 0$ представляет собой границу между газом и вакуумом.

Пусть на наружную поверхность газа действует кратковременный импульс давления (поверхность газа подвергается удару). Возможны различные конкретные способы осуществления кратковременного удара.

1) В течение малого времени τ в газ вдвигается плоский поршень с постоянной скоростью U_1 , который создает в газе давление Π_1 . С точностью до численного коэффициента порядка единицы (зависящего от показателя адиабаты γ) $\Pi_1 \approx \varrho_0 U_1^2$. Близка к U_1 скорость ударной волны D , которая создается под действием поршня. По прошествии времени τ поршень «мгновенно» убирается, и газ, испытавший кратковременный удар, оказывается предоставленным самому себе (импульс давления показан на рис. 12.9, а).

2) На поверхности газа подрывается тонкий слой взрывчатого вещества. Если массовая толщина слоя равна $m \text{ г/см}^2$, а калорийность, т.е. энергосодержание на 1 г, равна $Q \text{ эрг/г}$, то при взрыве выделяется энергия $E = mQ \text{ эрг/см}^2$. Продукты взрыва разлетаются со скоростью $U_1 \approx \sqrt{Q}$. Поскольку продукты разлетаются в обе стороны и до момента взрыва все покоилось, суммарный импульс равен нулю, однако импульс продуктов, движущихся в одну сторону, по порядку величины равен $I \approx mU_1 \approx m\sqrt{Q}$ (на 1 см^2 поверхности).

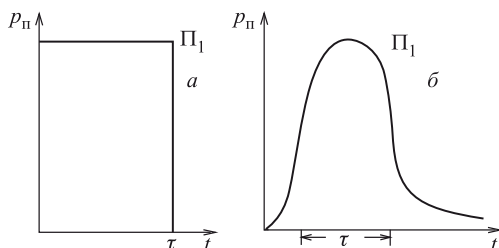


Рис. 12.9. Формы начального импульса давления

В газе продукты взрыва создают ударную волну с давлением порядка $\Pi_1 \approx \varrho_0 U_1^2$. Время действия давления τ определяется из условия, что за время τ энергия и импульс передаются от продуктов взрыва газу:

$$\tau \approx \frac{E}{\Pi_1 U_1} \approx \frac{I}{\Pi_1} \approx \frac{m}{\varrho_0 \sqrt{Q}}.$$

За это время ударная волна в газе пройдет расстояние $\sim U_1 \tau \sim \sqrt{Q} \tau$ и охватит массу $\sim \varrho_0 \sqrt{Q} \tau \sim m$, т.е. порядка массы взрывчатого вещества.

3) На поверхность газа налетает со скоростью U_1 тонкая пластина с малой массой $m \text{ г/см}^2$. Под действием удара пластины в газе образуется ударная волна, которая

распространяется со скоростью $D \approx U_1$. Давление в газе при этом $\Pi_1 \approx \rho_0 U_1^2$. Начальные импульс и энергия пластины $I = mU_1$, $E = mU_1^2/2$ передаются газу за время торможения пластины τ , которое порядка $\tau \approx E/\Pi_1 U_1 \approx I/\Pi_1 \approx m/\rho_0 U_1$. За это время ударная волна в газе проходит расстояние $U_1 \tau$ и охватывает массу $\rho_0 U_1 \tau \approx m$.

Итак, в общем случае будем считать, что на поверхность газа действует давление, достаточно быстро спадающее со временем, как показано на рис. 12.9, б. Кривую давления можно представить в виде $p_n = \Pi_1 f(t/\tau)$, где f — функция, характеризующая форму импульса давления. В дальнейшем для конкретности и удобства рассуждений там, где будет идти речь о начальных условиях, мы будем оперировать понятием «поршня», как в первом примере. При этом будем иметь в виду, что все выводы с равным успехом можно перенести и на любые другие способы осуществления удара.

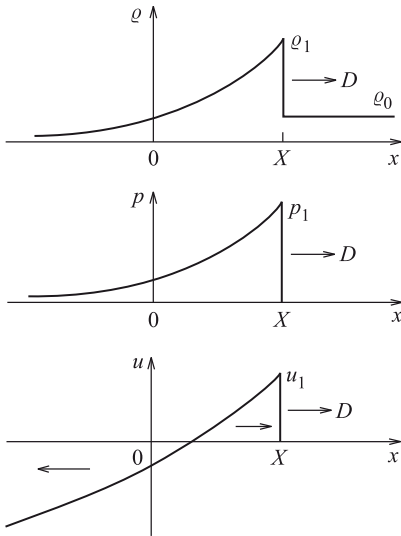
Задача заключается в том, чтобы найти законы движения газа — функции $p(x, t)$, $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ по прошествии времени, достаточно большого по сравнению с временем удара τ , т. е. найти асимптотический режим при $t/\tau \gg 1$ для данной кривой действия внешнего давления. Ее можно сформулировать и несколько иначе. Сохраняя форму кривой $f(t/\tau)$, устремим время τ к нулю, а давление Π_1 — к бесконечности, и будем

искать получающееся при этом предельное решение уравнений газодинамики для конечных времен. Решение задачи должно, в частности, ответить на вопрос, как именно, по какому закону должно возрастать давление Π_1 при $\tau \rightarrow 0$, чтобы обеспечить данное конечное давление в газе через конечное время t . Например, если в решение войдет комбинация $\Pi_1 \tau^\beta$, то это означает, что при $\tau \rightarrow 0$ Π_1 должно расти как $\tau^{-\beta}$.

Изложенная задача была поставлена и исследована в работе одного из авторов [12], где были выяснены физические особенности возникающего движения и математического решения. Исследование уравнений и численное интегрирование было проведено В. Б. Адамским [13]. А. И. Жуков и Я. М. Каждан [14], Хефеле [15] и Хернер [16] нашли аналитическое решение для одного частного случая ($\gamma = 7/5$). Последние две работы являются развитием статьи Вейцзеккера [17], в которой ставился вопрос о пределах изменения показателя автомодельности при плоских движениях. Следует отметить, в работах [15–17] не был выяснен физический смысл полученного формальным путем решения.

Рис. 12.10. Профили плотности, давления и скорости в задаче о кратковременном ударе

Общий характер возникающего под действием кратковременного удара движения иллюстрируется рис. 12.10. По невозмущенному газу распространяется ударная волна, на фронте которой достигается предельное сжатие, $h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. С другой стороны, газ беспрепятственно расширяется в пустоту; на границе с пустотой плотность и давление падают до нуля. За фронтом ударной волны давление, плотность и скорость уменьшаются, причем в некоторой точке скорость меняет знак, так как непосред-



ственно за фронтом газ движется вправо, а у границы он разлетается в пустоту влево. Амплитуда ударной волны с течением времени уменьшается.

Решение задачи о мгновенном импульсе давления должно дать ответ на вопрос о максимальной возможной скорости убывания амплитуды плоской ударной волны при распространении по газу с постоянной начальной плотностью. Ясно, что если действие давления растянуто во времени, то это только поддерживает ударную волну и замедляет ее затухание.

Характер предельного решения не зависит от конкретной формы импульса давления, т.е. от вида функции $f(t/\tau)$, если только она спадает достаточно быстро. Выше было отмечено, что под действием давления Π_1 во время удара газ приобретает скорость $U_1 \sim \sqrt{\Pi_1/\rho_0}$. С такой по порядку величины скоростью граница газа разлетается в пустоту. Когда мы переходим к пределу $\tau \rightarrow 0$, $\Pi_1 \rightarrow \infty$, скорость границы стремится к бесконечности, так что распределения p, ρ, u в предельном решении, показанные на рис. 12.10, простираются влево до $x = -\infty$.

§ 14. Автомодельное решение и законы сохранения энергии и импульса.

Движение, которое возникает непосредственно после приложения импульса давления, конечно, не является автомодельным. Оно характеризуется масштабами времени τ и длины $x_0 = \sqrt{\Pi_1/\rho_0} \tau$ и зависит от формы кривой приложенного давления $f(t/\tau)$. Однако по прошествии достаточно большого времени, в моменты $t \gg \tau$, когда фронт ударной волны уйдет на расстояние $X \gg x_0$, начальные масштабы τ и x_0 , очень малые по сравнению с естественными масштабами движения t и X , уже не будут характеризовать процесс. Предельное движение, соответствующее стадии $t \gg \tau$, $X \gg x_0$, или, что то же самое, соответствующее предельному переходу $\tau \rightarrow 0$, будет автомодельным. Единственный масштаб длины в этом движении — это сама переменная координата фронта ударной волны X , а масштаб скорости — скорость фронта $\dot{X}$. Решение уравнений, следовательно, надо искать в автомодельной форме:

$$\rho = \rho_0 g(\xi), \quad u = \dot{X} v(\xi), \quad p = \rho_0 \dot{X}^2 \pi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{X} = \frac{x}{At^\alpha}. \quad (12.33)$$

Прежде чем заниматься математическим решением уравнений, следует решить вопрос, к какому из двух типов принадлежит автомодельное движение, нельзя ли определить показатель автомодельности α из соображений размерности или законов сохранения. В отличие от двух задач, рассмотренных выше: о сжатии ударной волны к центру и о выходе ударной волны на поверхность звезды, в рассматриваемой задаче в каждый момент времени t в движение вовлечена вполне определенная, конечная масса газа $\rho_0 X$ (на 1 см^2 поверхности).

Поскольку после прекращения действия поршня, который совершил удар по поверхности газа, на газ больше не действуют никакие внешние силы (давление на границе с пустотой равно нулю), в газе должны сохраняться количество движения и энергия. Количество движения газа равняется импульсу давления поршня:

$$I = \int_0^\infty p_n dt = \Pi_1 \tau \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\tau}\right) d\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

С точностью до численного коэффициента эта величина равна $\Pi_1 \tau$.

Энергия газа равна работе, произведенной поршнем за время действия давления. Для того чтобы точно вычислить эту работу, потребовалось бы решить уравнения

газодинамики в стадии действия поршня, так как работа равна $\int_0^\infty p_n u_n dt$, где $u_n(t)$ — скорость поршня, которая заранее неизвестна (задана только кривая давления $p_n(t)$).

Однако с точностью до численного коэффициента, зависящего от вида функции $f(t/\tau)$, эта работа равна

$$E \approx \Pi_1 U_1 \tau \approx \Pi_1 \sqrt{\frac{\Pi_1}{\varrho_0}} \tau = \Pi_1^{3/2} \tau \varrho_0^{-1/2}$$

(U_1 — масштаб скорости поршня).

Если подставить в интегральные выражения для количества движения и энергии всего газа давление, скорость и плотность в автомодельной форме (12.33) и учесть, что интегралы по холодной, невозмущенной области $X < x < \infty$ исчезают, то законы сохранения импульса и энергии (на 1 см² поверхности) можно записать в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho u \, dx = \varrho_0 \dot{X} X \int_{-\infty}^1 g v \, d\xi = \text{const}, \quad (12.34)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varrho \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p \right) dx = \varrho_0 \dot{X}^2 X \int_{-\infty}^1 \left(\frac{g v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \pi \right) d\xi = \text{const}. \quad (12.35)$$

Естественно было бы считать безразмерные интегралы константами. Тогда каждое из двух условий, взятое в отдельности, дало бы возможность определить показатель автомодельности α . Условие сохранения импульса дало бы $\dot{X} X = \text{const}$, откуда $X \sim t^{1/2}$, $\alpha = 1/2$. Из условия сохранения энергии следует $\dot{X}^2 X = \text{const}$, откуда $X \sim t^{2/3}$, $\alpha = 2/3$.

Но взятые вместе, эти условия противоречат друг другу, так как приводят к различным показателям α . Возникает парадоксальное положение, при котором не могут быть одновременно выполненными законы сохранения импульса и энергии, лежащие в основе уравнений газовой динамики. Создается впечатление, что задача не имеет автомодельного решения.

Разрешение этого противоречия, однако, заключается в ином. Дело в том, что автомодельное решение, которое существует и которое будет найдено ниже, в действительности принадлежит ко второму типу. Показатель автомодельности α находится не из законов сохранения или соображений размерности, а путем решения уравнений для функций представителей, из условия прохождения истинного решения через особую точку, так же как и в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах.

Для того чтобы сразу же разрешить описанный парадокс, отметим, что при значении показателя адиабаты $\gamma = 7/5$, показатель автомодельности, как показывает решение, равен $\alpha = 3/5$ ¹⁾. Он заключен между значениями α , диктуемыми условиями сохранения импульса и энергии $1/2 < 3/5 < 2/3$. Ниже будет показано, что при любом значении показателя адиабаты $1 < \gamma < \infty$ показатель автомодельности α заключен в указанных пределах: $1/2 < \alpha < 2/3$.

Показателю автомодельности $\alpha = 3/5$ соответствует размерность параметра A в законе $X = At^\alpha$, равная $[A] = \text{см} \cdot \text{с}^{-3/5}$. Мы уже знаем (см. § 5), что предельное автомодельное движение не полностью «забывает» о начальных условиях, а из обширной информации, заключенной в начальных условиях, «выбирает» и «помнит» одну-единственную константу A , которая как-то характеризует начальный «толчок».

¹⁾ Вообще говоря, при произвольном значении γ показатель α не выражается в виде дроби с целочисленными числителем и знаменателем. Однако, по счастливой случайности, при $\gamma = 7/5$ решение автомодельных уравнений может быть найдено в аналитическом виде, и α при этом равно $3/5$ (см. ниже).

В данном случае, из информации, предоставляемой кривой давления на поршне, $p_{\Pi} = \Pi_1 f(t/\tau)$ (и величиной начальной плотности ϱ_0), предельное решение «выбирает» один параметр A , равный по порядку величины следующей комбинации из характерных масштабов:

$$A \approx \left(\frac{\Pi_1}{\varrho_0} \right)^{1/2} \tau^{1-\alpha} = \left(\frac{\Pi_1}{\varrho_0} \right)^{1/2} \tau^{2/5} \text{ с} \cdot \text{см}^{-3/5}. \quad (12.36)$$

Численный коэффициент в законе пропорциональности определяется формой кривой давления $f(t/\tau)$.

Отсюда видно, по какому закону должно стремиться к бесконечности давление на поршне Π_1 если устремить τ к нулю для того, чтобы в предельном движении было обеспечено получение конечного (не равного 0 или ∞) давления на конечном расстоянии. Для существования предельного решения нужно, чтобы параметр A имел конечное значение), т. е. нужно, чтобы произведение $\Pi_1^{1/2} \tau^{1-\alpha}$, равное $\Pi_1^{1/2} \tau^{2/5}$ в случае $\gamma = 7/5$, оставалось конечным при $\tau \rightarrow 0$. Следовательно, при $\tau \rightarrow 0$ Π_1 должно расти, как $\Pi_1 \sim \tau^{-2(1-\alpha)} \sim \tau^{-4/5}$.

Теперь можно выяснить вопрос о выполнении законов сохранения. Количество движения, которое поршень сообщает газу, или импульс удара по порядку величины равны $I \sim \Pi_1 \tau$, т. е. пропорциональны $I \sim \Pi_1 \tau \sim \tau^{2\alpha-1} \sim \tau^{1/5}$. При $\tau \rightarrow 0$ импульс $I \rightarrow 0$. Следовательно, полное количество движения в предельном, автомодельном движении равно нулю (импульс газа, движущегося с ударной волной вправо, в точности компенсируется импульсом газа, разлетающегося в пустоту влево; см. рис. 12.10). Закон сохранения импульса записывается в форме

$$I = \varrho_0 \dot{X} X \int_{-\infty}^1 g v d\xi \sim t^{1/5} \int_{-\infty}^1 g v d\xi = 0.$$

Отсюда следует только то, что функции-представители должны удовлетворять условию $\int_{-\infty}^1 g v d\xi = 0$. Как видим, нельзя считать величину $\dot{X} X$ постоянной и таким образом определить показатель автомодельности α .

Энергия, которую поршень сообщает газу, по порядку величины равна $E \sim \Pi_1^{3/2} \tau \varrho_0^{-1/2}$. Она пропорциональна $E \sim \Pi_1^{3/2} \tau \sim \tau^{3\alpha-2} \sim \tau^{-1/5}$. При $\tau \rightarrow 0$, $E \rightarrow 0$. Полная энергия газа в автомодельном движении оказывается бесконечной. Закон сохранения энергии,

$$E = \varrho_0 \dot{X}^2 X \int_{-\infty}^1 \left(\frac{g v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \pi \right) d\xi \sim t^{-1/5} \int_{-\infty}^1 \left(\frac{g v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \pi \right) d\xi = \infty,$$

свидетельствует только о расходимости интеграла от безразмерных функций, но ничего не говорит о величине $\dot{X}^2 X$ (из закона сохранения энергии также нельзя определить показатель автомодельности). Бесконечность энергии и расходимость интеграла энергии связаны с тем, что в точно автомодельном движении, которое соответствует пределу $\tau \rightarrow 0$, скорость разлета границы газа в пустоту бесконечна (см. конец § 13). Бесконечна и кинетическая энергия на границе, так как квадрат «скорости» v^2 при $\xi \rightarrow -\infty$ стремится к бесконечности быстрее, чем уменьшается плотность g .

О том, какой физический смысл имеет бесконечность энергии в автомодельном движении, будет сказано ниже. Заметим здесь только, что на самом деле энергия газа, конечно, ограничена и равна работе, совершенной поршнем. Просто автомодельное решение неприменимо к малой массе у границы газа, которая и вносит расходимость в интеграл энергии.

§ 15. Решение уравнений. Общая методика отыскания автомодельного решения задачи о кратковременном ударе в принципе ничем не отличается от метода решения задач о сходящейся ударной волне или о распространении ударной волны по газу, плотность которого уменьшается с расстоянием по степенному закону (см. разделы 2 и 3 этой главы). Как и раньше, ищем решение уравнений газовой динамики (12.1) в автомодельной форме (12.33) и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для представителей π, v, g .

Эти уравнения совпадают с уравнениями (12.31), если положить в них число δ равным нулю (в соответствии с постоянством масштаба плотности):

$$\begin{aligned}(v - \xi)(\ln g)' + v' &= 0, \\ (\alpha - 1)\alpha^{-1}v + (v - \xi)v' + g^{-1}\pi' &= 0, \\ (v - \xi)(\ln \pi g^{-\gamma})' + 2(\alpha - 1)\alpha^{-1} &= 0.\end{aligned}\tag{12.37}$$

Граничные условия на фронте ударной волны при $\xi = 1$ были выписаны в § 11 (формулы (12.32)). На границе газа с пустотой давление и плотность обращаются в нуль, а скорость в $(-\infty)$, т. е. при $\xi = -\infty$ $\pi(-\infty) = 0$, $g(-\infty) = 0$, $v(-\infty) = -\infty$.

После ряда преобразований уравнения сводятся, как обычно, к одному дифференциальному уравнению первого порядка, одной квадратуре и одному алгебраическому соотношению между всеми переменными — интегралу адиабатичности. Показатель автомодельности определяется из условия, чтобы искомое решение дифференциального уравнения прошло через особую точку.

Фактически в работах [13, 14] уравнения записывались и решались не в эйлеровых, а в лагранжевых координатах. В одномерном плоском случае при постоянной начальной плотности лагранжева форма записи приводит к более простым и удобным соотношениям. Разумеется, ничего принципиально нового переход от эйлеровых координат к лагранжевым не вносит. Лагранжева координата определяется как масса газа (на 1 см^2 поверхности), которая отсчитывается от границы с пустотой:

$$m = \int_{-\infty}^x \varrho \, dx, \quad dm = \varrho \, dx.\tag{12.38}$$

Вместо времени в масштабных функциях удобно ввести лагранжеву координату фронта ударной волны $M = \varrho_0 X$, т. е. массу газа (на 1 см^2 поверхности), которая охвачена движением к моменту t . Автомодельной переменной служит отношение

$$\eta = \frac{m}{M},\tag{12.39}$$

которое изменяется в интервале от $\eta = 0$ (на границе газа с пустотой) до $\eta = 1$ (на фронте ударной волны).

Таким образом, решение записывается в форме

$$\begin{aligned}p &= B \varrho_0 M^{-n} f(\eta), \\ u &= \sqrt{B M}^{-n/2} w(\eta), \\ \varrho &= \varrho_0 q(\eta),\end{aligned}\tag{12.40}$$

где B — параметр задачи, связанный с параметром A в формуле $X = At^\alpha$ и заменяющий его в новой записи. f, w, q — новые представители. Новый показатель автомодельности n однозначно связан со старым α . Действительно,

$$M = \varrho_0 X \sim t^\alpha, \quad u \sim M^{-\frac{n}{2}} \sim t^{-\frac{\alpha n}{2}}, \\ u \sim \dot{X} \sim t^{\alpha-1}.$$

Отсюда $-\alpha n/2 = \alpha - 1$ и

$$n = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{1+(n/2)}. \quad (12.41)$$

С математической стороны вопроса, последовательностью преобразований уравнений, их исследованием, конкретными методами решения можно познакомиться в статьях [13, 14]. Остановимся здесь более подробно на результатах для частного случая $\gamma = 7/5$, для которого удастся найти точное аналитическое решение уравнений.

При рассмотрении аналитического решения становятся особенно наглядными все основные черты процесса.

При $\gamma = 7/5$ показатели α и n имеют значения $\alpha = 3/5$, $n = 4/3$. Решение в лагранжевых координатах имеет вид

$$f = \eta, \quad w = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} \left(\eta^{-2/3} - 3 \right), \\ q = 6\eta^{5/3}. \quad (12.42)$$

Распределения давления, плотности и скорости по массе показаны на рис. 12.11. Заметим, что по определению, $f = p/p_1$, $w\sqrt{6/5} = u/u_1$, $q/6 = \varrho/\varrho_1$, где индексом «1» отмечены величины на фронте ударной волны. С помощью определений лагранжевой координаты (12.38) и автомодельной переменной η (12.39) легко перейти в решении (12.42) к эйлеровой переменной $\xi = x/X$. В самом деле, в данный момент t , т. е. при $M = \text{const}$:

$$dm = \varrho dx; \quad \frac{dm}{M} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{dx}{X}, \\ \text{откуда} \quad d\eta = q d\xi.$$

Подставляя в это уравнение функцию $q(\eta)$ по формуле (12.42) и интегрируя с граничным условием $\eta = 1$ при $\xi = 1$ (на фронте ударной волны), получим

$$\eta = (5 - 4\xi)^{-3/2}, \quad \xi = \frac{1}{4}(5 - \eta^{-2/3}). \quad (12.43)$$

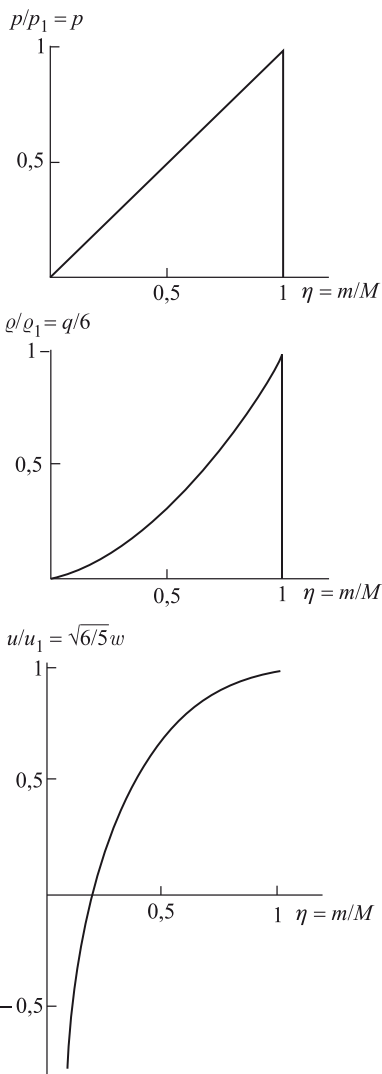


Рис. 12.11. Профили давления, плотности и скорости в задаче о кратковременном ударе (в лагранжевых координатах); $\gamma = 7/5$

В зависимости от эйлеровой переменной функции f, w, g имеют вид

$$f = (5 - 4\xi)^{-3/2}, \quad w = -\sqrt{\frac{5}{6}}(1 - 2\xi), \quad q = 6(5 - 4\xi)^{-5/2}. \quad (12.44)$$

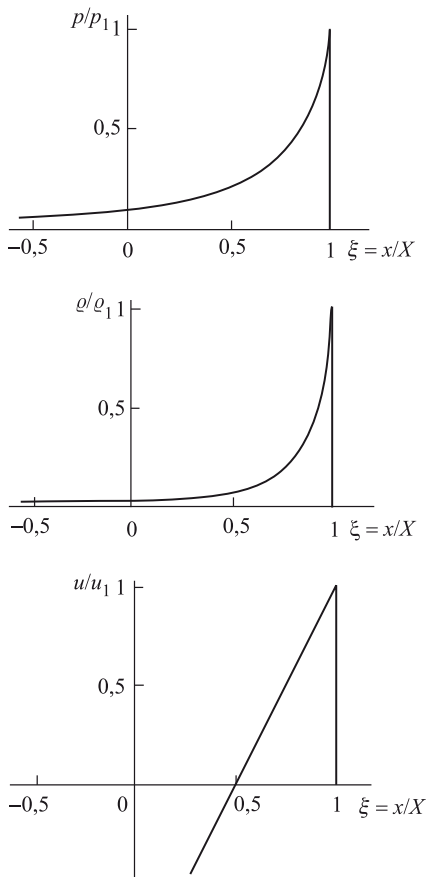


Рис. 12.12. Профили давления, плотности и скорости в задаче о кратковременном ударе (в эйлеровых координатах); $\gamma = 7/5$

которая отделяет область влияния. На рис. 12.13, 12.14, изображающих диаграммы x, t и m, M , проведены линия фронта ударной волны $\xi = 1$, $\eta = 1$, особая линия $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ и характеристики обоих семейств²⁾. Особая линия является

Представители f, w, q связаны с представителями π, v, g , с которыми мы имели дело раньше, соотношениями:

$$\pi = \frac{5}{6}, \quad v = \sqrt{\frac{5}{6}} w, \quad g = q^1). \quad (12.45)$$

Распределения давления, плотности и скорости по эйлеровой координате показаны на рис. 12.12. Интересно, что давление линейным образом распределено по массе, а скорость — в пространстве. Скорость обращается в нуль и меняет направление в точке $\xi = 1/2$. Масса, заключенная между начальным положением границы газа $x = 0$ и фронтом волны, в каждый момент времени составляет 90% от всей массы, вовлеченной в движение. 10% массы в результате ударного сжатия и последующего расширения оказываются выброшенными левее начальной границы газа. 78% массы движется направо, а 22% — налево.

Асимптотическое поведение решения в области малой плотности при $\xi \rightarrow -\infty$, $\eta \rightarrow 0$ дается выражениями:

$$\begin{aligned} f &\sim (-\xi)^{-3/2}, \quad w \sim \xi, \quad q \sim (-\xi)^{-5/2}; \\ f &= \eta, \quad w \sim \eta^{-2/3}, \quad q \sim \eta^{5/3}. \end{aligned} \quad (12.46)$$

Особой точке, через которую проходит решение дифференциального уравнения задачи, соответствуют значения автомодельных переменных $\eta_0 = 7^{-3/2} = 0,054$, $\xi_0 = -1/2$.

Как и в задаче о схождении ударной волны, ξ_0 -линия на плоскости x, t (η_0 -линия на плоскости m, t или m, M) является характеристикой ($dx/dt = u + c$; $dm/dt = \rho c$),

¹⁾ Предоставляем читателю путем непосредственной подстановки функций π, v, g по формулам (12.45), (12.44) в уравнения (12.37) с $\gamma = 7/5$, $\alpha = 3/5$ проверить, что они действительно удовлетворяют уравнениям (и граничным условиям (12.32)).

²⁾ Заметим, что ось M является $\eta = 0$ -линией, ось t на плоскости x, t $\xi = 0$ -линией. Отрицательная полуось x на плоскости x, t является $\xi = -\infty$ -линией.

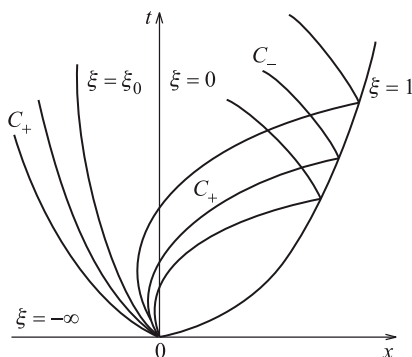


Рис. 12.13. x, t -диаграмма для задачи о кратковременном ударе. $\xi = 1$ — линия фронта ударной волны; $\xi = \xi_0$ — особая ξ_0 -линия. Проведены характеристики C_+ - и C_- -семейств

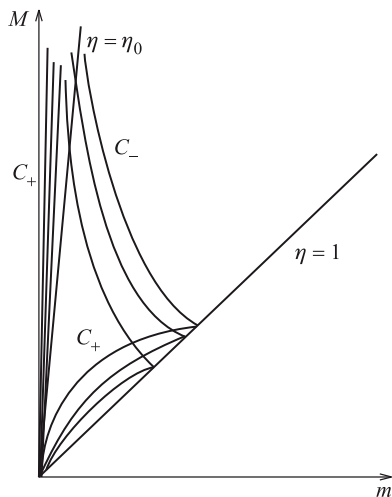


Рис. 12.14. m, M -диаграмма для задачи о кратковременном ударе. $\eta = 1$ — линия фронта ударной волны; $\eta = \eta_0$ — особая η_0 -линия. Проведены характеристики C_+ - и C_- -семейств

C_+ -характеристикой. Все характеристики C_+ -семейства выходят из начала координат, причем те из них, которые идут правее особой линии, догоняют фронт ударной волны, а те, которые идут левее, никогда не догоняют. Таким образом, состояние движения в относительно малой массе, заключенной между границей с пустотой и особой линией, не влияет на распространение фронта ударной волны¹⁾.

В работах [15, 16] путем численного интегрирования уравнения были найдены значения показателей автомодельности и для некоторых других показателей адиабаты γ . Результаты сведены в табл. 12.2.

Профили давления, плотности, скорости при разных значениях показателя адиабаты в качественном отношении подобны профилям в случае $\gamma = 7/5$ (см. рис. 2.11, 2.12).

Из таблицы видно, что ударная волна затухает тем медленнее, чем больше показатель адиабаты. Однако затухание всегда быстрее, чем в случае, когда газ на границе не разлетается в пустоту, а неподвижен, как в задаче о сильном плоском взрыве.

Если в плоскости $x = 0$ происходит мгновенное выделение энергии E эрг/см² и газ в плоскости $x = 0$ всегда неподвижен (либо занимает пространство по обе стороны плоскости, либо ограничен жесткой стенкой), то энергия сохраняется и

Таблица 12.2

γ	n	α
1,1	1,515	0,57
7/5	4/3	3/5
5/3	1,275	0,612
2,8	1,045	0,656

¹⁾ В частности, газ может граничить не с пустотой, а с «поршнем», давление на котором спадает по достаточно быстрому степенному закону. Искажение состояния движения в области между границей и ξ_0 -линией, связанное с присутствием поршня, не влияет на движение правее ξ_0 -линии и на закон распространения ударной волны, если только давление на поршне спадает достаточно быстро. Это показано в работе В. В. Адамского и Н. А. Попова [18]. В этой работе, а также в работе Н. Л. Крашенинниковой [19], рассматривалась автомодельная задача о движении газа под действием давления на поршне, изменяющегося по степенному закону.

ударная волна затухает по закону

$$p_1 \sim X^{-1} \sim t^{-2/3}; \quad n = 1, \quad \alpha = 2/3.$$

В следующем параграфе будет показано, как ограничение $n > 1$, $\alpha < 2/3$ следует из закона сохранения энергии при произвольном значении γ . Там же будет видно, что закон сохранения импульса накладывает ограничение на показатели с другой стороны: $n < 2$, $\alpha > 1/2$.

§ 16. Ограничение показателя автомодельности законами сохранения импульса и энергии. Характер движения, которое возникает при кратковременном ударе, таков, что какая-то доля газа увлекается ударной волной вправо, а остальной газ разлетается влево в пустоту.

Существует точка, которая разграничивает указанные доли газа; назовем координату этой точки x^* . В точке x^* массовая скорость газа меняет направление, т. е. равна нулю, $u^* = u(x^*) = 0$. Сама граница x^* распространяется в пространстве и по массе направо. В автомодельном решении точке обращения знака скорости соответствует некоторое определенное значение автомодельной переменной: $\xi = \xi^*$; $x^* = \xi^* X$.

Рассмотрим объем, заключенный между поверхностью фронта ударной волны $x = X$ и поверхностью «раздела» $x = x^*$. В этом объеме заключена масса (на 1 см² поверхности):

$$M^* = \int_{x^*}^X \rho dx = \rho_0 X \int_{\xi^*}^1 g d\xi = \text{const} \cdot \rho_0 X.$$

Она составляет вполне определенную долю от полной массы, охваченной движением $M = \rho_0 X$ (при $\gamma = 7/5$ $M^*/M = 0,78$). Остальная масса $M - M^*$ разлетается влево. Масса M^* , так же как и полная масса M , растет с течением времени пропорционально $M^* \sim X \sim t^\alpha$.

Граница x^* распространяется по массе вправо, т. е. газ вытекает через поверхность x^* влево. Запишем выражения для импульса и энергии газа, который движется с ударной волной вправо:

$$I^* = \int_{x^*}^X \rho u dx = \rho_0 \dot{X} X \int_{\xi^*}^1 g v d\xi = \text{const} \cdot t^{2\alpha-1}, \quad (12.47)$$

$$E^* = \int_{x^*}^X \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} \right) dx = \rho_0 \dot{X}^2 X \int_{\xi^*}^1 \left(\frac{g v^2}{2} + \frac{\pi}{\gamma-1} \right) d\xi = \text{const} \cdot t^{3\alpha-2}. \quad (12.48)$$

Справа, через поверхность фронта ударной волны, в рассматриваемый объем $x^* < x < X$ втекает невозмущенный газ с нулевым давлением и температурой. Он не вносит в объем ни импульса, ни энергии. Слева через поверхность x^* газ покидает объем с нулевой скоростью, но конечным давлением p^* (газ покидает объем не за счет собственного движения, а за счет распространения поверхности, которая ограничивает объем). Импульс через поверхность x^* не вытекает. Изменение импульса в объеме равно давлению, приложенному к его границе:

$$\frac{dI^*}{dt} = p^* > 0. \quad (12.49)$$

Импульс в объеме растет с течением времени. Из формулы (12.47) следует, что $2\alpha - 1 > 0$, а $\alpha > 1/2$ и по формуле (12.41) $n < 2$.

Изменение энергии в объеме определяется только вытеканием внутренней энергии через левую поверхность x^* . Кинетическая энергия не вытекает, так как скорость газа u^* и кинетическая энергия на границе x^* равны нулю. Работа сил давления на поверхности x^* p^*u^*dt также равна нулю. Следовательно,

$$\frac{dE^*}{dt} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{p^*}{\varrho^*} \frac{d\dot{x}^*}{dt} = -\frac{1}{\gamma-1} p^* \xi^* \dot{X} < 0. \quad (12.50)$$

Энергия в объеме уменьшается с течением времени, вытекает из него влево вместе с массой газа, который меняет направление скорости и начинает разлетаться влево, в пустоту. Из формулы (12.48) следует, что $3\alpha - 2 < 0$, $\alpha < 2/3$ и по формуле (12.41) $n > 1$. Итак, мы приходим к следующим ограничениям показателей автомодельности:

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}, \quad 2 > n > 1. \quad (12.51)$$

Крайние значения $n = 1$, $\alpha = 2/3$ соответствуют неизменности энергии $E^* = \text{const}$, а крайние значения $n = 2$, $\alpha = 1/2$ — неизменности импульса $I^* = \text{const}$.

§ 17. Выход неавтомодельного движения на предельный режим и «бесконечность» энергии в автомодельном решении. Автомодельное решение, строго говоря, отвечает идеализированным начальным условиям, в которых длительность удара τ бесконечно мала, а давление на поршне «в течение удара» Π_1 бесконечно велико. При этом предельный переход $\tau \rightarrow 0$, $\Pi_1 \rightarrow \infty$ совершается таким образом, что произведение $\Pi_1^{1/2} \tau^{1-\alpha}$, которому пропорционален параметр A (см. формулу (12.36)), остается конечным. В соответствии с предельными значениями $\tau \rightarrow 0$, $\Pi_1 \rightarrow \infty$ поршень сообщает газу бесконечную энергию:

$$E \approx \varrho_0^{-1/2} \Pi_1^{3/2} \tau \rightarrow \tau^{-(2-3\alpha)} \rightarrow \infty, \quad \alpha < \frac{2}{3}, \quad (12.52)$$

и нулевой импульс

$$I \approx \Pi_1 \tau \sim \tau^{2\alpha-1} \rightarrow 0, \quad \alpha > \frac{1}{2}. \quad (12.53)$$

Сопоставим энергию E^* и импульс I^* той доли газа, который движется вправо, в сторону распространения ударной волны (см. формулы (12.47), (12.48)) с энергией E и импульсом I всего газа в целом. Имеем

$$\frac{E^*}{E} \sim \left(\frac{\tau}{t}\right)^{2-3\alpha}, \quad \frac{I^*}{I} \sim \left(\frac{t}{\tau}\right)^{2\alpha-1}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}. \quad (12.54)$$

Энергия E^* газа, движущегося с ударной волной вправо, успевает уменьшиться к данному моменту t в тем большее число раз по сравнению с начальной энергией E , чем короче был удар. Неудивительно, что в пределе исчезающе малой длительности удара, $\tau \rightarrow 0$, нужна бесконечная работа поршня (бесконечная энергия газа E), чтобы, сократившись в бесконечное число раз, энергия в определенной доле массы осталась конечной. Вся эта бесконечная энергия сосредоточена теперь в той доле массы, которая разлетается в пустоту, точнее, на самом краю газа, который обладает бесконечной скоростью разлета и бесконечной кинетической энергией.

Односторонний импульс I^* в данный момент времени тем больше импульса поршня I , чем короче был удар. В пределе $\tau \rightarrow 0$ односторонние импульсы частей газа, которые движутся вправо и влево, компенсируют друг друга с точностью до исчезающе малой величины I .

По существу, идеализированное предельное решение отвечает не просто нулевой длительности удара τ , а бесконечно большому отношению t/τ : $t/\tau \rightarrow \infty$ и $E^*/E \rightarrow 0$, $I^*/I \rightarrow \infty$.

Выше, при истолковании этого условия, мы рассматривали конечные времена t , но исчезающе малые времена удара τ , в соответствии с чем работа поршня E была бесконечной, а импульс I — нулевым.

Ближе к реальности иное толкование предельного условия, когда не длительность удара устремляется к нулю, а при фактически конечной длительности удара и конечной энергии E рассматриваются времена t , большие по сравнению с τ ($t/\tau \rightarrow \infty$ не за счет $\tau \rightarrow 0$, а за счет $t \rightarrow \infty$).

При рассмотрении предельного режима с такой точки зрения возникает вопрос, каким же образом происходит асимптотическое превращение истинного, неавтомодельного в силу конечности τ , движения в предельный режим? Как согласовать при этом бесконечность энергии предельного движения с фактически конечной работой поршня?

Дело в том, что приближение истинного решения к автомодельному с течением времени происходит неравномерно. С ростом времени t и массы газа, охваченного движением, $M = \rho_0 X$, давление и все другие величины приближаются к значениям, отвечающим автомодельному решению. Однако такое приближение происходит не везде.

В некоторой массе m_0 вблизи границы, которая во время удара подверглась непосредственному воздействию поршня, состояние никогда не приближается к тому, которое диктуется автомодельным решением. По порядку величины эта масса равна массе газа, по которой пробегает ударная волна в течение самого удара: $m_0 \sim \sim \rho_0 U_1 \tau \sim \sqrt{\Pi_1 \rho_0} \tau$.

Скорость разлета в пустоту этой массы всегда остается конечной и равной по порядку величины U_1 ($U_1 \sim \sqrt{\Pi_1/\rho_0}$), тогда как в автомодельном решении скорость разлета границы газа бесконечна (при $\tau \rightarrow 0$, $\Pi_1 \rightarrow \infty$ и $U_1 \rightarrow \infty$). Конечна и энтропия массы m_0 , равная, в силу адиабатичности движения, начальной энтропии. Действительно, $S = c_V \ln p \rho^{-\gamma} + \text{const}$. Величина $p \rho^{-\gamma}$ в массе m_0 по порядку величины равна $\Pi_1 \rho_0^{-\gamma}$, т.е. ограничена при конечных τ и Π_1 . В автомодельном решении с $\gamma = 7/5$ по формулам (12.42) имеем

$$p \rho^{-\gamma} \sim f q^{-\gamma} \sim \eta^{-4/3} \sim m^{-4/3} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad m \rightarrow 0.$$

Таким образом, масса m_0 у границы всегда несет отпечаток начальных условий и состояние ее не описывается автомодельным решением даже в пределе $t \rightarrow \infty$.

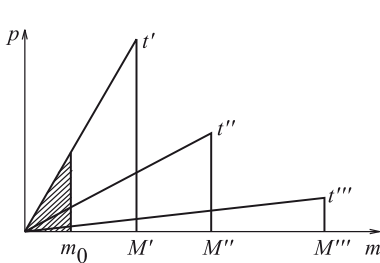


Рис. 12.15

Это положение вовсе не противоречит общей тенденции к превращению истинного решения в автомодельное в пределе $t \rightarrow \infty$. Масса m_0 с течением времени составляет все меньшую и меньшую долю от всей массы газа, охваченного движением (рис. 12.15). В пределе $t \rightarrow \infty$ эту малую массу можно не учитывать ни в дифференциальных уравнениях, ни в сходящемся интеграле импульса.

Однако при вычислении интеграла энергии замена в малой массе m_0 истинного решения автомодельным приводит к существенному изменению интеграла, делает его расходящимся. В автомодельном решении скорость и кинетическая энергия газа при приближении к границе $m \rightarrow 0$ стремятся к бесконеч-

ности, тогда как на самом деле при конечном давлении на поршне Π_1 и отличной от нуля длительности τ скорость и кинетическая энергия газа вблизи границы конечны.

Чтобы получить конечную энергию газа, отвечающую фактически конечной работе поршня, нужно при вычислении энергии с помощью автомодельного решения остановить интегрирование в той области, где автомодельное решение неприменимо.

Будем вычислять энергию, пользуясь лагранжевыми координатами. Тогда при интегрировании удельной энергии по массе газа, охваченного движением, в качестве нижнего предела следует взять массовую координату, по порядку величины равную массе m_0 , которая не описывается автомодельным решением,

$$E = \int_{m_0}^M \left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho} \right) dm = \varrho_0 \dot{X}^2 X \int_{m_0/M}^1 \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{\pi}{g} \right) d\eta.$$

Проведем вычисления для случая $\gamma = 7/5$.

Основной вклад в интеграл дает область вблизи нижнего предела, где скорость газа и кинетическая энергия очень велики (в пределе $m_0/M \rightarrow 0$, $v \rightarrow -\infty$). Поэтому для вычисления интеграла воспользуемся асимптотическим выражением для скорости (12.46), (см. также (12.45)).

Получим

$$E \sim \varrho_0 \dot{X}^2 X \int_{m_0/M}^1 \eta^{-4/3} d\eta \sim \varrho_0 \dot{X}^2 X \left(\frac{m_0}{M} \right)^{-1/3}.$$

Выразим в этой формуле переменные величины через X :

$$M = \varrho_0 X; \quad \dot{X} = A^{5/3} X^{-2/3} \quad \left(\text{так как } X = At^{3/5} \right).$$

Имея в виду определения $A \approx (\Pi_1/\varrho_0)^{1/2} \tau^{2/5}$ (формула (12.36)) и $m_0 \approx (\Pi_1 \varrho_0)^{1/2} \tau$, найдем, что

$$E \sim \varrho_0 A^{10/3} X^{-4/3} X m_0^{-1/3} \varrho_0^{1/3} X^{1/3} = \varrho_0^{4/3} A^{10/3} m_0^{-1/3} \approx \Pi_1^{2/3} \varrho_0^{-1/2} \tau.$$

Как видим, энергия всей массы газа, за исключением малой массы m_0 , к которой неприменимо автомодельное решение, постоянна во времени, конечна и по порядку величины равна работе поршня.

Такого же порядка энергия заключена и в относительно малой массе m_0 . Эта масса летит в пустоту со скоростью $-U_1$, обладая кинетической энергией порядка $m_0 U_1^2 \approx \varrho_0 U_1^3 \tau \approx \varrho_0 (\Pi_1/\varrho_0)^{3/2} \tau \approx \Pi_1^{3/2} \varrho_0^{-1/2} \tau \approx E$. В рамках же автомодельного решения в массе m_0 сосредоточена бесконечная энергия, несмотря на то, что масса m_0 с течением времени составляет все меньшую и меньшую долю от всей массы газа, охваченного движением.

Существенно, что область газа, которая не описывается автомодельным решением и которая дает расходимость в интеграле энергии, если проэкстраполировать на нее автомодельное решение, лежит за пределами сферы влияния, левее особой линии и никак не влияет на распространение ударной волны. В самом деле, граница неавтомодельной области описывается уравнением $m \approx m_0$, а особая линия $m = \eta_0 M$ ($m = 0,054 M$ при $\gamma = 7/5$). При $t \rightarrow \infty$ $M \rightarrow \infty$, $m_0 \ll \eta_0 M$.

Чтобы получить представление о том, как неавтомодельное движение выходит на предельный, автомодельный режим, авторами работы [14] был предпринят численный расчет уравнений газовой динамики, $\gamma = 7/5$, при прямоугольном импульсе давления поршня, показанном на рис.12.9. На рис.12.16 приводятся кривые

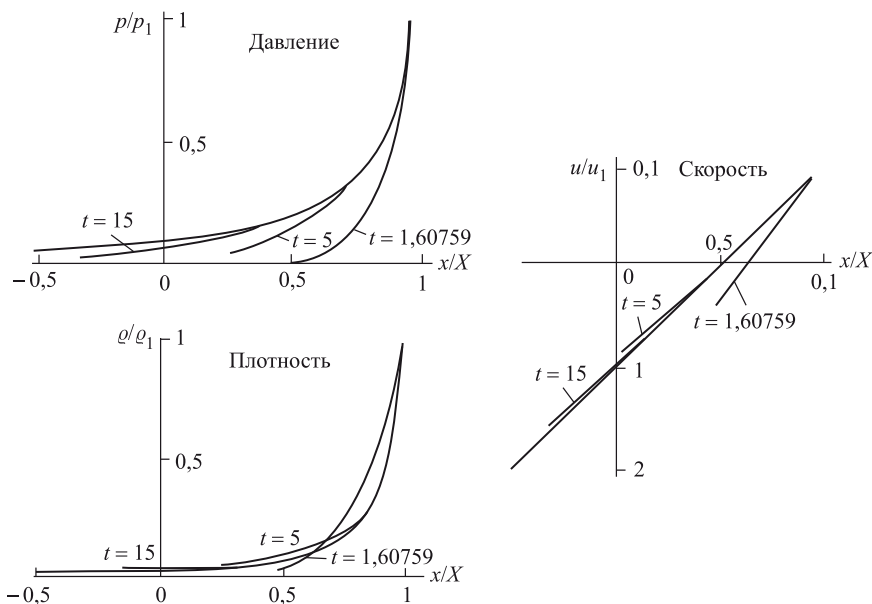


Рис. 12.16. Выход неавтомодельного движения на автомодельный режим. Графики взяты из работы [14]. За единицу времени принята длительность действия поршня τ

зависимости p/p_1 , u/u_1 , ρ/ρ_1 от автомодельной переменной x/X для нескольких моментов времени (p_1 , u_1 , ρ_1 — величины на фронте).

Там же нанесены кривые точного автомодельного решения. Как видно из графиков, уже при $t/\tau = 5$ истинное решение довольно близко к автомодельному, а при $t/\tau = 15$ — почти совпадает с автомодельным. Таким образом, выход движения на автомодельный режим осуществляется весьма быстро. Из решения неавтомодельной задачи можно найти численный коэффициент в выражении (12.36) для параметра A . Он оказывается равным 1,715, так что $A = 1,715 (\Pi_1/\rho_1)^{1/2} \tau^{2/5}$.

Численный коэффициент характеризует форму импульса давления поршня. Можно сказать, что прямоугольному импульсу свойственно число 1,715 (при $\gamma = 7/5$).

§ 18. Сосредоточенный удар по поверхности газа (взрыв на поверхности).

Представим себе «сферический» аналог плоского движения газа при кратковременном ударе по его поверхности. (Попутно остановимся и на «цилиндрическом» случае.) Этот вопрос был рассмотрен в работе одного из авторов [20].

Пусть полупространство $z > 0$ занято идеальным газом с показателем адиабаты γ . Плотность газа ρ_0 постоянна, давление равно нулю. По другую сторону плоскости $z = 0$ при $z < 0$ пространство пустое. В начальный момент $t = 0$ в массе газа m , окружающей точку O на граничной поверхности $z = 0$, быстро выделяется энергия E . Это может произойти в результате взрыва на поверхности или же в результате «сосредоточенного» удара по поверхности быстрым «снарядом», если последний не проникает далеко в глубь вещества, а резко тормозится вблизи поверхности. При этом кинетическая энергия его движения быстро превращается в тепло, т. е. происходит нечто подобное взрыву. От точки O по газу побежит ударная волна. С другой стороны нагретый газ разлетается в пустоту. Начальные скорости движения газа

как в сторону распространения ударной волны, так и в сторону пустоты порядка $u_0 \sim \sqrt{E/m}$ ¹⁾.

Поверхность фронта ударной волны, которая является поверхностью вращения вокруг оси z , образует нечто вроде «чаши», как показано на рис. 12.17. Через круглое «отверстие» чаши (сечение в плоскости $z = 0$) газ, нагретый ударной волной, вытекает из «чаши» в пустоту. Отток газа ослабляет ударную волну по сравнению с тем случаем, когда «отверстие» закрыто неподвижной «крышкой». Этот случай соответствовал бы взрыву в неограниченной среде.

Быстрее всего ударная волна движется вниз, медленнее всего — вдоль поверхности $z = 0$, где она сильно ослабляется за счет расширения газа в пустоту. Поэтому поверхность фронта вытянута вниз по сравнению с полусферой. Вблизи фронта газ движется в сторону распространения волны. Где-то внутри «чаши» проходит поверхность, на которой вертикальная составляющая скорости меняет направление. Выше этой поверхности, схематически показанной на рис. 12.17 пунктиром, газ движется в сторону пустоты (направления скорости указаны стрелками). По мере удаления от плоскости $z = 0$ в ранее пустом пространстве $z < 0$ скорость разлета возрастает, что схематически показано на рисунке стрелками возрастающей длины²⁾.

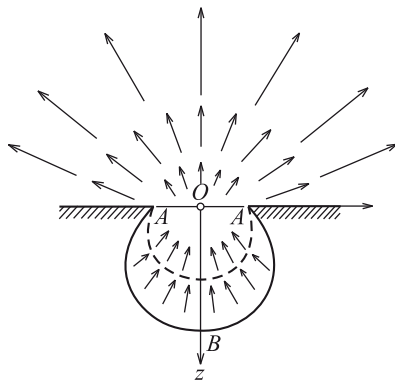


Рис. 12.17. Поле скоростей при сосредоточенном ударе

Представляется довольно очевидным, что в пределе, когда ударная волна захватывает массу $M \gg m$, движение автомодельно. Поверхность фронта расширяется при этом, оставаясь подобной самой себе. Координата какой-нибудь точки фронта, скажем, точки B , растет со временем по закону $z_1 \sim t^\alpha$. Давление на фронте (например, в той же точке B) уменьшается с увеличением массы M по закону $p_1 \sim M^{-n}$, причем константы n и α связаны между собой простым соотношением $n = 2(1 - \alpha)/3\alpha$ ³⁾.

При сосредоточенном ударе показатель n , так же как и в плоском случае, ограничен неравенством:

$$1 < n < 2. \quad (12.55)$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим стадию, на которой $M \gg m$ и $p \sim M^{-n}$, и составим приближенные выражения для энергии и вертикальной z -составляющей импульса газа, содержащегося в «чаше». С учетом размерных

¹⁾ Если причиной движения послужил удар «снаряда», то m — порядка массы «снаряда», E — порядка его кинетической энергии, u_0 — порядка скорости удара.

²⁾ По-видимому, вблизи плоской границы невозмущенной среды газ, вытекающий из «отверстия», движется вдоль плоскости $z = 0$, и давление у самой плоскости равно нулю. Возможно, что при некоторых значениях γ происходит отрыв, так что около плоскости $z = 0$ вне «отверстия» образуется пустая коническая щель. Быть может, при некоторых γ давление на плоскости $z = 0$ вне отверстия — конечно, и вблизи точки A возникает тройная точка. Фронт ударной волны вдоль плоскости $z = 0$ простирается тогда до бесконечности.

³⁾ $M \sim z_1^3 \sim t_1^{3\alpha}$. Скорость газа за фронтом пропорциональна $u \sim dz_1/dt \sim t^{\alpha-1} \sim \sqrt{p} \sim M^{-n/2} \sim t^{-3\alpha n/2}$. Отсюда: $\alpha - 1 = -3\alpha n/2$, или $n = 2(1 - \alpha)/3\alpha$.

параметров в коэффициенте пропорциональности между p и M , но без учета численного коэффициента среднее по объему «чаши» давление можно записать в виде

$$p \sim \frac{E g_0}{m} \left(\frac{m}{M} \right)^n \sim p_0 \left(\frac{m}{M} \right)^n. \quad (12.56)$$

Здесь $p_0 \sim E g_0 / m$ — начальное давление в момент удара («взрыва»). Средняя скорость газа в «чаше» по порядку величины равна

$$u \sim \left(\frac{p}{\rho_0} \right)^{1/2} \sim u_0 \left(\frac{m}{M} \right)^{n/2} \sim \left[\frac{E}{m} \left(\frac{m}{M} \right)^n \right]^{1/2}. \quad (12.57)$$

Энергия в «чаше» порядка

$$E_1 \sim M u^2 \sim \frac{M p}{\rho_0} \sim E \left(\frac{m}{M} \right)^{n-1} \sim E_{10} \left(\frac{m}{M} \right)^{n-1}, \quad (12.58)$$

где E_{10} — начальная энергия в «чаше», которая, очевидно, порядка полной энергии E . Импульс в «чаше» порядка

$$I_1 \sim M u \sim \left[E m \left(\frac{m}{M} \right)^{n-2} \right]^{1/2} \sim I_{10} \left(\frac{m}{M} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad (12.59)$$

где $I_{10} \sim (E m)^{1/2}$ — начальный импульс ¹⁾.

Энергия вытекает из «чаши» через «отверстие», так как скорость газа в сечении «отверстия» направлена в сторону пустоты. Следовательно, энергия E_1 , содержащаяся в «чаше», уменьшается с течением времени (с ростом массы M), и по формуле (12.58) $n > 1$.

Импульс газа во всей «чаше» сравним с импульсом той ее части, которая заключена между поверхностью фронта ударной волны и пунктирной поверхностью, где вертикальная составляющая скорости меняет знак, т.е. равна нулю. Через эту поверхность импульс в вертикальном направлении не вытекает, а давление на ней положительно. Следовательно, импульс растет с течением времени, и по формуле (12.59) $n < 2$. Вертикальный импульс газа в «чаше» уравнивается также растущим, но противоположно направленным импульсом газа, вытекшего из «чаши» и разлетающегося в пустоту. Таким образом, неравенство (12.55) можно считать доказанным ²⁾. Значение $n = 1$ соответствует сохранению энергии в «чаше», т.е. взрыву в неограниченной среде. Значение $n = 2$ соответствовало бы сохранению импульса.

То же неравенство (12.55) справедливо и в «цилиндрическом» случае или при «нитевом» ударе. Картина движения при «нитевом» ударе (взрыве) в качественном отношении подобна картине, изображенной на рис. 12.17. Только теперь взрыв происходит не в точке O , а вдоль прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к плоскости рисунка. Все движение симметрично относительно плоскости, проходящей через эту прямую и ось z . Поверхность фронта образует не «чашу», а бесконечно длинную «канаву», поперечное сечение которой и изображает рисунок. M — это масса, приходящаяся на единицу длины «канавы».

¹⁾ В случае удара «снаряда», величина I_{10} порядка импульса ударяющего тела.

²⁾ Заметим, что предельный переход к автомодельному режиму соответствует $m \rightarrow 0$. Для того, чтобы давление было конечным, надо, чтобы $E m^{n-1} \approx \text{const}$, т.е. чтобы энергия была бесконечной, $E \sim m^{-(n-1)} \rightarrow \infty$, а начальный импульс — нулевым:

$$I_{10} \sim (E m)^{1/2} \sim m^{2-n} \rightarrow 0.$$

Можно установить еще более узкий интервал для показателя в законе затухания ударной волны. Физически ясно, что при одном и том же показателе адиабаты в случае сосредоточенного удара волна ослабляется с ростом массы медленнее, чем в плоском случае.

В самом деле, ослабляющее действие оттока газа от фронта выражено тем меньше, чем относительно меньше площадь, через которую газ вытекает в пустоту. В «сферическом» случае площадь «отверстия» гораздо меньше площади поверхности фронта ударной волны (см. рис. 12.17). В плоском же случае обе площади равны. «Цилиндрический» случай является в этом отношении промежуточным.

Если обозначить через n_1 , n_2 , n_3 показатели в законе ослабления ударной волны, $p \sim M^{n_i}$, для плоского, нитевого и сосредоточенного ударов, соответственно, то в силу сказанного, при одном и том же показателе адиабаты

$$1 < n_3 < n_2 < n_1 < 2. \quad (12.60)$$

Например, при $\gamma = 7/5$, $n_1 = 4/3$ и $1 < n_3 < 4/3$. При $\gamma = 5/3$, $n_1 = 1,275$ и $1 < n_3 < 1,275$.

Таким образом, сосредоточенный удар ближе к точечному взрыву в неограниченной среде, чем плоский удар к плоскому взрыву.

§ 19. Результаты упрощенного рассмотрения автомодельного движения при сосредоточенном и нитевом ударах. Для того чтобы определить показатель $n(\gamma)$ в законе затухания ударной волны, $p \sim M^{-n}$, необходимо, как и в плоском случае, решить уравнения автомодельного движения. Однако «сферическая» и «цилиндрическая» задачи несоизмеримо сложнее плоской, ибо они — двумерны и автомодельное движение описывается не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а уравнениями в частных производных. Положение существенно осложняется еще и тем, что поверхность фронта ударной волны, на которой задаются граничные условия, заранее неизвестна и сама должна быть найдена в ходе решения. По этой причине даже численное интегрирование уравнений автомодельного движения должно быть связано со значительными трудностями.

Некоторое представление о численных значениях показателя и общих характеристиках движения дает упрощенное рассмотрение задачи, проведенное в работе [20]. Было построено точное частное решение дифференциальных уравнений автомодельного движения, которое является обобщением точного решения одномерной задачи (см. § 15) и в некоторых отношениях правильно передает черты двумерного процесса. В решение входит ряд неизвестных постоянных. Разумеется, с помощью такого, довольно произвольного, частного решения уравнений нельзя удовлетворить граничным условиям на фронте ударной волны. Поэтому вместо условий на фронте решение было подчинено общим соотношениям, выражающим в интегральной форме балансы массы, энергии и составляющих импульса газа, содержащегося в «чаше» (в «канаве»). При этом форма поверхности фронта была выбрана самой простой. «Чаша» была заменена круговым цилиндром с «дном», а «канавка» закругленного сечения — «канавой» прямоугольного сечения (рис. 12.18).

Подобно тому как в одномерном случае точное аналитическое решение существует только при одном (избранном) значении показателя адиабаты γ (равном $7/5$), так и приближенное решение, которое является обобщением точного одномерного,

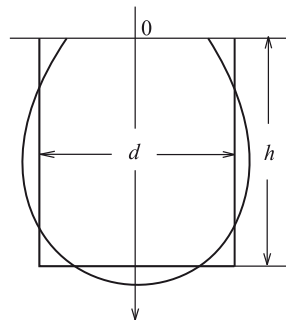


Рис. 12.18. Замена чаши эквивалентным цилиндром

годится только для одного-единственного значения γ . Это значение вместе с соответствующим значением n находится в процессе решения.

Оказалось, что в случае сосредоточенного удара $n = 1,07$ при $\gamma = 1,205$; отношение высоты «цилиндра» h к диаметру d равно 1,05; плотность газа в сечении «отверстия» составляет $\rho_{\text{отв}} = 0,0187 \rho_0$ и из «отверстия» вытекает только 1,6% всей массы, охваченной ударной волной. Плотность газа на «дне» цилиндра равна $\rho_{\text{дно}} = 10,3 \rho_0$, что очень близко к фактической плотности на фронте ударной волны $\left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right] \rho_0 = 10,7 \rho_0$. Вертикальная составляющая скорости меняет направление на глубине $0,846h$ от «отверстия» и на расстоянии $0,154h$ от «дна».

В случае нитевого удара, $n = 1,14$ при $\gamma = 1,266$, $h/d = 1,21$ (h — высота «канавы», d — ширина), из «канавы» вытекает 2% всей массы.

Мы видим, что показатели n оказались очень близкими к единице, т.е. отток газа от фронта ударной волны вследствие расширения его в пустоту лишь немного ослабляет ударную волну по сравнению со взрывом в неограниченной среде. Это, очевидно, связано с тем, что за пределы «чаши» («канавы») оказывается выброшенной очень малая доля всей массы. Форма «чаши», по-видимому, существенно отличается от полусферической, которая соответствовала бы взрыву в неограниченной среде. Высота «чаши» — цилиндра равна примерно диаметру, тогда как при замене полусферы эквивалентным цилиндром высота была бы примерно вдвое меньше диаметра. То же относится и к нитевому удару.

К счастью, показатели адиабаты $\gamma = 1,205$ и $\gamma = 1,266$, для которых годятся приближенные решения, близки к реальным значениям эффективных показателей адиабаты газов при высоких температурах, когда существенны процессы диссоциации и ионизации. Заметим, что в плоском случае показатель n монотонно уменьшается с ростом γ . Если таково же положение и в двумерных случаях, что представляется весьма вероятным, то для сосредоточенного удара $1 < n < 1,07$ при $\gamma > 1,205$, а для нитевого $1 < n < 1,14$ при $\gamma > 1,266$. В реальных процессах вряд ли могут представить интерес значения γ , существенно меньшие, чем 1,205 или 1,266. Отсюда следует, что в большинстве реальных процессов, моделью которых может послужить задача о сосредоточенном (или нитевом) ударе, ударная волна затухает лишь немного быстрее, чем при взрыве в неограниченной среде.

§ 20. Удар при падении очень быстрого метеорита на поверхность планеты. Характерным примером явления «сосредоточенного удара» может служить процесс, протекающий при падении на поверхность планеты метеорита со скоростью порядка нескольких десятков или ста километров в секунду (и выше). При этом имеет смысл рассматривать либо планеты, лишенные атмосферы, такие как Луна, либо же достаточно крупные метеориты. Маленькие метеориты испаряются, «сгорают» по пути вследствие трения об атмосферу, так и не достигая поверхности планеты.

При ударе метеорита о грунт происходит резкое торможение и начальная кинетическая энергия $E = mv^2/2$ (m — масса метеорита, v — скорость падения) в значительной степени переходит во внутреннюю, в тепло. Глубина проникновения тела метеорита в грунт обычно порядка размеров самого тела, так что в начальный момент энерговыделение происходит в массе порядка m . От места энерговыделения по грунту распространяется ударная волна¹⁾.

¹⁾ Мы не рассматриваем ударов с малыми скоростями, когда существенную роль играют сам процесс торможения, распространение ударной волны по телу метеорита, короче, когда энерговыделение нельзя считать мгновенным.

Будем интересоваться ударами только с очень большими скоростями, когда удельная энергия $v^2/2$ во много раз превышает энергию связи атомов и молекул веществ метеорита и грунта (теплоту испарения).

В этом случае существует стадия, когда ударная волна охватывает массу грунта M , значительно превышающую начальную массу m , но вещество в ударной волне можно рассматривать как плотный газ. Грунт и тело метеорита при расширении полностью испаряются и разлетаются с поверхности планеты в газообразном состоянии. В стадии не слишком сильного расширения давление газа гораздо больше атмосферного и существованием атмосферы (если таковая имеется) можно пренебречь. Пары расширяются так же, как в пустоту. Как видим, мы имеем дело с типичной картиной сосредоточенного удара по поверхности «газа», описанной в предыдущем параграфе.

Оценим, какие нужны для этого скорости падения. Теплота испарения железа (метеориты бывают железные и каменные) равна $94 \text{ ккал/моль} = 7 \cdot 10^{10} \text{ эрг/г}$. Теплота испарения каменных пород грунта порядка $83 \text{ ккал/моль} = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ эрг/г}$. Это значение относится к кремнезему SiO_2 , из которого в основном состоят различные грунты и каменные породы. Если учитывать еще и диссоциацию молекул SiO_2 при испарении, то энергия связи составит $203 \text{ ккал/моль} = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ эрг/г}$.

Положим для оценки, что для полного испарения нужно, чтобы удельная энергия в 10 раз превышала теплоту испарения, для которой примем ориентировочное значение $U \approx 10^{11} \text{ эрг/г}$. Получим для минимальной скорости, при которой испаряется масса порядка массы метеорита, значение $v_{\min} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10^{11}} = 14 \text{ км/с}$. Точно так же можно сказать, что при распространении ударной волны полностью испаряются при последующем расширении те слои грунта, до которых ударная волна дошла с удельной внутренней энергией ε_1 во фронте порядка $\varepsilon_k \sim 10U \sim 10^{12} \text{ эрг/г}$.

Десятикратное превышение ε_1 над U взято на основе оценок § 22 гл. XI, где было показано, что полное испарение при разгрузке твердого вещества, сжатого сильной ударной волной, получается, если энергия во фронте волны по крайней мере раз в пять больше энергии связи кристаллической решетки.

Чтобы оценить полную массу грунта, которая испаряется при ударе метеорита, нужно воспользоваться законом затухания ударной волны. Такого типа оценки впервые делал К. П. Станюкович [21], который изучал явление «взрыва» при ударе метеорита о поверхность планеты как причину образования кратеров на Луне. К. П. Станюкович не принимал во внимание эффекта разлета паров в пустоту, полагая, что ударная волна распространяется точно так же, как и при сильном взрыве в неограниченной среде, т. е. по закону $p_1 \sim M^{-1}$, $\varepsilon_1 \sim E/M$.

Соображения, изложенные в предыдущем параграфе, обосновывают это допущение. Испаренная масса M_k по порядку величины определяется соотношением $\varepsilon_k \sim \frac{E}{M_k}$, откуда $M_k \sim \frac{E}{\varepsilon_k} \sim m \left(\frac{v^2}{\varepsilon_k} \right) = m \left(\frac{v}{v_k} \right)^2$, где $v_k = \sqrt{\varepsilon_k} \sim 10 \text{ км/с}$. Например, при скорости метеорита $v \sim 100 \text{ км/с}$ испаряется масса грунта, в 100 раз превышающая массу метеорита.

Когда энергия в ударной волне становится меньше, чем $\sim 10^{12} \text{ эрг/г}$, слои грунта, захваченные волной, уже не испаряются при разгрузке. Однако энергии в волне еще вполне достаточно для механического раздробления вещества. Предельная энергия, необходимая для разрушения, гораздо меньше, чем теплота испарения. Поэтому масса раздробленного вещества во много раз превышает массу испаренного. Раздробленное вещество выбрасывается вверх в виде твердых частиц, и таким путем возникает воронка. Вопросы о размерах воронки при ударе метеорита, о роли силы тяжести, которая препятствует далекому разбрасыванию вещества и др., рассматривались К. П. Станюковичем [21].

Эффекты, подобные «взрыву» при ударах быстрых метеоритов, возникают и при движении в разреженной атмосфере тела с очень большой скоростью. Удары молекул воздуха о поверхность тела уподобляются ударам метеоритов о поверхность планет. При каждом ударе происходит «микровзрыв», с поверхности тела выбрасывается некоторое количество испаренного вещества. Тело получает дополнительный импульс отдачи, что приводит к повышению коэффициента сопротивления и увеличению скорости торможения тела в атмосфере. Это явление рассмотрено в работе К. П. Станюковича [22]. Удар быстрого тела по поверхности жидкости в предположении о ее несжимаемости рассматривал М. А. Лаврентьев [23].

§ 21. Сильный взрыв в неограниченной пористой среде. В работе А. С. Компанейца [24] решена задача о сильном точечном взрыве в пластической уплотняющей среде с постоянным уплотнением на фронте ударной волны ¹⁾. Мы рассмотрим здесь упрощенную задачу о распространении ударной волны точечного взрыва в пористой среде при условии, что сплошное вещество несжимаемо (например, в песке с несжимаемыми песчинками). Прочностью песчинок пренебрегаем, т. е. считаем, что для адиабатического сжатия материала до плотности сплошного вещества (для полного «выбирания» пустот) не требуется никакой затраты энергий. Иными словами, ударную волну считаем сильной по отношению к прочности материала, но слабой по отношению к упругости (сжимаемости сплошного вещества). Начальное давление p_0 равно нулю.

Обозначим среднюю плотность невозмущенной среды через ϱ_0 , а плотность сплошного вещества («песчинок») — через ϱ_1 ; $\varrho_0 = \varrho_1(1 - k)$, где k — коэффициент пористости, который может меняться от нуля до единицы.

Пусть в некоторой точке происходит сильный «взрыв»; веществу дан интенсивный первоначальный толчок, например, быстро расширился и остановился сферический «поршень». По веществу пойдет ударная волна, в которой материал будет сжиматься до плотности сплошного вещества с полным заполнением пустот. После этого плотность вещества уже не меняется и остается равной ϱ_1 . Вещество, захватываемое ударной волной, движется вслед за фронтом. Около поверхности фронта образуется сферический слой постоянной плотности ϱ_1 , а за ним пустая полость, как показано на рис. 12.19, а.

Если радиус фронта волны — R , а радиус внутренней поверхности слоя — r_0 , то условие сохранения массы дает:

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho_0 = \frac{4\pi}{3} (R^3 - r_0^3) \varrho_1,$$

или

$$r_0^3 = R^3 \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \right) = R^3 k. \quad (12.61)$$

Распределение скорости в слое следует из уравнения непрерывности для несжимаемой жидкости: $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,

$$u = u_1 \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad r_0 < r < R, \quad (12.62)$$

где u_1 — массовая скорость за фронтом ударной волны (рис. 12.19, б). Она связана со скоростью фронта $D = \frac{dR}{dt}$ очевидным соотношением:

$$u_1 = D \left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \right) = Dk.$$

¹⁾ В работе [25] уплотнение предполагается зависящим от амплитуды волны.

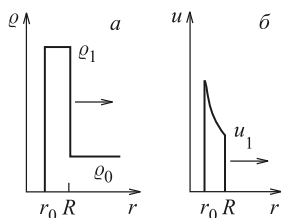


Рис. 12.19. Распределение плотности (а) и скорости (б) по радиусу при взрыве в песке с несжимаемыми песчинками

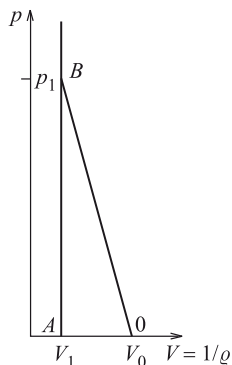


Рис. 12.20. Ударная адиабата песка с несжимаемыми песчинками без учета прочности

Ударная адиабата вещества при сделанных в начале предположениях имеет вид, показанный на рис. 12.20¹⁾. Пусть «давление» в ударной волне равно p_1 (точка B на ударной адиабате). Как известно (см. § 16 гл. I), первоначально покоящееся вещество в сильной ударной волне ($p_1 \gg p_0$) приобретает одинаковые кинетическую и внутреннюю энергии $u_1^2/2$ на 1 г. Численно каждая из этих энергий равна площади треугольника OAB на рис. 12.20. Поскольку сплошные частицы предполагаются несжимаемыми, судьба внутренней энергии, приобретаемой веществом в ударной волне, нас не интересует. Эта энергия превращается в тепло и представляет собой просто потерю механической энергии движения. Таким образом, уменьшение кинетической энергии всей массы M за время dt равно приращению внутренней энергии массы dM , которая захватывается ударной волной за время dt :

$$-d\left(\frac{M\bar{u}^2}{2}\right) = -\beta d\left(\frac{Mu_1^2}{2}\right) = \frac{u_1^2}{2}dM. \quad (12.63)$$

Здесь через $\bar{u}^2 = \beta u_1^2$ обозначен средний квадрат скорости движения массы M . Коэффициент β легко вычислить с помощью уравнений (12.62), (12.61): $\beta = \frac{3}{k + k^{2/3} + k^{1/3}}$. Интегрируя уравнение (12.63), найдем закон затухания ударной волны:

$$u_1^2 = \text{const} \cdot M^{-(1+\beta)/\beta} = \text{const} \cdot M^{-n}.$$

Здесь мы по аналогии с предыдущими разделами обозначили показатель степени у массы в формуле для удельной энергии через n : $n = (1 + \beta)/\beta$. Полная кинетическая энергия движения пропорциональна $E_k = M\bar{u}^2/2 \sim M^{-(n-1)}$; импульс $I \sim Mu_1 \sim M^{1-n/2}$. Поскольку $\beta > 0$, показатель n всегда заключен в пределах $1 < n < 2$ (ср. с результатами § 18). В предельном случае сплошной несжимаемой среды $k \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, $n \rightarrow 1$, энергия сохраняется, импульс растет с течением времени. В предельном случае чрезвычайно пористого вещества (сильно «сжимаемой» среды) $k \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$, $n \rightarrow 2$, сохраняется импульс, а энергия уменьшается.

¹⁾ Об ударном сжатии пористого материала с учетом сжимаемости сплошного вещества см. § 10 гл. XI.

В общем случае $0 < k < 1$ энергия уменьшается (переходит в тепло), импульс растет. Положение, как видим, такое же, как и при ударе по поверхности газа (см. § 18).

Как и там, в предельном случае «точечного» взрыва начальная энергия бесконечна (если $k \neq 0$, $n > 1$ и $E_k \sim M^{-(n-1)} \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow 0$).

Аналогично предыдущему можно рассмотреть и сходящуюся ударную волну в пористом веществе с несжимаемыми крупинками.

5. Распространение ударных волн в неоднородной атмосфере с экспоненциальным распределением плотности

§ 22. Сильный точечный взрыв. В разделе 4 гл. I рассматривалась задача о сильном взрыве в бесконечной однородной среде. Как известно, атмосфера Земли не является однородной, плотность воздуха уменьшается с высотой, причем в каком-то приближении зависимость плотности ϱ_0 от высоты h описывается барометрической формулой $\varrho_0 = \varrho_{00} e^{-h/\Delta}$, где ϱ_{00} — плотность на уровне моря, а Δ — так называемая высота стандартной атмосферы, которая у поверхности Земли равна примерно 8,5 км¹⁾.

Посмотрим, как распространяется ударная волна сильного точечного взрыва в неоднородной атмосфере. При этом, очевидно, нас будет интересовать та стадия, на которой волна уходит от точки взрыва на расстояния, сравнимые с масштабом неоднородности Δ ; только тогда и проявляется влияние неоднородности. Ударную волну предполагаем сильной (давление за фронтом гораздо больше давления перед фронтом).

Газодинамический процесс не является автомодельным, так как имеется масштаб длины Δ и, более того, движение не одномерно, а двумерно. В цилиндрических координатах с вертикальной осью, проходящей через точку взрыва, движение зависит от координаты z и радиуса r . Полное решение газодинамической задачи можно найти только путем численного интегрирования уравнений газодинамики. Однако получить представление о характере распространения ударной волны и форме ее поверхности можно на основе простых соображений, что было сделано А. С. Компанейцем в работе [28].

Предположим, что, как и при взрыве в однородной среде, давление выравнено почти по всему объему, охваченному взрывной волной, а на фронте постоянно вдоль поверхности фронта и пропорционально среднему давлению в объеме, т. е. отношению энергии взрыва ко всему объему Ω :

$$p_1 = (\gamma - 1) \lambda \frac{E}{\Omega}. \quad (12.64)$$

Здесь $\lambda(\gamma)$ — численный коэффициент, который для оценки можно взять, например, из решения задачи о взрыве в однородной среде (см. гл. I). Пусть уравнение поверхности фронта ударной волны в цилиндрических координатах есть $f(z, r, t) = 0$. Дифференцируя это уравнение, получим

$$\frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dr} dr + \frac{df}{dt} dt = 0,$$

¹⁾ В действительности земная атмосфера не является строго экспоненциальной, так как температура воздуха меняется с высотой. Масштаб Δ , определенный как $\Delta = -(d \ln \varrho / dh)^{-1}$, изменяется в интервале от 6 до 15 км на высотах ниже 150 км. Выше 150 км масштаб Δ становится еще большим.

или

$$\frac{\partial f}{\partial z} D_z + \frac{\partial f}{\partial r} D_r = \mathbf{D} \nabla f = -\frac{\partial f}{\partial t},$$

где D_z и D_r — составляющие вектора скорости фронта $\mathbf{D}$. Нормальная составляющая скорости фронта выражается известной формулой

$$D_n = -\frac{\partial f}{\partial t} / |\nabla f|.$$

Но, согласно условию, на фронте сильной ударной волны

$$D_n = \left(\frac{p_1 \gamma + 1}{\varrho_0} \right)^{1/2},$$

где ϱ_0 — плотность перед фронтом в данной точке поверхности.

Из двух последних выражений имеем

$$\left(\frac{p_1 \gamma + 1}{\varrho_0} \right)^{1/2} = -\frac{\partial f}{\partial t} / |\nabla f|.$$

Подставим сюда давление p_1 по формуле (12.64) и выразим объем Ω в виде интеграла $\Omega = \int d\Omega$, с помощью уравнения поверхности фронта, ограничивающего объем Ω .

При этом уравнение $f(z, r, t)$ будем считать разрешенным относительно радиуса $r = r(z, t)$. Атмосферу будем считать строго экспоненциальной. Такая операция приводит к дифференциальному уравнению в частных производных для искомой функции $r = r(z, t)$, которое точно решается в работе [28].

Эволюция поверхности фронта ударной волны видна из рис. 12.21, заимствованного из этой работы, на котором изображены сечения волны вертикальной плоскостью, проходящей через точку взрыва (через ось z). На рис. 12.21 показаны сечения в последовательные моменты времени. Волна, вначале сферическая, постепенно принимает яйцевидную форму.

При движении в разных направлениях ее интенсивность изменяется неодинаково. В направлении вертикально вниз, в сторону наиболее резкого увеличения плотности, ударная волна ослабляется и замедляется быстрее всего. Напротив, при движении вертикально вверх, в сторону наиболее резкого уменьшения плотности, она даже ускоряется и за конечное время τ уходит вверх на бесконечность, как бы «прорывая» атмосферу. При этом поверхность фронта образует нечто вроде «чаши» и в огромной полости, ограниченной этой поверхностью, давление падает до очень малой величины (до нуля, в рамках сделанных приближений). Двигаясь в горизонтальном направлении, волна ослабляется, но медленнее, чем при движении вниз.

Легко понять физическую причину ускорения ударной волны на больших расстояниях при движении вверх [31]. Если R — расстояние верхней точки ударной волны от центра взрыва, то объем полости Ω пропорционален R^3 и давление $p_1 \sim E/R^3$.

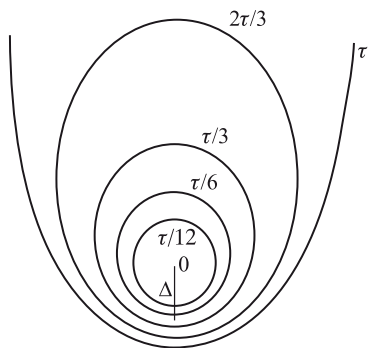


Рис. 12.21. Разрез поверхностей фронта ударной волны при сильном взрыве на большой высоте вертикальной плоскостью, проходящей через точку взрыва. Указаны последовательные моменты времени. На отрезке Δ плотность атмосферы меняется в ϵ раз

Плотность перед фронтом равна $\varrho_0 = \varrho_c \exp(-R/\Delta)$, где ϱ_c — плотность на уровне взрыва, поэтому скорость фронта

$$D \sim \left(\frac{p_1}{\varrho_0}\right)^{1/2} \sim \frac{E^{1/2}}{\varrho_c^{1/2} R^{3/2}} \exp\left(\frac{R}{2\Delta}\right) \quad (12.65)$$

при $R \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, а время ухода волны вверх, на бесконечность,

$$\tau = \int_0^\infty \frac{dR}{D} \sim \frac{\varrho_c^{1/2}}{E^{1/2}} \int_0^\infty R^{3/2} \exp\left(-\frac{R}{2\Delta}\right) dR$$

оказывается конечным¹⁾. Как следует из этого соотношения, время «прорыва» атмосферы $\tau = \nu(\varrho_c \Delta^5/E)^{1/2}$, где ν — численная константа (она определяется в результате полного решения задачи). Нетрудно видеть, что τ — это единственная величина, имеющая размерность времени, которую можно составить из размерных параметров задачи: E , ϱ_c , Δ .

Закон движения ударной волны, форма поверхности фронта и константа ν были несколько уточнены по сравнению с [28] в работе Э. И. Андрианкина, А. М. Когана, А. С. Компанейца и В. П. Крайнева [29], в которой задача рассматривалась в той же общей постановке, но с учетом распределения давления на ударной волне вдоль поверхности фронта. При этом определялось движение каждого участка поверхности фронта. Уточненное значение константы ν оказалось равным $\nu \approx 24$ (для показателя адиабаты $\gamma = 1,2$). К моменту «прорыва» атмосферы ударная волна проходит вниз расстояние около 2Δ , по горизонтали (на уровне точки взрыва) примерно $3,5\Delta$. В соответствии с самой постановкой задачи решение [28, 29] теряет силу вблизи момента прорыва атмосферы, так как при этом давление падает до нуля и дальнейшее распространение ударной волны (при сделанных приближениях) прекращается.

Неоднородность атмосферы скажется лишь при таких взрывах, при которых ударная волна уходит на расстояния, превосходящие масштаб неоднородности Δ , оставаясь еще достаточно сильной. В противном случае ударная волна затухает еще до того, как начнет проявляться неоднородность, и взрыв протекает так же, как в однородной атмосфере. Приближенное условие реализации описанной выше эволюции поверхности фронта ударной волны можно определить так [29]: отношение давления на фронте к давлению воздуха перед фронтом p_1/p_0 при распространении волны (по законам взрыва в однородной атмосфере) на расстояние Δ должно превышать $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, скажем, в 10 раз (см. сноску на с. 84 в § 25 гл. I). Например, на высоте 100 км $p_0 \approx 10^{-6}$ атм = 1 бар и это условие ($p_1/p_0 \approx 100$) выполняется только при взрывах с энергией $E > 10^{20}$ эрг. Взрыв не чрезмерно большой мощности на малой высоте протекает практически как в однородной атмосфере.

§ 23. Автомодельное движение ударной волны в сторону возрастания плотности. Рассмотрим более пристально, как протекает газодинамический процесс в области нижней точки ударной волны сильного взрыва, движущейся вертикально вниз. При взрыве в однородной атмосфере давление в объеме выравнено и всего в два-три раза меньше давления на фронте ударной волны (см. § 25 и 26 гл. I). Это внутреннее давление «поддерживает» ударную волну, способствует тому, что

¹⁾ Заметим, что энергия, сосредоточенная в данном телесном угле, вершина которого лежит в точке взрыва, не остается постоянной, как при сферической симметрии. Энергия имеет тенденцию «перетекать» снизу вверх, что также способствует ускорению ударной волны вверх. (Масса, напротив, перетекает вдоль поверхности фронта из верхних областей ударной волны в нижние.)

волна затухает медленнее, чем в отсутствие внутреннего давления. Роль внутреннего давления выступает особенно отчетливо, если сравнить движение при плоском взрыве с движением при плоском кратковременном ударе (см. предыдущий раздел этой главы). Давление в области за фронтом ударной волны в этом последнем случае уменьшается до нуля и внутреннего, поддерживающего волну давления нет. Поэтому ударная волна затухает скорее, чем при плоском взрыве. Нечто подобное происходит и при взрыве в неоднородной атмосфере. Происходит резкое падение давления в полости из-за быстрого увеличения ее объема, связанного с ускорением волны вверх. Это приводит к тому, что внутреннее давление больше не поддерживает ударную волну, распространяющуюся вниз, а газ из нижних слоев оттекает от фронта вверх, устремляясь в «пустую» полость. Положение в какой-то мере приближается к тому, которое имеет место в задаче о кратковременном ударе. Сближает его с этой задачей также и то обстоятельство, что при достаточно большом удалении ударной волны от точки взрыва кривизна нижнего участка поверхности фронта становится малой и участок вместе с прилегающим к нему слоем газа за фронтом оказывается «плоским». Таким образом, для приближенного описания течения газа в нижней части ударной волны представляется целесообразным рассмотреть идеализированную задачу о распространении плоской ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону повышения плотности. Ее, очевидно, следует поставить так.

Пусть плотность газа распределена в пространстве по экспоненциальному закону:

$$\varrho_0 = \varrho^* \exp\left(\frac{x}{\Delta}\right), \quad \Delta = \text{const} \quad (12.66)$$

(ось x для удобства направим вниз). Это распределение обладает тем свойством, что масса газа, сосредоточенная в столбе единичного сечения, от $x = -\infty$, где $\varrho_0 = 0$, и до $x = X$, равна массе газа в столбе с длиной Δ , если плотность в нем равна $\varrho_0(X)$:

$$M = \int_{-\infty}^X \varrho_0(x) dx = \varrho_0(X) \Delta. \quad (12.67)$$

Пусть в начальный момент $t = 0$, где-то в области очень малой плотности, при $x \approx -\infty$ производится кратковременный плоский удар. По газу в сторону возрастания плотности побежит ударная волна, а нагретый газ будет расширяться в сторону пустоты.

Будем искать предельное движение в стадии, когда ударная волна охватывает массу газа M , которая гораздо больше, чем масса m_0 в области малой плотности, подвергшаяся начальному действию удара. Начальное давление газа будем считать равным нулю. Как видим, постановка задачи вполне аналогична постановке задачи о кратковременном ударе по поверхности газа постоянной плотности, граничащего с пустотой (см. § 13). Задача о кратковременном ударе в случае неоднородной атмосферы была сформулирована и решена в работе одного из авторов [30].

Ясно, что предельное движение ($M \gg m_0$) является автомодельным. Однако эта автомодельность имеет необычный характер. Дело в том, что в отличие от всех других рассмотренных автомодельных движений, в условиях задачи имеется масштаб длины Δ , но нет параметра, размерность которого содержала бы символ массы (обычно такой параметр существует в связи с заданием начальной плотности газа). Величина ϱ^* в (12.66) не может служить параметром, так как она неопределенна из-за произвола в выборе начала отсчета координаты x ¹⁾.

¹⁾ ϱ^* — это плотность в точке $x = 0$, но начало $x = 0$ мы вправе поместить в точку с любой плотностью.

Координата x определена лишь с точностью до аддитивной постоянной, поэтому движение может зависеть только от разности координат, но не от самой координаты x . Разностью координат является расстояние, отсчитываемое от фронта ударной волны, координату которого обозначим X , так что движение зависит от безразмерного расстояния

$$\xi = \frac{X - x}{\Delta}. \quad (12.68)$$

Эта величина и является автомодельной переменной, причем, в отличие от всех других рассмотренных автомодельных движений, автомодельная переменная не содержит времени. Движению, конечно, свойствен некий параметр A , характеризующий «силу удара»¹⁾, однако из-за отсутствия другого параметра, размерность которого содержала бы символ массы, из величин x, A, Δ невозможно составить комбинацию размерности времени и, следовательно, из независимых переменных и параметров x, t, A, Δ нельзя составить безразмерную переменную, в которую входило бы время t .

После сделанных замечаний о размерностных свойствах задачи и неопределенности координаты x легко найти закон движения ударной волны и записать общие выражения для искомых функций: скорости, давления и плотности.

Скорость фронта ударной волны равна

$$D = \dot{X} = \alpha \frac{\Delta}{t}, \quad (12.69)$$

где численный коэффициент α зависит только от показателя адиабаты γ . Координата фронта X растет с течением времени по логарифмическому закону:

$$X = \alpha \cdot \Delta \ln t + \text{const}. \quad (12.70)$$

Выражения для скорости, плотности и давления газа за фронтом ударной волны имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u_{\Phi} \tilde{u} = \frac{2}{\gamma + 1} \alpha \frac{\Delta}{t} \tilde{u}, \\ \varrho &= \varrho_{\Phi} \tilde{\varrho} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_0(X) \tilde{\varrho}, \\ p &= p_{\Phi} \tilde{p} = \frac{2}{\gamma + 1} \alpha^2 \frac{\Delta^2}{t^2} \varrho_0(X) \tilde{p}, \end{aligned} \quad (12.71)$$

где безразмерные функции-представители $\tilde{u}, \tilde{\varrho}, \tilde{p}$ зависят от автомодельной переменной ξ — безразмерного расстояния, отсчитываемого от фронта ударной волны, и γ . Функции-представители определены таким образом, чтобы на фронте ударной волны при $\xi = 0$ они все обращались в единицу:

$$\tilde{u}(0) = \tilde{\varrho}(0) = \tilde{p}(0) = 1. \quad (12.72)$$

Другое граничное условие состоит в том, что в «пустоте», при $x = -\infty, \xi = \infty, \tilde{p}(\infty) = 0$.

Плотность газа непосредственно перед фронтом ударной волны $\varrho_0(X)$ выражается через массовую координату фронта M формулой (12.67).

Масса газа, охваченного ударной волной, в отличие от геометрической координаты, зависит от времени, как обычно, по степенному закону $\dot{M} = \varrho_0(X) \dot{X} = M \dot{X} / \Delta = M \alpha t^{-1}$, откуда

$$M = A t^{\alpha}. \quad (12.73)$$

¹⁾ Ниже он будет связан с энергией взрыва.

Здесь A — постоянная интегрирования, которая и является параметром, характеризующим «силу удара». Размерность ее — $[A] = \text{г} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-\alpha}$. Таким образом, в формулы (12.71) можно подставить явную зависимость $\varrho_0(X)$ от времени

$$\varrho_0(X) = \frac{M}{\Delta} = \frac{At^\alpha}{\Delta}. \quad (12.74)$$

Движение, как уже отмечалось выше, обладает необычной автомодельностью: профили скорости, плотности, давления как бы «привязаны» к фронту ударной волны и движутся вместе с фронтом, не растягиваясь с течением времени (меняются лишь амплитуды этих величин). Однако в лагранжевых координатах движение автомодельно в обычном смысле. Лагранжева координата m равна

$$m = \int_{-\infty}^x \varrho(x) dx = \text{const} \cdot M \int_{\xi}^{\infty} \tilde{\varrho}(\xi) d\xi,$$

т. е. ξ , а следовательно, $\tilde{u}, \tilde{\varrho}, \tilde{p}$ являются функциями автомодельной переменной $\eta = m/M = m/At^\alpha$.

Уравнения автомодельного движения удобно решать в лагранжевых координатах. Подставим выражения (12.71) и (12.74) в соответствующие уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial(1/\varrho)}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad p\varrho^{-\gamma} = F(m).$$

Получим уравнения для функций-представителей $\tilde{u}(\eta)$, $\tilde{\varrho}(\eta)$, $\tilde{p}(\eta)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u} + \alpha\eta\tilde{u}' &= \alpha\tilde{p}'; & \frac{1}{\tilde{\varrho}} + \eta\left(\frac{1}{\tilde{\varrho}}\right)' &= -\frac{2}{\gamma-1}\tilde{u}'; \\ \tilde{p}\tilde{\varrho}^{-\gamma}\eta^{\frac{2}{\alpha}+\gamma-1} &= 1. \end{aligned} \quad (12.75)$$

Интегрируя второе из этих уравнений и исключая из системы $\tilde{\varrho}$ и $\tilde{u}$, получим основное уравнение задачи

$$\frac{d\tilde{p}}{d\eta} = \frac{\gamma+1}{2\alpha} \frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 - \frac{2-\alpha}{\gamma}\right) \tilde{p}^{-\frac{1}{\gamma}} \eta^{-\frac{2-\alpha}{\alpha\gamma}}}{1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \tilde{p}^{-\frac{1}{\gamma}-1} \eta^{1-\frac{2-\alpha}{\alpha\gamma}}}. \quad (12.76)$$

Решение $\tilde{p}(\eta)$ должно проходить через две точки $\tilde{p}(1) = 1$ и $\tilde{p}(0) = 0$, чем и определяется показатель α .

В частном случае $\gamma = 2$ удастся найти точное аналитическое решение задачи. Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2}, & M &\sim t^{3/2}, & D &= \frac{3}{2} \frac{\Delta}{t}; & u_\Phi &\sim \frac{1}{t}, & \varrho_\Phi &\sim t^{3/2}, & p_\Phi &\sim \frac{1}{t^{1/2}}; \\ \tilde{p} &= \eta, & \tilde{\varrho} &= \eta^{5/3}, & \tilde{u} &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\eta^{-2/3}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (12.77)$$

В эйлеровых координатах решение имеет вид:

$$\tilde{p} = (1 + 2\xi)^{-3/2}, \quad \tilde{\varrho} = (1 + 2\xi)^{-5/2}, \quad \tilde{u} = 1 - \xi. \quad (12.78)$$

¹⁾ Решение в лагранжевых координатах совершенно аналогично аналитическому решению обычной задачи о кратковременном ударе, в случае $\gamma = 7/5$. (См. (12.42).)

Аналитическое решение возможно и при $\gamma = 1$: $\alpha = 1$, $\tilde{p} = \eta$, $\tilde{q} = \eta^3$, $\tilde{u} = 1$. Этот случай представляет интерес лишь с точки зрения ограничения показателя автомодельности α , так как ему соответствует бесконечное сжатие газа во фронте волны, в результате чего в эйлеровых координатах $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{u}$ и превращаются в δ -функции: $\delta(\xi)$.

Поскольку реальные значения γ заключены в диапазоне $1 < \gamma < 2$, надо полагать, что соответствующие значения показателя автомодельности лежат в интервале $1 < \alpha < 3/2$ ¹⁾.

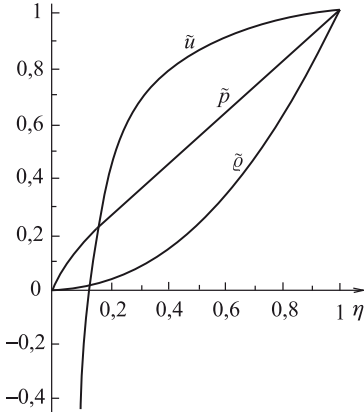


Рис. 12.22. Распределения скорости $\tilde{u}$, давления $\tilde{p}$ и плотности $\tilde{q}$ по массовой координате

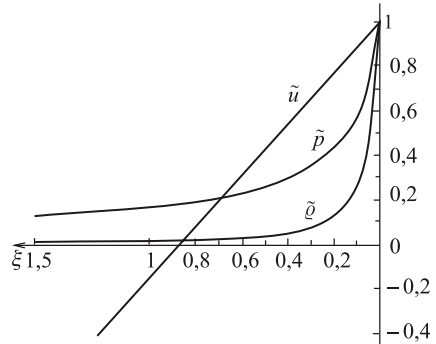


Рис. 12.23. Распределения скорости $\tilde{u}$, давления $\tilde{p}$ и плотности $\tilde{q}$ в пространстве за ударной волной

При произвольном значении γ решение можно найти путем численного интегрирования уравнения (12.76) методом попыток.

На рис. 12.22 и 12.23 приведены полученные таким образом распределения скорости, плотности и давления по массе и в пространстве для $\gamma = 1,25$. Показатель α при этом равен $\alpha = 1,345$.

§ 24. Приложение автомодельного решения к взрыву. Движение ударной волны сильного точечного взрыва вниз приобретает черты автомодельного движения, описанного в предыдущем параграфе, когда давление в полости p_c становится малым по сравнению с давлением p_f на фронте ударной волны в нижней точке. В численном расчете движения ударной волны, сделанном в работе [29], фигурируют обе эти величины, так что мы имеем возможность «привязать» автомодельное решение к какой-либо определенной точке численного расчета. Надо сказать, что в момент резкого уменьшения давления в полости решение [29] теряет силу, так как в приближении [29] при нулевом давлении в полости исчезает сила; движущая ударную волну. Между тем в действительности движение ударной волны после этого момента продолжается довольно долго и оно как раз и имеет характер движения, которое является результатом первоначального «толчка».

Численные оценки показывают, что давление в полости становится гораздо меньше давления на фронте, когда скорость фронта еще достаточно велика, так что

¹⁾ Рассмотрение балансов энергии и импульса, аналогичное тому, которое было проведено в § 16, приводит к общему ограничению $1 < \alpha < 2$.

при рассмотрении последующего движения противодействием со стороны невозмущенного воздуха еще можно пренебречь. Поэтому автомодельное решение может описать распространение ударной волны вниз в течение еще некоторого времени после прорыва атмосферы.

Предположим для определенности, что переход на новый режим происходит при $p_\Phi/p_c = 10$. Согласно [29] этому значению соответствует время от момента взрыва $t_1 = 19 \tau_k$, где $\tau_k = (\rho_c \Delta^5/E)^{1/2}$ — масштаб времени, характерный для взрыва в неоднородной атмосфере (ρ_c — плотность воздуха на высоте взрыва, E — энергия взрыва). К моменту t_1 ударная волна уходит вниз от точки взрыва на расстояние $z = 1,9 \Delta$; скорость фронта при этом равна $D_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta/\tau_k$.

Проекстраполируем предельные законы распространения ударной волны (12.69), (12.70) к моменту «перехода» на новый режим, причем координату и время будем отсчитывать таким образом, чтобы выполнялось начальное условие $D = D_1$ при $X = 0$ ¹⁾.

Получим приближенную зависимость координаты фронта от скорости фронта и от времени (координата отсчитывается вниз от точки «перехода» на новый режим): $X = \alpha \cdot \Delta \ln \frac{D_1}{D} = \alpha \cdot \Delta \ln \frac{t}{\theta}$.

Параметры D_1 и θ определяются через параметры взрыва выражениями $D_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \frac{\Delta}{\tau_k} = 2,5 \cdot 10^{-2} \left(\frac{E}{\rho_c \Delta^3} \right)^{1/2}$; $\theta = 40 \alpha \tau_k$, $\alpha = 1,345$ при $\gamma = 1,25$. Параметр удара A в том же приближении равен $A = e^{1,9} \rho_c \Delta \theta^{-\alpha} = 6,7 \rho_c \Delta \theta^{-\alpha}$.

Оценка с помощью реальных численных значений параметров показывает, что в процессе замедления ударной волны от «переходной» скорости D_1 до скорости $D \approx 1$ км/с, в несколько раз превышающей скорость звука в холодном воздухе, ударная волна проходит вниз расстояние примерно $(2-3) \Delta$.

Оно добавляется к расстоянию около 2Δ вниз от центра взрыва, которое следует из теории [28, 29]. Таким образом, в процессе замедления ударной волны сильного взрыва до скорости порядка 1 км/с волна проходит вниз от точки взрыва расстояние около $(4-5) \Delta$.

§ 25. Автомодельное движение ударной волны в сторону уменьшения плотности. Приложение к взрыву.

Рассмотрим автомодельное распространение ударной волны в экспоненциальной атмосфере (12.66) из $+\infty$ в сторону $-\infty$. Эта задача аналогична задаче о выходе ударной волны на поверхность звезды (см. разд. 3 этой главы) с той лишь разницей, что там атмосфера была не экспоненциальной, а степенной; однако экспоненциальный характер атмосферы придает движению свои специфические черты. Указанная задача была решена одним из авторов [31]. Очевидно, решение можно применить к описанию движения верхнего участка ударной волны сильного взрыва и примыкающей к нему области, которые через некоторое время после взрыва «вырываются» из сферы влияния центральных областей.

Положим, что ударная волна выходит на «границу» атмосферы $x = -\infty$, где $\rho_0 = 0$ в момент $t = 0$, т. е. будем считать время до выхода отрицательным.

Все соображения о размерностных свойствах движения в экспоненциальной атмосфере, изложенные в начале § 23, здесь сохраняют свою силу. Поэтому остаются

¹⁾ При этом процесс до момента «перехода» играет роль «кратковременного удара».

²⁾ Численные значения параметров D_1 и θ слабо зависят от выбора переходного значения p_Φ/p_c . Так, например, на последний, рассчитанный в [29] момент $t = 23,4 \tau_k$, близкий к моменту «прорыва» атмосферы, $z \approx 2 \Delta$, $D = 2,12 \cdot 10^{-2} \Delta/\tau_k$, $p_\Phi/p_c = 22$.

справедливыми все уравнения § 23. Единственное, что следует учесть, это — изменение знака времени. Скорость фронта по-прежнему равна

$$D = \dot{X} = \alpha \frac{\Delta}{t}, \quad t < 0, \quad D < 0,$$

а координата фронта теперь равна

$$X = \alpha \Delta \ln(-t) + \text{const.}$$

Лагранжева координата фронта

$$M = A(-t)^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Постоянная A , как и раньше, характеризует интенсивность источника ударной волны¹⁾. Сохраняются неизменными выражения (12.71), уравнения (12.75) и основное дифференциальное уравнение (12.76). Меняется лишь область интегрирования. Там $\eta = m/M$ изменялось от 1 на фронте волны до 0 в области малых плотностей. Здесь — от 1 на фронте до ∞ в области больших плотностей. Граничное условие на фронте остается прежним, а граничное условие при $\eta = \infty$, которое соответствует моменту $t = 0$ ($M = 0$), определяется так, чтобы в пределе $t \rightarrow 0$ время исключилось из выражений (12.71).

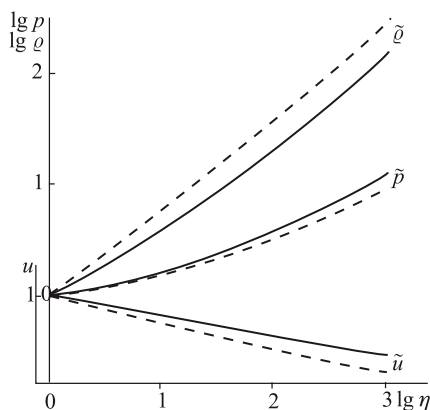


Рис. 12.24. Распределения давления $\tilde{p}$, плотности $\tilde{\rho}$, скорости $\tilde{u}$ по массовой координате при движении ударной волны вверх. Сплошные кривые относятся к $\gamma = 1,2$; пунктирные — к $\gamma = 5/3$

Результаты численного решения для двух показателей адиабаты $\gamma = 1,2$ и $\gamma = 5/3$ показаны на рис. 12.24 и 12.25. Показатели автомодельности α получились равными $\alpha = 6,48$ и $\alpha = 4,90$ соответственно. При достаточно больших η уравнения допускают приближенное аналитическое решение, которое позволяет найти распределение скорости, давления и плотности по массе в момент выхода ударной волны на «границу» атмосферы. При этом получается:

$$(u)_{t=0} \sim -m^{-1/2}, \quad (p)_{t=0} \sim m^{1-\frac{2}{\alpha}}, \\ (p)_{t=0} = \frac{m}{\Delta}^2).$$

Третье из этих выражений свидетельствует о том, что каждая частица газа (с лагранжевой координатой m), будучи сжатой при прохождении ударной волны в $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ раз, к моменту $t = 0$ расширится до своей первоначальной плотности $\rho_0 = m/\Delta$. Это означает, что к моменту выхода ударной волны на «границу» начальная атмосфера как целое сдвигается в направлении движения на определенное расстояние d . Сдвиг оказывается равным $d/\Delta = 7,50$ при $\gamma = 1,2$ и $d/\Delta = 4,57$ при $\gamma = 5/3$. Все частицы газа к моменту $t = 0$ ускоряются в определенное число раз по сравнению с теми скоростями, которые они приобрели в момент ударного сжатия, а именно, в 1,54 раза при $\gamma = 1,2$ и в 1,85 раза при $\gamma = 5/3$.

¹⁾ Разумеется, показатель автомодельности α и постоянная A не имеют здесь ничего общего с соответствующими величинами § 23, так как задача совершенно иная.

²⁾ Коэффициенты пропорциональности приведены в [31].

После выхода ударной волны на «границу», т. е. после «прорыва» атмосферы, при $t > 0$ продолжается расширение газа в сторону пустоты. Это истечение остается автомодельным, так как оно характеризуется только теми же двумя размерными параметрами Δ и A ; показатель автомодельности α не изменяется. Для этого движения получено приближенное аналитическое решение [31]. Оказывается, что после «прорыва» атмосферой газы частицы летят вверх практически без ускорения, по инерции.

Для того чтобы применить полученное решение к описанию поля течения в верхней области взрыва, расположенной высоко над точкой взрыва, необходимо связать произвольный параметр A с величинами, характеризующими взрыв: энергией E и плотностью на уровне взрыва ϱ_c . Для этого можно воспользоваться оценочной формулой (12.65) для скорости ударной волны, распространяющейся вверх, если определить в ней численный коэффициент с помощью формулы (12.64), относящейся к взрыву в однородной атмосфере. Как видно из (12.65), скорость волны по мере удаления от точки взрыва сначала уменьшается (пока мало сказывается понижение плотности), а затем начинает расти. Она минимальна при $R = 3\Delta$. Приблизительно можно считать, что именно с момента начала ускорения волны и вступает в силу автомодельный закон движения $|D| = \alpha\Delta/(-t)$. Отсюда время, нужное для ухода волны на бесконечность, получается равным

$$\tau = \alpha \frac{\Delta}{|D|_{\min}} = \text{const} \left(\frac{\Delta^5}{\varrho_c E} \right)^{1/2} \quad (1).$$

Для $\gamma = 1,2$ константа оказывается равной 25, что практически точно совпадает со значением, найденным в работе [29]. Следовательно, тот же результат можно было бы получить, «привязывая» автомодельное решение к расчету [29]. Зная момент $t = -\tau$, когда волна находится на расстоянии $R = 3\Delta$ вверх от точки взрыва, т. е. в точке с известной лагранжевой координатой, можно определить и A :

$$A = \text{const} E^{\frac{\alpha}{2}} \Delta^{1-\frac{5}{2}\alpha} \varrho_c^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

В заключение заметим, что в принципе слои воздуха, ускоренные ударной волной до больших скоростей, превышающих вторую космическую, должны были бы вырваться из поля тяготения Земли и «выплеснуться» в космическое пространство. Однако благодаря ионизации воздуха, высоко нагретого сильной ударной волной, разлет вверх ограничивается тормозящим действием земного магнитного поля. Некоторые вопросы, касающиеся расширения очень разреженной плазмы в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле, рассмотрены в работе [32].

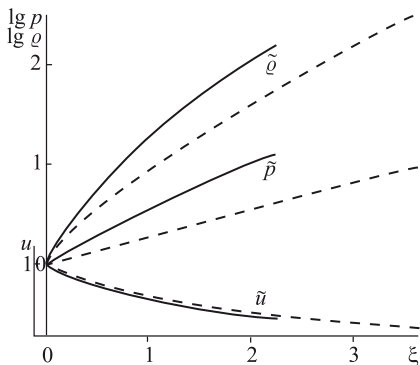


Рис. 12.25. Распределения давления $\tilde{p}$, плотности $\tilde{\rho}$, скорости $\tilde{u}$ в пространстве при движении ударной волны вверх. Сплошные кривые относятся к $\gamma = 1,2$; пунктирные — к $\gamma = 5/3$

¹⁾ Время движения волны от центра взрыва до точки $R = 3\Delta$ гораздо меньше τ .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые часто употребляемые константы, соотношения между единицами, формулы ¹⁾

Фундаментальные константы

Скорость света $c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/с.

Постоянная Планка $h = 6,625 \cdot 10^{-27}$ эрг · с;

$$\hbar = h/2\pi = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}.$$

Заряд электрона $e = 4,802 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ.

Масса электрона $m = 9,109 \cdot 10^{-28}$ г.

Масса протона $m_p = 1,672 \cdot 10^{-24}$ г.

Масса, соответствующая единице атомного веса, $M_0 = 1,660 \cdot 10^{-24}$ г.

Постоянная Больцмана $k = 1,380 \cdot 10^{-16}$ эрг/К.

Универсальная газовая постоянная $R = 8,314 \cdot 10^7$ эрг/К · моль =
= 1,986 кал/К · моль.

Число Авогадро $N_0 = 6,023 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

Число Лошмидта $n_0 = 2,687 \cdot 10^{19}$ 1/см³.

Соотношения между единицами

Энергии $E_0 = 1$ эВ = $1,602 \cdot 10^{-12}$ эрг соответствуют:

температура $E_0/k = 11\,610$ К,

частота $E_0/h = 2,418 \cdot 10^{14}$ с⁻¹,

длина волны $hc/E_0 = 1,240 \cdot 10^{-4}$ см = 12 400 Å,

волновое число $E_0/hc = 8067$ см⁻¹.

В спектроскопии вместо частот принято пользоваться волновыми числами. Волновому числу $1/\lambda = 1$ см⁻¹ соответствуют:

длина волны $\lambda = 10^8$ Å,

частота $\nu = 2,998 \cdot 10^{10}$ с⁻¹,

температура $T = h\nu/k = 1,439$ К,

энергия кванта $h\nu = 1,240 \cdot 10^{-4}$ эВ = $1,986 \cdot 10^{-16}$ эрг.

1 кал = $4,185 \cdot 10^7$ эрг, 1 ккал = 10^3 кал.

1 эВ на молекулу соответствует 23,05 ккал/моль.

1 вольт = 1/300 единиц СГСЭ.

Атомные постоянные и соотношения между ними

Боровский радиус $a_0 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m e^2} = \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см.

Потенциал ионизации атома водорода $I_H = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{\hbar^2} = \frac{e^4 m}{2\hbar^2} = 13,60$ эВ.

¹⁾ Значения констант взяты из справочника Аллена К. У. Астрофизические величины. — М.: Иностран. лит., 1960.

$$\text{Постоянная Ридберга } R_y = \frac{I_H}{h} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} = 3,290 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Скорость электрона на первой боровской орбите } v_0 = \frac{2\pi e^2}{h} = \frac{e^2}{\hbar} = 2,187 \cdot 10^8 \text{ см/с}.$$

$$\text{Классический радиус электрона } r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,818 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

$$\text{Комптоновская длина волны } \lambda_0 = \frac{h}{mc} = 2,426 \cdot 10^{-10} \text{ см}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} = 3,862 \cdot 10^{-11} \text{ см}.$$

$$\text{Энергия } mc^2 = 511 \text{ кэВ} = 8,185 \cdot 10^{-7} \text{ эрг}.$$

$$\text{Число «137»} = \frac{\hbar c}{e^2} = \frac{hc}{2\pi e^2} = 137,0.$$

$$\text{Соотношение длин: } a_0 = \langle 137 \rangle \lambda_0 = \langle 137 \rangle^2 r_0.$$

$$\text{Соотношение энергий: } mc^2 = 2I_H \langle 137 \rangle^2.$$

$$\text{Томсоновское сечение } \Phi_0 = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2.$$

$$\text{Отношение масс протона и электрона } \frac{m_p}{m} = 1836.$$

Электрическое поле протона на расстоянии боровского радиуса

$$\frac{e}{a_0^2} = 1,714 \cdot 10^7 \text{ СГСЭ} = 5,14 \cdot 10^9 \text{ В/см}.$$

$$\text{Площадь спектральной линии с единичной силой осциллятора } \frac{\pi e^2}{mc} = 0,0265 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

$$\text{Атомная единица измерения сечения } \pi a_0^2 = 0,880 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

Формулы

Поток излучения с поверхности абсолютно черного тела

$$S = \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-5} T_K^4 = 1,03 \cdot 10^{12} T_{\text{эВ}}^4 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{с}$$

(σ — постоянная Стефана-Больцмана).

Плотность равновесного излучения

$$U_p = \frac{4\sigma T^4}{c} = 7,57 \cdot 10^{-15} T_K^4 = 1,36 \cdot 10^2 T_{\text{эВ}}^4 \text{ эрг/см}^3.$$

Спектральная плотность равновесного излучения

$$U_{\nu p} d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \text{ эрг/см}^3$$

(максимум при частоте, соответствующей $h\nu = 2,822kT$).

Спектральная интенсивность равновесного излучения

$$I_{\nu p} d\nu = \frac{c U_{\nu p} d\nu}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{ср}.$$

Формула Саха

$$\frac{N_e N_+}{N_a} = A \frac{g_+}{g_a} T^{3/2} e^{-I/kT},$$

где

$$A = 2 \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right)^{3/2} = 4,85 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2} = 6,06 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot \text{эВ}^{-3/2} \quad (N \text{ в } \text{см}^{-3}).$$

Функция максвелловского распределения, нормированная на единицу:

$$f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv,$$

$$f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(kT)^{3/2}} \exp \left(-\frac{\varepsilon}{kT} \right) d\varepsilon.$$

Скорость электрона $v_e = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{\varepsilon_{\text{эВ}}} \text{ см/с}$.

Скорость частицы с атомным весом A равна $v = 1,38 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{эВ}}}{A}} \text{ см/с}$.

Средняя тепловая скорость электрона

$$\bar{v}_e = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} = 6,21 \cdot 10^5 \sqrt{T_{\text{К}}} = 6,7 \cdot 10^7 \sqrt{T_{\text{эВ}}} \text{ см/с}.$$

Средняя тепловая скорость частицы

$$\bar{v} = 1,45 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{T_{\text{К}}}{A}} = 1,56 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{T_{\text{эВ}}}{A}} \text{ см/с}.$$

Классическая постоянная затухания

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3} = 2,47 \cdot 10^{-22} \nu^2 \text{ с}^{-1} = \frac{0,222 \cdot 10^{16}}{(\lambda_{\text{А}})} \text{ с}^{-1}.$$

Выражение эффективного сечения σ через P_c — среднее число столкновений на пути 1 см при 1 мм рт. ст. и 0 °С: $\sigma = 2,83 \cdot 10^{-17} P_c \text{ см}^2$.

Удельная энергия 1 эВ на молекулу = $\frac{9,65 \cdot 10^{11}}{M} \text{ эрг/г}$ (M — молярная масса).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К главе I

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. — АН СССР, 1946.
3. *Kotchine N.* Rendiconti del Circolo Mat. de Palermo. — 1926. — V. 50;
Розе А. В., Кибель Н. А., Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика. — ОНТИ, 1937. — Ч. II.
4. *Седов Л. И.* // ДАН СССР. — 1946. — Т. 52, № 1; Прикл. матем. и мех. — 1946. — Т. 10, вып. 2.
5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — 4-е изд. — Гостехиздат, 1957.
6. *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. — 1950. — V. 201. — P. 175.
7. *Черный Т. Г.* // ДАН СССР. — 1957. — Т. 112. — С. 213.
8. *Coldstine H., Neumann J.* // Comm. Pure and Appl. Math. — 1955. — V. 8, No. 2. — P. 327.
9. *Brode H. J.* // J. Appl. Phys. — 1955. — V. 26, No. 6. — P. 766.
10. *Охоцкий Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К.* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1957. — Т. 50.
11. *Ландау Л. Д.* // Прикл. матем. и мех. — 1945. — Т. 9, вып. 4. — С. 286.
12. *Садовский М. А.* Физика взрыва: Сб. — АН СССР, 1952. — № 1.
13. *Компанеев А. С.* // ДАН СССР. — 1960. — Т. 130. — С. 1001.
14. *Куранти Г., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. — Иностран. лит., 1950.
15. *Станюкович К. П.* Неуставившиеся движения сплошной среды. — Гостехиздат, 1955.
16. *Имшенник В. С.* // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131. — С. 1287.
17. *Molmud P.* // Phys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 362.
18. *Немчинов И. В.* // ПМТФ. — 1961. — № 1. — С. 17; № 5. — С. 18.
19. *Немчинов И. В.* // Прикл. матем. и мех. — 1965. — Т. 29, вып. 1. — С. 134.

К главе II

1. *Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В.* Теоретическая астрофизика. — Гостехиздат, 1952.
2. *Унзольт А.* Физика звездных атмосфер. — Иностран. лит., 1949.
3. *Мустель Э. Р.* Звездные атмосферы. — Физматгиз, 1960.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V: Статистическая физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
5. *Райзер Ю. П.* // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1528.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II: Теория поля. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. *Беленький С. З.* // Тр. Физ. ин-та АН СССР. — 1958. — Т. 10. — С. 15.
8. *Имшенник В. С., Морозов Ю. И.* // ПМТФ. — 1963. — № 3. — С. 3.
9. *Davis L. W.* // Proc. IEEE. — 1963. — V. 51, No. 1.
10. *Jaynes E. T., Cummings F. W.* // Proc. IEEE. — 1963. — V. 51, No. 1.
11. *Kapita P. L., Dirac P. A. M.* // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1933. — V. 29. — P. 297.
12. *Bartell L. S., Thompson H. B., Roskos R. R.* // Phys. Rev. Lett. — 1965. — V. 14. — P. 851.
13. *Келдыш Л. Б.* // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 1945.
14. *Weisskopf V., Wigher E.* // Zs. f. Phys. — 1930. — Bd. 65. — S. 18.
15. *Зельдович Я. Б.* // ДАН СССР. — 1965. — Т. 163. — С. 1359.

К главе III

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V: Статистическая физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. *Годнев И. Н.* Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным. — Гостехиздат, 1956.

3. Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 6000 К до 12000 К и давлений от 0,001 до 1000 атм / Под ред. А.С. Предводителя. — Изд-во АН СССР, 1957; Таблицы термодинамических функций воздуха для температур от 12000 К до 20000 К и давлений от 0,001 до 1000 атм / Под ред. А.С. Предводителя. — АН СССР, 1959.
4. Селиванов В.В., Шляпникох И.Я. // ЖФХ. — 1958. — Т. 32. — С. 670.
5. Стулоченко Е.В., Стаханов И.П., Самуилов Е.В., Плешанов А.С., Рождественский И.Б. // Физическая газодинамика: Сб. — АН СССР, 1959. — С. 3.
6. Зельдович Я.Б. // ЖФХ. — 1938. — Т. 11. — С. 685.
7. Atomic Energy Levels. Circular of the National Bureau of Standards. — V.I, II, III. — Washington, 1949–1957.
8. Кэй Д., Лэби Л. Справочник физика-экспериментатора. — Иностр. лит., 1949.
9. Fermi E. // Nuovo Cimento. — 1934. — V. 11. — P. 157.
10. Ecker G., Weizel // Ann. d. Phys. — 1956. — Bd. 17. — S. 126;
Seaton // Proc. Roy. Soc. A. — 1951. — V. 208. — P. 408;
Ehler, Weisaler // JOSA. — 1955. — V. 45. — P. 1035;
Vitense E. // Z. Astrophys. — 1951. — V. 28. — P. 81.
11. Тиман Б.Л. // ЖЭТФ. — 1954. — Т. 27. — С. 708.
12. Margenau H., Lewis M. // Rev. Mod. Phys. — 1959. — V. 31. — P. 594.
13. Кудрин Л.П. // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 1134.
14. Benson S.W., Buss Y.H., Byers H. IAS Paper. — 1959. — No. 95. — P. 14.
15. Райзер Ю.П. // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36. — С. 1583.
16. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. // УФН. — 1957. — Т. 63. — С. 613.
17. Зельдович Я.Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. — АН СССР, 1946.
18. Davies D.R. // Proc. Phys. Soc. — 1948. — V. 61, No. 2. — P. 105.
19. Рождественский И.Б. Физическая газодинамика: Сб. — АН СССР, 1959.
20. Горбань Н.Ф. Физическая газодинамика: Сб. — АН СССР, 1959.
21. Прокофьев В.А. // Ученые записки МГУ. Механика. — 1954. — Вып. 172. — С. 79.
22. Resler E.L., Lin S.C., Kantrowitz A. // J. Appl. Phys. — 1952. — V. 23. — P. 1390; Сб. пер. Механика. — 1953. — № 5.
23. Sabol A.P. // Nat. Advis. Counc. Aeronaut. Tech. Notes. — 1953. — No. 3091. — P. 29.
24. Холев С.Р. // Изв. вузов. Физика. — 1959. — Т. 4. — С. 28.
25. Christian R.H., Yarger F.L. // J. Chem. Phys. — 1955. — V. 23. — P. 2042.
26. Модель И.Ш. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 714.
27. Sachs R.G. // Phys. Rev. — 1946. — V. 69. — P. 514.
28. Цукерман В.А., Манакова М.А. // ЖТФ. — 1957. — Т. 27. — С. 391.
29. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения. — Иностр. лит., 1951.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III: Квантовая механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
31. Latter R. // Phys. Rev. — 1955. — V. 99. — P. 1854.
32. Brachman M. // Phys. Rev. — 1951. — V. 84. — P. 1263.
33. Bethe H.A., Marshak R.E. // Astrophys. J. — 1940. — V. 91. — P. 239;
Feynman, Metropolis, Teller // Phys. Rev. — 1949. — V. 75. — P. 1561;
Gilvarry J.J. // Phys. Rev. — 1954. — V. 96. — P. 934; 944;
Gilvarry J.J., Peebles G.H. // Phys. Rev. — 1955. — V. 99. — P. 550.
34. Ларкин А.И. // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — С. 1896;
Веденов А.А., Ларкин А.И. // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36. — С. 1133.
35. Кузнецов Н.М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. — Машиностроение, 1965.

К главе IV

1. Пеннер С.С., Харшбарджер Ф., Вэли В. // Вопросы ракетн. техн. — 1958. — № 6; 1959. — № 1.
2. Лосев С.А., Осипов А.И. // УФН. — 1961. — Т. 74, вып. 3. — С. 393.

3. Физические измерения в газовой динамике и при горении: Пер. 9-го тома серии «Аэродинамика больших скоростей и реактивная техника». — Иностран. лит., 1957.
4. Ударные трубы: Сб. пер. ст. / Под ред. Х. А. Рахматуллина и С. С. Семенова, — Иностран. лит., 1962.
5. *Стрелов Р. А., Кохен А.* // Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 9.
6. *Fowler R. G., Atkinson W. R., Compton W. D., Lee R. J.* // Phys. Rev. — 1952. — V. 88. — P. 137;
Fowler R. G., Atkinson W. R., Marks L. W. // Phys. Rev. — 1952. — V. 87. — P. 966.
7. *Kolb A. C.* // Phys. Rev. — 1957. — V. 107. — P. 345; 1197.
8. *Wiese W., Berg H. P., Griem H. R.* // Phys. Rev. — 1960. — V. 120. — P. 1079.
9. *Холев С. Р., Полтавченко Д. С.* // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131. — С. 1096.
10. *Холев С. Р., Крестникова Л. И.* // Изв. вузов. Физика. — 1960. — Т. 1. — С. 29.
11. *Patrick R. M.* // Phys. Fluids. — 1959. — V. 2. — P. 599.
12. *Josephson V.* // J. Appl. Phys. — 1958. — V. 29. — P. 30.
13. *Цимер Р. В.* // Вопросы ракетн. техн. — 1960. — № 4. — С. 44.
14. Движущаяся плазма: Сб. пер. — Иностран. лит., 1961.
15. Оптическая пирометрия плазмы: Сб. пер. — Иностран. лит., 1960.
16. *Лохте-Хольтгревен В.* // УФН. — 1960. — Т. 72, № 3.
17. *Рябинин Ю. Н.* Газы при больших плотностях и температурах. — Физматгиз, 1959.
18. Основные результаты экспериментов на ударных трубах / Под ред. Ферри. — Иностран. лит., 1963.
19. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1966.

К главе V

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. II: Теория поля. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. III: Квантовая механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. — Иностран. лит., 1956.
4. *Menzel D., Pekeris C.* // Monthly Notices. — 1935. — V. 96. — P. 77.
5. *Бете Г., Соллнер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — Физматгиз, 1960.
6. *Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В.* Теоретическая астрофизика. — Гостехиздат, 1952.
7. *Бейтс Д. К.* Современные проблемы астрофизики и физики Солнца: Сб. — Иностран. лит., 1950.
8. *Keck J. C., Camm J. C., Kivel B., Wentink T.* // Ann. of Phys. — 1959. — V. 7. — P. 1.
9. *Branscomb L. M., Burch B. S., Smith S. J., Geltman S.* // Phys. Rev. — 1958. — V. 3. — P. 504.
10. *Унзольд А.* Физика звездных атмосфер. — Иностран. лит., 1949;
2-е изд.: *Unsold A.* Physik der Sternatmosphären. — 1955.
11. *Unsold A.* // Ann. Phys. — 1938. — V. 33. — P. 607.
12. *Vitense E.* // Zs. Astrophys. — 1951. — Bd. 28. — S. 91;
Schirmer H. // Zs. angew. Phys. — 1954. — Bd. 6. — S. 3.
13. *Burgess A., Seaton M. J.* // Rev. Mod. Phys. — 1958. — V. 30. — P. 992; Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 1960. — V. 120. — P. 121; 1958. — V. 118. — P. 504.
14. *Биберман Л. М., Норман Г. Э.* // Оптика и спектроскопия. — 1960. — Т. 8. — С. 433.
15. *Биберман Л. М., Норман Г. Э., Ульянов К. Н.* // Оптика и спектроскопия. — 1961. — Т. 10. — С. 565.
16. *Chandrasekhar S., Breen F. H.* // Astrophys. J. — 1946. — V. 103. — P. 41; 1946. — V. 104. — P. 430.
17. *Биберман Л. М., Романов В. Е.* // Оптика и спектроскопия. — 1957. — Т. 3. — С. 646.
18. *Райзер Ю. П.* // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37. — С. 1079.
19. *Беккер Р.* Теория электричества. 2-е изд. Т. 2. Электронная теория. — Гостехиздат, 1941.

20. а) Герцберг Г. Спектры и строение двухатомных молекул. — Иностр. лит., 1949. См. также:
б) Гейдон А. Г. Энергии диссоциации и спектры двухатомных молекул. — Иностр. лит., 1949;
в) Кондратьев В. Н. Структура атомов и молекул. — Физматгиз, 1959.
21. Kivel B., Mayer H., Bethe H. // *Ann. of Phys.* — 1957. — V. 2. — P. 57.
22. Jarman W. R., Fraser P. A., Nicholls R. W. // *Astrophys. J.* — 1953. — V. 118. — P. 228; 1954. — V. 119. — P. 286; 1955. — V. 122. — P. 55;
Jarman W. R., Nicholls R. W. // *Canad. J. Phys.* — 1954. — V. 32. — P. 201;
Tuner R. G., Nicholls R. W. // *Canad. J. Phys.* — 1954. — V. 32. — P. 468;
Fraser P. A. // *Canad. J. Phys.* — 1954. — V. 32. — P. 515;
Nicholls R. W. // *Canad. J. Phys.* — 1954. — V. 32. — P. 722;
Nicholls R. W., Jarman W. R. // *Proc. Phys. Soc. A.* — 1956. — V. 69. — P. 253.
23. Биберман Л. М., Якубов И. Т. // Оптика и спектроскопия. — 1960. — Т. 8. — С. 294.
24. Лосев С. А. // Науч. докл. высшей школы. Физ.-матем. науки. — 1958. — № 5. — С. 197.
25. Weber D., Penner S. // *J. Chem. Phys.* — 1957. — V. 26. — P. 860.
26. Ditchburn R., Heddle D. // *Proc. Roy. Soc. A.* — 1953. — V. 220. — P. 61; 1954. — V. 226. — P. 509.
27. Биберман Л. М., Еркович С. П., Сошников В. Н. // Оптика и спектроскопия. — 1959. — Т. 7. — С. 562.
а) Сошников В. Н. // УФН. — 1961. — Т. 74. — С. 61.
28. Meyerott R. E. // *Comb. and Propuls. 3 ACARD. Colloc.* — 1958. — V. 431. Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 11.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. V: Статистическая физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
30. Logan J. // *Jet Propulsion.* — 1958. — V. 28. — P. 795. Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 7. — С. 18.
31. Keck J., Camm J., Kivel B. // *J. Chem. Phys.* — 1958. — V. 28. — P. 723.
32. Wentink T., Planet W., Hammerling P., Kivel B. // *J. Appl. Phys.* — 1958. — V. 29. — P. 742.
а) Armstrong B. H., Meyerott R. E. // *Phys. Fluids.* — 1960. — V. 3. — P. 138.
33. Лосев С. А., Генералов Н. А., Теребенина Л. Б. // Оптика и спектроскопия. — 1960. — Т. 8. — С. 570.
34. Модель И. Ш. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 714.
35. Dixon J. K. // *J. Chem. Phys.* — 1940. — V. 8. — P. 157.
36. Harris L., King G. W. // *J. Chem. Phys.* — 1934. — V. 2. — P. 51.
37. Lambrey C. R. // *C. R. Acad. Sci.* — 1922. — V. 188. — P. 251.
38. Райзер Ю. П. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 483.
39. Райзер Ю. П. // ЖФХ. — 1959. — Т. 33. — С. 700.
40. Penner S. S. *Quantitative Molecular Spectroscopy and Gas Emissivities.* — London, 1959.
41. Ельяшевич М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия. — Физматгиз, 1962.
42. Дронов А. П., Свиридов А. Г., Соболев Н. Н. // Оптика и спектроскопия. — 1962. — Т. 12. — С. 677.
43. Kivel B., Hammerling P., Teare J. D. // *Planet and Space Sci.* — 1961. — V. 3. — P. 132.
44. Kivel B. // *J. Aero Space Sci.* — 1961. — V. 28. — P. 96.
45. Allen R. A., Camm J. C., Keck J. // *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* — 1961(1962). — V. 1, No. 3–4. — P. 269.
46. Olfe D. B. // *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* — 1961(1962). — V. 1, No. 3–4. — P. 169.
47. Penner S. S. // *Fundam. data obtained shock-tube experim.* — Oxford; London; N. Y., Paris: Pergamon Press, 1961. — V. 221. — P. 261; Перевод: Основные результаты экспериментов на ударных трубах. — Иностр. лит., 1963.
48. Фаизуллов Ф. С., Соболев Н. Н., Кудрявцев Е. М. // ДАН СССР. — 1959. — Т. 127. — С. 541.
49. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Норман Г. Э. // Оптика и спектроскопия. — 1963. — Т. 14, № 3. — С. 330.

50. Penner S. S., Thomas M. // AIAA J. Перевод: Ракетн. техн. и космонавтика. — 1964. — Т. 2, № 9. — С. 69.
51. Биберман Л. М., Лагарьков А. Н. // Оптика и спектроскопия. — 1964. — Т. 16, № 2. — С. 320.
52. Воробьев В. С., Норман Г. Э. // Оптика и спектроскопия. — 1964. — Т. 17, № 2. — С. 180.
53. Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Бейтса. — М.: Мир, 1964.
54. Собоelman И. И. Введение в теорию атомных спектров. — Физматгиз, 1963.
55. Биберман Л. М., Норман Г. Э. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. — 1963. — V. 3. — P. 221.
56. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Норман Г. Э., Якубов И. Т. // Космические исследования. — 1964. — № 2, вып. 3 — С. 441.
57. Allen R. A., Textoris A. // J. Chem. Phys. — 1964. — V. 40. — P. 3445.
58. Норман Г. Э. // Оптика и спектроскопия. — 1964. — Т. 17. — С. 176.
59. Leuitt B. P. // Trans. Faraday Soc. — 1962. — V. 58, No. 9. — P. 1789.
60. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. — Госатомиздат, 1961.
61. Райзер Ю. П. // ПМТФ. — 1964. — № 5. — С. 149.
62. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 1150.
63. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — Физматгиз, 1960.
64. J. of Quant. Spectr. and Rad. Trans. — 1965. — V. 5, No. 1; Известия 2-й Междунар. конференции по непрозрачности.
65. Meyerand R. G., Haught A. F. // Phys. Rev. Lett. — 1963. — V. 11. — P. 401.
66. Damon E. K., Tomlinson R. G. // Appl. Opt. — 1963. — V. 2. — P. 546.
67. Minck R. W. // J. Appl. Phys. — 1964. — V. 35. — P. 252.
68. Meyerand R. G., Haught A. F. // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 7.
69. Ramsden S. A., Davies W. E. // Phys. Rev. Lett. — 1964. — V. 13. — P. 227.
70. Мандельштам С. Л., Пашинин П. П., Прохиндеев А. В., Прохоров А. М., Суходрев Н. К. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 2003.
71. Мандельштам С. Л., Пашинин П. П., Прохоров А. М., Райзер Ю. П., Суходрев Н. К. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — С. 127.
72. Амбарцумян Р. В., Басов Н. Г., Бойко В. А., Зуев В. С., Крохин О. Н., Крюков П. Г., Сенатский Ю. В., Стойлов Ю. Ю. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 1583.
73. Келдыш Л. В. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 1945.
74. Аскарьян Г. А., Рабинович М. С. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 290.
75. Wright J. R. // Proc. Phys. Soc. — 1964. — V. 84, No. 537. — P. 41.
76. Рютов Д. Д. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 2194.
77. Райзер Ю. П. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — С. 1508.
78. Ramsden S. A., Savic P. // Nature. — 1964. — No. 4951. — P. 1217.
79. Басов Н. Г., Крохин О. Н. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46. — С. 171.
80. Dawson J. M. // Phys. Fluids. — 1964. — V. 7. — P. 981.
81. Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. — 1940. — Т. 10. — С. 542.
82. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации. — Гостехиздат, 1955.
83. Зельдович Я. Б., Пилипецкий Н. Ф. // Изв. вузов. Радиопизика. — 1966. — Т. 9, № 1.
84. Иванова А. В. // Оптика и спектроскопия. — 1964. — Т. 16. — С. 925.
85. Иванова А. В., Солодченкова С. А. // Оптика и спектроскопия. — 1966. — Т. 20, № 3. — С. 399.
86. Райзер Ю. П. // УФН. — 1965. — Т. 87, № 1. — С. 29.
87. Кузнецов Н. М. Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах. — Машиностроение, 1965.
88. Ohmura T., Ohmura H. // Astrophys J. — 1960. — V. 131. — P. 8.
89. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. — М.: Наука, 1974.

К главе VI

1. Hornig D. F. // J. Phys. Chem. — 1957. — V. 61. — P. 856.
2. Greene E. F., Cowan G. R., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1951. — V. 19. — P. 427.

3. *Greene E. F., Cowan G. R., Hornig D. F.* // J. Chem. Phys. — 1953. — V. 21. — P. 617.
4. *Лесков Л. В., Савин Ф. А.* // УФН. — 1961. — Т. 72. — С. 741.
5. *Лосев С. А., Осипов А. И.* // УФН. — 1961. — Т. 74. — С. 393.
6. *Zartmann I.* // J. Acoust. Soc. Amer. — 1949. — V. 21. — P. 171.
7. *von Itterbeek A., Vermaelen R.* // Physica. — 1943. — V. 9. — P. 345.
8. *Zmuda A. J.* // J. Acoust. Soc. Amer. — 1951. — V. 23. — P. 472.
9. *Connor J. V.* // J. Acoust. Soc. Amer. — 1958. — V. 30. — P. 298.
10. *Petralia S.* // Nuovo Cimento. — 1953. — V. 10. — P. 817.
11. *Hubbard J. C.* // J. Acoust. Soc. Amer. — 1952. — V. 14. — P. 474.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. III: Квантовая механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
13. *Schwartz R., Slawsky Z., Herzfeld K.* // J. Chem. Phys. — 1952. — V. 20. — P. 1591.
14. *Осипов А. И.* // ДАН СССР. — 1960. — Т. 130. — С. 523.
15. *Ландау Л., Теллер Е.* // Phys. Zs. d. Sowietunion. — 1936. — Bd. 10. — S. 34.
16. *Blackman V. H.* // J. Fluid Mech. — 1956. — V. 1. — P. 61.
17. *Zener* // Phys. Rev. — 1931. — V. 37. — P. 556; 1931. — V. 38. — P. 277.
18. *Schwartz R., Herzfeld K.* // J. Chem. Phys. — 1954. — V. 22. — P. 767.
a) *Herzfeld K.* // Proc. of the 3th Intern. Congr. Acoust. Stuttgart. — 1959. — V. I. — P. 503.
19. *Knötzel H., Knötzel L.* // Ann. d. Phys. — 1948. — Bd. 2. — S. 393.
20. *Kantrowitz A., Hubei A. W.* // J. Chem. Phys. — 1947. — V. 15. — P. 275.
21. *Herron J. T., Franklin J. L., Bardt P., Bibeler V. H.* // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 29. — P. 230.
22. *Nartecck P., Reeves R. R., Manella G.* // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 29. — P. 608; 1960. — V. 32. — P. 632.
23. *Wentink T., Sullivan J. O., Wray K. L.* // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 29. — P. 231.
24. *Wigner E. P.* // J. Chem. Phys. — 1937. — V. 5. — P. 720; 1939. — V. 7. — P. 646.
25. *Britton D., Davidson N., Gehman W., Schott G.* // J. Chem. Phys. — 1956. — V. 25. — P. 804.
26. *Bunker D. L., Davidson N.* // I. Amer. Chem. Soc. — 1958. — V. 80. — P. 5085.
27. *Фаулер Р., Гуггенгейм Э.* Статистическая термодинамика. — М.: Иностран. лит., 1949.
28. *Ступоченко Е. В., Осипов А. И.* // ЖФХ. — 1958. — Т. 32. — С. 1673.
29. *Ступоченко Е. В., Осипов А. И.* // ЖФХ. — 1959. — Т. 33. — С. 1526.
30. *Matthews O.* // Phys. Fluids. — 1959. — V. 2. — P. 170.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 11. — С. 65.
31. *Byron S. R.* // J. Chem. Phys. — 1959. — V. 30, No. 6. — P. 1380.
32. *Генералов Н. А., Лосев С. А.* // ПМТФ. — 1960. — № 2. — P. 64.
33. *Zinman W. G.* // ARS J. — 1960. — V. 30. — P. 233.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1960. — № 12. — С. 55.
34. *Glick H. S., Wurster W. H.* // J. Chem. Phys. — 1957. — V. 27. — P. 1224.
35. *Palmer H. B., Hornig D. F.* // J. Chem. Phys. — 1957. — V. 26. — P. 98.
36. *Britton D., Davidson N.* // J. Chem. Phys. — 1956. — V. 25. — P. 810.
37. *Никитин Е. Е.* // ДАН СССР. — 1958. — Т. 119. — С. 526.
38. *Глестон С., Ледлер К., Эйринг Г.* Теория абсолютных скоростей реакций. — М.: Иностран. лит., 1948.
39. *Зельдович Я. Б., Садовников П. Я., Франк-Каменецкий Д. А.* Окисление азота при горении. — АН СССР, 1947.
40. *Glick H. S., Klein J. J., Squire W.* // J. Chem. Phys. — 1957. — V. 27. — P. 850.
41. *Райзер Ю. П.* // ЖФХ. — 1959. — Т. 33. — С. 700.
42. *Кэй Д., Лэби Л.* Справочник физика-экспериментатора. — М.: Иностран. лит., 1949.
43. *Zeise H.* // Z. Electrochem. — 1936. — Bd. 42. — S. 785.
44. *Bodenstein M., Ramstetter* // Zs. Phys. Chem. — 1922. — Bd. 100. — S. 106;
Bodenstein M., Linder // Zs. Phys. Chem. — 1922. — Bd. 100. — S. 82.
45. *Месси Г., Бархон Е.* Электронные и ионные столкновения. — М.: Иностран. лит., 1958.
46. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газе. — Гостехиздат, 1952. — Т. I.

47. *Seaton M. J.* // Phys. Rev. — 1959. — V. 113. — P. 814.
48. *Fite W. L., Brackmann R. T.* // Phys. Rev. — 1959. — V. 113. — P. 815.
49. *Tate, Smith* // Phys. Rev. — 1932. — V. 39. — P. 270.
50. *Petschek H., Byron S.* // Ann. Phys. — 1957. — V. 1. — P. 270;
Перевод: Ударные трубы: Сб. переводов. — М.: Иностр. лит., 1962.
51. *Rostagni A.* // Nuovo Cimento. — 1936. — V. 13. — P. 389;
Wayland // Phys. Rev. — 1937. — V. 52. — P. 31.
52. *Rostagni A.* // Nuovo Cimento. — 1934. — V. 11. — P. 621.
53. *Wray K., Teafe J. D., Hammerling P., Kivel B.* // 8th Symp. Intern. Combustion, Pasadena, 1960. — P. 84.
54. *Rosen P.* // Phys. Rev. — 1958. — V. 109. — P. 348; 351.
55. *Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В.* Теоретическая астрофизика. — Гостехиздат, 1952.
56. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизованного газа. — М.: Иностр. лит., 1957.
57. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. — 1937. — Т. 7. — С. 203.
58. *Генералов Н. А.* // Вестн. МГУ. Физ. астр. — 1962. — № 2. — С. 51.
59. *Catac M.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 448.
60. *Poth W.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 991.
61. *Matthews D. L.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 639.
62. *Johannesen N. H., Zienkiewicz H. K., Blythe P. A., Gerrard J. H.* // J. Fluid Mech. — 1962. — V. 13. — P. 213.
63. *Hurle L. R., Gaydon A. G.* // Nature. — 1959. — No. 4702. — P. 184.
64. *Griffith W. C.* Fundam. data obtained shock-tube experim. — Oxford, London, N. Y.: Paris Pergamon Press, 1961. — P. 242;
Перевод: Основные результаты экспериментов на ударных трубах. — М.: Иностр. лит., 1963.
65. *Valley L. M., Legvold S.* // Rhys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 831;
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1961. — № 3. — С. 28.
66. *Осинов А. И.* // Вестн. МГУ. Физ. астр. — 1960. — № 4. — С. 96.
67. *Catac M.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 460.
68. *Rink J. P., Knight H. T., Duff R. E.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 1942;
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1962. — № 4. — С. 58.
69. *Patch R. W.* // J. Chem. Phys. — 1962. — V. 36. — P. 1919.
70. *Allen R. W., Keck J. C., Camm J. C.* // Phys. Fluids — 1962. — V. 5. — P. 284.
71. *Иванов-Холодный Г. С.* // Геомагнетизм и аэрономия. — 1962. — Т. 2. — С. 377.
72. *Lin S. C., Neal R. A., Fyfe W. I.* // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 1633;
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1964. — № 4. — С. 63.
73. *Lin S. C., Teare J. D.* // Phys. Fluids. — 1963. — V. 6. — P. 355;
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1964. — № 5. — С. 16.
74. *Дальгарно А.* // УФН. — 1963. — Т. 79, вып. 1. — С. 115.
75. *Федоренко Н. Ф.* // УФН. — 1959. — Т. 68, вып. 3. — С. 481; ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38, № 3.
76. *Осинов А. И., Ступоченко Е. В.* // УФН. — 1963. — Т. 79, вып. 1. — С. 81.
77. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осинов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1966.
78. *Браун С.* Элементарные процессы в плазме газового разряда. — Госатомиздат, 1961.
79. *Иванов-Холодный Г. С., Никольский Г. М., Гуляев Р. А.* // Астрон. журн. — 1960. — Т. 37. — С. 799.
80. *Hinnov E., Hirschberg J. G.* // Phys. Rev. — 1962. — V. 125. — P. 795.
81. *Биберман Л. М., Торопкин Ю. Н., Ульянов К. Н.* // ЖТФ. — 1962. — Т. 32. — С. 827.
82. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. I: Механика. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2007.
83. Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Д. Бейтса. — М.: Мир, 1964.
84. *Gryzinski M.* // Phys. Rev. — 1959. — V. 115. — P. 374.
85. *Гуревич А. В.* // Геомагнетизм и аэрономия. — 1964. — Т. 4. — С. 3.

86. Аллен К. У. Астрофизические величины. — М.: Иностран. лит., 1960.
87. Бете Г., Соллпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — Физматгиз, 1960.
88. Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 1326.
89. Гуревич А. В., Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46. — С. 1281.
90. Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P. // Proc. Roy. Soc. A. — 1962. — V. 267. — P. 297; V. 270. — P. 155 (см. также [83]).
91. Кузнецов Н. М., Райзер Ю. П. // ПМТФ. — 1965. — № 4. — С. 10.
92. Данилов А. Д., Иванов-Холодный Г. С. // УФН. — 1965. — Т. 85. — С. 259.
93. Eschenroeder A. Q., Daiber J. W., Golian T. G., Hertzberg A. High Temperat. Aspect. Hypersonic Flow. — Pergamon Press, 1964. — Ch. 11.
94. Makin B., Keck J. C. // Phys. Rev. Lett. — 1963. — V. 11. — P. 281.

К главе VII

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Becker R. // Zs. f. Phys. — 1922. — Bd. 8. — S. 321.
3. Morduchow M., Libby P. A. // J. Aeron. Sci. — 1949. — V. 16. — P. 674;
Перевод: Механика. — 1950. — № 1.
4. Meyerhoff L. // J. Aeron. Sci. — 1950. — V. 17. — P. 775;
Перевод: Механика. — 1951. — № 6.
5. Thomas L. H. // J. Chem. Phys. — 1944. — V. 12. — P. 449.
6. Herpin A. // Rev. Sci. — 1948. — V. 86. — P. 35.
7. Puckett A. E., Stewart H. I. // Quart Appl. Mech. — 1950. — V. 7. — P. 457.
8. Mises R. // J. Aeron. Sci. — 1950. — V. 17. — P. 551;
Перевод: Механика. — 1951. — № 3.
9. Lieber, Romano, Lew // J. Aeron. Sci. — 1951. — V. 18. — P. 55;
Перевод: Механика. — 1952. — № 1.
10. Gilbarg P., Paolucci D. // J. Rat. Mech. Annal. — 1953. — V. 2. — P. 617.
11. Bernard J. // J. Aeron. Sci. — 1951. — V. 18. — P. 210.
Перевод: Механика. — 1952. — № 4.
12. Roy M. // C. R. Acad. Sci. — 1944. — V. 218. — P. 813.
13. Libby P. A. // J. Aeron. Sci. — 1951. — V. 18. — P. 187.
Перевод: Механика. — 1952. — № 4.
14. Zoller K. // Zs. f. Phys. — 1951. — Bd. 130. — S. 1.
Перевод: Механика. — 1952. — № 6.
15. Cowan G. R., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1950. — V. 18. — P. 1008;
Cowan G. R., Greene E. F., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1951. — V. 19. — P. 427;
Greene E. F., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1953. — V. 21. — P. 617.
16. Mott-Smith H. M. // Phys. Rev. — 1951. — V. 82. — P. 385.
Перевод: Механика. — 1953. — № 1.
17. Sakurai A. // J. Fluid Mech. — 1957. — V. 3. — P. 3; Research, Rep. Tokyo Elect. Eng. College. — 1957. — V. 5. — P. 39; 1958. — V. 6. — P. 49.
18. Rayleigh // Proc. Roy. Soc. — 1910. — V. 84. — P. 247.
19. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — М.: Иностран. лит., 1960;
Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — АН СССР, 1947.
а) Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 857.
20. Дьяков С. П. // ЖЭТФ. — 1954. — Т. 27. — С. 283.
21. Sherman F. S. // J. Fluid Mech. — 1960. — V. 8. — P. 465.
22. Cowling T. G. // Phil. Mag. — 1942. — V. 33. — P. 61.
23. Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. — 1946. — Т. 16. — С. 365.
24. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. — АН СССР, 1946.

25. Griffith W., Brickl D., Blackmail V. // Phys. Rev. — 1956. — V. 102. — P. 1209.
26. Blackman V. H. // J. Fluid Mech. — 1956. — V. 1. — P. 61.
27. Matthews O. // Phys. Fluids. — 1959. — V. 2. — P. 170.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 11. — С. 65.
28. Лосев С. А. // ДАН СССР. — 1958. — Т. 120. — С. 1291.
29. Генералов Н. А., Лосев С. А. // ПМТФ. — 1960. — № 2. — С. 64.
30. Britton D., Davidson N., Gehman W., Sehott G. // J. Chem. Phys. — 1956. — V. 25. — P. 804; 810;
Palmer H. B., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1957. — V. 26. — P. 98.
31. Лосев С. А., Осипов А. И. // УФН. — 1961. — Т. 74. — С. 393.
32. Duff R., Davidson N. // J. Chem. Phys. — 1959. — V. 31. — P. 1018.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1960. — № 5.
33. Лосев С. А., Генералов Н. А. // ДАН СССР. — 1960. — Т. 133. — С. 872.
34. Биберман Л. М., Векленко Б. А. // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37. — С. 164.
35. Petschek H., Byron S. // Annals of Physics. — 1957. — V. 1. — P. 270.
Перевод: Ударные трубы: Сб. переводов. — Иностр. лит., 1962.
36. Bond J. W. // Phys. Rev. — 1957. — V. 105. — P. 1683.
37. Rostagni A. // Nuovo Cimento. — 1936. — V. 13. — P. 389.
38. Wayland // Phys. Rev. — 1937. — V. 31. — P. 52.
39. Weymann H. D. // Phys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 545.
40. Manheimer-Timnat Y., Low W. // J. Fluid Mech. — 1959. — V. 6. — P. 449;
Niblett B., Blackman V. H. // J. Fluid Mech. — 1958. — V. 4. — P. 191.
41. Hammerling P., Teare J. D., Kivel B. // Phys. Fluids. — 1959. — V. 2. — P. 422.
42. Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1126.
43. Шафранов В. Д. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1453.
44. Jukes J. D. // J. Fluid Mech. — 1957. — V. 3. — P. 275.
a) Tidman D. A. // Phys. Rev. — 1958. — V. 111. — P. 1439.
45. Greenberg O. W., Sen H. K., Treve Y. M. // Phys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 379.
46. Krook M. // Annals of Phys. — 1959. — V. 6. — P. 188;
Bond J. W. // Jet Propulsion. — 1958. — V. 37. — P. 228.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1959. — № 1.
47. Райзер Ю. П. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1528.
48. Райзер Ю. П. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 33. — С. 101.
49. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. // УФН. — 1957. — Т. 63. — С. 613.
50. Прокофьев В. А. // Учен. зап. МГУ. Вып. 172, Механика. — 1954. — Т. 79.
a) Белоконь В. А. // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 36. — С. 341; ДАН СССР. — 1972. — Т. 202, № 3.
51. Имшенник В. С. // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 236; Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1962. — Т. 2. — С. 206.
52. Gustafson W. A. // Phys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 732.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1961. — № 3. — С. 31.
53. Muckenfuss C. // Phys. Fluids. — 1960. — V. 3. — P. 320.
54. Ziering S. // Phys. Fluids. — 1961. — V. 4. — P. 765.
55. Glansdorff P. // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 371.
56. Hansen K., Hornig D. F. // J. Chem. Phys. — 1960. — V. 33. — P. 913.
57. Blythe P. A. // J. Fluid Mech. — 1961. — V. 10. — P. 33;
Сб. переводов. Механика. — 1962. — № 2. — С. 69.
58. Анисимов С. И. // ЖТФ. — 1961. — Т. 31. — С. 1491.
59. Генералов Н. А. // Вестн. МГУ. Физ. астр. — 1962. — № 2. — С. 51.
60. Catas M. // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 448.
61. Poth W. // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 991.
62. Matthews D. L. // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 639.
63. Johannesen N. H., Zienkiewicz H. K., Blythe P. A., Gerrard J. H. // J. Fluid Mech. — 1962. — V. 13. — P. 213.
64. Hurler L. R., Gaydon A. G. // Nature. — 1959. — V. 4702. — P. 184.

65. *Catag M.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 460.
66. *Rink J. P., Knight H. T., Duff R. E.* // J. Chem. Phys. — 1961. — V. 34. — P. 1942.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1962. — № 4. — С. 58.
67. *Patch R. W.* // J. Chem. Phys. — 1962. — V. 36. — P. 1919.
68. *Allen R. A., Keck J. C., Camm I. C.* // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 284.
69. *Wray K., Teare I. D., Hammerling P., Kivel B.* // 8th Symp. Intern. Combustion. Pasadena, 1960. — P. 84.
70. *LinShao-Chi.* Rarefied Gas Dynamic. — N. Y., London: Acad. Press, 1961. — P. 623.
71. *Саясов Ю. С.* // ПМТФ. — 1962. — № 1. — С. 61; 1961. — № 6. — С. 172.
72. *Кузнецов Н. М.* // Инж.-физ. журн. — 1960. — Т. 3. — С. 17; 1962. — Т. 5, № 6. — С. 97.
73. *Bortner M. H.* // Planet and Space Sci. — 1961. — V. 6. — P. 74.
74. *Лунькин Ю. П.* // ЖТФ. — 1961. — Т. 31. — С. 1112.
75. *Dorrance W.* // J. Aero Space Sci. — 1961. — V. 28. — P. 43.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1961. — № 9. — С. 40.
76. *Wetzel L.* // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 824.
77. *Pipkin A. C.* // Phys. Fluids. — 1961. — V. 4. — P. 1298.
78. *Bortner M. H.* // Planet and Space Sci. — 1961. — V. 3. — P. 99.
79. *Blackman V. H., Niblett C. B. F.* // Fundam. data obtained schock-tube experim. — Oxford, London, N. Y., Paris: Pergamon Press, 1961. — P. 221.
Перевод: Основные результаты экспериментов на ударных трубах. — Иностр. лит., 1963.
80. *LinShao-Chi* // Planet and Space Sci. — 1961. — V. 6. — P. 94.
81. *Lamb L., LinShao-Chi* // J. Appl. Phys. — 1957. — V. 28. — P. 754.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1958. — № 3.
82. *Sisco W. B., Fiskin J. M.* // Planet and Space Sci. — 1961. — V. 6. — P. 47.
83. *Viegas J. R., Peng T. C.* // ARS J. — 1961. — V. 31. — P. 654.
84. *Sherman A.* // ARS J. — 1960. — V. 30. — P. 559.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1961. — № 4. — С. 21.
85. *Пикельнер С. В.* // Изв. Крым. астрон. обществ. — 1954. — Т. 12. — С. 93;
Основы космической электродинамики. — Физматгиз, 1961.
86. *Lin S. C., Teare J. D.* // Phys. Fluids. — 1963. — V. 6. — P. 355.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1964. — № 5. — С. 16.
87. *Lin S. C., Neal R. A., Fyfe W. I.* // Phys. Fluids. — 1962. — V. 5. — P. 1633.
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1964. — № 4. — С. 63.
88. *Имшенник В. С., Морозов Ю. И.* // ПМТФ. — 1964. — № 2. — С. 8.
89. *Жафрен М. И., Пробстейн Р. Ф.* // ПМТФ. — 1964. — № 6. — С. 6.
90. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — Наука, 1966.
91. *Wray K. L., Freeman T. S.* // J. Chem. Phys. — 1964. — V. 40. — P. 2785.
92. High Temperat. Aspects Hypersonic Flow. — Pergamon Press, 1964.
93. *Биберман Л. М., Якубов И. Т.* // ЖТФ. — 1963. — Т. 33, № 11. — С. 1344.
94. *Gloersen P.* // Bull. Amer. Phys. Soc. — 1959. — V. 4. — P. 283.
95. *Johnston H. S., Kornegay W.* // J. Chem. Phys. — 1963. — V. 38. — P. 2242.
96. *Кузнецов Н. М.* // ЖТФ. — 1964. — Т. 34. — С. 624.
97. *Биберман Л. М., Якубов И. Т.* // Теплофизика высоких температур. — 1965. — Т. 3, № 2.
98. *Бронштэн В. А.* Проблемы движения в атмосфере крупных метеоритных тел. — АН СССР, 1963;
Бронштэн В. А., Чигорин А. Н. // Теплофизика высоких температур. — 1964. — Т. 2. — С. 860.
99. *Биберман Л. М., Ульянов К. Н.* // Оптика и спектроскопия. — 1964. — Т. 16. — С. 394.
100. *Тамм И. Е.* // Тр. Физ. ин-та АН СССР. — 1965. — Т. 29. — С. 239.

К главе VIII

1. *Kantrowitz A.* // J. Chem. Phys. — 1942. — V. 10. — P. 145; 1946. — V. 14. — P. 150.
2. *Bloom M. H., Steiger M. H.* // J. Aero Space Sci. — 1960. — V. 27. — P. 821;
Перевод: Вопросы ракетн. техн. — 1961. — № 5.
а) *Li Ting-Y* // ARS J. — 1961. — V. 31. — P. 170.

3. *Kneser H. O.* // *Ann. der Physik.* — 1931. — Bd. 11. — S. 761.
4. *Kneser H. O.* // *Ann. der Physik.* — 1931. — Bd. 11. — S. 777.
5. *Einstein A.* Sitzungsber. — Berliner Akad. der Wissensch, 1920. — P. 380.
6. *Ноздрев В. Ф.* Применение ультразвуки в молекулярной физике. — Физматгиз, 1958.
7. *Горелик Г. С.* Колебания и волны. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
8. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* // *ЖЭТФ.* — 1937. — Т. 7. — С. 3.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Б. М.* Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
10. *Ландау Л., Теллер Э.* // *Phys. Zs. Sowjetunion.* — 1936. — Bd. 10. — S. 34.
11. *Гинзбург В. Л.* // *Акуст. журн.* — 1955. — Т. 1. — С. 31.
12. *The Effects of Atomic Weapons.* — N. Y.-Toronto-London, 1950.
13. *Райзер Ю. П.* // *ЖФХ.* — 1959. — Т. 33. — С. 700.
14. *Зельдович Я. Б., Садовников П. Я., Франк-Каменецкий Д. А.* Окисление азота при горении. — АН СССР, 1947.
15. *Цукерман В. А., Манакова М. А.* // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 27. — С. 391.
а) *Molmud P.* // *Phys. Fluids.* — 1960. — V. 3. — P. 362.
16. *Белоконь В. А.* // *Тр. МФТИ.* — 1963. — Вып. 11.
17. *Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 37. — С. 580.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Б. М.* Теоретическая физика. Т. V: Статистическая физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
19. *Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1959. — Т. 37. — С. 1741.
20. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 35. — С. 1402.
21. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. — АН СССР, 1945.
22. *Зельдович Я. Б.* // *ЖЭТФ.* — 1942. — Т. 12. — С. 525.
23. *Фесенков В. Г.* Метеорная материя в межпланетном пространстве. — АН СССР, 1947.
24. *Narasimha R.* // *J. Fluid Mech.* — 1962. — V. 12. — P. 294.
Перевод: *Механика.* — 1963. — № 2.
25. *Прессман А. Я.* // *ДАН СССР.* — 1961. — Т. 138. — С. 1305.
26. *Райзер Ю. П.* // *ПМТФ.* — 1964. — № 3. — С. 162.
27. *Райзер Ю. П.* // *ПМТФ.* — 1963. — № 6. — С. 19.
28. *Кузнецов Н. М., Райзер Ю. П.* // *ПМТФ.* — 1965. — № 4. — С. 10.

К главе IX

1. *Модель И. Ш.* // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 32. — С. 714.
2. *Зельдович Я. Б.* // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 32. — С. 1126;
Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. // *УФН.* — 1957. — Т. 63. — С. 613.
3. *Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 32. — С. 1528.
4. *Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1957. — Т. 33. — С. 101.
5. *Ванюков М. П., Мак А. А.* // *УФН.* — 1958. — Т. 66. — С. 301.
6. *Schneider E. G.* // *J. Opt. Soc. Amer.* — 1940. — V. 30. — P. 128.
7. *Аглинцев К. К.* Дозиметрия ионизирующих излучений. — Гостехиздат, 1950. — С. 46.
8. *Ландолт.* Таблицы 1. Ч. I. — Изд. 6-е. — 1950. — С. 316.
9. *Messner R. H.* // *Zs. f. Phys.* — 1933. — Bd. 85. — S. 727.
10. *Dershner E.* // *Phys. Rev.* — 1931. — V. 37. — P. 1238.
11. *The Effects of Atomic Weapons.* — N. Y.-Toronto-London, 1950.
12. Действие ядерного оружия. — Воениздат, 1960.
13. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — Гостехиздат, 1957.
14. *Райзер Ю. П.* // *ЖФХ.* — 1959. — Т. 33. — С. 700.
15. *Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 483.
16. *Зельдович Я. Б., Компанеев А. С., Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 1278.
17. *Зельдович Я. Б., Компанеев А. С., Райзер Ю. П.* // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 1447.
18. *Имшенник В. С., Надежин Д. К.* // *Астрон. журн.* — 1964. — Т. XLI, вып. 5. — С. 829.
19. *Абрамсон И. С., Гегечкори Н. М., Драккина С. И., Мандельштам С. Л.* // *ЖЭТФ.* — 1947. — Т. 17. — С. 862.
20. *Драккина С. И.* // *ЖЭТФ.* — 1951. — Т. 21. — С. 473.

21. Гегечкори Н. М. // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21. — С. 493.
22. Долгов Г. Г., Мандельштам С. Л. // ЖЭТФ. — 1953. — Т. 24. — С. 691.
23. Мандельштам С. Л., Суходрев Н. К. // ЖЭТФ. — 1953. — Т. 24. — С. 701.
24. Суходрев Н. К. // Тр. ФИАН. — 1961. — Т. 15. — С. 123.
25. Брагинский С. И. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 1548.
26. Живлюк Ю. Н., Мандельштам С. Л. // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 483.

К главе X

1. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. // Сб., посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. — 1950.
2. Баренблатт Г. И. // Прикл. матем. и мех. — 1952. — Т. 16. — С. 67.
3. Андрианкин Э. И., Рыжов О. С. // ДАН СССР. — 1957. — Т. 115. — С. 882.
4. Андрианкин Э. И. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 25. — С. 428.
5. Баренблатт Г. И. // Прикл. матем. и мех. — 1954. — Т. 18, № 3.
6. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. // Прикл. матем. и мех. — 1957. — Т. 21. — С. 718.
7. Marshak R. // Phys. Fluids. — 1958. — V. 1. — P. 24. Перевод: Проблемы современной физики. — 1959. — № 1.
8. Немчинов И. В. // ПМТФ. — 1960. — № 1. — С. 36.
9. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И. // ДАН СССР. — 1959. — Т. 118. — С. 671.
10. Компанеев А. С., Ланцбург Е. Я. // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 41. — С. 1649.
11. Компанеев А. С., Ланцбург Е. Я. // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43. — С. 234.
12. Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Физика молнии и молниезащиты. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

К главе XI

1. Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Леденев В. Н., Жучихин В. И., Бражник М. И. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 874.
2. Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Бражник М. И. // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 886.
3. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трунин Р. Ф. // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — С. 790.
4. Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Бражник М. И., Владимиров Л. А., Сперанская М. П., Фунтиков А. И. // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — С. 1061.
5. Альтшулер Л. В., Кулешова Л. В., Павловский М. Н. // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 39. — С. 16.
6. Шнирман Г. Л., Дубовик А. С., Кевлишвили П. В. Высокоскоростная фоторегистрирующая установка СФР. Изд-во Ин-та техн.-эконом. информ. АН СССР, 1957.
7. Дубовик А. С. // Журн. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр. — 1957. — Т. 2. — С. 293; 1959. — Т. 4. — С. 226.
8. Дубовик А. С., Кевлишвили П. В., Шнирман Г. Л. Лупа времени на 33 миллиона кадров в секунду // Докл. на IV Международном конгрессе по высокоскор. фотогр. и кинематогр., Кельн, 1958.
9. Шнирман Г. Л. // Успехи научн. фотогр. — 1959. — Т. 6. — С. 93.
10. Дубовик А. С. // Успехи научн. фотогр. — 1959. — Т. 6. — С. 102.
11. Цукерман В. А., Манакова М. А. Импульсные рентгеновские трубки на 1–2 миллиона вольт // Докл. на IV Международном конгрессе по высокоскор. фотогр. и кинематогр., Кельн, 1958.
12. Бутелов М. М., Завойский Е. К. и др. ЭОПы типа ПИМ-3 и ПИМ-4 // Докл. на IV Международном конгрессе по высокоскор. фотогр. и кинематогр., Кельн, 1958.
13. Гомбаш П. Статистическая теория атома и ее применения. — Иностр. лит., 1951.
14. Кормер С. Б., Урлин В. Д. // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131. — С. 542.
15. Кормер С. Б., Урлин В. Д., Попова Л. Т. // ФТТ. — 1961. — Т. 3. — С. 2131.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Б. М. Теоретическая физика. Т. V: Статистическая физика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

17. *Slatter J. C.* Introduction in the Chemical Physics. — New York; London: McGraw Book Company, Inc., 1939.
18. *Ландау Л. Д., Станюкович К. П.* // ДАН СССР. — 1945. — Т. 46. — С. 399.
19. *Gilvarry J. J.* // Phys. Rev. — 1954. — V. 96. — P. 934; 944.
Gilvarry J. J., Reebles G. H. // Phys. Rev. — 1955. — V. 99. — P. 500.
20. *Latter R.* // Phys. Rev. — 1955. — V. 99. — P. 1854.
21. *Баум Ф. А., Станюкович К. П., Шехтер Б. И.* Теория взрывчатых веществ. — Ч. I. — 1952; Физика взрыва. — Физматгиз, 1959.
22. *Walsh J. M., Christian R. H.* // Phys. Rev. — 1955. — V. 97. — P. 1544.
23. *Walsh J. M., Rise M. H., McQueen R. G., Yarger F. L.* // Phys. Rev. — 1957. — V. 108. — P. 196.
24. *Goranson W., Bankroft D. et al.* // J. Appl. Phys. — 1955. — V. 26. — P. 1479.
25. *Mallory D.* // J. Appl. Phys. — 1955. — V. 26. — P. 555.
26. *McQueen R. G., Marsh S. P.* // J. Appl. Phys. — 1960. — V. 31. — P. 1253.
27. *Dugdale J. S., McDonald D. K.* // Phys. Rev. — 1953. — V. 89. — P. 832.
28. *Ландау Л. Д., Лифшиц Б. М.* Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
29. *Рахматуллин Х. А., Шапиро Г. С.* // Изв. АН СССР. ОТН. — 1955. — № 2. — С. 68.
30. *Bancroft B., Peterson E., Minshall S.* // J. Appl. Phys. — 1956. — V. 27. — P. 291.
31. *Duff R. E., Minshall S.* // Phys. Rev. — 1957. — V. 108. — P. 1207.
32. *Drummond W. E.* // J. App Phys. — 1957. — V. 28. — P. 998.
33. *Дремин А. Н., Ададуров Г. А.* // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128. — С. 261.
34. *Дремин А. Н.* // ПМТФ. — 1960. — № 3. — С. 184.
35. *Alder B. J., Christian R. H.* // Phys. Rev. Lett. — 1960. — V. 4. — P. 450.
36. *Лифшиц И. М.* // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — С. 1569.
37. *Гандельман Г. М.* // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43. — С. 131.
38. *Иванов А. И., Новиков С. А.* // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 40. — С. 1880.
39. *Задумкин С. Н.* // Инж.-физ. журн. — 1960. — Т. 3. — С. 63.
40. Справочник химика. — Т. I. — Госхимиздат, 1951.
41. *Зельдович Я. Б., Кормер С. Б., Синицын М. В., Курапин А. И.* // ДАН СССР. — 1958. — Т. 122. — С. 48.
42. *Зельдович Я. Б.* // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1577.
43. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 35. — С. 1402.
44. *Урлин В. Д., Иванов А. А.* // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 6. — С. 1303.
45. *Бриш А. А., Тарасов М. С., Цукерман В. А.* // ЖЭТФ. — 1959. — Т. 37. — С. 1543.
46. *Бриш А. А., Тарасов М. С., Цукерман В. А.* // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — С. 22.
47. *Alder B. J., Christian R. H.* // Phys. Rev. — 1956. — V. 104. — P. 550.
48. *Зельдович Я. Б., Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. — 1944. — Т. 14. — С. 32.
49. *Абрикосов А. А.* // Астрон. журн. — 1954. — Т. XXXI. — С. 112.
50. *Бриджмен П. В.* Физика высоких давлений. — ОНТИ, 1935; Новейшие работы в области высоких давлений. — Иностр. лит., 1948.
51. *Зельдович Я. Б., Кормер С. Б., Синицын М. В., Юшко К. Б.* // ДАН СССР. — 1961. — Т. 138. — С. 1333.
52. *Ландау Л. Д., Лифшиц Б. М.* Теоретическая физика. Т. VIII: Электродинамика сплошных сред. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
53. *Cowan J. R., Hornig D. F.* // J. Chem. Phys. — 1950. — V. 18. — P. 1008.
54. *Гинзбург В. Л., Мотулевич П.* // УФН. — 1955. — Т. 55. — С. 469.
55. *Алтишулер Л. В.* // УФН. — 1965. — Т. 85, вып. 2. — С. 197.
56. *Кормер С. Б., Фунтиков А. И., Урлин В. Д., Колесникова А. Н.* // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 42. — С. 686.
57. *Кузнецов Н. М.* // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 156.
58. *Кузнецов Н. М.* // ПМТФ. — 1965. — № 1. — С. 112.
59. *Урлин В. Д.* // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — С. 485.

К главе XII

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — Гостехиздат, 1955.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — 4-е изд. — Гостехиздат, 1957.
3. Guderley G. // Luftfahrtforschung. — 1942. — Bd. 19. — S. 302.
4. Rayleigh // Phil. Mag. — 1917. — V. 34. — P. 94.
5. Hunter C. // J. Fluid Mech. — 1960. — V. 8. — P. 241.
6. Забабахин Е. И. // Прикл. матем. и мех. — 1960. — Т. 24. — С. 1129.
7. Франк-Каменецкий Д. А. // ДАН СССР. — 1951. — Т. 80. — С. 185.
8. Гандельман Г. М., Франк-Каменецкий Д. А. // ДАН СССР. — 1956. — Т. 107. — С. 811.
9. Sakurai A. // Commun. on Pure and Appl. Math. — 1960. — V. 13. — P. 353.
10. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. // УФН. — 1960. — Т. 71. — С. 411.
11. Colgate S. A., Johnson M. H. // Phys. Rev. Lett. — 1960. — V. 5. — P. 235.
12. Зельдович Я. Б. // Акуст. журн. — 1956. — Т. 2. — С. 28.
13. Адамский В. Б. // Акуст. журн. — 1956. — Т. 2. — С. 3.
14. Жуков А. И., Каждан Я. М. // Акуст. журн. — 1956. — Т. 2. — С. 352.
15. Hafele W. // Zs. f. Naturforschung. — 1954. — Bd. 9a. — S. 1006.
16. Hoerner S. // Zs. f. Naturforschung. — 1955. — Bd. 10a. — S. 687.
17. Weizsacker C. // Zs. f. Naturforschung. — 1954. — Bd. 9a. — S. 269.
18. Адамский В. Б., Попов Н. А. // Прикл. матем. и мех. — 1959. — Т. 23. — С. 564.
19. Крашенинникова Н. Л. // Изв. АН СССР. — 1955. — № 10. — С. 14.
20. Райзер Ю. П. // ПМТФ. — 1963. — № 1. — С. 57.
21. Вторая конференция по кометной и метеорной астрономии // Астрон. журн. 1937. Т. XIV, № 3. — С. 249;
Станюкович К. П., Федынский В. В. // ДАН СССР. — 1947. — Т. 57, № 2;
Станюкович К. П. // Метеоритика. — 1950. — № 7; Искусственные спутники Земли. — 1960. — № 4. — С. 86.
22. Станюкович К. П. // Изв. АН СССР. ОТН, Мех. и машин. — 1960. — № 5. — С. 3.
23. Лаврентьев М. А. // Искусственные спутники Земли. — 1959. — Вып. 3. — С. 61.
24. Компанец А. С. // ДАН СССР. — 1956. — Т. 109, № 1.
25. Андрианкин Э. И., Корявов В. П. // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128. — С. 257.
26. Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 33. — С. 700.
27. Забабахин Е. И., Нечаев М. Н. // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 33. — С. 442.
28. Компанец А. С. // ДАН СССР. — 1960. — Т. 130. — С. 1001.
27. Андрианкин Э. И., Коган А. М., Компанец А. С., Крайнов В. П. // ПМТФ. — 1962. — № 6.
30. Райзер Ю. П. // ДАН СССР. — 1963. — Т. 153, № 3. — С. 551.
31. Райзер Ю. П. // ПМТФ. — 1964. — № 4. — С. 49.
32. Райзер Ю. П. // ПМТФ. — 1963. — № 6. — С. 19.

Научное издание

ЗЕЛЬДОВИЧ Яков Борисович
РАЙЗЕР Юрий Петрович

**ФИЗИКА УДАРНЫХ ВОЛН И ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ**

Редактор *М.Б. Козинцова*
Оригинал-макет: *Е.Н. Водоватова*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 24.01.08. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 53,15. Уч.-изд. л. 58,5. Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-07-92, 72-61-75, 72-60-63; факс: (8172) 76-00-49, 72-71-11
E-mail: forma@pfpoligrafist.com

ISBN 978-5-9221-0938-3

