Министерство образования Российской Федерации

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

А. П. Замятин, А. А. Булатов, Б. М. Верников

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2001

УДК 512(075.8)
ББК 22.143я73-1
З269

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Уральского государственного
университета им. А. М. Горького

Замятин А. П., Булатов А. А., Верников Б. М.
З269 Алгебра и геометрия: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. 458 с.
ISBN 5-7996-0046-0

Пособие предназначено для студентов, обучающихся специальностям экономического профиля. Наряду с традиционными разделами, обычно включаемыми в курс линейной алгебры и аналитической геометрии, в нем содержатся начальные сведения о комплексных числах и указываются некоторые приложения линейной алгебры к задачам экономического характера. Помимо изложения теории, пособие содержит большое число алгоритмов и примеров решения типовых задач. Кроме того, в конце каждой главы приводится набор задач для самостоятельного решения и четыре варианта самостоятельной работы.

УДК 512(075.8)
ББК 22.143я73-1

Рецензенты: каф. алгебры и теории чисел
Урал. гос. пед. ун-та;
д-р физ.-мат. наук **В. Б. Репницкий**

ISBN 5-7996-0046-0

Оглавление

Предисловие

Данное пособие предназначено для студентов первого курса, обучающихся специальностям экономического профиля. Оно соответствует учебным планам этих специальностей, которые предусматривают объединенный курс (линейной) алгебры и (аналитической) геометрии. В пособии излагаются основные идеи, методы и результаты линейной алгебры и аналитической геометрии, приводятся начальные сведения о комплексных числах и рассматриваются некоторые приложения линейной алгебры к задачам экономического характера. Пособие объединяет в себе черты учебника, задачника и “решебника”. Наряду с теоретическим материалом приводится большое число алгоритмов и примеров решения типовых задач. Кроме того, в каждой главе имеется набор задач для самостоятельного решения и решения в аудитории, а также четыре варианта самостоятельной работы.

Пособие содержит 12 глав и приложение. В первых двух главах рассматриваются основы аналитической геометрии (в главе 1 — векторная алгебра, в главе 2 — прямые и плоскости). Глава 3 посвящена началам теории систем линейных уравнений, а глава 4 — первоначальным сведениям о комплексных числах. В следующих четырех главах излагаются основы линейной алгебры: в главе 5 изучаются векторные пространства, в главе 6 — матрицы и системы линейных уравнений, в главе 7 — линейные операторы, в главе 8 — евклидовы пространства. В следующих двух главах мы возвращаемся к аналитической геометрии и изучаем квадрики на плоскости (глава 9) и в пространстве (глава 10). В главе 11 рассматриваются квадратичные формы, а в главе 12 — неотрицательные матрицы и их приложения к математическому моделированию экономических процессов. В начале каждой главы ее содержание характеризуется более подробно. В приложении кратко описывается метод математической индукции, который используется в доказательстве ряда утверждений в основной части пособия. Пособие завершают список литературы, предметный указатель и список обозначений. Отметим, что число учебников и сборников задач по курсам линейной алгебры и аналитической геометрии весьма велико и наш список литературы заведомо не претендует на полноту.

Главы делятся на параграфы, которые имеют сквозную нумерацию. В каждой из глав все параграфы, кроме последнего, содержат изложение теоретического материала, сопровождаемое решением соответствующих задач. Последний параграф каждой главы целиком посвящен задачам. Он содержит перечень основных типов задач по теме главы с примерами решения задач всех типов (за исключением тех, для которых такие примеры были приведены ранее), набор задач для самостоятельного решения, ответы к ним и самостоятельную работу по теме главы. Разумеется, приводимая в этом параграфе классификация задач достаточно условна. Ее основная цель — указать студенту, задачи какого рода он должен уметь решать в первую очередь. В списке задач для самостоятельного решения наиболее сложные или нестандартно решаемые задачи отмечены звездочкой.

Структура пособия и уровень изложения материала основаны на опыте чтения авторами в течение ряда лет в Уральском госуниверситете курса лекций "Алгебра и геометрия" для студентов дневной и дистантной форм обучения по специальности "Информационные системы в экономике" (недавно она была переименована и теперь называется "Прикладная информатика в экономике"). За пределами пособия остался ряд тем, обычно включаемых в курс линейной алгебры (корневые подпространства, нормальная жорданова форма матрицы, унитарные пространства и некоторые другие). Это объясняется сравнительно небольшим количеством часов, выделяемых на курс "Алгебра и геометрия" учебными планами экономических специальностей, с одной стороны, и необходимостью отразить в курсе экономические приложения линейной алгебры — с другой. По тем же причинам ряд утверждений в пособии доказаны лишь в случае малых размерностей или приведены без доказательства.

Нумерация утверждений всех типов и формул начинается заново в каждом параграфе, а нумерация рисунков — в каждой главе. Символом ■ обозначается конец доказательства или его отсутствие.

Компьютерный макет пособия подготовлен авторами с использованием системы набора и верстки математических текстов LaTeX.

Авторы благодарят И. О. Корякова и А. Я. Овсянникова, указавших на ряд опечаток и неточностей в первоначальном тексте рукописи. Большую помощь в подборе задач оказал нам И. Ю. Жильцов, недавно трагически погибший в результате несчастного случая.

Глава 1

Векторная алгебра

В начале главы рассматриваются определители второго и третьего порядка. Далее изучаются линейные операции над векторами, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. После этого рассматривается понятие системы координат на плоскости и в пространстве, вводятся координаты точки и рассматриваются некоторые связанные с этим задачи.

§1. Определители второго и третьего порядка

Этот параграф играет вспомогательную роль и посвящен определению и некоторому обсуждению понятий, указанных в заглавии.

1. Понятие матрицы

Мы начнем с понятия матрицы. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит m строк и n столбцов, то будем говорить, что она имеет *порядок* (или *размер*) $m \times n$. Ниже приведен пример матрицы порядка 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0{,}5 & \pi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в записи матрицы мы не проводим линии, отделяющие одну строку от другой и один столбец от другого. Числа, из которых составлена матрица, называются ее *элементами*. В приведенном примере элементы матрицы A — это числа 2, -5, $\sqrt{2}$, 0, $0{,}5$ и π.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина "матрица порядка $n \times n$", как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка n*.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строкой*, а матрица, состоящая из одного столбца, — *столбцом*. Строку, состоящую из n столбцов (т.е. матрицу порядка $1 \times n$), называют *строкой длины n*, а столбец, состоящий из n строк (т.е. матрицу порядка $n \times 1$), — *столбцом длины n*.

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация. Так, произвольная матрица порядка 2×3 обозначается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Первый индекс элемента означает номер строки (они считаются сверху вниз), а второй — номер столбца (столбцы считаются слева направо). Например, a_{12} — элемент, стоящий в первой строке и втором столбце. Запись $A = (a_{ij})$ означает, что A — матрица, в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, обозначается через a_{ij}.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый порядок и на одинаковых местах в них стоят одни и те же элементы.

2. Определители второго порядка

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем этой матрицы (или *определителем второго порядка*) называется число, равное

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 = -2.$$

Элементы a_{11}, a_{22} образуют *главную диагональ* квадратной матрицы второго порядка, а элементы a_{12}, a_{21} — ее *побочную диагональ*. Таким образом,

> *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали минус произведение элементов на побочной диагонали.*

Определители возникли в теории систем линейных уравнений. Покажем, как применяется понятие определителя второго порядка к решению систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Такая система в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы* (1). Следующее утверждение представляет собой частный случай теоремы, которую обычно называют правилом Крамера или теоремой Крамера (см. теорему 1 в §14).

Теорема 1. *Если $\Delta \neq 0$, то система* (1) *имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.*

Как уже отмечалось, в §14 будет доказано более общее утверждение, нежели теорема 1. Тем не менее мы приведем доказательство этой теоремы, чтобы обратить внимание на логику проведения доказательств такого рода утверждений.

Доказательство. Докажем вначале существование решения системы. Для этого достаточно проверить, что пара чисел $\left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \dfrac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ является решением системы (1). Подставим эти числа в первое уравнение системы. Мы получим

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} &= \frac{a_{11}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{12}(a_{11} b_2 - a_{21} b_1)}{\Delta} = \\ &= \frac{a_{11} b_1 a_{22} - a_{11} b_2 a_{12} + a_{12} a_{11} b_2 - a_{12} a_{21} b_1}{\Delta} = \\ &= \frac{b_1(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1 \cdot \Delta}{\Delta} = b_1. \end{aligned}$$

Итак, пара чисел $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ является решением первого уравнения системы (1). Аналогично проверяется и то, что она является решением второго уравнения этой системы. Следовательно, существование решения доказано.

Докажем теперь единственность решения. Пусть (x_1^0, x_2^0) — решение системы (1), т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 \ + \ a_{12}x_2^0 \ = \ b_1, \\ a_{21}x_1^0 \ + \ a_{22}x_2^0 \ = \ b_2. \end{cases}$$

Умножим первое равенство на a_{22}, второе на $-a_{12}$ и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$a_{11}a_{22}x_1^0 + a_{12}a_{22}x_2^0 - a_{21}a_{12}x_1^0 - a_{22}a_{12}x_2^0 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Это равенство можно записать следующим образом: $\Delta \cdot x_1^0 = \Delta_1$. Поскольку $\Delta \neq 0$, имеем $x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично доказывается, что $x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Мы взяли произвольное решение (x_1^0, x_2^0) системы (1) и доказали, что оно совпадает с решением $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$. Это означает, что решение единственно. Теорема 1 доказана. ∎

3. Определители третьего порядка

Рассмотрим теперь квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем этой матрицы (или *определителем третьего порядка*) называется число, равное

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) -$$

$$- \ 2 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot (-2) = 2.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. Существует несколько приемов для того, чтобы запомнить эту формулу. Опишем один из них, называемый *правилом треугольников*. Прежде всего отметим, что определитель представляет собой алгебраическую сумму шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы, среди которых есть ровно по одному элементу из каждой строки и ровно по одному элементу из каждого столбца. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют *главную диагональ* квадратной матрицы третьего порядка, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} — ее *побочную диагональ*. Правило треугольников состоит в следующем:

> *со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.*

На рис. 1 приведена графическая иллюстрация этого правила.

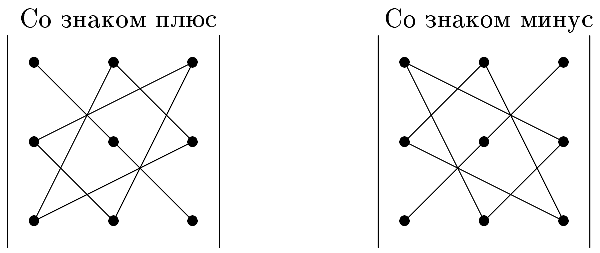


Рис. 1

Определители третьего порядка можно применять для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы* (2). Справедливо следующее утверждение, которое аналогично доказанной выше теореме 1 и тоже является частным случаем правила (или теоремы) Крамера.

Теорема 2. *Если $\Delta \neq 0$, то система (2) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.* ∎

Доказательство теоремы 2 мы приводить не будем.

Понятия определителя второго и третьего порядка являются частными случаями понятия определителя n-го порядка, которое будет введено в §13. Там же будут изучены и свойства определителей произвольного порядка. Поэтому мы не будем сейчас рассматривать отдельно свойства определителей второго и третьего порядка, за исключением одного из них, которое понадобится нам уже вскоре. Докажем, что справедливо следующее равенство, которое сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению трех определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Это равенство называется *разложением определителя третьего порядка по первой строке.* Доказывается оно непосредственной проверкой. В самом деле, его правую часть можно записать в виде

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Если в этом выражении раскрыть скобки, то мы получим в точности формулу для вычисления определителя третьего порядка, т.е. левую часть равенства (3).

Отметим, что в правой части равенства (3) каждый из элементов первой строки умножается на определитель матрицы, получаемой из исходной матрицы вычеркиванием первой строки и того столбца, в котором стоит этот элемент. Знак перед каждым из слагаемых совпадает со знаком числа $(-1)^{1+j}$, где j — номер столбца, в котором стоит элемент первой строки, умножаемый на определитель второго порядка. Аналогичным образом можно написать формулы разложения определителя по любой другой строке и по любому столбцу (см. задачу 4 на с. 50 и ответ к ней на с. 54). Более подробная информация об этом будет приведена в §13.

§2. Линейные операции над векторами

В этом параграфе будет проведена формализация понятия вектора, определены операции сложения векторов и умножения вектора на число (которые часто объединяют термином *линейные операции над векторами*) и обсуждены свойства этих операций. Содержание параграфа в определенной степени повторяет соответствующие темы школьного курса математики, но имеются и некоторые отличия. Основное из них состоит в способе введения понятия вектора.

1. Понятие вектора

Для того чтобы обеспечить определенную цельность изложения, повторим ряд школьных определений.

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B будем обозначать через $\overrightarrow{AB}$. Расстояние между точками A и B будем называть *длиной* (или *модулем*) *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ и обозначать его через $|\overrightarrow{AB}|$. Допускается случай, когда $A = B$, тогда отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным к* $\overrightarrow{AB}$.

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Два ненулевых направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными*, если выполнено одно из следующих двух условий:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых и точки B и D расположены по одну сторону от прямой AC (рис. 2);

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой и луч, образуемый одним из этих отрезков, содержит луч, образуемый другим отрезком (рис. 3).

(*Луч, образуемый направленным отрезком* $\overrightarrow{PQ}$, — это луч прямой PQ, начинающийся в точке P и содержащий точку Q.) Ясно, что сонаправленные отрезки коллинеарны. Ненулевые коллинеарные направленные отрезки, не являющиеся сонаправленными, называются *антинаправленными* или *противонаправленными*. Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и антинаправленным любому направленному отрезку. Коллинеарность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обозначается так: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Сонаправленность отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем обозначать через $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, а антинаправленность — через $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

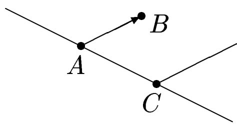


Рис. 2

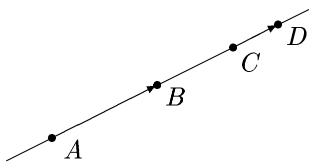


Рис. 3

Определение. *Вектором* называется совокупность всех направленных отрезков, равных некоторому фиксированному направленному отрезку.

Другими словами, вектор — это такое множество направленных отрезков $\vec{a}$, что

- любые два направленных отрезка из этого множества сонаправленны и имеют одинаковые длины;

- всякий направленный отрезок, который сонаправлен с каким-то отрезком из этого множества и имеет с ним одинаковую длину, принадлежит множеству $\vec{a}$.

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т.е. состоят из одних и тех же направленных отрезков. Допуская вольность речи, говорят, что

> *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, будет иногда называться *изображением вектора*. Для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A (рис. 4). Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A*.

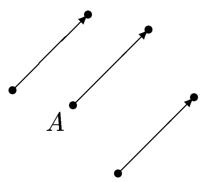


Рис. 4

Определение. Два вектора называются *коллинеарными* (*сонаправленными*, *антинаправленными*), если их изображения коллинеарны (сонаправленны, антинаправленны). Антинаправленные векторы называют также *противонаправленными*. *Длиной* (или *модулем*) *вектора* называется длина его изображения.

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков.

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нуль-вектором* (или *нулевым вектором*) и обозначается $\vec{0}$.

Из определения вектора непосредственно вытекает, что для всякого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ существует, и притом единственный, вектор, содержащий этот направленный отрезок. В дальнейшем мы для краткости часто будем писать "вектор $\overrightarrow{AB}$", имея в виду "вектор, содержащий направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$".

2. Сложение векторов и умножение вектора на число

Определение. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку O, отложим от нее вектор $\vec{a}$, получим точку A. От точки A отложим вектор $\vec{b}$, получим точку B. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Сумма будет обозначаться, как обычно, через $\vec{a}+\vec{b}$. Определение почти совпадает со школьным определением суммы векторов (и, разумеется, эквивалентно последнему). Отметим, что определение суммы векторов корректно, т.е. не зависит от выбора начальной точки O. Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (рис. 5). Следовательно, отрезки $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ изображают один и тот же вектор.

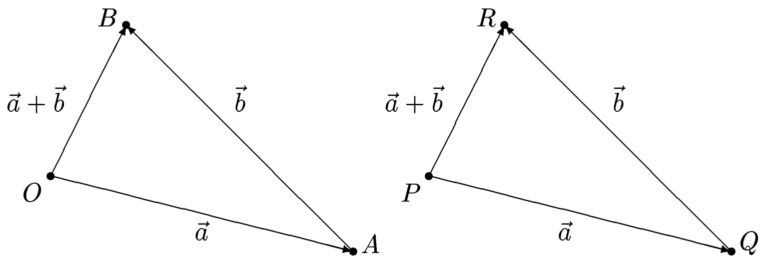


Рис. 5

Напомним ряд свойств операции сложения векторов. Если $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, то:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (сложение векторов *коммутативно*);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сложение векторов *ассоциативно*);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Эти свойства доказаны в школьном курсе, поэтому доказывать их здесь мы не будем.

Используя операцию сложения, можно определить *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, полагая $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Прежде чем переходить к операции умножения вектора на число, отметим, что вектор можно задать, указав либо его изображение, либо длину и направление.

Определение. *Произведением вектора $\vec{a}$ на число t* называется такой вектор $t\vec{a}$, что:

1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$;
3) если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Напомним некоторые свойства умножения вектора на число. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа, то:

1) $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
2) $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$.

Доказательства этих свойств даны в школьном курсе математики, поэтому здесь мы их не доказываем.

Напомним известный из школьного курса *критерий коллинеарности векторов*:

> *вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.*

Часто его формулируют более кратко следующим образом:

> *векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны.*

При решении некоторых задач бывает полезным следующее замечание.

> *Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то вектор $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ имеет длину 1 и сонаправлен с $\vec{x}$.*

В самом деле, используя п.1 определения произведения вектора на число, имеем

$$\left|\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{x}|}\right| \cdot |\vec{x}| = \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot |\vec{x}| = 1,$$

а сонаправленность векторов $\vec{x}$ и $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ вытекает из п.2 определения произведения вектора на число. Переход от ненулевого вектора $\vec{x}$ к вектору $\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ называют *нормированием вектора* $\vec{x}$. Вектор единичной длины называют *единичным* или *нормированным*.

3. Разложение вектора по базису

Введем понятие базиса для векторов, лежащих в плоскости.

Определение. *Базисом плоскости* называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.

Базис, состоящий из векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, будем обозначать через $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

В школьном курсе доказывается теорема о разложении по двум неколлинеарным векторам. Используя введенное понятие, эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Всякий вектор $\vec{a}$, лежащий в плоскости, можно, и притом единственным образом, разложить по базису $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ этой плоскости, т.е. представить в виде*

$$\vec{a} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2, \qquad (1)$$

где t_1, t_2 — действительные числа. ■

Определение. Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, причем t_1 — *первая координата*, а t_2 — *вторая*.

Тот факт, что вектор $\vec{a}$ имеет в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ координаты t_1, t_2, записывается в виде $\vec{a} = (t_1, t_2)$. Например, если в качестве базиса плоскости, в которой лежит треугольник OCD, взять векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ (именно в этом порядке), а точка A — середина отрезка OD, то в указанном базисе $\overrightarrow{CA} = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, поскольку $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{OC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ (рис. 6).

Перейдем к понятию базиса в пространстве. Здесь нам понадобится следующее понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

В дальнейшем нам будет удобно использовать понятие коллинеарности отрезка (или прямой) и плоскости. Отрезок (или прямая) *коллинеарен* плоскости, если он параллелен этой плоскости или лежит в ней. Используя это понятие, определение компланарности можно сформулировать так: векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ компланарны, если их изображения коллинеарны некоторой плоскости.

Определение. *Базисом пространства* называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Базис, состоящий из векторов $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$, будем обозначать через $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

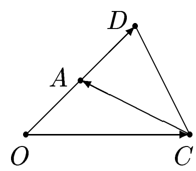


Рис. 6

Следующее утверждение является фактически теоремой о разложении по трем некомпланарным векторам из школьного курса математики.

Теорема 2. *Всякий вектор $\vec{a}$ пространства можно, и притом единственным образом, разложить по базису $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ пространства, т.е. представить в виде*

$$\vec{a} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + t_3\vec{b}_3, \tag{2}$$

где t_1, t_2, t_3 — действительные числа. ■

Определение. Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, причем t_1 — *первая координата*, t_2 — *вторая*, а t_3 — *третья*.

Тот факт, что вектор $\vec{a}$ имеет в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ координаты t_1, t_2, t_3, записывается в виде $\vec{a} = (t_1, t_2, t_3)$.

Легко видеть, что координаты суммы векторов есть сумма одноименных координат слагаемых, а координаты произведения вектора на число есть произведение координат вектора на это число. Иными словами, *если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе координаты (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_3, y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x}+\vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1, tx_2, tx_3). Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.*

§3. Скалярное произведение векторов

1. Определение и свойства скалярного произведения

Определение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Отложим их от одной и той же точки O и рассмотрим лучи OA и OB, выходящие из этой точки и направленные вдоль $\vec{a}$ и $\vec{b}$. *Углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между лучами OA и OB (рис. 7). Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

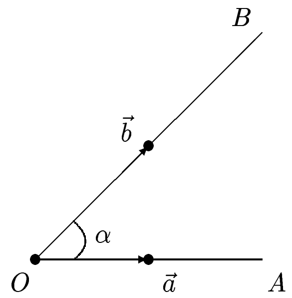


Рис. 7

Угол между нуль-вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет обозначаться через $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определим теперь основное понятие данного параграфа.

Определение. *Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается также через $(\vec{a}, \vec{b})$. Из определения скалярного произведения вытекает следующая формула для вычисления косинуса угла между ненулевыми векторами, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (1)$$

Отметим ряд свойств скалярного произведения. Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (скалярное произведение *коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}\vec{c})$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a}, \vec{b}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b})$ (скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения);
4) $(\vec{a}, \vec{a}) \geqslant 0$, *причем* $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$;
5) $\vec{a} \perp \vec{b}$ *тогда и только тогда, когда* $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Свойство 5 называют *критерием ортогональности векторов*. Все свойства доказываются в школьном курсе математики, поэтому здесь мы их доказывать не будем. Отметим только два простых следствия из свойств 1–3. Во-первых,

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}).$$

В самом деле, используя свойства 1 и 2, имеем

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}).$$

Во-вторых,

$$(\vec{a}, t\vec{b}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}).$$

Действительно, из свойств 1 и 3 вытекает, что

$$(\vec{a}, t\vec{b}) = (t\vec{b}, \vec{a}) = t \cdot (\vec{b}, \vec{a}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* $\vec{a}$. Поскольку $(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$, т.е.

скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Рассмотрим еще одно свойство скалярного произведения, которое понадобится нам в §4 для доказательства свойств векторного произведения. Начнем с вопроса о том, можно ли сокращать в скалярном произведении? Сформулируем его более точно. Пусть даны некоторые векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, для которых выполняется равенство $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c})$. Следует ли отсюда равенство $\vec{a} = \vec{b}$? Простой пример показывает, что ответ отрицателен. Действительно, возьмем в качестве $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два различных вектора, лежащих в некоторой плоскости, а в качестве $\vec{c}$ — произвольный вектор, ортогональный этой плоскости. Тогда $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Следовательно, в общем случае сокращать в скалярном произведении нельзя. Тем не менее справедливо следующее утверждение:

6) *если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $(\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{b}, \vec{x})$, то $\vec{a} = \vec{b}$.*

Докажем это свойство. Пусть для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $(\vec{a}, \vec{x}) = (\vec{b}, \vec{x})$. Тогда $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{x}) = 0$. Поскольку вектор $\vec{x}$ может быть любым, возьмем в качестве $\vec{x}$ вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Получим равенство $(\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = 0$. По свойству 4 отсюда следует, что $\vec{a}-\vec{b} = \vec{0}$, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$.

2. Вычисление скалярного произведения в координатах

Предположим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Можно ли, зная эти координаты, вычислить скалярное произведение? Используя дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения и вынесение скалярного множителя, получаем, что

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3, s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3) = \\ &= t_1 s_1(\vec{c}_1, \vec{c}_1) + t_1 s_2(\vec{c}_1, \vec{c}_2) + t_1 s_3(\vec{c}_1, \vec{c}_3) + \\ &+ t_2 s_1(\vec{c}_2, \vec{c}_1) + t_2 s_2(\vec{c}_2, \vec{c}_2) + t_2 s_3(\vec{c}_2, \vec{c}_3) + \\ &+ t_3 s_1(\vec{c}_3, \vec{c}_1) + t_3 s_2(\vec{c}_3, \vec{c}_2) + t_3 s_3(\vec{c}_3, \vec{c}_3).\end{aligned}$$

Мы видим, что для того, чтобы найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо знать дополнительно (кроме координат векторов) еще и попарные скалярные произведения базисных векторов. С учетом коммутативности это шесть чисел. Поэтому для произвольного базиса задачу о нахождении скалярного произведения мы решать не будем. Рассмотрим ее в частном случае — для ортонормированного базиса. Введем соответствующие понятия.

Определение. Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

В силу этого

$$\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3. \tag{2}$$

Таким образом,

> *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

В частности,

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2. \tag{3}$$

Аналоги этих формул для векторов на плоскости очевидны. Если векторы на плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

$$\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2 \quad \text{и} \quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t_1^2 + t_2^2.$$

3. Приложения

Здесь собраны формулы, основанные на материале данного параграфа, которые наиболее часто употребляются при решении задач. Все формулы приводятся для векторов в пространстве. В случае векторов на плоскости справедливы аналогичные формулы, надо только вычеркнуть из приводимых ниже формул третьи координаты. Далее в пособии мы будем без специальных оговорок ссылаться как на сами приводимые ниже формулы, так и на их варианты для векторов на плоскости.

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно вычислить

1) длину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \tag{4}$$

в силу формулы (3);

2) косинус угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3}{\sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}\cdot\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}} \qquad (5)$$

в силу формул (1), (3) и (4).

Поскольку в последнем равенстве в знаменателе всегда стоит положительное число (при условии, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые), знак косинуса угла между векторами совпадает со знаком их скалярного произведения. Следовательно, с помощью скалярного произведения можно определить, будет ли угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, прямой или тупой: *угол* $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ *является*

- *острым тогда и только тогда, когда* $t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3 > 0$;
- *прямым тогда и только тогда, когда* $t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3 = 0$;
- *тупым тогда и только тогда, когда* $t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3 < 0$.

§4. Векторное и смешанное произведения векторов

В этом параграфе будут изучены две новые по сравнению со школьным курсом операции над векторами, указанные в названии.

1. Определение и свойства векторного произведения

Начнем с определения ориентации тройки векторов.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) называется *правой*, если с конца вектора $\vec{w}$ поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ на наименьший угол выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* — в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую — *отрицательно ориентированной*.

Несложно убедиться в том, что перестановка двух соседних векторов меняет ориентацию тройки, а циклическая перестановка не меняет. (Циклическая перестановка — это переход от тройки $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ к тройке $(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$ или к тройке $(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$.)

Определение. *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нуль-вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Рассмотрим для примера ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, изображенный на рис. 8. Представим себе, что векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ расположены в плоскости листа, а вектор $\vec{e}_1$ направлен “к нам”. Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1.$$

Первое равенство вытекает из того, что $|\vec{e}_3| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$ и тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — правая. Два других равенства проверяются аналогично.

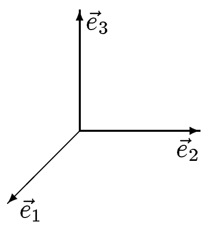


Рис. 8

Сформулируем основные свойства векторного произведения. Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ *тогда и только тогда, когда* $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$;

2) *если векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны, то модуль векторного произведения этих векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах*;

3) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ (векторное произведение *антикоммутативно*);

4) $[t\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, t\vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$ (скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения);

5) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$ (векторное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);

6) $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$ (векторное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*).

Свойство 1 дает еще один (наряду с указанным на с. 21) *критерий коллинеарности векторов.* Оно легко вытекает из определения векторного произведения. В самом деле, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ по определению. Обратно, если $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}\times\vec{b}| = 0$, т.е. либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$. Ясно, что в каждом из этих трех случаев $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

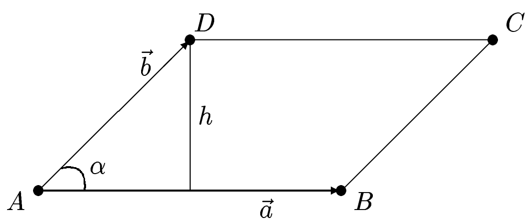


Рис. 9

Свойство 2 часто называют *геометрическим смыслом векторного произведения.* Оно также легко вытекает из определения векторного произведения. В самом деле, пусть $ABCD$ — параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (при этом $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, а $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$), S — площадь этого параллелограмма, h — длина его высоты, опущенной из точки D, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 9). Тогда

$$S = |\vec{a}|\cdot h = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Докажем свойство 3. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то, в силу свойства 1, $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}] = \vec{0}$. Предположим теперь, что $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Убедимся сначала, что модули векторов, указанных в левой и правой частях доказываемого равенства, равны между собой. В самом деле, $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$, и потому

$$|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\widehat{\vec{b},\vec{a}}) = |[\vec{b},\vec{a}]| = |-[\vec{b},\vec{a}]|.$$

Как левая, так и правая части доказываемого равенства ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}])$ является правой (по определению векторного произведения), для завершения доказательства равенства осталось убедиться в том, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, -[\vec{b}, \vec{a}])$ также является правой. Заметим, что по определению векторного произведения тройка $(\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{a}])$ — правая. Если у последнего вектора сменить знак, мы получим левую тройку $(\vec{b}, \vec{a}, -[\vec{b}, \vec{a}])$. Поскольку перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки, мы получаем, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, -[\vec{b}, \vec{a}])$ — правая. Свойство 3 доказано.

Свойства 4 и 5 будут доказаны ниже в данном параграфе (см. с. 35). Наконец, свойство 6 следует из свойств 3 и 5. Действительно,

$$[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = -[\vec{b} + \vec{c}, \vec{a}] = -([\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}]) = -[\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{c}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}].$$

2. Вычисление векторного произведения в координатах

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — некоторый базис пространства, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Покажем, как по координатам векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ найти координаты вектора $\vec{x} \times \vec{y}$ в том же базисе. Применяя дистрибутивность и вынесение скалярного множителя, получаем равенства

$$\begin{aligned}
\vec{x} \times \vec{y} &= [x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3, y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3] = \\
&= x_1y_1[\vec{b}_1, \vec{b}_1] + x_1y_2[\vec{b}_1, \vec{b}_2] + x_1y_3[\vec{b}_1, \vec{b}_3] + \\
&+ x_2y_1[\vec{b}_2, \vec{b}_1] + x_2y_2[\vec{b}_2, \vec{b}_2] + x_2y_3[\vec{b}_2, \vec{b}_3] + \\
&+ x_3y_1[\vec{b}_3, \vec{b}_1] + x_3y_2[\vec{b}_3, \vec{b}_2] + x_3y_3[\vec{b}_3, \vec{b}_3].
\end{aligned}$$

Используя свойства 1 и 3 векторного произведения (см. с. 29), можно переписать это равенство в виде

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot [\vec{b}_1, \vec{b}_2] + (x_1y_3 - x_3y_1) \cdot [\vec{b}_1, \vec{b}_3] + (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot [\vec{b}_2, \vec{b}_3].$$

Но и после этого в случае произвольной системы координат остается довольно сложное выражение. Предположим теперь, что $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — *правый ортонормированный базис*, т.е. ортонормированный базис, являющийся правой тройкой векторов. Тогда $[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \vec{b}_3$, $[\vec{b}_1, \vec{b}_3] = -\vec{b}_2$ и $[\vec{b}_2, \vec{b}_3] = \vec{b}_1$, откуда

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{b}_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{b}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{b}_3. \qquad (1)$$

Итак, векторное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеет в правом ортонормированном базисе координаты

$$(x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Их можно переписать в виде

$$\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \tag{2}$$

и удобно представлять себе как результат разложения по первой строке символического определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

С учетом этого формулу (1) можно переписать в виде

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

3. Определение и свойства смешанного произведения

В отличие от предыдущих операций смешанное произведение имеет три аргумента.

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Таким образом,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$

Укажем ряд свойств смешанного произведения, из которых первое, наиболее важное, назовем теоремой.

Теорема. *Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны. Смешанное произведение некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение теоремы.

Необходимость. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$. Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости σ, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку $\vec{c}$ ортогонален этому вектору, то он лежит в σ. А это означает, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

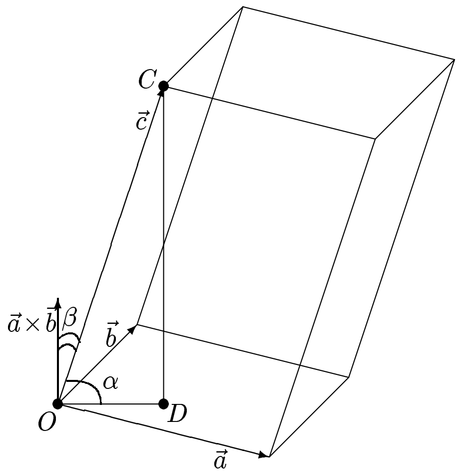


Рис. 10

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}) = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Предположим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Отложим их от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Первое утверждение теоремы полностью доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая. Обозначим через α угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а через β — угол между векторами $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 10). Учитывая, что $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$, и потому $\sin\alpha = \cos\beta$, и используя свойство 2 векторного произведения (см. с. 29), имеем равенства

$$\begin{aligned} V &= S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\alpha = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — левая. Тогда тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Но эти две тройки определяют один и тот же параллелепипед. В силу доказанного выше объем этого параллелепипеда, взятый со знаком плюс, равен $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$. Пользуясь антикоммутативностью векторного произведения, получаем $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (-[\vec{b}, \vec{a}], \vec{c}) = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих трех векторах, взятому со знаком минус. Теорема полностью доказана. ∎

Первое утверждение теоремы называют *критерием компланарности векторов*, а второе — *геометрическим смыслом смешанного произведения*. При решении некоторых задач бывает удобна следующая более компактная формулировка последнего свойства:

> *объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.*

Отметим, что из теоремы вытекает следующий факт:

> *тройка векторов является правой (левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше нуля (соответственно меньше нуля).*

При решении некоторых задач бывает полезно следующее наблюдение, вытекающее из первого утверждения теоремы (отметим, впрочем, что его легко вывести и непосредственно из определения смешанного произведения):

> *если два из трех векторов коллинеарны (в частности, равны), то их смешанное произведение равно* 0.

В дальнейшем нам понадобится еще одно следствие из теоремы:

> *если* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ *— правый ортонормированный базис, то* $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = 1$.

В самом деле, в этом случае параллелепипед, построенный на векторах $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, — это куб, длина ребра которого равна 1. Его объем, очевидно, равен 1. Остается учесть, что тройка векторов $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правая.

Сформулируем алгебраические свойства смешанного произведения. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$;

2) $(t\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, t\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, t\vec{c}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (скалярный множитель можно выносить за знак смешанного произведения);

3) $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);

4) $(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*);

5) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

Равенства из свойства 1 легко следуют из теоремы. Действительно, упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Следовательно, смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Отметим еще, что равенство $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ проверено в процессе доказательства теоремы. Остальные равенства доказываются аналогично одному из этих двух.

Докажем свойство 2. Используя свойство 1 и вынесение скалярного множителя за скобки в скалярном произведении (см. свойство 3 на с. 25), получаем

$$(t\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, t\vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}, t\vec{a}) = t \cdot (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = t \cdot (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Аналогично доказывается равенство $(\vec{a}, t\vec{b}, \vec{c}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Наконец,

$$(\vec{a}, \vec{b}, t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, t\vec{c}) = t \cdot (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Из аналогичных друг другу свойств 3, 4 и 5 докажем только свойство 3. Используя свойство 1 смешанного произведения и дистрибутивность скалярного произведения (см. свойство 2 на с. 25), получаем

$$\begin{aligned}
&(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{d}, \vec{a} + \vec{b}) = \\
&= (\vec{c} \times \vec{d}, \vec{a}) + (\vec{c} \times \vec{d}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{d}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}).
\end{aligned}$$

Используя свойства смешанного произведения и свойства скалярного произведения, докажем свойства 4 и 5 векторного произведения (см. с. 29). В силу свойства 6 скалярного произведения (см. с. 26) достаточно доказать, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняются равенства

$([t\vec{a},\vec{b}],\vec{x}) = (t\cdot[\vec{a},\vec{b}],\vec{x})$ и $([\vec{a}+\vec{b},\vec{c}],\vec{x}) = ([\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}],\vec{x})$. Имеем

$$\begin{aligned}
&([t\vec{a},\vec{b}],\vec{x}) = (t\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = t(\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = t\cdot([\vec{a},\vec{b}],\vec{x}) = (t\cdot[\vec{a},\vec{b}],\vec{x});\\
&([\vec{a}+\vec{b},\vec{c}],\vec{x}) = (\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{x}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{x}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{x}) =\\
&= ([\vec{a},\vec{c}],\vec{x}) + ([\vec{b},\vec{c}],\vec{x}) = ([\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}],\vec{x}).
\end{aligned}$$

4. Вычисление смешанного произведения в координатах

Пусть векторы $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ образуют некоторый базис пространства, а (x_1,x_2,x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ и (z_1,z_2,z_3) — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Покажем, как по координатам векторов $\vec{x},\vec{y}$ и $\vec{z}$ найти их смешанное произведение. Как отмечалось после доказательства теоремы, если два из трех векторов равны, то смешанное произведение этих трех векторов равно нулю. Используя этот факт, получаем равенства

$$\begin{aligned}
(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) &= (x_1\vec{b}_1+x_2\vec{b}_2+x_3\vec{b}_3, y_1\vec{b}_1+y_2\vec{b}_2+y_3\vec{b}_3, z_1\vec{b}_1+z_2\vec{b}_2+z_3\vec{b}_3) =\\
&= x_1y_2z_3\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3) + x_1y_3z_2\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_3,\vec{b}_2) + x_2y_1z_3\cdot(\vec{b}_2,\vec{b}_1,\vec{b}_3) +\\
&+ x_2y_3z_1\cdot(\vec{b}_2,\vec{b}_3,\vec{b}_1) + x_3y_1z_2\cdot(\vec{b}_3,\vec{b}_1,\vec{b}_2) + x_3y_2z_1\cdot(\vec{b}_3,\vec{b}_2,\vec{b}_1).
\end{aligned}$$

Используя свойство 1 смешанного произведения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3).$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель матрицы третьего порядка, в которой по строкам записаны координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Следовательно,

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3). \tag{4}$$

Если базис, состоящий из векторов $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$, яыляется правым ортонормированным, то, как отмечалось на с. 34, $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3) = 1$ и потому формула (4) принимает совсем простой вид:

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Отметим, однако, что здесь, в отличие от скалярного и векторного произведений, формула имеет достаточно простой вид и в случае произвольного базиса.

5. Приложения

Здесь приводятся формулы, основанные на материале данного параграфа, которые наиболее часто употребляются при решении задач.

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный базис, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ в этом базисе соответственно.

Используя векторное произведение, можно:

1) вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$:
$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2}, \tag{5}$$
поскольку эта площадь равна длине векторного произведения, а определители, стоящие под корнем, суть, с точностью до знака, координаты векторного произведения; формулу для вычисления площади параллелограмма в случае, когда $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — векторы на плоскости, см. в задаче 53 на с. 54;

2) вычислить синус угла между ненулевыми векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$:
$$\sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}},$$
поскольку, в силу определения векторного произведения, синус угла между векторами равен модулю их векторного произведения, деленному на произведение их длин;

3) выяснить, будут ли векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны:
$$\vec{x} \parallel \vec{y} \textit{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$
поскольку векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нуль-вектору.

Используя смешанное произведение, можно:

1) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$:
$$V = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

поскольку объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения; в приведенной только что формуле символом mod обозначен модуль определителя, поскольку стандартное обозначение — две вертикальные черты — было бы здесь неудобочитаемым;

2) выяснить, будут ли векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ компланарны:

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю; отметим, что этот критерий справедлив и в случае произвольной системы координат — это легко вытекает из формулы (4);

3) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

тройка векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ является правой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0,$$

и левой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0,$$

поскольку тройка векторов является правой (левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше 0 (соответственно меньше 0).

§5. Система координат. Координаты точки

1. Понятие системы координат

Определение. *Системой координат в пространстве* (*на плоскости*) называется совокупность базиса пространства (соответственно базиса плоскости) и точки (принадлежащей этой плоскости). Систему координат иногда называют также *репером*. Точка, входящая в репер, называется *началом системы координат*.

Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O, будем обозначать через $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ (в случае плоскости используется обозначение $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$). Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Каждая из осей координат имеет свое название. Прямую, проходящую через точку O и параллельную вектору $\vec{b}_1$, будем называть *осью абсцисс*, прямую, проходящую через точку O и параллельную вектору $\vec{b}_2$, — *осью ординат*, а прямую, проходящую через точку O и параллельную вектору $\vec{b}_3$, — *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Зафиксируем в пространстве некоторую систему координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Определение. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Аналогично определяются координаты точки на плоскости.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно, получаем, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Иными словами,

> *чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Определение. Система координат в пространстве $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — ортонормированный.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что модуль вектора равен корню квадратному из его скалярного квадрата, а скалярный квадрат вектора в ортонормированном базисе равен сумме квадратов его координат, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{1}$$

Тот факт, что точка A в некоторой системе координат имеет координаты (a_1, a_2, a_3), будем обозначать так: $A(a_1, a_2, a_3)$.

2. Деление отрезка в данном отношении

Определение. Предположим, что даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что *точка C делит отрезок AB в отношении t*, если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}. \tag{2}$$

Например, если C — середина отрезка AB, то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t, что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$). На рис. 11 точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\dfrac{1}{2}$, а точка C_2 — в отношении -4.

Пусть $t = -1$ и выполнено равенство (2). Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, что невозможно, так как точки A и B различны. Пусть теперь $t \neq -1$. Предположим, что точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует. Выведем формулы для нахождения координат точки C, если известны координаты точек $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ и число t. Обозначим координаты точки C через (c_1, c_2, c_3). Расписывая равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ в координатах, имеем

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1), \\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2), \\ c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3). \end{cases} \tag{3}$$

Из этих равенств получаем, что

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \tag{4}$$

Это означает, что если точка C существует, то она единственна. Существование точки C также устанавливается легко. В самом деле, рассмотрим точку C, координаты которой задаются равенствами (4). Тогда будут выполняться равенства (3). Но последние есть не что иное, как равенство (2), расписанное в координатах.

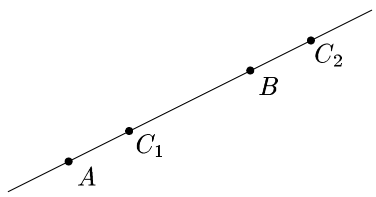


Рис. 11

Итак, точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует тогда и только тогда, когда $t \neq -1$, причем при выполнении этого условия она единственна. Посмотрим, где эта точка может располагаться. Из равенства (2) вытекает, что направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB. Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B. Пусть теперь C — произвольная точка прямой AB, отличная от B. Тогда векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов (см. с. 21) существует такое число t, что выполнено равенство (2). Итак, точка C делит отрезок AB в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой AB и отлична от точки B. Легко понять также, что если C принадлежит отрезку AB, то $t \geqslant 0$, а в противном случае $t < 0$.

Отметим один важный частный случай. Предположим, что C — середина отрезка AB. Как уже отмечалось выше, это означает, что она делит этот отрезок в отношении 1. В силу (4) получаем, что точка C имеет координаты

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right). \tag{5}$$

Иными словами,

> *координаты середины отрезка есть полусумма (среднее арифметическое) координат его начала и конца.*

В качестве примера использования формул (4) решим следующую задачу: найти координаты точки T, являющейся точкой пересечения медиан треугольника с вершинами $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ и $R(r_1, r_2, r_3)$.

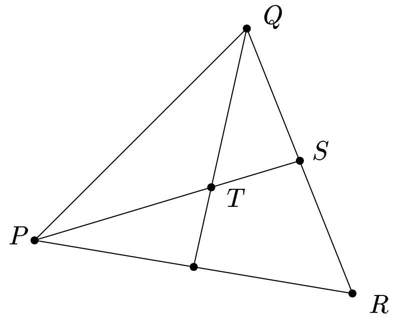


Рис. 12

Обозначим через S точку пересечения медианы PT и стороны QR (рис. 12), а через (s_1, s_2, s_3) — координаты этой точки. В силу сказанного выше $s_1 = \dfrac{q_1 + r_1}{2}$, $s_2 = \dfrac{q_2 + r_2}{2}$, $s_3 = \dfrac{q_3 + r_3}{2}$. Известно, что точка пересечения медиан отсекает от медианы $\dfrac{2}{3}$ ее длины (если считать от вершины треугольника). Это означает, что точка T делит отрезок PS в отношении 2. Следовательно,

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{p_1 + 2s_1}{1+2} = \dfrac{p_1 + q_1 + r_1}{3}, \\ t_2 = \dfrac{p_2 + 2s_2}{1+2} = \dfrac{p_2 + q_2 + r_2}{3}, \\ t_3 = \dfrac{p_3 + 2s_3}{1+2} = \dfrac{p_3 + q_3 + r_3}{3}. \end{cases}$$

3. Замена системы координат

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в пространстве зафиксированы две системы координат и известны координаты некоторой точки в одной из них. Как найти координаты той же точки в другой системе координат?

Итак, пусть $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и $(P;\ \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — две системы координат (рис. 13). Для краткости будем называть систему координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ старой, а систему координат $(P;\ \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — новой. Пусть (x_1, x_2, x_3) — координаты точки M в старой системе координат. Требуется найти ее координаты в новой системе. Обозначим их через (x'_1, x'_2, x'_3).

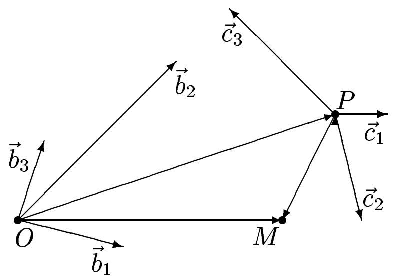


Рис. 13

Введем следующие обозначения. Обозначим через (p_1, p_2, p_3) координаты точки P в старой системе координат, через (t_{11}, t_{21}, t_{31}) — координаты вектора $\vec{c}_1$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, через (t_{12}, t_{22}, t_{32}) — координаты вектора $\vec{c}_2$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, наконец, через (t_{13}, t_{23}, t_{33}) — координаты вектора $\vec{c}_3$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

назовем *матрицей перехода от старого базиса к новому*. Иными словами, матрица перехода от базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ к базису $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — это матрица, в которой по столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе.

Вычислим двумя способами вектор $\overrightarrow{OM}$. С одной стороны, $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$. С другой,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = (p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3) + (x'_1\vec{c}_1 + x'_2\vec{c}_2 + x'_3\vec{c}_3) = \\
&= p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3 + x'_1(t_{11}\vec{b}_1 + t_{21}\vec{b}_2 + t_{31}\vec{b}_3) + \\
&+ x'_2(t_{12}\vec{b}_1 + t_{22}\vec{b}_2 + t_{32}\vec{b}_3) + x'_3(t_{13}\vec{b}_1 + t_{23}\vec{b}_2 + t_{33}\vec{b}_3) = \\
&= (p_1 + t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3)\vec{b}_1 + (p_2 + t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3)\vec{b}_2 + \\
&+ (p_3 + t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3)\vec{b}_3.
\end{aligned}$$

В силу теоремы 2 из §2

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', \\ x_2 = p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', \\ x_3 = p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3'. \end{cases} \tag{6}$$

Эти равенства называются *формулами перехода от старой системы координат к новой* или *формулами замены системы координат.* Зная новые координаты точки M, по этим формулам можно найти старые координаты. Можно решить и обратную задачу. Для этого нужно посмотреть на формулы (6) как на систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1', x_2', x_3':

$$\begin{cases} t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3' = x_1 - p_1, \\ t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3' = x_2 - p_2, \\ t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3' = x_3 - p_3. \end{cases} \tag{7}$$

В соответствие с формулой (4) из §4

$$\vec{c}_1\vec{c}_2\vec{c}_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Определитель, входящий в это равенство, отличен от нуля, так как в противном случае векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ были бы компланарными (см. теорему из §4) и, следовательно, не образовывали бы базиса. Непосредственные вычисления показывают, что этот определитель равен определителю системы (7) (отметим, что это немедленно вытекает из свойства 9 в §13), и потому последний определитель также отличен от нуля. Согласно теореме 2 из §1, отсюда вытекает, что система (7) имеет единственное решение. Найдя это решение, мы найдем выражение координат точки M в новой системе координат через ее координаты в старой системе. Мы не будем приводить соответствующие формулы в общем виде, так как они выглядят довольно громоздко.

Мы рассмотрели задачу замены системы координат в пространстве. Аналогичные рассуждения показывают, что на плоскости формулы перехода имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2', \\ x_2 = p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2'. \end{cases} \tag{8}$$

В главах 9 и 10 нам понадобится один частный случай этих формул. Предположим, что старая система координат — прямоугольная декартова, а новая система координат получается из старой поворотом плоскости вокруг начала координат старой системы на некоторый угол α (рис. 14).

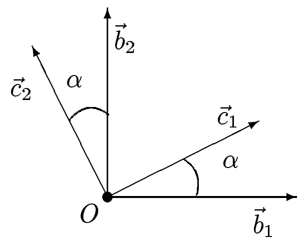


Рис. 14

В частности, начало новой системы координат совпадает с началом старой системы, и потому $p_1 = p_2 = 0$. Нетрудно понять, что матрица перехода от старого базиса к новому имеет в данном случае вид

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(она называется *матрицей поворота системы координат на угол* α). Следовательно, формулы перехода принимают вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha, \\ x_2 = x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

Эти формулы называются *формулами поворота системы координат на угол* α.

§6. Задачи

Во всех задачах этого параграфа, в которых явно не оговорено противное, координаты векторов даны в правом ортонормированном базисе, а координаты точек — в прямоугольной декартовой системе координат.

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) задачи, решение которых связано с разложением вектора по базису;

2) задачи, связанные с нахождением проекций вектора на плоскость или прямую;

3) задачи, решение которых сводится к решению систем уравнений;

4) задачи, связанные с вычислением площадей и объемов геометрических фигур;

5) задачи, связанные с формулой деления отрезка в данном отношении.

Приведем пример решения задачи первого типа.

Задача 1. Доказать, что если H — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$.

Решение. Обозначим середины сторон AB, AC и BC через D, E и F соответственно (рис. 15). В плоскости треугольника ABC выберем базис $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ и найдем координаты векторов $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CD}$ в этом базисе. Из очевидных равенств

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\\
&\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\\
&\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

вытекает, что $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BE} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ и $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Используя известное из школьного курса свойство точки пересечения медиан, получаем, что

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AF} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Следовательно, $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = (0, 0) = \vec{0}$.

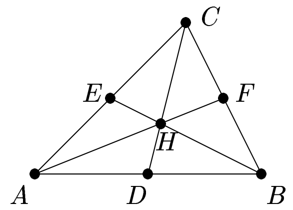


Рис. 15

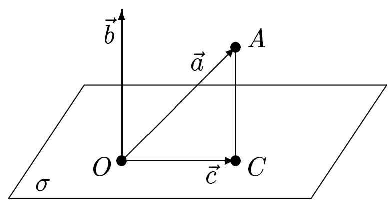


Рис. 16

Решим теперь задачу второго типа.

Задача 2. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{a} = (5, 3, 1)$ на плоскость σ, ортогональную вектору $\vec{b} = (2, 1, -1)$.

Решение. Выберем в плоскости σ произвольную точку O и отложим от нее векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конец вектора $\vec{a}$ обозначим буквой A. Пусть C — ортогональная проекция точки A на плоскость σ. Необходимо найти координаты вектора $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 16). Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = t\vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + t\vec{b}$ для некоторого t. Поскольку $\vec{b} \perp \vec{c}$, то $\vec{b}\vec{c} = 0$. Но

$$\vec{b}\vec{c} = (\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b}) = \vec{b}\vec{a} + t\vec{b}\vec{b} = 12 + 6t.$$

Таким образом, $12 + 6t = 0$, откуда $t = -2$ и $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, 3)$.

Ответ: (1,1,3).

Перейдем к задачам третьего типа.

Задача 3. Найти координаты вектора $\vec{x} = (11, -2, 11)$ в базисе $\vec{a} = (1, -2, -1)$, $\vec{b} = (3, 0, 5)$, $\vec{c} = (0, -2, 2)$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ через (x_1, x_2, x_3). Это означает, что выполнено векторное равенство

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}.$$

Приравнивая последовательно первые, вторые и третьи координаты векторов, стоящих в левой и правой частях этого равенства, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 11, \\ -2x_1 - 2x_3 = -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

Решим эту систему по правилу Крамера (см. теорему 2 в §1). Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 28, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 11 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 56,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 84, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -28.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 3$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -1$.

Ответ: $(2, 3, -1)$.

Задача 4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$ и $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{2}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, компланарный векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и образующий острый угол с положительным направлением оси Oz.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ через (x_1, x_2, x_3). Из условий $|\vec{d}| = \sqrt{2}$ и $\vec{d} \perp \vec{a}$ вытекают равенства $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ и $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ соответственно, а из компланарности векторов $\vec{d}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель из левой части последнего равенства по первой строке, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения второе, получаем $x_1 - x_3 = 0$, т.е. $x_1 = x_3$. Из второго уравнения вытекает теперь, что $x_2 = 0$. Учитывая первое уравнение, получаем, что $x_1 = \pm 1$. Итак, наша система имеет два решения: $\vec{d_1} = (1, 0, 1)$ и $\vec{d_2} = (-1, 0, -1)$. До сих пор мы не использовали условие о том, что вектор $\vec{d}$ образует острый угол с положительным направлением оси Oz. Это означает, что если $\vec{z}$ — произвольный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси Oz, то угол $(\widehat{\vec{d}, \vec{z}})$ — острый, т.е. $\vec{d}\vec{z} > 0$. Ясно, что в качестве $\vec{z}$ можно взять вектор $\vec{z}_0 = (0, 0, 1)$. Поскольку $\vec{d_1}\vec{z}_0 = 1$, а $\vec{d_2}\vec{z}_0 = -1$, получаем, что $\vec{d} = (1, 0, 1)$.

Ответ: $\vec{d} = (1, 0, 1)$.

Решим задачу четвертого типа.

Задача 5. Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами $A(3, -2, 1)$, $B(4, -3, 0)$, $C(5, -1, 1)$ и $D(4, -4, 2)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Положим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Ясно, что $\vec{b} = (1, -1, -1)$, $\vec{c} = (2, 1, 0)$ и $\vec{d} = (1, -2, 1)$. Обозначим через h длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D, через V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а через S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ясно, что $V = S \cdot h$. В силу теоремы из §4, $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Используя формулу (6) из §4, имеем

$$V = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

(символ mod имеет здесь тот же смысл, что и в формуле (6) из §4). Далее, в силу свойства 1 на с. 29, $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Найдем сначала вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, обозначив через $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ тот ортонормированный базис, в котором даны координаты всех векторов. Используя формулу (3) из §4, имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1, -2, 3).$$

Следовательно, $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ и $h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

Приведем пример решения задачи пятого типа.

Задача 6. Даны вершины треугольника $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ и $C(-2, -3)$. Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

Решение. Обозначим искомую точку через D. Используя свойство биссектрисы угла треугольника, получаем равенства

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{\sqrt{(1-4)^2 + (1-5)^2}}{\sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, точка D делит отрезок AC в отношении $\frac{1}{2}$. Обозначим координаты этой точки через (x, y). По формулам (4) из §5 получаем, что $x = \dfrac{1-1}{3/2} = 0$ и $y = \dfrac{1-3/2}{3/2} = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; л) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители третьего порядка, исходя из определения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 10 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определители третьего порядка разложением по первой строке:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & a & b \end{vmatrix}$.

4. Доказать следующие свойства определителя третьего порядка:

а) если определитель содержит нулевую строку (столбец) или две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю;

б) если умножить строку (столбец) на число t, то весь определитель умножится на число t;

в) если к некоторой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число, то определитель не изменится;

г) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(*разложение по второй строке*);

д) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

(*разложение по третьей строке*);

е) записать разложение определителя третьего порядка по первому, второму и третьему столбцам и доказать эти равенства.

5. Вычислить определители, используя свойства, указанные в задаче 4:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 100 \\ 0{,}1 & 2 & 10 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

6*. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Доказать, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

7*. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный n-угольник, а O — его центр. Доказать, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

8. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ делил пополам угол между ними?

9. Проверить, что точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$ и $D(3, -5, 3)$ служат вершинами трапеции.

10. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Известно, что $\overrightarrow{AB} = (2, 6, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 2, -2)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

11. На плоскости даны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Найти координаты вектора $\vec{s}$ в базисе $(\vec{p}, \vec{q})$:

а) $\vec{p} = (1, 2)$, $\vec{q} = (-3, 1)$, $\vec{s} = (-7, 7)$;

б) $\vec{p} = (3, -2)$, $\vec{q} = (2, 2)$, $\vec{s} = (1, 6)$;

в) $\vec{p} = (1, -1)$, $\vec{q} = (7, 5)$, $\vec{s} = (5, 7)$.

12. В пространстве даны векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Найти координаты вектора $\vec{s}$ в базисе $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$:

а) $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$, $\vec{s} = (11, -6, 5)$;

б) $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 2, -1)$, $\vec{s} = (3, 7, -7)$;

в) $\vec{p} = (1, 1, -2)$, $\vec{q} = (2, 1, 0)$, $\vec{r} = (-3, 1, 2)$, $\vec{s} = (8, 2, -4)$.

13. Определить середины сторон треугольника с вершинами в точках $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ и $C(-5, 7)$.

14. Точки $(2, -1)$, $(-1, 4)$ и $(-2, 2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

15. Даны точки $A(3, -1)$ и $B(2, 1)$. Определить координаты:

а) точки M, симметричной точке A относительно точки B;

б) точки N, симметричной точке B относительно точки A.

16. Даны три вершины параллелограмма $A(3, -5)$, $B(5, -3)$ и $C(-1, 3)$. Определить четвертую вершину D, противоположную вершине B.

17. Даны вершины треугольника $A(2,-5)$, $B(1,-2)$, $C(4,7)$. Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

18. Даны вершины треугольника $A(3,-5)$, $B(-3,3)$, $C(-1,-2)$. Определить длину биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

19. Известны координаты трех вершин трапеции $A(-4,-5,6)$, $B(2,$ 1,3) и $C(0,0,0)$. Найти четвертую вершину D и точку пересечения диагоналей, если длина основания CD равна 18.

20*. Медиана и биссектриса треугольника ABC, проведенные из вершины A, пересекают сторону BC в точках M и L соответственно. Разложить векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AL}$ по базису, состоящему из векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

21*. Точка M пересечения медиан треугольника лежит на оси абсцисс, две его вершины — точки $A(2,-3)$ и $B(-5,1)$, третья вершина C лежит на оси ординат. Определить координаты точек M и C.

22. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\dfrac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:

а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{a}$; в) $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b})$; г) $(3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b})$; д) $(3\vec{a}+2\vec{b}, 3\vec{a}+2\vec{b})$.

23. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить:

а) $(3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{b}+3\vec{c})$; б) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$; в) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}, \vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})$.

24. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении параметра t векторы $\vec{a}+t\vec{b}$ и $\vec{a}-t\vec{b}$ будут ортогональны.

25. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\dfrac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Найти угол между векторами $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a}-\vec{b}$.

26. Даны векторы $\vec{a} = (4,-2,-4)$ и $\vec{b} = (6,-3,2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\sqrt{\vec{a}\vec{a}}$; в) $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$; г) $(2\vec{a}-3\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b})$; д) $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b})$.

27. Даны вершины треугольника $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ и $C(3,$ $-2,1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

28*. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

29. Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a} = (3,2,2)$ и $\vec{b} = (18,-22,-5)$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}| = 14$.

30. Даны векторы $\vec{a} = (2,3,-1)$, $\vec{b} = (1,-2,3)$, $\vec{c} = (2,-1,1)$. Найти вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и такой, что $\vec{x}\vec{c} = -6$.

31*. Сумма векторов единичной длины $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна $\vec{0}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

32. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

33. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

34. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:

а) $|[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]|$; б) $|[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]|$.

35. Доказать, что $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b})^2 = (\vec{a}, \vec{a}) \cdot (\vec{b}, \vec{b})$.

36*. Доказать, что если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

37*. Доказать, что если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ и какие-то два из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, то $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

38*. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют равенствам $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

39. Даны векторы $\vec{a} = (3, -1, -2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Вычислить:

а) $[\vec{a}, \vec{b}]$; б) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; в) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

40. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ и $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

41. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$. Вычислить длину высоты, опущенной из точки B на сторону AC.

42. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

43. Даны векторы $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Вычислить:

а) $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$; б) $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

44. Доказать, что $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}|$.

45*. Доказать, что если $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

46*. Из одной точки отложены три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$.

47. Даны векторы $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$, $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

48. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

49. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ и $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

50. Даны векторы $\vec{a} = (11, 10, 2)$ и $\vec{b} = (4, 0, 3)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины 1, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ имела положительную ориентацию.

51. Даны векторы $\vec{a} = (1, 1, 1)$ и $\vec{b} = (1, 0, 0)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины 1, ортогональный вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\dfrac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ была правой.

52. Даны векторы $\vec{a} = (0, 1, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины 1, ортогональный вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\dfrac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ имела положительную ориентацию.

53. Пусть S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ как на сторонах. Доказать, что

$$S = \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

(символ mod имеет здесь тот же смысл, что и в формуле (6) из §4).

54*. Даны точки $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$. В каком отношении делит отрезок AB точка пересечения прямой AB с плоскостью Oyz?

55. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, 3)$ и $B(9, -7, -2)$, разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

56. Определить координаты концов отрезка, который точками (2,2) и (1,5) разделен на три равные части.

3. Ответы

1. а) -2; б) 0; в) 3; г) 1; д) $\cos 2\alpha$; е) $\sin 2\alpha$; ж) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; з) $\sin(\alpha - \beta)$; и) $\cos(\alpha + \beta)$; к) $4ab$; л) -1.

2. а) 0; б) 13; в) 2; г) 0; д) $2a^2(a + x)$. **3.** а) 1; б) 40; в) 0; г) $a(b - a)^2$.

4. е) *Разложение по первому столбцу*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

разложение по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};$$

разложение по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. а) 0; б) 4; в) $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$; г) 0.

6. *Указание*: использовать задачу 1 на с. 46.

7. *Указание*: повернуть плоскость вокруг точки O на центральный угол данного n-угольника.

8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны иметь одинаковую длину (см. решение задачи 7 на с. 112).

9. *Указание*: проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

10. $\overrightarrow{AD} = (3, 4, -3)$, $\overrightarrow{BE} = (0, -5, 3)$, $\overrightarrow{CF} = (-3, 1, 0)$.

11. а) (2,3); б) $(-1,2)$; в) $(-2,1)$.
12. а) $(2,-3,1)$; б) $(2,-3,1)$; в) $(1,2,-1)$. **13.** $(2,-4)$, $(-2,2)$, $(-1,1)$.
14. $(1,-3)$, (3,1), $(-5,7)$. **15.** а) $M(1,3)$; б) $N(4,-3)$. **16.** $D(-3,1)$.
17. $\left(\frac{5}{2},-2\right)$. **18.** $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.**19.** $D(-12,-12,6)$, $\left(-\frac{8}{3},-\frac{10}{3},4\right)$.
20. $\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{|\vec{b}|\cdot\vec{a}+|\vec{a}|\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$. **21.** $M(-1,0)$, $C(0,2)$.
22. а) -6; б) 9; в) 13; г) -61; д) 73. **23.** а) -62; б) 162; в) 373.
24. $t=\pm0{,}6$. **25.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **26.** а) 22; б) 6; в) 7; г) -200; д) 129.
27. $\frac{\pi}{4}$. **28.** $\arccos(-0{,}8)$. **29.** $(-4,-6,12)$. **30.** $(-3,3,3)$. **31.** $-\frac{2}{3}$. **32.** 16.
33. ±30. **34.** а) 24; б) 60.

36. *Указание*: умножить векторно обе части равенства $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

38. Либо $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — попарно ортогональные векторы единичной длины, либо $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{0}$.

39. а) (5,1,7); б) (10,2,14); в) (20,4,28). **40.** 14. **41.** 5. **42.** 27.
43. а) $(-7,14,-7)$; б) (10,13,19).

45. *Указание*: умножить скалярно обе части равенства $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$ на $\vec{c}$.

46. *Указание*: умножить скалярно вектор $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ на векторы $\vec{a}-\vec{c}$ и $\vec{b}-\vec{c}$.

47. -7. **48.** 3. **49.** 11. **50.** $\vec{c}=\left(\frac{6}{5\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)$.
51. $\vec{c}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. **52.** $\vec{c}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$. **54.** $-\frac{1}{2}$.
55. $C(1,5,2)$, $D(3,2,1)$, $E(5,-1,0)$, $F(7,-4,-1)$. **56.** $(3,-1)$, (0,8).

4. Самостоятельная работа №1

1. а) Даны векторы $\vec{a}=(1,-1,0)$ и $\vec{b}=(1,-2,1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $2\sqrt{3}$, ортогональный $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, что тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — левая.

б) Даны векторы $\vec{a}=(1,-1,0)$ и $\vec{b}=(1,-2,1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{14}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{d}=(2,1,1)$ и направленный так, что тройка $(\vec{a},\vec{d},\vec{c})$ — левая.

в) Даны векторы $\vec{a}=(2,1,1)$ и $\vec{b}=(0,1,-1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{3}$, ортогональный $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, что тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — правая.

г) Даны векторы $\vec{a}=(2,-1,1)$ и $\vec{b}=(1,0,-1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{21}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{d}=(0,-2,1)$ и направленный так, что тройка $(\vec{a},\vec{d},\vec{c})$ — левая.

2. а) Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC с вершинами $A(4,1)$, $B(7,5)$ и $C(-4,7)$.

б) Найти длину высоты AE треугольника ABC с вершинами $A(-1,1)$, $B(1,4)$ и $C(5,7)$.

в) Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(3,4)$ и $C(6,8)$.

г) Найти длину высоты AE треугольника ABC с вершинами $A(2,-3)$, $B(3,-4)$ и $C(3,-1)$.

3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найти вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]-(\vec{a},\vec{c})\vec{b}$:

а) $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,0,1)$, $\vec{c}=(-1,1,-2)$;

б) $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,1,1)$, $\vec{c}=(3,1,1)$;

в) $\vec{a}=(-1,2,-1)$, $\vec{b}=(1,3,2)$, $\vec{c}=(2,2,0)$;

г) $\vec{a}=(1,1,-1)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$, $\vec{c}=(0,1,2)$.

4. Доказать, что четыре точки лежат в одной плоскости:

а) $A(4,2,3)$, $B(1,1,4)$, $C(2,1,3)$, $D(1,0,2)$;

б) $A(1,4,1)$, $B(1,1,-2)$, $C(-1,2,3)$, $D(0,2,1)$;

в) $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$, $C(-1,1,3)$, $D(0,1,2)$;

г) $A(2,1,1)$, $B(-1,4,1)$, $C(1,-1,0)$, $D(2,4,2)$.

5. Найти проекцию вектора $\vec{c}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$:

а) $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{c}=(0,4,3)$; б) $\vec{a}=(1,-2,1)$, $\vec{c}=(4,-2,4)$;

в) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{c}=(-1,4,7)$; г) $\vec{a}=(1,-1,2)$, $\vec{c}=(4,0,7)$.

Глава 2

Прямые и плоскости

В данной главе изучаются прямые на плоскости и плоскости и прямые в пространстве. Рассматриваются различные виды уравнений прямых и плоскостей (при этом основное внимание уделяется координатным и параметрическим уравнениям), а также вопросы о взаимном расположении прямых и плоскостей, об углах между ними и о расстоянии от точки до прямой или плоскости.

§7. Прямая на плоскости

Изучение прямой на плоскости основано на понятиях координатного и параметрических уравнений прямой. Предварительно мы ознакомимся с этими понятиями для произвольной линии.

1. Координатное и параметрические уравнения линии

Обозначим через $\mathcal{F}(x, y)$ выражение, содержащее переменные x и y, константы, знаки арифметических действий и элементарных функций. Например, в качестве $\mathcal{F}(x, y)$ можно взять выражения $x + 2y - 1$, $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x - y}$, $\sin(x + \pi)$, $\ln x + y$ и т.д.

Пусть на плоскости зафиксирована система координат.

Определение. Уравнение $\mathcal{F}(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* линии ℓ, если точка на плоскости лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\mathcal{F}(x, y) = 0$. Множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\mathcal{F}(x, y) = 0$, называется *геометрическим образом* этого уравнения.

Приведем пример. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. В качестве линии ℓ рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке $C(a, b)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Ясно, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $|CM| = r$, т.е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r. \tag{1}$$

Следовательно, (1) — уравнение окружности ℓ. Правда, обычно под уравнением окружности понимают другое уравнение, равносильное (1), — а именно уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

В приведенном примере по данной линии найдено ее координатное уравнение. Рассмотрим пример обратной задачи, когда по уравнению определяется его геометрический образ. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Преобразуем его левую часть, используя метод выделения полного квадрата. Имеем

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0$$

или $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Следовательно, исходное уравнение определяет окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке (1,2).

Перейдем к понятию параметрических уравнений линии. Предположим по-прежнему, что в плоскости зафиксирована некоторая система координат. Рассмотрим некоторую линию ℓ. Представим ее себе как траекторию движения точки $M(x, y)$. Поскольку эта точка движется, ее координаты с течением времени меняются, т.е. являются функциями времени. Пусть координата x есть функция $f(t)$, а координата y — функция $g(t)$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t) \end{cases} \tag{2}$$

называется *системой параметрических уравнений* (или просто *параметрическими уравнениями*) линии ℓ. При этом несущественно, понимается ли t как время или как произвольный параметр, принимающий в качестве значений действительные числа (мы начали с интерпретации t как времени исключительно для большей наглядности). Переменная t называется *параметром*. Область изменения t может не совпадать с множеством всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а ограничиваться некоторым его промежутком. Подчеркнем, что если система (2) является системой параметрических уравнений некоторой линии ℓ, то для любой точки $M(x, y)$ на ℓ существует значение t, принадлежащее области изменения параметра, такое, что выполнены равенства (2). И обратно, если t принадлежит области изменения параметра, то точка, координаты которой определены равенствами (2), лежит на ℓ.

В качестве примера составим параметрические уравнения окружности радиуса r с центром в начале координат (в прямоугольной декартовой системе координат). В качестве параметра возьмем угол, образуемый радиусом-вектором текущей точки $M(x, y)$ на окружности и положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 1). Тогда

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{cases} \tag{3}$$

Мы показали, что если точка лежит на окружности, то ее координаты удовлетворяют системе уравнений (3). Обратно, если координаты (x, y) некоторой точки удовлетворяют этой системе уравнений, то, очевидно, $x^2 + y^2 = r^2$ и потому точка лежит на окружности радиуса r с центром в начале координат. Следовательно, (3) — параметрические уравнения нашей окружности. Итак, по заданной линии ℓ мы составили ее параметрические уравнения.

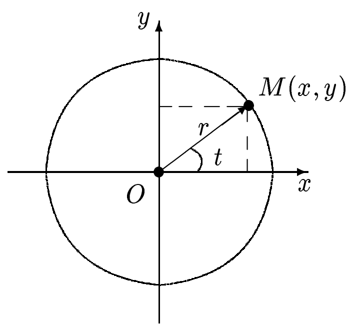


Рис. 1

Приведем пример решения обратной задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t. \end{cases} \tag{4}$$

Убедимся в том, что они определяют прямую. Пусть точка M_0 с координатами (x_0, y_0) принадлежит геометрическому образу системы уравнений (4). Это значит, что существует число t_0 такое, что $x_0 = 1 - t_0$ и $y_0 = 2 + t_0$. Складывая два последних равенства, имеем $x_0 + y_0 = 3$ или

$y_0 = -x_0 + 3$. Итак, координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению $y = -x + 3$, которое, как известно из школьного курса, задает прямую (см. также теорему 1 ниже). Таким образом, любая точка, координаты которой удовлетворяют системе (4), лежит на прямой $y = -x + 3$. Справедливо и обратное. Действительно, если (x_0, y_0) — решение уравнения $y = -x + 3$, то, взяв $t_0 = -x_0 + 1$, мы получим, что $x_0 = 1 + t_0$ и $y_0 = 2 + t_0$. Итак, геометрическим образом системы уравнений (4) является прямая $y = -x + 3$.

Рассмотренный выше способ перехода от параметрических уравнений к координатному называется *исключением параметра*. От координатного уравнения можно перейти к параметрическим с помощью *введения параметра*. Приведем соответствующий пример. Уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ определяет, как мы знаем, окружность радиуса r с центром в начале координат. Введем параметр t с помощью равенства $x = r\cos t$. Тогда $r^2\cos^2 t + y^2 = r^2$. Следовательно, $y = \pm r\sin t$. Поскольку $\sin(-t) = -\sin t$, а $\cos(-t) = \cos t$, в случае $y = -r\sin t$ мы можем заменить параметр t на $-t$. Получаем систему уравнений (3). Таким образом, всякое решение исходного координатного уравнения является решением и системы параметрических уравнений. Нетрудно убедиться и в обратном.

2. Виды уравнений прямой

Определение. Уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

называется *уравнением первого порядка с двумя неизвестными*, если $A^2 + B^2 \neq 0$.

Последнее неравенство означает, что коэффициенты A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Теорема 1. *Пусть на плоскости задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка с двумя неизвестными, и, обратно, всякое уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет прямую.*

Доказательство. Пусть на плоскости заданы прямая ℓ и система координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Будем считать, что мы знаем координаты (в этой системе координат) некоторой точки M_0, лежащей на прямой, и некоторого ненулевого вектора $\vec{a}$, коллинеарного прямой: $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (r, s)$ (рис. 2).

Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x,y)$. Очевидно, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$. Применим критерий коллинеарности векторов, известный из школьного курса (см. с. 21). Имеем $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого t. Если это векторное равенство записать в координатах, то получим $x - x_0 = tr$, $y - y_0 = ts$ или

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}. \tag{6}$$

Таким образом, точка M принадлежит прямой ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (6). Это уравнение называется *каноническим уравнением* прямой на плоскости. Преобразуя уравнение (6), получаем $sx - ry + (-sx_0 + ry_0) = 0$. Это и есть уравнение первого порядка (коэффициенты s и $-r$ одновременно в нуль не обращаются, поскольку вектор $\vec{a} = (r,s)$ — ненулевой). Первое утверждение теоремы доказано.

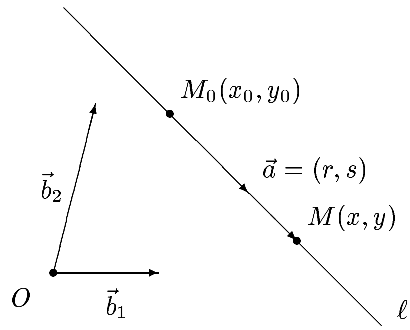


Рис. 2

Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (5), где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Возьмем какое-нибудь решение (x_0, y_0) этого уравнения. Тогда, разумеется, $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычтем последнее равенство из уравнения (5). Получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7}$$

Ясно, что уравнения (5) и (7) имеют одно и то же множество решений. Рассмотрим теперь прямую ℓ, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = (-B, A)$. Напишем для этой прямой уравнение вида (6):

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}.$$

Преобразовав это равенство, мы получим уравнение (7). Следовательно, уравнение (7), как и уравнение (5), определяет прямую ℓ. Теорема 1 доказана. ■

Уравнение первого порядка, задающее прямую, называется ее *координатным уравнением*. Наряду с этим термином в том же смысле часто употребляют термин *общее уравнение* прямой.

Сделаем несколько замечаний к доказательству теоремы 1. Во-первых, отметим, что в процессе доказательства теоремы 1 установлен следующий полезный факт:

> *если прямая ℓ задается уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор $(-B, A)$ коллинеарен ℓ.*

В случае прямоугольной декартовой системы координат скалярное произведение векторов (A, B) и $(-B, A)$ равно $-AB + BA = 0$, т.е. эти векторы ортогональны. Таким образом,

> *если прямая задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $Ax + By + C = 0$, то вектор (A, B) перпендикулярен к этой прямой.*

Следующие два замечания относятся к равенству (6). Один из знаменателей в этом равенстве (но не оба!) может быть равен нулю. В этом случае равенство (6) понимается как пропорция. Так, уравнение

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0}$$

есть не что иное, как другой способ записи уравнения

$$(x-1)\cdot 0 = (y-2)\cdot 1,$$

и потому задает прямую $y - 2 = 0$.

Ясно, что уравнение (6) равносильно уравнению

$$(x - x_0)s - (y - y_0)r = 0.$$

Следовательно, уравнение (6) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ r & s \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

которое также называют каноническим уравнением прямой на плоскости.

Несложно понять, что прямая с координатным уравнением $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда $B = 0$. Если $B \neq 0$, то уравнение $Ax + By + C = 0$ можно переписать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Положим $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b. \tag{9}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.* Именно это уравнение прямой рассматривается в школьном курсе математики, из которого известно также, что если прямая ℓ задана (в прямоугольной декартовой системе координат) уравнением (9), то $k = \operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол между положительным направлением оси Ox и ℓ. Подчеркнем, что

> *уравнение с угловым коэффициентом существует не для всех прямых, а только для прямых, не параллельных оси ординат.*

Если прямая задана уравнением (9) и проходит через точку с координатами (x_0, y_0), то $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$. Подставляя правую часть последнего равенства вместо b в уравнение (9), после очевидных преобразований получаем еще одну разновидность уравнения прямой:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{10}$$

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой.

Определение. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + rt, \\ y = y_0 + st \end{cases} \tag{11}$$

называется *системой параметрических уравнений первого типа* (или просто *параметрическими уравнениями первого типа*), если $r^2 + s^2 \neq 0$.

Условие $r^2 + s^2 \neq 0$ означает, что по крайней мере одно из чисел r и s отлично от 0.

Теорема 2. *Пусть на плоскости задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая на плоскости может быть задана системой параметрических уравнений первого типа, и, обратно, любая* *система параметрических уравнений первого типа определяет прямую.*

Доказательство. Пусть на плоскости заданы прямая ℓ и система координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Будем считать, что мы знаем координаты (в этой системе координат) некоторой точки M_0, лежащей на прямой, и некоторого ненулевого вектора $\vec{a}$, коллинеарного прямой: $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (r, s)$ (рис. 2). Рассмотрим произвольную точку плоскости $M(x, y)$. Очевидно, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$. Воспользуемся, как и в доказательстве теоремы 1, критерием коллинеарности векторов (см. с. 21): поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$, условие $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ равносильно существованию такого числа t, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$. Распишем последнее равенство в координатах. Получим

$$\begin{cases} x - x_0 = rt, \\ y - y_0 = st, \end{cases}$$

что эквивалентно системе равенств (11). Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть дана система (11). Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (r, s)$. Если для этой прямой написать систему параметрических уравнений так, как это было сделано в предыдущем абзаце, то мы получим систему (11). Следовательно, (11) определяет прямую ℓ. Теорема 2 доказана. ∎

Система параметрических уравнений первого типа, задающая прямую, называется *системой параметрических уравнений* (или просто *параметрическими уравнениями*) этой прямой.

Прежде чем переходить к примерам, укажем еще два вида уравнений прямой. Предположим, что мы знаем две различные точки, принадлежащие прямой: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нуль-вектора. Подставляя его координаты в каноническое уравнение прямой, получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением прямой по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{12}$$

Как и каноническое уравнение прямой, это уравнение можно переписать с использованием определителя второго порядка, а именно — в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Пусть теперь ℓ — прямая на плоскости, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда существуют такие ненулевые числа a и b, что прямая ℓ пересекает ось Ox в точке с координатами $(a, 0)$, а ось Oy — в точке с координатами $(0, b)$ (рис. 3). Напишем уравнение прямой ℓ по этим двум точкам:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

или $b(x-a) = -ay$. После очевидных преобразований имеем $bx + ay = ab$. Разделим обе части последнего равенства на ab (воспользовавшись тем, что числа a и b отличны от нуля). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{14}$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры a и b, фигурирующие в уравнении (14), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат. Уравнение прямой в отрезках особенно полезно при решении задач, в которых фигурирует площадь треугольника, отсекаемого прямой от осей координат: ясно, что если прямая задана уравнением (14), то эта площадь равна $\frac{|ab|}{2}$ (см. задачу 5 на с. 109).

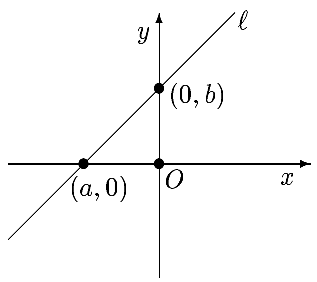


Рис. 3

Определение. Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что как направляющий, так и нормальный вектор для данной прямой определены неоднозначно. Прямая имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

Из сказанного выше вытекает, что

> *если прямая задана любым из уравнений* (5) *и* (7), *то вектор с координатами* $(-B, A)$ *является ее направляющим вектором, а в случае прямоугольной декартовой системы координат вектор с координатами* (A, B) *является ее нормальным вектором;*
> *если прямая задана любым из уравнений* (6), (8) *и* (11), *то вектор с координатами* (r, s) *является ее направляющим вектором;*
> *если прямая задана любым из уравнений* (6), (7), (8), (10), (11), (12) *и* (13), *то точка с координатами* (x_0, y_0) *принадлежит прямой* (*является ее начальной точкой*).

Приведем примеры перехода от одного вида уравнения прямой к другому. Пусть прямая ℓ задана координатным уравнением $2x - y + 3 = 0$. Найдем ее параметрические уравнения. Для этого необходимо знать координаты хотя бы одной точки прямой и координаты ее направляющего вектора. Координаты любой точки, принадлежащей прямой, являются решением уравнения $2x - y + 3 = 0$. Приравнивая, например, x к 1, получаем $y = 5$. Таким образом, годится точка $M_0(1, 5)$. В силу сделанного выше замечания в качестве направляющего вектора можно взять вектор (1,2). Следовательно, параметрическое уравнение данной прямой можно записать в виде

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5 + 2t. \end{cases}$$

Отметим, что мы могли бы найти направляющий вектор прямой ℓ и по-другому. А именно, найдем еще одну точку на этой прямой. Полагая в уравнении $2x - y + 3 = 0$, например, $y = 1$, получаем $x = -1$. Следовательно, точка $M_1(-1, 1)$ принадлежит прямой. Ясно, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (-2, -4)$ будет направляющим вектором нашей прямой. Поэтому система параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = 1 - 4t \end{cases}$$

также задает прямую ℓ. Ту же задачу можно решить и формально, не прибегая к геометрическим образам (т.е. не упоминая о точке, принадлежащей прямой, и о ее направляющем векторе). А именно, положим

$x = t$. Тогда из уравнения $2x - y + 3 = 0$ имеем $2t - y + 3 = 0$, т.е. $y = 2t + 3$. Следовательно, параметрические уравнения прямой ℓ можно записать в виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

Этот формальный способ решения задачи называется *методом введения параметра*. Отметим, что мы получили три разных ответа, но все они правильные — мы нашли три различных вида параметрических уравнений одной и той же прямой. Таким образом, параметрические уравнения прямой определены неоднозначно (как, впрочем, и ее координатное уравнение).

Рассмотрим обратную задачу. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

Найдем ее координатное уравнение. Ясно, что точка (1,2) принадлежит прямой, а вектор $(-2, 3)$ является ее направляющим вектором. Поэтому можно сразу написать каноническое уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3}.$$

После преобразований имеем $3(x-1)+2(y-2) = 0$ или $3x+2y-7 = 0$. Эту задачу также можно решить формально, не прибегая к геометрическим образам. Умножим уравнение $x = 1 - 2t$ на 3, а уравнение $y = 2 + 3t$ на 2 и сложим полученные уравнения. Получим $3x + 2y = 7$ или $3x + 2y - 7 = 0$. Такой метод решения называется *методом исключения параметра*.

3. Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим следующий вопрос: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т.е. выяснить, параллельны они, пересекаются или совпадают? Ответ на него дает

Теорема 3. *Пусть прямая ℓ_1 имеет уравнение $A_1x+B_1y+C_1 = 0$, а прямая ℓ_2 — уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.*

1) *ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда* $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$*;*

2) *ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$*;*

3) *ℓ_1 и ℓ_2 совпадают тогда и только тогда, когда* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет единственное решение; параллельны тогда и только тогда, когда она не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда она имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Это неравенство равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В силу теоремы 1 из §1 система (15) имеет единственное решение, т.е. прямые пересекаются.

Случай 2: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Эти соотношения равносильны тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{а} \quad \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Убедимся, что в этом случае прямые параллельны. Положим $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = t$. Предположим, что система (15) имеет решение (x_0, y_0), т.е.

$$\begin{cases} tA_2x_0 + tB_2y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0. \end{cases}$$

Умножим второе равенство на $-t$ и сложим его с первым. Получим, что $C_1 - C_2t = 0$, что противоречит неравенству $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Мы доказали, что прямые параллельны.

Случай 3: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Эти соотношения равносильны тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Положим $\dfrac{A_1}{A_2} = t$. Тогда $A_1 = tA_2$, $B_1 = tB_2$, $C_1 = tC_2$ и первое уравнение системы (15) можно записать в виде $t(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, причем $t \neq 0$ (так как в противном случае $A_1 = B_1 = 0$). Таким образом, первое уравнение системы (15) равносильно второму. Следовательно, они определяют одну и ту же прямую.

Таким образом, в каждом из трех случаев взаимного расположения прямых мы получим достаточное условие. Убедимся на примере случая пересечения прямых, что эти же условия являются и необходимыми. Пусть прямые пересекаются. Тогда условия случаев 2 и 3 не выполняются, поскольку в противном случае прямые были бы параллельны либо совпадали. Следовательно, выполнено условие случая 1, т.е. $\dfrac{A_1}{B_1} \neq \dfrac{A_2}{B_2}$. Аналогично проверяется необходимость в случаях параллельности и совпадения прямых. Теорема 3 доказана. ■

4. Полуплоскости, определяемые прямой

Покажем, как по уравнению прямой и координатам двух точек, не лежащих на этой прямой, выяснить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от прямой.

Определение. Пусть прямая ℓ задана координатным уравнением $Ax+By+C = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *главным вектором* прямой ℓ.

Сравнивая это определение со сказанным на с. 62, мы видим, что если система координат — прямоугольная декартова, то главный вектор прямой является ее нормальным вектором.

Отметим, что главный вектор прямой определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если t — ненулевое число, то уравнения $Ax + By + C = 0$ и $tAx + tBy + tC = 0$ определяют одну и ту же прямую, главными векторами которой будут как (A, B), так и (tA, tB). В то же время из критерия совпадения двух прямых, доказанного выше в данном параграфе, вытекает, что любые два главных вектора прямой коллинеарны. Отметим, что

> *если $\vec{n}$ — главный вектор прямой ℓ, то вектор $\vec{n}$ не коллинеарен ℓ.*

Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0) \in \ell$, т.е. $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Отложим вектор $\vec{n}$ от точки M_0. Получим точку $M_1(x_0 + A, y_0 + B)$. Подставив координаты этой точки в левую часть уравнения прямой, получим

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 \neq 0.$$

Таким образом, $M_1 \notin \ell$. Поскольку $M_0 \in \ell$, а $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}$, это означает, что вектор $\vec{n}$ не коллинеарен ℓ. Вся плоскость делится прямой ℓ на три непересекающиеся части: прямую ℓ и две полуплоскости (в каждую из этих полуплоскостей входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от прямой). Обозначим ту полуплоскость, в которой лежит точка M_1, через λ, а другую — через μ (рис. 4).

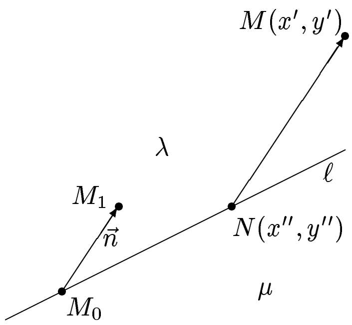


Рис. 4

Теорема 4. *Пусть $M(x', y')$ — точка плоскости. Если $M \in \lambda$, то $Ax' + By' + C > 0$, а если $M \in \mu$, то $Ax' + By' + C < 0$.*

Доказательство. Пусть $M \in \lambda$. Через точку M проведем прямую, коллинеарную вектору $\vec{n}$, до ее пересечения с прямой ℓ. Точку пересечения обозначим через N, а ее координаты — через (x'', y'') (рис. 4). Ясно, что $Ax'' + By'' + C = 0$.

Векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\vec{n}$ сонаправленны, т.е. $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t > 0$. Записав это векторное равенство в координатах, получим, что $x' - x'' = tA$ и $y' - y'' = tB$, откуда $x' = x'' + tA$ и $y' = y'' + tB$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ax' + By' + C &= A(x'' + tA) + B(y'' + tB) + C = \\ &= Ax'' + By'' + C + t(A^2 + B^2) = t(A^2 + B^2) > 0. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается вполне аналогично. Надо только учесть, что если $M \in \mu$, то $\overrightarrow{NM} \uparrow\downarrow \vec{n}$ и потому $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}$ для некоторого $t < 0$. Теорема 4 доказана. ■

Из теоремы 4 вытекает следующий факт:

точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ расположены по одну сторону (по разные стороны) от прямой $Ax + By + C = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + C$ и $Ax_2 + By_2 + C$ имеют одинаковый знак (соответственно — разные знаки).

5. Расстояние от точки до прямой

Будем предполагать, что система координат, заданная на плоскости, — прямоугольная декартова. Наша цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости.

Пусть прямая ℓ задана координатным уравнением $Ax+By+C=0$, а $M(x', y')$ — некоторая точка плоскости. Обозначим через $M_0(x_0, y_0)$ ортогональную проекцию точки M на ℓ (рис. 5).

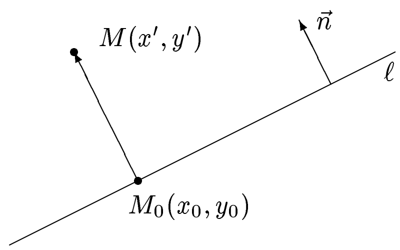


Рис. 5

Поскольку система координат — прямоугольная декартова, то, как отмечалось на с. 62, вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к ℓ. Поскольку вектор $\overrightarrow{M_0M}$ также перпендикулярен к ℓ, получаем, что $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{n}$. Следовательно, $\cos(\widehat{\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}}) = \pm 1$ и потому $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = \pm|\overrightarrow{M_0M}| \cdot |\vec{n}|$.

Обозначим расстояние от M до ℓ через $d(M, \ell)$. В силу сказанного выше

$$d(M, \ell) = |\overrightarrow{M_0M}| = \frac{|(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

Учитывая, что $M_0 \in \ell$, получаем, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Используя аналог формулы (2) из §3 для векторов на плоскости, имеем

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) &= A(x' - x_0) + B(y' - y_0) = Ax' + By' - (Ax_0 + By_0) = \\ &= Ax' + By' + C.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d(M, \ell) = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (16)$$

Это и есть искомая формула расстояния от точки до прямой.

6. Угол между прямыми

По-прежнему будем предполагать, что система координат, заданная на плоскости, является прямоугольной декартовой. Наша цель — научиться находить угол между двумя прямыми на плоскости.

Предположим, что на плоскости есть две прямые, заданные каноническими уравнениями, — прямые

$$\ell_1 : \ \frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{r_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ \frac{x - x_2}{q_2} = \frac{y - y_2}{r_2}.$$

Будем считать, что угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами. Используя аналог формулы (5) из §3 для векторов на плоскости, получаем, что если α — угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, то

$$\cos\alpha = \frac{q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2}}. \qquad (17)$$

Абсолютно аналогично находится угол между двумя прямыми в случаях, когда обе они заданы параметрическими уравнениями или одна задана каноническим уравнением, а другая параметрическими уравнениями.

Предположим теперь, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы координатными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Как отмечалось на с. 62, векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ являются нормальными векторами прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Легко понять (рис. 6), что у прямых ℓ_1 и ℓ_2 можно выбрать направляющие векторы так, что угол между ними равен углу между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Таким образом, в качестве угла между ℓ_1 и ℓ_2 можно взять угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Используя, как и выше, аналог формулы (5) из §3 для векторов на плоскости, получаем, что угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (18)$$

Наконец, в случае, если одна из прямых задана каноническим уравнением (или параметрическими уравнениями), а другая — координатным уравнением, то нужно сначала привести уравнения обеих прямых к одному (все равно, к какому именно) виду, т.е. найти либо координатное уравнение первой прямой, либо каноническое уравнение второй прямой, а затем воспользоваться той из формул (17) и (18), которая подходит в данном случае.

Отметим, что между двумя прямыми на плоскости всегда имеются два угла, один из которых острый, а другой — тупой (за исключением случая перпендикулярных прямых, когда углов тоже два, но оба они равны $\frac{\pi}{2}$). Мы не знаем, как расположены друг относительно друга те направляющие или нормальные векторы двух прямых, с помощью которых мы научились выше находить угол между прямыми. Поэтому с помощью формул (17) и (18) мы можем получить как острый, так и тупой угол, причем заранее не известно, какой именно (рис. 7).

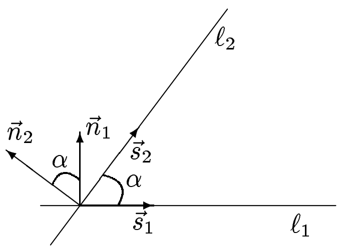


Рис. 6

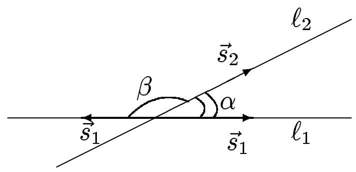


Рис. 7

Если α и β — два различных угла между двумя фиксированными прямыми, то $\beta = \pi - \alpha$. Учитывая, что $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен, мы получаем, что острый угол можно найти по одной из формул

$$\cos\alpha = \frac{|q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2}} \quad \text{или} \quad \cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

а тупой угол — по одной из формул

$$\cos\alpha = -\frac{|q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2}} \quad \text{или} \quad \cos\alpha = -\frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Приведем пример. Пусть даны прямые

$$\ell_1 : \ 3x - 4y = 7 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ \frac{x+6}{1} = \frac{y-17}{1}$$

и требуется найти тупой угол между ними. Координатное уравнение прямой ℓ_2 имеет вид $x - y + 23 = 0$. Имеем

$$\cos\alpha = -\frac{|3+4|}{5\sqrt{2}} = \frac{-7}{5\sqrt{2}}.$$

§8. Плоскость в пространстве

Изучение плоскости основано на понятиях координатного и параметрических уравнений плоскости. Предварительно мы ознакомимся с понятиями координатного и параметрических уравнений для произвольной поверхности.

1. Координатное и параметрические уравнения поверхности

Координатное уравнение поверхности вводится аналогично коодинатному уравнению прямой на плоскости.

Обозначим через $\mathcal{F}(x, y, z)$ выражение, содержащее переменные x, y и z, константы, знаки арифметических действий и элементарных функций. Например, в качестве $\mathcal{F}(x, y, z)$ можно взять выражения $x + 2y - 5z - 1$, $x^2 + y^2 - 2\sqrt{xyz}$, $\sin(xyz)$, $\ln x + y$, $x^2 - 2z^2$, $y^4 - 1$ и т.д.

Пусть в пространстве зафиксирована система координат.

Определение. Уравнение $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$ называется *координатным уравнением* поверхности σ, если точка лежит на σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$. Множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$, называется *геометрическим образом* этого уравнения.

Приведем пример. Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат. В качестве поверхности σ рассмотрим сферу радиуса r с центром в точке $C(a, b, c)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Ясно, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $|CM| = r$, т.е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r. \qquad (1)$$

Следовательно, (1) — уравнение сферы σ. Правда, обычно под уравнением сферы понимают другое уравнение, равносильное (1), — а именно уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \qquad (2)$$

В приведенном примере по данной поверхности найдено ее координатное уравнение. Рассмотрим пример обратной задачи, когда по уравнению определяется его геометрический образ. Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Преобразуем его левую часть, используя метод выделения полного квадрата. Имеем

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + (z^2 - 6z + 9) - 9 - 2 = 0$$

или $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 16$. Следовательно, исходное уравнение определяет сферу радиуса 4 с центром в точке $(1,-2,3)$.

Системой параметрических уравнений поверхности или просто *параметрическими уравнениями поверхности* называют систему уравнений вида

$$\begin{cases} x = f(u,v), \\ y = g(u,v), \\ z = h(u,v), \end{cases}$$

где $f(u,v)$, $g(u,v)$ и $h(u,v)$ — некоторые функции от двух переменных u и v. Имеется в виду, что точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда существуют значения параметров u_0, v_0 такие, что $x_0 = f(u_0,v_0)$, $y_0 = g(u_0,v_0)$ и $z_0 = h(u_0,v_0)$. Так, например, сфера радиуса r с центром в точке (a,b,c), координатное уравнение которой имеет вид (2), может быть задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a + r\cos u\cos v\,, \\ y = b + r\cos u\sin v\,, \\ z = c + r\sin v \qquad . \end{cases}$$

2. Виды уравнений плоскости

Определение. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

называется *уравнением первого порядка с тремя неизвестными*, если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Последнее неравенство означает, что коэффициенты A, B и C не могут быть одновременно равны нулю.

Теорема 1. *Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана уравнением первого порядка с тремя неизвестными, и, обратно, всякое уравнение первого порядка с тремя неизвестными определяет плоскость.*

Доказательство. Пусть в пространстве заданы плоскость σ и система координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Будем считать, что мы знаем координаты (в этой системе координат) некоторой точки M_0, лежащей в плоскости, и некоторых двух неколлинеарных между собой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, коллинеарных плоскости: $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{a}_1 = (q_1,r_1,s_1)$, $\vec{a}_2 = (q_2,r_2,s_2)$ (рис. 8).

Рассмотрим произвольную точку пространства $M(x, y, z)$. Очевидно, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Применим критерий компланарности векторов, сформулированный в теореме из §4. Имеем

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, точка M принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют только что приведенному уравнению. Разложив определитель по первой строке, имеем

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}, \\ D &= -Ax_0 - By_0 - Cz_0. \end{aligned}$$

Тогда равенство (5) можно переписать в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Легко понять, что если $A = B = C = 0$, то $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{s_1}{s_2}$, и потому векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны вопреки их выбору. Таким образом, мы получили уравнение первого порядка. Первое утверждение теоремы доказано.

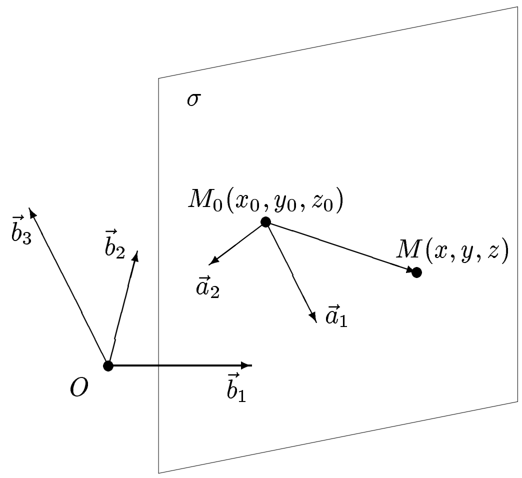


Рис. 8

Докажем второе утверждение. Рассмотрим уравнение (3), где $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Для определенности будем считать, что $A \neq 0$. Возьмем какое-нибудь решение (x_0, y_0, z_0) этого уравнения. Тогда, разумеется, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычтем последнее равенство из уравнения (3). Получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6}$$

Ясно, что уравнения (3) и (6) имеют одно и то же множество решений. Рассмотрим теперь плоскость σ, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = (-B, A, 0)$ и $\vec{a}_2 = (-C, 0, A)$ (отметим, что эти два вектора не коллинеарны, поскольку $A \neq 0$). Напишем для этой плоскости уравнение вида (5):

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} -B & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} -B & A \\ -C & 0 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0.$$

Раскрывая в этом равенстве определители и сокращая на A, мы получим уравнение (6). Следовательно, уравнение (6), как и уравнение (3), определяет плоскость σ. Теорема 1 доказана. ∎

Уравнение первого порядка, задающее плоскость, называется ее *координатным уравнением*. Наряду с этим термином в том же смысле часто употребляют термин *общее уравнение* плоскости.

Сделаем несколько замечаний к доказательству теоремы 1. Предположим, что плоскость σ задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Рассмотрим векторы $\vec{s}_1=(-B,A,0)$, $\vec{s}_2=(-C,0,A)$ и $\vec{s}_3=(0,-C,B)$. В процессе доказательства теоремы 1 установлено, что векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ коллинеарны σ. Аналогично проверяется, что вектор $\vec{s}_3$ также коллинеарен σ. Легко понять, что среди векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\vec{s}_3$ всегда найдется по крайней мере два неколлинеарных. В самом деле, если $A\neq 0$, то $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$; если $A=0$, но $B\neq 0$, то $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_3$; наконец, если $A=B=0$, то $C\neq 0$ и потому $\vec{s}_2 \nparallel \vec{s}_3$. Таким образом,

> *если плоскость задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то векторы $(-B,A,0)$, $(-C,0,A)$ и $(0,-C,B)$ коллинеарны этой плоскости и по крайней мере два из этих трех векторов не коллинеарны между собой.*

Рассмотрим теперь вектор $\vec{n}=(A,B,C)$. В случае прямоугольной декартовой системы координат скалярное произведение этого вектора на каждый из векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\vec{s}_3$ равно 0 (в самом деле, $\vec{n}\vec{s}_1=-AB+BA+0=0$, $\vec{n}\vec{s}_2=-AC+0+CA=0$ и $\vec{n}\vec{s}_3=0-BC+CB=0$), т.е. вектор $\vec{n}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $\vec{s}_3$. В силу сказанного выше $\vec{n}$ перпендикулярен к σ. Таким образом,

> *если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор (A,B,C) перпендикулярен к этой плоскости.*

Следующее замечание относится к равенству (4). Мы доказали, что точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, (4) — уравнение плоскости. Его называют *каноническим уравнением плоскости.*

Перейдем к параметрическим уравнениям плоскости.

Определение. Система уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v, \\ y = y_0 + r_1u + r_2v, \\ z = z_0 + s_1u + s_2v \end{cases} \tag{7}$$

называется *системой параметрических уравнений второго типа* (или просто *параметрическими уравнениями второго типа*), если векторы $\vec{a}_1=(q_1,r_1,s_1)$ и $\vec{a}_2=(q_2,r_2,s_2)$ не коллинеарны между собой.

Теорема 2. *Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана системой* *параметрических уравнений второго типа, и, обратно, любая система параметрических уравнений второго типа определяет плоскость.*

Доказательство. Пусть в пространстве заданы плоскость σ и система координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Будем считать, что мы знаем координаты (в этой системе координат) некоторой точки M_0, лежащей в плоскости, и некоторых двух неколлинеарных между собой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, коллинеарных плоскости: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$, $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$. Рассмотрим произвольную точку пространства $M(x, y, z)$. Очевидно, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. До сих пор мы повторяли доказательство теоремы 1. Теперь вместо критерия компланарности векторов воспользуемся определением этого понятия. Итак, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ лежат в одной плоскости. Поскольку два последних из них не коллинеарны, они образуют базис этой плоскости, и мы можем разложить вектор $\overrightarrow{M_0M}$ по этому базису. Иными словами, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда существуют числа u и v такие, что

$$\begin{cases} x - x_0 = uq_1 + vq_2, \\ y - y_0 = ur_1 + vr_2, \\ z - z_0 = us_1 + vs_2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = x_0 + uq_1 + vq_2, \\ y = y_0 + ur_1 + vr_2, \\ z = z_0 + us_1 + vs_2. \end{cases}$$

Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть дана система (7). Рассмотрим плоскость σ, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ и $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$. Если для этой плоскости написать параметрические уравнения так, как это было сделано в предыдущем абзаце, то мы получим систему (7). Следовательно, (7) определяет плоскость σ. Теорема 2 доказана. ∎

Система параметрических уравнений второго типа, задающая плоскость, называется *системой параметрических уравнений* (или просто *параметрическими уравнениями*) этой плоскости.

Прежде чем переходить к примерам, укажем еще два вида уравнения плоскости. Предположим, что мы знаем три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, принадлежащие плоскости и не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки M_0, M_1 и M_2 не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в указанное выше каноническое уравнение плоскости, получаем следующее уравнение, которое называется *уравнением плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Пусть теперь σ — плоскость, не проходящая через начало координат и не параллельная ни одной из осей координат. Тогда существуют такие ненулевые числа a, b и c, что плоскость σ пересекает ось Ox в точке с координатами $(a, 0, 0)$, ось Oy — в точке с координатами $(0, b, 0)$, а ось Oz — в точке с координатами $(0, 0, c)$. Напишем уравнение плоскости σ по этим трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель из левой части этого равенства по первой строке. После очевидных преобразований получим $bcx+acy+abz = abc$. Разделим обе части последнего равенства на abc (воспользовавшись тем, что числа a, b и c отличны от нуля). Получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{9}$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках*. Этот термин объясняется тем, что параметры a, b и c, фигурирующие в уравнении (9), суть, с точностью до знака, длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

Определение. Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Из этого определения видно, что как направляющий, так и нормальный вектор для данной плоскости определен неоднозначно. Плоскость имеет бесконечно много направляющих векторов и бесконечно много (коллинеарных друг другу) нормальных векторов.

Из сказанного выше вытекает, что

> *если плоскость задана любым из уравнений* (3) *и* (6), *то векторы с координатами* $(-B, A, 0)$, $(-C, 0, A)$ *и* $(0, -C, B)$

являются ее направляющими векторами, а в случае прямоугольной декартовой системы координат вектор с координатами (A, B, C) *является ее нормальным вектором;*
если плоскость задана любым из уравнений (4) *и* (7), *то векторы с координатами* (q_1, r_1, s_1) *и* (q_2, r_2, s_2) *являются ее направляющими векторами;*
если плоскость задана любым из уравнений (4), (6), (7) *и* (8), *то точка с координатами* (x_0, y_0, z_0) *принадлежит плоскости* (*является ее начальной точкой*).

Приведем примеры перехода от одного вида уравнения плоскости к другому. Пусть плоскость σ задана координатным уравнением $2x - y + z + 3 = 0$. Найдем ее параметрические уравнения. Для этого необходимо знать координаты хотя бы одной точки плоскости и координаты двух ее направляющих векторов, не коллинеарных между собой. Координаты любой точки, принадлежащей плоскости, являются решением уравнения $2x - y + z + 3 = 0$. Приравнивая, например, x и y к 0, получаем $z = -3$. Таким образом, годится точка $M_0(0, 0, -3)$. В силу сделанного выше замечания в качестве направляющих векторов можно взять векторы (1,2,0) и $(-1, 0, 2)$. Следовательно, параметрические уравнения данной плоскости можно записать в виде

$$\begin{cases} x = & u - v, \\ y = & 2u \quad\quad , \\ z = -3 & \quad\; + 2v. \end{cases}$$

Отметим, что мы могли бы найти направляющие векторы плоскости σ и по-другому. А именно, найдем еще две точки на этой плоскости. Полагая в уравнении $2x - y + z + 3 = 0$, например, $x = z = 1$, получаем $y = 6$, а полагая $x = z = 0$, получаем $y = 3$. Следовательно, точки $M_1(1, 6, 1)$ и $M_2(0, 3, 0)$ принадлежат плоскости. Ясно, что векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = (1, 6, 4)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (0, 3, 3)$ будут направляющими векторами нашей плоскости. Кроме того, очевидно, что они не коллинеарны. Поэтому параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = & u \quad\quad\;\; , \\ y = & 6u + 3v, \\ z = -3 + & 4u + 3v \end{cases}$$

также задают плоскость σ. Ту же задачу можно решить и формально, не прибегая к геометрическим образам (т.е. не упоминая о точке, принадлежащей плоскости, и о ее направляющих векторах). А именно, положим $x = u$ и $y = v$. Тогда из уравнения $2x - y + z + 3 = 0$ имеем

$2u-v+z+3=0$, т.е. $z=-2u+v-3$. Следовательно, параметрические уравнения плоскости σ можно записать в виде

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -3 - 2u + v. \end{cases}$$

Этот формальный способ решения задачи называется *методом введения параметров*. Отметим, что мы получили три разных ответа, но все они правильные — мы нашли три различные системы параметрических уравнений одной и той же плоскости. Таким образом, параметрические уравнения плоскости определены неоднозначно (как, впрочем, и ее координатное уравнение).

Рассмотрим обратную задачу. Пусть плоскость σ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + u - v, \\ y = 2 + 2u + 3v, \\ z = -1 + u + v. \end{cases}$$

Найдем ее координатное уравнение. Ясно, что точка $(1,2,-1)$ принадлежит плоскости, а векторы (1,2,1) и $(-1,3,1)$ являются ее направляющими векторами, не коллинеарными между собой. Поэтому можно сразу написать каноническое уравнение плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем $-(x-1)-2(y-2)+5(z+1)=0$ или $-x-2y+5z+10=0$. Эту задачу также можно решить формально, не прибегая к геометрическим образам. Для этого запишем первые два уравнения в системе параметрических уравнений нашей плоскости в виде $u-v=x-1$, $2u+3v=y-2$. Будем смотреть на них как на систему уравнений относительно u и v. Решая эту систему, получим $u=\dfrac{3x+y-5}{5}$, $v=\dfrac{-2x+y}{5}$. Подставив эти равенства в уравнение $z=-1+u+v$ и произведя необходимые упрощения, получим $z=\dfrac{x+2y-10}{5}$, откуда $x+2y-5z-10=0$. Мы получили координатное уравнение нашей плоскости (отметим, что оно отличается от координатного уравнения, полученного первым способом). Такой метод решения называется методом *исключения параметров*.

3. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим следующий вопрос: как по уравнениям двух плоскостей определить взаимное расположение этих плоскостей, т.е. выяснить, будут ли они параллельны, пересекаться или совпадать? Ответ на него дает

Теорема 3. *Пусть плоскость σ_1 имеет уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а плоскость σ_2 — уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.*

1) *σ_1 и σ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \textit{или} \quad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

2) *σ_1 и σ_2 параллельны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

3) *σ_1 и σ_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Ясно, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет решение, но уравнения системы не равносильны; параллельны тогда и только тогда, когда система не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда уравнения системы равносильны.

Предположим сначала, что коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Для определенности будем считать, что $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Убедимся, что в этом случае плоскости пересекаются. Придадим z произвольное значение $z = z_0$ и запишем систему (10) в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \tag{11}$$

Условие $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому по теореме 1 из §1 система (11) имеет единственное решение. Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда тройка чисел (x_0, y_0, z_0) будет решением системы (10). Следовательно, плоскости σ_1 и σ_2 имеют по крайней мере одну общую точку, т.е. они либо пересекаются, либо совпадают. Предположим, что плоскости совпадают. Обозначим через σ_3 плоскость с уравнением $z = z_0$. Пересечение (совпадающих) плоскостей σ_1 и σ_2 с σ_3 содержит точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а значит, оно содержит и некоторую прямую. У всех точек этой прямой третья координата равна z_0 (так как они лежат в плоскости σ_3). Пусть $M_1(x_1, y_1, z_0)$ — точка этой прямой, отличная от M_0. Тогда пара чисел (x_1, y_1) отлична от (x_0, y_0) и является решением системы (11). Но это противоречит тому, что, как отмечалось выше, эта система имеет единственное решение. Таким образом, плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются.

Мы доказали, что если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются. Верно и обратное утверждение. В самом деле, предположим, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, но $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. Положим $\dfrac{A_1}{A_2} = t$. Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} tA_2x + tB_2y + tC_2z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Если $\dfrac{D_1}{D_2} = t$, то уравнения последней системы равносильны, а если $\dfrac{D_1}{D_2} \neq t$, то эта система не имеет решений. В первом случае плоскости σ_1 и σ_2 совпадают, а во втором они параллельны. Ни то ни другое невозможно, так как мы предположили, что эти плоскости пересекаются. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 1.

Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично утверждениям 2 и 3 в теореме 3 из §7. Теорема 3 доказана. ■

4. Полупространства, определяемые плоскостью

Покажем, как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, выяснить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости.

Определение. Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *главным вектором* плоскости σ.

Сравнивая это определение со сказанным на с. 78, мы видим, что если система координат — прямоугольная декартова, то главный вектор плоскости является ее нормальным вектором.

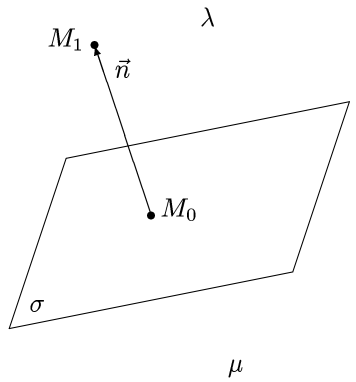


Рис. 9

Отметим, что главный вектор плоскости определен неоднозначно. В самом деле, ясно, что если t — ненулевое число, то уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ и $tAx+tBy+tCz+tD=0$ определяют одну и ту же плоскость, главными векторами которой будут как (A, B, C), так и (tA, tB, tC). В то же время из указанного в теореме 3 критерия совпадения плоскостей вытекает, что любые два главных вектора плоскости коллинеарны.

Отметим, что если $\vec{n}$ — главный вектор плоскости σ, то вектор $\vec{n}$ не коллинеарен σ. Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству аналогичного факта о главном векторе прямой, приведенному в §7 (см. с. 69). Отложим вектор $\vec{n}$ от точки $M_0 \in \sigma$. Конец вектора обозначим через M_1. Точка M_1 не лежит в σ, поскольку вектор $\vec{n}$ не коллинеарен σ. Все пространство делится плоскостью σ на три непересекающиеся части: плоскость σ и два полупространства (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от плоскости). Обозначим то полупространство, в которой лежит точка M_1, через λ, а другое — через μ (рис. 9).

Теорема 4. *Пусть $M(x', y', z')$ — произвольная точка пространства. Если $M \in \lambda$, то $Ax' + By' + Cz' + D > 0$, а если $M \in \mu$, то $Ax' + By' + Cz' + D < 0$.* ■

Доказательство этой теоремы мы не приводим, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы 4 из §7.

Из теоремы 4 вытекает следующий факт:

> *точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ расположены по одну сторону (по разные стороны) от плоскости $Ax+By+Cz+D = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1+By_1+Cz_1+D = 0$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ имеют одинаковый знак (соответственно — разные знаки).*

5. Расстояние от точки до плоскости

Будем предполагать, что система координат, заданная в пространстве, — прямоугольная декартова. Наша цель — указать формулу для расстояния от точки до плоскости.

Пусть плоскость σ задана координатным уравнением $Ax + By + Cz+D = 0$, а $M(x', y', z')$ — некоторая точка пространства. Поскольку система координат — прямоугольная декартова, то, как отмечалось на с. 78, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен к σ. Обозначим через $d(M, \sigma)$ расстояние от M до σ. Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12}$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он аналогичен выводу формулы (16) из §7.

6. Угол между плоскостями

Будем по-прежнему предполагать, что система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой. Наша цель — научиться находить угол между двумя плоскостями.

Предположим, что имеются две плоскости, заданные координатными уравнениями, — плоскости

$$\sigma_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Будем считать, что угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Используя формулу (5) из §3, получаем, что если α — угол между плоскостями σ_1 и σ_2, то

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если одна из плоскостей задана каноническим уравнением или параметрическими уравнениями, то нужно сначала найти ее координатное уравнение (а если обе плоскости заданы "неподходящими" уравнениями, то найти координатное уравнение каждой из них), а затем воспользоваться приведенной выше формулой.

Отметим, что между двумя плоскостями всегда имеются два угла, один из которых острый, а другой — тупой (за исключением случая перпендикулярных плоскостей, когда углов тоже два, но оба они равны $\frac{\pi}{2}$). Мы не знаем, как расположены друг относительно друга те нормальные векторы двух плоскостей, с помощью которых мы научились находить угол между плоскостями. Поэтому с помощью приведенной выше формулы мы можем получить как острый, так и тупой угол, причем заранее неизвестно, какой именно. Если требуется найти какой-то конкретный угол, то следует действовать так, как описано в конце §7.

§9. Прямая в пространстве

Как и в "плоском" случае, изучение прямой в пространстве основано на понятиях координатных и параметрических уравнений прямой в пространстве. Предварительно мы ознакомимся с этими понятиями для произвольной линии.

1. Координатные и параметрические уравнения линии

Как и в начале §8, обозначим через $\mathcal{F}(x, y, z)$ выражение, содержащее переменные x, y и z, константы, знаки арифметических действий и элементарных функций.

Пусть в пространстве зафиксирована система координат. Любую кривую в пространстве можно представить (разумеется, многими различными способами) как пересечение двух поверхностей. Поэтому естественным является следующее

Определение. Пусть линия ℓ является пересечением поверхностей σ_1 и σ_2, поверхность σ_1 задана координатным уравнением $\mathcal{F}_1(x, y, z) = 0$, а поверхность σ_2 — координатным уравнением $\mathcal{F}_2(x, y, z) = 0$. Тогда система

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x,y,z) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

называется *системой координатных уравнений* (или просто *координатными уравнениями*) линии ℓ. Множество всех точек пространства, координаты которых являются решениями этой системы уравнений, называется ее *геометрическим образом.*

Отметим, что из определения координатного уравнения поверхности (см. начало §8) и того факта, что линия ℓ являтся пересечением поверхностей σ_1 и σ_2, вытекает, что координаты произвольной точки пространства удовлетворяют системе координатных уравнений линии ℓ тогда и только тогда, когда эта точка лежит на ℓ.

Приведем примеры. Пусть σ_1 и σ_2 — плоскости, заданные координатными уравнениями $2x-y+z-1=0$ и $x+3y-z=0$ соответственно. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях плоскостей не пропорциональны. Отсюда вытекает, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются (см. теорему 3 в §8). Следовательно, система уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0, \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

является системой координатных уравнений некоторой прямой (той, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2).

В качестве примера обратной задачи рассмотрим следующую: доказать, что геометрическим образом системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 5 = 0, \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

является окружность, и найти ее радиус. Методом выделения полного квадрата легко убедиться в том, что первое уравнение указанной системы равносильно уравнению $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$. Следовательно, оно задает сферу σ_1 радиуса 2 с центром в точке $(1,2,-2)$. Второе уравнение задает плоскость σ_2. Используя формулу (12) из §8, получаем, что расстояние от центра сферы σ_1 до плоскости σ_2 равно $\sqrt{3}$. Оно меньше радиуса сферы. Следовательно, плоскость и сфера пересекаются по окружности. Обозначим радиус этой окружности через r, радиус сферы — через R, центр окружности через A, а центр сферы — через C. Ясно, что $|CA|^2+r^2=R^2$. Поскольку $|CA|=\sqrt{3}$, а $R=2$, имеем $r=1$.

Перейдем к понятию параметрических уравнений линии в пространстве. Они вводятся аналогично параметрическим уравнениям линии на плоскости (см. начало §7). Предположим по-прежнему, что в пространстве зафиксирована некоторая система координат. Рассмотрим некоторую линию ℓ. Представим ее себе как траекторию движения точки $M(x,y,z)$. Поскольку эта точка движется, ее координаты с течением времени меняются, т.е. являются функциями времени. Пусть координата x есть функция $f(t)$, координата y — функция $g(t)$, а координата z — функция $h(t)$. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t) \end{cases} \tag{1}$$

называется *системой параметрических уравнений* (или просто *параметрическими уравнениями*) линии ℓ. При этом несущественно, понимается ли t как время или как произвольный параметр, принимающий в качестве значений действительные числа (мы начали с интерпретации t как времени исключительно для большей наглядности). Переменная t называется *параметром.* Область изменения t может не совпадать с множеством всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а ограничиваться некоторым его промежутком. Подчеркнем, что если система (1) является системой параметрических уравнений некоторой линии ℓ, то для любой точки $M(x,y,z)$ на ℓ существует значение t, принадлежащее области изменения параметра, такое, что выполнены равенства (1). И, обратно, если t принадлежит области изменения параметра, то точка, координаты которой определены равенствами (1), лежит на ℓ.

В качестве примера составим параметрические уравнения окружности радиуса 2 с центром в точке $C(0,0,1)$ и расположенной в плоскости, параллельной плоскости Oxy (в прямоугольной декартовой системе координат). Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 10. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка на окружности. Поскольку плоскость, в которой расположена окружность, параллельна плоскости Oxy, аппликаты (третьи координаты) точек M и C совпадают, т.е. $z = 1$. От точки C отложим ненулевой вектор $\vec{a}$, сонаправленный с положительным направлением оси Ox, и возьмем в качестве параметра угол между векторами $\overrightarrow{CM}$ и $\vec{a}$ (отсчитываемый против часовой стрелки). Учитывая, что радиус окружности равен 2, имеем

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 1 \qquad . \end{cases} \tag{2}$$

Нетрудно понять, что и обратно, если координаты (x,y,z) некоторой точки M удовлетворяют этой системе уравнений, то точка M лежит на нашей окружности. Следовательно, (2) — параметрические уравнения этой окружности. Итак, по заданной линии ℓ мы составили ее параметрические уравнения.

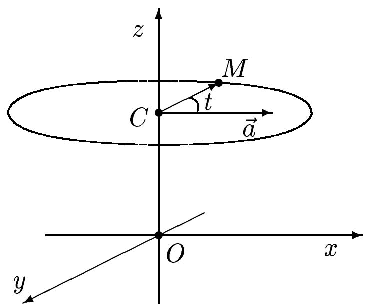


Рис. 10

Обратную задачу мы здесь рассматривать не будем.

2. Виды уравнений прямой

Теорема 1. *Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана системой уравнений вида*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

в уравнениях которой коэффициенты при неизвестных не пропорциональны. Обратно, всякая система уравнений вида (3), *в уравнениях которой коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, определяет прямую.*

Доказательство. Пусть в пространстве задана прямая ℓ. Представим ℓ как пересечение двух плоскостей σ_1 и σ_2. Пусть

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

— координатные уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Поскольку плоскости пересекаются, коэффициенты при неизвестных в их уравнениях не пропорциональны (см. теорему 3 в §8). Ясно, что геометрическим образом системы уравнений (3) будет в точности прямая ℓ. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим систему (3). Каждое из двух уравнений, входящих в эту систему, задает некоторую плоскость. Эти две плоскости пересекаются, поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (3) не пропорциональны (вновь см. теорему 3 в §8). Ясно, что прямая, по которой пересекаются эти плоскости, задается системой (3). Теорема 1 доказана. ■

Система уравнений вида (3), в уравнениях которой коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, называется *системой координатных уравнений* (или просто *координатными уравнениями*) прямой в пространстве. Наряду с этим термином в том же смысле часто употребляют термин *система общих уравнений* (или *общие уравнения*) прямой в пространстве.

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой.

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \tag{4}$$

называется *системой параметрических уравнений третьего типа* (или просто *параметрическими уравнениями третьего типа*), если $q^2 + r^2 + s^2 \neq 0$.

Как обычно, условие $q^2 + r^2 + s^2 \neq 0$ означает, что по крайней мере одно из чисел q, r и s отлично от нуля.

Теорема 2. *Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана системой параметрических уравнений третьего типа, и, обратно, любая система параметрических уравнений третьего типа определяет прямую.* ■

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2 из §7, и потому мы его опускаем. Отметим только, что если прямая задана уравнениями (4), то точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой прямой, а вектор с координатами (q, r, s) коллинеарен ей.

Система параметрических уравнений третьего типа, задающая прямую, называется *системой параметрических уравнений* (или просто *параметрическими уравнениями*) этой прямой.

Укажем еще два вида уравнений прямой в пространстве. Пусть прямая задана системой уравнений (4) (в которой по крайней мере одно из чисел q, r и s отлично от нуля). Выражая параметр t из каждого из уравнений этой системы и приравнивая полученные выражения, получаем равенства

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \tag{5}$$

которые называются *каноническими уравнениями* прямой в пространстве. Отметим, что один или два из знаменателей в (5) (но не все три!) могут быть равны нулю. В этом случае равенства (5) понимаются как совокупность двух пропорций. Так, уравнение

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z + 18}{0}$$

есть не что иное, как другой способ записи системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 1) \cdot 0 = (y - 2) \cdot 1, \\ (x - 1) \cdot 0 = (z + 18) \cdot 1, \end{cases}$$

и потому задает прямую

$$\begin{cases} y - 2 = 0, \\ z + 18 = 0. \end{cases}$$

Определение. Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором.*

Из этого определения видно, что направляющий вектор прямой определен неоднозначно. Прямая имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов. Отметим еще, что

> *для прямой в пространстве понятие нормального вектора не определено.*

Предположим теперь, что мы знаем две различные точки, принадлежащие прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нуль-вектора. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие равенства, которые называются *уравнениями прямой по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{6}$$

Из сказанного выше вытекает, что:

если прямая задана любым из уравнений (4) *и* (5)*, то вектор с координатами* (q, r, s) *является ее направляющим вектором;*
если прямая задана любым из уравнений (4), (5) *и* (6)*, то точка с координатами* (x_0, y_0, z_0) *принадлежит прямой (является ее начальной точкой).*

Рассмотрим вопрос о переходе от одного вида уравнения прямой к другому. Переход от координатных уравнений к параметрическим проведем в общем виде.

Пусть прямая ℓ задана координатными уравнениями (3). Найдем ее параметрические уравнения. Для этого необходимо знать координаты хотя бы одной точки прямой и координаты ее направляющего вектора. Координаты любой точки, принадлежащей прямой, являются решением системы уравнений (3). Поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях этой системы не пропорциональны, для определенности будем считать, что $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Это неравенство можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Далее, систему (3) нам будет удобно представить в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \end{cases} \tag{7}$$

Придадим z некоторое значение z_0. Система (7) превратится в систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \tag{8}$$

В силу сказанного выше определитель системы (8) отличен от 0. По теореме 1 из §1 она имеет единственное решение (x_0, y_0):

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x_0 + B_2y_0 = -C_2z_0 - D_2. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, тройка чисел (x_0, y_0, z_0) является решением системы (3). Мы нашли начальную точку прямой. Осталось найти ее направляющий вектор. Из первого уравнения системы (8) вычтем первое уравнение системы (9), а из второго уравнения системы (8) — второе уравнение системы (9). Получим систему

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Определитель этой системы отличен от нуля. Следовательно, ее решение можно найти по теореме 1 из §1:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{10}$$

Легко проверить, что

$$\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix} = (z - z_0) \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix} = -(z - z_0) \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, равенства (10) можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или в виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Последние равенства означают, что вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \tag{11}$$

является направляющим вектором прямой ℓ.

Итак, исходя из координатных уравнений прямой, мы нашли ее начальную точку и направляющий вектор, а значит, можем написать и ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\[2ex] y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\[2ex] z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot t. \end{cases}$$

Вернемся к равенству (11), которое показывает, как найти координаты направляющего вектора прямой ℓ, заданной координатными уравнениями (3). Мы вывели его в предположении, что система координат — произвольная. Формулы получились достаточно громоздкими и трудными для запоминания. Однако в случае, когда система координат — прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод). Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений (3) в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскость, задаваемую первым уравнением этой системы, через σ_1, а плоскость, задаваемую вторым уравнением системы, — через σ_2. Поскольку теперь все происходит в прямоугольной декартовой системе координат, векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Обозначим через $\vec{b}$ векторное произведение этих векторов. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку вектор $\vec{n}_1$ перпендикулярен к плоскости σ_1, получаем, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен плоскости σ_1. Аналогично из того, что $\vec{b} \perp \vec{n}_2$, а вектор $\vec{n}_2$ перпендикулярен к плоскости σ_2, вытекает, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен плоскости σ_2. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2, т.е. прямой ℓ. Далее, из того, что $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. Следовательно, $\vec{b} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \ne \vec{0}$ (см. свойство 1 на с. 29). Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ. Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности те координаты, которые указаны в правой части равенства (11) — см. формулу (2) в §4. Итак,

> *если в прямоугольной декартовой системе координат прямая задана как пересечение двух плоскостей, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей.*

Мы подробно разобрали в общем виде задачу перехода от координатных уравнений прямой к ее параметрическим уравнениям. Обратную задачу рассмотрим на примере. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3 + t, \\ z = -1 - 3t. \end{cases} \tag{12}$$

Найдем ее координатные уравнения. Точка $(1, 3, -1)$ принадлежит прямой, а вектор $(-2, 1, -3)$ является ее направляющим вектором. Поэтому можно сразу написать канонические уравнения прямой ℓ:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-3}.$$

Из равенства первых двух дробей после элементарных преобразований получаем $x+2y-7=0$, а из равенства второй и третьей дробей выводится, что $3y+z-8=0$. Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} - 7 = 0, \\ \phantom{x+{}} 3y + z - 8 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

является системой координатных уравнений прямой ℓ. Ту же задачу можно решить и по-другому — *методом исключения параметра.* Сложив первое уравнение системы (12) с ее вторым уравнением, умноженным на 2, получим $x + 2y - 7 = 0$. Умножив второе уравнение системы на 3 и прибавив полученное равенство к третьему уравнению, имеем $3y + z - 8 = 0$. Мы получили уравнения двух непараллельных плоскостей, каждая из которых содержит прямую ℓ. Следовательно, система, составленная из уравнений этих плоскостей, будет системой координатных уравнениеи прямой ℓ. Отметим, что мы вновь получили систему (13). Но это совпадение случайно. Координатные (как и параметрические) уравнения прямой в пространстве определены неоднозначно, и разные способы решения могут приводить к различным уравнениям одной и той же прямой.

3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим следующий вопрос: как по уравнениям прямой и плоскости определить их взаимное расположение, т.е. выяснить, параллельна прямая плоскости, пересекает ее или содержится в ней? Ответ на него дает

Теорема 3. *Пусть прямая ℓ имеет уравнение*

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases} \tag{14}$$

а плоскость σ — уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

1) *ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда $Aq+Br+Cs \neq 0$;*

2) *ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда $Aq+Br+Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0$;*

3) *ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$.*

Доказательство. Подставим правые части равенств (14) вместо x, y и z в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \tag{15}$$

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит одновременно и ℓ и σ, то, с одной стороны, существует такое значение параметра t, при котором x, y и z удовлетворяют равенствам (14), а с другой, x, y и z удовлетворяют уравнению плоскости. Но в таком случае значение параметра t, соответствующее точке M, является решением уравнения (15). Следовательно, прямая ℓ и плоскость σ пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение; ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец, ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (15) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$ (что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда $Aq+Br+Cs = 0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0 \neq 0$ (что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$ (что доказывает утверждение 3). Теорема 3 доказана. ∎

4. Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим теперь следующий вопрос: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т.е. выяснить, скрещиваются они, пересекаются, параллельны или совпадают? Ответ на него дает

Теорема 4. *Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 имеют уравнения*

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно.

1) ℓ_1 *и* ℓ_2 *скрещиваются тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

2) ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

и либо $\dfrac{q_1}{q_2} \neq \dfrac{r_1}{r_2}$, *либо* $\dfrac{r_1}{r_2} \neq \dfrac{s_1}{s_2}$;

3) ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (16), $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{s_1}{s_2}$ *и либо* $\dfrac{x_2-x_1}{q_1} \neq \dfrac{y_2-y_1}{r_1}$, *либо* $\dfrac{y_2-y_1}{r_1} \neq \dfrac{z_2-z_1}{s_1}$;

4) ℓ_1 *и* ℓ_2 *совпадают тогда и только тогда, когда выполнено равенство* (16), $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{s_1}{s_2}$ *и* $\dfrac{x_2-x_1}{q_1} = \dfrac{y_2-y_1}{r_1} = \dfrac{z_2-z_1}{s_1}$.

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ — направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ — направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — начальная точка ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — начальная точка ℓ_2; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (рис. 11).

Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{c}$, $\vec{a_1}$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Вспоминая критерий компланарности векторов, указанный на с. 38, получаем утверждение 1 доказываемой теоремы.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости или, что эквивалентно, выполнено равенство (16). Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Учитывая критерий коллинеарности векторов (см. с. 21), получаем утверждение 2.

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить эти два случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\dfrac{x-x_1}{q_1} = \dfrac{y-y_1}{r_1} = \dfrac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3 и 4.

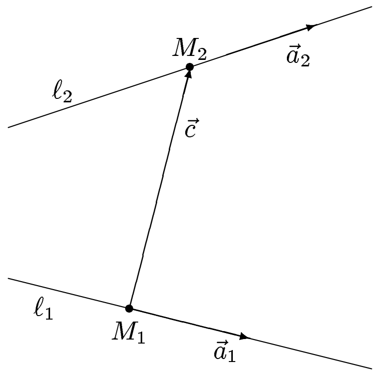


Рис. 11

Теорема 4 доказана. ■

5. Расстояние от точки до прямой

Будем предполагать, что система координат, заданная в пространстве, — прямоугольная декартова. Наша цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0), принадлежащую прямой ℓ, обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s), являющийся направляющим вектором прямой ℓ, — через $\vec{a}$. Кроме того, положим $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Обозначим расстояние от точки M_1 до прямой ℓ через $d(M_1, \ell)$. Ясно, что $d(M_1, \ell)$ — высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{c}$ (рис. 12). Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M_1, \ell) = \dfrac{S}{|\vec{a}|}$. Учитывая свойство 2 на с. 29, получаем, что

$$d(M_1, \ell) = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве.

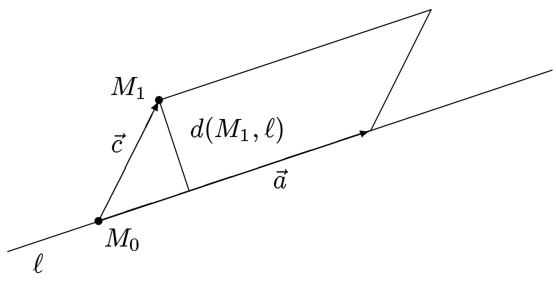


Рис. 12

Используя формулу (5) из §4 и формулу (4) из §3, можно в явном виде выразить $d(M_1, \ell)$ через координаты точки M_1 и параметры, входящие в уравнение прямой ℓ_1:

$$d(M_1,\ell)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ q & r \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ q & s \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ r & s \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{q^2+r^2+s^2}}.$$

6. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью

Будем по-прежнему предполагать, что система координат является прямоугольной декартовой. Наша цель — научиться находить угол между двумя прямыми в пространстве, а также угол между прямой и плоскостью.

Предположим, что в пространстве есть две прямые, заданные каноническими уравнениями, — прямые

$$\ell_1: \ \frac{x-x_1}{q_1}=\frac{y-y_1}{r_1}=\frac{z-z_1}{s_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \ \frac{x-x_2}{q_2}=\frac{y-y_2}{r_2}=\frac{z-z_2}{s_2}.$$

Будем считать, что угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами. Используя формулу (5) из §3, получаем, что если α — угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, то

$$\cos\alpha=\frac{q_1q_2+r_1r_2+s_1s_2}{\sqrt{q_1^2+r_1^2+s_1^2}\cdot\sqrt{q_2^2+r_2^2+s_2^2}}.$$

Абсолютно аналогично находится угол между двумя прямыми в случае, когда обе они заданы параметрическими уравнениями или одна прямая задана каноническими уравнениями, а другая параметрическими.

Если одна из прямых задана координатными уравнениями, то нужно сначала найти ее канонические или параметрические уравнения (а если обе прямые заданы координатными уравнениями, то найти канонические или параметрические уравнения каждой из них), а затем воспользоваться приведенной выше формулой.

Отметим, что, как и в случае прямых на плоскости, между двумя прямыми в пространстве всегда имеются два угла, один из которых острый, а другой — тупой (за исключением случая перпендикулярных прямых, когда углов тоже два, но оба они равны $\frac{\pi}{2}$). Мы не знаем, как расположены друг относительно друга те направляющие векторы двух прямых, с помощью которых мы научились находить угол между прямыми. Поэтому с помощью приведенной выше формулы мы можем получить как острый, так и тупой угол, причем заранее неизвестно, какой именно. Если требуется найти какой-то конкретный угол, то следует действовать так, как описано в конце §7.

Перейдем к вопросу об угле между прямой и плоскостью. Пусть имеются прямая ℓ, заданная каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{q}=\frac{y-y_0}{r}=\frac{z-z_0}{s},$$

и плоскость σ, заданная координатным уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Мы можем считать, что прямая ℓ пересекает плоскость σ, поскольку в противном случае, очевидно, угол между ними равен 0. Угол между ℓ и σ равен углу между прямой ℓ и ее проекцией на σ. Обозначим через ℓ_1 проекцию ℓ на σ, а через ℓ_2 — прямую, перпендикулярную к σ и проходящую через точку пересечения ℓ и σ. Далее, пусть α — искомый угол между ℓ и σ (т.е. угол между ℓ и ℓ_1), а β — угол между ℓ и ℓ_2 (рис. 13). Ясно, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, угол β можно найти как угол между направляющими векторами прямых ℓ и ℓ_2. У первой из них направляющий вектор имеет координаты (p,q,r), а у второй он совпадает с нормальным вектором плоскости σ и потому имеет координаты (A,B,C). Учитывая, что $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$, и используя формулу (5) из §3, имеем

$$\sin\alpha=\frac{qA+rB+sC}{\sqrt{q^2+r^2+s^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Абсолютно аналогично находится угол между прямой и плоскостью в случае, когда прямая задана параметрическими уравнениями.

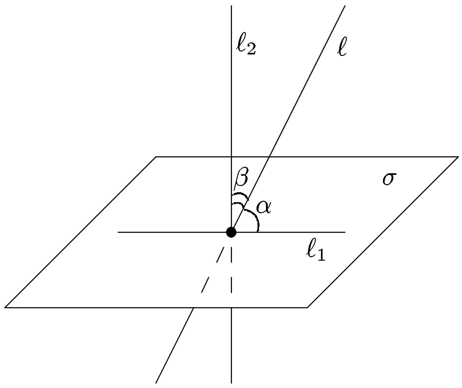


Рис. 13

Если же прямая задана координатными уравнениями и/или плоскость задана каноническим уравнением или параметрическими уравнениями, то нужно сначала найти канонические (или параметрические) уравнения прямой и координатное уравнение плоскости, а затем воспользоваться приведенной выше формулой.

Отметим, что между прямой и плоскостью (так же, как между прямыми на плоскости или в пространстве и между плоскостями) всегда имеются два угла, один из которых острый, а другой — тупой (за исключением случая, когда прямая и плоскость перпендикулярны, в котором углов тоже два, но оба они равны $\frac{\pi}{2}$). Как и во всех предшествовавших случаях, мы не знаем, какой именно угол будет найден с помощью приведенной выше формулы. Действовать так, как описано в конце §7, на этот раз нельзя, так как $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Предположим, что по приведенной выше формуле мы нашли, что $\sin\alpha = a$. Тогда косинус острого угла между ℓ и σ равен $\sqrt{1-a^2}$, а косинус тупого угла между ними равен $-\sqrt{1-a^2}$.

§10. Задачи

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) задачи на переход от одного вида уравнений прямой или плоскости к другому;
2) задачи, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей;
3) задачи на нахождение проекций и симметричных точек;
4) задачи о треугольнике;
5) задачи, связанные с использованием формул расстояния от точки до прямой или до плоскости и вычислением углов между прямыми и плоскостями.

Примеры решения задач первого типа приводились в §7–9, поэтому здесь мы их решать не будем.

В качестве примера задачи второго типа рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 16 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z - 13 = 0 \end{cases}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, содержащей эти прямые.

Решение. Обозначим первую прямую через ℓ_1, а вторую — через ℓ_2. Составим систему из уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 16 = 0, \\ 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z - 13 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $x = -y + 3z - 1$. Подставляя правую часть этого равенства вместо x в три других уравнения, получим

$$\begin{cases} -3y - 3z - 18 = 0, \\ -y + 8z + 3 = 0, \\ -4y + 5z - 15 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $y = 8z + 3$. После подстановки в первое и третье уравнения получим

$$\begin{cases} -27z - 27 = 0, \\ -27z - 27 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $z = -1$. Из сказанного ранее вытекает, что $y = -5$, а $x = 1$. Итак, наша система имеет единственное решение. Тем самым мы доказали, что наши прямые пересекаются. Одновременно мы нашли начальную точку плоскости, проходящей через нашу прямую, в качестве таковой можно взять точку $M_0(1, -5, -1)$. Для того чтобы написать уравнение этой плоскости, осталось найти два ее неколлинеарных направляющих вектора. В качестве этих векторов естественно взять направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2. Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ — векторы правого ортонормированного базиса, который входит в исходную систему координат. Направляющие векторы первой и второй прямой обозначим соответственно через $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Учитывая замечание, сделанное на с. 95, и формулу (3) из §4, имеем

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix} = (-12, 3, -3), \quad \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3, 6, -6).$$

Следовательно, каноническое уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+1 \\ -12 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

После очевидных преобразований получаем $y + z + 6 = 0$.

Ответ: $y + z + 6 = 0$.

В качестве примера задачи третьего типа решим следующую задачу.

Задача 2. Даны точка $A(1, 2, -3)$ и прямая ℓ, заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Найти точку B, являющуюся проекцией точки A на прямую ℓ, и точку C, симметричную точке A относительно прямой ℓ.

Решение. Рассмотрим плоскость σ, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой ℓ. Ясно, что точка B является точкой пересечения ℓ и σ (рис. 14). Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (1, -1, 1)$

перпендикулярен плоскости σ, и потому его можно взять в качестве нормального вектора этой плоскости. Следовательно, координатное уравнение плоскости имеет вид $x - y + z + D = 0$. Чтобы найти число D, надо учесть, что $A \in \sigma$, и потому координаты точки A должны удовлетворять уравнению плоскости. Следовательно, $1-2-3+D=0$, т.е. $D = 4$. Итак, плоскость σ имеет уравнение $x - y + z + 4 = 0$. Координаты точки B являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \quad x = 4 + t, \\ \quad y = -1 - t, \\ \quad z = 3 + t, \\ x - y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

Подставляя правые части первых трех уравнений в последнее уравнение, имеем $4+t+1+t+3+t+4=0$, откуда $t=-4$. Следовательно, $x = 0$, $y = 3$ и $z = -1$. Итак, точка B имеет координаты $(0, 3, -1)$. Обозначим координаты точки C через (x_0, y_0, z_0). Поскольку B — середина отрезка AC, в силу формулы (5) из §5 имеем:

$$0 = \frac{1+x_0}{2}, \quad 3 = \frac{2+y_0}{2}, \quad -1 = \frac{-3+z_0}{2},$$

откуда $x_0 = -1$, $y_0 = 4$, $z_0 = 1$. Итак, точка C имеет координаты $(-1, 4, 1)$.

Ответ: $B(0, 3, -1)$, $C(-1, 4, 1)$.

Укажем план решения трех других задач, относящихся к третьему типу.

1) Даны точка A и прямая ℓ на плоскости. Требуется найти точку B, являющуюся проекцией точки A на ℓ, и точку C, симметричную A относительно ℓ. Точка B есть точка пересечения прямой ℓ и прямой ℓ', проходящей через A перпендикулярно к ℓ (рис. 15). Чтобы написать уравнение ℓ', надо использовать то обстоятельство, что направляющий вектор прямой ℓ является нормальным вектором прямой ℓ', а нормальный вектор прямой ℓ является направляющим вектором прямой ℓ'. После того как точка B будет найдена, точка C находится так же, как в конце решения задачи 2.

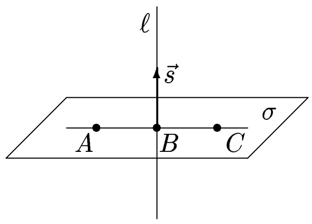


Рис. 14

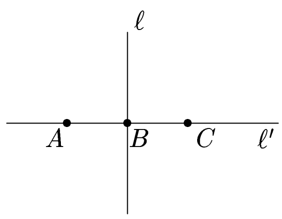


Рис. 15

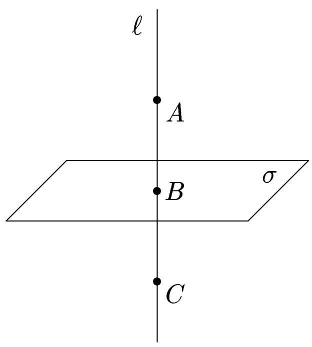


Рис. 16

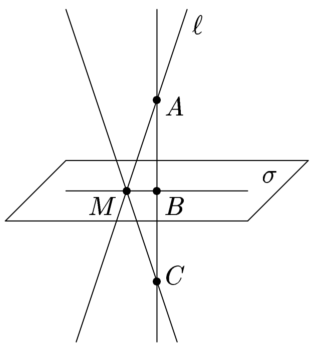


Рис. 17

2) Даны точка A и плоскость σ. Требуется найти точку B, являющуюся проекцией точки A на σ, и точку C, симметричную A относительно σ. Точка B есть точка пересечения плоскости σ и прямой ℓ, проходящей через A перпендикулярно к σ (рис. 16). Чтобы написать уравнение ℓ, надо использовать то обстоятельство, что нормальный вектор плоскости σ является направляющим вектором прямой ℓ. После того как точка B будет найдена, точка C находится так же, как в конце решения задачи 2.

3) Даны прямая ℓ и плоскость σ (причем ℓ и σ пересекаются). Требуется найти проекцию прямой ℓ на σ и прямую, симметричную ℓ относительно σ. Эта задача решается в три действия. Сначала надо найти точку пересечения прямой ℓ и плоскости σ (обозначим ее через M). Затем надо взять на ℓ какую-нибудь точку A, отличную от M, и найти сначала точку B, являющуюся проекцией точки A на σ, а затем точку C, симметричную A относительно σ (см. предыдущий абзац). Проекцией ℓ на σ является прямая MB, а прямой, симметричной ℓ относительно σ, — прямая MC (рис. 17). Для каждой из них теперь

можно написать уравнение прямой по двум точкам — см. формулу (6) в §9.

Перейдем к задачам четвертого типа. Под задачами о треугольнике мы будем понимать задачи, в которых даны какие-то элементы треугольника, а надо найти другие его элементы (элементы треугольника — это координаты его вершин, уравнения сторон, высот, медиан, биссектрис, величины углов и т.п.). Задачи этого типа мы будем решать только на плоскости.

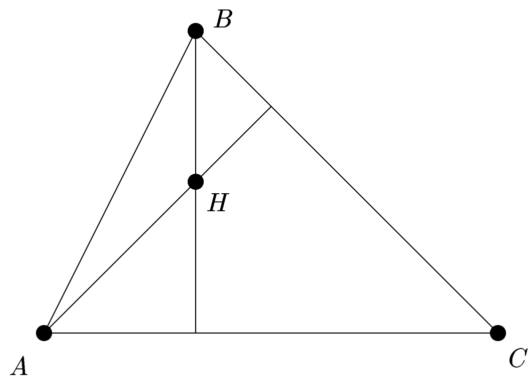


Рис. 18

Задача 3. Даны две вершины треугольника $A(1,0)$, $B(4,3)$ и точка пересечения его высот $H(3,1)$. Найти координаты его третьей вершины C.

Решение. Составим координатные уравнения прямых AC и BC и найдем точку C как точку пересечения этих прямых. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 18.

Вектор $\overrightarrow{BH}$ имеет координаты $(-1,-2)$. Он ортогонален прямой AC. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид $-x-2y+D=0$. Подставляя в это уравнение координаты точки A, принадлежащей прямой AC, находим D: $-1+D=0$, откуда $D=1$. Итак, прямая AC имеет уравнение $-x-2y+1=0$. Рассуждая аналогично, находим уравнение прямой BC: $2x+y-11=0$. Следовательно, координаты точки C являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} -x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + y - 11 = 0. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 2 и складывая со вторым, имеем $-3y - 9 = 0$, откуда $y = -3$. Из первого уравнения находим теперь, что $x = 7$. Итак, точка C имеет координаты $(7, -3)$.

Ответ: $C(7, -3)$.

Задача 4. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $P(0,0)$, а также уравнения высоты $x - 3y + 8 = 0$ и медианы $-3x + y + 8 = 0$, проведенных из одной и той же вершины.

Решение. Отметим, что точка P не принадлежит указанным в условии высоте и медиане, так как не удовлетворяет их уравнениям. Вершину треугольника, через которую проходят эти прямые, обозначим через Q, а третью вершину треугольника — через R. Точку пересечения данной высоты и стороны PR обозначим через S, а точку пересечения данной медианы и стороны PR — через T (рис. 19).

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + 8 = 0, \\ -3x + y + 8 = 0, \end{cases}$$

получим, что точка Q имеет координаты (4,4). Напишем уравнение прямой PQ по двум точкам: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{4}$, т.е. $x - y = 0$.

Найдем теперь уравнение прямой PR. Вектор $\vec{n} = (1, -3)$ является нормальным вектором прямой QS. Поскольку прямые QS и PR перпендикулярны, этот вектор будет направляющим для прямой PR. Так как точка P имеет координаты (0,0), получаем, что параметрические уравнения прямой PR имеют вид

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -3t. \end{cases}$$

Переходя к координатному уравнению, имеем $3x + y = 0$.

Остается найти уравнение прямой QR. Добавив к системе параметрических уравнений прямой PR уравнение медианы QT, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -3t, \\ -3x + y + 8 = 0, \end{cases}$$

которой удовлетворяют координаты точки T. Решая эту систему, находим, что $t = \dfrac{4}{3}$, $x = \dfrac{4}{3}$ и $y = -4$. Итак, точка T имеет координаты

$\left(\dfrac{4}{3}, -4\right)$. Эта точка является серединой отрезка PR. Используя формулы (5) из §5, находим, что точка R имеет координаты $\left(\dfrac{8}{3}, -8\right)$. Остается написать уравнение прямой QR по двум точкам: $\dfrac{x-4}{-4/3} = \dfrac{y-4}{-12}$. После очевидных упрощений оно принимает вид $9x - y - 32 = 0$.

Ответ: $x - y = 0$, $3x + y = 0$, $9x - y - 32 = 0$.

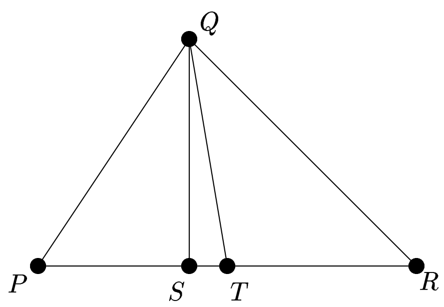


Рис. 19

Задача 5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $\left(3, \dfrac{8}{5}\right)$ и отсекающих от осей координат треугольник площадью 10.

Решение. Ясно, что искомые прямые не проходят через начало координат и не параллельны ни одной из осей координат (в противном случае они не отсекали бы никакого треугольника от осей координат). Поэтому для этих прямых можно написать уравнение в отрезках, т.е. уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Напомним, что прямая с таким уравнением пересекает ось абсцисс в точке с координатами $(a, 0)$, а ось ординат — в точке с координатами $(0, b)$ (см. с. 65). Ясно, что площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от осей координат, равна $\dfrac{|ab|}{2}$. Учитывая, что эта площадь равна 10, а точка $\left(3, \dfrac{8}{5}\right)$ принадлежит нашей прямой, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |ab| = 20, \\ \dfrac{3}{a} + \dfrac{8}{5b} = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Из второго уравнения этой системы после очевидных преобразований получаем, что

$$b = \frac{8a}{5a-15}. \tag{2}$$

Подставим правую часть этого равенства вместо b в первое уравнение системы (1). Получим

$$\left|\frac{8a^2}{5a-15}\right| = 20,$$

откуда

$$2a^2 = 25 \cdot |a-3|. \tag{3}$$

Поскольку модуль в правой части этого равенства можно раскрыть двумя способами, дальнейшие выкладки разбиваются на два случая.

Случай 1: $a \geqslant 3$. В этом случае уравнение (3) принимает вид $2a^2 = 25a - 75$. Решая его, находим два корня: $a_1 = 5$ и $a_2 = \frac{15}{2}$. Оба они удовлетворяют условию $a \geqslant 3$. Используя (2), имеем $b_1 = 4$, $b_2 = \frac{8}{3}$. Соответственно получаем уравнения двух прямых:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{2x}{15} + \frac{3y}{8} = 1.$$

Случай 2: $a < 3$. В этом случае уравнение (3) принимает вид $2a^2 = -25a + 75$. Решая его, находим два корня: $a_3 = -15$ и $a_4 = \frac{5}{2}$. Оба они удовлетворяют условию $a < 3$. Используя (2), имеем $b_3 = \frac{4}{3}$, $b_4 = -8$. Соответственно получаем уравнения еще двух прямых:

$$-\frac{x}{15} + \frac{3y}{4} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{2x}{5} - \frac{y}{8} = 1.$$

Ответ: $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$, $\frac{2x}{15} + \frac{3y}{8} = 1$, $-\frac{x}{15} + \frac{3y}{4} = 1$, $\frac{2x}{5} - \frac{y}{8} = 1$.

Перейдем к примерам решения задач пятого типа.

Задача 6. Точка $A(5, -1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого имеет уравнение $4x - 3y - 7 = 0$. Составить уравнения остальных сторон квадрата.

Решение. Нетрудно понять, что задача имеет два решения (рис. 20). Уравнение прямой D_1D_2 дано в условии задачи. Составим уравнение стороны AB. Вектор $(4, -3)$ является нормальным вектором прямой D_1D_2, а значит, и направляющим вектором прямой AB. Поскольку точка A принадлежит этой прямой, ее каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{-3}$. Переходя к координатному уравнению, имеем $3x + 4y - 11 = 0$. Далее, поскольку прямые D_1D_2 и C_1C_2 параллельны, они имеют один и тот же нормальный вектор. Следовательно, уравнение прямой C_1C_2 имеет вид $4x - 3y + d = 0$. Чтобы найти d, подставим в это уравнение координаты точки A, которая принадлежит прямой C_1C_2. Получим $20 + 3 + d = 0$, откуда $d = -23$. Итак, прямая C_1C_2 имеет уравнение $4x - 3y - 23 = 0$.

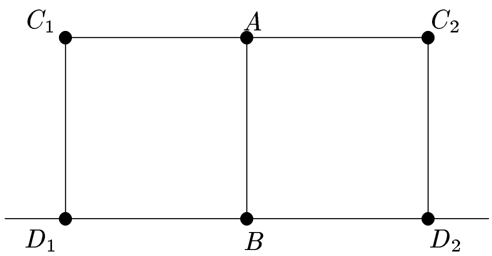


Рис. 20

Осталось написать уравнение последней стороны (C_1D_1 или C_2D_2). Для того чтобы сделать это, сначала найдем длину стороны квадрата как расстояние от точки A до прямой D_1D_2. Используя формулу (16) из §7, имеем

$$d(A, D_1D_2) = \frac{|4 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 7|}{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5}.$$

Искомая прямая параллельна прямой AB и потому имеет уравнение вида $3x+4y+d = 0$. Кроме того, расстояние от точки A до этой прямой равно длине стороны квадрата, которую мы только что нашли. Вновь используя формулу (16) из §7, имеем

$$\frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + d|}{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5},$$

откуда $|11 + d| = 16$. Раскрывая модуль сначала со знаком плюс, а затем со знаком минус, получаем, что d равно либо 5, либо -27. Следовательно, последняя сторона имеет либо уравнение $3x + 4y + 5 = 0$, либо уравнение $3x + 4y - 27 = 0$.

Ответ: $3x + 4y - 11 = 0$, $4x - 3y - 23 = 0$ и либо $3x + 4y + 5 = 0$, либо $3x + 4y - 27 = 0$.

Задача 7. Составить координатное уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми $x - 3y + 5 = 0$ и $3x - y + 15 = 0$.

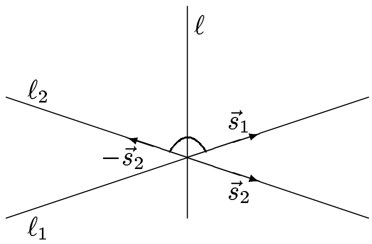


Рис. 21

Решение. Обозначим прямую $x-3y+5 = 0$ через ℓ_1, а прямую $3x-y+15 = 0$ — через ℓ_2. Направляющие векторы этих прямых обозначим через $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ соответственно, а точку пересечения прямых — через M. Искомую биссектрису обозначим через ℓ. Дальнейшие рассмотрения иллюстрирует рис. 21.

Прежде всего найдем точку пересечения указанных прямых. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0, \\ 3x - y + 15 = 0, \end{cases}$$

получим, что точка M имеет координаты $(-5, 0)$. В качестве $\vec{s}_1$ можно взять вектор (3,1), а в качестве $\vec{s}_2$ — вектор (1,3) (см. замечание на с. 62). Скалярное произведение этих векторов равно 6. Поскольку оно больше нуля, угол между указанными векторами — острый (см. конец §3). Следовательно, тупой угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 — это угол между векторами $\vec{s}_1 = (3, 1)$ и $-\vec{s}_2 = (-1, -3)$. Сумма этих векторов, т.е. вектор $\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = (2, -2)$, направлен вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{s}_1$ и $-\vec{s}_2$. Эти векторы имеют, как легко убедиться, одинаковую длину, и потому указанный параллелограмм является ромбом. Как известно из школьного курса, диагональ ромба совпадает с биссектрисой угла между соответствующими сторонами. Следовательно, в качестве направляющего вектора биссектрисы ℓ можно взять вектор $(2, -2)$. Таким образом, параметрические уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\begin{cases} x = -5 + 2t, \\ y = - 2t. \end{cases}$$

Исключая параметр, получаем координатное уравнение $x+y+5=0$.

Ответ: $x+y+5=0$.

Отметим, что если бы векторы $\vec{s}_1$ и $-\vec{s}_2$ в задаче 7 имели различную длину, в качестве направляющего вектора биссектрисы можно было бы взять вектор $\dfrac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|}+\dfrac{-\vec{s}_2}{|-\vec{s}_2|}$. В самом деле, длины векторов $\dfrac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|}$ и $\dfrac{-\vec{s}_2}{|-\vec{s}_2|}$ равны 1 (см. замечание на с. 21) и, в частности, равны между собой.

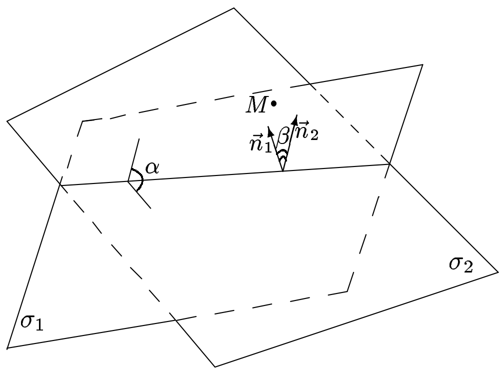


Рис. 22

Задача 8. Найти синус того угла между плоскостями $3x-y+2z-3=0$ и $x-2y+3z-1=0$, в котором лежит точка $M(1,1,2)$.

Решение. Пусть первое из уравнений в условии задает плоскость σ_1, а второе — плоскость σ_2. Нормальные векторы этих плоскостей обозначим через $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соответственно, а угол между плоскостями — через α (рис. 22).

Точка M не принадлежит ни одной из плоскостей, поскольку ее координаты не удовлетворяют их уравнениям. Плоскости пересекаются, так как их нормальные векторы $\vec{n}_1=(3,-1,2)$ и $\vec{n}_2=(1,-2,3)$ не пропорциональны (см. теорему 3 в §8). Положим $\beta=(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$. Поскольку

$$3\cdot 1-1\cdot 1+2\cdot 2-3>0 \quad \text{и} \quad 1\cdot 1-2\cdot 1+3\cdot 2-1>0,$$

вектор $\vec{n}_1$ направлен от плоскости σ_1 к точке M, а вектор $\vec{n}_2$ — от плоскости σ_2 к M (см. теорему 4 в §8). Следовательно, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\beta$, и потому

$$\sin\alpha=\cos(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{11}{14}.$$

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{11}{14}$.

При решении многих задач пятого (и не только пятого) типа оказывается полезным следующее наблюдение:

> *любая прямая на плоскости, как и любая плоскость, может быть задана координатным уравнением, в котором коэффициент при x равен либо 0, либо 1; то же верно для коэффициента при y, а в случае плоскости — для коэффициента при любой из неизвестных y и z.*

В самом деле, пусть прямая задана координатным уравнением $Ax + By + C = 0$ и $A \neq 0$. Разделив это уравнение на A, мы получим координатное уравнение той же прямой, в котором коэффициент при x равен 1. Аналогичные соображения применимы для коэффициента при y и для коэффициента при любом из неизвестных в координатном уравнении плоскости. Приведем пример задачи, в решении которой используется это наблюдение.

Задача 9. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x - 2y + 5 = 0$, а одной из боковых сторон — прямая $3x + 4y - 1 = 0$. Найти уравнение второй боковой стороны при условии, что она проходит через точку $(-3, 5)$.

Решение. Уравнение искомой прямой будем искать в виде $Ax + By + C = 0$. Найдем угол α при основании нашего равнобедренного треугольника как угол между нормальными векторами прямых, указанных в условии задачи. Поскольку угол α — острый, то $\cos\alpha > 0$ (см. замечание в конце §3). Используя аналог формулы (5) из §3 для векторов на плоскости, имеем

$$\cos\alpha = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot(-2)|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+4}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Приравнивая к полученной величине косинус угла между искомой прямой и основанием треугольника, имеем

$$\frac{|A - 2B|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Возводя это уравнение в квадрат, после очевидных преобразований получаем, что

$$4AB - 3B^2 = 0. \qquad (4)$$

В силу наблюдения, сделанного перед формулировкой задачи, можно считать, что $A = 0$ или $A = 1$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1) $A = 0$. В этом случае из (4) вытекает, что $B = 0$. Но это невозможно, так как нормальный вектор искомой прямой имеет координаты (A, B) и не равен нуль-вектору.

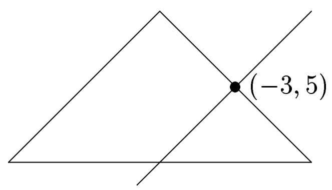


Рис. 23

2) $A = 1$. Уравнение (4) в этом случае имеет вид $4B - 3B^2 = 0$, откуда $B = 0$ или $B = \frac{4}{3}$. В первом случае уравнение прямой имеет вид $x + C = 0$, а во втором — $x + \frac{4}{3}y + C = 0$ или $3x + 4y + C = 0$. Ясно, что вторая прямая параллельна той боковой стороне треугольника, которая указана в условии задачи. Следовательно, это не искомая вторая боковая сторона, а прямая, которая проходит через точку $(-3, 5)$ параллельно данной боковой стороне (рис. 23). Таким образом, уравнение искомой прямой имеет вид $x + C = 0$. Учитывая, что она проходит через точку $(-3, 5)$, получаем, что $C = 3$.

Ответ: $x + 3 = 0$.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Построить на чертеже прямые линии и найти их параметрические уравнения:

а) $2x - 3y - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6 = 0$; в) $x - 2 = 0$; г) $2x - 3y = 0$.

2. Построить на чертеже прямые линии и найти их координатные уравнения:

а) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = 3 \quad ; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 3 \quad , \\ y = -1 - t. \end{cases}$

3. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ и $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин и написать уравнение биссектрисы угла A.

4. Определить взаимное расположение следующих пар прямых и выяснить, какие из этих пар содержат перпендикулярные прямые:

а) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$; б) $2x - y - 8 = 0$, $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-1}$;

в) $x - y - 2 = 0$, $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 + t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases}$ $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-3}{-2}$.

5. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.

6. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2, -3)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

7. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y + 15 = 0$, $x - 2y = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника.

8. Найти проекцию точки P на прямую ℓ:

а) $P(-1, -2)$, ℓ: $x - y + 3 = 0$; б) $P(5, 1)$, ℓ: $2x + y - 1 = 0$.

9. Найти точку, симметричную точке P относительно прямой ℓ:

а) $P(4, 4)$, ℓ: $x + y - 4 = 0$; б) $P(-4, 3)$, ℓ: $-2x + y - 1 = 0$.

10. Найти расстояние от точки P до прямой ℓ:

а) $P(2, -1)$, ℓ: $3x - 4y + 5 = 0$; б) $P(1, 2)$, ℓ: $2x + y - 7 = 0$.

11. Даны две вершины треугольника $A(-10, 2)$, $B(6, 4)$ и точка пересечения его высот $H(5, 2)$. Найти координаты третьей вершины.

12. Даны две вершины треугольника $A(3, -1)$, $B(5, 7)$ и точка пересечения его высот $H(4, -1)$. Составить уравнения сторон.

13. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $A(1, 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

14. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $A(-4, -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$.

15*. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $A(4, -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

16. Даны вершины треугольника $A(2, -2)$, $B(3, -5)$ и $C(5, 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла A.

17*. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-5, 4)$, отрезок которой, заключенный между прямыми $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$, имеет длину 5.

18. Прямые $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ при пересечении образуют четыре угла. Угол, в котором лежит точка $A(1, 1)$, обозначим через α.

Установить, в каком угле относительно α (в том же самом, смежном, вертикальном) лежат точки $B(-3,0)$, $C(0,0)$, $D(1,7)$ и $E(2,1)$.

19. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2,1) под углом 45° к прямой $2x+3y+4=0$.

20. Составить уравнения прямых, проходящих через точку (8,6) и отсекающих от осей координат треугольник площадью 12.

21. Перейти от координатных уравнений плоскостей к параметрическим:

а) $x-y+z-1=0$; б) $x+y-3z+4=0$; в) $x+y-1=0$.

22. Перейти от параметрических уравнений плоскостей к координатным:

а) $\begin{cases} x=1+\ \ u-v, \\ y=2-\ \ u+v, \\ z=3+2u-v; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=-1+u-v, \\ y=\ \ \ 2+u\ \ \ \ \ \ , \\ z=\ \ \ 3\ \ \ \ \ \ +v; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=-1+u-v, \\ y=\ \ \ 2+u+v, \\ z=\ \ \ 3\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ . \end{cases}$

23. Составить координатное уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,4,-5)$ параллельно векторам $\vec{a}_1=(3,1,-1)$ и $\vec{a}_2=(1,-2,1)$.

24. Составить координатное уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-1,3)$ и $B(3,1,2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3,-1,4)$.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ и $C(2,0,2)$.

26. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(2,1,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(1,-2,3)$.

27. Точка $A(2,-1,-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

28. Определить взаимное расположение следующих пар плоскостей и выяснить, какие из этих пар содержат перпендикулярные плоскости:

а) $x+y-z+4=0$, $\quad 2x-y+z=0$;

б) $x+y-z+4=0$, $\quad \begin{cases} x=-1+3u+\ \ v, \\ y=\ \ \ 1+2u+2v, \\ z=\ \ \ 4+5u+3v; \end{cases}$

в) $x-y+2z-5=0$, $\quad 2x-2y+4z-10=0$;

г) $\begin{cases} x=-1-u+4v, \\ y=\ \ \ 2+u-4v, \\ z=\ \ \ 4+u-3v, \end{cases}$ $\quad x+y+z-1=0$.

29. Составить уравнение плоскости σ, которая проходит через точку A параллельно плоскости μ:

а) $A(1,2,3)$, μ: $x-y+z=0$; б) $A(1,0,2)$, μ: $x-y+1=0$.

30. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и перпендикулярна плоскостям $2x-y+3z-1=0$ и $x+2y+z=0$.

31. Найти проекцию точки P на плоскость σ:

а) $P(3,-1,2)$, σ: $x-y+z=0$; б) $P(2,2,5)$, σ: $x+y+4z-6=0$.

32. Найти точку, симметричную точке $P(8,-2,3)$ относительно плоскости $x-y+6=0$.

33. Найти расстояние от точки P до плоскости σ:

а) $P(1,4,1)$, σ: $2x-y+2z-3=0$;

б) $P(2,-1,-1)$, σ: $5x-3y+z+4=0$;

в) $P(3,-6,5)$, σ: $4x-3z-1=0$.

34*. Известно, что плоскости $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ и σ пересекаются, а плоскость $x-2y+z+5=0$ перпендикулярна σ. Составить уравнение плоскости σ.

35. Перейти от координатных уравнений прямой к параметрическим:

а) $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y+z-4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x-y+5=0. \end{cases}$

36. Перейти от параметрических уравнений прямой к координатным:

а) $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2-t, \\ z=3+t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2-t, \\ z=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$

37. Составить параметрические уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3,2,5)$.

38. Найти расстояние от точки $P(2,3,-1)$ до следующей прямой:

а) $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2+t, \\ z=13+4t; \end{cases}$ б) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$; в) $\begin{cases} 2x+2y-z+7=0, \\ 3x+y-z+8=0. \end{cases}$

39. Проверить, что прямые

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

параллельны и найти расстояние между ними.

40. Определить взаимное расположение следующих прямых:

а) $\begin{cases} x=-7+3t, \\ y=4-2t, \\ z=4+3t \end{cases}$ и $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+8}{2}=\dfrac{z+12}{-1}$;

б) $\begin{cases} x=-3+2t, \\ y=-2+3t, \\ z=6-4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=5+t, \\ y=-1-4t, \\ z=-4+t; \end{cases}$

в) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$ и $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+8}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$;

г) $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

41. Доказать перпендикулярность прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 1 - 6t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

42. Найти проекцию точки M на прямую ℓ:

а) $M(1, -2, -4)$, $\quad \ell$: $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = 2 - t; \end{cases}$

б) $M(8, 1, -1)$, $\quad \ell$: $\begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = 0, \\ x - y - z + 2 = 0. \end{cases}$

43. Найти точку, симметричную точке P относительно прямой ℓ:

а) $P(4, 1, 6)$, $\quad \ell$: $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0; \end{cases}$

б) $P(2, -1, 3)$, $\quad \ell$: $\begin{cases} 5x - y - 5z + 3 = 0, \\ 2y - 5z + 24 = 0. \end{cases}$

44. Даны вершины треугольника $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ и $C(4, -7, 2)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины A.

45. Даны вершины треугольника $A(1, -2, -4)$, $B(3, 1, -3)$ и $C(5, 1, -7)$. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины B.

46. Даны вершины треугольника $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ и $C(-5, 14, -3)$. Составить уравнение биссектрисы угла B.

47*. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $(-4, -5, 3)$ и пересекает прямые

$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$$

48*. Плоскость $9x + 12y + 20z - 60 = 0$ пересекает оси Ox, Oy и Oz в точках A, B и C соответственно. Найти длину высоты треугольника ABC, проведенной из вершины C, и написать ее уравнения.

49. Найти уравнение плоскости, которая проходит через прямую

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

и параллельна прямой
$$\begin{cases} x = - t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$$

50. Найти уравнение плоскости, которая перпендикулярна плоскости $3x + y - z + 2 = 0$ и проходит через прямую
$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = 4t. \end{cases}$$

51. Определить взаимное расположение прямой ℓ и плоскости σ:

а) ℓ: $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = -2 + 4t, \end{cases}$ σ: $x + y - z - 6 = 0$;

б) ℓ: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$, σ: $\begin{cases} x = 5 + 3u + 2v, \\ y = 4 + 9u - 8v, \\ z = 1 + 2u - v; \end{cases}$

в) ℓ: $\begin{cases} 3x + y - 10 = 0, \\ 2x - z - 6 = 0, \end{cases}$ σ: $3x + y - 10 = 0$.

52. При каком значении m плоскость $x - 3y + 6z + 7 = 0$ параллельна следующей прямой:

а) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+3}{-2}$; б) $\dfrac{x-5}{9} = \dfrac{y+9}{-1} = \dfrac{z+4}{m-1}$?

53. При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна прямой $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$?

54. Составить уравнения проекции прямой
$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$
на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.

55. Составить уравнения прямой, которая симметрична прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z+1}{-1}$ относительно плоскости $x - z = 0$.

56*. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0, \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$
под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к прямой
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

3. Ответы

1. а) $\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = \phantom{3 +{}} 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = - 2t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2, \\ y = t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t. \end{cases}$

2. а) $x + y = 3$; б) $y = 3$; в) $x + y = 2$; г) $x = 3$.

3. $A(2, -1)$; $B(-1, 3)$; $C(2, 4)$; $3x + y = 5$.

4. а) Параллельны; б) пересекаются (и перпендикулярны); в) совпадают; г) пересекаются (но не перпендикулярны).

5. $(-2, 5)$, $(1, -3)$, $(5, -9)$, $(8, -17)$. **6.** $2x - 3y - 13 = 0$, $3x + 2y = 0$.

7. (1,8), (4,2), (2,1), $(-1, 7)$. **8.** а) $(-3, 0)$; б) $(1, -1)$.

9. а) (0,0); б) $(4, -1)$. **10.** а) 3; б) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **11.** $(6, -6)$.

12. AB: $4x - y - 13 = 0$, AC: $x + 8y + 5 = 0$, BC: $x - 5 = 0$.

13. AB: $x - y + 2 = 0$, AC: $x + 2y - 7 = 0$, BC: $x - 4y - 1 = 0$.

14. $3x - 5y - 13 = 0$, $8x - 3y + 17 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$.

15. $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$. **16.** $x - 5 = 0$.

17. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$.

18. B — в вертикальном, C — в смежном, D — во втором смежном, E — в том же самом.

19. $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$. **20.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$.

21. а) $\begin{cases} x = 1 + u\phantom{{}+v}, \\ y = \phantom{1+{}} u + v, \\ z = \phantom{1 + u +{}} v; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -4 + u + 3v, \\ y = - u\phantom{{}+3v}, \\ z = v; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 1 + u, \\ y = - u, \\ z = v. \end{cases}$

22. а) $x + y - 3 = 0$; б) $x - y + z = 0$; в) $z - 3 = 0$. **23.** $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

24. $x - y - z = 0$. **25.** $3x + 3y + z - 8 = 0$. **26.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

27. $2x - y - z - 6 = 0$.

28. а) Пересекаются (и перпендикулярны); б) параллельны; в) совпадают; г) пересекаются (но не перпендикулярны).

29. а) $x - y + z - 2 = 0$; б) $x - y - 1 = 0$. **30.** $7x - 2y - 5z = 0$.

31. а) (1,1,0); б) (1,1,1). **32.** $(-8, 14, 3)$. **33.** а) 1; б) $\dfrac{16}{\sqrt{35}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{26}}$.

34. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$. **35.** а) $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \phantom{5 +{}} t, \\ y = 5 + t, \\ z = 5\phantom{{}+t}. \end{cases}$

36. а) $\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} - 3 = 0, \\ \phantom{x+{}} y + z - 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} - 3 = 0, \\ \phantom{x + y +{}} z - 3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \phantom{{}+z} - 2 = 0, \\ \phantom{y+{}} z - 3 = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x = -3 + 37t, \\ y = 6t, \\ z = \phantom{-3 +{}} 15t. \end{cases}$ **38.** а) 6; б) 21; в) 6. **39.** 3.

40. а) Скрещиваются; б) пересекаются; в) совпадают; г) параллельны.

41. *Указание*: проверить, что направляющие векторы прямых ортогональны.

42. а) $(0, -5, 1)$; б) (0,1,1). **43.** а) $(2, -3, 2)$; б) $(4, -3, 5)$.

44. $\begin{cases} x = 3 - 7t, \\ y = 6 - 17t, \\ z = -7 + 19t. \end{cases}$ **45.** $\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 1 + 15t, \\ z = -3 + 19t. \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = -7 + 8t. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x = -4 + 3t, \\ y = -5 + 2t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$ **48.** 5, $\begin{cases} 9x + 12y + 20z - 60 = 0, \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$
49. $x - y - z + 4 = 0$. **50.** $x - 5y - 2z + 11 = 0$.
51. а) Параллельны; б) пересекаются; в) ℓ лежит в σ.
52. а) $m = -3$; б) $m = -1$. **53.** $A = -3$, $B = \dfrac{9}{2}$.
54. $\begin{cases} 2x - 4y - 8z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$ **55.** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-2}$.
56. $x + 2y - z + 3 = 0$, $13x + 14y + 11z - 45 = 0$.

4. Самостоятельная работа №2

1. Составить уравнения сторон треугольника, если даны:

а) одна из его вершин $B(-4, -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$;

б) одна из его вершин $C(4, -1)$ и уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины;

в) одна из его вершин $B(2, 2)$ и уравнения двух высот $x - 4y = 0$ и $x + y - 1 = 0$;

г) одна из его вершин $B(3, 3)$ и уравнения высоты $x - 4y + 3 = 0$ и медианы $y - 1 = 0$, проведенных из одной вершины.

2. Найти проекцию точки P на прямую, проходящую через точки A и B:

а) $P(-8, 12)$, $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$; б) $P(8, -9)$, $A(3, -4)$, $B(-1, -2)$;

в) $P(1, -3)$, $A(3, 0)$, $B(1, 2)$; г) $P(3, 5)$, $A(1, -1)$, $B(4, -2)$.

3. Дан треугольник ABC. Написать уравнение высоты, проведенной из точки A на сторону BC:

а) $A(1, 1, 3)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(0, 1, 1)$;

б) $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(0, 1, 3)$;

в) $A(2, 1, -1)$, $B(1, 3, 0)$, $C(4, 1, 7)$;

г) $A(0, 1, -1)$, $B(1, 4, 5)$, $C(2, 3, 5)$.

4. Плоскость

а) $2x + y + z - 4 = 0$; б) $3x - y + 2z - 6 = 0$; в) $x - 2y + 3z - 6 = 0$;

г) $x - 2y - 2z + 4 = 0$

пересекает оси Ox, Oy и Oz в точках A, B и C соответственно. В этой плоскости выбрана система координат с началом в точке C и базисными векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$. Прямая ℓ имеет в плоскостной системе уравнение $2u - v + 1 = 0$. Написать уравнение этой прямой в пространственной системе координат.

Глава 3

Системы линейных уравнений

В двух предыдущих главах у нас уже неоднократно возникали системы линейных уравнений. Здесь мы начинаем их систематическое изучение. Сначала вводятся основные понятия, связанные с такими системами, и доказываются теоремы о множестве всех решений однородной и неоднородной системы. Затем подробно излагается метод Гаусса решения систем линейных уравнений, который будет постоянно использоваться в дальнейшем при решении конкретных задач. После этого вводятся определители произвольного порядка, изучаются их свойства и доказывается правило Крамера. Изучение систем линейных уравнений будет продолжено в главе 6.

§11. Однородные и неоднородные системы

Напомним, что *линейным уравнением* (или *уравнением первого порядка*) с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{1}$$

Величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а b — *свободным членом* уравнения (1). Коэффициенты при неизвестных и свободный член предполагаются известными.

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Определение. *Решением* (или *частным решением*) системы (2) называется упорядоченный набор чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ такой, что при подстановке в (2) x_1^0 вместо x_1, x_2^0 вместо x_2, $\dots$, x_n^0 вместо x_n все уравнения системы (2) превращаются в верные равенства. Система линейных уравнений (2) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае.

Например, упорядоченный набор чисел $(1, 2, -1, 3)$ будет решением системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

двух линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Следовательно, эта система совместна. С другой стороны, система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

очевидным образом несовместна, так как никакой набор чисел не может одновременно удовлетворять и первому, и третьему ее уравнениям.

Определение. Если все свободные члены системы линейных уравнений равны 0, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Если в системе (2) все свободные члены заменить нулями, то мы получим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3}$$

которую мы будем называть *однородной системой, соответствующей системе* (2).

Отметим, что

любая однородная система линейных уравнений совместна, так как она имеет *нулевое решение*, т.е. решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$.

Определение. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два упорядоченных набора чисел, а t — некоторое число. Тогда упорядоченный набор чисел $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ называется *суммой наборов* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а упорядоченный набор $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$ — *произведением набора* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *на число* t.

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Теорема 1. *Сумма двух решений однородной системы — решение этой системы. Произведение решения однородной системы на число — решение этой системы.*

Доказательство. Пусть $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — решения системы (3). Подставим набор $(y_1+z_1, y_2+z_2, \ldots, y_n+z_n)$ в i-е уравнение этой системы $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}(y_1 + z_1) + a_{i2}(y_2 + z_2) + \cdots + a_{in}(y_n + z_n) = \\ &= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) + (a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \cdots + a_{in}z_n) = \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что набор $(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ является решением системы (3). Подставив в то же уравнение набор $(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n)$, получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}(ty_1) + a_{i2}(ty_2) + \cdots + a_{in}(ty_n) = \\ &= t(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n) = t \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, и набор $(ty_1, ty_2, \ldots, ty_n)$ является решением системы (3). Теорема 1 доказана. ■

Теорема 1 позволяет ответить на вопрос, сколько решений может быть у однородной системы линейных уравнений.

Следствие 1. *Произвольная однородная система линейных уравнений или имеет ровно одно решение (причем это решение — нулевое), или имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если однородная система имеет по крайней мере два различных решения, то она имеет бесконечно много решений. Предположим поэтому, что система (3) имеет по крайней мере два различных решения. Следовательно, эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение, т.е. такое решение $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, что $x_i^0 \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. В силу теоремы 1 для произвольного действительного числа t набор чисел $(tx_1^0, tx_2^0, \dots, tx_n^0)$ также является решением системы (3). Очевидно, что если $t_1 \neq t_2$, то решения $(t_1x_1^0, t_1x_2^0, \dots, t_1x_n^0)$ и $(t_2x_1^0, t_2x_2^0, \dots, t_2x_n^0)$ системы (3) различны (так как $t_1x_i^0 \neq t_2x_i^0$). Поскольку действительных чисел бесконечно много, получаем, что система (3) имеет бесконечно много решений. Следствие 1 доказано. ∎

Докажем теперь полезное утверждение о связи решений систем (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть система* (2) *совместна. Выберем произвольным образом и зафиксируем некоторое ее решение* $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. *Если* $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — *решение системы* (3), *то сумма* $(x_1^0+y_1,\, x_2^0+y_2,\, \dots,\, x_n^0+y_n)$ — *решение системы* (2). *И обратно, каждое решение системы* (2) *может быть получено в виде суммы решения* $(x_1^0,\, x_2^0,\, \dots,\, x_n^0)$ *этой системы и некоторого решения системы (3).*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы подставим набор $(x_1^0 + y_1, x_2^0 + y_2, \dots, x_n^0 + y_n)$ в произвольное i-е уравнение системы (2) $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}(x_1^0 + y_1) + a_{i2}(x_2^0 + y_2) + \dots + a_{in}(x_n^0 + y_n) = \\ =\ &(a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0) + (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n) = \\ =\ &b_i + 0 = b_i. \end{aligned}$$

Мы видим, что набор $(x_1^0 + y_1, x_2^0 + y_2, \dots, x_n^0 + y_n)$ является решением системы (2).

Докажем второе утверждение. Пусть $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — решение системы (2). Положим

$$y_1 = z_1 - x_1^0, y_2 = z_2 - x_2^0, \dots, y_n = z_n - x_n^0.$$

Подставим полученный набор $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в i-е уравнение системы (3) $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = \\ =\ &a_{i1}(z_1 - x_1^0) + a_{i2}(z_2 - x_2^0) + \dots + a_{in}(z_n - x_n^0) = \\ =\ &(a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + \dots + a_{in}z_n) - (a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \dots + a_{in}x_n^0) = \\ =\ &b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — решение системы (3). С другой стороны, $z_1 = y_1 + x_1^0$, $z_2 = y_2 + x_2^0$, $\dots$, $z_n = y_n + x_n^0$. Таким образом, мы представили произвольное решение системы (2) в виде суммы фиксированного решения $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ этой системы и некоторого решения $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ системы (3). Теорема 2 доказана. ∎

Теперь мы можем ответить на вопрос, сколько решений может быть у произвольной системы линейных уравнений.

Следствие 2. *Произвольная система линейных уравнений или не имеет решений, или имеет ровно одно решение, или имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если система имеет по крайней мере два различных решения, то она имеет бесконечно много решений. Предположим поэтому, что система (2) имеет по крайней мере два различных решения. Из теоремы 2 вытекает, что и соответствующая ей однородная система (3) имеет по крайней мере два различных решения. В силу следствия 1 эта система имеет бесконечно много решений. Но тогда из теоремы 2 вытекает, что система (2) также имеет бесконечно много решений. Следствие 2 доказано. ∎

Введем понятие, которое будет играть важную роль в дальнейшем.

Определение. Множество всех решений системы линейных уравнений называется *общим решением* этой системы.

Теорема 2 говорит о том, что набор чисел принадлежит общему решению системы тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы некоторого ее фиксированного частного решения и набора чисел, принадлежащего общему решению соответствующей однородной системы. В связи с этим теорему 2 часто кратко формулируют следующим образом:

> *общее решение совместной системы линейных уравнений равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.*

§12. Метод Гаусса

В данном параграфе будет изложен метод решения систем линейных уравнений, который обычно связывают с именем великого немецкого математика XIX века Карла Фридриха Гаусса. Этот метод называют также *методом последовательного исключения неизвестных*. Он будет использоваться при решении большинства задач, которые будут рассматриваться в главах 5–8 и 12.

1. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Лестничные системы

Вкратце метод Гаусса можно охарактеризовать следующим образом. Сначала исходная система линейных уравнений с помощью некоторых действий (называемых *элементарными преобразованиями*) приводится к другой системе, имеющей более простой вид (так называемой *лестничной системе*). При этом оказывается, что полученная система имеет то же самое общее решение (т.е. то же самое множество решений), что и исходная система. Затем ищется общее решение полученной системы (как мы увидим, это сделать несложно). В силу сказанного оно является и общим решением исходной системы.

Более подробное изложение метода Гаусса мы начнем с понятия элементарных преобразований системы линейных уравнений.

Определение. Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевое число;

2) прибавление одного уравнения к другому;

3) перестановка двух уравнений;

4) перестановка двух столбцов с неизвестными;

5) вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.

Следующая простая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма. *Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют множество ее решений.*

Доказательство. Тот факт, что множество решений системы сохраняется преобразованиями третьего, четвертого и пятого типа, очевиден. Очевидно также, что если верное равенство умножить на любое число, то оно останется верным. Поэтому решение данной системы является и решением системы, полученной из нее умножением одного из уравнений на ненулевое число t. Поскольку исходная система получается из новой преобразованием такого же типа (умножением того же уравнения на число $\frac{1}{t}$), всякое решение новой системы является и решением исходной системы. Таким образом, преобразование первого типа также не меняет множества решений системы. Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-го уравнения к i-му. Поскольку сумма двух верных равенств — снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой. Далее, старую систему можно получить из новой последовательным выполнением трех преобразований — сначала умножаем j-е уравнение новой системы (совпадающее с j-м уравнением старой системы!) на -1, затем прибавляем полученное уравнение к i-му уравнению новой системы и, наконец, еще раз умножаем j-е уравнение новой системы на -1. В силу сказанного выше всякое решение новой системы является и решением старой. Таким образом, и преобразование второго типа не меняет множества решений системы. Лемма доказана. ■

Определение. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение (другими словами, если всякое решение первой системы является решением второй и наоборот).

Используя понятие эквивалентных систем линейных уравнений, доказанную выше лемму можно переформулировать следующим образом:

если одна система линейных уравнений получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

Как указывалось в начале параграфа, элементарные преобразования системы нужны для того, чтобы привести ее к так называемой *лестничной* системе. Дадим соответствующее определение.

Определение. Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \dots + c_{2r}x_r + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \dots + c_{rn}x_n = d_r, \end{cases} \tag{1}$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, ..., $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. Мы будем использовать этот термин также для обозначения систем вида (1), в уравнениях которых первое слагаемое содержит не обязательно неизвестное x_1, второе — не обязательно x_2 и т.д.

Например, система

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 + x_2 = 1, \\ \qquad 2x_3 + x_4 - x_2 = 0, \\ \qquad\qquad x_4 + x_2 = 2 \end{cases}$$

является лестничной.

Как уже отмечалось, метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. В силу леммы эта лестничная система будет эквивалентной исходной системе. Не исключено, что на одном из этапов возникнет система, в которую будет входить уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$. Ясно, что это уравнение (а значит, и любая система уравнений, включающая его) решений не имеет. Следовательно, в этом случае и исходная система несовместна. Итак, если в ходе преобразований исходной системы возникнет уравнение указанного вида, то процесс преобразований прекращается и констатируется, что заданная система линейных уравнений несовместна. Если же таких уравнений не возникнет, то, как мы увидим ниже, система всегда может быть приведена к лестничному виду и затем решена.

Способ приведения произвольной системы к лестничному виду мы опишем на двух конкретных примерах, из которых затем сделаем заключение для общего случая.

В качестве первого примера рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Поскольку в лестничной системе в первом уравнении коэффициент при первом из неизвестных должен быть отличен от нуля, а в первом уравнении нашей системы коэффициент при x_1 равен нулю, выберем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля, например второе, и поменяем его местами с первым уравнением. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3. \end{array}\right.$$

В лестничной системе во всех уравнениях, кроме первого, первое из неизвестных должно входить с коэффициентом 0. Чтобы добиться этого, прибавим к третьему уравнению системы первое, умноженное на -1, а к четвертому — первое, умноженное на -2. Получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 3x_5 & = & -5. \end{array}\right.$$

Дальнейшие преобразования применяются к системе, состоящей из трех последних уравнений (за исключением возможной перестановки столбцов с неизвестными). Поскольку в лестничной системе во всех уравнениях, кроме первых двух, второе из неизвестных должно входить с коэффициентом 0, прибавим к третьему уравнению последней системы второе уравнение, умноженное на -1, а затем умножим четвертое уравнение на 2 и к результату прибавим второе уравнение. Получается система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 0, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Вычеркивая из полученной системы третье уравнение, получаем лестничную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8, \end{cases} \qquad (3)$$

которая, в силу леммы, эквивалентна исходной системе (2). Легко понять, что система (3) совместна. Например, ее решением является набор чисел $(1, -1, 2, 3, 0)$. Дальнейший анализ этой системы см. на с. 132.

В качестве второго примера рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ 6x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_3 - x_4 = -3. \end{cases} \qquad (4)$$

Прибавляя ко второму уравнению этой системы первое, умноженное на -2, получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 6x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Столбец с неизвестным x_2 поставим на последнее место (это равносильно последовательному выполнению двух элементарных преобразований: сначала поменяем местами столбцы с неизвестными x_2 и x_4, а затем — столбцы с неизвестными x_4 и x_3). Получим

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ \phantom{x_1 - {}} 3x_3 - 4x_4 \phantom{{}+x_2} = -1, \\ \phantom{x_1 - {}} 6x_3 + x_4 \phantom{{}+x_2} = 7, \\ - 3x_3 - x_4 \phantom{{}+x_2} = -3. \end{cases}$$

Прибавив к третьему уравнению второе, умноженное на -2, а к четвертому — второе (ни на что не умноженное), получаем

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ \phantom{x_1 - {}} 3x_3 - 4x_4 \phantom{{}+x_2} = -1, \\ \phantom{x_1 - 3x_3 - {}} 9x_4 \phantom{{}+x_2} = 9, \\ - 5x_4 \phantom{{}+x_2} = -4. \end{cases}$$

Если теперь к четвертому уравнению прибавить третье, умноженное на $\frac{5}{9}$, то мы получим уравнение $0 \cdot x_4 = 1$. Следовательно, система (4) несовместна.

Проведенное нам рассмотрение систем (2) и (4) подсказывает, что справедливо следующее утверждение (строгое доказательство которого мы приводить не будем).

Теорема 1. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ее можно с помощью элементарных преобразований привести к лестничной системе.* ∎

2. Нахождение общего решения лестничной системы

Остается вопрос о том, как искать общее решение лестничной системы. Рассмотрим его на примере лестничной системы (3). Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных x_4 и x_5, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных x_1, x_2 и x_3 так, что набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будет решением системы (3). В самом деле, полагая, например, $x_4 = 0$ и $x_5 = -1$, последовательно находим: из третьего уравнения системы (3) — что $x_3 = -3$; из ее второго уравнения — что $x_2 = -1$; из первого уравнения — что $x_1 = 3$. Таким образом, $(3, -1, -3, 0, -1)$ — решение системы (3). Полагая $x_4 = 3$, $x_5 = -5$, после очевидных вычислений получаем, что $x_1 = 5$, $x_2 = -7$ и $x_3 = -5$, откуда $(5, -7, -5, 3, -5)$ — еще одно ее решение. Ясно, что любое решение системы (3) может быть получено таким образом (ведь оно включает в себя какие-то значения для x_4 и x_5 и удовлетворяет всем уравнениям этой системы).

Из сказанного ранее вытекает способ нахождения и записи общего решения системы линейных уравнений. Поясним его на примере системы (2). В силу леммы общее решение этой системы совпадает с общим решением системы (3). Как мы видели в предыдущем абзаце, произвольное частное решение системы (3) можно найти следующим образом: сначала придать произвольные значения неизвестным x_4 и x_5, а затем однозначным образом вычислить значения остальных неизвестных. Поэтому неизвестные x_4 и x_5 естественно назвать *свободными*, а неизвестные x_1, x_2 и x_3 — *связанными* или *основными*. Перенося в системе (3) свободные неизвестные в правую часть, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_2 - x_3 = 2 - 2x_4 + x_5, \\ 5x_3 = -8 + 6x_4 + 7x_5. \end{cases} \tag{5}$$

Свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, а основные неизвестные выразим через c_1 и c_2 с помощью равенств системы (5). После очевидных преобразований получим, что

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases} \tag{6}$$

Итак, множество всех решений системы (2), равно как и системы (3), есть в точности множество всех наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющих равенствам (6). Поэтому эти равенства мы также будем называть общим решением каждой из систем (2) и (3). Равенства такого типа называют также *координатной записью* общего решения системы. Другая форма записи общего решения системы будет указана в §29.

Поскольку свободным переменным можно придавать произвольные значения, ясно, что если при решении системы возникает хотя бы одна свободная переменная, то система имеет бесконечно много решений. С другой стороны, из приведенного выше рассмотрения системы (2) ясно, что свободные переменные появляются тогда, когда после приведения системы к лестничному виду получается система, содержащая меньше уравнений, чем неизвестных. Более того, из этого рассмотрения видно, что *число свободных переменных, возникающих при решении лестничной системы, равно разности между числом неизвестных и числом уравнений в этой системе.*

В частности, если в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то свободных переменных при ее решении не возникает. Такая система (а значит, и любая система, которая приводится к ней элементарными преобразованиями) имеет единственное решение. Продемонстрируем это на примере следующей системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \tag{7}$$

После приведения ее элементарными преобразованиями к лестничной системе получим следующую систему (выкладки мы пропускаем):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ \quad - x_2 + 5x_3 = -1, \\ \qquad\quad - x_3 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из третьего уравнения системы (8) имеем $x_3 = 0$, из второго — $x_2 = 1$ и из первого — $x_1 = 1$. Таким образом, единственным решением системы (8), а значит, и системы (7), является набор (1,1,0).

Сформулируем сделанные наблюдения в виде теоремы.

Теорема 2. *Лестничная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет бесконечно много решений. Лестничная система, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имеет единственное решение.* ∎

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 3. *Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет по крайней мере одно ненулевое решение.*

Доказательство. Как уже отмечалось на с. 124, однородная система всегда совместна. По теореме 1 ее можно привести к лестничной системе. Поскольку при элементарных преобразованиях число уравнений в системе не увеличивается, а в исходной системе число уравнений меньше числа неизвестных, в полученной лестничной системе число уравнений также будет меньше числа неизвестных. По теореме 2 эта лестничная система имеет бесконечно много решений. Следовательно, среди них есть и ненулевое решение. В силу леммы оно будет решением и исходной системы. Теорема 3 доказана. ∎

3. Метод Гаусса–Жордана

Чтобы облегчить получение общего решения, процесс исключения неизвестных можно проводить более полно. Поясним, что мы имеем в виду, на примере системы (2). Ранее мы прервали процесс преобразований этой системы, получив из нее систему (3). Продолжим теперь этот процесс. Исключим из первого и второго уравнений системы (3) неизвестное x_3. Для этого каждое из указанных уравнений умножим на 5 и к результату прибавим третье уравнение. Получим систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 12, \\ 10x_2 + 4x_4 - 12x_5 = 2, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8. \end{cases}$$

Теперь исключим x_2 из первого уравнения, для чего к первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе, умноженное на -1. Получим систему

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_4 + 8x_5 = 22, \\ 10x_2 + 4x_4 - 12x_5 = 2, \\ 5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8, \end{cases} \qquad (9)$$

которая по-прежнему будет равносильна исходной. Переход от полученной теперь системы к общему решению тривиален: полагая $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, автоматически получаем (6).

Метод Гаусса, дополненный исключением неизвестных в “верхних” уравнениях, называется *методом Гаусса–Жордана* или *методом последовательного полного исключения неизвестных*.

4. Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса можно и удобно проводить на языке матриц. Прежде чем говорить о том, как это делается, проведем некоторую подготовительную работу. Если строка матрицы целиком состоит из нулей, мы будем называть эту строку *нулевой*.

Определение. Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевое число;

2) прибавление одной строки к другой;

3) перестановка двух строк;

4) перестановка двух столбцов;

5) вычеркивание нулевой строки.

Отметим очевидную аналогию элементарных преобразований матриц с элементарными преобразованиями систем линейных уравнений. Важную роль в дальнейшем будет играть следующее понятие.

Определение. Матрица называется *ступенчатой*, если выполнены следующие условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;

2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Приведем несколько примеров ступенчатых матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что ступенчатой будет и матрица произвольного порядка, все элементы которой равны 0. Такие матрицы называются *нулевыми*. Общий вид ступенчатой матрицы изображен ниже:

$$\left(\begin{array}{l} 0 \ldots 0 \,|\, * \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \,|\, * \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ddots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \,|\, * \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \,|\, * \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{array}\right).$$

Звездочками обозначены элементы, которые не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие ниже ломаной линии, обязаны быть равны 0. Заметим, что эта ломаная имеет вид ступенек, чем и объясняется термин “ступенчатая матрица”. Разумеется, нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть, а различные “ступеньки” могут иметь разную длину (т.е. охватывать разное число столбцов).

Теорема 4. *Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица порядка $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Выберем в A самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-м столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-ю строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-м столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x. Предположим, что в j-м столбце матрицы B есть ненулевой элемент y, расположенный ниже первой строки. Пусть он стоит в k-й строке. Прибавим к k-й строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-й строки и j-го столбца будет стоять элемент $xy-yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-м столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0. Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-го столбца, — через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \ldots & 0 & x & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cline{5-5} 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Если C' — нулевая матрица, то матрица C является ступенчатой. Предположим поэтому, что в C' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с C' те же действия, которые ранее мы делали с матрицей A. А именно, выберем в матрице C самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже первой строки (ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть этот столбец имеет номер r. Далее, выберем в C самую верхнюю строку, отличную от первой, на пересечении которой с r-м столбцом стоит ненулевой элемент (опять-таки ясно, что этот элемент расположен внутри C'). Пусть эта строка имеет номер s. Если $s > 2$, поменяем местами вторую и s-ю строки матрицы C. Теперь на пересечении ее второй стороки и r-го столбца стоит ненулевой элемент. Обозначим его через z. Обнулим все элементы r-го столбца полученной матрицы, расположенные ниже ее второй строки (так же, как мы ранее обнулили все элементы j-го столбца матрицы B, расположенные ниже ее первой строки). Полученную матрицу обозначим через D, а ее часть, расположенную ниже второй строки и правее r-го столбца, — через D':

$$D = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & x & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z & \dots\dots\dots\dots \\ \cline{8-8} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{7}{c|}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & D' \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Если D' — нулевая матрица, то матрица D является ступенчатой. Предположим поэтому, что в D' есть ненулевой элемент. Проделаем теперь с D' те же действия, как ранее с A и C' (выберем в матрице D самый левый столбец, в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, стоящий ниже второй строки; выберем в D самую верхнюю строку, отличную от первой и второй, на пересечении которой с выбранным столбцом стоит ненулевой элемент; при необходимости поменяем местами третью и выбранную строки матрицы D; обнулим все элементы, стоящие в полученной матрице в выбранном нами столбце ниже третьей строки). Продолжая этот процесс, мы через какое-то конечное число шагов получим ступенчатую матрицу. Отметим, что этот процесс обязательно оборвется через конечное число шагов, так как мы на каждом шаге сдвигаемся на одну строку вниз и по крайней мере на один столбец вправо, а число строк и столбцов в матрице A конечно. Теорема 4 доказана. ∎

Заметим, что когда в доказательстве теоремы 4 мы приводили матрицу к ступенчатому виду, мы делали почти то же самое, что в начале данного параграфа при приведении системы линейных уравнений к лестничному виду. Единственное отличие состоит в том, что в доказательстве теоремы 4 мы ни разу не воспользовались преобразованием четвертого типа (перестановкой столбцов). Из доказательства видно, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, не используя этого преобразования. В дальнейшем нам придется приводить матрицу к ступенчатому виду не только при решении систем линейных уравнений, но и в других задачах (см. §21, 24, 28). В этих задачах перестановка столбцов необязательна и в некотором смысле даже нежелательна. Поэтому договоримся о том, что

> *всюду в дальнейшем, если особо не оговорено противное, при приведении матрицы к ступенчатому виду перестановка столбцов использоваться не будет.*

Проиллюстрируем алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, изложенный в доказательстве теоремы 4, на следующем примере.

Пусть требуется привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если матрица B может быть получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, то мы будем писать $A \sim B$. Действуя по изложенному выше алгоритму, имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге мы переставили первую и вторую строки. На втором — из третьей строки, умноженной на 2, вычли первую строку, а из четвертой строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3. На третьем шаге мы переставили вторую и третью строки, а на четвертом — прибавили к четвертой строке вторую.

5. Реализация метода Гаусса на языке матриц

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \tag{10}$$

Определение. Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* системы (10) или просто *матрицей системы* (10), а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

— *расширенной матрицей* этой системы.

Совокупность всех столбцов расширенной матрицы, кроме ее последнего столбца, нам будет удобно иногда называть *основной частью* расширенной матрицы. Часто последний столбец расширенной матрицы системы отделяют от ее основной части вертикальной чертой, т.е. записывают эту матрицу в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Это делается для того, чтобы подчеркнуть особый характер элементов последнего столбца — в нем, в отличие от всех остальных, стоят не коэффициенты при неизвестных, а свободные члены уравнений.

Итак, каждой системе линейных уравнений можно поставить в соответствие ее расширенную матрицу. Обратно, всякой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_{m\,n+1} \end{pmatrix},$$

содержащей более одного столбца, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1\,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2\,n+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_{m\,n+1}. \end{cases}$$

Будем говорить, что эта система *соответствует* матрице A.

Легко заметить, что в проводившихся выше в данном параграфе преобразованиях систем линейных уравнений менялись лишь коэффициенты при неизвестных, а сами неизвестные просто переписывались. Иными словами, фактически мы преобразовывали расширенную матрицу системы. Обычно для экономии места и времени решение системы методом Гаусса сразу оформляют в виде преобразований расширенной матрицы системы. Заметим, что при этом преобразованием пятого типа (вычеркивание нулевой строки) пользуются редко, так как в ряде случаев бывает удобно не вычеркивать нулевые строки, а накапливать их внизу. Кроме того, при использовании преобразования четвертого типа (перестановка столбцов) следует помнить о том, что нельзя переставлять местами столбец с коэффициентами при неизвестных и столбец свободных членов. Иначе говоря, среди переставляемых столбцов не должно быть последнего столбца матрицы.

Очевидно, что расширенная матрица всякой лестничной системы линейных уравнений является ступенчатой. Обратное неверно. Так, например, система линейных уравнений, соответствующая ступенчатой матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

не является лестничной. Чтобы получить матрицу, соответствующую лестничной системе, надо переставить в A второй и четвертый столбцы. А вот ступенчатая матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

не может быть приведена элементарными преобразованиями к матрице, соответствующей лестничной системе. В самом деле, система линейных уравнений, соответствующая матрице B, несовместна, так как содержит уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$. Остается учесть теорему 1. Легко понять, что справедливо следующее утверждение.

> *Если A — ступенчатая матрица, содержащая более одного столбца, то либо соответствующая ей система линейных уравнений является лестничной, либо эта система приводится к лестничной с помощью только перестановок столбцов с неизвестными, либо A содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны нулю, а последний элемент отличен от нуля.*

Подводя итог сказанному выше, можно сформулировать следующий алгоритм решения систем линейных уравнений (“матричную версию” метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений (10). *Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны* 0, *а последний элемент отличен от* 0, *то* (*независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой*) *преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений. Предположим теперь, что указанная ситуация не возникнет и мы приведем нашу матрицу к ступенчатому виду. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице. Если эта система не является лестничной, то, переставив столбцы с неизвестными, приведем ее к лестничному виду. Остается решить эту лестничную систему так, как это описано выше.*

Проиллюстрируем сказанное на двух примерах. В качестве первого примера рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 5,\\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 8,\\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 6,\\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1,\\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3.\end{array}\right. \tag{11}$$

Запишем расширенную матрицу этой системы и начнем приводить ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 5\\ 2 & -3 & -3 & 2 & 8\\ 3 & -2 & -5 & 1 & 6\\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 5\\ 0 & -5 & 1 & 4 & -2\\ 0 & -5 & 1 & 4 & -9\\ 0 & 5 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -2 & -1 & 5\\ 0 & -5 & 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2\end{array}\right).$$

Последняя матрица еще не является ступенчатой, но продолжать приводить ее к ступенчатому виду смысла нет: третья строка полученной матрицы показывает, что система (11) решений не имеет.

В качестве второго примера рассмотрим систему (2). Запишем расширенную матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, т.е. система (3), является лестничной. Общее решение этой системы найдено выше — см. равенства (6).

Несложно переформулировать на языке матриц и метод Гаусса–Жордана. Мы не будем делать этого в общем виде, а ограничимся примерами. Продолжим элементарные преобразования расширенной матрицы системы (2), начиная с полученной выше ступенчатой матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 5 & 0 & 4 & -2 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы, соответствующей системе (9), с очевидностью вытекают равенства (6).

Особенно полезной "матричная версия" метода Гаусса–Жордана оказывается для систем, которые имеют единственное решение. Продемонстрируем это сначала на примере системы (7), а затем сделаем общие выводы. Запишем расширенную матрицу системы (7) и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Продолжим элементарные преобразования этой матрицы в соответствии с методом Гаусса–Жордана:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & 13 & 0 & 26 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Формально “работа” метода Гаусса–Жордана завершена. Но мы сделаем еще один дополнительный шаг: разделим каждую строку последней матрицы на элемент, стоящий в основной части этой матрицы на главной диагонали (т.е. разделим первую строку на 13, а вторую и третью строки — на -13):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ясно, что по существу это не система уравнений, а (единственное) решение системы (7).

Перенесем полученную информацию на общий случай. Нам понадобится следующее

Определение. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы A. Матрица A называется *диагональной*, если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица, в которой все элементы на главной диагонали равны 1, т.е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

называется *единичной матрицей* и обозначается буквой E.

Основываясь на последнем из приведенных выше примеров, сформулируем (без подробного обоснования) "матричную версию" метода Гаусса–Жордана для систем, имеющих единственное решение.

> *Предположим, что из каких-то соображений нам известно, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Чтобы найти его, надо с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). Последний столбец полученной матрицы будет являться (единственным) решением исходной системы.*

Этот вывод будет нам очень полезен в главах 5 и 6.

В заключение параграфа отметим одну особенность, возникающую при решении однородных систем. Столбец, состоящий из одних нулей, будем называть *нулевым*. Ясно, что последний столбец расширенной матрицы однородной системы является нулевым, и при любых элементарных преобразованиях этой матрицы он будет оставаться нулевым. Нет никакого смысла все время переписывать этот столбец. Поэтому при решении однородной системы, как правило, проводят элементарные преобразования основной матрицы системы, а после приведения ее к ступенчатому виду, при нахождении общего решения, "вспоминают" о последнем нулевом столбце. Подчеркнем, что в последнем столбце преобразовываемой матрицы теперь стоят не свободные члены уравнений, а коэффициенты при последнем неизвестном. В частности это означает, что в процессе элементарных преобразований последний столбец матрицы можно менять местами с некоторым другим ее столбцом. По той же причине в рассматриваемом случае возникновение строки, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, а последний элемент отличен от 0, не означает, что система несовместна. Примеры решения однородных систем указанным способом будут приведены позднее (см. §29 и 36).

§13. Определители

В этом параграфе будет введено и изучено понятие определителя квадратной матрицы произвольного порядка, играющее важную роль в дальнейшем изложении. Определение будет дано индуктивно (по порядку матрицы). Это означает, что сначала будет сказано, что такое определитель квадратной матрицы порядка 1 (*база индуктивного определения*), а затем, в предположении, что уже известно понятие определителя матрицы порядка $n-1$, будет дано определение определителя матрицы n-го порядка (*шаг индуктивного определения*).

Определение. 1) *База индукции. Определителем квадратной матрицы* $A = (a_{11})$ *первого порядка* (или просто *определителем первого порядка*) называется число a_{11}.

2) Нам понадобится одно вспомогательное понятие. Пусть n — натуральное число, большее 1. Будем считать, что уже введено понятие определителя квадратной матрицы порядка $n-1$. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Зафиксируем в этой матрице элемент a_{ij} и вычеркнем в ней i-ю строку и j-й столбец. Определитель полученной квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка обозначим через M_{ij}. *Алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} назовем число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

3) *Шаг индукции. Определителем квадратной матрицы* A порядка n (или просто *определителем* n*-го порядка*) называется число

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Другими словами, определитель матрицы порядка $n > 1$ — это сумма произведений элементов ее первой строки на свои алгебраические дополнения. Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad |A|, \quad \text{или} \quad \det A.$$

Равенство

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

называют *разложением определителя по первой строке.*

Приведенное выше определение определителя позволяет вычислить определитель произвольной квадратной матрицы. В самом деле, пусть A — квадратная матрица порядка n. Разложив ее определитель по первой строке, мы сведем вычисление $|A|$ к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка $M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1n}$. Каждый из этих определителей также можно разложить по первой строке, сведя его вычисление к вычислению $(n-1)$-го определителя $(n-2)$-го порядка. Каждый из последних определителей вновь разложим по первой строке и т.д. В конце концов мы дойдем до определителей первого порядка, которые вычисляются легко (см. п.1 определения определителя). Ясно, что этот способ вычисления определителя весьма трудоемок, причем объем вычислений резко возрастает с увеличением порядка матрицы. В конце данного параграфа будет указан менее трудоемкий способ вычисления определителей произвольного порядка.

В §1 были введены понятия определителей второго и третьего порядка. Естественно поставить вопрос о том, как соотносятся введенные там определители с только что определенными. Оказывается, они совпадают. Действительно, в силу сформулированного выше определения, имеем равенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} =$$
$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Это означает, что определитель матрицы второго порядка, введенный в §1, совпадает с тем же понятием, определенным в данном параграфе. Проверим, что то же верно и для определителей третьего порядка. Используя приведенное выше определение, имеем равенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Но последнее выражение есть не что иное, как разложение определителя третьего порядка по первой строке, установленное в §1 — см. там формулу (3).

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение. Пусть A — произвольная матрица порядка $m \times n$, а k — натуральное число такое, что $k \leqslant m$ и $k \leqslant n$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов. Определитель квадратной матрицы, стоящей на пересечении этих строк и столбцов, называется *минором* матрицы A. *Порядком минора* называется порядок той матрицы, определителем которой он является.

Фактически мы уже имели дело с минорами в определении определителя. В самом деле, ясно, что упоминаемый там определитель M_{ij}

является минором $(n-1)$-го порядка матрицы A. Он называется *минором, соответствующим элементу* a_{ij}. Отметим еще, что квадратная матрица A порядка n имеет только один минор порядка n, а именно $|A|$. Но если $k < n$, то матрица может иметь много миноров порядка k.

Установим ряд свойств определителей n-го порядка.

Свойство 1. *При умножении всех элементов некоторой строки матрицы на число t ее определитель умножается на t.*

Доказательство. Докажем это свойство индукцией по порядку матрицы. Обозначим матрицу через A, а ее порядок через n. При $n = 1$ доказываемое утверждение тривиально (см. определение определителя первого порядка). Предположим, что оно выполняется при $n = k-1$ и докажем его при $n = k$. Матрицу, получаемую при умножении строки матрицы A на число t, обозначим через A', а ее минор, соответствующий элементу, стоящему в i-й строке и j-м столбце, — через M'_{ij}. Предположим сначала, что на t умножается первая строка матрицы A. Тогда

$$|A'| = \begin{vmatrix} ta_{11} & ta_{12} & \dots & ta_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = ta_{11}A_{11} + ta_{12}A_{12} + \dots + ta_{1k}A_{1k} =$$

$$= t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1k}A_{1k}) = t \cdot |A|.$$

Если же умножалась не первая строка, то по предположению индукции $A'_{1i} = tA_{1i}$ для всякого $2 \leqslant i \leqslant k$ (поскольку $A'_{1i} = (-1)^{1+i}M'_{1i}$, $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$, а M'_{1i} и M_{1i} — определители $(k-1)$-го порядка) и

$$\begin{aligned} |A'| &= a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \dots + a_{1k}A'_{1k} = \\ &= a_{11}tA_{11} + a_{12}tA_{12} + \dots + a_{1k}tA_{1k} = \\ &= t(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1k}A_{1k}) = t \cdot |A|. \end{aligned}$$

Свойство 1 доказано. ∎

Свойство 2. *Если матрица содержит нулевую строку, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Это свойство легко следует из предыдущего. Действительно, если матрица содержит нулевую строку, то можно считать, что эта строка получена умножением некоторой строки на 0. По свойству 1 определитель будет равен произведению нуля на определитель некоторой другой матрицы, т.е. нулю. Свойство 2 доказано. ∎

Свойство 3. *При перестановке местами двух различных строк матрицы ее определитель умножается на* -1.

Доказательство. Это свойство, как и свойство 1, мы докажем индукцией по порядку матрицы. База индукции здесь тривиальна, так как матрица первого порядка не содержит различных строк. Предположим, что доказываемое свойство выполняется для матриц порядка $n = k-1$, и докажем его для матриц порядка $n = k$. Матрицу, полученную из A перестановкой строк, обозначим через A'. По предположению индукции

$$A'_{1i} = (-1)^{1+i} M'_{ij} = (-1)^{1+i} \cdot (-M_{ij}) = -A_{1i}$$

для всякого $2 \leqslant i \leqslant k$. Если среди переставляемых строк не было первой, то

$$|A'| = a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \cdots + a_{1k}A'_{1k} = -a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} - \cdots - a_{1k}A_{1k} = -|A|.$$

Предположим теперь, что среди переставляемых строк была первая. Для определенности будем считать, что переставлялись первая и вторая строки (в общем случае доказательство абсолютно аналогично). Если $k = 2$, то доказываемое свойство непосредственно вытекает из определения определителя второго порядка. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Поэтому далее будем считать, что $k > 2$. Пусть $i, j, \ell, m \in \{1, 2, \ldots, k\}$, причем $i \neq \ell$ и $j \neq m$. Обозначим через $M_{ij}^{\ell m}$ минор матрицы A, полученный вычеркиванием из нее i-й и ℓ-й строк и j-го и m-го столбцов. Разлагая сначала определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

по первой строке, а затем каждый из миноров вида M_{1j} по его первой строке, имеем

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1k}A_{1k} = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k} = \\ &= a_{11}\left(a_{22}M_{22}^{11} - a_{23}M_{23}^{11} + \cdots + (-1)^k a_{2k}M_{2k}^{11}\right) - \\ &- a_{12}\left(a_{21}M_{21}^{12} - a_{23}M_{23}^{12} + \cdots + (-1)^k a_{2k}M_{2k}^{12}\right) + \cdots + \\ &+ (-1)^{k+1}a_{1k}\left(a_{21}M_{21}^{1k} - a_{22}M_{22}^{1k} + \cdots + (-1)^k a_{2\,k-1}M_{2\,k-1}^{1k}\right). \end{aligned}$$

Если проделать аналогичные действия с определителем матрицы A', то мы получим алгебраическую сумму тех же самых миноров с теми же самыми множителями. Осталось лишь проверить, что знаки соответствующих слагаемых в разложениях для определителей матриц A и A' будут противоположными. В самом деле, поскольку

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{aligned} |A'| &= a_{21}A'_{11} + a_{22}A'_{12} + \dots + a_{2k}A'_{1k} = \\ &= a_{21}M'_{11} - a_{22}M'_{12} + \dots + (-1)^{k+1}a_{2k}M'_{1k}. \end{aligned}$$

Далее, $(M'_{2j})^{1m} = M^{2j}_{1m}$ для всех $j, m = 1, 2, \dots, k$, $j \neq m$, и потому

$$\begin{aligned} |A'| = {} & a_{21}\left(a_{12}M^{21}_{12} - a_{13}M^{21}_{13} + \dots + (-1)^k a_{1k}M^{21}_{1k}\right) - \\ & - a_{22}\left(a_{11}M^{22}_{11} - a_{13}M^{22}_{13} + \dots + (-1)^k a_{1k}M^{22}_{1k}\right) + \dots + \\ & + (-1)^{k+1}a_{2k}\left(a_{11}M^{2k}_{11} - a_{12}M^{2k}_{12} + \dots + (-1)^k a_{1\,k-1}M^{2k}_{1\,k-1}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что $a_{11}a_{22}M^{11}_{22} = a_{22}a_{11}M^{22}_{11}$. Но в разложение для $|A|$ это слагаемое входит со знаком плюс, а в разложение для $|A'|$ — со знаком минус. Аналогично $a_{12}a_{21}M^{12}_{21} = a_{21}a_{12}M^{21}_{12}$. Но в разложение для $|A|$ это слагаемое входит со знаком минус, а в разложение для $|A'|$ — со знаком плюс. Аналогично требуемый факт устанавливается для всех остальных слагаемых. Свойство 3 доказано. ■

Свойство 4. *Если матрица имеет две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Это свойство легко вытекает из предыдущего. В самом деле, если две одинаковые строки поменять местами, то определитель, с одной стороны, сменит знак на противоположный (в силу свойства 3), а с другой — не изменится, так как матрица останется прежней. Следовательно, определитель равен нулю. ■

При решении задач часто оказывается полезным следующий факт, легко вытекающий из свойств 1 и 4:

> *если матрица имеет две пропорциональные строки, то ее определитель равен нулю.*

В самом деле, пусть i-я строка матрицы равна ее j-й строке, умноженной на t. По свойству 1 определитель этой матрицы равен произведению числа t на определитель матрицы, в которой i-я и j-я строки совпадают. По свойству 4 последний определитель равен 0.

Свойство 5. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.*

Эта сложная формулировка символически выглядит проще:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \ldots & a'_{in}+a''_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \ldots & a'_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \ldots & a''_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Вновь воспользуемся индукцией по порядку матрицы. Если $n = 1$, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для $n = k - 1$, и докажем его для $n = k$. Матрицы, входящие в равенство, приведенное перед началом доказательства, обозначим через A, B и C (в том порядке, в котором они появляются в этом равенстве). Рассмотрим сначала случай, когда $i = 1$. Тогда $A_{1j} = B_{1j} = C_{1j}$ для всякого $1 \leqslant j \leqslant k$ (поскольку все строки со второй по k-ю в матрицах A, B и C совпадают). Имеем

$$\begin{aligned} |A| &= (a'_{11}+a''_{11})A_{11}+(a'_{12}+a''_{12})A_{12}+\cdots+(a'_{1k}+a''_{1k})A_{1k} = \\ &= (a'_{11}A_{11}+a'_{12}A_{12}+\cdots+a'_{1k}A_{1k})+(a''_{11}A_{11}+a''_{12}A_{12}+\cdots+a''_{1k}A_{1k}) = \\ &= (a'_{11}B_{11}+a'_{12}B_{12}+\cdots+a'_{1n}B_{1k})+(a''_{11}C_{11}+a''_{12}C_{12}+\cdots+a''_{1k}C_{1k}) = \\ &= |B|+|C|. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $i > 1$. Миноры матриц B и C, соответствующие элементу a_{1j}, обозначим через M'_{1j} и M''_{1j} соответственно.

Тогда, в силу предположения индукции,

$$\begin{aligned} A_{1j} &= (-1)^{1+j} M_{1j} = (-1)^{1+j}(M'_{1j} + M''_{1j}) = \\ &= (-1)^{1+j} M'_{1j} + (-1)^{1+j} M''_{1j} = B_{1j} + C_{1j} \end{aligned}$$

для всякого $1 \leqslant j \leqslant k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1k}A_{1k} = \\ &= a_{11}(B_{11}+C_{11}) + a_{12}(B_{12}+C_{12}) + \dots + a_{1k}(B_{1k}+C_{1k}) = \\ &= (a_{11}B_{11}+a_{12}B_{12}+\dots+a_{1k}B_{1k}) + (a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+\dots+a_{1k}C_{1k}) = \\ &= |B| + |C|. \end{aligned}$$

Свойство 5 доказано. ■

Свойство 6. *Если к некоторой строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.*

Доказательство. Это свойство легко вытекает из свойств 1, 4 и 5. В самом деле, предположим, что мы прибавили к i-й строке матрицы ее j-ю строку, умноженную на t. Используя сначала свойства 5 и 1, а затем свойство 4, имеем

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + ta_{i1} & a_{j2} + ta_{i2} & \dots & a_{jn} + ta_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + t \cdot 0 = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 доказано. ■

Свойство 7. *Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на свои алгебраические дополнения равна определителю матрицы.*

Иными словами,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

для всякого $1 \leqslant i \leqslant n$. Это равенство называется *разложением определителя по i-й строке.*

Доказательство. Если $i = 1$, то доказываемое свойство есть не что иное, как определение определителя n-го порядка. Предположим теперь, что $i > 1$. Переставляя последовательно i-ю строку с $(i-1)$-й, $(i-2)$-й, ..., наконец, с первой и используя свойство 3, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{i-1}(a_{i1}(-1)^{1+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{1+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{1+n}M_{in}) = \\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} = \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

Свойство 7 доказано. ∎

Свойство 8. *Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.*

Иными словами, если $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $i \neq j$, то

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Доказательство. Для простоты обозначений проведем доказательство для $i = 1$ и $j = 2$. В общем случае годятся те же самые рассуждения. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Иными словами, матрица A' получена из матрицы A заменой ее второй строки на первую. Легко понять, что миноры матрицы A', получаемые при разложении ее определителя по первой строке, совпадают с минорами матрицы A, получаемыми при разложении ее определителя по второй строке, а соответствующие алгебраические дополнения равны по абсолютной величине и имеют различные знаки. Иными словами, $M'_{1i} = M_{2i}$ и $A'_{1i} = -A_{2i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку в матрице A' имеются две одинаковые строки, по свойству 4 ее определитель равен нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \cdots + a_{1n}A'_{1n} = \\ &= a_{11}(-A_{21}) + a_{12}(-A_{22}) + \cdots + a_{1n}(-A_{2n}) = \\ &= -(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n}), \end{aligned}$$

откуда $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n} = 0$. Свойство 8 доказано. ■

Введем понятие, которое часто будет встречаться в дальнейшем.

Определение. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица порядка $m \times n$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

порядка $n \times m$ называется *транспонированной* к матрице A и обозначается через $A^\top$.

Иными словами, при транспонировании матрицы ее строки становятся столбцами (причем i-я строка становится i-м столбцом) и наоборот. Очевидно, что $(A^\top)^\top = A$ для произвольной матрицы A. Ясно также, что если A — квадратная матрица, то матрица $A^\top$ — тоже квадратная.

Свойство 9. *Определитель матрицы, транспонированной к данной, равен определителю исходной матрицы.*

Доказательство. В общем случае доказательство этого свойства довольно сложное. Поэтому мы докажем его лишь для матриц второго и третьего порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица второго порядка. Тогда

$$|A^\top| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица третьего порядка. Тогда

$$|A^\top| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = |A|.$$

Свойство 9 доказано. ■

Из свойства 9 и того факта, что при транспонировании матрицы ее строки становятся столбцами, вытекает

Свойство 10. *Если в формулировках свойств* 1–8 *заменить слово "строка" словом "столбец", то эти свойства останутся справедливыми.* ■

В частности, из свойств 7 и 10 вытекает, что для всякого $1 \leqslant j \leqslant n$ справедливо равенство

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj},$$

которое называется *разложением определителя по j-му столбцу.*

Определение. Квадратная матрица A называется *верхнетреугольной* (соответственно *нижнетреугольной*), если все ее элементы, стоящие ниже (соответственно выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (соответственно $i < j$).

Например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются верхнетреугольными, а матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

— нижнетреугольными (отметим, что последняя матрица одновременно является и верхнетреугольной).

Матрица называется *треугольной*, если она является верхнетреугольной или нижнетреугольной.

Свойство 11. *Определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали.*

Доказательство. Предположим сначала, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать требуемое утверждение индукцией по n. База индукции очевидна: если $n = 1$, то $|A| = a_{11}$ по определению определителя первого порядка. Предположим теперь, что утверждение верно при $n = k-1$ и докажем его для $n = k$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{kk},$$

что и требовалось доказать.

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство проводится аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. Свойство доказано. ■

Из свойства 11 непосредственно вытекает, что

определитель единичной матрицы равен единице.

Свойство 11 можно использовать для вычисления определителя произвольной матрицы. Из доказательства теоремы 4 из §12 вытекает, что произвольную квадратную матрицу A можно с помощью элементарных преобразований матриц первого, второго, третьего и четвертого типа (см. с. 135) привести к верхнетреугольной матрице B. Свойства 1, 3, 6 и 10 показывают, как связаны $|A|$ и $|B|$. Вычислив $|B|$ по свойству 11, можно найти и $|A|$. Приведем пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & -63 & 54 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-63) \cdot 26}{8 \cdot 9 \cdot 7} = 13.$$

На первом шаге мы, воспользовавшись свойством 6, прибавили ко второй строке первую, умноженную на -1, к третьей — первую, умноженную на -2, а к четвертой — первую, умноженную на -3. На втором шаге умножили третью и четвертую строки на 4 и 2 соответственно и воспользовались свойством 1. На третьем шаге мы, вновь воспользовавшись свойством 6, прибавили к третьей строке вторую, умноженную на 1, а к четвертой — вторую, умноженную на -1. На четвертом шаге умножили третью и четвертую строки на 7 и 9 соответственно и воспользовались свойством 1. На пятом — прибавили к четвертой строке третью, умноженную на -1, еще раз использовав свойство 6, а на шестом — применили свойство 11.

§14. Крамеровские системы линейных уравнений

В этом параграфе мы будем рассматривать системы линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных. Такие системы называются *крамеровскими* в честь швейцарского математика Крамера, изучавшего их.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Определитель основной матрицы системы (1) обозначим через Δ и будем называть *определителем системы* (1). Далее, для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца основной матрицы системы (1) на столбец свободных членов этой системы. Иными словами,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2\,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного параграфа, известный как *теорема Крамера*. Первое утверждение этого результата, которое обобщает теоремы 1 и 2 из §1, часто называют *правилом Крамера.*.

Теорема 1. *Пусть дана крамеровская система линейных уравнений* (1), *а определители* $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ *имеют указанный выше смысл.*

1) *Если* $\Delta \neq 0$, *то система* (1) *имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

2) *Если* $\Delta \neq 0$, *а по крайней мере один из определителей* $\Delta_1, \Delta_2, \dots,$ Δ_n *отличен от* 0, *то система* (1) *не имеет решений.*

3) *Если* $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, *то система* (1) *либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. 1) Пусть $\Delta \neq 0$. Докажем сначала существование решения системы (1). Для этого достаточно убедиться в том, что набор чисел

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \tag{2}$$

является решением системы, т.е. обращает все ее уравнения в верные равенства. Подставим этот набор в первое уравнение системы и разложим определитель Δ_1 по первому столбцу, определитель Δ_2 — по второму столбцу, ..., определитель Δ_n — по n-му столбцу. Получим

$$\begin{aligned}
&a_{11}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta}+\dots+a_{1n}\cdot\frac{\Delta_n}{\Delta}=\\
=&\frac{1}{\Delta}\cdot\left(\,a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\dots+a_{1n}\Delta_n\right)=\\
=&\frac{1}{\Delta}\cdot\big[\,a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1})+\\
&\quad+a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2})+\\
&\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\quad+a_{1n}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\dots+b_nA_{nn})\big].
\end{aligned}$$

Раскрыв круглые скобки и сгруппировав слагаемые, содержащие $b_1, b_2, \dots, b_n$, можно переписать полученное выражение в виде

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta}\cdot\big[\,&b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n})+\\
+&b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\dots+a_{1n}A_{2n})+\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+&b_n(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\dots+a_{1n}A_{nn})\big].
\end{aligned}$$

Выражение в первых круглых скобках есть не что иное, как разложение определителя Δ по первой строке, а выражения в остальных круглых скобках равны нулю в силу свойства 8 из §13. Поэтому окончательно получаем, что

$$a_{11}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\cdot\frac{\Delta_2}{\Delta}+\dots+a_{1n}\cdot\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}\cdot b_1\cdot\Delta=b_1,$$

т.е. набор чисел (2) обращает первое уравнение системы (1) в верное равенство. Аналогично проверяется, что он обращает в верные равенства и все остальные уравнения этой системы.

Докажем теперь единственность решения. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — произвольное решение системы (1). Иными словами, этот набор чисел обращает все уравнения системы в верные равенства:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1^0\,+\,a_{12}x_2^0\,+\dots+\,a_{1n}x_n^0\,=\,b_1,\\
a_{21}x_1^0\,+\,a_{22}x_2^0\,+\dots+\,a_{2n}x_n^0\,=\,b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1^0\,+\,a_{n2}x_2^0\,+\dots+\,a_{nn}x_n^0\,=\,b_n.
\end{cases}$$

Умножим первое из этих равенств на A_{11}, второе — на A_{21}, ..., последнее — на A_{n1} и сложим полученные равенства. Сгруппировав в левой части суммы слагаемые, содержащие $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, получим

$$\begin{aligned}&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1^0 +\\ &+ (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2^0 +\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n^0 =\\ &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}.\end{aligned}$$

В левой части этого равенства выражение в первых круглых скобках есть в точности разложение определителя Δ по первому столбцу, а выражения во всех остальных круглых скобках равны нулю в силу свойств 8 и 10 из §13. А в правой части стоит разложение определителя Δ_1 по первому столбцу. Следовательно, последнее равенство можно переписать в виде $\Delta x_1^0 = \Delta_1$. Аналогично доказывается, что $\Delta x_2^0 = \Delta_2, \ldots, \Delta x_n^0 = \Delta_n$. Итак, если $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — решение системы (1), то

$$\Delta x_1^0 = \Delta_1,\ \Delta x_2^0 = \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta x_n^0 = \Delta_n. \tag{3}$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем, что

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n^0 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Итак, мы взяли произвольное решение и доказали, что оно совпадает с решением (2). Следовательно, решение единственно. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

2) Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из доказанных выше равенств (3).

3) Предположим, что $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$ и система (1) совместна. Достаточно проверить, что в этом случае система (1) имеет бесконечно много решений. В силу теоремы 2 из §11 для этого достаточно убедиться в том, что однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0,\end{cases} \tag{4}$$

соответствующая системе (1), имеет бесконечно много решений. Ясно, что определители систем (1) и (4) совпадают. Следовательно, определитель системы (4) равен 0. Применим к системе (4) метод Гаусса, соблюдая следующее правило: уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0 \tag{5}$$

(если они будут возникать) вычеркивать не будем, а будем записывать их последними. Иными словами, условимся применять лишь элементарные преобразования первого, второго, третьего и четвертого типа (см. с. 128). Поскольку система (4) является однородной, она совместна (см. замечание на с. 124). В силу теоремы 1 из §12 мы сможем привести эту систему к лестничному виду. Обозначим через A матрицу полученной лестничной системы. Ясно, что A — квадратная ступенчатая матрица. Из свойств 1, 3, 6 и 10 определителей (см. §13) вытекает, что $|A|$ равен определителю системы (4), умноженному на некоторое ненулевое число. Следовательно, $|A| = 0$. Матрица A является верхнетреугольной (как и любая квадратная ступенчатая матрица). В силу свойства 11 определителей (см. §13) по крайней мере один из элементов на главной диагонали матрицы A равен 0. Из этого факта и определения ступенчатой матрицы вытекает, что A содержит по крайней мере одну нулевую строку. Следовательно, при применении метода Гаусса к исходной крамеровской системе обязательно возникнет хотя бы одно уравнение вида (5), и после отбрасывания таких уравнений полученная лестничная система будет иметь меньше уравнений, чем неизвестных. По теореме 3 из §12 эта лестничная система имеет ненулевое решение. В силу леммы из §12 (см. с. 128) система (4) также имеет ненулевое решение. Следовательно, она имеет более одного решения. В силу следствия 1 из §11 она имеет бесконечно много решений. ∎

Отметим, что для систем двух уравнений с двумя неизвестными (и только для них!) третье утверждение теоремы Крамера можно уточнить: если в такой системе $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система имеет бесконечно много решений (легко понять, что в такой системе одно из уравнений получается из другого умножением на некоторое число).

Из теоремы Крамера непосредственно вытекает

Следствие. *Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель не равен* 0. ∎

Из этого следствия, в свою очередь, легко вытекает следующее утверждение, которое, в силу его важности, мы назовем теоремой.

Теорема 2. *Крамеровская однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.*

Доказательство. Поскольку всякая однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение, ясно, что однородная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых решений. Остается сослаться на следствие из теоремы Крамера. ■

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* — в противном случае. Таким образом, теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

> *крамеровская однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица вырожденна.*

Приведем пример применения правила Крамера. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ясно, что эта система является крамеровской. Вычислим ее определитель (разложением по третьей строке):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 = -2.$$

Итак, $\Delta \neq 0$, и потому правило Крамера применимо. Вычислим определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3 (Δ_1 и Δ_3 мы раскладываем по третьей строке, а Δ_2 — по второй строке):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 5 = -4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -28 + 30 = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2.$$

Применяя правило Крамера, найдем единственное решение нашей системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

§15. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) решение систем линейных уравнений методом Гаусса или Гаусса–Жордана;

2) вычисление определителей;

3) решение крамеровских систем линейных уравнений по правилу Крамера.

Примеры решения задач этих типов были приведены в §12–14, поэтому здесь мы их приводить не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Привести к лестничной системе следующие системы линейных уравнений и найти их общее решение:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

2. Определить, будут ли совместны следующие системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$

3. Следующие системы линейных уравнений привести к лестничной системе и найти общее решение. Дать геометрическую интерпретацию исходной системы и полученного решения:

а) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2, \\ x + 4y - 5z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x - y + 2z = 5, \\ 2x - y + z = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - y + z = 3, \\ 4x + 3y - z = 3. \end{cases}$

4. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$

5. Используя метод Гаусса, определить взаимное расположение плоскостей, заданных следующими уравнениями:

а) $x + y - z + 1 = 0$, $2x - y + z - 1 = 0$, $-x + y + z - 2 = 0$;

б) $x - y + z - 1 = 0$, $x + 2y + z - 2 = 0$, $x + 8y + z - 6 = 0$.

6. При каком значении параметра t система линейных уравнений имеет единственное решение, бесконечно много решений, не имеет решений:

а) $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x - y + 2z = t, \\ x - tz = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + ty + z = 3, \\ 2x - y + 2z = 6, \\ x + ty = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + tz = 3, \\ tx + 3y - z = 3? \end{cases}$

7*. Исследовать системы линейных уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра t:

а) $\begin{cases} tx + y + z = 1, \\ x + ty + z = 1, \\ x + y + tz = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1+t)x + y + z = t^2 + 3t\ , \\ x + (1+t)y + z = t^3 + 3t^2, \\ x + y + (1+t)z = t^4 + 3t^3. \end{cases}$

8. Вычислить определители путем получения нулей в строке или столбце:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$.

9. Решить уравнения относительно t:

а) $\begin{vmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 2 & 6-t & 4 \\ -2 & -3 & -1-t \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 4-t & -1 & -1 \\ 2 & 1-t & -2 \\ 4 & -4 & -1-t \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 3 & 3 & 3-t \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ -2 & -6-t & 13 \\ -1 & -4 & 8-t \end{vmatrix} = 0$.

10. Вычислить определители путем приведения к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&2&1&1&1\\ 1&1&3&1&1\\ 1&1&1&4&1\\ 1&1&1&1&5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1&2&2&2&2\\ 2&1&2&2&2\\ 2&2&1&2&2\\ 2&2&2&1&2\\ 2&2&2&2&1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 8&1&8&8&8\\ -1&6&1&1&1\\ -1&-1&4&1&1\\ -1&-1&-1&2&1\\ -1&-1&-1&-1&0 \end{vmatrix}$.

11. Обозначим через Δ_n определитель следующей квадратной матрицы порядка n:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0\\ c & a & b & \dots & 0 & 0\\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b\\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}.$$

Доказать, что при $n \geqslant 3$ выполнена следующая *рекуррентная формула*: $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$.

12. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2&1&0&0&0\\ 3&2&1&0&0\\ 0&3&2&1&0\\ 0&0&3&2&1\\ 0&0&0&3&2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3&a&0&0&0\\ b&3&a&0&0\\ 0&b&3&a&0\\ 0&0&b&3&a\\ 0&0&0&b&3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4&1&0&0&0\\ 3&2&1&0&0\\ 0&3&2&1&0\\ 0&0&3&2&1\\ 0&0&0&3&2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2&1&0&0&0\\ 3&2&1&0&0\\ 0&3&2&1&0\\ 0&0&3&2&1\\ 0&0&0&3&4 \end{vmatrix}$.

13*. Вычислить определители (в обоих случаях порядок матрицы равен n):

а) $\begin{vmatrix} 2&1&0&\dots&0&0\\ 1&2&1&\dots&0&0\\ 0&1&2&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&2&1\\ 0&0&0&\dots&1&2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3&2&0&\dots&0&0\\ 1&3&2&\dots&0&0\\ 0&1&3&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&3&2\\ 0&0&0&\dots&1&3 \end{vmatrix}$.

14. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&2&2&2\\ 1&2&0&2&2\\ 1&2&2&0&2\\ 1&2&2&2&0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0&1&1&1&1\\ -1&0&1&1&1\\ -1&-1&0&1&1\\ -1&-1&-1&0&1\\ -1&-1&-1&-1&0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2&1&1&1&1\\ 1&3&1&1&1\\ 1&1&4&1&1\\ 1&1&1&5&1\\ 1&1&1&1&6 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1&2&3&4&5\\ -1&0&3&4&5\\ -1&-2&0&4&5\\ -1&-2&-3&0&5\\ -1&-2&-3&-4&0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2&0&0&13&7\\ 0&0&0&-8&2\\ 7&-3&1&10&-4\\ 0&0&0&3&0\\ 11&1&0&8&16 \end{vmatrix}$; е)* $\begin{vmatrix} a&b&b&b&b\\ b&a&b&b&b\\ b&b&a&b&b\\ b&b&b&a&b\\ b&b&b&b&a \end{vmatrix}$.

15*. Для произвольных действительных чисел t_1, t_2, t_3, t_4 и s_1, s_2, s_3, s_4 вычислить определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка 4, элементы которой заданы следующими равенствами:

а) $a_{ij} = t_i - s_j$; б) $a_{ij} = 1 + t_i s_j$; в) $a_{ij} = (t_i + s_j)^2$.

16*. Вычислить определители (во всех случаях порядок матрицы равен n):

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix};\ \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \ldots & n \\ n & 2 & n & \ldots & n \\ n & n & 3 & \ldots & n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \ldots & n \end{vmatrix};\ \text{в)}\ \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

17*. Вычислить определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, элементы которой заданы следующими равенствами:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в) $a_{ij} = |i - j|$;

г) $a_{ij} = c^{|i-j|}$, где c — действительное число, $c \neq 0$.

18*. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Положим $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что $|B| = |A|$.

19*. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *кососимметрической*, если $a_{ij} = -a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

20*. *Определителем Вандермонда* называется определитель вида

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа. Доказать, что

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

21*. Как изменится определитель, если

а) из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, а из последней строки вычесть прежнюю первую строку;

б) все столбцы матрицы переписать в обратном порядке?

22*. Матрица содержит строку из единиц. Доказать, что ее определитель равен сумме алгебраических дополнений всех элементов матрицы.

23. Решить системы линейных уравнений, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 5y = -1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y + 3z = -1, \\ 2x + 2y - 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6; \end{cases}$

е)* $\begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a \qquad (a+b+c \neq 0); \end{cases}$

ж)* $\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab, \\ (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2). \end{cases}$

24. Доказать, что плоскости, заданные уравнениями $2x - y + z - 2 = 0$, $x - y - 2z = 0$, $2x + 3y - 4z - 1 = 0$, пересекаются в одной точке.

25. Доказать, что системы линейных уравнений имеют единственное решение:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -1. \end{cases}$

26. Будет ли однородная система линейных уравнений иметь ненулевое решение:

а) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y - 2z = 0, \\ x - 5y + 4z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x - y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 3x - z = 0? \end{cases}$

27*. Найти многочлен $f(x)$ третьей степени с действительными коэффициентами, для которого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, а $f(2) = 33$.

3. Ответы

1. а) $\begin{cases} x_1 = -6 + 5c, \\ x_2 = -2{,}5 + 2c, \\ x_3 = 2{,}5 - c, \\ x_4 = c; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 = 3 + c, \\ x_3 = 6 + 2c, \\ x_4 = c; \end{cases}$ в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

2. а) Да; б) нет.

3. а) $\begin{cases} x = 4 - 3c, \\ y = -1 + 2c, \\ z = c; \end{cases}$ три плоскости пересекаются по прямой;

б) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; три плоскости пересекаются по точке;

в) система несовместна; три плоскости не имеют общих точек.

4. а) $\begin{cases} x_1 = 1 - c_1 + c_2, \\ x_2 = 1 + c_1 - c_2, \\ x_3 = 1 + c_1 - c_2, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2; \end{cases}$ б) система несовместна.

5. а) Пересекаются в точке $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; б) все вместе не пересекаются.

6. а) При $t = -1$ не имеет решений, при $t \neq -1$ имеет единственное решение; б) при $t = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечно много решений, при $t \neq -\frac{1}{2}$ имеет единственное решение; в) при $t = 1$ имеет бесконечно много решений, при $t = -4$ решений не имеет, в остальных случаях имеет единственное решение.

7. а) Если $t \neq 1, -2$, то $x = y = z = \frac{1}{t+2}$; если $t = 1$, то $x = 1 - c_1 - c_2$, $y = c_1$, $z = c_2$; если $t = -2$, то система несовместна; б) если $t \neq 0, -3$, то $x = 2 - t^2$, $y = 2t - 1$, $z = t^3 + 2t^2 - t - 1$; если $t = 0$, то $x = -c_1 - c_2$, $y = c_1$, $z = c_2$; если $t = -3$, то $x = y = z = c$.

8. а) 0; б) -4; в) 13; г) a^2b^2.

9. а) $t_1 = 2, t_2 = 3$; б) $t_1 = -2, t_2 = 3$; в) $t_1 = 0, t_2 = 6$; г) $t = 1$.

10. а) 24; б) 9; в) 420.

11. *Указание*: разложить по первой строке сначала $|A|$, а затем один из двух полученных определителей.

12. а) -10; б) $9a^2b^2 - 108ab + 243$; в) -32; г) -32.

13. а) $n + 1$; б) $2^{n+1} - 1$.

Указание: использовать рекуррентную формулу из задачи 11.

14. а) 32; б) 0; в) 394; г) 120; д) 12; е) $(a + 4b)(a - b)^4$.

15. а) 0; б) 0; в) 0.

16. а) $n!$; б) $(-1)^{n-1} \cdot n!$; в) $(2n - 1) \cdot (n - 1)^{n-1}$.

Указания: а) к каждой строке, кроме первой, прибавить первую строку; б) из каждого столбца, кроме последнего, вычесть последний столбец; в) из каждого столбца, кроме последнего, вычесть последний столбец, затем к последней строке прибавить все остальные строки.

17. а) 1; б) $(-1)^{n+1} \cdot n$; в) $(-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot (n - 1)$; г) $(1 - c^2)^{n-1}$.

Указания: а), б) из каждой строки, кроме первой, вычесть предыдущую строку; в) из каждой строки, кроме первой, вычесть предыдущую строку, затем прибавить последний столбец ко всем остальным; г) из каждой строки, кроме первой, вычесть предыдущую строку, умноженную на c.

18. *Указание*: умножить на -1 все строки и столбцы матрицы B с четными номерами и использовать свойство 1 из §13.

19. *Указание*: использовать свойства 1 и 9 из §13.

20. *Указание*: Из каждого столбца, кроме первого, вычесть предыдущий столбец, умноженный на x_1, после чего воспользоваться индукцией по n.

21. а) Определитель обратится в нуль; б) определитель умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, где n — порядок матрицы. в) *Указание*: сложить все строки полученной матрицы.

22. *Указание*: использовать свойства 7 и 8 из §13.

23. а) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; б) $x = 1{,}5$, $y = -0{,}5$; в) $x = 3$, $y = 2$; г) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; д) $x = \dfrac{81}{17}$, $y = -\dfrac{38}{17}$, $z = \dfrac{7}{17}$; е) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$; ж) $x = a + b$, $y = a - b$.

24. *Указание*: проверить, что определитель системы, составленной из данных уравнений, отличен от нуля.

25. Определители основных матриц равны: а) 1; б) 5.

26. а) Нет; б) нет; в) да. **27.** $x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

4. Самостоятельная работа №3

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 11x_5 = 7, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = 3. \end{cases}$

3. Найти решение системы по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4. Исследовать систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ x + (a-1)y + (a+2)z = 5, \\ 2x - (a^2+2)y + (1-a)z = -2a+3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ x + (a-2)y + (a+1)z = 4, \\ 2x - (a^2+4)y + (2a+2)z = a+10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x + (a+1)y + (2a-1)z = z, \\ 2x + (a+2)y + (2a^2+2a+3)z = a-4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ x + (a-2)y + (a+1)z = a+1, \\ 2x + (a-4)y + (a^2+a-6)z = 2a. \end{cases}$

Глава 4

Комплексные числа и нелинейные уравнения

В школьном курсе математики понятие числа постепенно расширяется. Сначала речь идет только о натуральных числах, затем последовательно появляются целые, рациональные и, наконец, действительные числа. В этой главе понятие числа будет еще раз расширено: будут введены так называемые комплексные числа. В главе рассматриваются операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме. Более глубокое изучение комплексных чисел выходит за рамки нашего курса. Кроме того, в главе формулируется основная теорема высшей алгебры и приводятся некоторые сведения из теории многочленов, которые понадобятся нам в дальнейшем для нахождения собственных значений линейных операторов.

§16. Комплексные числа в алгебраической форме

Определение. *Комплексным числом* называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b. Числа (a, b) и (c, d) называются *равными*, если $a = c$ и $b = d$. Действительное число a называется *действительной частью* числа (a, b), а действительное число b — *мнимой частью* числа (a, b). *Суммой* комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется число $(a + c, b + d)$, а их *произведением* — число $(ac - bd, ad + bc)$.

Из определения операций сложения и умножения комплексных чисел с очевидностью вытекает, что

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0) \quad \text{и} \quad (a,0)\cdot(c,0)=(ac,0).$$

Отождествим комплексное число $(a,0)$ с действительным числом a. Из сказанного только что видно, что сумма и произведение чисел a и c не зависят от того, рассматривать ли эти числа как действительные или как комплексные. Это позволяет считать множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ подмножеством множества всех комплексных чисел, которое обозначается через $\mathbb{C}$. А именно

$$\mathbb{R} = \{(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}.$$

Отметим еще, что по определению комплексных чисел

$$a\cdot(c,d)=(a,0)\cdot(c,d)=(ac,ad).$$

Аналогично проверяется, что $(a,b)\cdot c=(ac,bc)$. Иными словами,

> *при умножении действительного числа на комплексное (с любой стороны) действительная и мнимая части комплексного сомножителя умножаются на действительный сомножитель.*

Введем в рассмотрение комплексное число, которое играет особую роль в теории комплексных чисел.

Определение. Комплексное число (0,1) называется *мнимой единицей* и обозначается через i.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1,0)$ и действительное число -1. Таким образом, $i^2=-1$. Заметим, что

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi.$$

Определение. Выражение $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа (a,b).

Именно алгебраическая форма комплексных чисел наиболее употребительна. Заметим, что

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=\\ &=(a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)(c+di) &= (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=\\ &=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

Иными словами,

> *сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с “неизвестным” i, при умножении дополнительно учитывается, что $i^2 = -1$.*

Рассмотрим свойства введенных операций. Если x, y и z — произвольные комплексные числа, то:

1) $x + y = y + x$ (сложение комплексных чисел *коммутативно*);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сложение комплексных чисел *ассоциативно*);

3) *существует, и притом только одно, комплексное число* 0 *такое, что для любого комплексного числа u выполнено равенство* $u + 0 = u$;

4) *для любого комплексного числа v существует, и притом только одно, комплексное число w такое, что* $v + w = 0$;

5) $xy = yx$ (умножение комплексных чисел *коммутативно*);

6) $(xy)z = x(yz)$ (умножение комплексных чисел *ассоциативно*);

7) $x(y+z) = xy+xz$ (умножение комплексных чисел *дистрибутивно относительно сложения*);

8) *существует, и притом только одно, комплексное число e такое, что для любого комплексного числа u выполнено равенство* $ue = u$;

9) *для любого комплексного числа v, отличного от* 0, *существует, и притом только одно, комплексное число w такое, что* $vw = e$.

Свойства 1 и 2 проверяются простым применением определения суммы комплексных чисел, и потому мы опускаем соответствующие выкладки.

Докажем свойство 3. Ясно, что в качестве комплексного нуля можно взять число $0 + 0 \cdot i$. В самом деле, пусть $u = a + bi$. Тогда

$$u + (0 + 0 \cdot i) = (a + bi) + (0 + 0 \cdot i) = (a + 0) + (b + 0) \cdot i = a + bi = u.$$

Единственность нуля устанавливается также достаточно просто. В самом деле, предположим, что наряду с элементом $0 = 0+0 \cdot i$ существует элемент 0_1 такой, что для произвольного комплексного числа u выполнено равенство $u + 0_1 = u$. Взяв в последнем равенстве в качестве u число 0, получаем, что $0 + 0_1 = 0$. С другой стороны, из коммутативности сложения и равенства $u + 0 = u$ следует, что $0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0_1$. Следовательно, $0_1 = 0$. Свойство 3 доказано.

Докажем свойство 4. Пусть $v = a + bi$. Положим $w = -a + (-b)i$. Тогда

$$v + w = (a + bi) + (-a + (-b)i) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0 \cdot i = 0.$$

Итак, число w с требуемым свойством существует. Докажем его единственность. Предположим, что существует еще одно число w_1 такое, что $v + w_1 = 0$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned} (w + v) + w_1 &= w + (v + w_1) = w + 0 = w \quad \text{и} \\ (w + v) + w_1 &= (v + w) + w_1 = 0 + w_1 = w_1 + 0 = w_1. \end{aligned}$$

Следовательно, $w = w_1$. Свойство 4 доказано.

Определение. Число w, существование и единственность которого устанавливается в свойстве 4, называется *противоположным к* v и обозначается через $-v$.

Используя противоположное число, можно определить *разность* комплексных чисел x и y, полагая $x - y = x + (-y)$.

Свойства 5–7 проверяются прямым применением определений. Покажем это на примере свойства 7. Пусть $x = a+bi$, $y = c+di$ и $z = f+gi$. Тогда

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (a + bi)[(c + di) + (f + gi)] = \\ &= (a + bi)[(c + f) + (d + g)i] = \\ &= (a(c + f) - b(d + g)) + (a(d + g) + b(c + f))i = \\ &= (ac + af - bd - bg) + (ad + ag + bc + bf)i. \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} xy + xz &= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(f + gi) = \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(af - bg) + (ag + bf)i] = \\ &= (ac + af - bd - bg) + (ad + ag + bc + bf)i. \end{aligned}$$

Таким образом, $x(y + z) = xy + xz$. Свойство 7 доказано.

Докажем свойство 8. В качестве числа e можно взять число $1 + 0 \cdot i$. В самом деле, пусть $u = a + bi$. Тогда

$$u \cdot (1 + 0 \cdot i) = (a + bi)(1 + 0 \cdot i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi = u.$$

Проверим единственность числа e. Предположим, что наряду с числом $e = 1 + 0 \cdot i$ существует число e_1 такое, что для произвольного комплексного числа u выполнено равенство $ue_1 = u$. Взяв в последнем равенстве в качестве u число e, получаем, что $ee_1 = e$. С другой стороны, из коммутативности умножения и равенства $ue = u$ следует, что $ee_1 = e_1 e = e_1$. Следовательно, $e_1 = e$. Свойство 8 доказано.

Докажем, наконец, свойство 9. Пусть $v = a + bi$ и $v \neq 0$. Положим $w = c + di$, где $c = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ и $d = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$. (Отметим, что $a^2 + b^2 \neq 0$, поскольку в противном случае $a = b = 0$ и $v = 0$ вопреки условию.) Тогда

$$\begin{aligned} vw &= (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\cdot i\right) = \\ &= \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2} - b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}\right) + \left(a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2} + b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}\right)\cdot i = \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\cdot i = 1 + 0\cdot i = e. \end{aligned}$$

Осталось проверить единственность числа w. Предположим, что существует еще одно число w_1 такое, что для любого числа x выполнено равенство $vw_1 = e$. Тогда

$$w = we = w(vw_1) = (wv)w_1 = (vw)w_1 = ew_1 = w_1 e = w_1.$$

Свойство 9 доказано.

Определение. Число w, существование и единственность которого устанавливается в свойстве 9, называется *обратным к* v и обозначается через v^{-1}.

Используя обратный элемент, можно ввести операцию *деления* комплексных чисел, полагая $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$ (при условии, что $y \neq 0$).

Определение. Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается $\overline{x}$.

Укажем некоторые свойства операции комплексного сопряжения. Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) если x — действительное число, то $\overline{x} = x$;

2) $x + \overline{x}$ — действительное число;

3) $x \cdot \overline{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, причем $x \cdot \overline{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

4) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$;

5) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 также очевидны, поскольку если $x = a+bi$, то $x+\overline{x} = (a+bi)+(a-bi) = 2a$, а $x \cdot \overline{x} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$. Свойства 4 и 5 проверяются простыми вычислениями. В самом деле, если $x = a + bi$, а $y = c + di$, то

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{y} &= (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \\
&= \overline{(a + c) + (b + d)i} = \overline{x + y}; \\
\overline{x} \cdot \overline{y} &= (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \\
&= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \overline{xy}.
\end{aligned}$$

Свойство 3 часто используется для того, чтобы найти алгебраическую форму числа вида $\dfrac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Из свойств 4 и 5 вытекает

Следствие. *Если комплексное число z является корнем многочлена $f(x)$ с комплексными коэффициентами, то число $\overline{z}$ также является корнем этого многочлена.*

Доказательство. Пусть $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, а $z + bi$. По условию $f(z) = 0$, т. е. $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$. Используя свойства 1, 4 и 5, имеем

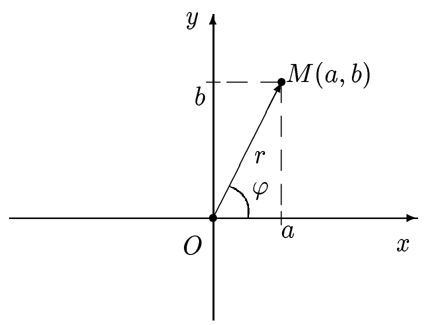
$$\begin{aligned}
f(\overline{z}) &= a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = \\
&= \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = \overline{0} = 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

§17. Тригонометрическая форма комплексного числа

Как известно, действительные числа можно изображать на числовой прямой (при этом каждому числу соответствует ровно одна точка на прямой, а каждой точке — ровно одно число). Аналогичная *геометрическая интерпретация* существует и для комплексных чисел. Но для этого требуется уже не прямая, а плоскость.

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число $a+bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами (a, b). Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости (причем только одна) и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать комплексное число (причем только одно). Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа, а точки оси ординат и только они — числа вида bi, которые называются *чисто мнимыми*. Начало координат соответствует числу 0.



Определение. Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M (см. рисунок). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* числа z. У числа 0 аргумент не определен.

Отметим, что для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса.

Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а аргумент — через $\arg(z)$. На рисунке $|a + bi| = r$, а $\arg(a + bi) = \varphi$.

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, так как если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k. Многозначности аргумента можно было бы избежать, наложив ограничение на φ, например, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Но подобные ограничения часто оказываются неудобными, в чем мы будем иметь возможность убедиться чуть ниже.

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\text{и}\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение. Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* этого числа.

Пусть, например, $u=1+i$, $r=|u|$ и $\varphi=\arg(u)$. Тогда, очевидно, $r=\sqrt{2}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрической формой числа $1+i$ будет $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Приведем еще один пример. Пусть $v=-1+\sqrt{3}i$, $\rho=|v|$ и $\psi=\arg(v)$. Тогда $\rho=2$, $\cos\psi=-\dfrac{1}{2}$ и $\sin\psi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\psi=\dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, тригонометрической формой числа v будет $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Отметим, что тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа. Так, например, тригонометрической формой числа $v=-1+\sqrt{3}i$ будет также $2\left(\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\sin\dfrac{8\pi}{3}\right)$ или $2\left(\cos\dfrac{-4\pi}{3}+i\sin\dfrac{-4\pi}{3}\right)$.

Отметим, что если $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то $r_1=r_2$ и $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k$ для некоторого целого k. Легко видеть, что верно и обратное утверждение.

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. Убедимся в этом.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=\\&=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\end{aligned}$$

Иными словами,

модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов.

Например, если $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, а $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, то $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$. Здесь, кстати, можно пояснить неудобство упоминавшихся выше возможных ограничений на аргумент. Допустим, что мы ограничили аргумент одним из неравенств $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Тогда можно подобрать комплексные числа z_1 и z_2 так, что сумма их аргументов выйдет за границы этих неравенств. Это означает, что отмеченный выше результат об аргументе произведения пришлось бы формулировать более сложным образом.

Рассмотрим деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Вычислим частное от деления числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Следовательно,

модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2.

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме вытекает, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1)$$

для любого натурального n. Более того, несложно проверить, что это равенство выполнено при любом целом n. При $r = 1$ получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при $k = 5$. Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \quad \text{и} \\ \sin 5\varphi &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.\end{aligned}$$

§18. Извлечение корней из комплексных чисел

Определение. Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Например, число $1 - i$ является корнем третьей степени из числа $-2 - 2i$, поскольку

$$(1-i)^3 = (1-i)(1-i)(1-i) = -2i(1-i) = -2-2i.$$

Естественно возникает вопрос: всегда ли корень n-й степени существует и сколько существует таких корней? Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n существует ровно один корень n-й степени из z, равный нулю. В случае $z \neq 0$ ответ на этот вопрос не столь очевиден.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z \neq 0$. Корень степени n из z будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (1) из §17,

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что q — арифметический корень степени n из числа r. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует. Дадим ответ на вопрос о числе корней. Как мы видели, все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1}$$

где k — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} = \dfrac{\varphi + 2\pi \ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\dfrac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда разность $k - \ell$ нацело делится на n. Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (1) взять n последовательных значений k, например, последовательно приравнивать k к $0, 1, \ldots, n-1$. Мы доказали, что существует ровно n различных значений корня степени n из произвольного ненулевого комплексного числа z, которые вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Рассмотрим пример: найти корни четвертой степени из числа $1+i$. Модуль этого числа равен $\sqrt{2}$, аргумент равен $\dfrac{\pi}{4}$. Согласно формуле (2) имеем

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем четыре значения корня:

$$\begin{aligned}
&\text{при } k = 0 \qquad w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),\\
&\text{при } k = 1 \qquad w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right),\\
&\text{при } k = 2 \qquad w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),\\
&\text{при } k = 3 \qquad w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).
\end{aligned}$$

Часто возникает необходимость найти квадратный корень из комплексного числа, не обращаясь к тригонометрической форме. Покажем на примере числа $z = 3 - 4i$, как это можно сделать. Пусть $\sqrt{3-4i} = x + yi$. Тогда $3 - 4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases} \tag{3}$$

Подчеркнем, что нам необходимо найти действительные решения этой системы. Возведем обе части каждого из этих уравнений в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = 25 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = 25.$$

Получаем, что $x^2 + y^2 = 5$ (ясно, что случай $x^2 + y^2 = -5$ невозможен, поскольку x и y — действительные числа). Отсюда и из первого уравнения системы (3) имеем $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, откуда $x = \pm 2$ и $y = \pm 1$. Из второго уравнения системы (3) видно, что $xy < 0$. Поэтому мы получаем два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 1$. Итак, мы нашли два значения $\sqrt{3-4i}$ — это $2 - i$ и $-2 + i$.

§19. Нелинейные уравнения

Одним из мотивов расширения множества действительных чисел до множества комплексных чисел является то, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, которые не имеют действительных корней. Таков, например, многочлен $x^2 + 1$. Между тем, как легко проверяется с помощью формулы (2) из §19, этот многочлен имеет два комплексных корня: i и $-i$. Возникает вопрос: всякий ли многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень? При этом, разумеется, следует исключить из рассмотрения многочлены степени 0 (т.е. константы). Ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение, которое называют *теоремой Гаусса* или *основной теоремой высшей алгебры*.

Теорема. *Произвольный многочлен с комплексными коэффициентами, степень которого больше или равна* 1*, имеет по крайней мере один комплексный корень.* ∎

Известно несколько доказательств этой теоремы, но все они весьма сложные, и мы их рассматривать не будем. Отметим только некоторые следствия из теоремы. Известно, что если число t является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится без остатка на $x - t$, т.е. представим в виде $(x - t)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$. Это утверждение остается справедливым и для комплексных корней многочленов с комплексными коэффициентами. Пусть теперь $f(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами. По теореме Гаусса он имеет некоторый корень t_1. Следовательно, $f(x) = (x - t_1)g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $n - 1$. Если $n - 1 \geqslant 1$, то по теореме Гаусса многочлен $g(x)$ имеет некоторый корень t_2, и потому $f(x) = (x - t_1)g(x) = (x - t_1)(x - t_2)h(x)$ для некоторого многочлена $h(x)$ степени $n - 2$. Продолжая этот процесс, мы в конечном счете представим $f(x)$ в виде произведения n линейных множителей и многочлена степени 0, т.е. константы. Иными словами,

$$f(x) = c(x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n). \tag{1}$$

Правую часть этого равенства можно переписать в виде $(cx - ct_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n)$. Таким образом, справедливо

Следствие 1. *Если $n \geqslant 1$, то произвольный многочлен степени n с комплексными коэффициентами разложим в комплексной области в произведение n линейных множителей.* ∎

Для многочленов с действительными коэффициентами справедливо

Следствие 2. *Произвольный многочлен степени $\geqslant 1$ с действительными коэффициентами разложим в произведение многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых является либо многочленом первой степени, либо квадратным трехчленом с отрицательным дискриминантом.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ с действительными коэффициентами. В силу (1) $f(x) = c(x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_n)$, где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — комплексные числа. Ясно, что c — коэффициент при x^n в многочлене $f(x)$, и потому c — действительное число. Расположив, при необходимости, числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в другом порядке, мы можем считать, что $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — действительные числа, а $t_{m+1}, \ldots, t_n$ — комплексные числа, не являющиеся действительными (для некоторого $0 \leqslant m \leqslant n$). Если $m = n$, то все доказано. Предположим теперь, что $m < n$. Положим $g(x) = (x - t_{m+1}) \cdots (x - t_n)$. Тогда $f(x) = (cx - ct_1)(x - t_2) \cdots (x - t_m)g(x)$. Осталось показать, что многочлен $g(x)$ разложим в произведение квадратных трехчленов с действительными коэффициентами, дискриминанты которых отрицательны. В силу следствия, доказанного в конце §16, числа $x_{m+1}, \ldots, x_n$ распадаются на пары комплексно сопряженных друг к другу чисел.

Поэтому достаточно проверить, что если $z = a + bi$ — комплексное число, не являющееся действительным, то $(x - z)(x - \overline{z})$ — квадратный трехчлен с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. В самом деле,

$$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 - (bi)^2 = \\ = x^2 - 2ax + a^2 - b^2 i^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Очевидно, что получившийся квадратный трехчлен имеет действительные коэффициенты. Его дискриминант равен $4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$. Учитывая, что $b \neq 0$ (поскольку число $a + bi$ не является действительным), получаем, что этот дискриминант отрицателен. Следствие доказано. ∎

Ясно, что если многочлен $f(x)$ имеет вид (1), то $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — его корни. Разумеется, некоторые из корней могут совпадать. Корень t многочлена $f(x)$ называется корнем *кратности* k, если $f(x)$ делится на $(x - t)^k$, но не делится на $(x - t)^{k+1}$. С учетом сказанного выше получаем

Следствие 3. *Многочлен с комплексными коэффициентами степени $n \geqslant 1$ имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.* ∎

Все известные доказательства теоремы Гаусса неконструктивны в том смысле, что они устанавливают лишь существование корня, но не указывают способа его нахождения. Естественно возникает вопрос о том, как найти корень того или иного конкретного многочлена.

Для многочленов первой степени ответ на этот вопрос хорошо известен из школьного курса математики. Для многочленов второй степени ответ дается известной формулой корней квадратного уравнения. Действительно, проанализировав вывод этой формулы для случая действительных чисел, изучаемый в школьном курсе, нетрудно понять, что он подходит и для уравнений с комплексными коэффициентами. Повторять этот вывод здесь мы не будем. Отметим лишь, что в комплексном случае формула несколько упрощается. Если $ax^2 + bx + c = 0$ — уравнение с комплексными коэффициентами и $a \neq 0$, то его корни вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

Знак минус перед корнем из дискриминанта можно не ставить, так как здесь подразумевается комплексный корень, имеющий два значения, а не арифметическое значение действительного корня.

В математике известны формулы для нахождения комплексных корней уравнений третьей и четвертой степени, но они громоздки и неудобны для практического применения, и потому мы не будем их приводить. Отметим также, что доказано, что при $n \geqslant 5$ единой формулы для нахождения корней произвольного уравнения степени n не существует. На практике при решении уравнений степени, большей 2, используются приближенные методы, но их изложение выходит за рамки нашего курса. Тем не менее в дальнейшем (начиная с главы 7) у нас возникнет ряд задач, в которых надо будет решать уравнения, вообще говоря, любой степени. При этом может оказаться полезным следующее утверждение.

Предложение. *Если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и существует целый корень t этого многочлена, то t является делителем свободного члена многочлена $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Тогда $a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n = 0$, откуда

$$(-a_0t^{n-1} - a_1t^{n-2} - \cdots - a_{n-1})t = a_n.$$

Поскольку по условию коэффициент при t в левой части этого равенства — целое число, получаем требуемое утверждение. ∎

В некоторых случаях это предложение позволяет находить все (не только целые, и даже не только действительные) корни многочленов высоких степеней. Продемонстрируем это на следующем примере: найти корни многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 19x^2 - 24x - 36$. В силу предложения если этот многочлен имеет целые корни, то они находятся среди делителей числа -36. Это число имеет 18 делителей: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36 и -36. Будем последовательно вычислять значение $f(x)$ от каждого из этих чисел, пока одно из значений не окажется равным 0 (если этого не произойдет, то $f(x)$ не имеет целых корней и мы не можем решить данную задачу). Имеем

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 - 2 - 19 - 24 - 36 = -80 \neq 0;\\
f(-1) &= 1 + 2 - 19 + 24 - 36 = -28 \neq 0;\\
f(2) &= 16 - 16 - 76 - 48 - 36 = -160 \neq 0;\\
f(-2) &= 16 + 16 - 76 + 48 - 36 = -32 \neq 0;\\
f(3) &= 81 - 54 - 171 - 72 - 36 = -252 \neq 0;\\
f(-3) &= 81 + 54 - 171 + 72 - 36 = 0.
\end{aligned}$$

Итак, мы нашли первый корень многочлена $f(x)$: $x_1 = -3$. Разделив столбиком $f(x)$ на $x+3$, получаем, что $f(x) = (x+3)(x^3-5x^2-4x-12)$.

Осталось найти корни многочлена $g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x - 12$. Число -12 имеет 12 делителей: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 и -12. Ясно, что если $g(x_0) = 0$ для некоторого числа x_0, то и $f(x_0) = 0$. Поскольку, как проверено выше, $f(x) \neq 0$ при $x = 1, -1, 2, -2, 3$, получаем, что и $g(x) \neq 0$ при указанных значениях x. Поэтому вычислять значения многочлена $g(x)$ имеет смысл начиная с $x = -3$. Имеем

$$\begin{array}{lcrcrcrcrcl} g(-3) & = & -27 & - & 45 & + & 12 & - & 12 & = & -72 \neq 0; \\ g(4) & = & 64 & - & 80 & - & 16 & - & 12 & = & -44 \neq 0; \\ g(-4) & = & -64 & - & 80 & + & 16 & - & 12 & = & -140 \neq 0; \\ g(6) & = & 216 & - & 180 & - & 24 & - & 12 & = & 0. \end{array}$$

Мы нашли второй корень многочлена $f(x)$: $x_2 = 6$. Разделив столбиком $g(x)$ на $x - 6$, мы получаем, что $g(x) = (x - 6)(x^2 + x + 2)$. Осталось найти корни многочлена $h(x) = x^2 + x + 2$, т.е. решить уравнение $x^2 + x + 2 = 0$. По формуле (2) имеем $x_{3,4} = \dfrac{-1 + \sqrt{-7}}{2}$ (напомним, что в данном случае $\sqrt{-7}$ — комплексный корень, принимающий два значения). По формуле (2) из §18 находим, что $\sqrt{-7} = \pm\sqrt{7}i$. Таким образом, мы нашли два последних корня многочлена $f(x)$: $x_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$ и $x_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$.

§20. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической;

2) извлечение корней из комплексных чисел;

3) представление $\cos^n \varphi$ и $\sin^n \varphi$ в виде многочлена от $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$;

4) нахождение целых корней многочленов с целыми коэффициентами.

Примеры решения задач всех этих типов имеются в §17–19, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

а) $(1+2i)^6$; б) $(2+i)^7+(2-i)^7$; в) $\dfrac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^2+(2+i)^2}$;

г) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

2. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} (3-i)x+(4+2i)y=2+6i, \\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2+i)x+\ (2-i)y=6, \\ (3+2i)x+(3-2i)y=8. \end{cases}$

3. Решить уравнения:

а) $z^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$; б) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$;

в) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$.

4. Решить уравнения и их левые части разложить на множители с действительными коэффициентами:

а) $z^4+6z^3+9z^2+100=0$; б) $z^4+2z^2-24z+72=0$.

5. Решить уравнения:

а) $z^4-3z^2+4=0$; б) $z^4-30z^2+289=0$.

6. Описать множество точек, изображающих комплексные числа:

а) модуль которых равен 1; б) аргумент которых равен $\dfrac{\pi}{6}$.

7. Описать множество точек, изображающих числа, удовлетворяющие неравенствам:

а) $|z|>2$; б) $|z-i|\leqslant 1$; в) $|z-1-i|<1$.

8*. Решить уравнение $|z|-z=a+bi$ и выяснить условие его разрешимости.

9. Доказать тождество $|x+y|^2+|x-y|^2 = 2(|x|^2+|y|^2)$. Какой геометрический смысл имеет это тождество?

10. Выполнить действия:

а) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; б) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$;

в) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

11*. Доказать, что если z_1, z_2 и z_3 — произвольные комплексные числа, а x_1, x_2 и x_3 — произвольные действительные числа, то определитель

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & x_1 \\ z_2 & \overline{z}_2 & x_2 \\ z_3 & \overline{z}_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

является чисто мнимым числом (не вычисляя определителя).

12. Вычислить:

а) $(1+i)^{25}$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; в) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$;

г) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

13. Извлечь корни:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[3]{2-2i}$; в) $\sqrt[4]{-4}$; г) $\sqrt[6]{1}$; д) $\sqrt[6]{-27}$.

14. Вычислить:

а) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; в) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

15. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

а) $\cos 6x$; б) $\cos 8x$.

16. Выразить $\operatorname{tg} 6x$ через $\operatorname{tg} x$.

17. Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x:

а) $\sin^3 x$; б) $\cos^5 x$; в) $\sin^3 x\cos^5 x$.

18*. Доказать равенства:

а) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

б) $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

19. Найти целые корни многочленов:

а) $x^5-x^4-4x^3-x^2-13x-6$;

б) $2x^5-8x^4+3x^3+8x^2+x+6$.

3. Ответы

1. а) $117+44i$; б) -556; в) $\dfrac{15}{13}+\dfrac{55}{13}i$; г) $-76i$.

2. а) $x=1+i$, $y=i$; б) $x=2+i$, $y=2-i$.

3. а) $x_1=3-i$, $x_2=-1+2i$; б) $x_1=2+i$, $x_2=1-3i$; в) $x_1=1-i$, $x_2=\dfrac{4-2i}{5}$.

4. а) $1\pm 2i$, $-4\pm 2i$; $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$; б) $2\pm i\sqrt{2}$, $-2\pm 2i\sqrt{2}$; $(z^2-4z+6)(z^2+4z+12)$.

5. а) $z=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\pm\dfrac{i}{2}$; б) $z=\pm 4\pm i$.

6. а) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат; б) луч, выходящий из начала координат под углом $\dfrac{\pi}{6}$ к положительному направлению оси Ox.

7. а) Вся плоскость, кроме внутренности круга радиуса 2 с центром в начале координат; б) внутренность и контур круга радиуса 1 с центром в точке (0,1); в) внутренность круга радиуса 1 с центром в точке (1,1).

8. Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда либо $a > 0$, либо $a = b = 0$. В первом случае $z = \dfrac{b^2 - a^2}{2a} - bi$, во втором z — произвольное неотрицательное действительное число.

9. Тождество выражает известную теорему геометрии: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

10. а) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}+\varphi\right)+\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right]$; б) $\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)+\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.

11. *Указание*: использовать свойства 1 и 6 из §13.

12. а) $2^{12}(1+i)$; б) $2^9(1-i\sqrt{3})$; в) $(2-\sqrt{3})^{12}$; г) -64.

13. а) $-i$, $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$; б) $-1+i$, $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$, $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$; в) $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$; г) 1, -1, $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; д) $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

14. а) $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+19}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+19}{72}\pi\right)$, где $k=0,1,2,3,4,5$;
б) $\dfrac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+5}{96}\pi+i\sin\dfrac{24k+5}{96}\pi\right)$, где $k=0,1,2,3,4,5,6,7$;
в) $\dfrac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\dfrac{24k+17}{72}\pi+i\sin\dfrac{24k+17}{72}\pi\right)$, где $k=0,1,2,3,4,5$.

15. а) $\cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x$;
б) $\cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x$.

16. $\dfrac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}$.

17. а) $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; б) $\dfrac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$;
в) $\dfrac{\sin 8x + 2\sin 6x - 2\sin 4x - 6\sin 2x}{128}$.

18. *Указание*: положим $z = \cos\dfrac{x}{2} + i\sin\dfrac{x}{2}$, $S = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ и $T = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$. Тогда $S + iT = z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n} = \dfrac{z^2(1-z^{2n})}{1-z^2}$.

19. а) -2, 3; б) -1, 2, 3.

4. Самостоятельная работа №4

1. Решить уравнение:
а) $z^2 - (3-i)z + \left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{i}{2}\right) = 0$; б) $z^2 - (2+2i)z + \left(2 + \dfrac{7i}{2}\right) = 0$;

в) $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$; г) $z^2 + (3-i)z + \left(1 - \dfrac{3i}{4}\right) = 0$.

2. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}}$; в) $\sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{3}-i}{1+i}}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}}$.

3. Разложить по степеням $\cos x$ и $\sin x$:

а) $\cos 4x$; б) $\sin 6x$; в) $\cos 7x$; г) $\sin 7x$.

4. Найти целые корни многочлена:

а) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 17x - 6$; б) $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12$;

в) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$; г) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

5. Решить уравнение:

а) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$; в) $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$;

г) $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$.

Глава 5

Векторные пространства

В этой главе вводится и изучается центральное понятие линейной алгебры — понятие векторного (линейного) пространства. Мы начнем изложение с рассмотрения одного конкретного (но очень важного) векторного пространства — пространства строк $\mathbb{R}_n$. На его примере будут изучены такие важнейшие для дальнейшего понятия, как линейная зависимость векторов и базис. Затем вводятся абстрактные векторные пространства, доказывается теорема об изоморфизме конечномерных пространств и изучаются подпространства и операции над ними, а также линейные многообразия.

§21. Пространство $\mathbb{R}_n$, линейная зависимость

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\mathbb{R}_n$ множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящих из действительных чисел. Эти последовательности будем называть *векторами* и использовать для них стандартное обозначение $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем *компонентами* вектора $\vec{x}$. На множестве $\mathbb{R}_n$ введем операции сложения векторов и умножения вектора на число. Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $t \in \mathbb{R}$. Положим по определению

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad t\vec{x} = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n).$$

Введенные только что операции сложения векторов и умножения вектора на число, как и в случае векторов в обычном пространстве, часто объединяют термином *линейные операции над векторами*. Множество $\mathbb{R}_n$ с указанными операциями будем называть *векторным* (или *линейным*) *пространством* $\mathbb{R}_n$. Это пространство называют также *пространством строк длины* n. Вектор $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ назовем *нуль-вектором* (или *нулевым вектором*), а вектор $-\vec{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ — вектором, *противоположным к вектору* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим множество векторов обычного трехмерного пространства. Если в нем зафиксирован базис, то, как мы знаем, каждый вектор $\vec{x}$ можно отождествить с однозначно определяемой упорядоченной тройкой чисел (x_1, x_2, x_3), являющихся координатами этого вектора в данном базисе. Это означает, что на совокупность обычных векторов в трехмерном пространстве можно смотреть как на $\mathbb{R}_3$. Аналогично множество всех векторов на плоскости может быть отождествлено с $\mathbb{R}_2$. Таким образом, введенное в предыдущем абзаце понятие вектора можно считать обобщением понятия вектора в обычном трехмерном пространстве или на плоскости.

Из определения операций сложения векторов и умножения вектора на число и свойств сложения и умножения действительных чисел непосредственно вытекают следующие свойства введенных операций над векторами (здесь $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ — произвольные векторы из $\mathbb{R}_n$, а t, s — произвольные действительные числа):

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (сложение векторов *коммутативно*);
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (сложение векторов *ассоциативно*);
3) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;
5) $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
6) $(t + s)\vec{x} = t\vec{x} + s\vec{x}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
7) $t(s\vec{x}) = (ts)\vec{x}$;
8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Легко понять, что свойства 5 и 6 выполнены для любого числа слагаемых.

Как и в обычном пространстве, в пространстве $\mathbb{R}_n$ можно определить *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, полагая $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Изучение пространства $\mathbb{R}_n$ начнем с понятия линейной зависимости.

Определение. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — система векторов из $\mathbb{R}_n$, а $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — числа. Выражение вида

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Линейная комбинация $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k$ называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$, и *нетривиальной* в противном случае. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нуль-вектору. Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ не являются линейно зависимыми, то они называются *линейно независимыми*. Иными словами, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы, если из равенства $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{0}$ вытекает, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Если вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$, то говорят, что $\vec{b}$ *линейно выражается* через векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$.

Выясним, что означает линейная зависимость двух векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в обычном трехмерном пространстве. По определению линейной зависимости существуют числа t_1 и t_2, по крайней мере одно из которых не равно 0, такие, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 = \vec{0}$. Предположим для определенности, что $t_1 \neq 0$. Тогда $\vec{a}_1 = -\dfrac{t_2}{t_1}\vec{a}_2$. Это означает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Легко видеть, что справедливо и обратное, т.е. если два вектора коллинеарны, то они линейно зависимы. В самом деле, пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Если $\vec{a}_1 = \vec{0}$, то $1\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 = \vec{0}$, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация наших векторов, равная нуль-вектору, и потому они линейно зависимы. Пусть теперь $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$. Тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ вытекает, что $\vec{a}_2 = t\vec{a}_1$ для некоторого числа t (см. с. 21). Следовательно, $-t\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 = \vec{0}$, и потому наши векторы вновь линейно зависимы.

Линейная зависимость трех векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ означает, что найдутся числа t_1, t_2, t_3, по крайней мере одно из которых не равно нулю, для которых выполнено равенство $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3 = \vec{0}$. Опять для определенности предположим, что $t_1 \neq 0$. Тогда $\vec{a}_1 = -\dfrac{t_2}{t_1}\vec{a}_2 - \dfrac{t_3}{t_1}\vec{a}_3$. В обычном трехмерном пространстве отсюда следует, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны. Нетрудно понять, что справедливо и обратное, т.е. если три вектора в обычном пространстве компланарны, то они линейно зависимы.

Отметим несколько простых свойств линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

Лемма 1. *Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ имеется нуль-вектор, то эти векторы линейно зависимы.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Следующее очевидное равенство является примером нетривиальной линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, равной нуль-вектору:

$$1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Лемма 1 доказана. ∎

Лемма 2. *Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима. Если к линейно зависимой системе векторов добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы. Выберем произвольное подмножество этой системы векторов. Для простоты обозначений будем считать, что мы взяли сколько-то первых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, $m \leqslant k$ (в противном случае мы всегда можем перенумеровать исходные векторы). Предположим, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно зависимы, т.е. что существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_m$, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, такие, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m = \vec{0}$. Тогда выполнено равенство

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m + 0 \cdot \vec{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Напомним, что среди чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ по крайней мере одно отлично от нуля. Следовательно, указанная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ нетривиальна и равна нуль-вектору. Но это противоречит линейной независимости этих векторов. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_m$ линейно зависима, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m$ этих векторов, равная нуль-вектору. Добавим к исходной системе векторы $\vec{a}_{m+1}, \ldots, \vec{a}_k$. Тогда

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m + 0 \cdot \vec{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_k$$

— нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, равная нуль-вектору. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Лемма 2 доказана. ∎

Лемма 3. *Если векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ *линейно независимы, а векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$ *линейно зависимы, то вектор* $\vec{b}$ *является линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Доказательство. По условию существуют такие числа t_1, t_2, ..., t_k, s, по крайней мере одно из которых не равно нулю, что

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k + s\vec{b} = \vec{0}.$$

Если $s = 0$, то $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{0}$ и по крайней мере одно из чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$ отлично от нуля. Это, однако, противоречит линейной независимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Следовательно, $s \neq 0$, и потому

$$\vec{b} = -\frac{t_1}{s}\vec{a}_1 - \frac{t_2}{s}\vec{a}_2 - \cdots - \frac{t_k}{s}\vec{a}_k.$$

Лемма 3 доказана. ■

Лемма 4. *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией оставшихся.*

Доказательство. Предположим сначала, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ линейно зависимы, т.е. что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{0}$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$, не все из которых равны нулю. Пусть $t_i \neq 0$. Тогда

$$\vec{a}_i = -\frac{t_1}{t_i}\vec{a}_1 - \frac{t_2}{t_i}\vec{a}_2 - \cdots - \frac{t_{i-1}}{t_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i}\vec{a}_{i+1} - \cdots - \frac{t_k}{t_i}\vec{a}_k,$$

т.е. вектор $\vec{a}_i$ является линейной комбинацией оставшихся.

Обратно, если вектор $\vec{a}_i$ является линейной комбинацией оставшихся, т.е. если

$$\vec{a}_i = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\vec{a}_{i-1} + r_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + r_k\vec{a}_k$$

для некоторых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k$, то

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\vec{a}_{i-1} - 1 \cdot \vec{a}_i + r_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + r_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Линейная комбинация, стоящая в левой части этого равенства, нетривиальна, так как коэффициент при $\vec{a}_i$ отличен от нуля. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Лемма 4 доказана. ■

Следующее утверждение является основным результатом данного параграфа.

Теорема. *Если* $k > n$*, то любые* k *векторов пространства* $\mathbb{R}_n$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные k векторов в пространстве $\mathbb{R}_n$ (где $k > n$):

$$\vec{a}_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\vec{a}_2=(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}),\ldots,\vec{a}_k=(a_{k1},a_{k2},\ldots,a_{kn}).$$

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные действительные числа такие, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{0}$. Распишем это векторное равенство по компонентам. Получим систему из n линейных однородных уравнений с k неизвестными $t_1, t_2, \ldots, t_k$:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{k1}t_k = 0, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{k2}t_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{kn}t_k = 0. \end{cases}$$

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. По теореме 3 из §12 она имеет ненулевое решение. Иными словами, существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$, не все равные нулю, такие, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{0}$. Следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. Теорема доказана. ∎

Покажем на примере, как на практике выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой. Рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1 = (1, -2, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-2, 3, 1, 1)$ и $\vec{a}_3 = (1, -3, -2, 1)$. Запишем компоненты этих векторов в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате элементарных преобразований возникла нулевая строка. Из определения элементарных преобразований видно, что это возможно в том и только в том случае, когда одна из строк исходной матрицы является линейной комбинацией остальных. В силу леммы 4 это означает, что система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима.

Сформулируем алгоритм решения рассмотренной задачи в общем виде.

Чтобы выяснить, будет ли данная система векторов линейно зависимой, надо записать компоненты векторов этой системы в матрицу по строкам и с помощью элементарных преобразований привести эту матрицу к ступенчатому виду. Исходная система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда полученная ступенчатая матрица содержит по крайней мере одну нулевую строку.

Пусть A — матрица, состоящая из n столбцов. Тогда каждую ее строку можно рассматривать как вектор из $\mathbb{R}_n$. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5. *Если A — ступенчатая матрица, то набор ее ненулевых векторов-строк линейно независим.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — ступенчатая матрица, содержащая m ненулевых строк. Пусть в первой строке матрицы A первый слева ненулевой элемент стоит в столбце с номером r_1, во второй строке — в столбце с номером r_2, ..., наконец, в m-й строке — в столбце с номером r_m (разумеется, $r_1 < r_2 < \ldots < r_m$). Ненулевые векторы-строки матрицы A обозначим через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$. Пусть

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m = \vec{0}. \tag{1}$$

Компонента с номером r_1 вектора $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m$ равна $t_1 a_{1r_1}$. Поскольку $a_{1r_1} \neq 0$, из (1) вытекает, что $t_1 = 0$, и потому

$$t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m = \vec{0}. \tag{2}$$

Компонента с номером r_2 вектора $t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_m\vec{a}_m$ равна $t_2 a_{2r_2}$. Поскольку $a_{2r_2} \neq 0$, из (2) вытекает, что $t_2 = 0$, и потому

$$t_3\vec{a}_3 + \cdots + t_m\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Аналогичные соображения позволяют последовательно установить, что $t_3 = 0, \ldots, t_m = 0$. Следовательно, набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ линейно независим. Лемма 5 доказана. ∎

В заключение параграфа отметим, что утверждение о существовании решения системы линейных уравнений можно сформулировать в векторных терминах. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Положим $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, \vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Тогда наша система эквивалентна векторному равенству $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ (чтобы убедиться в этом, достаточно расписать это векторное равенство по компонентам). Таким образом, *система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда вектор, составленный из свободных членов системы, является линейной комбинацией векторов, составленных из столбцов основной матрицы системы.*

§22. Базисы в пространстве $\mathbb{R}_n$

1. Понятие базиса

Упорядоченную систему векторов будем называть *набором векторов.*

Определение. *Базисом* пространства $\mathbb{R}_n$ называется произвольный максимальный линейно независимый набор векторов, т.е. такой, что

а) он линейно независим;

б) при добавлении к нему любого вектора получается линейно зависимый набор векторов.

Иногда нам будет удобно пользоваться другим (разумеется, эквивалентным) определением базиса. Будем говорить, что набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ является *системой образующих* пространства $\mathbb{R}_n$, если любой вектор из $\mathbb{R}_n$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Упомянутое альтернативное определение базиса дает следующая

Лемма. *Набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ является базисом пространства $\mathbb{R}_n$ тогда и только тогда, когда он является линейно независимой системой образующих этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — базис пространства $\mathbb{R}_n$. По определению базиса векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы. Пусть $\vec{b}$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}_n$. Из определения базиса вытекает, что набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$ линейно зависим. В силу леммы 3 из §21 вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Следовательно, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — система образующих пространства $\mathbb{R}_n$. Наоборот, пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — линейно независимая система образующих пространства $\mathbb{R}_n$, а $\vec{b}$ — произвольный вектор из этого пространства. По определению системы образующих $\vec{b}$ равен некоторой линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. В силу леммы 4 из §21 отсюда вытекает, что набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$ линейно зависим. Следовательно, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — максимальный линейно независимый набор векторов, т.е. базис. Лемма доказана. ∎

Отметим, что, в силу леммы 1 из §21,

нуль-вектор не может входить в базис.

В §21 мы видели, что в пространстве $\mathbb{R}_3$ набор из трех векторов линейно зависим тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны (см. с. 193). С другой стороны, по теореме из §21 любые четыре вектора в $\mathbb{R}_3$ линейно зависимы. Таким образом, любой набор из трех некомпланарных векторов в $\mathbb{R}_3$ является максимальной линейно независимой системой векторов, т.е. базисом этого пространства. Аналогично проверяется, что произвольный набор из двух неколлинеарных векторов на плоскости является базисом пространства $\mathbb{R}_2$. Таким образом, определение базиса в пространстве $\mathbb{R}_n$ согласуется с данными в §2 определениями базиса плоскости и обычного трехмерного пространства.

Приведем важный для дальнейшего пример базиса пространства $\mathbb{R}_n$. Рассмотрим следующий набор векторов:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ \vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Очевидно, что если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — произвольный набор чисел, то

$$t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + \cdots + t_n\vec{e}_n = (t_1, t_2, \ldots, t_n). \qquad (1)$$

Поэтому если $t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + \cdots + t_n\vec{e}_n = \vec{0}$, то $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$. Следовательно, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы. С другой стороны, из равенства (1) вытекает, что произвольный вектор $\vec{a} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ из $\mathbb{R}_n$ линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Таким образом, эти векторы являются системой образующих пространства $\mathbb{R}_n$. В силу леммы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис в $\mathbb{R}_n$. Этот базис в дальнейшем в ряде случаев будет играть особую роль. Он называется *стандартным* базисом пространства $\mathbb{R}_n$.

Отметим, что базисов в $\mathbb{R}_n$ бесконечно много. В самом деле, как мы только что убедились, по крайней мере один базис в $\mathbb{R}_n$ существует. Пусть теперь $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — произвольный базис в $\mathbb{R}_n$, а $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольный набор ненулевых чисел. Тогда, как легко убедиться, набор векторов $t_1\vec{a}_1, t_2\vec{a}_2, \ldots, t_k\vec{a}_k$ также будет базисом в $\mathbb{R}_n$.

Из §2 мы знаем, что любой базис на плоскости состоит из двух векторов, а в обычном пространстве — из трех векторов. Иначе говоря, если $n = 2, 3$, то в любом базисе пространства $\mathbb{R}_n$ имеется ровно n векторов. Естественно поставить вопрос, сохраняется ли это свойство для произвольного n? Ответ на него оказывается положительным.

Теорема 1. *Любой базис пространства $\mathbb{R}_n$ состоит из n векторов.*

Доказательство. В силу теоремы из §21 базис в $\mathbb{R}_n$ содержит не более n векторов. Остается доказать, что в нем не может быть меньше n векторов. Предположим, что в $\mathbb{R}_n$ имеется базис из k векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, где $k < n$. Пусть $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных. По теореме 2 из §12 она имеет ненулевое решение $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В силу леммы $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Расписав это равенство в компонентах, получим следующие n равенств:

$$\begin{cases} x_1 = t_1a_{11} + t_2a_{21} + \cdots + t_ka_{k1}, \\ x_2 = t_1a_{12} + t_2a_{22} + \cdots + t_ka_{k2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + \cdots + t_ka_{kn}. \end{cases} \tag{3}$$

Умножим первое из уравнений системы (2) на t_1, второе — на t_2, ..., последнее — на t_k и сложим полученные равенства. Используя равенства (3), имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)t_1 \; + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)t_2 \; + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n)t_k \; = \\ &= (t_1a_{11} + t_2a_{21} + \cdots + t_ka_{k1})x_1 \; + \\ &+ (t_1a_{12} + t_2a_{22} + \cdots + t_ka_{k2})x_2 \; + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + \cdots + t_ka_{kn})x_n \; = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Это, однако, противоречит тому, что $\vec{x}$ — ненулевое решение системы (2). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

2. Координаты вектора

В силу теоремы 1 из §2, если на плоскости, т.е. в пространстве $\mathbb{R}_2$, задан произвольный базис, то любой вектор из этой плоскости единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса. Аналогичный факт верен и для обычного пространства, т.е. пространства $\mathbb{R}_3$ (см. теорему 2 в §2). Покажем, что это важнейшее свойство базиса сохраняется и в пространстве $\mathbb{R}_n$ при произвольном n.

Теорема 2. *Если* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *— базис пространства* $\mathbb{R}_n$*, то произвольный вектор* $\vec{b}$ *из* $\mathbb{R}_n$ *единственным образом разложим по этому базису, т.е. представим в виде линейной комбинации векторов* $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$.

Доказательство. В силу леммы вектор $\vec{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Остается проверить, что это представление единственно. В самом деле, возьмем два представления вектора $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$:

$$\vec{b} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n \quad \text{и} \quad \vec{b} = s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \cdots + s_n\vec{a}_n.$$

Вычитая второе равенство из первого, имеем

$$\vec{0} = (t_1 - s_1)\vec{a}_1 + (t_2 - s_2)\vec{a}_2 + \cdots + (t_n - s_n)\vec{a}_n.$$

Поскольку векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство $t_i - s_i = 0$, т.е. $t_i = s_i$. Мы видим, что разложение вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ единственно. Теорема 2 доказана. ∎

Определение. Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — базис пространства $\mathbb{R}_n$, $\vec{b}$ — произвольный вектор из этого пространства, а $\vec{b} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n$ — представление $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (существующее и однозначно определенное в силу теоремы 2), то числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ называются *координатами вектора* $\vec{b}$ *в базисе* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Из свойств операций сложения векторов и умножения вектора на число легко вытекает, что

> *если векторы* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *имеют в одном и том же базисе координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *соответственно, а* t *— произвольное число, то вектор* $\vec{x} + \vec{y}$ *имеет в том же базисе координаты* $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$*, а вектор* $t\vec{x}$ *— координаты* $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$.

В дальнейшем в ряде случаев нам будет полезен следующий факт, немедленно вытекающий из равенства (1):

компоненты произвольного вектора из $\mathbb{R}_n$ являются его координатами в стандартном базисе.

Решим задачу о нахождении координат вектора в данном базисе. Отметим, что в случае пространства $\mathbb{R}_3$ такая задача уже разбиралась выше (см. задачу 3 на с. 47). В общем случае никаких принципиальных отличий не возникает. Пусть $\vec{a}_1 = (1,-2,-1,0)$, $\vec{a}_2 = (-2,3,1,1)$, $\vec{a}_3 = (0,2,1,0)$, $\vec{a}_4 = (1,-3,-2,0)$ и $\vec{b} = (3,-1,0,-1)$. Требуется доказать, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_4$, и найти координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе. Проверим сначала, что система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно независима. Алгоритм решения этой задачи указан на с. 196. Действуя в соответствии с ним, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в полученной ступенчатой матрице нулевых строк нет, система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно независима. В силу теоремы из §21 она является максимальной линейно независимой системой векторов в пространстве $\mathbb{R}_4$, т.е. базисом этого пространства. Обозначим координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе через (x_1, x_2, x_3, x_4). Тогда выполнено равенство $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_4 + x_4\vec{a}_4$. Расписав это векторное равенство по компонентам, мы получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

В силу теоремы 2 эта система имеет единственное решение. Решим ее методом Гаусса–Жордана (на языке матриц). Используя алгоритм, указанный на с. 145, имеем

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 0$. Итак, вектор $\vec{b}$ имеет в базисе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ координаты $(1, -1, 2, 0)$.

Сформулируем алгоритм решения рассмотренной задачи в общем виде.

> *Чтобы найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, надо решить систему линейных уравнений, расширенная матрица которой имеет следующий вид: в ее основной части записаны по столбцам компоненты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$, а в ее последнем столбце — компоненты вектора $\vec{x}$. Эта система имеет единственное решение, которое и совпадает с искомыми координатами.*

Теорема 3. *Произвольный линейно независимый набор векторов пространства $\mathbb{R}_n$ может быть дополнен до базиса этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — линейно независимый набор векторов пространства $\mathbb{R}_n$. В силу теоремы из §21 $k \leqslant n$ и любой линейно независимый набор из n векторов пространства $\mathbb{R}_n$ является максимальным линейно независимым набором векторов, т.е. базисом пространства $\mathbb{R}_n$. Таким образом, если $k = n$, то доказывать нечего. Пусть теперь $k < n$. Надо найти такие векторы $\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n$, чтобы набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ был линейно независим. Набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независим, но, в силу теоремы 1, он не является максимальным линейно независимым набором векторов. Следовательно, существует вектор $\vec{a}_{k+1}$ такой, что набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k+1}$ линейно независим. Если $k + 1 = n$, то все доказано. В противном случае мы можем вновь расширить этот набор векторов за счет какого-то вектора $\vec{a}_{k+2}$ так, чтобы система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k+2}$ осталась линейно независимой. Продолжая этот процесс, мы после $n - k$ шагов получим требуемый линейно независимый набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Теорема 3 доказана. ∎

3. Изменение координат вектора при замене базиса

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_n$ заданы два базиса: базис F, состоящий из векторов $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_n}$, и базис G, состоящий из векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}_n$. Рассмотрим вопрос о том, как связаны между собой координаты вектора $\vec{x}$ в базисах F и G.

Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе F через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а его координаты в базисе G — через $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Будем считать, что координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ известны и требуется найти координаты $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. По этой причине базис F будем называть *старым*, а базис G — *новым*. Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ обозначим координаты вектора $\vec{g}_j$ в базисе F через $(t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{nj})$. Матрица (t_{ij}) (где $1 \leqslant i, j \leqslant n$) называется *матрицей перехода от базиса F к базису G* и обозначается через T_{FG} (или просто T). Иными словами, матрица перехода от старого базиса к новому — это матрица, в которой по столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе. Отметим, что для случая $n = 3$ это понятие уже рассматривалось в §5 (см. с. 43). Матрицу T_{FG} можно считать известной, поскольку ее нахождение сводится к рассмотренной ранее задаче разложения вектора по базису (см. с. 202). Вычислим двумя способами вектор $\vec{x}$. С одной стороны, $\vec{x} = x_1\vec{f_1} + x_2\vec{f_2} + \cdots + x_n\vec{f_n}$. С другой,

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x'_1\vec{g}_1 + x'_2\vec{g}_2 + \cdots + x'_n\vec{g}_n = \\
&= \ x'_1(t_{11}\vec{f_1} + t_{21}\vec{f_2} + \cdots + t_{n1}\vec{f_n}) \ + \\
&+ \ x'_2(t_{12}\vec{f_1} + t_{22}\vec{f_2} + \cdots + t_{n2}\vec{f_n}) \ + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ x'_n(t_{1n}\vec{f_1} + t_{2n}\vec{f_2} + \cdots + t_{nn}\vec{f_n}) \ = \\
&= \ (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n)\vec{f_1} \ + \\
&+ \ (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n)\vec{f_2} \ + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n)\vec{f_n}.
\end{aligned}$$

В силу теоремы 2 имеем

$$\begin{cases}
x_1 = t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n, \\
x_2 = t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n.
\end{cases} \tag{4}$$

Эти равенства называются *формулами изменения координат вектора при замене базиса* или *формулами перехода от одного базиса* *к другому.* Более компактный способ записи этих формул (на языке матриц) будет указан в §30. Формулы перехода от одного базиса к другому выражают координаты вектора $\vec{x}$ в старом базисе через его координаты в новом базисе. На равенства (4) можно смотреть как на систему линейных уравнений с неизвестными $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ (напомним, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы считаем известными). Основная матрица этой системы есть матрица перехода T_{FG}. Можно проверить, что определитель этой матрицы всегда отличен от нуля (см. лемму 2 в §28). По правилу Крамера (см. теорему 1 в §28) система (4) имеет единственное решение. Найдя его, мы найдем координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе.

Приведем пример. Пусть в пространстве $\mathbb{R}_2$ заданы два базиса: базис F, состоящий из векторов $\vec{a}_1 = (-1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-2, 3)$, и базис G, состоящий из векторов $\vec{b}_1 = (-3, 2)$, $\vec{b}_2 = (4, 1)$. Требуется найти формулы перехода от базиса F к базису G. Из (4) видно, что задача сводится к разложению каждого из векторов $\vec{b}_1 = (-3, 2)$ и $\vec{b}_2 = (4, 1)$ по базису F. Пример решения задачи о разложении вектора по базису был приведен выше (см. с. 202). Поэтому сейчас мы не будем приводить подробных комментариев. Нам надо решить две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -t_{11} - 2t_{21} = -3, \\ t_{11} + 3t_{21} = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -t_{12} - 2t_{22} = 4, \\ t_{12} + 3t_{22} = 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $t_{11} = 5$, а $t_{21} = -1$. Теперь решим вторую систему:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Следовательно, $t_{12} = -14$, а $t_{22} = 5$. Таким образом, в данном случае матрица перехода от базиса F к базису G имеет вид

$$T_{FG} = \begin{pmatrix} 5 & -14 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

а формулы (4) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = 5x'_1 - 14x'_2, \\ x_2 = -x'_1 + 5x'_2. \end{cases}$$

Из приведенного примера видно, что в общем случае, для того чтобы найти матрицу перехода от одного базиса к другому, надо решить n систем линейных уравнений, где n — размерность пространства. Более удобный способ нахождения этой матрицы будет указан в §30.

§23. Абстрактные векторные пространства

1. Определение, примеры и простейшие свойства векторных пространств

Рассматривавшееся в §21 и 22 пространство $\mathbb{R}_n$ в действительности является весьма частным (хотя и очень важным) примером понятия векторного (или линейного) пространства, изучаемого в линейной алгебре. Теперь мы переходим к изложению общей теории векторных пространств.

Пусть V — произвольное непустое множество. Будем говорить, что:

— на V *задана операция сложения*, если любым двум элементам $x, y \in V$ поставлен в соответствие некоторый однозначно определяемый элемент $z \in V$, называемый *суммой* x и y и обозначаемый $x + y$;

— на V *задана операция умножения элементов* V *на число*, если любому элементу $x \in V$ и любому числу t поставлен в соответствие некоторый однозначно определяемый элемент $y \in V$, называемый *произведением* x *на* t и обозначаемый tx.

Определение. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* называется произвольное непустое множество V (элементы которого называются *векторами*), на котором заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие следующим условиям (здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — произвольные векторы из V, а t, s — произвольные действительные числа):

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (сложение векторов *коммутативно*);

2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (сложение векторов *ассоциативно*);

3) существует вектор $\mathbf{0} \in V$ (называемый *нулевым вектором*) такой, что $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ для любого вектора $\mathbf{u} \in V$;

4) для любого вектора $\mathbf{u} \in V$ существует вектор $\mathbf{v} \in V$ (который называется *вектором, противоположным к* $\mathbf{u}$, и обозначается $-\mathbf{u}$) такой, что $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$;

5) $t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*);

6) $(t + s)\mathbf{x} = t\mathbf{x} + s\mathbf{x}$ (умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);

7) $t(s\mathbf{x}) = (ts)\mathbf{x}$;

8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Свойства 1–8 называются *аксиомами векторного пространства.* Как и в случае пространства $\mathbb{R}_n$, операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами.*

Всюду в дальнейшем, как и в приведенном определении, элементы векторного пространства будут выделяться жирным шрифтом. Это позволит, в частности, отличать число 0 от нулевого вектора $\mathbf{0}$.

Отметим, что определению векторного пространства удовлетворяет рассматривавшееся в главе 1 множество всех векторов обычного пространства (равно как и множество всех векторов, коллинеарных данной плоскости или данной прямой) с определенными в §2 операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Именно аналогия с векторами в обычном пространстве, кстати, объясняет термин “векторное пространство”. Все аксиомы векторного пространства выполнены и для введенного в §21 множества $\mathbb{R}_n$ с определенными там операциями. Приведем другие примеры векторных пространств.

Пример 1. Пусть n — произвольное натуральное число. Легко проверить, что множество всех многочленов степени не выше n от одной переменной с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число удовлетворяет аксиомам 1–8 и потому образует векторное пространство (*пространство многочленов степени не выше* n), которое мы будем обозначать через $\mathbf{Pol}_n$. А вот множество всех многочленов степени n с обычными операциями векторным пространством не является, так как сумма двух многочленов степени n может быть многочленом степени меньше n.

Пример 2. Векторным пространством является и множество всех многочленов (любой степени) от одной переменной с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число. Мы будем называть его *пространством многочленов* и обозначать через **Pol**.

Пример 3. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной, область определения которых совпадает с множеством всех действительных чисел. Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а t — число, то функции $f + g$ и tf определяются соответственно правилами $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ и $(tf)(x) = t \cdot f(x)$ для произвольного x. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполнены. Это пространство называется *пространством функций.*

Прежде чем приводить следующий пример, введем операции сложения матриц и умножения матрицы на число. Их часто объединяют термином *линейные операции над матрицами.* Если матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ имеют различный порядок, то их сумма не определена. Если же порядки этих матриц совпадают, то их сумма $A+B$ — это матрица того же порядка и $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$. Иными словами, на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $A+B$ стоит сумма элементов, расположенных на тех же местах в матрицах A и B. Далее, если t — число, то произведение t на A, обозначаемое через tA, — это матрица того же порядка, что и A, и $tA = (ta_{ij})$. Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, надо каждый ее элемент умножить на это число. Приведем свойства введенных операций. Через O будем обозначать *нулевую* матрицу, т.е. матрицу, все элементы которой равны 0. Если A, B и C — матрицы, а t и s — числа, то:

1) $A + B = B + A$ (сложение матриц *коммутативно*);
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (сложение матриц *ассоциативно*);
3) $A + O = A$;
4) *для любой матрицы A существует матрица B такая, что $A + B = O$*;
5) $t(A+B) = tA+tB$ (умножение матрицы на число *дистрибутивно относительно сложения матриц*);
6) $(t+s)A = tA + sA$ (умножение матрицы на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*);
7) $t(sA) = (ts)A$;
8) $1 \cdot A = A$;
9) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
10) $(tA)^\top = tA^\top$;
11) *если A — квадратная матрица порядка n, то $|tA| = t^n \cdot |A|$*

(в каждом из свойств 1–5 и 9 предполагается, что все фигурирующие в нем матрицы имеют одинаковый порядок). Свойства 1–10 непосредственно вытекают из определения операций. Отметим только, что если $A = (a_{ij})$, то матрица B, упоминаемая в свойстве 4, называется *противоположной к A*, обозначается через $-A$ и равна $(-a_{ij})$. С помощью матрицы $-A$ можно определить *разность* матриц A и B: если A и B

— матрицы одного и того же порядка, то $A - B = A + (-B)$. Свойство 11 вытекает из свойства 1 определителей (см. §13).

Вернемся к примерам векторных пространств.

Пример 4. Зафиксируем два натуральных числа m и n и рассмотрим множество всех матриц порядка $m \times n$ с введенными выше операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Свойства 1–8 этих операций показывают, что все аксиомы векторного пространства будут выполнены. В частности, роль нулевого вектора играет нулевая матрица порядка $m \times n$. Полученное пространство, которое мы будем обозначать через $\mathbf{Mat}_{m,n}$, называют *пространством матриц порядка* $m \times n$. Его важными частными случаями являются *пространство квадратных матриц порядка* n (возникающее при $m = n$) и уже хорошо знакомое нам пространство $\mathbb{R}_n$ (возникающее при $m = 1$).

Пример 5. Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений. На множестве всех решений этой системы можно естественным образом ввести операции сложения и умножения на число (см. теорему 1 в §11). Очевидно, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Иными словами, общее решение однородной системы линейных уравнений является векторным пространством. Оно называется *пространством решений* этой системы.

Пример 6. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ является векторным пространством относительно обычных операций сложения и умножения чисел (отметим, что его можно рассматривать как пространство $\mathbb{R}_n$ при $n = 1$).

Пример 7. Пусть V — произвольное векторное пространство, а $\mathbf{0}$ — его нулевой вектор. Положим $W = \{\mathbf{0}\}$ и определим на множестве W операции сложения и умножения на число следующим (единственно возможным) способом: $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ и $t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всякого числа t. Для множества W будут выполнены все аксиомы векторного пространства. Векторное пространство W называется *нулевым пространством*.

Список примеров векторных пространств легко продолжить. Так, например, векторными пространствами являются множество всех непрерывных (всех дифференцируемых, всех интегрируемых) функций, множество всех верхнетреугольных или всех диагональных квадратных матриц одного и того же порядка и т.п.

Укажем ряд простых следствий из аксиом векторного пространства.

Прежде всего отметим, что в пространстве существует только один нулевой вектор (аксиома 3 утверждает существование нулевого вектора, но не его единственность). В самом деле, пусть $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ — два нулевых вектора векторного пространства V. Тогда из аксиомы 3 вытекает, что $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$, а из аксиом 3 и 1, — что $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

Докажем теперь, что для всякого вектора $\mathbf{x}$ существует *единственный* противоположный к нему вектор (аксиома 4 утверждает лишь существование такого вектора). В самом деле, пусть векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ противоположны к $\mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y}' = \mathbf{0}$. Тогда, с одной стороны, $\mathbf{y}' + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{0} = \mathbf{y}'$. С другой стороны, используя аксиому 2, имеем

$$\mathbf{y}' + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{y}' + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}') + \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y}.$$

Следовательно, $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$.

Отметим, что рассуждения, подобные проведенным в двух предыдущих абзацах, у нас уже встречались ранее (см. доказательство свойств 3 и 4 сложения комплексных чисел в §16).

Определим *разность* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, полагая $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$. Из аксиом векторного пространства легко выводятся следующие равенства (где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа):

$$t(-\mathbf{x}) = -t\mathbf{x}, \quad t(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = t\mathbf{x} - t\mathbf{y} \quad \text{и} \quad (t - s)\mathbf{x} = t\mathbf{x} - s\mathbf{x}.$$

Укажем еще два свойства операций в векторном пространстве (здесь $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, а t — произвольное число):

$$0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

В самом деле, в силу аксиом 6 и 8 $\mathbf{x} = (1+0)\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}+0\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}+0\cdot\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$. Учитывая доказанную выше единственность нулевого вектора, имеем $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Аналогичным образом второе равенство следует из того, что $t\mathbf{x} = t(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = t\mathbf{x} + t \cdot \mathbf{0}$. Нетрудно проверить, что двумя доказанными только что равенствами исчерпываются случаи, когда произведение числа на вектор равно нулевому вектору. Иными словами,

если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, то либо* $t = 0$*, либо* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

В самом деле, пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда, используя аксиомы 7 и 8 и второе из доказанных выше равенств, имеем

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \left(\frac{1}{t} \cdot t\right)\mathbf{x} = \frac{1}{t} \cdot (t\mathbf{x}) = \frac{1}{t} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2. Изоморфизм конечномерных векторных пространств

Для произвольного векторного пространства V теми же определениями, что и для пространства $\mathbb{R}_n$, вводятся понятия линейной комбинации векторов, линейной зависимости и независимости, базиса (отметим, что мы рассматриваем эти понятия только для конечных наборов векторов). Векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует хотя бы один базис (состоящий из конечного числа векторов).

Как мы видели в §22 (см. с. 199), в пространстве $\mathbb{R}_n$ существует базис, состоящий из n векторов. Следовательно, оно конечномерно.

Пространство всех многочленов степени не выше n также конечномерно, так как оно содержит базис, состоящий из $n+1$ вектора. В самом деле, рассмотрим в этом пространстве следующий набор из $(n+1)$-го вектора (т.е. многочлена): $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Поскольку всякий многочлен степени не выше n имеет вид $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, очевидно, что этот набор векторов является системой образующих пространства $\mathbf{Pol}_n$. Не менее очевидно и то, что этот набор векторов линейно независим, так как если многочлен $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ — нулевой, т.е. $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ для всех x, то, разумеется, $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. В силу леммы из §22 этот набор является базисом пространства $\mathbf{Pol}_n$.

А вот пространство всех многочленов $\mathbf{Pol}$ не является конечномерным. В самом деле, предположим, что это пространство имеет некоторый конечный базис $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Обозначим через s максимальную из степеней этих многочленов. Очевидно, что любая линейная комбинация многочленов $p_1, p_2, \ldots, p_k$ есть многочлен степени не выше s. В частности, многочлен x^{s+1} не представим в виде линейной комбинации этих многочленов. Следовательно, набор $p_1, p_2, \ldots, p_k$ не является системой образующих пространства $\mathbf{Pol}$. В силу леммы из §22 он тем более не является базисом этого пространства.

Пространство функций от одной переменной также не является конечномерным (этот факт мы примем без доказательства).

Пространство $\mathbf{Mat}_{m,n}$ всех матриц порядка $m \times n$ содержит базис из mn векторов (т.е. матриц) и потому является конечномерным. В самом деле, для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через ε_{ij} матрицу, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны 0 (такие матрицы называются *матричными единицами*). Очевидно, что всего имеется mn таких матриц. Далее, если $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица порядка $m \times n$, то, как легко понять,

$$A = a_{11}\varepsilon_{11} + a_{12}\varepsilon_{12} + \cdots + a_{mn}\varepsilon_{mn}$$

(где сумма берется по всем $i = 1, 2, \ldots, m$ и всем $j = 1, 2, \ldots, n$). Отсюда легко вытекает, что набор матриц $\{\varepsilon_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ является линейно независимой системой образующих пространства $\mathbf{Mat}_{m,n}$, т.е. базисом этого пространства. Отметим, что при $m = 1$ (т.е. в пространстве $\mathbf{Mat}_{1,n} = \mathbb{R}_n$) указанный базис есть не что иное, как построенный на с. 199 стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$.

Отметим еще, что если рассматривать множество $\mathbb{R}$ как векторное пространства, то они конечномерно, так как имеет базис, состоящий из одного вектора (т.е. числа) 1.

В нашем курсе мы будем изучать только конечномерные векторные пространства. Наша ближайшая цель — установить, что с точки зрения алгебраических свойств операций сложения векторов и умножения вектора на число всякое конечномерное пространство в некотором смысле слова “неотличимо” от пространства $\mathbb{R}_n$ для некоторого n. Чтобы придать последней фразе строгий математический смысл, введем следующее определение.

Определение. Векторные пространства V и V' называются *изоморфными*, если существует функция $f\colon V \longmapsto V'$ такая, что выполнены следующие условия:

1) f *взаимно однозначно*, т.е. для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, если $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, то $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$;

2) f отображает V *на* V', т.е. для любого $\mathbf{y} \in V'$ существует $\mathbf{x} \in V$ такой, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$;

3) $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$ для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$;

4) $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x} \in V$ и любого числа $t \in \mathbb{R}$.

Функция f при этом называется *изоморфизмом* из V на V'.

Об условиях 3 и 4 говорят соответственно, что функция f *сохраняет сумму векторов и произведение вектора на число.*

Легко проверяется, что если существует изоморфизм из V на V', то существует и изоморфизм из V' на V.

Если f — изоморфизм из V на V', то можно считать, что мы просто “переименовали” всякий вектор $\mathbf{x}$ из V в вектор $f(\mathbf{x})$, после чего векторы складываются и умножаются на числа так же, как и ранее (только под новыми “именами”). Именно в этом смысле можно считать, что по алгебраическим свойствам операций изоморфные пространства неотличимы друг от друга. Нашей целью является доказательство того факта, что если векторное пространство имеет базис из n векторов, то оно изоморфно пространству $\mathbb{R}_n$. Прежде чем приступать к этому доказательству, продемонстрируем его справедливость на одном примере (и заодно приведем пример изоморфных пространств).

В силу сказанного выше пространство $\mathbf{Pol}_2$ имеет базис из трех векторов: 1 и x и x^2. Определим отображение f из $\mathbf{Pol}_2$ в $\mathbb{R}_3$ правилом: если $\mathbf{x} = a_0+a_1x+a_2x^2$, то $f(\mathbf{x}) = (a_0, a_1, a_2)$. Проверим, что отображение f удовлетворяет всем четырем условиям из определения изоморфных пространств. Пусть $\mathbf{x}_1 = a_0+a_1x+a_2x^2$ и $\mathbf{x}_2 = b_0+b_1x+b_2x^2$. Если $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, т.е. $(a_0, a_1, a_2) = (b_0, b_1, b_2)$, то, очевидно, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Таким образом, условие 1 выполнено. Далее, если $\mathbf{y} = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_3$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Это означает, что выполнено условие 2. Далее,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) = \\ &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a_0, a_1, a_2) + (b_0, b_1, b_2) = \\ &= f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Следовательно, выполнено и условие 3. Наконец, если $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_3$, то

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x}) &= f(t(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = f(ta_0 + ta_1x + ta_2x^2) = \\ &= (ta_0, ta_1, ta_2) = t(a_0, a_1, a_2) = tf(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Условие 4 также выполнено. Таким образом, пространства $\mathbf{Pol}_2$ и $\mathbb{R}_3$ изоморфны.

Установим ряд свойств изоморфизма.

Предложение 1. *Если f — изоморфизм из V на V', то $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$, где $\mathbf{0}'$ — нулевой вектор пространства V'.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in V'$. Тогда существует вектор $\mathbf{x} \in V$ такой, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Так как $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, то

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{0}) = \mathbf{y} + f(\mathbf{0}).$$

Следовательно, $f(\mathbf{0})$ — нулевой вектор пространства V'. Предложение 1 доказано. ∎

Предложение 2. *Если f — изоморфизм из V на V', а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ — линейно независимые векторы из V, то $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k)$ — линейно независимые векторы из V'.*

Доказательство. Предположим, что векторы $f(\mathbf{a}_1)$, $f(\mathbf{a}_2)$, $\ldots$, $f(\mathbf{a}_k)$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, такие, что $t_1 f(\mathbf{a}_1) + t_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + t_k f(\mathbf{a}_k) = \mathbf{0}'$, где $\mathbf{0}'$ — нулевой вектор пространства V'. Используя условия 3 и 4 из определения изоморфизма, левую часть этого равенства можно переписать в виде $f(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k)$, а его правая часть по предложению 1 равна $f(\mathbf{0})$. Следовательно, $f(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{0})$. Но тогда, в силу условия 1 из определения изоморфизма, $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Но это противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Предложение 2 доказано. ∎

Предложение 3. *Если f — изоморфизм из V на V', а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$ — базис пространства V, то $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k)$ — базис пространства V'.*

Доказательство. Линейная независимость набора векторов $f(\mathbf{a}_1)$, $f(\mathbf{a}_2)$, $\ldots$, $f(\mathbf{a}_k)$ следует из предложения 2. В силу леммы из §22 достаточно доказать, что набор векторов $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k)$ является системой образующих пространства V'. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{b} \in V'$. По определению изоморфизма существует вектор $\mathbf{a} \in V$ такой, что $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V, существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ такие, что $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$. Используя условия 3 и 4 из определения изоморфизма, имеем

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) = f(t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = t_1 f(\mathbf{a}_1) + t_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + t_k f(\mathbf{a}_k).$$

Итак, произвольный вектор $\mathbf{b} \in V'$ является линейной комбинацией векторов $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k)$, и потому эти векторы являются системой образующих пространства V'. Предложение 3 доказано. ∎

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V. Тогда для V справедлива теорема о разложении по базису (аналог теоремы 2 из §22). Чтобы убедиться в этом, достаточно просмотреть доказательство указанной теоремы — в нем нигде не использовалась специфика пространства $\mathbb{R}_n$. Таким образом, если $\mathbf{b} \in V$, то существует (и притом единственный) набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$. Как и в случае пространства $\mathbb{R}_n$, эти числа называются *координатами вектора* $\mathbf{b}$ *в базисе* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Из аксиом векторного пространства легко вывести, что, как и в пространстве $\mathbb{R}_n$,

> *если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют в одном и том же базисе координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ имеет в том же*

базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$*, а вектор* $t\mathbf{x}$ *— координаты* $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$*.*

Следующая теорема является основным результатом данного параграфа. Она называется *теоремой об изоморфизме конечномерных векторных пространств*.

Теорема 1. *Если векторное пространство* V *содержит базис из* n *векторов, то оно изоморфно пространству* $\mathbb{R}_n$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V, $\mathbf{b} \in V$, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ — координаты вектора $\mathbf{b}$ в базисе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$. Определим функцию f из V в $\mathbb{R}_n$ правилом: если $\mathbf{b} \in V$, то $f(\mathbf{b}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Нетрудно убедиться в том, что выполнены все условия 1–4 из определения изоморфизма. В самом деле, условие 1 вытекает из единственности разложения вектора по базису. Выполнение условия 2 очевидно: если $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}_n$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n$. Наконец, выполнение условий 3 и 4 вытекает из указанных перед формулировкой теоремы свойств координат суммы векторов и произведения вектора на число. Итак, f — изоморфизм из V на $\mathbb{R}_n$. Теорема 1 доказана. ∎

3. Размерность пространства

Из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Если векторное пространство* V *содержит базис из* n *векторов, то все его базисы содержат* n *векторов.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — какой-то базис пространства V. В силу теоремы 1 пространство V изоморфно $\mathbb{R}_n$. Пусть f — какой-то изоморфизм из V на $\mathbb{R}_n$. В силу предложения 3 набор векторов $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_k)$ является базисом пространства $\mathbb{R}_n$. Но в силу теоремы 1 из §22 любой базис в $\mathbb{R}_n$ состоит из n векторов. Следовательно, $k = n$. Следствие 1 доказано. ∎

Следствие 1 говорит о том, что если в пространстве V есть базис, состоящий из конечного числа векторов, то число векторов во всех его базисах одинаково. Это число называется *размерностью* пространства V и обозначается через $\dim V$. Если $\dim V = n$, то говорят, что пространство V *n-мерно*. Отметим, что

нулевое векторное пространство не имеет базиса.

В самом деле, в силу леммы 1 из §21 базис не может содержать нулевого вектора, а в нулевом векторном пространстве никаких других векторов нет. Поэтому приведенное выше определение размерности для нулевого пространства не подходит. Естественно, однако, распространить понятие размерности и на нулевое пространство, полагая по определению, что

размерность нулевого векторного пространства равна 0.

Для конечномерного пространства размерность является важнейшей характеристикой, по существу, полностью определяющей его алгебраические свойства. Это видно из следующего утверждения, легко вытекающего из теоремы 1.

Следствие 2. *Если V_1 и V_2 — конечномерные векторные пространства и $\dim V_1 = \dim V_2$, то пространства V_1 и V_2 изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. В силу теоремы 1 существуют изоморфизм f_1 из V_1 на $\mathbb{R}_n$ и изоморфизм f_2 из $\mathbb{R}_n$ на V_2. Определим отображение f из V_1 в V_2 правилом $f(\mathbf{x}) = f_2(f_1(\mathbf{x}))$ для всякого $\mathbf{x} \in V_1$. Без труда проверяется, что f — изоморфизм из V_1 на V_2. Следствие 2 доказано. ∎

Отметим без доказательства, что для произвольного n-мерного пространства справедливы аналоги теоремы из §21 и теоремы 3 из §22. Иными словами, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть V — n-мерное векторное пространство. Тогда любой набор из k векторов пространства V, где $k > n$, линейно зависим. Любой набор из n линейно независимых векторов пространства V является базисом этого пространства. Любой линейно независимый набор векторов пространства V может быть дополнен до его базиса.* ∎

§24. Подпространства

Определение. Пусть V — векторное пространство. Непустое множество M векторов из V называется *подпространством* в V, если выполнены следующие два условия:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$;

2) если $\mathbf{x} \in M$ и t — число, то $t\mathbf{x} \in M$.

Об условиях 1 и 2 говорят соответственно, что подпространство *замкнуто относительно сложения векторов и относительно умножения вектора на число.*

Приведем примеры подпространств.

Пример 1. Очевидно, что все пространство V является подпространством самого себя.

Пример 2. Множество, состоящее из одного нулевого вектора пространства V, также является подпространством в V.

Пример 3. Ясно, что пространство всех многочленов степени не выше n является подпространством пространства всех многочленов, а последнее — подпространством пространства всех функций от одной переменной из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Пример 4. Пространство всех диагональных квадратных матриц порядка n является подпространством в пространстве всех верхнетреугольных матриц того же порядка, а последнее — подпространством пространства всех квадратных матриц порядка n.

Пример 5. Как отмечалось в примере 5 из §23, общее решение произвольной однородной системы линейных уравнений является векторным пространством. Очевидно, что оно будет подпространством пространства $\mathbb{R}_n$, где n — число неизвестных в нашей системе. (Отметим без доказательства, что верно и обратное: всякое подпространство в $\mathbb{R}_n$ является пространством решений некоторой однородной системы с n неизвестными.)

А вот множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений, как несложно проверить, подпространством не является. Об абстрактном аналоге множества всех решений неоднородной системы линейных уравнений будет идти речь в §26.

Приведем геометрическую иллюстрацию понятия подпространства.

Пример 6. Пусть на плоскости задана система координат. Будем отождествлять прямую на плоскости с множеством направленных отрезков, у которых начало совпадает с началом координат, а конец — с некоторой точкой на прямой. Очевидно, что всякая прямая, проходящая через начало координат, является подпространством. А вот прямая, не проходящая через начало координат, подпространством не является, так как в этом случае сумма двух направленных отрезков, идущих из начала координат в различные точки на прямой, заканчивается не на этой прямой (рис. 1). Все сказанное можно повторить и о прямых в пространстве. Аналогично плоскость является подпространством обычного трехмерногопространства, если она проходит через начало координат, и не является — в противном случае (здесь мы отождествляем плоскость с множеством всех направленных отрезков, у которых начало совпадает с началом координат, а конец — с некоторой точкой на плоскости). Абстрактный аналог прямых и плоскостей, не проходящих через начало координат, будет введен в §26.

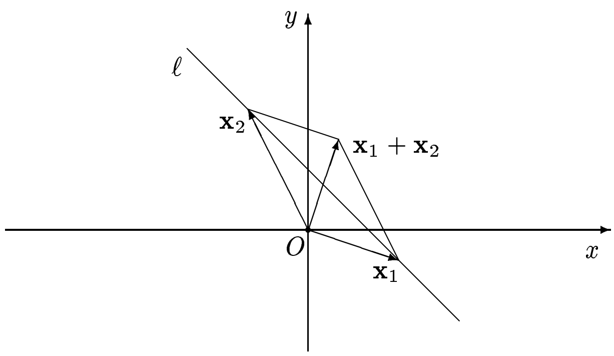


Рис. 1

В завершение списка примеров подпространств приведем важный для дальнейшего пример подпространства произвольного векторного пространства.

Пример 7. Зафиксируем в векторном пространстве V произвольный набор из k векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Рассмотрим множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Оно обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. Иными словами,

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = \{t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \mid t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, что сумма двух линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$ и произведение линейной комбинации этих векторов на число сами являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Это означает, что $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ — подпространство в V. Оно называется *подпространством, порожденным векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ (синонимы: *подпространство, заданное векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, *подпространство, натянутое на набор векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, *линейная оболочка набора векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$). Отметим, что

> $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ — *наименьшее из тех подпространств пространства* V, *которые содержат векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Действительно, если подпространство M пространства V содержит векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, то (по определению подпространства) M содержит всевозможные линейные комбинации этих векторов. Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$.

В дальнейшем у нас будут появляться новые примеры подпространств (см. §34, 36 и 40, а также задачу 13 на с. 235).

Если M — подпространство в V и $\mathbf{x} \in M$, то $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} \in M$. Таким образом,

> *любое подпространство векторного пространства содержит нулевой вектор.*

Подпространство M пространства V само является векторным пространством (в смысле определения из §23) относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, имеющихся в V, но рассматриваемых только применительно к векторам из M. Следовательно, для M можно использовать понятия линейной зависимости (независимости), базиса и размерности. При этом, разумеется, остаются в силе все изложенные в §23 результаты, касающиеся этих понятий. Отметим одно новое свойство.

Лемма. *Если M — подпространство векторного пространства V, то* $\dim M \leqslant \dim V$. *При этом если* $\dim M = \dim V$, *то* $M = V$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из того, что если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы в M, то они останутся линейно независимыми и в V. Докажем второе утверждение. Если $\dim M = \dim V = n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис M, то, в силу теоремы 2 из §23, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ будет и базисом V. Но тогда любой вектор из V, будучи линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, лежит в M, т.е. $V \subseteq M$. Обратное включение выполнено по определению подпространства, и потому $V = M$. Лемма доказана. ∎

Вернемся к подпространству, порожденному данным набором векторов. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ и $M = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. Докажем, что произвольный максимальный линейно независимый набор векторов из множества векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ является базисом в M. Без ограничения общности можно считать, что одним из максимальных линейно независимых наборов векторов из множества $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ является набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ для некоторого $r \leqslant k$ (если это не так, мы всегда можем соответствующим образом перенумеровать векторы). Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ линейно независимы, в силу леммы из §22, следует только проверить, что этот набор является системой образующих для M, т.е. что любой вектор из M является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. В самом деле, любой вектор из M

является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ (по определению M). Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ — максимальный линейно независимый набор векторов, добавление к нему любого вектора $\mathbf{a}_j$ при $r+1 \leqslant j \leqslant k$ нарушает линейную независимость. В силу леммы 3 из §21 каждый из векторов $\mathbf{a}_{r+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Отсюда вытекает, что любой вектор из M является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$.

Из доказанного в предыдущем абзаце вытекает, в частности, что любые два максимальных линейно независимых набора векторов из M содержат одинаковое число векторов. Это число называется *рангом* множества векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Иными словами, ранг (конечного) множества векторов — это размерность подпространства, порожденного этим множеством векторов.

Укажем алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. В силу сказанного выше достаточно найти максимальный линейно независимый набор векторов из множества векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Предположим, что нам известны координаты этих векторов в некотором базисе. Пусть $\dim V = n$. Составим матрицу порядка $k \times n$, записав в нее *по строкам* координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через A'. Векторы-строки матрицы A' — это линейные комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Значит, они лежат в $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. В силу леммы 5 из §21 набор ненулевых векторов-строк матрицы A' линейно независим. Из алгоритма приведения матрицы к ступенчатому виду (см. доказательство теоремы 4 в §12) видно, что если в матрице A' какая-то строка состоит из нулей, то соответствующая ей строка матрицы A является линейной комбинацией ненулевых строк матрицы A'. Следовательно, набор всех ненулевых векторов-строк матрицы A' является максимальным линейно независимым набором векторов из $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$, т.е. базисом этого подпространства. Итак,

> *чтобы найти базис и размерность подпространства, порожденного данным набором векторов, надо записать координаты этих векторов в матрицу по строкам и привести эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы образуют базис нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.*

Приведем пример. Найдем базис подпространства M, порожденного векторами $(-1, 2, 1, 1, 0)$, $(1, 3, 0, -1, 1)$, (0,0,0,1,0) и $(-1, -3, 0, 2, -1)$.

Действуя по указанному выше алгоритму, имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в качестве базиса подпространства M можно взять векторы $(-1, 2, 1, 1, 0)$, (0,5,1,0,1) и (0,0,0,1,0).

В заключение параграфа решим еще одну задачу. В общем виде она формулируется так: выяснить, принадлежит ли данный вектор $\mathbf{x}$ из векторного пространства V его подпространству M, порожденному векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Ясно, что $\mathbf{x} \in M$ тогда и только тогда, когда существуют числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k. \tag{1}$$

Будем считать, что нам известны координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{x}$ в некотором базисе. Если векторное равенство (1) расписать в координатах, мы получим систему линейных уравнений с неизвестными $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Ясно, что $\mathbf{x} \in M$ тогда и только тогда, когда эта система совместна. Расширенная матрица системы (1) будет иметь порядок $n \times (k + 1)$ (где n — размерность пространства) и будет выглядеть следующим образом: в ее первых k столбцах стоят координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{x}$. Учитывая сказанное в §12 (см. с. 142), получаем следующий алгоритм.

> *Запишем матрицу порядка $n \times (k + 1)$, расположив в ее первых k столбцах координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{x}$. Начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны* 0, *а последний элемент отличен от* 0, *то $x \notin M$. В противном случае $x \in M$.*

Пусть, например, $V = \mathbb{R}_5$, $\vec{x} = (1, 0, 3, -1, 2)$, а подпространство M порождено векторами $\vec{a}_1 = (-1, 2, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 3, -1, 0, 1)$ и $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$. Система линейных уравнений, соответствующая равенству

(1), в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} -t_1 + t_2 = 1, \\ 2t_1 + 3t_2 = 0, \\ t_1 - t_2 + t_3 = 3, \\ t_1 + t_3 = -1, \\ t_2 = 2. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу этой системы и начнем приводить ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Последняя строка в последней матрице показывает, что $\vec{x} \notin M$.

§25. Сумма, пересечение и прямая сумма подпространств

1. Сумма и пересечение

Определение. Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. *Суммой подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V, являющихся суммой некоторого вектора из M_1 и некоторого вектора из M_2. *Пересечением подпространств* M_1 и M_2 называется множество всех векторов из V, принадлежащих одновременно как M_1, так и M_2.

Сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 + M_2$, а их пересечение — через $M_1 \cap M_2$. Проверим, что $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ — подпространства в V. Прежде всего отметим, что множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ — непустые. В самом деле, как отмечалось на с. 219, любое подпространство в V содержит нулевой вектор. В частности, $\mathbf{0} \in M_1$ и $\mathbf{0} \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in M_2$. Учитывая, что M_1 и M_2 — подпространства, получаем, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) \in M_1 + M_2$. Далее, если $t \in \mathbb{R}$, то $t\mathbf{x} = t\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2$. Поскольку $t\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $t\mathbf{x}_2 \in M_2$, получаем, что $t\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Следовательно, $M_1 + M_2$ — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Тогда $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — подпространства, имеем $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1$ и $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Наконец, если $t \in \mathbb{R}$, то $t\mathbf{x} \in M_1$ и $t\mathbf{x} \in M_2$, откуда $t\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Следовательно, и $M_1 \cap M_2$ — подпространство в V.

Очевидно, что пространство $M_1 + M_2$ содержит как M_1, так и M_2. В самом деле, если $\mathbf{x} \in M_1$, то $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$. Поскольку $\mathbf{0} \in M_2$, имеем $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Следовательно, $M_1 \subseteq M_1 + M_2$. Аналогично проверяется, что $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Отметим, что

> $M_1 + M_2$ — *наименьшее из тех подпространств данного пространства, которые содержат как* M_1, *так и* M_2.

Действительно, пусть M — подпространство, содержащее как M_1, так и M_2. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ для некоторых векторов $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Таким образом, $M_1 + M_2 \subseteq M$. Далее, очевидно, что $M_1 \cap M_2$ содержится как в M_1, так и в M_2. Легко проверяется, что

> $M_1 \cap M_2$ — *наибольшее из тех подпространств данного пространства, которые содержатся как в* M_1, *так и в* M_2.

Отметим следующие очевидные свойства суммы и пересечения подпространств. Если M_1, M_2 и M_3 — произвольные подпространства одного и того же пространства, то:

1) $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$;

2) $(M_1 + M_2) + M_3 = M_1 + (M_2 + M_3)$;

3) *если* $M_1 \subseteq M_2$, *то* $M_1 + M_2 = M_2$;

4) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$;

5) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$;

6) *если* $M_1 \subseteq M_2$, *то* $M_1 \cap M_2 = M_1$.

Теорема 1. *Пусть* V — *конечномерное векторное пространство, а* M_1 *и* M_2 — *его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств* M_1 *и* M_2 *равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.*

Доказательство. Ясно, что $M_1 \cap M_2$ — подпространство и в M_1, и в M_2. В силу леммы из §24 $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_2$. Положим $\dim(M_1 \cap M_2) = k$, $\dim M_1 = k + \ell$ и $\dim M_2 = k + m$.

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$, и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 — ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис. Для простоты будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; сами рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства $M_1 \cap M_2$. В силу теоремы 2 из §23 этот набор векторов можно дополнить как до базиса пространства M_1, так и до базиса пространства M_2. Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ — базис M_2. Докажем, что набор векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ — базис пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что вектор $\mathbf{x}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, а вектор $\mathbf{x}_2$ — линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$. Следовательно, вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$. Таким образом, набор векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ является системой образующих пространства $M_1 + M_2$. В силу леммы из §22 остается доказать, что этот набор векторов линейно независим. В самом деле, предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1+t_2\mathbf{a}_2+\cdots+t_k\mathbf{a}_k+s_1\mathbf{b}_1+s_2\mathbf{b}_2+\cdots+s_\ell\mathbf{b}_\ell+r_1\mathbf{c}_1+r_2\mathbf{c}_2+\cdots+r_m\mathbf{c}_m=\mathbf{0} \quad (1)$$

для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell, r_1, r_2, \ldots, r_m$. Требуется доказать, что все эти числа равны 0.

Положим $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $\mathbf{y} \in M_1$. С другой стороны, из (1) вытекает, что

$$\mathbf{y} = -t_1\mathbf{a}_1 - t_2\mathbf{a}_2 - \cdots - t_k\mathbf{a}_k - r_1\mathbf{c}_1 - r_2\mathbf{c}_2 - \cdots - r_m\mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $\mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Но тогда вектор $\mathbf{y}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют числа $q_1, q_2, \ldots, q_k$ такие, что

$$\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k.$$

Следовательно,

$$q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \dots + q_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \dots - s_\ell\mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1, они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (2), тривиальна. В частности,

$$s_1 = s_2 = \dots = s_\ell = 0.$$

Следовательно, равенство (1) принимает вид

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \dots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что

$$t_1 = t_2 = \dots = t_k = r_1 = r_2 = \dots = r_m = 0.$$

Итак, все коэффициенты в левой части равенства (1) равны 0, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана. ■

Предположим, что нам известны базисы подпространств M_1 и M_2. Рассмотрим вопрос о том, как найти базис и размерность суммы этих подпространств. Пусть M_1 имеет базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, а M_2 — базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$. Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. В силу выбора векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ имеем

$$\mathbf{x}_1 = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$$

для некоторых чисел $t_1, t_2, \dots, t_k$ и $s_1, s_2, \dots, s_\ell$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell.$$

Это означает, что пространство $M_1 + M_2$ порождается набором векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$. Чтобы найти базис и размерность этого пространства, осталось воспользоваться приведенным на с. 220 алгоритмом нахождения базиса и размерности пространства, порожденного данным набором векторов. Таким образом,

чтобы найти базис и размерность суммы подпространств M_1 и M_2, надо записать в матрицу по строкам координаты базисных векторов обоих пространств и привести эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы и будут базисом суммы M_1 и M_2, а число этих строк — размерностью суммы.

Конкретный пример будет приведен в конце данного параграфа.

Отметим, что, найдя размерность суммы подпространств M_1 и M_2, мы сможем найти и размерность их пересечения, так как, в силу теоремы 1,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2). \qquad (3)$$

Базис пересечения ищется несколько сложнее. Два различных алгоритма решения этой задачи мы укажем в §29 и 40 после того, как будут введены необходимые для этого понятия.

2. Прямая сумма

Определение. Пусть V — векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Говорят, что сумма подпространств M_1 и M_2 является их *прямой суммой*, если $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 \oplus M_2$ или $M_1 \dot{+} M_2$.

Теорема 2. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, а M_1 и M_2 — его подпространства. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$M_1 + M_2$ является прямой суммой подпространств M_1 и M_2;*
2) *$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$;*
3) *любой вектор из $M_1 + M_2$ единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2;*
4) *нулевой вектор пространства V единственным образом представим в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1 и 2 непосредственно вытекает из теоремы 1 и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация $3 \Longrightarrow 4$ очевидна. Остается доказать импликации $1 \Longrightarrow 3$ и $4 \Longrightarrow 1$.

$1 \Longrightarrow 3$. Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. По определению суммы подпространств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Надо лишь доказать, что такое представление вектора $\mathbf{x}$ единственно. Предположим, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{y}_2 \in M_2$. Требуется установить, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$. Учитывая, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, имеем $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2$. Ясно, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in M_1$, а $\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_1 \cap M_2$.

Но $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$.

$4 \Longrightarrow 1$. Предположим, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, т.е. существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Тогда вектор $\mathbf{0}$ может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2: $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$ и $\mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$. Мы получили противоречие с условием 4. Теорема 2 доказана. ■

Отметим еще, что из доказательства теоремы 1 вытекает следующий факт:

> *если $M = M_1 \oplus M_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ — базис M_1, а $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ — базис M_2, то набор векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ будет базисом M.*

Покажем на примере, как можно проверить, является ли все пространство прямой суммой своих подпространств M_1 и M_2. Пусть в пространстве $\mathbb{R}_4$ подпространство M_1 порождено векторами $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$ и $\vec{a}_2 = (2, 1, 2, 3)$, а подпространство M_2 — векторами $\vec{b}_1 = (2, -2, -1, 0)$ и $\vec{b}_2 = (1, 1, 0, -1)$. Требуется доказать, что $\mathbb{R}_4 = M_1 \oplus M_2$. По определению прямой суммы для этого надо проверить, что $\mathbb{R}_4 = M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}$. Прежде всего отметим, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ непропорциональны и потому линейно независимы. Следовательно, они образуют базис M_1. Аналогично векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ образуют базис M_2. Найдем размерность пространства $M_1 + M_2$ по алгоритму, изложенному на с. 225. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

В полученной ступенчатой матрице — четыре ненулевых строки. Это означает, что пространство $M_1 + M_2$ четырехмерно. Поскольку пространство $\mathbb{R}_4$ также четырехмерно, из леммы из §24 вытекает, что $M_1 + M_2 = \mathbb{R}_4$. Далее, в силу (3), имеем

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Следовательно, $M_1 \cap M_2 = \{\vec{0}\}$. Мы доказали, что $\mathbb{R}_4 = M_1 \oplus M_2$.

Обобщим этот пример на общий случай.

> *Пусть известны базисы (а значит, и размерности) подпространств M_1 и M_2 пространства V. Надо выяснить, верно ли, что $V = M_1 \oplus M_2$. Найдем* $\dim(M_1 + M_2)$ *по*

> *алгоритму, указанному на с. 225 и* $\dim(M_1 \cap M_2)$ *по формуле* (3). *Равенство* $V = M_1 \oplus M_2$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$ *и* $\dim(M_1 \cap M_2) = 0$.

Предположим, что пространство V является прямой суммой своих подпространств P и Q и $\mathbf{x} \in V$. В силу п.3 теоремы 2 существуют однозначно определенные векторы $\mathbf{x}_1 \in P$ и $\mathbf{x}_2 \in Q$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Вектор $\mathbf{x}_1$ называется *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* P *параллельно* Q, а вектор $\mathbf{x}_2$ — *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* Q *параллельно* P.

Пусть M_1 и M_2 — те же подпространства, что и в только что решенном примере, а $\vec{x} = (5, 1, -1, 0)$. Найдем проекцию $\vec{x}$ на M_1 параллельно M_2 и проекцию $\vec{x}$ на M_2 параллельно M_1. Поскольку $\mathbb{R}_4 = M_1 \oplus M_2$, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ — базис M_1, а $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — базис M_2, в силу замечания, сделанного после доказательства теоремы 2, получаем, что $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — базис $\mathbb{R}_4$. Разложим $\vec{x}$ по этому базису. Надо найти такие числа t_1, t_2, s_1 и s_2, что $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2$. Аналогичная задача уже была решена в §22 (см. с. 202). Поэтому здесь мы не приводим подробных комментариев. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Итак, наша система имеет единственное решение: $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$. Положим $\vec{x}_1 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (1, 1, 0, 2)$ и $\vec{x}_2 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 = (4, 0, -1, -2)$. Поскольку, очевидно, $\vec{x}_1 \in M_1$, $\vec{x}_2 \in M_2$ и $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, получаем, что $\vec{x}_1$ — проекция $\vec{x}$ на M_1 параллельно M_2, а $\vec{x}_2$ — проекция $\vec{x}$ на M_2 параллельно M_1.

Сформулируем алгоритм решения этой задачи в общем виде.

> *Пусть* $V = M_1 \oplus M_2$. *Требуется найти проекцию вектора* $\mathbf{x}$ *на* M_1 *параллельно* M_2 *и проекцию вектора* $\mathbf{x}$ *на*

M_2 параллельно M_1. Предположим, что нам известны базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства M_1 и базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ подпространства M_2. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_\ell$ пространства V (по алгоритму, указанному на с. 203). Пусть они имеют вид $(t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_\ell)$. Тогда $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_1 параллельно M_2, а $s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \dots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$ — проекция $\mathbf{x}$ на M_2 параллельно M_1.

В заключение параграфа докажем следующее утверждение, которое пригодится нам в §33.

Предложение. *Если V — векторное пространство, а M — его подпространство, то существует такое подпространство M' в V, что $V = M \oplus M'$.*

Доказательство. Очевидно, что если $V = \{\mathbf{0}\}$, то можно взять $M' = V$, а если $M = V$, то можно взять $M' = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому далее можно считать, что $M \ne \{\mathbf{0}\}$ и $M \ne V$. Первое означает, что $\dim M > 0$, а второе (в силу леммы из §24) — что $\dim M < \dim V$. Положим $\dim M = m$ и $\dim V = n$. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ — базис M. В силу теоремы 2 из §23 в V существуют такие векторы $\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \dots, \mathbf{a}_n$, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V. Положим $M' = \langle \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ и докажем, что $V = M \oplus M'$. В самом деле, пусть $\mathbf{x} \in V$. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ пространства V:

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m + t_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + t_{m+2}\mathbf{a}_{m+2} + \dots + t_n\mathbf{a}_n.$$

Пусть

$$\mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_m\mathbf{a}_m, \quad \text{а} \quad \mathbf{z} = t_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + t_{m+2}\mathbf{a}_{m+2} + \dots + t_n\mathbf{a}_n.$$

Ясно, что $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in M$ и $\mathbf{z} \in M'$. Мы доказали тем самым, что $V = M + M'$. Кроме того, очевидно, что $\dim V = \dim M + \dim M'$. В силу теоремы 2, $V = M \oplus M'$. Предложение доказано. ∎

§26. Линейные многообразия

Определение. Пусть V — векторное пространство. *Линейным многообразием* в V называется множество всех векторов из V вида $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, где $\mathbf{x}_0$ — некоторый фиксированный вектор из V, а $\mathbf{y}$ — произвольный вектор из некоторого фиксированного подпространства

M пространства V. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется *вектором сдвига* линейного многообразия, а подпространство M — его *направляющим подпространством.*

Линейное многообразие с вектором сдвига $\mathbf{x}_0$ и направляющим подпространством M обозначается через $\mathbf{x}_0 + M$. Иными словами,

$$\mathbf{x}_0 + M = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in M\}.$$

Приведем примеры линейных многообразий.

Пример 1. Если $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_0 + M = M$. Таким образом, всякое подпространство пространства V является линейным многообразием в V.

Пример 2. Если $M = \{\mathbf{0}\}$, то $\mathbf{x}_0 + M = \{\mathbf{x}_0\}$. Таким образом, всякий вектор из V также является линейным многообразием в V.

Пример 3. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

— совместная система линейных уравнений с n неизвестными. Выберем произвольным образом и зафиксируем некоторое ее решение $\vec{x}_0$. Согласно теореме 2 из §11 общее решение нашей системы совпадает с множеством векторов вида $\vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y}$ пробегает общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как отмечено в примере 5 из §24, множество всех решений последней системы есть подпространство в $\mathbb{R}_n$. Следовательно, множество всех решений системы (1) является линейным многообразием в $\mathbb{R}_n$. Оно называется *линейным многообразием, заданным системой линейных уравнений* (1). Вектором сдвига этого многообразия является произвольное частное решение системы (1), а направляющим подпространством — общее решение системы (2). Отметим без доказательства, что верно и обратное: всякое линейное многообразие в $\mathbb{R}_n$ является множеством всех решений некоторой совместной системы с n неизвестными.

Приведем теперь геометрическую иллюстрацию понятия линейного многообразия.

Пример 4. Пусть ℓ — произвольная прямая (на плоскости или в пространстве). Как и в примере 6 из §24, мы рассматриваем здесь прямую не как множество точек, а как множество направленных отрезков, выходящих из начала координат и заканчивающихся в точках на прямой. Про такие направленные отрезки мы будем говорить, что они "принадлежат прямой". Если ℓ проходит через начало координат, то она является подпространством (см. пример 6 в §24), а значит, и линейным многообразием. Пусть теперь ℓ не проходит через начало координат. Выберем произвольным образом и зафиксируем направленный отрезок $\vec{x}_0$, принадлежащий ℓ. Обозначим через ℓ_1 прямую, параллельную ℓ и проходящую через начало координат. Тогда всякий направленный отрезок $\vec{x}$, принадлежащий ℓ, может быть представлен как сумма направленного отрезка $\vec{x}_0$ и некоторого направленного отрезка $\vec{y}$, принадлежащего ℓ_1 (рис. 2). Обратно, всякий направленный отрезок вида $\vec{x}_0 + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \ell_1$, принадлежит ℓ. Поскольку ℓ_1 — подпространство, получаем, что ℓ — линейное многообразие с вектором сдвига $\vec{x}_0$ и направляющим подпространством ℓ_1. Аналогично можно проверить, что любая плоскость (рассматриваемая как множество направленных отрезков, идущих из начала координат в точки плоскости) является линейным многообразием в $\mathbb{R}_3$.

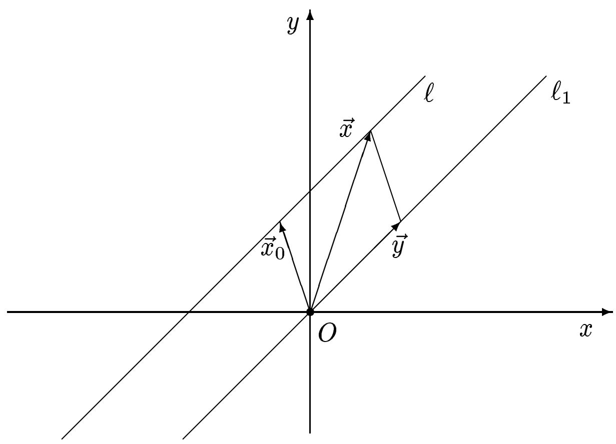


Рис. 2

В примерах 3 и 4 в качестве вектора сдвига можно было взять произвольный вектор, принадлежащий данному линейному многообразию. Легко понять, что то же верно и для многообразий из примеров

1 и 2. Оказывается, что это не случайно: этот факт справедлив для любого линейного многообразия. Мы получим это утверждение как следствие из следующего результата.

Теорема. *Пусть* $P = \mathbf{x}_0 + M$ *и* $Q = \mathbf{y}_0 + N$ *— линейные многообразия в векторном пространстве* V. *Равенство* $P = Q$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $M = N$ *и* $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $P = Q$. Докажем сначала, что $M = N$. Пусть $\mathbf{a} \in M$. Поскольку $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in P$ и $P = Q$, получаем, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \in \mathbf{y}_0 + N$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{b} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{b}$. Далее,

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + N, \tag{3}$$

так как $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{0} \in P$ и $P = Q$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{c} \in N$ такой, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$. Имеем

$$\mathbf{y}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c} + \mathbf{a},$$

откуда $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \in N$. Итак, если $\mathbf{a} \in M$, то $\mathbf{a} \in N$. Следовательно, $M \subseteq N$. Аналогично проверяется, что $N \subseteq M$ и потому $M = N$.

Остается проверить, что $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. В самом деле, из (3) и доказанного только что равенства $M = N$ вытекает, что $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{y}_0 + M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{a}$ для некоторого вектора $\mathbf{a} \in M$ и потому $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{a} \in M$.

Достаточность. Пусть теперь $M = N$ и $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 \in M$. Требуется доказать, что $P = Q$. Пусть $\mathbf{a} \in P$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}$ для некоторого вектора $\mathbf{b} \in M$. По условию $\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$ для некоторого вектора $\mathbf{c} \in M$. Следовательно, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{y}_0 + (\mathbf{c} + \mathbf{b})$. Поскольку $\mathbf{c} + \mathbf{b} \in M$ и $M = N$, имеем $\mathbf{a} \in Q$. Следовательно, $P \subseteq Q$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что $Q \subseteq P$ и потому $P = Q$.

Теорема доказана. ∎

В частности, теорема показывает, что если $\mathbf{x}_0 + M = \mathbf{y}_0 + N$, то $M = N$. Иными словами,

> *направляющее подпространство данного линейного многообразия определено однозначно.*

Это позволяет определить *размерность* линейного многообразия $\mathbf{x}_0 + M$ как размерность подпространства M.

Докажем теперь обещанное выше следствие.

Следствие. *Пусть* $P = \mathbf{x}_0 + M$ *— линейное многообразие в векторном пространстве* V *и* $\mathbf{x}_1 \in P$. *Тогда* $P = \mathbf{x}_1 + M$.

Доказательство. По условию $\mathbf{x}_1 \in P$, т.е. $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{x}_0 + M$. Следовательно, существует вектор $\mathbf{y} \in M$ такой, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Но тогда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y} \in M$. Из доказанной выше теоремы вытекает, что $P = \mathbf{x}_1 + M$. Следствие доказано. ■

Таким образом,

в качестве вектора сдвига данного линейного многообразия можно взять произвольный принадлежащий ему вектор.

§27. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) распознавание линейной зависимости или независимости данной системы векторов;

2) задачи, связанные с разложением вектора по базису: нахождение координат вектора в базисе, формул перехода от одного базиса к другому;

3) нахождение базиса подпространства, порожденного данной системой векторов, базиса суммы подпространств;

4) задачи, связанные с понятием прямой суммы подпространств: выяснение разложимости пространства в прямую сумму данных подпространств, нахождение проекций вектора на подпространство.

Примеры решения задач всех этих типов имеются в §21–25, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Будет ли линейно независимым следующий набор векторов:
а) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 3, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, -6, 9, -5)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 3, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, -1, 3)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 4, 9, 16)$, $\vec{a}_2 = (4, 9, 16, 25)$, $\vec{a}_3 = (9, 16, 25, 36)$?

2. Доказать, что следующий набор векторов линейно зависим, и найти хотя бы один линейно независимый поднабор этого набора, состоящий из трех векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 1, -2, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 5, -10, 8)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 0, 3)$;

б) $\vec{a}_1=(1,1,-2,1)$, $\vec{a}_2=(2,3,0,1)$, $\vec{a}_3=(0,-1,-4,1)$, $\vec{a}_4=(1,1,0,2)$;

в) $\vec{a}_1 = (-6,0,3,-9)$, $\vec{a}_2 = (4,0,-2,6)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1,-2)$, $\vec{a}_4 = (-3,1,1,1)$.

3. Найти все значения параметра t, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

а) $\vec{a}_1=(3,2,5)$, $\vec{a}_2=(2,4,7)$, $\vec{a}_3=(5,6,t)$, $\vec{b}=(1,3,5)$;

б) $\vec{a}_1=(2,3,5)$, $\vec{a}_2=(3,7,8)$, $\vec{a}_3=(1,-6,1)$, $\vec{b}=(7,-2,t)$;

в) $\vec{a}_1=(1,t,0)$, $\vec{a}_2=(2,1,1)$, $\vec{a}_3=(t,0,1)$, $\vec{b}=(-1,1,-2)$;

г) $\vec{a}_1=(t,2,-1)$, $\vec{a}_2=(2,t,0)$, $\vec{a}_3=(3,3,-1)$, $\vec{b}=(7,7,-2)$.

4. Показать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис в $\mathbb{R}_3$, и найти координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе:

а) $\vec{a}_1=(2,1,1)$, $\vec{a}_2=(-1,1,0)$, $\vec{a}_3=(2,-2,3)$, $\vec{b}=(-1,-4,5)$;

б) $\vec{a}_1=(2,1,0)$, $\vec{a}_2=(1,-1,1)$, $\vec{a}_3=(3,1,0)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$;

в) $\vec{a}_1=(2,-3,1)$, $\vec{a}_2=(3,-1,5)$, $\vec{a}_3=(1,-4,3)$, $\vec{b}=(3,5,6)$.

5. Показать, что векторы $\vec{a}_1 = (-1,2,0,0)$, $\vec{a}_2 = (1,-2,4,0)$, $\vec{a}_3 = (2,-3,3,0)$, $\vec{a}_4 = (0,0,0,1)$ образуют базис в $\mathbb{R}_4$, и найти координаты вектора $\vec{b}=(1,0,-3,2)$ в этом базисе.

6. Будет ли подпространством пространства $\mathbb{R}_4$ множество векторов $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $x_1+x_2+x_3+x_4=0$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

в) $x_1+x_2+x_3+x_4=1$; г) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$?

7. Найти базис подпространства, порожденного следующим набором векторов:

а) $\vec{a}_1=(1,1,1,-1)$, $\vec{a}_2=(1,0,1,2)$, $\vec{a}_3=(1,-1,1,5)$;

б) $\vec{a}_1=(1,1,1,-1)$, $\vec{a}_2=(1,0,1,2)$, $\vec{a}_3=(1,2,3,4)$;

в) $\vec{a}_1=(1,2,-1,2)$, $\vec{a}_2=(2,0,1,3)$, $\vec{a}_3=(4,4,-1,7)$, $\vec{a}_4=(3,-2,3,3)$.

8. При каких значениях параметра t подпространство, порожденное векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, имеет наибольшую размерность, при каких — наименьшую:

а) $\vec{a}_1=(1,-1,1,3)$, $\vec{a}_2=(-t,t,2,6)$, $\vec{a}_3=(3,-3,1-t,9)$;

б) $\vec{a}_1=(1,t,1,-1)$, $\vec{a}_2=(2,4,t,-2)$, $\vec{a}_3=(1,t,t-1,1-t)$;

в) $\vec{a}_1=(1,t,-1,2)$, $\vec{a}_2=(2,-1,t,5)$, $\vec{a}_3=(1,10,-6,1)$?

9. Выяснить, принадлежит ли вектор $\vec{x}$ подпространству, порожденному векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$:

а) $\vec{a}_1 = (8,3,4,3)$, $\vec{a}_2 = (6,3,2,5)$, $\vec{a}_3 = (5,2,3,1)$, $\vec{a}_4 = (2,1,1,1)$, $\vec{x}=(21,10,8,15)$;

б) $\vec{a}_1 = (2,4,4,2)$, $\vec{a}_2 = (3,2,10,5)$, $\vec{a}_3 = (1,1,3,1)$, $\vec{a}_4 = (2,1,7,1)$, $\vec{x}=(4,5,2,1)$?

10. Найти базис суммы подпространств M_1 и M_2 пространства $\mathbb{R}_4$, где M_1 порождается векторами $\vec{a}_1 = (2,1,3,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,0,1)$ и $\vec{a}_3 = (1,5,6,-1)$, а M_2 — векторами $\vec{b}_1 = (-1,0,2,3)$ и $\vec{b}_2 = (0,-1,2,4)$.

11. Будет ли пространство $\mathbb{R}_4$ прямой суммой подпространства M_1, порожденного векторами $\vec{a}_1 = (2,0,1,5)$, $\vec{a}_2 = (-1,1,3,1)$, и подпространства M_2, порожденного векторами $\vec{b}_1 = (1,1,4,6)$, $\vec{b}_2 = (3,-1,-2,4)$?

12. Доказать, что пространство $\mathbb{R}_4$ является прямой суммой подпространства M_1, порожденного векторами $\vec{a}_1 = (0,1,2,1)$, $\vec{a}_2 = (-2,1,1,0)$, и подпространства M_2, порожденного векторами $\vec{b}_1 = (4,2,1,2)$, $\vec{b}_2 = (2,3,3,3)$. Найти проекцию вектора $\vec{x} = (4,8,11,9)$ на M_2 параллельно M_1.

13*. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *симметрической* (*кососимметрической*), если $a_{ij} = a_{ji}$ (соответственно $a_{ij} = -a_{ji}$) для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Множество всех симметрических (кососимметрических) матриц порядка n обозначим через M_1 (соответственно через M_2).

а) Доказать, что M_1 и M_2 — подпространства пространства $\mathbf{Mat}_{n,n}$, и найти размерности этих подпространств.

б) Доказать, что $\mathbf{Mat}_{n,n} = M_1 \oplus M_2$.

в) Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой задаются правилом: $a_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$ и $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Найти проекцию A_1 матрицы A на M_1 параллельно M_2 и проекцию A_2 матрицы A на M_2 параллельно M_1.

14*. Доказать, что если размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то одно из подпространств содержится в другом.

3. Ответы

1. а) Нет; б) да; в) да. **2.** а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$; б) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$; в) $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.

3. а) $t \neq 12$; б) $t = -5$; в) $t \neq 2$; г) $t \neq 1$.

4. а) $\left(-\frac{5}{3}, \frac{19}{9}, \frac{20}{9}\right)$; б) $(1,2,-1)$; в) $(-1,2,-1)$. **5.** $\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}, 2, 2\right)$.

6. а) Да; б) да; в) нет; г) да. **7.** а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2$; б) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; в) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$.

8. а) Наибольшая при $t \neq -2$, наименьшая при $t = -2$; б) наибольшая при $t \neq 2$, наименьшая при $t = 2$; в) наибольшая при $t \neq 3$, наименьшая при $t = 3$.

9. а) Да; б) нет. **10.** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1$. **11.** Нет. **12.** (2,7,8,7).

13. а) $\dim M_1 = \dfrac{n^2+n}{2}$, $\dim M_2 = \dfrac{n^2-n}{2}$. б) *Указание*: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, где $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$, а $c_{ij} = \dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}$. в) $A_1 = (b_{ij})$, где $b_{ii} = 1$ и $b_{ij} = 0{,}5$ при

$i \neq j$; $A_2 = (c_{ij})$, где $c_{ii} = 0$, $c_{ij} = 0{,}5$ при $i < j$ и $c_{ij} = -0{,}5$ при $i > j$.

14. *Указание*: использовать тот факт, что если одно из подпространств содержится в другом, то размерность первого подпространства не превосходит размерности второго.

4. Самостоятельная работа №5

1. При каких значениях параметра t вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

а) $\vec{a}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{a}_2 = (2,t,0)$, $\vec{a}_3 = (3,0,t)$, $\vec{b} = (-4,-5,2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,2,3)$, $\vec{a}_2 = (t,0,1)$, $\vec{a}_3 = (3,t,4)$, $\vec{b} = (4,4,7)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,-2,t)$, $\vec{a}_2 = (t,0,1)$, $\vec{a}_3 = (-1,-2,1)$, $\vec{b} = (4,-4,5)$;

г) $\vec{a}_1 = (2,t,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,3,t)$, $\vec{a}_3 = (1,3,1)$, $\vec{b} = (1,9,2)$?

2. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_2$ и найти формулы перехода от первого базиса ко второму:

а) $\vec{a}_1 = (1,-1)$, $\vec{a}_2 = (2,3)$, $\vec{b}_1 = (3,2)$, $\vec{b}_2 = (0,5)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,2)$, $\vec{a}_2 = (-3,0)$, $\vec{b}_1 = (-2,2)$, $\vec{b}_2 = (-1,4)$;

в) $\vec{a}_1 = (4,-3)$, $\vec{a}_2 = (2,1)$, $\vec{b}_1 = (6,-2)$, $\vec{b}_2 = (0,-5)$;

г) $\vec{a}_1 = (1,1)$, $\vec{a}_2 = (2,-3)$, $\vec{b}_1 = (3,-2)$, $\vec{b}_2 = (4,-1)$.

3. Образуют ли многочлены f_1, f_2, f_3 базис пространства $\mathbf{Pol}_2$:

а) $f_1 = x^2 - x + 1$, $f_2 = 2x^2 + 3$, $f_3 = x^2 + 2x + 1$;

б) $f_1 = x^2 + 2x + 1$, $f_2 = x + 1$, $f_3 = x^2 - x + 1$;

в) $f_1 = x^2 - 3x - 1$, $f_2 = x^2 + 2x - 3$, $f_3 = x^2 - 8x + 1$;

г) $f_1 = 2x^2 + 5x - 1$, $f_2 = x + 2$, $f_3 = x^2 - x + 3$?

4. Найти базис и размерность подпространства, порожденного набором векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1,2,-1,2)$, $\vec{a}_2 = (2,0,1,3)$, $\vec{a}_3 = (4,4,-1,7)$, $\vec{a}_4 = (3,-2,3,4)$;

б) $\vec{a}_1 = (4,0,-1,-2)$, $\vec{a}_2 = (1,1,3,2)$, $\vec{a}_3 = (0,2,5,5)$, $\vec{a}_4 = (-5,3,8,10)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,-1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (3,4,1,-1)$, $\vec{a}_3 = (0,7,-5,-1)$, $\vec{a}_4 = (4,3,3,-1)$;

г) $\vec{a}_1 = (1,0,-1,1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,3,4)$, $\vec{a}_3 = (4,1,1,6)$, $\vec{a}_4 = (-1,-2,-9,-5)$.

5. При каких значениях параметра t подпространство, порожденное векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, имеет наибольшую размерность, при каких — наименьшую:

а) $\vec{a}_1 = (1,-1,t,2)$, $\vec{a}_2 = (2,-2,6,1+t)$, $\vec{a}_3 = (3,-t,9,6)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,-1,1,3)$, $\vec{a}_2 = (-t,t,2,6)$, $\vec{a}_3 = (3,-3,1-t,9)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,t,1,-1)$, $\vec{a}_2 = (2,4,t,-2)$, $\vec{a}_3 = (3,3t,3,-3)$;

г) $\vec{a}_1 = (1,t,2,-1)$, $\vec{a}_2 = (t,4,4,-2)$, $\vec{a}_3 = (3,6,3t,-3)$?

Глава 6

Матрицы

Матрицы неоднократно возникали и использовались в предыдущих главах. Теперь мы приступаем к их систематическому изучению. Полученные при этом результаты, равно как и результаты предыдущей главы, мы применим для более глубокого изучения систем линейных уравнений.

В начале главы вводится понятие ранга матрицы и доказывается теорема о ранге. Далее доказывается критерий совместности систем линейных уравнений. Затем рассматривается важное для дальнейшего понятие фундаментального набора решений однородной системы линейных уравнений и указывается алгоритм нахождения этого набора. Далее изучается операция умножения матриц. Рассматриваются матричные уравнения вида $AX = B$ и указывается алгоритм нахождения матрицы перехода от одного базиса к другому с помощью элементарных преобразований. После этого изучается операция обращения матрицы. Доказывается критерий обратимости матрицы и приводится алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

§28. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ее строки можно рассматривать как векторы пространства $\mathbb{R}_n$:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= (a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}),\\
\vec{a}_2 &= (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{a}_m &= (a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn}).
\end{aligned}$$

Аналогично столбцы матрицы A можно рассматривать как векторы пространства $\mathbb{R}_m$:

$$\begin{aligned}
\vec{a}^1 &= (a_{11},\ a_{21},\ \ldots,\ a_{m1}),\\
\vec{a}^2 &= (a_{12},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{m2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{a}^n &= (a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{mn}).
\end{aligned}$$

Определение. Ранг набора векторов-строк $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ называется *рангом матрицы A по строкам*, а ранг набора ее векторов-столбцов $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^n$ — *рангом матрицы A по столбцам. Рангом матрицы A по минорам* называется наибольший из порядков ненулевых миноров этой матрицы.

Целью данного параграфа является доказательство того, что для произвольной матрицы все три ее ранга совпадают. Докажем сначала равенство рангов по строкам и по столбцам.

Теорема 1. *Пусть A — произвольная матрица. Ранг A по строкам равен рангу A по столбцам.*

Доказательство. Обозначим ранг A по строкам через r, а ранг A по столбцам — через s. Предположим, что $r < s$. Базис пространства, порожденного векторами-строками матрицы A, состоит из r векторов, а базис пространства, порожденного ее векторами-столбцами, — из s векторов. Для упрощения обозначений предположим, что базис первого пространства образуют векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$, а базис второго — векторы $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^s$ (если это не так, мы можем соответствующим образом переставить в A строки и/или столбцы — ясно, что ранги по строкам и по столбцам при этом не изменятся). Обозначим через m число строк матрицы A. Рассмотрим векторы $\vec{a}'_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1s})$, $\vec{a}'_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2s})$, $\ldots$, $\vec{a}'_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{ms})$ (т.е. укороченные до первых s компонент векторы-строки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$). Используя первые r укороченных векторов, составим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s = 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s = 0.
\end{cases} \tag{1}$$

Эта система имеет ненулевое решение, поскольку $r < s$ (см. теорему 3 в §12). Обозначим это решение через $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$.

Из того, что векторы $\vec{a}_{r+1}, \ldots, \vec{a}_m$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$, вытекает, что и укороченные векторы $\vec{a}'_{r+1}, \ldots, \vec{a}'_m$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \ldots, \vec{a}'_r$. Это означает, что каждое из уравнений системы

$$\begin{cases} a_{r+1\,1}x_1 \;+\; a_{r+1\,2}x_2 \;+\cdots+\; a_{r+1\,s}x_s \;=\; 0, \\ a_{r+2\,1}x_1 \;+\; a_{r+2\,2}x_2 \;+\cdots+\; a_{r+2\,s}x_s \;=\; 0, \\ \dotfill \\ \quad a_{m1}x_1 \;+\quad a_{m2}x_2 \;+\cdots+\quad a_{ms}x_s \;=\; 0 \end{cases} \tag{2}$$

является следствием системы (1). Следовательно, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$ — решение системы (2).

Из сказанного вытекает, что $x_1^0\vec{a}^1 + x_2^0\vec{a}^2 + \cdots + x_s^0\vec{a}^s = \vec{0}$. Поскольку хотя бы одно из чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0$ отлично от нуля, набор векторов $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^s$ линейно зависим. Но это невозможно, так как указанные векторы образуют базис пространства, порожденного векторами-столбцами матрицы A.

Итак, случай $r < s$ невозможен. Ясно, что ранг матрицы $A^\top$ по строкам равен рангу A по столбцам, т.е. s, а ранг $A^\top$ по столбцам равен рангу A по строкам, т.е. r. Как показано выше, у любой матрицы (в том числе у $A^\top$) ее ранг по строкам не может быть меньше ее ранга по столбцам. Таким образом, случай $s < r$ также невозможен. Следовательно, $r = s$. Теорема 1 доказана. ∎

Следующее утверждение часто оказывается полезным.

Лемма 1. *Если минор M матрицы A, являющийся определителем матрицы, расположенной в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, отличен от нуля, то набор векторов-строк $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \ldots, \vec{a}_{i_k}$ и набор векторов-столбцов $\vec{a}^{j_1}$, $\vec{a}^{j_2}$, $\ldots$, $\vec{a}^{j_k}$ линейно независимы.*

Доказательство. Для простоты обозначений будем считать, что матрица B, определителем которой является минор M, расположена в первых k строках и первых k столбцах матрицы A. Это не ограничивает общности, так как при необходимости всегда можно соответствующим образом переставить строки и столбцы матрицы A. Предположим, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно зависимы. В силу леммы 4 из §21 один из них, скажем последний, является линейной комбинацией остальных, т.е. $\vec{a}_k = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_{k-1}\vec{a}_{k-1}$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$. Строки матрицы B представляют собой укороченные строки матрицы A. Следовательно, последнее равенство выполнено и для строк матрицы B. Умножим ее первую строку на $-t_1$, вторую на $-t_2$, ..., $(k-1)$-ю на $-t_{k-1}$ и полученные произведения прибавим к k-й строке. В силу свойства 6 из §13 определитель полученной матрицы равен минору M. С другой стороны, эта матрица будет содержать нулевую строку. Мы получили противоречие с тем, что $M \neq 0$. Следовательно, векторы-строки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независимы. Линейная независимость векторов-столбцов $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \ldots, \vec{a}^k$ вытекает теперь из свойства 9 из §13. Лемма 1 доказана. ∎

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение, известное как *теорема о ранге матрицы*.

Теорема 2. *Пусть A — произвольная матрица. Ранги A по строкам, по столбцам и по минорам совпадают.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать совпадение рангов по строкам и по минорам. Как и в доказательстве теоремы 1, ранг A по строкам обозначим через r и предположим, что базис пространства, порожденного векторами-строками, образуют векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$. Из леммы 1 следует, что любой минор матрицы A порядка, большего r, равен нулю. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти в A ненулевой минор порядка r.

Обозначим через C матрицу, в столбцах которой записаны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_r$:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{r2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Так как векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ линейно независимы, из равенства $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_r\vec{a}_r = \vec{0}$ следует, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$. Другими словами, система

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{r1}t_r = 0, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{r2}t_r = 0, \\ \dotfill \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{rn}t_r = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Матрицей этой системы является матрица C.

Приведем систему к лестничному виду. Предположим для простоты, что при этом столбцы не переставлялись. Так как исходная система имеет только нулевое решение, то число уравнений в лестничной системе будет равно r. На языке матриц это означает, что матрица C элементарными преобразованиями приводится к верхнетреугольной матрице D, диагональные элементы которой отличны от 0. В частности, $|D| \neq 0$ (см. свойство 11 в §13).

Рассмотрим те r строк матрицы C, которые при элементарных преобразованиях переходят в строки матрицы D. Для определенности будем считать, что это первые r строк. Тогда минор

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{r2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1r} & a_{2r} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Действительно, из свойств определителей и способа приведения матрицы к лестничному виду вытекает, что определитель матрицы D получается из M умножением на ненулевое число. Если бы минор M равнялся нулю, то и определитель $|D|$ тоже равнялся бы нулю, но это не так. Теорема 2 доказана. ∎

Теорема 2 позволяет определить *ранг* матрицы A как число, равное любому из трех ее вышеопределенных рангов. Ранг матрицы A будем обозначать через $r(A)$. Из доказательства теоремы 2 вытекает алгоритм нахождения ранга матрицы:

> *чтобы найти ранг матрицы A, надо привести ее к ступенчатому виду; число ненулевых строк в полученной матрице равно $r(A)$.*

Отметим, что если матрица имеет ненулевой минор порядка r, а все ее миноры порядка $r+1$ равны 0, то ее ранг равен r. В самом деле, любой минор порядка, большего $r+1$, путем нескольких последовательных разложений по строкам можно записать как линейную комбинацию миноров порядка $r+1$, и потому все миноры порядка, большего $r+1$, в данной матрице равны 0. Это наблюдение упрощает нахождение ранга матрицы на практике.

С помощью понятия ранга матрицы легко доказать следующее утверждение, которое уже упоминалось в §22 и пригодится нам в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть F и G — базисы в векторном пространстве V. Тогда $|T_{FG}| \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим порядок матрицы T_{FG} через n. Из определения этой матрицы, доказательства теоремы об изоморфизме конечномерных векторных пространств (теорема 1 в §23) и предложения 3 в §23 вытекает, что векторы-столбцы матрицы T_{FG} образуют базис пространства $\mathbb{R}_4$. В частности, они линейно независимы. Следовательно, $r(T_{FG}) = n$. Поскольку единственным минором порядка n матрицы T_{FG} является ее определитель, получаем, что $|T_{FG}| \neq 0$. Лемма 2 доказана. ∎

Понятие ранга матрицы можно использовать при рассмотрении систем линейных уравнений. В частности, с его помощью можно сформулировать *критерий совместности системы линейных уравнений*, известный как *теорема Кронекера–Капелли.*

Теорема 3. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую систему линейных уравнений. Пусть A — ее основная матрица, а B — ее расширенная матрица. Как отмечено в конце §21, совместность нашей системы эквивалентна тому, что вектор-столбец ее свободных членов является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A. Последнее означает, что пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы B. В частности, совпадают размерности этих пространств. Но размерность пространства, порожденного векторами-столбцами некоторой матрицы, есть не что иное, как ранг этой матрицы по столбцам. Следовательно, ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. Теорема 3 доказана. ∎

§29. Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

В этом параграфе будет указано еще одно применение понятия ранга матрицы к исследованию систем линейных уравнений.

Как отмечалось в примере 5 из §24, множество всех решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными образует подпространство в $\mathbb{R}_n$. Базис этого подпространства называется *фундаментальным набором решений* данной однородной системы. Отметим, что если однородная система имеет единственное решение, то пространство ее решений — нулевое. Поскольку нулевое пространство базиса не имеет, *для однородных систем, имеющих единственное решение, фундаментального набора решений не существует.*

В силу определения базиса любое частное решение однородной системы представимо, и притом единственным образом, как линейная комбинация векторов из фундаментального набора решений. Таким образом, найдя фундаментальный набор решений, мы, по существу, найдем общее решение однородной системы. Следующая теорема говорит о том, сколько векторов содержится в фундаментальном наборе решений, а в ее доказательстве содержится способ построения этих векторов.

Теорема. *Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений равна $n - r$, где n — число неизвестных, а r — ранг основной матрицы системы.*

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим ее основную матрицу через A. Так как r — ранг матрицы A, то существует ее минор M порядка r, отличный от нуля. Будем для определенности считать, что матрица, определителем которой является минор M, расположена в левом верхнем углу матрицы A, т.е. состоит из ее первых r строк и первых r столбцов.

В силу леммы 1 из §28 первые r строк матрицы A линейно независимы. Поскольку ранг матрицы A по строкам равен r, эти строки образуют базис пространства, порожденного векторами-строками матрицы A. Следовательно, строки с номерами $r+1, r+2, \dots, m$ являются линейными комбинациями строк с номерами $1, 2, \dots, r$. Это означает, что последние $m - r$ уравнений системы (1) являются следствиями ее первых r уравнений, т.е. система (1) эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Произвольным образом придадим неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ значения $x^0_{r+1}, x^0_{r+2}, \dots, x^0_n$ соответственно. Полученную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=-a_{1\,r+1}x^0_{r+1}-a_{1\,r+2}x^0_{r+2}-\dots-a_{1n}x^0_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=-a_{2\,r+1}x^0_{r+1}-a_{2\,r+2}x^0_{r+2}-\dots-a_{2n}x^0_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=-a_{r\,r+1}x^0_{r+1}-a_{r\,r+2}x^0_{r+2}-\dots-a_{rn}x^0_n. \end{cases} \quad (3)$$

Мы получили крамеровскую систему с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_r$. Определитель этой системы равен минору M, который отличен от нуля. По правилу Крамера (см. теорему 1 в §14) система (3) имеет единственное решение $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_r)$. Ясно, что $(x^0_1,\ x^0_2,\ \dots,\ x^0_r,\ x^0_{r+1},\ \dots,\ x^0_n)$ — решение системы (2), а значит, и системы (1).

Итак, неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ могут принимать произвольные значения, и по каждому набору значений этих неизвестных единственным образом находятся значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ таким образом, что полученный набор значений всех неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ является решением системы (1). Неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, $\dots$, x_n называются *свободными*, а неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ — *связанными* или *основными*.

Придадим свободным неизвестным следующие значения:

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = \dots = x_n = 0.$$

Система (3) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \dots + \ a_{1r}x_r \ = \ -a_{1\,r+1}, \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 \ + \dots + \ a_{2r}x_r \ = \ -a_{2\,r+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 \ + \ a_{r2}x_2 \ + \dots + \ a_{rr}x_r \ = \ -a_{r\,r+1}. \end{cases}$$

По правилу Крамера эта система имеет единственное решение. Обозначим его через $(f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r})$. Расширив этот вектор значениями свободных неизвестных, получим вектор $\vec{f_1} = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$, который является решением системы (2). Далее, придадим свободным неизвестным значения

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \quad x_{r+3} = \dots = x_n = 0.$$

На этот раз система (3) примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \dots + \ a_{1r}x_r \ = \ -a_{1\,r+2}, \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 \ + \dots + \ a_{2r}x_r \ = \ -a_{2\,r+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 \ + \ a_{r2}x_2 \ + \dots + \ a_{rr}x_r \ = \ -a_{r\,r+2}. \end{cases}$$

Эта система также имеет единственное решение, которое мы обозначим через $(f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2r})$. Расширив его, получим решение $\vec{f_2} = (f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2r}, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ системы (2). Продолжим этот процесс, каждый раз приравнивая одну из свободных неизвестных к 1, а все остальные — к 0. В конце концов мы получим $n-r$ решений системы (2):

$$\begin{array}{lllllll}
\vec{f_1} & = (f_{11}, & f_{12}, & \ldots, & f_{1r}, & 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\
\vec{f_2} & = (f_{21}, & f_{22}, & \ldots, & f_{2r}, & 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
\vec{f}_{n-r} & = (f_{n-r\,1}, & f_{n-r\,2}, & \ldots, & f_{n-r\,r}, & 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1).
\end{array}$$

Докажем, что эти векторы образуют базис пространства решений системы (2). Рассмотрим матрицу, в которой по строкам записаны компоненты этих векторов:

$$B = \begin{pmatrix}
f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1r} & 1\ 0\ 0\ \ldots\ 0 \\
f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2r} & 0\ 1\ 0\ \ldots\ 0 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
f_{n-r\,1} & f_{n-r\,2} & \ldots & f_{n-r\,r} & 0\ 0\ 0\ \ldots\ 1
\end{pmatrix}.$$

Минор этой матрицы, соответствующий ее последним $n-r$ столбцам и всем $n-r$ строкам, равен 1. В силу леммы 1 из §28 векторы-строки матрицы B, т.е. векторы $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f}_{n-r}$, линейно независимы.

В силу леммы из §22 осталось показать, что эти векторы являются системой образующих пространства решений системы (2), т.е. что любое решение этой системы является линейной комбинацией векторов $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f}_{n-r}$. Пусть $\vec{x}^0 = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — произвольное решение системы (2). Рассмотрим вектор

$$\vec{y}^0 = \vec{x}^0 - t_{r+1}\vec{f_1} - t_{r+2}\vec{f_2} - \cdots - t_n\vec{f}_{n-r}.$$

Обозначим его компоненты через $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Из построения векторов $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f}_{n-r}$ вытекает, что $s_{r+1} = s_{r+2} = \cdots = s_n = 0$. Далее, в силу теоремы 1 из §11, вектор $\vec{y}^0$ является решением системы (2). Подставив его компоненты в (2), получим равенства

$$\begin{cases}
a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1r}s_r = 0, \\
a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2r}s_r = 0, \\
\dotfill \\
a_{r1}s_1 + a_{r2}s_2 + \cdots + a_{rr}s_r = 0.
\end{cases}$$

Мы видим, что $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = 0. \end{cases}$$

Но это крамеровская система с отличным от нуля определителем (см. первый абзац доказательства). По теореме 2 из §14 она не имеет ненулевых решений. Следовательно, $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ — нулевое решение этой системы, т.е. $s_1 = s_2 = \cdots = s_r = 0$. Мы доказали, что $\vec{y}^0 = \vec{0}$. Это означает, что

$$\vec{x}^0 = t_{r+1}\vec{f}_1 + t_{r+2}\vec{f}_2 + \cdots + t_n\vec{f}_{n-r}.$$

Итак, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_{n-r}$ — базис пространства решений системы (2). Поскольку система (2) эквивалентна исходной системе (1), получаем, что пространство решений системы (1) имеет базис из $n - r$ векторов. Следовательно, размерность этого пространства равна $n - r$. Теорема доказана. ■

Отметим, что свободным неизвестным совсем не обязательно присваивать значения именно так, как это сделано в доказательстве теоремы (где всегда одно из свободных неизвестных приравнивалось к 1, а остальные — к 0). Достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

> *квадратная матрица, в которой по строкам записаны значения свободных неизвестных в векторах фундаментального набора решений, невырожденна.*

В самом деле, из доказательства теоремы вытекает, что при таком выборе свободных неизвестных мы получим $n - r$ линейно независимых векторов из пространства решений исходной системы. Поскольку, в силу теоремы, размерность пространства решений равна $n - r$, остается сослаться на теорему 2 из §23. Заметим, что при том выборе значений свободных неизвестных, который указан в доказательстве теоремы, указанная выше матрица является единичной, а ее определитель равен 1.

Прежде чем приводить пример нахождения фундаментального набора решений, укажем обещанный в §25 алгоритм нахождения базиса пересечения подпространств. Пусть M_1 и M_2 — подпространства векторного пространства V, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ образуют базис подпространства M_1, а векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ — базис подпространства M_2.

Предположим, что $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Тогда найдутся числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и $s_1, s_2, \ldots, s_m$ такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m\mathbf{b}_m.$$

Следовательно,

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \cdots - s_m\mathbf{b}_m = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Если расписать это векторное равенство в координатах, мы получим однородную систему n линейных уравнений (где n — размерность пространства) с $r + s$ неизвестными $t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_m$. Основная матрица этой системы будет иметь порядок $n \times (k + m)$ и будет выглядеть следующим образом: в ее первых k столбцах стоят координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, а в последних m столбцах — координаты векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, *взятые с обратным знаком.* Если $(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0, s_1^0, s_2^0, \ldots, s_m^0)$ — частное решение системы (4), то выполнено равенство

$$t_1^0\mathbf{a}_1 + t_2^0\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k^0\mathbf{a}_k = s_1^0\mathbf{b}_1 + s_2^0\mathbf{b}_2 + \cdots + s_m^0\mathbf{b}_m \tag{5}$$

и вектор, стоящий в каждой из частей этого равенства, лежит в $M_1 \cap M_2$. При этом векторам из фундаментального набора решений системы (4) соответствуют векторы из базиса $M_1 \cap M_2$. Таким образом, алгоритм нахождения базиса $M_1 \cap M_2$ имеет следующий вид.

> *Найдем фундаментальный набор решений системы* (4). *Если окажется, что его не существует, т.е. что система* (4) *имеет единственное решение* (*см. примечание на с.* 242), *то* $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. *В противном случае для каждого вектора из фундаментального набора решений вычислим вектор, стоящий в левой* (*или, что даст тот же результат, в правой*) *части равенства* (5). *Полученные векторы и образуют базис* $M_1 \cap M_2$.

Приведем пример. Пусть M_1 — подпространство в $\mathbb{R}_4$, порожденное векторами $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$ и $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$, а M_2 — подпространство в $\mathbb{R}_4$, порожденное векторами $\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$ и $\vec{b}_3 = (1, 0, 2, 0)$. Используя алгоритм, указанный на с. 220, легко проверить, что $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ — базис M_1, а $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — базис M_2. Система (4) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} t_1 \phantom{{}+t_2+t_3} - s_1 - s_2 - s_3 = 0, \\ t_1 + t_2 \phantom{{}+t_3} - s_1 = 0, \\ \phantom{t_1+{}} t_2 + t_3 - s_1 - s_2 - 2s_3 = 0, \\ \phantom{t_1+t_2+{}} t_3 - s_1 + s_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Выпишем основную матрицу этой системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&-1\\ 1&1&0&-1&0&0\\ 0&1&1&-1&-1&-2\\ 0&0&1&-1&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&-1&-1&-2\\ 0&0&1&-1&1&0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&-1&-2&-3\\ 0&0&1&-1&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&-1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&-1&-2&-3\\ 0&0&0&0&3&3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&-1&-1&-1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&-2&-1&-3\\ 0&0&0&3&0&3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что уже на предпоследнем шаге мы получили ступенчатую матрицу. Но система линейных уравнений, соответствующая этой матрице, не является лестничной. Чтобы получить матрицу лестничной системы, мы на последнем шаге переставили четвертый и пятый столбцы. Поэтому теперь в четвертом столбце стоят коэффициенты при s_2, а в пятом — коэффициенты при s_1. Выпишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} t_1 - s_2 - s_1 - s_3 = 0,\\ \quad t_2 + s_2 + s_3 = 0,\\ \quad\quad t_3 - 2s_2 - s_1 - 3s_3 = 0,\\ \quad\quad\quad 3s_2 + 3s_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальный набор решений этой системы. Ясно, что она имеет две свободные неизвестные — s_1 и s_3. Положим сначала $s_1 = 1$ и $s_3 = 0$. Из четвертого уравнения имеем $s_2 = 0$, из третьего — $t_3 = 1$, из второго — $t_2 = 0$, из первого — $t_1 = 1$. Положим теперь $s_1 = 0$ и $s_3 = 1$. Тогда из уравнений нашей системы последовательно вытекает, что $s_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_2 = 0$, $t_1 = 0$.

Итак, фундаментальный набор решений системы (6) состоит из векторов (1,0,1,1,0,0) и $(0,0,1,0,-1,1)$. Каждому из этих векторов соответствует вектор из $M_1 \cap M_2$. Вектору (1,0,1,1,0,0) соответствует вектор $1{\cdot}\vec{a}_1+0{\cdot}\vec{a}_2+1{\cdot}\vec{a}_3 = 1{\cdot}\vec{b}_1+0{\cdot}\vec{b}_2+0{\cdot}\vec{b}_3 = (1,1,1,1)$, а вектору $(0,0,1,0,-1,1)$ — вектор $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 = 0 \cdot \vec{b}_1 + (-1) \cdot \vec{b}_2 + 1 \cdot \vec{b}_3 = (0,0,1,1)$. Следовательно, в качестве базиса пространства $M_1 \cap M_2$ можно взять набор векторов (1,1,1,1), (0,0,1,1).

Другой способ нахождения базиса пересечения подпространств будет указан в конце §40.

Фундаментальный набор решений однородной системы приходится искать и при решении неоднородных систем. В самом деле, теорема 2 из §11 и определение фундаментального набора решений показывают, что если система линейных уравнений имеет более одного частного решения, то ее общее решение может быть записано в виде

$$\vec{f_0} + c_1\vec{f_1} + c_2\vec{f_2} + \cdots + c_k\vec{f_k},$$

где $\vec{f_0}$ — частное решение этой системы, $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_k}$ — фундаментальный набор решений соответствующей ей однородной системы, а c_1, c_2, …, c_k — произвольные действительные числа. Выражения указанного вида называют *векторной записью* общего решения системы линейных уравнений.

Продемонстрируем, как найти векторную запись общего решения, на примере первой из систем, рассмотренных в §12. Исходная система имеет вид

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

Записав ее расширенную матрицу и приведя ее к ступенчатому виду, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right)$$

(см. с. 143). Свободными неизвестными являются x_4 и x_5. Найдем сначала одно частное решение нашей системы. Для этого надо *произвольным* образом зафиксировать значения свободных неизвестных. Пусть, например, $x_4 = -1$, $x_5 = 2$. Из третьего уравнения ($5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = -8$) имеем $x_3 = 0$, из второго ($2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$) — $x_2 = 3$, из первого ($x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$) — $x_1 = 1$. Найдем теперь фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы. Поскольку свободных неизвестных две, этот набор состоит из двух векторов. В последующих вычислениях следует помнить, что здесь мы решаем *однородную* систему. Поэтому элементы последнего столбца расширенной матрицы системы — свободные члены системы — следует заменять нулями. Найдем первый вектор из фундаментального набора решений. Положим $x_4 = 5$, $x_5 = 0$ (мы приравняли x_4 к 5, а не к 1 для того, чтобы значения остальных неизвестных получились целыми числами). Из третьего уравнения ($5x_3 - 6x_4 - 7x_5 = 0$) находим, что $x_3 = 6$, из второго ($2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$) — что $x_2 = -2$, из первого ($x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$) — что $x_1 = -2$. Найдем второй вектор из фундаментального набора решений. Положим $x_4 = 0$, $x_5 = 5$. Из третьего уравнения имеем $x_3 = 7$, из второго — $x_2 = 6$, из первого — $x_1 = -4$. Отметим, что матрица, составленная из значений свободных неизвестных в векторах фундаментального набора решений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица невырожденна. Следовательно, наш выбор значений свободных неизвестных корректен. Для наглядности результаты проделанных выше выкладок удобно оформить в виде следующей таблицы.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	3	0	-1	2	неоднородная система
-2	-2	6	5	0	однородная система
-4	6	7	0	5	

В первой строке таблицы неизвестные x_4 и x_5 обведены кружком, чтобы в явном виде выделить свободные неизвестные. Вторая строка отделена от третьей двумя чертами, чтобы разделить частные решения однородной и неоднородной систем. Для большей наглядности справа от таблицы указано, решение какой системы (однородной или неоднородной) записано в той или иной строке.

Векторная запись общего решения нашей системы имеет, следовательно, вид

$$(1, 3, 0, -1, 2) + (-2, -2, 6, 5, 0)c_1 + (-4, 6, 7, 0, 5)c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные действительные числа. Выписав каждую из координат полученного вектора, мы получим координатную запись общего решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2c_1 - 4c_2, \\ x_2 = 3 - 2c_1 + 6c_2, \\ x_3 = 6c_1 + 7c_2, \\ x_4 = -1 + 5c_1 , \\ x_5 = 2 + 5c_2. \end{cases}$$

Отметим, что координатная запись общего решения той же системы, найденная в §12, выглядит по-другому — см. там равенства (6). Это неудивительно: частное решение неоднородной системы и фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы определены неоднозначно.

§30. Умножение матриц

Ранее у нас уже возникали операции над матрицами. В §13 было введено транспонирование матрицы, а в §23 — линейные операции над матрицами (сложение матриц и умножение матрицы на число). Этот и следующий параграфы посвящены двум более сложным операциям — умножению матриц и обращению матрицы (т.е. взятию обратной матрицы). В данном параграфе изучается первая из них.

1. Определение и свойства произведения матриц

Произведение двух матриц определено лишь в случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. Иными словами, если матрица A имеет порядок $k \times \ell$, а матрица B — порядок $r \times m$, то произведение матрицы A на матрицу B существует тогда и только тогда, когда $\ell = r$. Отметим, что говоря "произведение матрицы A на матрицу B", мы имеем в виду, что A — первый (левый) сомножитель, а B — второй (правый). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\ell} \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell m} \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, что порядки матриц A и B равны соответственно $k \times \ell$ и $\ell \times m$. *Произведением* матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij})$ порядка $k \times m$ такая, что

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{\ell} a_{is} b_{sj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

Иными словами, c_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки первого сомножителя (матрицы A) на соответствующие элементы j-го столбца второго сомножителя (матрицы B). Матрица C обозначается через AB.

Приведем пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Произведение AB определено, поскольку порядок матрицы A равен 2×2, а порядок B равен 2×3. Матрица AB будет иметь порядок 2×3. По определению произведения матриц имеем

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 29 & 3 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим свойства введенной операции. Пусть A, B и C — матрицы, а t — число. Тогда:

1) $(AB)C = A(BC)$ (умножение матриц *ассоциативно*);
2) $A(B+C) = AB + AC$ *и* $(A+B)C = AC + BC$ (умножение матриц *дистрибутивно относительно сложения*);
3) $(tA)B = A(tB) = t(AB)$;
4) $AE = A$ *и* $EA = A$;
5) $AO = O$ *и* $OA = O$;
6) $(AB)^\top = B^\top A^\top$;
7) *если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, то* $|AB| = |A| \cdot |B|$

(свойства 1–6 следует понимать следующим образом: если матрица, стоящая в левой части равенства, определена, то определена и матрица, стоящая в правой части равенства, и эти матрицы равны).

Свойства 1–6 доказываются непосредственным применением определений. Продемонстрируем это на примере первого равенства из свойства 2. Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет порядок $k \times \ell$, а матрицы $B = (b_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ — порядок $\ell \times m$. Тогда элемент левой части доказываемого равенства, стоящий в i-й строке и j-м столбце, есть

$$a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{i\ell}(b_{\ell j} + c_{\ell j}).$$

А элемент из правой части равенства, стоящий на том же месте, есть

$$(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\ell}b_{\ell j}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{i\ell}c_{\ell j}).$$

Ясно, что эти элементы равны.

Свойство 7 мы проверим только для квадратных матриц порядка 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - \\ &- a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} = \\ &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

Естественно поставить вопрос, будет ли умножение матриц коммутативным (т.е. верно ли, что если произведение AB существует, то произведение BA тоже существует и $AB = BA$)? Явная “несимметричность” определения произведения матриц позволяет предположить, что ответ будет отрицательным. Это и в самом деле так. Во-первых, возможна ситуация, когда произведение матриц в одном порядке существует, а в другом — нет. Например, если A имеет порядок 5×3, а B — порядок 3×4, то AB — матрица порядка 5×4, а произведение BA не определено. Далее, матрицы AB и BA могут существовать, но иметь разные порядки. Так, если A и B — матрицы порядка 4×1 и 1×4 соответственно, то AB имеет порядок 4×4, а BA — порядок 1×1. Нетрудно понять, что матрицы AB и BA существуют и имеют одинаковый порядок тогда и только тогда, когда A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка (при этом матрицы AB и BA будут квадратными матрицами того же самого порядка). Но и в этом случае равенство $AB = BA$ может не выполняться. Пример привести несложно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}, \text{ но } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Операции умножения и сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют вычислять значения многочленов от квадратных матриц. Прежде всего очевидным образом определяется степень квадратной матрицы A:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

В силу ассоциативности умножения матриц возведение матриц в степень обладает теми же свойствами, что и возведение чисел в степень.

А именно, для любой квадратной матрицы A и любых натуральных чисел m и n справедливы следующие равенства:

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}, \quad \text{а} \quad (A^m)^n = A^{mn}.$$

Далее, если $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен, а A — квадратная матрица, то *значением многочлена* $f(x)$ *от матрицы* A называется матрица

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и A. Приведем пример. Найдем значение многочлена $f(x) = -2x^3 + x^2 + 3x - 4$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего найдем матрицы A^2 и A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 24 & -10 & -32 \\ 19 & 21 & -12 & -17 \\ 5 & 12 & 3 & -10 \\ -14 & -24 & 10 & 24 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем найти $f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= -2A^3 + A^2 + 3A - 4E = \\ &= \begin{pmatrix} -12 & -48 & 20 & 64 \\ -38 & -42 & 24 & 34 \\ -10 & -24 & -6 & 20 \\ 28 & 48 & -20 & -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 6 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -9 \\ 6 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -36 & 18 & 53 \\ -31 & -37 & 18 & 23 \\ -8 & -18 & -1 & 19 \\ 21 & 36 & -18 & -43 \end{pmatrix}.$$

Используя операцию умножения матриц, можно получить другую запись системы линейных уравнений. Действительно, система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Эту запись мы будем называть *полной матричной записью системы*. Обозначим матрицу системы через A и положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда мы получим равенство

$$AX = B,$$

которое называется *краткой матричной записью системы*. Положим $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как матрицы, состоящие из одной строки. Тогда $X = \vec{x}^\top$ и $B = \vec{b}^\top$. Поэтому под краткой матричной записью системы линейных уравнений мы будем понимать также равенство

$$A\vec{x}^\top = \vec{b}^\top.$$

Отметим, что матричная запись системы линейных уравнений позволяет компактно записывать не только сами эти системы, но и доказательства многих утверждений. Так, например, доказательство теоремы 1 из §11 можно записать следующим образом: если X_1 и X_2 — решения однородной системы $AX = O$, а t — число, то $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$ и $A(tX_1) = t(AX_1) = t \cdot O = O$; следовательно, $X_1 + X_2$ и tX_1 — решения системы $AX = O$.

В §22 мы вывели формулы изменения координат вектора при замене базиса. Теперь мы можем указать их матричную запись. Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x} \in V$, а F и G — базисы в V. Пусть X_F и X_G — столбцы координат вектора $\mathbf{x}$ в базисах F и G соответственно, а T_{FG} — матрица перехода от базиса F к базису G. Используя обозначения, введенные в §22, имеем

$$X_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_G = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда формулу (4) из §22 можно записать в виде

$$X_F = T_{FG} X_G.$$

2. Ранг произведения матриц

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство произведения матриц.

Теорема. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.*

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\ell} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell m} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $C = AB$, расписав ее первый столбец в соответствии с определением произведения матриц:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1\ell}b_{\ell 1} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2\ell}b_{\ell 1} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \dots + a_{k\ell}b_{\ell 1} & c_{k2} & \dots & c_{km} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что первый столбец можно записать в следующем виде:

$$b_{11} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + b_{21} \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + b_{\ell 1} \cdot \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \vdots \\ a_{k\ell} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что первый столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Аналогичное утверждение можно получить и для любого другого столбца матрицы C, т.е. все столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Следовательно, подпространство, порожденное векторами-столбцами матрицы C, содержится в подпространстве, порожденном векторами-столбцами матрицы A. Размерность первого подпространства не превосходит поэтому размерности второго. А это и означает, что ранг по столбцам матрицы C не превосходит ранга по столбцам матрицы A, т.е. $r(C) \leqslant r(A)$.

Для доказательства неравенства $r(C) \leqslant r(B)$ надо убедиться в том, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B, что легко сделать. Теорема доказана. ■

3. Матричное уравнение $AX = B$

Матричным уравнением называется уравнение, в котором неизвестным является матрица. В нашем курсе мы подробно рассмотрим только одно матричное уравнение, а именно уравнение

$$AX = B, \tag{1}$$

где A и B — известные матрицы, а X — неизвестная (некоторые замечания о матричных уравнениях двух других типов см. ниже в данном параграфе на с. 261 и в конце §31). Из определения произведения матриц видно, что число строк в матрице AX равно числу строк в матрице A. Следовательно, если число строк в матрицах A и B различно, то уравнение (1) решений не имеет. Поэтому всюду в дальнейшем, говоря об этом уравнении, мы будем считать, что матрицы A и B имеют одинаковое число строк.

Из определения произведения матриц видно также, что число столбцов в матрице AX равно числу столбцов в матрице X. Следовательно, если X — решение уравнения (1), то матрицы X и B содержат одинаковое число столбцов. Уравнение вида (1) уже возникало ранее в данном параграфе в том частном случае, когда X и B содержат один столбец (см. с. 255). Мы видели, что в этом случае уравнение (1) есть просто другой способ записи системы линейных уравнений. Как будет показано ниже, в общем случае оно равносильно совокупности k систем линейных уравнений, где k — число столбцов в матрицах X и B.

Начнем с конкретного примера. Решим уравнение (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения произведения матриц вытекает, что матрица X должна иметь порядок 3×4. Обозначим ее элементы следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 & 2y_1+y_2 & 2z_1+z_2 & 2t_1+t_2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3 & 2y_1+2y_2+2y_3 & 2z_1+2z_2+2z_3 & 2t_1+2t_2+2t_3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая правую часть этого равенства с матрицей B, мы видим, что уравнение (1) эквивалентно совокупности следующих четырех систем линейных уравнений (каждая из которых соответствует одному из столбцов матриц AX и B):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 0, \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = -1, \\ 2z_1 + 2z_2 + 2z_3 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 2, \\ 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 = 0. \end{cases}$$

Все четыре системы, к которым свелось наше матричное уравнение, имеют одну и ту же основную матрицу — матрицу A. Кроме того, в каждой из этих систем столбцом неизвестных является один из столбцов матрицы X, а столбцом свободных членов — один из столбцов матрицы B. Для того чтобы решить каждую из этих систем методом Гаусса, надо записать расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований всей этой матрицы привести ее основную часть к ступенчатому виду. Если при этом окажется, что хотя бы одна из систем несовместна, то и исходное матричное уравнение не имеет решений. Если же все системы совместны, то, решив каждую из них, мы найдем все столбцы матрицы X, а значит, и саму эту матрицу.

Но у всех решаемых систем основная матрица — одна и та же. Это позволяет решать все системы одновременно. Для этого надо составить матрицу порядка 2×7, записав в первые 3 столбца матрицу A, а в последние 4 столбца — матрицу B, и затем элементарными преобразованиями всей этой матрицы привести ее левую часть к ступенчатому виду. Поскольку при элементарных преобразованиях столбцы не "перемешиваются", каждый из столбцов правой части матрицы будет меняться независимо от других — так же, как менялся бы последний столбец расширенной матрицы, если бы мы решали отдельно систему, соответствующую этому столбцу. Реализуем этот план. Для наглядности будем отделять одну часть матрицы от другой вертикальной чертой. Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Выпишем ступенчатые матрицы, соответствующие четырем решаемым системам линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \quad \text{и} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Во всех этих системах имеется одна свободная неизвестная — третья. Выпишем общие решения этих систем:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = -2c_1 + 1, \\ x_3 = c_1; \end{cases} \begin{cases} y_1 = c_2 - 0{,}5, \\ y_2 = -2c_2 + 1, \\ y_3 = c_2; \end{cases} \begin{cases} z_1 = c_3 + 0{,}5, \\ z_2 = -2c_3 - 2, \\ z_3 = c_3; \end{cases} \begin{cases} t_1 = c_4 + 2, \\ t_2 = -2c_4 - 2, \\ t_3 = c_4. \end{cases}$$

Следовательно, решениями нашего уравнения являются всевозможные матрицы вида

$$X = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - 0{,}5 & c_3 + 0{,}5 & c_4 + 2 \\ -2c_1 + 1 & -2c_2 + 1 & -2c_3 - 2 & -2c_4 - 2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 — произвольные действительные числа, и только они.

Переход от рассмотренного примера к общему случаю очевиден.

> *Матричное уравнение* (1) *равносильно совокупности k систем линейных уравнений* (*где k — число столбцов матрицы B*), *имеющих одну и ту же основную матрицу — матрицу A; в i-й из этих систем столбцом неизвестных является i-й столбец матрицы X, а столбцом свободных членов — i-й столбец матрицы B* ($i = 1, 2, \ldots, k$).

В краткой матричной записи упомянутые системы линейных уравнений имеют вид

$$AX_1 = B_1, \quad AX_2 = B_2, \quad \ldots, \quad AX_k = B_k, \tag{2}$$

где X_i — i-й столбец матрицы X, а B_i — i-й столбец матрицы B ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Особый интерес для дальнейшего представляет случай, когда A — невырожденная квадратная матрица. В этом случае каждая из систем (2) является крамеровской и, в силу теоремы 1 из §14, имеет единственное решение. Следовательно, и уравнение (1) имеет единственное решение. Напомним указанный на с. 145 способ решения системы, имеющей единственное решение. Ее расширенную матрицу можно элементарными преобразованиями привести к матрице, основная часть которой (т.е. вся матрица, кроме последнего столбца) будет единичной матрицей. В последнем столбце полученной матрицы будет стоять решение системы. Объединив эти соображения со сказанным выше, получаем следующее правило.

> *Пусть дано уравнение* (1), *в котором A — невырожденная квадратная матрица порядка n, а B — матрица порядка $n \times k$. Запишем матрицу порядка $n \times (n + k)$, в которой в первых n столбцах стоит матрица A, а в последних k столбцах — матрица B. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть* (*т.е. первые n столбцов*) *к единичному виду. В правой части* (*т.е. в последних k столбцах*) *полученной матрицы будет записана матрица X, являющаяся единственным решением уравнения* (1).

Другой способ решения уравнения (1) в случае, когда A — невырожденная квадратная матрица, будет указан в конце §31.

Введем одно обозначение. Пусть P и Q — матрицы, содержащие одинаковое число строк. Тогда через $(P|Q)$ мы будем обозначать матрицу, полученную приписыванием матрицы Q к матрице P справа. Иными словами, если P имеет порядок $m \times n$, а Q — порядок $m \times k$, то $(P|Q)$ — матрица порядка $m \times (n + k)$, в которой в первых n столбцах записана матрица P, а в последних k столбцах — матрица Q. Указанный в предыдущем абзаце алгоритм можно символически изобразить следующим образом:

$$(A|B) \sim \cdots \sim (E|X).$$

Приведем пример. Решим уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Действуя по описанному выше плану, имеем

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 0 & 10 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, наше уравнение имеет единственное решение — матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Сказанное выше можно применить к решению матричных уравнений вида $XA = B$, где A и B — известные матрицы, а X — неизвестная. В самом деле, транспонируя обе части равенства $XA = B$ и используя свойство 6 произведения матриц (см. с. 252), получаем уравнение $A^\top X^\top = B^\top$. Решив его описанным выше способом, мы найдем матрицу $X^\top$. Транспонировав ее, получим матрицу X.

4. Нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому с помощью элементарных преобразований

Рассмотренные выше матричные уравнения вида $AX = B$ естественно возникают при решении различных задач. Одной из них является задача о вычислении матрицы перехода от одного базиса к другому. Мы уже сталкивались с необходимостью нахождения этой матрицы в §22. В дальнейшем такая необходимость возникнет у нас еще раз (см. §33). Рассмотрения, проведенные выше, позволяют указать простой способ нахождения указанной матрицы.

Пусть в пространстве V заданы базис F, состоящий из векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, и базис G, состоящий из векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Будем считать, что нам известны координаты векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ и $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ в некотором (одном и том же) базисе пространства V: $\mathbf{f}_i = (f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{in})$ и $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in})$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\mathbf{F}$ матрицу, в которой по столбцам записаны координаты векторов базиса F, а через $\mathbf{G}$ — матрицу, в которой по столбцам записаны координаты векторов базиса G:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица перехода от базиса F к базису G обозначается через T_{FG}. Положим $T_{FG} = (t_{ij})$. По определению матрицы перехода от одного базиса к другому выполнены равенства

$$\begin{cases} t_{11}\mathbf{f}_1 + t_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{f}_n = \mathbf{g}_1, \\ t_{12}\mathbf{f}_1 + t_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{f}_n = \mathbf{g}_2, \\ \dotfill \\ t_{1n}\mathbf{f}_1 + t_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{f}_n = \mathbf{g}_n. \end{cases} \tag{3}$$

Распишем первое из этих векторных равенств по координатам. Получим

$$\begin{cases} f_{11}t_{11} + f_{21}t_{21} + \cdots + f_{n1}t_{n1} = g_{11}, \\ f_{12}t_{11} + f_{22}t_{21} + \cdots + f_{n2}t_{n1} = g_{12}, \\ \dotfill \\ f_{1n}t_{11} + f_{2n}t_{21} + \cdots + f_{nn}t_{n1} = g_{1n}. \end{cases}$$

Краткая матричная запись этой системы линейных уравнений имеет вид $\mathbf{F}T_1 = \mathbf{G}_1$, где T_1 — первый столбец матрицы T_{FG}, а $\mathbf{G}_1$ — первый столбец матрицы $\mathbf{G}$. Рассуждая аналогично, получаем, что набор векторных равенств (3) можно переписать в виде набора матричных равенств $\mathbf{F}T_1 = \mathbf{G}_1$, $\mathbf{F}T_2 = \mathbf{G}_2$, …, $\mathbf{F}T_n = \mathbf{G}_n$, где T_i и $\mathbf{G}_i$ — i-е столбцы матриц T_{FG} и $\mathbf{G}$ соответственно $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Но этот набор матричных равенств эквивалентен одному матричному уравнению $\mathbf{F}T_{FG} = \mathbf{G}$. Таким образом, матрица T_{FG} является решением уравнения

$$\mathbf{F}X = \mathbf{G}.$$

Ясно, что $\mathbf{F}$ — квадратная матрица порядка n. Поскольку векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ образуют базис, они линейно независимы. Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{F}$ равен n, и потому она невырожденна. В силу сказанного выше (см. с. 260) получаем следующее правило.

Чтобы найти матрицу перехода от базиса F к базису G, надо составить матрицу порядка $n \times 2n$, в которой в первых n столбцах записать координаты векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, а в последних n столбцах — координаты векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, и с помощью элементарных преобразований привести ее левую половину к единичному виду. В *полученной матрице в последних n столбцах будет расположена матрица T_{FG}.*

Этот алгоритм можно символически изобразить следующим образом:

$$(\mathbf{F}|\mathbf{G}) \sim \cdots \sim (E|T_{FG}).$$

Продемонстрируем сказанное на следующем примере. Пусть базис F состоит из векторов $\mathbf{f}_1 = (1, -2)$ и $\mathbf{f}_2 = (2, 1)$, а базис G — из векторов $\mathbf{g}_1 = (3, -1)$ и $\mathbf{g}_2 = (4, 2)$. Надо найти матрицу перехода от F к G. В этом случае

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$T_{FG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

§31. Обратная матрица

Параграф посвящен вопросу о существовании матрицы, обратной к данной, и способам вычисления такой матрицы.

1. Критерий существования и свойства обратной матрицы

Определение. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Тогда матрица B называется *обратной к* A, если

$$AB = BA = E,$$

где E — единичная матрица. Квадратная матрица называется *обратимой*, если существует обратная к ней матрица.

Легко понять, что если матрица, обратная к A, существует, то она является квадратной матрицей того же порядка, что и A. Матрица E, конечно, тоже будет иметь тот же порядок.

Теорема. *Если* $|A| = 0$, *то обратной к* A *матрицы не существует. Если* $|A| \neq 0$, *то обратная матрица существует и единственна.*

Доказательство. Обозначим порядок матрицы через n. Первое утверждение доказывается несложно. Действительно, если $|A| = 0$, то $r(A) < n$, поскольку единственный минор порядка n матрицы A (т.е. $|A|$) равен нулю. Но $r(E) = n$ (так как $|E| \neq 0$), и потому равенство $AB = E$ противоречит теореме из §30.

Пусть $|A| \neq 0$. Единственность обратной матрицы установить несложно. Предположим, что есть матрицы B_1 и B_2 такие, что

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{и} \quad AB_2 = B_2A = E.$$

Рассмотрим матрицу $B_2(AB_1)$. С одной стороны,

$$B_2(AB_1) = B_2E = B_2.$$

С другой стороны,

$$B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = EB_1 = B_1.$$

Следовательно, $B_1 = B_2$.

Докажем существование обратной матрицы. Положим $d = |A|$. Обозначим через A^* матрицу, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A. (Алгебраические дополнения расположены на тех же местах, что и соответствующие элементы.) Транспонируем матрицу A^* и полученную матрицу разделим на d. Убедимся в том, что полученная матрица и есть обратная к A. Действительно, рассмотрим произведение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{d} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если элемент произведения стоит на диагонали, скажем в i-й строке и i-м столбце, то он равен

$$\frac{1}{d}(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) = \frac{1}{d} \cdot d = 1,$$

поскольку в скобках записано разложение определителя $|A|$ по i-й строке. Если же этот элемент стоит в i-й строке и j-м столбце и $i \neq j$, то он равен

$$\frac{1}{d}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}) = \frac{1}{d} \cdot 0 = 0$$

(см. свойство 8 в §13).

Мы проверили, что $AB = E$. Равенство $BA = E$ проверяется аналогично. Теорема доказана. ■

В частности, из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденна.* ■

Матрицу, обратную к матрице $A = (a_{ij})$, будем обозначать через A^{-1}. Положим $A^* = (A_{ij})$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}. В процессе доказательства теоремы мы вывели следующую формулу для вычисления матрицы, обратной к A (в предположении, что $|A| \neq 0$):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^\top. \tag{1}$$

Вычислим, пользуясь этой формулой, матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 3, поэтому A^{-1} существует (и единственна). Составим матрицу A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем A^* и все элементы транспонированной матрицы разделим на $|A|$. Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная к A, должна удовлетворять двум равенствам: $AB = E$ и $BA = E$. Однако, используя доказанную выше теорему, легко показать, что на практике достаточно проверять одно из них. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть A — квадратная матрица, а матрица B такова, что $AB = E$. Тогда $BA = E$, матрица A обратима и $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Из свойства 7 произведения матриц (см. с. 252) вытекает, что $|A| \cdot |B| = |AB| = |E| = 1$. В частности, отсюда вытекает, что $|A| \neq 0$. В силу доказанной выше теоремы матрица A обратима. Умножая обе части равенства $AB = E$ слева на A^{-1}, получим $A^{-1}AB = A^{-1}E$. Но $A^{-1}AB = EB = B$, а $A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, $B = A^{-1}$. Умножая обе части последнего равенства справа на A, получим $BA = A^{-1}A = E$. Следствие 2 доказано. ■

Укажем теперь свойства операции обращения матрицы. Если A и B — невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка, а t — ненулевое число, то:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(tA)^{-1} = \dfrac{1}{t} \cdot A^{-1}$;
4) $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$;
5) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Свойство 1 непосредственно вытекает из определения обратной матрицы, свойство 2 — из следствия 2 и равенств

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

а свойство 3 — из следствия 2 и равенств

$$(tA) \cdot \left(\frac{1}{t} \cdot A^{-1}\right) = \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot (AA^{-1}) = 1 \cdot E = E.$$

Свойство 4 легко вытекает из формулы (1) и того факта, что при транспонировании матрицы ее определитель не меняется (см. свойство 9 в §13). Наконец, свойство 5 следует из того, что

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

(мы использовали здесь свойство 7 произведения матриц — см. с. 252).

2. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Способ вычисления обратной матрицы, указанный выше, требует выполнения большого объема вычислений, который к тому же быстро растет с ростом порядка матрицы: если матрица A имеет порядок n, то необходимо сосчитать один определитель n-го порядка и n^2 определителей $(n-1)$-го порядка.

Существует способ нахождения обратной матрицы, который не требует вычисления определителей и сложность которого очень медленно растет с ростом порядка матрицы. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная квадратная матрица порядка n. Обратную к ней матрицу (которая существует и единственна в силу теоремы) обозначим через $X = (x_{ij})$. Ясно, что X — решение матричного уравнения $AX = E$, где E — единичная матрица порядка n. Учитывая сказанное в §30 (см. с. 260), получаем следующее правило.

Пусть дана невырожденная квадратная матрица A порядка n. Запишем матрицу порядка $n \times 2n$, в которой в первых n столбцах стоит матрица A, а в последних n столбцах — единичная матрица. С помощью элементарных преобразований всей этой матрицы приведем ее левую часть (т.е. первые n столбцов) к единичному виду. В правой части (т.е. в последних n столбцах) полученной матрицы будет записана матрица A^{-1}.

Этот алгоритм можно символически изобразить следующим образом:

$$(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1}).$$

Описанным алгоритмом можно пользоваться и для того, чтобы выяснить, существует ли матрица A^{-1}. В самом деле, в процессе приведения левой части матрицы $(A|E)$ к единичному виду мы сначала приведем ее к ступенчатому виду. Матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда ступенчатая матрица, которая возникнет в этот момент в левой части преобразовываемой матрицы, не содержит нулевых строк. В самом деле, обозначим эту ступенчатую матрицу через B, а порядок матрицы A — через n. В силу алгоритма нахождения ранга матрицы, изложенного на с. 241, отсутствие нулевых строк в матрице B равносильно тому, что ранг матрицы A равен n. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что единственный минор порядка n матрицы A, а именно ее определитель, отличен от 0. Остается сослаться на следствие 1.

Проиллюстрируем сказанное на примере рассмотренной выше матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 4/3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3\\ 2 & -1 & -1\\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ответ, разумеется, совпал с тем, что мы нашли раньше другим способом.

3. Обратная матрица и системы линейных уравнений

С помощью обратных матриц можно решать крамеровские системы линейных уравнений, основная матрица которых невырожденна. В самом деле, пусть $AX = B$ — такая система. В силу невырожденности матрицы A существует матрица A^{-1}. Умножая обе части равенства $AX = B$ слева на A^{-1} и учитывая, что $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$X = A^{-1}B. \tag{2}$$

Решим указанным способом систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,\\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 3x_3 = -5\\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ а } B = \begin{pmatrix} 2\\ -5\\ 7 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} была дважды вычислена выше. Используя формулу (2), имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (3) имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Как отмечалось в §30, системы линейных уравнений являются частным случаем матричных уравнений вида $AX = B$. Сказанное выше можно использовать и в этом, более общем, случае. Пусть A — невырожденная квадратная матрица, а B — произвольная матрица. Как отмечалось в §30, если число строк в матрицах A и B различно, то уравнение $AX = B$ решений не имеет. Предположим теперь, что что матрицы A и B имеют одинаковое число строк. Рассуждая также, как при выводе формулы (2), получаем, что в этом случае уравнение $AX = B$ имеет единственное решение, которое выражается указанной формулой.

Решим с помощью этой формулы рассмотренное выше уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а } B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^{-1} по формуле (1). Имеем

$$|A| = -1, \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{и потому} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (2), имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ совпал с найденным выше другим способом.

С помощью обратных матриц можно решать не только уравнения вида $AX = B$, но и другие матричные уравнения. Укажем два из них: уравнения вида $XA = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, и уравнения вида $AXB = C$, где A и B — невырожденные квадратные матрицы. Легко понять, что первое из этих уравнений имеет единственное решение $X = BA^{-1}$ при условии, что матрицы A и B имеют одинаковое число столбцов, и не имеет решений в противном случае, а второе имеет единственное решение $X = A^{-1}CB^{-1}$ при условии, что матрицы A и C имеют одинаковое число строк, а матрицы B и C — одинаковое число столбцов, и не имеет решений в противном случае.

§32. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) нахождение ранга матрицы по строкам, по столбцам и по минорам;

2) нахождение фундаментального набора решений однородной системы линейных уравнений и задачи, которые к этому сводятся (например, нахождение общего решения неоднородной системы и базиса пересечения подпространств);

3) вычисление результатов линейных операций над матрицами и произведения матриц;

4) вычисление обратной матрицы, решение матричных уравнений вида $AX = B$, нахождение матрицы перехода от одного базиса к другому.

Примеры решения задач всех этих типов имеются в §28–31, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти ранг матрицы и указать какой-нибудь ее ненулевой минор:
а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 & 6 \\ -9 & 6 & 6 & -9 \\ 9 & -6 & 6 & -9 \\ -6 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Определить ранг матрицы при различных значениях параметра t:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 13 & t \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -t & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -t & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -t & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -t & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 2 & 1 & t & t^2 \\ 2 & 2 & 1 & t \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3*. Квадратные матрицы A и B порядка n имеют ранги r и s соответственно. Из этих матриц, а также нулевой квадратной матрицы O порядка n и матрицы $-B$ составили следующие квадратные матрицы порядка $2n$:

а) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} A & A \\ O & B \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} A & B \\ A & -B \end{pmatrix}$.

Определить их ранги.

4. Определить, совместны ли системы линейных уравнений, используя теорему Кронекера–Капелли:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ \quad - x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \quad - x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

5. Найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x + 4y + 3z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6. Найти общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 8y + 3z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 9x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 7x_5 = 0, \\ 3x_1 \qquad + 8x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 = -1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

7. Найти вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, заданного системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

8. Найти базис пересечения подпространств M_1 и M_2 пространства

$\mathbb{R}_4$, где M_1 порождается векторами $\vec{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,1,0)$ и $\vec{a}_3 = (0,0,1,1)$, а M_2 — векторами $\vec{b}_1 = (1,0,1,0)$, $\vec{b}_2 = (0,2,1,1)$, $\vec{b}_3 = (1,2,1,2)$ и $\vec{b}_4 = (1,-2,1,-2)$.

9. Найти произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $(1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1\ 2\ 3)$; д) $AA^\top$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10*. Найти все матрицы, *перестановочные с матрицей* A (т.е. такие матрицы B, что $AB = BA$):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a \neq b$.

11*. *Следом* квадратной матрицы называется сумма ее элементов, стоящих на главной диагонали. След матрицы A обозначается через $\operatorname{tr} A$. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, то $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

12*. Доказать, что не существует матриц A и B таких, что $AB - BA = E$.

13*. Что произойдет с матрицей, если умножить ее

а) слева (справа) на квадратную матрицу, полученную из единичной матрицы перестановкой в последней i-й и j-й строк $(i \neq j)$;

б) слева (справа) на квадратную матрицу, в которой все элементы на главной диагонали равны 1, на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число t $(i \neq j)$, а все остальные элементы равны 0;

в) слева на квадратную матрицу, в которой все элементы на главной диагонали и все элементы первой строки равны 1, а все остальные элементы равны 0;

г) справа на квадратную матрицу, в которой все элементы на главной диагонали и все элементы первого столбца равны 1, а все остальные элементы равны 0?

14*. Вычислить степени матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}^n$.

15. Найти значение многочлена $f(x) = x^2 - 5x + 3$ от матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Пусть A — квадратная матрица второго порядка, $t = \operatorname{tr} A$, а $d = |A|$. Доказать, что A является корнем уравнения $x^2 - tx + d = 0$.

17. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ к базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2$:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, 3)$, $\vec{b}_1 = (4, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 9)$;

б) $\vec{a}_1 = (2, 1)$, $\vec{a}_2 = (-2, 3)$, $\vec{b}_1 = (2, 5)$, $\vec{b}_2 = (-10, 3)$;

в) $\vec{a}_1 = (2, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1)$, $\vec{b}_1 = (6, -1)$, $\vec{b}_2 = (-2, 1)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, 3)$, $\vec{b}_1 = (0, -5)$, $\vec{b}_2 = (3, 2)$.

19. Найти матрицы, обратные к данным:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Решить системы линейных уравнений, используя обратную матрицу:

а) $\begin{cases} x + 3y - z = 8, \\ 2x - y + 3z = 7, \\ x + z = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 2y = 4, \\ -x + 3y + 4z = 5. \end{cases}$

21*. Доказать, что матрица, обратная к невырожденной верхнетреугольной матрице, является верхнетреугольной.

3. Ответы

1. а) 2, $M(1,2;1,2)$; б) 2, $M(1,2;2,3)$; в) 3, $M(1,2,3;1,2,3)$; г) 2, $M(1,2;3,4)$; д) 2, $M(1,3;1,3)$.

(Здесь $M(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$ — минор, содержащийся в строках $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах $j_1, j_2, \ldots, j_k$.)

2. а) При $t = 5$ ранг равен 2, при $t \neq 5$ ранг равен 3; б) при $t = 0, -2, -4$ ранг равен 3, при $t \neq 0, -2, -4$ ранг равен 4; в) при $t = \dfrac{1}{2}$ ранг равен 3, при $t \neq \dfrac{1}{2}$ ранг равен 4.

3. Ранг всех трех матриц равен $r + s$. **4.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет.

5. а) $(1,1,-2)$; б) $(1,1,0,0)$, $(1,0,-2,1)$.

6. а) $(1,1,1)c$; б) $(-8,9,3,0,0)c_1+(-2,0,0,3,0)c_2+(-4,3,0,0,3)c_3$; в) $(-6,4,0,0)+(3,-2,1,0)c_1+(-2,1,0,1)c_2$; г) $\left(\frac{12}{5},0,\frac{13}{5},0\right)+(-1,1,0,0)c_1+(-2,0,0,1)c_2$; д) $(0,1,0,0)+(1,2,3,0)c_1+(-2,-1,0,3)c_2$; е) $(0,0,0,1)+(0,1,1,0)c$.

7. Вектор сдвига — $(1,8,13,0,-34)$, базис направляющего подпространства — $(1,0,0,-3,0)$, $(0,1,0,-2,0)$.

8. (1,2,2,1), (1,1,1,1).

9. а) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 16 & -7 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 4 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; в) (-17); г) $\begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ -3 & -6 & -9 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$.

10. а), б) Матрицы вида $tA+sE$, где t,s — произвольные числа, и только они; в) диагональные матрицы, и только они.

12. *Указание*: использовать задачу 11.

13. а) При умножении слева переставятся местами i-я и j-я строки, при умножении справа переставятся местами i-й и j-й столбцы; б) при умножении слева к i-й строке прибавится j-я строка, умноженная на t, при умножении справа к j-му столбцу прибавится i-й столбец, умноженный на t; в) к первой строке прибавятся все остальные; г) к первому столбцу прибавятся все остальные.

14. а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} t^n & nt^{n-1} \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$.

15. а) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -11 \\ 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. а) $X=\begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} -0{,}2 & 13/35 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$; в) $X=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3{,}5 & 3 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; г) $X=\begin{pmatrix} 115 & -202 & 57 \\ -34 & 60 & -17 \end{pmatrix}$.

18. а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. а) (3,2,1); б) $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4},0\right)$.

21. *Указание*: Использовать формулу (1) из §31 и следующее соображение: если $i<j$, то, вычеркивая i-ю строку и j-й столбец верхнетреугольной

матрицы, получим верхнетреугольную матрицу, на главной диагонали которой на местах с номерами от i до $j-1$ стоит 0.

4. Самостоятельная работа №6

1. Вычислить значение многочлена $f(x)$ от матрицы A, если:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

б) $f(x) = 3x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

в) $f(x) = -2x^2 + 5x - 7, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

г) $f(x) = x^2 - 8x + 7, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Используя обратную матрицу, решить систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

4. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 = 11; \end{cases}$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Глава 7

Линейные операторы

В главе вводятся понятия линейного оператора и его матрицы в базисе. Рассматривается вопрос об изменении матрицы оператора при замене базиса. Затем вводятся собственные векторы и собственные значения оператора и указывается алгоритм их нахождения. Далее доказывается критерий приводимости матрицы оператора к диагональному виду. После этого изучаются образ и ядро линейного оператора. В частности, приводится алгоритм их одновременного нахождения с помощью элементарных преобразований, взятый нами из указанной в списке литературы методической разработки В. А. Чуркина.

Понятия и результаты данной главы играют важную роль в приложениях линейной алгебры к экономике, в чем мы будем иметь возможность убедиться в главе 12.

§33. Линейный оператор, матрица оператора

1. Понятие линейного оператора

В этой главе будут рассматриваться функции из V в V, где V — некоторое векторное пространство. Такие функции называются *операторами.* Для их обозначения мы будем использовать буквы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и т.д. — "письменные" заглавные буквы начала латинского алфавита.

Приведем примеры, когда возникает необходимость в рассмотрении таких функций.

Пример 1. Предположим, что некоторый регион производит электроэнергию, уголь и металл и не получает их из других регионов.

Часть этой продукции потребляется в процессе производства. Предположим, что для производства единицы электроэнергии требуется 0,02 единицы электроэнергии, 0,1 единицы угля и 0,01 единицы металла; для производства единицы угля пусть эти числа равны соответственно 0,02, 0,01 и 0,02, а для производства единицы металла — 0,03, 0,03 и 0,01 (числа, разумеется, условные). Пусть в течение года регион произвел x_1 единиц электроэнергии, x_2 — угля, x_3 — металла. Производственную продукцию можно представить вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ пространства $\mathbb{R}_3$. Сколько продукции использовано в процессе производства? Использованную продукцию обозначим вектором $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ того же пространства. Тогда вектор $\vec{y}$ является функцией от $\vec{x}$, т.е. $\vec{y} = \mathcal{A}_1(\vec{x})$. Имеем, таким образом, оператор в пространстве $\mathbb{R}_3$, который вектору валового выпуска $\vec{x}$ ставит в соответствие вектор производственных затрат $\vec{y}$. Зависимость $\vec{y}$ от $\vec{x}$ мы можем выписать явно. Действительно, при сделанных предположениях

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}02x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}01x_3; \\ y_2 = 0{,}02x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}02x_3; \\ y_3 = 0{,}03x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}01x_3. \end{cases}$$

Пример 2. С рассмотренной в примере 1 ситуацией можно соотнести и другой оператор $\vec{z} = \mathcal{A}_2(\vec{x})$, который по вектору $\vec{x}$ дает вектор $\vec{z}$ выпуска продукции на рынок. Естественно, $\mathcal{A}_2(\vec{x}) = \vec{x} - \mathcal{A}_1(\vec{x})$.

Пример 3. Рассмотрим теперь популяцию насекомых, которые живут не более трех лет и размножаются в течение третьего года. Первая возрастная группа выживает с вероятностью $\frac{1}{2}$, вторая с вероятностью $\frac{1}{3}$, третья дает 6 особей на каждую особь этой группы и умирает. Пусть на начало года имелось x_1 особей первой возрастной группы, x_2 — второй, x_3 — третьей. Представим популяцию на начало года вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ пространства $\mathbb{R}_3$. Через $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ обозначим популяцию насекомых на конец года. Нетрудно понять, что $\vec{y}$ является функцией от $\vec{x}$, т.е. что мы имеем оператор $\vec{y} = \mathcal{A}_3(\vec{x})$. Зависимость $\vec{y}$ от $\vec{x}$ в этом случае выражается равенствами

$$\begin{cases} y_1 = 6x_3, \\ y_2 = \dfrac{x_1}{2}, \\ y_3 = \dfrac{x_2}{3}. \end{cases}$$

Итак, мы убедились, что операторы естественным образом возникают в различных приложениях. В нашем курсе мы будем изучать не произвольные операторы, заданные на векторном пространстве V, а только линейные операторы.

Определение. Пусть V — векторное пространство. Функция $\mathcal{A}$: $V \longmapsto V$ называется *линейным оператором*, если для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x} \in V$ и произвольного $t \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Относительно первого равенства говорят, что $\mathcal{A}$ *сохраняет сумму векторов*, относительно второго — что $\mathcal{A}$ *сохраняет произведение вектора на число*.

Отметим, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V и $\mathbf{x} \in V$, то $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Иными словами,

любой линейный оператор отображает нулевой вектор в себя.

Приведенные в примерах 1–3 операторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ являются линейными. Этот факт легко установить непосредственно, но мы выведем его ниже из некоторого более общего утверждения (см. с. 284). Список примеров линейных операторов легко расширить.

Пример 4. Представим пространство $\mathbb{R}_2$ как множество векторов плоскости, выходящих из начала координат O. Тогда поворот векторов на угол α, растяжение в t раз, симметрия относительно прямой, проходящей через точку O, проекция вектора на ось Ox (или Oy) — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_2$. Если интерпретировать $\mathbb{R}_3$ как множество векторов трехмерного пространства, выходящих из начала координат O, то поворот на угол α относительно прямой, проходящей через O, симметрия относительно плоскости, проходящей через эту точку, — примеры линейных операторов в пространстве $\mathbb{R}_3$.

Укажем еще два линейных оператора, которые можно определить в произвольном векторном пространстве V.

Пример 5. Зафиксируем произвольное число t и зададим оператор $\mathcal{A}$ следующим правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Этот оператор называется *оператором растяжения в t раз*. Линейность оператора растяжения с очевидностью вытекает из аксиом 5 и 7 векторного пространства (см. с. 206). Особо отметим два частных случая оператора растяжения. Первый из них — это оператор растяжения при $t = 0$. Соответствующий оператор обозначается буквой $\mathcal{O}$ и называется *нулевым.* Ясно, что нулевой оператор переводит произвольный вектор из V в нулевой вектор. Второй частный случай оператора растяжения возникает при $t = 1$. Соответствующий оператор обозначается буквой $\mathcal{E}$ и называется *тождественным* или *единичным.* Этот оператор переводит произвольный вектор из V в себя.

Пример 6. Чтобы определить еще один оператор, зафиксируем в пространстве V некоторое подпространство M. В силу предложения из §25 существует такое подпространство M' в V, что $V = M \oplus M'$. Следовательно, произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M'$. Рассмотрим оператор $\mathcal{P}$ в пространстве V, задаваемый правилом $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$. Легко проверяется, что этот оператор — линейный. Он называется *оператором проектирования на подпространство* M *параллельно* M'. Отметим, что тождественный оператор можно рассматривать как оператор проектирования на V параллельно нулевому подпространству, а нулевой оператор — как оператор проектирования на нулевое подпространство параллельно V. Это вытекает из того, что $V = V \oplus \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$.

Важный частный случай оператора проектирования (оператор ортогонального проектирования) будет введен в §40. Другие примеры линейных операторов см. в задачах 6–8 на с. 303.

2. Матрица оператора в базисе

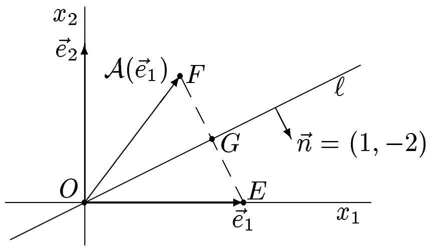
Пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — линейный оператор в пространстве V, а $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ — базис V. Предположим, что мы знаем образы базисных векторов, т.е. векторы $\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)$. В этом случае мы сможем найти образ произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$. В самом деле, если $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_n\mathbf{b}_n) = t_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + t_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + t_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n).$$

Итак, чтобы узнать, как оператор действует на произвольный вектор, достаточно знать, как он действует на базисные векторы. Это делает естественным следующее

Определение. Пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — линейный оператор пространства $V, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис этого пространства. Квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i)$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$), называется *матрицей оператора* $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ *в базисе* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Рассмотрим пример. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат; оператор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ каждый вектор $\vec{x}$, выходящий из начала координат, отображает в вектор $\vec{y}$, симметричный вектору $\vec{x}$ относительно прямой ℓ с уравнением $x_1 - 2x_2 = 0$ (см. рисунок). Требуется найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.



Найдем сначала координаты вектора $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Эти координаты совпадут с координатами точки F, которая симметрична точке $E(1, 0)$ относительно прямой ℓ. Запишем параметрические уравнения прямой EF и добавим к ним уравнение прямой ℓ. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t, \\ x_2 = - 2t, \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

(Мы воспользовались, разумеется, тем, что нормальный вектор $\vec{n} = (1, -2)$ прямой ℓ будет направляющим для прямой EF.) Решение системы дает координаты точки G (проекции точки E на прямую ℓ): $x_1 = \dfrac{4}{5}$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$. Поскольку G — середина отрезка EF, то F имеет координаты $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Итак, вектор $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$ имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ координаты $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Аналогично устанавливается, что вектор $\mathcal{A}(\vec{e}_2)$ имеет в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ координаты $\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$. Следовательно, матрица оператора $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что оператор растяжения в t раз имеет в любом базисе матрицу

$$tE = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}$$

(при любом t). В частности, нулевой оператор имеет нулевую матрицу, а тождественный оператор — единичную матрицу. Найдем матрицу оператора проектирования $\mathcal{P}$ на подпространство M параллельно M' в базисе, полученном объединением базисов M и M'. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ — базис M, а $\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис M'. Тогда $\mathcal{P}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i$ для всякого $i = 1, 2, \dots, m$ и $\mathcal{P}(\mathbf{a}_j) = \mathbf{0}$ для всякого $j = m+1, m+2, \dots, n$. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{P}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на главной диагонали равно m (т.е. размерности подпространства M).

Пусть линейный оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ пространства V в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Матрицу оператора мы будем обозначать той же буквой, что и оператор, но не “письменной”, а “печатной”.) Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ через $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Как найти координаты вектора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в том же базисе? Пусть $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \dots + y_n\mathbf{b}_n$. Тогда

$$\begin{gathered} y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \dots + y_n\mathbf{b}_n = \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ = \mathcal{A}(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{b}_n). \end{gathered}$$

Поскольку столбцы матрицы A — координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{b}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_2)$, $\ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_n)$, то преобразуем последнее выражение в соответствие с равенствами

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) = a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{21}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{b}_n, \\
\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) = a_{12}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{b}_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathcal{A}(\mathbf{b}_n) = a_{1n}\mathbf{b}_1 + a_{2n}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{b}_n.
\end{array}$$

После приведения подобных членов мы получим равенство

$$\begin{aligned}
y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n = {} & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\,\mathbf{b}_1 + \\
& + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\,\mathbf{b}_2 + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\,\mathbf{b}_n.
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения по базису это означает, что

$$\left\{\begin{array}{l}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n.
\end{array}\right. \tag{1}$$

Полученную систему равенств мы будем называть *координатной записью* оператора в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_n$. Нетрудно видеть, что равенства (1) можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Запись оператора в этом виде будем называть *полной матричной записью.* Далее, если, как обычно, обозначить через X и Y столбцы, составленные из координат векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, то из (2) получим *краткую матричную запись* оператора:

$$Y = AX. \tag{3}$$

Таким образом,

> *для того чтобы найти координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, достаточно матрицу оператора $\mathcal{A}$ умножить на координаты вектора $\mathbf{x}$, записанные в виде столбца.*

Предположим теперь, что мы зафиксировали в пространстве V базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ и наобум написали равенства вида (1), трактуя $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ как координаты прообраза $\mathbf{x}$ и образа $\mathbf{y}$ соответственно при действии некоторого оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. Тогда этот оператор будет линейным. Это становится очевидным, если перейти к равенствам (3). В самом деле, пусть $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — произвольные векторы из V, $\mathbf{y}_1 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$, а t — произвольное число. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, а через X_1, X_2, Y_1 и Y_2 — столбцы координат векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ соответственно в том же базисе. Тогда, в силу (3), $Y_1 = AX_1$ и $Y_2 = AX_2$. Поскольку $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$ и $A(tX_1) = t(AX_1)$, имеем $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$. Линейность оператора $\mathcal{A}$ доказана. Отсюда, в частности, следует, что операторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, приведенные в начале параграфа, являются линейными.

3. Изменение матрицы оператора при замене базиса

Здесь мы ответим на следующий вопрос. Как связаны матрицы одного и того же оператора в разных базисах? Пусть оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе F, состоящем из векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, имеет матрицу A_F, а в базисе G, состоящем из векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, — матрицу A_G. Тогда

$$A_G = T_{GF} A_F T_{FG}, \tag{4}$$

где T_{FG} и T_{GF} — матрицы перехода от базиса F к базису G и от базиса G к базису F соответственно (см. с. 204). Доказывать формулу (4) мы не будем. Отметим только, что, в силу леммы 2 из §28 и теоремы из §31, матрицы T_{FG} и T_{GF} обратимы. Для использования формулы (4) при решении задач существенным является следующее утверждение.

Лемма. *Матрицы T_{FG} и T_{GF} обратны друг к другу.*

Доказательство. Положим $T_{FG} = (t_{ij})$ и $T_{GF} = (t'_{ij})$. Далее, пусть $T_{FG}T_{GF} = X$ и $X = (x_{ij})$. Требуется доказать, что $X = E$, т.е. что $x_{ij} = 1$ при $i = j$ и $x_{ij} = 0$ при $i \neq j$ (для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$). Мы докажем этот факт при $j = 1$. В общем случае доказательство абсолютно аналогично. Используя определение матрицы перехода от одного базиса к другому, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= t'_{11}\mathbf{g}_1 + t'_{21}\mathbf{g}_2 + \cdots + t'_{n1}\mathbf{g}_n = \\
&= t'_{11}(t_{11}\mathbf{f}_1 + t_{21}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{f}_n) + \\
&+ t'_{21}(t_{12}\mathbf{f}_1 + t_{22}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{f}_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ t'_{n1}(t_{1n}\mathbf{f}_1 + t_{2n}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{f}_n).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перегруппировывая слагаемые и учитывая определение произведения матриц, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (t_{11}t'_{11} + t_{12}t'_{21} + \dots + t_{1n}t'_{n1})\mathbf{f}_1 + \\ &+ (t_{21}t'_{11} + t_{22}t'_{21} + \dots + t_{2n}t'_{n1})\mathbf{f}_2 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (t_{n1}t'_{11} + t_{n2}t'_{21} + \dots + t_{nn}t'_{n1})\mathbf{f}_n = \\ &= x_{11}\mathbf{f}_1 + x_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + x_{n1}\mathbf{f}_n. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathbf{f}_1 = 1 \cdot \mathbf{f}_1 + 0 \cdot \mathbf{f}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{f}_n$. В силу единственности разложения вектора по базису (см. теорему 2 в §22) имеем $x_{11} = 1$, $x_{21} = 0, \dots, x_{n1} = 0$. Лемма доказана. ∎

Матрицу T_{FG} часто обозначают просто через T. Тогда, в силу леммы, $T_{GF} = T^{-1}$, что позволяет записать равенство (4) в виде

$$A_G = T^{-1} A_F T. \tag{5}$$

Приведем пример применения формулы (4). Пусть в базисе F, состоящем из векторов $\mathbf{f}_1 = (1, -2)$ и $\mathbf{f}_2 = (2, 1)$, линейный оператор задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Надо найти матрицу этого оператора в базисе G, который состоит из векторов $\mathbf{g}_1 = (3, -1)$ и $\mathbf{g}_2 = (4, 2)$. Матрица перехода от базиса F к базису G найдена в конце §30:

$$T_{FG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проделав соответствующие вычисления, получаем, что

$$T_{GF} = (T_{FG})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В заключение параграфа рассмотрим случай, когда один из базисов F и G — стандартный. Предположим, что нам известна матрица оператора в стандартном базисе E и требуется найти его матрицу в базисе F. Как отмечалось на с. 202, компоненты вектора из $\mathbb{R}_n$ являются его координатами в стандартном базисе. Отсюда вытекает, что матрица T_{EF} совпадает с матрицей, в которой по столбцам записаны координаты векторов базиса F в стандартном базисе. Поскольку векторы базиса F известны, эту матрицу тоже можно считать известной. Чтобы найти матрицу A_F, остается найти матрицу, обратную к T_{EF}, и воспользоваться формулой $A_F = (T_{EF})^{-1} A_E T_{EF}$. Аналогично обстоит дело и в случае, когда известна матрица оператора в базисе F и требуется найти его матрицу в стандартном базисе E. В этом случае нужная формула приобретает вид $A_E = T_{EF} A_F (T_{EF})^{-1}$.

§34. Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим два примера линейных операторов.

Пример 1. Пусть линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}_2$ задан равенствами

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1, \\ y_2 = 3x_2. \end{cases}$$

Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ — некоторый базис в $\mathbb{R}_2$. Поскольку вектор $\vec{b}_1$ имеет в этом базисе координаты (1,0), а вектор $\vec{b}_2$ — координаты (0,1), получаем, что наш оператор растягивает вектор $\vec{b}_1$ в 2 раза, а $\vec{b}_2$ — в 3 раза. В таком случае мы можем понять, как действует оператор на произвольный вектор $\vec{x}$. Для этого надо вектор $\vec{x}$ представить в виде суммы $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 \parallel \vec{b}_1$, $\vec{x}_2 \parallel \vec{b}_2$, растянуть $\vec{x}_1$ в два раза, $\vec{x}_2$ — в три раза, а затем сложить полученные векторы. Впрочем, то, что оператор действует достаточно ясным способом, видно и из его координатной записи.

Пример 2. Рассмотрим теперь оператор в $\mathbb{R}_2$, заданный равенствами

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 2x_1 + x_2. \end{cases}$$

Этот оператор вектор $\vec{c}_1 = (1, 1)$ переводит в вектор $\vec{d}_1 = (3, 3)$, т.е. растягивает в 3 раза, а вектор $\vec{c}_2 = (1, -1)$ переводит в вектор $\vec{d}_2 = (-1, 1)$, т.е. "растягивает" в -1 раз. Поскольку векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ образуют базис пространства $\mathbb{R}_2$, то этот факт дает, как и в предыдущем примере, полную геометрическую картину действия оператора.

Из приведенных примеров видна роль векторов, которые под действием оператора растягиваются в некоторое число раз, т.е. переходят в коллинеарные самим себе.

Определение. Ненулевой вектор $\mathbf{c}$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, если существует действительное число t такое, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{c}) = t\mathbf{c}. \tag{1}$$

Число t называется *собственным значением* (или *собственным числом*) оператора $\mathcal{A}$, если существует ненулевой вектор $\mathbf{c}$ такой, что выполнено равенство (1).

Иногда надо соотносить собственный вектор и собственное значение, поэтому при наличии равенства (1) мы будем называть $\mathbf{c}$ собственным вектором, *относящимся к собственному значению* t, а t — собственным значением, *относящимся к собственному вектору* $\mathbf{c}$. В примере 2 собственный вектор $\vec{c}_1 = (1, 1)$ относится к собственному значению 3, а собственное значение -1 относится к собственному вектору $\vec{c}_2 = (1, -1)$.

Отметим два свойства введенных понятий.

Теорема. *Совокупность собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство. Собственные векторы, относящиеся к разным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается просто. Обозначим через M_0 множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению t_0, а через M — множество векторов, состоящее из M_0 и нулевого вектора. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in M$. Если $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \in M$. Пусть теперь $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \neq \mathbf{0}$. Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{c}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{c}_2) = t_0\mathbf{c}_1+t_0\mathbf{c}_2 = t_0(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2)$, то $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2 \in M_0 \subseteq M$. Аналогично проверяется замкнутость M относительно умножения вектора на число.

Второе утверждение докажем индукцией по числу векторов. Пусть векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ являются собственными и относятся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно. Очевидно, можно считать, что $k > 1$. Таким образом, для доказательства базы индукции надо рассмотреть случай, когда $k = 2$. Предположим, что векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ линейно зависимы. Тогда $\mathbf{c}_2 = s\mathbf{c}_1$ для некоторого s. При этом $s \neq 0$, так как иначе $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$ вопреки определению собственного вектора. Далее,

$$(t_2s)\mathbf{c}_1 = t_2(s\mathbf{c}_1) = t_2\mathbf{c}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{c}_2) = \mathcal{A}(s\mathbf{c}_1) = s \cdot \mathcal{A}(\mathbf{c}_1) = s(t_1\mathbf{c}_1) = (t_1s)\mathbf{c}_1.$$

Поскольку $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{0}$ (по определению собственного вектора), то $t_2s = t_1s$ и, следовательно, $t_2 = t_1$, что противоречит условию. Итак, при

$k = 2$ система из k собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям, линейно независима.

Предположим, что это утверждение справедливо для $k = \ell$, и докажем его для $k = \ell + 1$. Рассмотрим систему $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_\ell, \mathbf{c}_{\ell+1}$ собственных векторов оператора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, относящихся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_\ell, t_{\ell+1}$. Пусть система $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_\ell, \mathbf{c}_{\ell+1}$ линейно зависима. В то же время, по нашему предположению, система $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_\ell$ является линейно независимой. В силу леммы 3 из §21 $\mathbf{c}_{\ell+1} = s_1\mathbf{c}_1 + s_2\mathbf{c}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{c}_\ell$ для некоторых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$. Ясно, что хотя бы одно из чисел s_1, s_2, $\ldots$, s_ℓ отлично от нуля (иначе $\mathbf{c}_{\ell+1} = \mathbf{0}$, что противоречит определению собственного вектора). Далее,

$$\begin{aligned}
&(t_{\ell+1}s_1)\mathbf{c}_1 + (t_{\ell+1}s_2)\mathbf{c}_2 + \cdots + (t_{\ell+1}s_\ell)\mathbf{c}_\ell = \\
&= t_{\ell+1}(s_1\mathbf{c}_1 + s_2\mathbf{c}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{c}_\ell) = t_{\ell+1}\mathbf{c}_{\ell+1} = \mathcal{A}(\mathbf{c}_{\ell+1}) = \\
&= \mathcal{A}(s_1\mathbf{c}_1 + s_2\mathbf{c}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{c}_\ell) = s_1\mathcal{A}(\mathbf{c}_1) + s_2\mathcal{A}(\mathbf{c}_2) + \cdots + s_\ell\mathcal{A}(\mathbf{c}_\ell) = \\
&= (t_1s_1)\mathbf{c}_1 + (t_2s_2)\mathbf{c}_2 + \cdots + (t_\ell s_\ell)\mathbf{c}_\ell.
\end{aligned}$$

Мы имеем равенство

$$(t_{\ell+1}s_1)\mathbf{c}_1 + (t_{\ell+1}s_2)\mathbf{c}_2 + \ldots + (t_{\ell+1}s_\ell)\mathbf{c}_\ell = (t_1s_1)\mathbf{c}_1 + (t_2s_2)\mathbf{c}_2 + \cdots + (t_\ell s_\ell)\mathbf{c}_\ell,$$

которое можно переписать в виде

$$(t_{\ell+1}s_1 - t_1s_1)\mathbf{c}_1 + (t_{\ell+1}s_2 - t_2s_2)\mathbf{c}_2 + \ldots + (t_{\ell+1}s_\ell - t_\ell s_\ell)\mathbf{c}_\ell = \mathbf{0}.$$

Поскольку система $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_\ell$ линейно независима, отсюда следует, что $t_{\ell+1}s_1 = t_1s_1$, $t_{\ell+1}s_2 = t_2s_2$, $\ldots$, $t_{\ell+1}s_\ell = t_\ell s_\ell$. Как отмечалось выше, одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$ отлично от нуля. Для определенности пусть $s_1 \neq 0$. Тогда, сократив на s_1 в первом из полученных равенств, имеем $t_{\ell+1} = t_1$. Это противоречит тому, что собственные значения $t_1, t_2, \ldots, t_\ell, t_{\ell+1}$ попарно различны. Следовательно, система $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_\ell, \mathbf{c}_{\ell+1}$ линейно независима. Теорема доказана. ∎

Рассмотрим вопрос о том, как найти собственные векторы и собственные значения.

Рассмотрим вначале конкретный оператор в $\mathbb{R}_2$:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 4x_2, \\ y_2 = 5x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что t — собственное значение, а (x_1, x_2) — собственный вектор, относящийся к t. Тогда

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = tx_1, \\ 5x_1 + 2x_2 = tx_2. \end{cases}$$

Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} (3-t)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 + (2-t)x_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Эта однородная система имеет ненулевое решение, поэтому определитель системы равен нулю (см. теорему 2 в §14):

$$\begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 5 & 2-t \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то после приведения подобных членов получится многочлен второго порядка относительно t:

$$\begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 5 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t - 14.$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

а равенство $t^2 - 5t - 14 = 0$ — ее *характеристическим уравнением.* Отметим, что определитель

$$\begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 5 & 2-t \end{vmatrix}$$

можно записать в виде $|A - tE|$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица второго порядка.

Итак, если t — собственное значение оператора (2), то t — корень характеристического уравнения. Обратное, вообще говоря, неверно, так как собственные значения по определению являются действительными числами, а характеристическое уравнение может иметь комплексные корни, не являющиеся действительными. Но всякий корень характеристического уравнения $|A - tE| = 0$, являющийся действительным числом, будет собственным значением оператора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Действительно, система (3) в этом случае имеет ненулевое решение. Это решение и будет собственным вектором.

В нашем случае характеристическое уравнение имеет два корня: $t_1 = -2$, $t_2 = 7$. Берем первый и возвращаемся к системе (3) (при $t = -2$):

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Мы имеем однородную систему уравнений, ранг основной матрицы которой равен 1 и меньше числа неизвестных. В силу этого система (4) имеет ненулевые решения. Все они будут собственными векторами оператора. Совокупность собственных векторов вместе с нуль-вектором образует подпространство. Оно обычно характеризуется своим базисом, т.е. фундаментальным набором решений системы (4).

Фундаментальный набор решений однородной системы (4) состоит из одного вектора. В качестве такового можно взять любое ненулевое решение, например $\vec{c}_1 = (-4, 5)$. Таким образом, множество собственных векторов, относящихся к собственному значению $t_1 = -2$, совпадает с множеством векторов вида $s\vec{c}_1$, где $s \in \mathbb{R}$ и $s \neq 0$. Аналогичным образом получаем, что множество собственных векторов, относящихся к $t_2 = 7$, совпадает с множеством векторов вида $s\vec{c}_2$, где $\vec{c}_2 = (1, 1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $s \neq 0$.

Обобщим способ нахождения собственных векторов и собственных значений на общий случай. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, заданный равенствами

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

или в краткой матричной записи $Y = AX$ (где $A = (a_{ij})$ — матрица нашего оператора в некотором базисе). Если вектор $\mathbf{x}$ является собственным вектором, относящимся к собственному числу t_0, то

$$\begin{cases} t_0x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ t_0x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_0x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Запишем эту систему в следующем виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - t_0)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t_0)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - t_0)x_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Вектор $\mathbf{x}$ является собственным вектором, относящимся к собственному значению t_0, тогда и только тогда, когда он является ненулевым решением системы (5). Эта система является крамеровской, поэтому она имеет ненулевое решение только в случае, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t_0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t_0 & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-t_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что t_0 является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-t \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

которое в сокращенной записи имеет вид $|A - tE| = 0$. Если раскрыть определитель из левой части равенства (6), то получится многочлен степени n относительно t. Как и в рассмотренном выше примере, он называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а уравнение (6) — ее *характеристическим уравнением.* Мы видели, что всякое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ является корнем характеристического уравнения матрицы A. Как и в рассмотренном выше примере, справедливо и обратное: всякий действительный корень этого уравнения является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Итак,

> *собственными значениями матрицы являются действительные корни ее характеристического уравнения и только они.*

Задача нахождения собственных векторов и собственных значений решается, следовательно, следующим образом.

> *Находим сначала действительные корни характеристического уравнения* (6), *пусть это будут числа* $t_1, t_2, \ldots, t_k$. *Подставляем их последовательно вместо* t_0 *в систему* (5) *и каждый раз находим фундаментальный набор решений. Например, пусть для* t_1 *фундаментальный набор решений состоит из векторов* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$. *Тогда множество собственных векторов, относящихся к* t_1, *совпадает с множеством векторов вида* $s_1\mathbf{c}_1 + s_2\mathbf{c}_2 + \cdots + s_m\mathbf{c}_m$, *где* $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ *и по крайней мере одно из чисел* $s_1, s_2, \ldots, s_m$ *отлично от* 0.

Итак, мы видим, что собственные значения оператора являются корнями характеристического уравнения его матрицы *в некотором базисе*. Что будет, если взять матрицу оператора *в другом* базисе? Могут ли при этом получиться другие собственные значения? Следующее утверждение показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V, F и G — два базиса в V, а A_F и A_G — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в базисах F и G соответственно. Тогда $|A_F - tE| = |A_G - tE|$.*

Доказательство. Матрицы A_F и A_G связаны соотношением $A_G = T^{-1}A_FT$, где T — матрица перехода от F к G — см. формулу (5) в §33. Ясно, что $T^{-1}ET = T^{-1}T = E$. Используя свойство 7 на с. 252 и свойство 5 на с. 266, имеем

$$
\begin{aligned}
|A_G - tE| &= |T^{-1}A_FT - tT^{-1}ET| = |T^{-1}(A_F - tE)T| = \\
&= |T^{-1}| \cdot |A_F - tE| \cdot |T| = \frac{1}{|T|} \cdot |A_F - tE| \cdot |T| = |A_F - tE|.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. ■

Это лемма позволяет определить *характеристический многочлен линейного оператора* и его *характеристическое уравнение* как соответственно характеристический многочлен и характеристическое уравнение матрицы этого оператора в некотором базисе. В частности,

> *собственные значения линейного оператора — это действительные корни его характеристического уравнения и только они.*

§35. Операторы, приводимые к диагональному виду

В §34 было введено понятие собственного вектора оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ как ненулевого вектора, который оператором переводится в вектор, коллинеарный исходному. Линейные операторы могут иметь "разное количество" собственных векторов. Представим пространство $\mathbb{R}_2$ в виде векторов координатной плоскости, выходящих из начала координат. Оператор поворота вокруг начала координат на угол α, не кратный π, вообще не имеет собственных векторов. Собственные векторы оператора

$$
\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = \phantom{x_1 + {}} x_2 \end{cases}
$$

будут исчерпываться векторами вида $t\mathbf{y}_1$, где $\mathbf{y}_1$ — первый базисный вектор, а t — ненулевое действительное число, т.е. составлять вместе с нуль-вектором одномерное подпространство. А из собственных векторов оператора

$$\begin{cases} y_1 = \ \ x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 2x_1 + \ \ x_2, \end{cases}$$

как мы видели в начале §34, можно составить базис исходного пространства. А именно, указанный базис состоит из векторов $\vec{c}_1 = (1, 1)$ и $\vec{c}_2 = (1, -1)$. Если мы запишем матрицу этого оператора в базисе $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ (см. начало §34), то она примет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. будет диагональной.

Определение. Оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ называется *приводимым к диагональному виду* (или *диагонализируемым*), если существует базис исходного пространства, в котором матрица оператора является диагональной. Такие операторы называются также *операторами простой структуры*.

Такие операторы и будут основным объектом внимания в этом параграфе.

Теорема. *Оператор* $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$*, заданный в векторном пространстве* V*, приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда в* V *существует базис, составленный из собственных векторов оператора* $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть матрица A оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ является диагональной, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда по определению матрицы оператора в базисе $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = t_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = t_2\mathbf{y}_2, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = t_n\mathbf{y}_n$. Это означает, что базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ состоит из собственных векторов оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$.

Предположим теперь, что базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ пространства V состоит из собственных векторов оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, т.е. $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = s_1\mathbf{y}_1$,

$\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = s_2\mathbf{y}_2, \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = s_n\mathbf{y}_n$ для некоторых чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тогда по определению матрицы оператора в базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ приводим к диагональному виду. Теорема доказана. ■

Из доказательства видно, что

> *если пространство имеет базис из собственных векторов данного оператора, то матрица оператора в этом базисе диагональна (и на диагонали стоят собственные значения, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов), и если матрица оператора в некотором базисе диагональна, то этот базис состоит из собственных векторов данного оператора.*

Следствие. *Пусть A — матрица оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в некотором базисе n-мерного пространства V. Если уравнение $|A - tE| = 0$ имеет n различных действительных корней, то оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ приводим к диагональному виду.*

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — различные действительные корни уравнения $|A - tE| = 0$. Тогда они являются собственными значениями оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$. Для каждого собственного значения t_i зафиксируем собственный вектор $\mathbf{y}_i$. По теореме из §34 векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейно независимы. Поскольку их n штук, они образуют базис пространства V. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду. Следствие доказано. ■

Приведем примеры. Пусть оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала собственные значения этого оператора. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$|A - tE| = \begin{vmatrix} 4-t & 5 & 6 \\ -5 & -7-t & -9 \\ 2 & 3 & 4-t \end{vmatrix} = -t^3 + t^2.$$

Имеем два различных собственных значения: $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Найдем собственные векторы, относящиеся к t_1. Имеем

$$A - t_1E = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однородная система, соответствующая полученной матрице, имеет одну свободную неизвестную — x_3. Полагая $x_3 = 1$, находим, что $x_2 = -2$, а $x_1 = 1$. Итак, к собственному значению t_1 относится только один линейно независимый собственный вектор — вектор $\vec{a}_1 = (1, -2, 1)$. Аналогично проверяется, что к собственному значению t_2 также относится только один линейно независимый собственный вектор — вектор $\vec{a}_2 = (3, -3, 1)$. В силу теоремы из §34 набор векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ линейно независим. Но он не является базисом всего пространства, так как содержит лишь два вектора, а оператор действует в трехмерном пространстве. Следовательно, данный оператор не приводим к диагональному виду.

Пусть теперь оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 \\ -12 & -19 & -24 \\ 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

После соответствующих вычислений получаем, что

$$|A - tE| = -(t-1)^2(t+1),$$

к собственному значению $t_1 = 1$ относятся два линейно независимых собственных вектора $\vec{a}_1 = (-5, 3, 0)$ и $\vec{a}_2 = (-2, 0, 1)$, а к собственному значению $t_2 = -1$ — один линейно независимый собственный вектор $\vec{a}_3 = (1, -2, 1)$. В силу теоремы из §34 векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно независимы. Поскольку порядок матрицы равен 3, оператор действует в трехмерном пространстве. Следовательно, векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис пространства. Матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(каждое собственное значение стоит на диагонали столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов).

Приведем класс задач, связанных с линейными операторами, решение которых существенно упрощается, если операторы приводимы к диагональному виду. Пусть в пространстве $\mathbb{R}_n$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейный оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ задается равенством $Y = AX$. Если мы к вектору AX снова применим оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, то получим вектор A^2X, после k-кратного применения — вектор A^kX. Довольно часто надо знать поведение оператора $Y = A^kX$ при $k \to \infty$.

Вернемся к примеру с насекомыми, рассмотренному в §33 (см. пример 3 на с. 278). Если $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — количество насекомых в начале года, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ — в конце года, то, как легко понять, $Y = AX$, где $Y = \vec{y}^\top$, $X = \vec{x}^\top$, а

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Количество насекомых к концу второго года определится вектором A^2X, к концу третьего — A^3X и т.д. Если нас интересует, как будет развиваться популяция насекомых при $k \to \infty$, то мы должны рассмотреть матрицы $A, A^2, A^3, \ldots, A^k, \ldots$, т.е. научиться вычислять матрицу A^k для произвольного k. В данном примере все просто:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

К началу четвертого года количество насекомых каждого возраста будет совпадать с соответствующим числом на начало первого года.

Для произвольной матрицы A даже третьего порядка вычислить A^k при произвольном k довольно сложно. Однако если A — матрица диагонализируемого оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, то, как мы сейчас увидим, можно указать простую формулу для вычисления A^k. Итак, пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — диагонализируемый оператор и нам известна его матрица A в некотором базисе F. Пусть, далее, G — тот базис, в котором матрица нашего оператора диагональна, а именно имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Алгоритм нахождения базиса G и матрицы A' указан выше в данном параграфе, поэтому G и A' можно считать известными. Легко понять, что

$$(A')^k = \begin{pmatrix} t_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_3^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_n^k \end{pmatrix}.$$

Обозначим через T матрицу перехода от базиса F к базису G. Ее также можно считать известной (алгоритм ее нахождения см. на с. 262). В силу формулы (5) из §33, имеет место равенство $A' = T^{-1}AT$. Умножая обе части этого равенства слева на T и справа на T^{-1}, получаем, что $A = TA'T^{-1}$. Но тогда

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{(TA'T^{-1}) \cdot (TA'T^{-1}) \cdot \ldots \cdot (TA'T^{-1})}_{k \text{ раз}} = \\ &= TA'(T^{-1}T)A'(T^{-1}T)A' \ldots (T^{-1}T)A'T^{-1} = T(A')^kT^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, $A^k = T(A')^kT^{-1}$. Это и есть упоминавшаяся выше формула для вычисления A^k.

§36. Образ и ядро линейного оператора

С линейным оператором $\mathcal{A}$ в пространстве V связаны два важных подмножества из V.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V. *Образом* $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{y} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$. *Ядром* $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Образ оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, а его ядро — через $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

Отметим, что каждое из множеств $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ непусто. Для первого из них это очевидно, а для второго вытекает из отмеченного на с. 279 факта, что $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Приведем несколько примеров. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор в обычном трехмерном пространстве, который произвольный вектор $\vec{x}$ переводит в его проекцию на плоскость Oxy. Тогда, как легко понять, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — это плоскость Oxy, а $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ — ось Oz. В §33 в произвольном пространстве V были определены нулевой оператор $\mathcal{O}$ и тождественный оператор $\mathcal{E}$ (см. с. 279). Очевидно, что $\operatorname{Im}\mathcal{O} = \{\mathbf{0}\}$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{O} = V$, причем нулевой оператор — единственный, у которого образом является нулевое подпространство, а ядром — все пространство. Далее, ясно, что $\operatorname{Im}\mathcal{E} = V$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{E} = \{\mathbf{0}\}$. Существуют и другие операторы, у которых образом является все пространство, а ядром — нулевое подпространство. К их числу относятся, например, оператор растяжения в t раз для произвольного $t \neq 0$, оператор поворота плоскости вокруг начала координат на фиксированный угол α, оператор симметрии плоскости относительно оси Ox (или Oy). Если $\mathcal{P}$ — оператор проектирования на подпространство M параллельно подпространству M' (см. с. 280), то, как легко понять, $\operatorname{Im}(\mathcal{P}) = M$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{P}) = M'$.

Можно заметить, что во всех приведенных выше примерах образ и ядро являлись подпространствами. Это верно для произвольного линейного оператора в произвольном пространстве. В самом деле, пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y} \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, а t — число. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x} \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y} = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}).$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, а t — число. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ — подпространство в V.

Сказанное позволяет говорить о размерности и базисе образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. В следующей теореме указана связь между размерностями этих подпространств, а из ее доказательства легко извлекается способ нахождения их базисов.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в конечномерном векторном пространстве V. Тогда сумма размерностей образа и ядра оператора $\mathcal{A}$ равна размерности V.*

Доказательство. Положим $\dim V = n$ и зафиксируем произвольный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ пространства V. Обозначим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе через A, а ее ранг — через r. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t_1\mathbf{f}_1 + t_2\mathbf{f}_2 + \cdots + t_n\mathbf{f}_n) = t_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + t_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \cdots + t_n\mathcal{A}(\mathbf{f}_n).$$

Поскольку пространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ состоит из векторов вида $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, получаем, что набор векторов $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ является системой образующих этого пространства. Следовательно, размерность $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ равна рангу указанного набора векторов. Учитывая, что столбцы матрицы A суть в точности столбцы координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$, получаем, что $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = r$.

Далее, пусть $\mathbf{x} \in V$, а X — столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Ясно, что $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $AX = O$, где O — нулевой столбец. Иными словами, пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ совпадает с общим решением однородной системы линейных уравнений $AX = O$. Следовательно, базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ есть фундаментальный набор решений этой системы, а размерность $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ равна числу векторов в этом наборе. В силу теоремы из §29 это число векторов равно $n - r$. Таким образом, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - r$. Следовательно,

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = r + (n - r) = n.$$

Теорема доказана. ■

Сформулируем в явном виде алгоритмы нахождения базисов образа и ядра, вытекающие из доказательства теоремы.

> *Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, надо привести к ступенчатому виду матрицу $A^\top$. Ненулевые строки полученной матрицы и будут базисом $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, надо найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть A. Он и будет искомым базисом.*

Приведем пример. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти базис и размерность подпространств $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Начнем с образа оператора. Действуя по указанному выше алгоритму, имеем

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, векторы $(2, 1, -1, 1)$ и (0,5,5,1) образуют базис образа оператора $\mathcal{A}$. В частности, отсюда вытекает, что размерность образа равна 2.

Перейдем к ядру оператора $\mathcal{A}$. Действуя в соответствии с указанным выше алгоритмом, имеем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной нами матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ \phantom{2x_1 + 0 \cdot x_2 +{}} x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Чтобы привести ее к лестничному виду, надо переставить столбцы с неизвестными x_2 и x_3. Ясно, что свободными неизвестными будут x_2 и x_4. Полагая $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, из второго уравнения получаем, что $x_3 = 0$, и из первого — что $x_1 = 0$. Далее, полагая $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, из второго уравнения получаем, что $x_3 = 1$, и из первого — что $x_1 = 1$. Итак, в качестве базиса ядра можно взять векторы (0,1,0,0) и (1,0,1,1). В частности, размерность ядра равна 2.

В заключение параграфа приведем еще один алгоритм нахождения базисов образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. Его преимуществом является то, что он позволяет найти базисы образа и ядра *одновременно*.

Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ матрицу A. Составим матрицу B порядка $n \times 2n$ следующим образом. В левой половине (т.е. в первых n столбцах) этой матрицы запишем матрицу $A^\top$, а в ее правой половине (в последних n столбцах) — единичную матрицу. Элементарными преобразованиями всей матрицы B приведем ее левую половину к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через C, ее левую половину (квадратную матрицу, состоящую из первых n столбцов матрицы C) — через C_1, а ее правую половину (квадратную матрицу, состоящую из последних n столбцов матрицы C) — через C_2. Тогда

1) *ненулевые строки матрицы C_1 образуют базис образа оператора $\mathcal{A}$;*

2) *строки матрицы C_2, которые являются продолжениями нулевых строк матрицы C_1, образуют базис ядра оператора $\mathcal{A}$.*

Утверждение 1 немедленно вытекает из описанного ранее алгоритма нахождения базиса образа и того факта, что в процессе преобразований левая и правая части матрицы не "перемешиваются".

Обоснуем утверждение 2. Заметим, что вектор $\mathbf{f}_i$ имеет в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ координаты (0,...,0, 1,0,...,0), где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в правой части матрицы B, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ в базисе, составленном из этих векторов. Вспоминая определение матрицы оператора, получаем, что в левой половине i-й строки матрицы B стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{f}_i)$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Итак, матрица B обладает следующим свойством: если в правой части какой-то строки этой матрицы стоят координаты некоторого вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, то в левой части этой строки стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в том же базисе. Нетрудно проверить, что это свойство сохраняется при элементарных преобразованиях матрицы. Поскольку матрица C получена из B элементарными преобразованиями, она также обладает указанным свойством. Обозначим через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ строки матрицы C_2, являющиеся продолжениями нулевых строк матрицы C_1. В силу сказанного выше $\mathcal{A}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_i \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$. Далее, можно проверить, что векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы. Из утверждения 1 вытекает, что $k + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n$. По теореме $k = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Итак, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ — линейно независимый набор векторов из $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, число векторов в котором равно размерности этого подпространства. В силу теоремы 2 из §23 эти векторы образуют базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Утверждение 2 доказано.

Решим указанным способом рассмотренный выше пример. Имеем

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для наглядности мы провели в последней матрице горизонтальную черту, которая в левой части матрицы ограничивает снизу базис образа, а в правой части ограничивает сверху базис ядра. Итак, векторы $(2, 1, -1, 1)$ и (0,5,5,1) образуют базис образа оператора $\mathcal{A}$, а векторы (2,0,2,2) и (0,1,0,0) — базис его ядра. Отметим, что базис образа получился такой же, как и при первом способе решения, а базис ядра — другой.

§37. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) нахождение матрицы линейного оператора в одном базисе, если известна его матрица в другом базисе;

2) нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора;

3) задачи о приводимости линейного оператора к диагональному виду;

4) нахождение базиса образа или ядра линейного оператора.

Примеры решения задач всех этих типов имеются в §33–36 данной главы, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. В пространстве $\mathbb{R}_3$ зафиксирован базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Пусть координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе есть (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) соответственно. Являются ли отображения $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, задаваемые следующими формулами, линейными операторами:

а) $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_1 + x_2, \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 + 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_1 + x_2, \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 2x_2, \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2, \\ y_3 = x_3? \end{cases}$

2. В обычном трехмерном пространстве зафиксируем прямоугольную декартову систему координат $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Представим пространство $\mathbb{R}_3$ как множество векторов, выходящих из точки O. Доказать, что следующие отображения являются линейными операторами:

а) симметрия относительно плоскости $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$;

б) симметрия относительно прямой

$$\begin{cases} x = -1 + \quad t, \\ y = -2 + -2t, \\ z = \quad 3 + \quad 3t; \end{cases}$$

в) поворот на угол α относительно прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

3. В условиях задачи 2 выяснить, являются ли следующие отображения линейными операторами:

а) вычитание из вектора его проекции на плоскость $x_1 - 2x_3 = 0$;

б) умножение вектора на его длину;

в) проектирование вектора на плоскость $4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 1 = 0$;

г) сопоставление произвольному вектору некоторого фиксированного вектора $\vec{a}$?

4. На плоскости зафиксирована прямоугольная декартова система координат $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Оператор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ является симметрией относительно прямой ℓ. Найти его матрицу в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

а) ℓ: $x_1 + x_2 = 0$; б) ℓ: $x_1 - 3x_2 = 0$; в)* ℓ: $ax_1 + bx_2 = 0$.

5. Линейный оператор в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ имеет матрицу A. Найти его матрицу в базисе $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, если:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1),\ \vec{a}_2 = (2, 3),$ $\vec{b}_1 = (4, 1),\quad \vec{b}_2 = (1, 9),$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\vec{a}_1 = (2, 1),\ \vec{a}_2 = (-2, 3),$ $\vec{b}_1 = (2, 5),\ \vec{b}_2 = (-10, 3),$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\vec{a}_1 = (2, 1),\quad \vec{a}_2 = (0, 1),$ $\vec{b}_1 = (6, -1),\ \vec{b}_2 = (-2, 1),$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\vec{a}_1 = (1, -1),\ \vec{a}_2 = (2, 3),$ $\vec{b}_1 = (0, -5),\ \vec{b}_2 = (3, 2),$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6*. В обычном трехмерном пространстве зафиксирован вектор $\vec{a}$. Доказать, что преобразование пространства, заданное правилом $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x}) \cdot \vec{a}$, является линейным оператором, и найти матрицу этого оператора

а) в стандартном базисе при $\vec{a} = (2, -3, 5)$;

б) в стандартном базисе при $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$;

в) в базисе $\vec{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (1, 0, 0)$ при $\vec{a} = (1, 2, 3)$.

7*. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 2-го порядка. Доказать, что следующие преобразования пространства $\mathbf{Mat}_{2,2}$ являются линейными операторами, и найти их матрицы в базисе, состоящем из матричных единиц:

а) $\mathcal{A}(X) = AX$; б) $\mathcal{A}(X) = XA$.

8*. В пространстве $\mathbf{Pol}_n$ всех многочленов степени не выше n от одной переменной рассмотрим *оператор дифференцирования* $\mathcal{D}$, определяемый правилом: $\mathcal{D}(p) = p'$, где p' — производная многочлена p. Доказать, что этот оператор — линейный, и найти его матрицу в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

9. Показать, что если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ векторного пространства V линейно зависимы, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор этого пространства, то векторы $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1), \mathcal{A}(\mathbf{a}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ тоже линейно зависимы.

10*. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис векторного пространства V, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — произвольный набор из n векторов этого пространства. Доказать, что в V существует, и притом только один, линейный оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_n) = \mathbf{b}_n$.

11. В пространстве $\mathbb{R}_3$ даны векторы $\vec{a}_1 = (2,3,5)$, $\vec{a}_2 = (0,1,2)$, $\vec{a}_3 = (1,0,0)$, $\vec{b}_1 = (1,1,1)$, $\vec{b}_2 = (1,1,-1)$ и $\vec{b}_3 = (2,1,2)$. Доказать, что существует, и притом только один, линейный оператор $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}_3$ такой, что $\mathcal{A}(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$, $\mathcal{A}(\vec{a}_2) = \vec{b}_2$, $\mathcal{A}(\vec{a}_3) = \vec{b}_3$, и найти его матрицу в стандартном базисе.

12. Найти собственные векторы и собственные значения следующих линейных операторов:

а) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1 + 2x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 4x_2, \\ y_2 = 5x_1 + 2x_2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 4x_1 + 3x_2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2, \\ y_2 = -2x_1 + 3x_2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y_1 = x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ y_3 = -x_1 - 2x_3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y_1 = x_2, \\ y_2 = x_3, \\ y_3 = x_4, \\ y_4 = x_1. \end{cases}$

13*. Найти собственные векторы и собственные значения линейных операторов из задачи 2.

14*. Найти собственные векторы и собственные значения оператора дифференцирования в пространстве $\mathbf{Pol}_n$ (определение оператора дифференцирования см. в задаче 8).

15. Приводимы ли следующие линейные операторы к диагональному виду:

а) $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 6x_2 - 3x_3, \\ y_2 = -x_1 + x_3, \\ y_3 = x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 8x_2 + 6x_3, \\ y_2 = -4x_1 + 10x_2 + 6x_3, \\ y_3 = 4x_1 - 8x_2 - 4x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 8x_3, \\ y_2 = 3x_1 - x_2 + 6x_3, \\ y_3 = -2x_1 - 5x_3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y_1 = -4x_1 + 2x_2 + 10x_3, \\ y_2 = -4x_1 + 3x_2 + 7x_3, \\ y_3 = -3x_1 + x_2 + 7x_3? \end{cases}$

16. Найти базис, в котором матрица следующего линейного оператора диагональна, и матрицу этого оператора в этом базисе:

а) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2, \\ y_2 = 2x_2, \\ y_3 = -2x_1 - 2x_2 - x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 6x_2, \\ y_2 = -3x_1 - 5x_2, \\ y_3 = -3x_1 - 6x_2 + x_3. \end{cases}$

17. Пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — линейный оператор в пространстве V. Линейный оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}^2(\mathbf{x})$ определяется равенством $\mathcal{A}^2(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Доказать, что все собственные векторы оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ являются собственными векторами оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}^2(\mathbf{x})$. Как связаны собственные значения этих операторов?

18*. Линейный оператор с единственным собственным значением имеет в некотором базисе матрицу A. Доказать, что этот оператор приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда матрица A диагональна.

19*. Доказать, что любой ненулевой вектор пространства V является собственным вектором линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — оператор растяжения.

20. Найти базис образа линейного оператора, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 12 \end{pmatrix}$.

21. Найти базис ядра линейного оператора, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

22. Найти образ и ядро линейного оператора, заданного матрицей:

а) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4, \\ y_4 = -2x_1 + 6x_3 + 6x_4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 2x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4, \\ y_3 = -x_2 + x_3 - x_4, \\ y_4 = x_1 + 4x_3 + x_4. \end{cases}$

3. Ответы

1. а) Да; б) нет; в) нет; г) да.

3. а) Да; б) нет; в) нет; г) да при $\vec{a} = \vec{0}$ и нет при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

4. а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2} \\ -\dfrac{2ab}{a^2 + b^2} & \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$.

5. а) $\begin{pmatrix} -5/7 & 46/7 \\ -15/7 & 40/7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 19/7 & 59/7 \\ 8/7 & 30/7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & 25 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 18 & 9 & 3 \\ -6 & -3 & -1 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

10. *Указание*: рассмотреть оператор, заданный правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$, где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Указание*: использовать задачу 10.

12. а) Собственные значения: 1, 3; собственные векторы: $(1,-1)c$ $(c \neq 0)$, $(1,1)c$ $(c \neq 0)$; б) собственные значения: 7, -2; собственные векторы: $(1,1)c$ $(c \neq 0)$, $(-4,5)c$ $(c \neq 0)$; в) собственные значения: -1, 5; собственные векторы: $(1,-1)c$ $(c \neq 0)$, $(1,1)c$ $(c \neq 0)$; г) собственные значения: 1, 4; собственные векторы: $(1,1)c$ $(c \neq 0)$, $(1,-1)c$ $(c \neq 0)$; д) собственные значения: 1, -1; собственные векторы: $(1,0,1)c_1 + (0,1,0)c_2$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$, $(1,0,-1)c$ $(c \neq 0)$; е) собственное значение: -1, собственные векторы: $(1,1,-1)c$ $(c \neq 0)$; ж) собственные значения: 4, 0; собственные векторы: $(1,1,1,1)c$ $(c \neq 0)$, $(1,-1,0,0)c_1 + (0,1,-1,0)c_2 + (0,0,1,-1)c_3$ $(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0)$; з) собственные значения: 1, -1; собственные векторы: $(1,1,1,1)c$ $(c \neq 0)$; $(1,-1,1,-1)c$ $(c \neq 0)$.

13. а) Собственные значения: 1, -1; собственные векторы: $(1,-2,0)c_1 + (0,1,1)c_2$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$, $(2,1,-1)c$ $(c \neq 0)$; б) собственные значения: 1, -1; собственные векторы: $(1,-2,3)c$ $(c \neq 0)$, $(2,1,0)c_1 + (0,3,2)c_2$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$; в) если $\alpha \neq n\pi$, то собственное значение: 1, собственные векторы: $(1,2,-1)c$ $(c \neq 0)$; если $\alpha = 2k\pi$, то собственное значение: 1, все ненулевые векторы являются собственными; если $\alpha = (2k+1)\pi$, то собственные значения: 1, -1; собственные векторы: $(1,2,-1)c$ $(c \neq 0)$, $(2,-1,0)c_1 + (0,1,2)c_2$ $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$.

14. Единственное собственное значение — 0, собственные векторы — все ненулевые константы и только они.

15. а) Да; б) да; в) нет; г) нет.

16. а) Базис: (0,0,1), $(-1,0,1)$, $(-2,-1,2)$; матрица: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) базис: $(-2,1,0)$, (0,0,1), $(-1,1,1)$; матрица: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

17. Собственные значения оператора $\mathcal{A}^2$ являются квадратами собственных значений оператора $\mathcal{A}$.

20. а) $(1,-3,-2)$, $(-2,1,-1)$; б) $(2,-1,2)$, (1,1, 2); в) $(1,-1,-1)$, (2,3,8).

21. а) $(-4,1,3,0)$, $(-1,1,0,3)$; б) $(13,5,-6,2)$; в) $(15,4,-7,5)$.

22. а) Образ: $(1,2,3,-2)c_1+(1,1,3,2)c_2$, ядро: $(3,-1,1,0)c_1+(3,-2,0,1)c_2$; б) образ: $(2,3,-1,0)c_1+(0,1,0,1)c_2+(0,0,1,5)c_3$, ядро: $(3,-2,-1,1)c$.

4. Самостоятельная работа №7

1. На плоскости зафиксирована прямоугольная декартова система координат $(O;\ \vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Оператор $\vec{y}=\mathcal{A}(\vec{x})$ является симметрией относительно прямой ℓ. Найти его матрицу в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$.

а) ℓ: $2x-y=0$; б) ℓ: $2x+y=0$; в) ℓ: $3x+y=0$; г) ℓ: $3x-y=0$.

2. Линейный оператор в базисе $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ имеет матрицу A. Найти его матрицу в базисе $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$, если:

а) $\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,-1),\ \vec{a}_2=(2,3),\\ \vec{b}_1=(4,1),\quad \vec{b}_2=(1,9),\end{array}\quad A=\begin{pmatrix}2&1\\-4&3\end{pmatrix}$;

б) $\begin{array}{l}\vec{a}_1=(2,1),\ \vec{a}_2=(-2,3),\\ \vec{b}_1=(2,5),\ \vec{b}_2=(-10,3),\end{array}\quad A=\begin{pmatrix}0&2\\-1&7\end{pmatrix}$;

в) $\begin{array}{l}\vec{a}_1=(1,1),\ \vec{a}_2=(0,-2),\\ \vec{b}_1=(1,3),\ \vec{b}_2=(2,0),\end{array}\quad A=\begin{pmatrix}0&3\\-1&2\end{pmatrix}$;

г) $\begin{array}{l}\vec{a}_1=(-2,3),\ \vec{a}_2=(3,1),\\ \vec{b}_1=(1,4),\quad \vec{b}_2=(5,9),\end{array}\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}$.

3. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, задаваемого в некотором базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-3&4\\4&-7&8\\6&-7&7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}7&-12&-2\\3&-4&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}$.

4. Можно ли оператор, задаваемый в некотором базисе следующей матрицей, привести к диагональному виду:

а) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&-1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2&4&3\\-2&-1&-2\\-4&-4&-5\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}17&11&18\\-6&-4&-6\\-12&-8&-13\end{pmatrix}$?

5. Найти образ и ядро линейного оператора, задаваемого матрицей:

а) $\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&1&1\\-7&1&-7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&-1\\2&6&4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&3&5\\1&7&9\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&2\\0&5&2\end{pmatrix}$.

Глава 8

Евклидовы пространства

В этой главе на произвольные векторные пространства будет распространено понятие скалярного произведения векторов. Это позволит ввести в абстрактных векторных пространствах аналоги таких геометрических понятий, как длина вектора, расстояние между точками, угол между векторами, проекция вектора на плоскость и др. Кроме того, естественно вводятся и оказываются очень полезными понятия, связанные с ортогональностью векторов, — ортонормированный базис, ортогональное дополнение и др. После этого рассматриваются симметрические операторы в евклидовых пространствах, сведения о которых пригодятся нам в главе 10.

§38. Скалярное произведение в векторном пространстве

В предыдущей главе были рассмотрены примеры применения векторных пространств при решении практических задач. Однако довольно часто в таких задачах возникает необходимость иметь числовые характеристики векторов (такие, как длина) и их взаимного расположения (угол между векторами). Это осуществляется введением в векторном пространстве дополнительной операции, называемой скалярным произведением.

Определение. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Говорят, что на V *задано скалярное произведение*, если любым двум векторам $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ поставлено в соответствие действительное число, называемое *скалярным произведением* этих векторов и обозначаемое через $\mathbf{xy}$ или

$(\mathbf{x},\mathbf{y})$, так, что выполнены следующие условия (здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — произвольные векторы из V, а t — произвольное действительное число):

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (скалярное произведение *коммутативно*);

2) $(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t\cdot(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения);

3) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})+(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения*);

4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Векторное пространство, на котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым.* Свойства 1–4 называются *аксиомами евклидова пространства.*

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 1. Прежде всего отметим, что множество всех векторов обычного трехмерного пространства с обычным скалярным произведением является евклидовым пространством, так как все аксиомы 1–4 в этом случае выполнены (см. с. 25). То же самое можно сказать и о множестве всех векторов на плоскости с обычным скалярным произведением.

Пример 2. Рассмотрим теперь векторное пространство $\mathbf{Pol}$ всех многочленов от одной переменной. Для произвольных многочленов $f, g \in \mathbf{Pol}$ положим

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1–4. Это означает, что $\mathbf{Pol}$ превращается в евклидово пространство. Точно таким же образом можно ввести скалярное произведение в пространстве $\mathbf{Pol}_n$ всех многочленов от одной переменной степени не выше n.

Ясно, что нулевое векторное пространство станет евклидовым, если мы определим скалярное произведение правилом $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Следующий пример показывает, что операцию скалярного произведения можно ввести в произвольном конечномерном векторном пространстве.

Пример 3. Пусть V — произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство, а $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — его базис. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Обозначим координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_n$ через $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ соответственно. Положим

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Прямая проверка показывает, что аксиомы 1–4 в этом случае также выполняются. Следовательно, V с введенной операцией — евклидово пространство.

Отметим, что в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно определять различными способами. Так, например, в задаче 2 на с. 336 указано скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}_2$, отличное от скалярного произведения, введенного только что в примере 3.

Укажем несколько простых следствий из аксиом евклидова пространства. Аксиома 2 утверждает, что скалярный множитель можно выносить от первого сомножителя скалярного произведения. Используя аксиому 1, несложно показать, что скалярный множитель можно выносить и от второго сомножителя. В самом деле,

$$(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = (t\mathbf{y}, \mathbf{x}) = t \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = t \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3, в которой утверждается дистрибутивность по первому аргументу, — в действительности имеет место и дистрибутивность по второму аргументу:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Несложно доказать дистрибутивность скалярного произведения относительно вычитания:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= (\mathbf{x} + (-1) \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + ((-1) \cdot \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (-1) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{xz} - \mathbf{yz}.\end{aligned}$$

Ясно также, что аксиома 3 справедлива не только для двух слагаемых, но и для произвольного их числа. Отметим еще, что

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

для любого вектора $\mathbf{x}$. Действительно,

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = (0 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

Скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{x}$. Аксиома 4 позволяет дать следующее определение.

Определение. *Длиной* вектора $\mathbf{x}$ называется число $\sqrt{\mathbf{xx}}$, обозначаемое через $|\mathbf{x}|$.

Это определение представляется естественным, так как в обычном пространстве длина вектора также равна корню квадратному из его скалярного квадрата. Как мы увидим ниже, на евклидовы пространства переносятся и многие другие свойства, связанные с длинами векторов в обычном пространстве. В частности, легко понять, что если $t \in \mathbb{R}$, то

$$|t\mathbf{x}| = |t| \cdot |\mathbf{x}|. \tag{2}$$

В самом деле, $|t\mathbf{x}| = \sqrt{(t\mathbf{x}, t\mathbf{x})} = \sqrt{t^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |t|\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |t| \cdot |\mathbf{x}|$. Отсюда вытекает, что, как и в обычном пространстве, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то длина вектора $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ равна 1. В самом деле, используя (2), имеем

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot \mathbf{x}\right| = \left|\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right| \cdot |\mathbf{x}| = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot |\mathbf{x}| = 1.$$

Переход от ненулевого вектора $\mathbf{x}$ к вектору $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ называют *нормированием вектора* $\mathbf{x}$. Вектор единичной длины называют *единичным* или *нормированным.*

Для того чтобы ввести понятие угла между векторами в евклидовом пространстве, нам понадобится следующее утверждение.

Теорема. *Для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *евклидова пространства выполняется неравенство*

$$|\mathbf{xy}| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|, \tag{3}$$

причем $|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Из (1) вытекает, что если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то обе части неравенства (3) равны нулю и потому неравенство выполняется. Поэтому далее можно считать, что $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, и, в силу аксиомы 4, $\mathbf{yy} > 0$. Рассмотрим вектор $\mathbf{x} - t\mathbf{y}$, где t — некоторое действительное число. По аксиоме 4 выполняется неравенство $(\mathbf{x} - t\mathbf{y}, \mathbf{x} - t\mathbf{y}) \geqslant 0$. Раскрыв скобки, получим неравенство

$$\mathbf{xx} - 2t\mathbf{xy} + t^2\mathbf{yy} \geqslant 0. \tag{4}$$

(Разумеется, использовалась еще и аксиома 1, т.е. коммутативность скалярного произведения.) Подставим в это неравенство вместо t число

$\dfrac{\mathbf{xy}}{\mathbf{yy}}$ и умножим обе части неравенства на положительное число $\mathbf{yy}$. Получим $\mathbf{xx}\cdot\mathbf{yy} - 2(\mathbf{xy})^2 + (\mathbf{xy})^2 \geqslant 0$, откуда $(\mathbf{xy})^2 \leqslant \mathbf{xx}\cdot\mathbf{yy}$. Заменяя в последнем неравенстве $\mathbf{xx}$ на $|\mathbf{x}|^2$ и $\mathbf{yy}$ на $|\mathbf{y}|^2$ и извлекая корень из обеих частей неравенства, получаем (3).

Если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы, то $\mathbf{x} - t\mathbf{y} \neq 0$ для всякого t и вместо неравенства (4) можно взять неравенство

$$\mathbf{xx} - 2t\mathbf{xy} + t^2\mathbf{yy} > 0.$$

После этого во всех последующих неравенствах можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо (3) получить неравенство $|\mathbf{xy}| < |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$. Таким образом, если в (3) имеет место равенство, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Если $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то, в силу (1), обе части неравенства (3) равны нулю. В частности, это неравенство превращается в равенство. Пусть теперь $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Тогда из линейной зависимости $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вытекает, что $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ для некоторого числа t. Но тогда

$$\begin{aligned}|(\mathbf{x},\mathbf{y})| &= |(t\mathbf{y},\mathbf{y})| = |t\cdot(\mathbf{y},\mathbf{y})| = |t|\cdot|(\mathbf{y},\mathbf{y})| = \\ &= |t|\cdot|\mathbf{y}|\cdot|\mathbf{y}| = |t\mathbf{y}|\cdot|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|.\end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Неравенство (3) называется *неравенством Коши–Буняковского*. Если $\mathbf{x},\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то это неравенство равносильно тому, что

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|} \leqslant 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

Определение. *Углом между ненулевыми векторами* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ обозначается через $(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})$. Отметим, что формула для вычисления косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве полностью аналогична соответствующей формуле для векторов в обычном пространстве — см. формулу (1) в §3.

Используя теорему, можно доказать следующее соотношение, называемое *неравенством треугольника*:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \tag{5}$$

Это неравенство обобщает известный факт из элементарной геометрии, также называемый неравенством треугольника: сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны, отсюда и название неравенства (5). Доказывается неравенство треугольника просто. В самом деле, используя теорему и тот факт, что $\mathbf{xy} \leqslant |\mathbf{xy}|$ (поскольку $t \leqslant |t|$ для любого действительного числа t), имеем

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{xx}+\mathbf{xy}+\mathbf{yx}+\mathbf{yy} = |\mathbf{x}|^2+2\mathbf{xy}+|\mathbf{y}|^2 \leqslant \\ &\leqslant |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{xy}|+|\mathbf{y}|^2 \leqslant |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.\end{aligned}$$

Мы видим, что $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 \leqslant (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2$. Извлекая из обеих частей этого неравенства квадратный корень, получаем, что $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$.

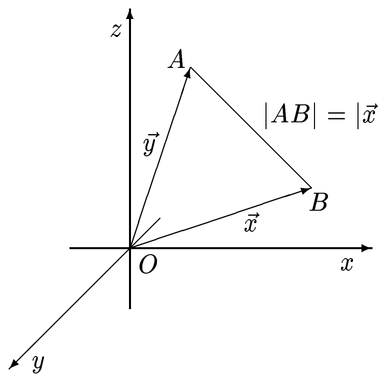


Рис. 1

В евклидовом пространстве можно ввести понятие расстояния между векторами. А именно, *расстоянием между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ называется длина вектора $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. Оно обозначается через $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Отметим, что приведенное определение естественно. В самом деле, предположим, что в качестве евклидова пространства выступает обычное пространство с обычным скалярным произведением векторов. Представим себе, что все векторы откладываются от начала координат, и отождествим вектор с точкой, являющейся его концом. Тогда расстояние между двумя точками есть длина вектора, соединяющего их концы, т.е. длина разности векторов, соответствующих этим двум точкам (рис. 1).

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — произвольные векторы, то

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \geqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}). \tag{6}$$

В самом деле, используя неравенство треугольника, имеем

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x} - \mathbf{z}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Неравенство (6) можно рассматривать как еще одно обобщение упоминавшегося выше неравенства треугольника из элементарной геометрии.

В обычном пространстве координаты вектора, отложенного от начала координат, совпадают с координатами точки, в которой этот вектор заканчивается (см. с. 39). По аналогии при рассмотрении евклидовых пространств нередко вместо “вектор с координатами (x_1, x_2, …, x_n)” говорят о *точке с координатами* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В частности, это позволяет говорить не о расстоянии между векторами, а о расстоянии между точками в евклидовом пространстве. Кроме того, становится возможным использовать для евклидовых пространств такие геометрические термины, как длины сторон или величины углов треугольника и т.п. Пусть A, B и C — точки в евклидовом пространстве, соответствующие векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ соответственно. Тогда длина стороны AB в $\triangle ABC$ — это, естественно, расстояние между точками A и B, т.е. длина вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Исходя из аналогии с обычным пространством, за внутренний угол при вершине A в $\triangle ABC$ принимают угол между векторами $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$. Длины других сторон и величины других углов в $\triangle ABC$ определяются аналогично.

§39. Ортонормированный базис

Из определения угла между векторами вытекает, в частности, что $(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \dfrac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{xy} = 0$ (точный аналог критерия ортогональности векторов в обычном пространстве — см. свойство 5 на с. 25). Это делает естественным следующее

Определение. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $\mathbf{xy} = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1.

Отметим, что, в силу равенства (1) из §38, *нулевой вектор ортогонален любому вектору.*

Укажем одно важное свойство ортогональных наборов векторов.

Теорема 1. *Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов, равную нулевому вектору:

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{a}_i$ (где $1 \leqslant i \leqslant k$) и используя тот факт, что $(\mathbf{0}, \mathbf{a}_i) = 0$ в силу равенства (1) из §38, мы получим, что

$$t_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_i) + t_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_i) + \cdots + t_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) + \cdots + t_k(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_i) = 0.$$

В левой части последнего равенства все скалярные произведения, кроме $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$, равны нулю. Следовательно, $t_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = 0$. Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, по аксиоме 4 евклидова пространства (см. с. 309) имеем $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) \neq 0$. Следовательно, $t_i = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (1) равны 0. Следовательно, набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независим. Теорема 1 доказана. ∎

Ортогональный (ортонормированный) набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*) *базисом.* Примером ортонормированного базиса является стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$, введенный в §22 (если скалярное произведение в $\mathbb{R}_n$ определить как сумму произведений одноименных компонент).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *— ортонормированный базис евклидова пространства* E, *а векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *имеют в этом базисе координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *соответственно. Тогда*

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{2}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{xy} = {} & x_1y_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + x_1y_2(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + \cdots + x_1y_n(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) + \\
+ {} & x_2y_1(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) + x_2y_2(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) + \cdots + x_2y_n(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n) + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ {} & x_ny_1(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) + x_ny_2(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2) + \cdots + x_ny_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n).
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = 0$ при $i \neq j$ и $\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i = 1$ (для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$), то последнее равенство равносильно равенству (2). Теорема 2 доказана. ∎

Из теоремы 2 и определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *— ортонормированный базис евклидова пространства* E*, а векторы* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *имеют в этом базисе координаты* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *соответственно. Тогда*

1) $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$;

2) $\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}}$;

3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. ∎

Отметим, что все формулы из теоремы 2 и следствия 1 являются точными аналогами формул для вычисления соответствующих величин в обычном пространстве с обычным скалярным произведением (в случае ортонормированного базиса) — см. формулы (2), (4), (5) в §3 и (1) в §5. В частности, ортонормированный базис удобен тем, что в нем просто вычисляется скалярное произведение любых векторов. Естественно поэтому поставить вопрос о том, всегда ли существует ортонормированный базис. Ответ на него содержится в следующем утверждении.

Теорема 3. *Любое ненулевое подпространство* S *евклидова пространства* E *имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. Обозначим размерность подпространства S через k. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис этого подпространства. Построим ортогональный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ подпространства S. Векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ будем находить последовательно — сначала $\mathbf{b}_1$, затем $\mathbf{b}_2$ и т.д.

Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Пусть $\mathbf{b}_2 = p\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$, где p — некоторое число. Подберем это число так, чтобы векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ оказались ортогональными. Ясно, что

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1, p\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2) = p(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2).$$

Учитывая, что $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ (так как вектор $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ входит в базис подпространства S), и полагая $p = -\dfrac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, имеем $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$. Отметим, что полученный таким образом вектор $\mathbf{b}_2$ лежит в подпространстве S

и отличен от нулевого вектора. Первое из этих утверждений очевидно. Проверим второе. Действительно, если $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{0} = \mathbf{b}_2 = p\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 = p\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Положим $\mathbf{b}_3 = q\mathbf{b}_1 + r\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$, где q и r — некоторые числа. Подберем число q так, чтобы векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_3$ оказались ортогональными. Поскольку $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{b}_1, q\mathbf{b}_1 + r\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3) &= q(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3) = \\ &= q(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, получаем, что достаточно взять $q = -\dfrac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$. Аналогично проверяется, что, взяв $r = -\dfrac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}$, мы обеспечим ортогональность векторов $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$. Таким образом, при указанных значениях чисел q и r векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$ будут попарно ортогональными. При этом вектор $\mathbf{b}_3$ лежит в подпространстве S (что очевидно) и не равен нулевому вектору, так как в противном случае

$$\mathbf{0} = \mathbf{b}_3 = q\mathbf{b}_1 + r\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 = q\mathbf{a}_1 + r(p\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 = (q + rp)\mathbf{a}_1 + r\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

что противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Отметим, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$.

Продолжим описанный процесс. Пусть $2 \leqslant i \leqslant k$. Предположим, что мы уже построили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ (и, в частности, принадлежит S). Положим

$$\mathbf{b}_i = -\frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_i)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)} \cdot \mathbf{b}_1 - \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_i)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)} \cdot \mathbf{b}_2 - \cdots - \frac{(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}_i)}{(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i-1})} \cdot \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{a}_i. \qquad (3)$$

Умножая скалярно обе части равенства (3) на $\mathbf{b}_1$ слева и учитывая, что вектор $\mathbf{b}_1$ ортогонален к векторам $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$, получаем, что

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) = -\frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_i)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)} \cdot (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_i) = -(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_i) + (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_i) = 0.$$

Аналогично проверяется, что $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_i) = \cdots = (\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i) = 0$. Следовательно, набор векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i$ ортогонален. Напомним, что каждый из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{i-1}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_{i-1}$. Отсюда и из равенства (3) непосредственно вытекает, что вектор $\mathbf{b}_i$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i$ (и, в частности, принадлежит S). Далее, из указанного свойства векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_{i-1}$ вытекает, что правую часть равенства (3) можно записать в виде $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i$, где $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}$ — некоторые числа. Иными словами, вектор $\mathbf{b}_i$ равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_i$. Поскольку эти векторы входят в базис подпространства S, они линейно независимы. Следовательно, $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$. Итак, мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i$, каждый из которых является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i$ (и, в частности, принадлежит S).

Повторив указанные выше построения нужное число раз, мы в конце концов получим ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$, принадлежащих S. По теореме 1 этот набор векторов линейно независим. Поскольку число векторов в нем совпадает с размерностью S, он является базисом этого подпространства. Чтобы получить ортонормированный базис S, достаточно теперь разделить каждый из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ на его длину. Теорема 3 доказана. ■

Процесс построения ортогонального базиса, описанный в доказательстве теоремы 3, часто называют *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*. Конкретные примеры применения этого процесса будут приведены в конце данного параграфа и в конце §41. Отметим еще, что, в силу теоремы 3, любое ненулевое евклидово пространство само имеет ортонормированный и, в частности, ортогональный базис.

Теорема 4. *Любую ортогональную систему ненулевых векторов евклидова пространства E можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — ортогональный набор ненулевых векторов пространства E. Обозначим размерность пространства E через n. Нам достаточно найти ортогональный набор из n ненулевых векторов пространства E, содержащий векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. В самом деле, в силу теоремы 1 такой набор векторов будет линейно независимым, и потому, в силу теоремы 2 из §23, он будет базисом E.

Если $k = n$, то, в силу сказанного выше, уже сам набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ является ортогональным базисом пространства E. Поэтому далее можно считать, что $k < n$. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — ортонормированный базис пространства E, существующий в силу теоремы 3. Пусть вектор $\mathbf{a}_i$ имеет в этом базисе координаты $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$). Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 3 из §12 эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение. Обозначим его через $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и положим $\mathbf{a}_{k+1} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n$. В силу теоремы 2, $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_{k+1} = c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_na_{1n} = 0$ и аналогично $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_{k+1} = \dots = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1} = 0$. Следовательно, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ — ортогональный набор ненулевых векторов. Если $k + 1 = n$, то он является ортогональным базисом пространства E. В противном случае, рассуждая так же, как выше, при построении вектора $\mathbf{a}_{k+1}$, мы дополним набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+1}$ еще одним вектором $\mathbf{a}_{k+2}$ так, что набор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{k+2}$ будет ортогональным набором ненулевых векторов. Продолжая этот процесс, мы через конечное число шагов построим ортогональный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ пространства E, являющийся расширением исходного набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Теорема 4 доказана. ∎

Из теоремы 4 вытекает следующее

Следствие 2. *Любую ортонормированную систему векторов евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.*

Доказательство. Отметим, что все векторы ортонормированной системы — ненулевые (поскольку их длины равны 1). В силу теоремы 4 нашу ортонормированную систему можно дополнить до ортогонального базиса. Разделив каждый из найденных при этом новых векторов на его длину, мы получим ортонормированный базис. ∎

В доказательстве теоремы 4, по существу, содержится алгоритм решения задачи о дополнении данной ортогональной системы ненулевых векторов до ортогонального базиса. Сформулируем его в явном виде.

> *Пусть дана ортогональная система векторов. Предположим, что нам известны координаты всех этих векторов в некотором ортонормированном базисе. Запишем эти координаты по строкам в матрицу. Найдем одно ненулевое решение однородной системы линейных уравнений, матрица которой совпадает с полученной матрицей. Допишем к имевшейся матрице строку координат полученного вектора и найдем одно ненулевое решение однородной системы*

линейных уравнений, матрица которой совпадает с расширенной матрицей. Продолжим описанный процесс до тех пор, пока общее число найденных векторов и векторов из исходной системы не станет равным размерности пространства.

Приведем пример. Требуется проверить, что набор векторов $\vec{a}_1 = (2, 3, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-2, 2, 1, -1)$ из $\mathbb{R}_4$ ортогонален, и дополнить его до ортогонального базиса всего пространства. Ортогональность векторов проверяется легко:

$$\vec{a}_1\vec{a}_2 = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -4 + 6 - 1 - 1 = 0.$$

Приступим к дополнению данного набора векторов до ортогонального базиса. Поскольку данные векторы принадлежат $\mathbb{R}_4$, требуется найти еще два вектора. В соответствии с изложенным выше алгоритмом сначала надо найти какое-нибудь ненулевое решение однородной системы, основная матрица которой — это матрица, в которой по строкам записаны координаты данных векторов. Запишем эту матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система, соответствующая полученной матрице, имеет два свободных неизвестных: x_3 и x_4. Поскольку нам надо найти какое-то одно ненулевое решение, их можно зафиксировать произвольным образом (кроме $x_3 = x_4 = 0$). Положим $x_3 = 2, x_4 = 0$. Из второго уравнения нашей системы вытекает, что $x_2 = 0$, а из первого — что $x_1 = 1$. Итак, в качестве третьего вектора можно взять $\vec{a}_3 = (1, 0, 2, 0)$. Теперь надо найти какое-нибудь ненулевое решение однородной системы, основная матрица которой есть матрица решавшейся раньше системы, к которой добавлена строка координат вектора $\vec{a}_3$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь есть только одно свободное неизвестное — x_4. Полагая $x_4 = 5$, последовательно находим, что $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ и $x_1 = -2$. Мы нашли четвертый вектор: $\vec{a}_4 = (-2, 0, 1, 5)$. Набор векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ является искомым ортогональным базисом всего пространства.

Укажем еще один алгоритм решения рассматриваемой задачи.

> *Пусть дана ортогональная система векторов. Предположим, что нам известны координаты всех векторов этой системы в некотором ортонормированном базисе. Запишем эти координаты по строкам в матрицу. Найдем фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений, матрица которой совпадает с полученной матрицей. Применим к полученному набору векторов процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Объединив полученный набор векторов с тем, который был задан, получим ортогональный базис пространства.*

В самом деле, учитывая теорему 1 данного параграфа и теорему из §29, легко понять, что, объединив заданный набор векторов с тем, который будет получен при выполнении описанного алгоритма, мы получим ортогональный набор векторов, число которых равно размерности пространства. Остается учесть теорему 1 данного параграфа и теорему 2 из §23.

Продемонстрируем второй из описанных алгоритмов на примере. Пусть дан набор векторов $\vec{a}_1 = (-1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, -1, 1, 4)$ из $\mathbb{R}_4$. Без труда проверяется, что он ортогонален. Требуется дополнить его до ортогонального базиса всего пространства. Действуя по указанному алгоритму, имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы линейных уравнений состоит из векторов $\vec{a}_3 = (-2, -1, 3, 0)$, $\vec{a}_4 = (-3, -2, 0, 1)$. Применяя к полученной системе процесс ортогонализации Грама–Шмидта, имеем

$$\begin{aligned} \vec{b}_3 &= \vec{a}_3 = (-2, -1, 3, 0); \\ \vec{b}_4 &= -\frac{(\vec{b}_3, \vec{a}_4)}{(\vec{b}_3, \vec{b}_3)} \cdot \vec{b}_3 + \vec{a}_4 = -\frac{4}{7} \cdot (-2, -1, 3, 0) + (-3, -2, 0, 1) = \\ &= \left(-\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}, -\frac{12}{7}, 1\right). \end{aligned}$$

Набор векторов $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ является искомым ортогональным базисом всего пространства.

§40. Ортогональное дополнение

Понятие ортогональности векторов легко распространяется на ортогональность подпространств. Два подпространства S_1 и S_2 евклидова пространства E называются *ортогональными*, если любой вектор из S_1 ортогонален любому вектору из S_2. Оказывается, что среди всех подпространств пространства E, ортогональных к данному подпространству S, существует наибольшее (см. ниже п.3 теоремы 1).

Определение. Пусть S — подпространство евклидова пространства E. Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S, называется *ортогональным дополнением* подпространства S.

Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через $S^{\perp}$. Иными словами,

$$S^{\perp} = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{ax} = 0 \text{ для любого вектора } \mathbf{a} \in S\}.$$

Например, если в пространстве $\mathbb{R}_3$ с обычным скалярным произведением подпространство S — это плоскость σ, проходящая через начало координат O, то $S^{\perp}$ — прямая, проходящая через O перпендикулярно к σ.

Теорема 1. *Пусть S — подпространство евклидова пространства E, а $S^{\perp}$ — ортогональное дополнение S. Тогда:*

1) *$S^{\perp}$ — подпространство пространства E;*
2) *если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис S, то $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_2\mathbf{x} = \dots = \mathbf{a}_k\mathbf{x} = 0$;*
3) *если подпространство S' ортогонально к S, то $S' \subseteq S^{\perp}$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из аксиом 2 и 3 евклидова пространства (см. с. 309). В самом деле, если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{\perp}$, $\mathbf{a} \in S$, а t — произвольное число, то

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{a}) = \mathbf{xa} + \mathbf{ya} = 0 + 0 = 0 \quad \text{и} \quad (t\mathbf{x}, \mathbf{a}) = t(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = t \cdot 0 = 0.$$

Докажем второе утверждение. Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис S, а $\mathbf{x} \in S^{\perp}$, то вектор $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален ко всем векторам из S. Предположим теперь, что $\mathbf{x}$ ортогонален к векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Поскольку $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — базис подпространства S, вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, т.е. $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Но тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{xa} &= (\mathbf{x}, t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= t_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) + t_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) + \cdots + t_k(\mathbf{x}, \mathbf{a}_k) = \\ &= t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 + \cdots + t_k \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Иными словами, вектор $\mathbf{x}$ ортогонален к $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{x} \in S^{\perp}$. Второе утверждение доказано.

Пусть теперь подпространство S' ортогонально к S. Это означает, что если $\mathbf{x} \in S'$, то $\mathbf{x}$ ортогонален ко всем векторам из S. По определению ортогонального дополнения отсюда следует, что $\mathbf{x} \in S^{\perp}$. Таким образом, $S' \subseteq S^{\perp}$. Теорема 1 доказана. ∎

Теорема 2. *Сумма размерностей подпространства и его ортогонального дополнения равна размерности пространства.*

Доказательство. Пусть S — подпространство евклидова пространства E, а $S^{\perp}$ — ортогональное дополнение S. Обозначим размерность E буквой n, а размерность S — буквой k. Зафиксируем ортонормированный базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ пространства E и произвольный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства S. Пусть вектор $\mathbf{a}_1$ имеет в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ координаты $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, вектор $\mathbf{a}_2$ — координаты $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$, $\ldots$, наконец, вектор $\mathbf{a}_k$ — координаты $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$. По теореме 1 $\mathbf{x} \in S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = \mathbf{a}_2\mathbf{x} = \cdots = \mathbf{a}_k\mathbf{x} = 0$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, то, в силу теоремы 2 из §39, последние равенства равносильны следующим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Итак, вектор $\mathbf{x}$ лежит в $S^{\perp}$ тогда и только тогда, когда его координаты в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ являются решением системы (1). Иными словами, $S^{\perp}$ совпадает с пространством решений этой системы. В силу теоремы из §29 размерность последнего равна $n - r$, где r — ранг матрицы системы (1). Строки этой матрицы — координаты базисных векторов пространства S. Следовательно, $r = k$. Мы доказали, что размерность пространства $S^{\perp}$ равна $n - k$, где k — размерность пространства S. Теорема 2 доказана. ∎

Из доказательства теоремы 2 вытекает алгоритм нахождения базиса ортогонального дополнения подпространства S евклидова пространства:

> *если известен базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ подпространства S, то надо составить матрицу A, записав в нее по строкам координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, и найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть A. Он и будет базисом ортогонального дополнения подпространства S.*

Поскольку ранее мы уже приводили примеры нахождения фундаментального набора решений однородной системы (см. §29 и 36), здесь мы не будем решать конкретную задачу.

Теорема 3. *Пусть S — подпространство евклидова пространства E, а $S^\perp$ — его ортогональное дополнение. Тогда $E = S \oplus S^\perp$. В частности, для любого вектора $\mathbf{x} \in E$ существуют, и притом единственные, векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ такие, что $\mathbf{y} \in S$, $\mathbf{z} \in S^\perp$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.*

Доказательство. Заметим, что $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$. В самом деле, пусть $\mathbf{x} \in S \cap S^\perp$. Тогда $\mathbf{xx} = \mathbf{0}$ и, в силу четвертой аксиомы евклидова пространства, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно, $\dim(S \cap S^\perp) = 0$. Отсюда и из теоремы 1 из §25 вытекает, что $\dim(S + S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp$. В силу теоремы 2 $\dim(S + S^\perp) = \dim E$. Лемма из §24 показывает теперь, что $E = S + S^\perp$. Учитывая теорему 2 из §25, получаем все требуемые утверждения. Теорема 3 доказана. ∎

Векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, существование и единственность которых доказаны в теореме 3, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на подпространство S и *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно S. Отметим, что если $S = \{\mathbf{0}\}$, то ортогональная проекция $\mathbf{x}$ на S равна $\mathbf{0}$, а ортогональная составляющая $\mathbf{x}$ относительно S совпадает с $\mathbf{x}$. Это вытекает из того, что $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$ и в указанном случае $\mathbf{0} \in S$, а $\mathbf{x} \in S^\perp$. Длина ортогональной составляющей вектора $\mathbf{x}$ относительно S называется *расстоянием от* $\mathbf{x}$ *до* S. Отметим, что если $S = \{\mathbf{0}\}$, то, в силу сказанного выше, расстояние от $\mathbf{x}$ до S равно $|\mathbf{x}|$. Несколько сложнее определяется угол между вектором и подпространством. Если подпространство S ненулевое и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то *углом между* $\mathbf{x}$ *и* S называется угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Если $S \neq \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $\mathbf{x} = \mathbf{z} \in S^\perp$). Наконец, если $S = \{\mathbf{0}\}$, то угол между $\mathbf{x}$ и S не определен. Расстояние от $\mathbf{x}$ до S обозначается через $\rho(\mathbf{x}, S)$, а угол между $\mathbf{x}$ и S — через $(\widehat{\mathbf{x}, S})$.

Отметим, что все понятия, введенные в предыдущем абзаце, полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением. В самом деле, возьмем в этом пространстве в качестве подпространства S плоскость Oxy. Ясно, что ортогональным дополнением $S^{\perp}$ будет ось Oz. Отложим вектор $\vec{x}$ от начала координат. Тогда ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на S — это его проекция на плоскость Oxy в обычном смысле, расстояние от $\vec{x}$ до S — обычное расстояние от конца вектора $\vec{x}$ до плоскости Oxy, угол между $\vec{x}$ и S — обычный угол между этим вектором и Oxy (рис. 2).

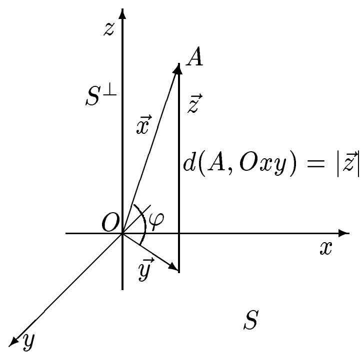


Рис. 2

Задачи нахождения ортогональной проекции $\mathbf{x}$ на S, ортогональной составляющей $\mathbf{x}$ относительно S, расстояния от $\mathbf{x}$ до S и угла между $\mathbf{x}$ и S сводятся к задачам, алгоритмы решения которых рассматривались ранее. В самом деле, в силу теоремы 3 $E = S \oplus S^{\perp}$, и потому ортогональная проекция $\mathbf{x}$ на S — это проекция $\mathbf{x}$ на S параллельно $S^{\perp}$, а ортогональная составляющая $\mathbf{x}$ относительно S — это проекция $\mathbf{x}$ на $S^{\perp}$ параллельно S. Сказанное позволяет сформулировать следующий алгоритм.

Если подпространство S нулевое, то, согласно сказанному выше, ортогональная проекция $\mathbf{x}$ на S равна $\mathbf{0}$, ортогональная составляющая $\mathbf{x}$ относительно S совпадает с $\mathbf{x}$, расстояние от $\mathbf{x}$ до S равно $|\mathbf{x}|$, а угол между $\mathbf{x}$ и S не определен. Пусть теперь $S \neq \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что нам известен базис S. Тогда мы можем последовательно найти:

1) *базис* $S^\perp$ (*по алгоритму, указанному после доказательства теоремы* 2)*;*

2) *ортогональную проекцию* $\mathbf{y}$ *вектора* $\mathbf{x}$ *на* S *как проекцию* $\mathbf{x}$ *на* S *параллельно* $S^\perp$ *и ортогональную составляющую* $\mathbf{z}$ *вектора* $\mathbf{x}$ *относительно* S *как проекцию* $\mathbf{x}$ *на* $S^\perp$ *параллельно* S (*по алгоритму, указанному на с.* 228)*;*

3) *расстояние от* $\mathbf{x}$ *до* S *по формуле* $\rho(\mathbf{x}, S) = \sqrt{\mathbf{zz}}$ *и угол между* $\mathbf{x}$ *и* S *по формуле*

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, S}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}, & \text{если } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } \mathbf{y} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Специальной задачи на эту тему мы решать не будем.

Как было отмечено в примере 1 из §26, понятие подпространства является частным случаем понятия линейного многообразия. Пусть $P = \mathbf{x}_0 + M$ — линейное многообразие в евклидовом пространстве E и $\mathbf{x} \in E$. Тогда *расстоянием от* $\mathbf{x}$ *до линейного многообразия* P называется расстояние от вектора $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ до направляющего подпространства M. Если подпространство M ненулевое, то *углом между* $\mathbf{x}$ *и* P называется угол между $\mathbf{x}$ и M. Если же $M = \{\mathbf{0}\}$, то угол между $\mathbf{x}$ и P не определен. Из приведенных определений видно, что задачи нахождения расстояния от вектора до линейного многообразия и угла между вектором и линейным многообразием немедленно сводятся к аналогичным задачам о векторе и подпространстве, алгоритм решения которых изложен выше. Расстояние от $\mathbf{x}$ до многообразия P обозначается через $\rho(\mathbf{x}, P)$, а угол между $\mathbf{x}$ и P — через $(\widehat{\mathbf{x}, P})$.

Укажем еще несколько свойств ортогонального дополнения. Пусть E — евклидово пространство, а S, S_1 и S_2 — его подпространства. Тогда:

1) $\{\mathbf{0}\}^\perp = E$, *а* $E^\perp = \{\mathbf{0}\}$;

2) $(S^\perp)^\perp = S$;

3) *если* $S_1 \subseteq S_2$, *то* $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;

4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, *а* $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;

5) *если* $E = S_1 \oplus S_2$, *то* $E = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Первое равенство в свойстве 1 вытекает из отмеченного на с. 315 факта: нулевой вектор ортогонален к любому вектору из E. Второе равенство в этом свойстве легко выводится из аксиомы 4 евклидова пространства (см. с. 309). В самом деле, если $\mathbf{x} \in E^{\perp}$, то $\mathbf{xy} = 0$ для любого $\mathbf{y} \in E$. В частности, $\mathbf{xx} = 0$, и, в силу аксиомы 4, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Докажем свойство 2. Из определения ортогонального дополнения вытекает, что если $\mathbf{x} \in S$, то $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из $S^{\perp}$. Следовательно, $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$. Пусть $\dim S = n$ и $\dim E = k$. В силу теоремы 2

$$\dim(S^{\perp})^{\perp} = n - \dim S^{\perp} = n - (n-k) = k = \dim S.$$

Итак, S — подпространство в $(S^{\perp})^{\perp}$ и $\dim S = \dim(S^{\perp})^{\perp}$. В силу леммы из §24, $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

Докажем теперь свойство 3. Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $\mathbf{x} \in S_2^{\perp}$. Тогда $\mathbf{x}$ ортогонален к любому вектору из S_2, а значит, в частности, и к любому вектору из S_1. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^{\perp}$, и потому $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

Перейдем к свойству 4. Докажем сначала первое равенство из этого свойства. Пусть $\mathbf{x} \in S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$ и $\mathbf{y} \in S_1 + S_2$. Тогда $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ для некоторых векторов $\mathbf{y}_1 \in S_1$ и $\mathbf{y}_2 \in S_2$. В силу выбора $\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{xy}_1 = \mathbf{xy}_2 = 0$, откуда

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^{\perp}$, и потому $S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp} \subseteq (S_1 + S_2)^{\perp}$. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in (S_1 + S_2)^{\perp}$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3 вытекает, что $\mathbf{x} \in S_1^{\perp}$ и $\mathbf{x} \in S_2^{\perp}$. Следовательно, $\mathbf{x} \in S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$, и потому $(S_1 + S_2)^{\perp} \subseteq S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$. Первое равенство из свойства 4 доказано. Второе равенство из этого свойства легко вытекает из первого равенства и свойства 2. В самом деле,

$$S_1^{\perp} + S_2^{\perp} = ((S_1^{\perp} + S_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = ((S_1^{\perp})^{\perp} \cap (S_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = (S_1 \cap S_2)^{\perp}.$$

В силу теоремы 2 из §25, чтобы доказать свойство 5, достаточно установить, что $S_1^{\perp} + S_2^{\perp} = E$ и $\dim S_1^{\perp} + \dim S_2^{\perp} = \dim E$. Первое равенство вытекает из свойств 4 и 1. В самом деле, по условию, $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, и потому

$$S_1^{\perp} + S_2^{\perp} = (S_1 \cap S_2)^{\perp} = \{\mathbf{0}\}^{\perp} = E.$$

Чтобы доказать второе из нужных равенств, положим $\dim E = n$, $\dim S_1 = k_1$ и $\dim S_2 = k_2$. В силу теоремы 2 из §25, $n = k_1 + k_2$. Используя теорему 2, имеем

$$\dim S_1^{\perp} + \dim S_2^{\perp} = (n-k_1) + (n-k_2) = 2n - (k_1+k_2) = 2n - n = n = \dim E.$$

Свойство 5 доказано.

В §29 был приведен алгоритм нахождения базиса пересечения подпространств. Свойства 2 и 4 позволяют указать еще один способ решения этой задачи. В самом деле, из этих свойств вытекает, что

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp.$$

Получаем следующий алгоритм.

> *Чтобы найти базис пересечения подпространств S_1 и S_2, надо найти сначала базисы подпространств $S_1^\perp$ и $S_2^\perp$ (по алгоритму, указанному после доказательства теоремы* 2*), затем базис подпространства $S_1^\perp + S_2^\perp$ (по алгоритму, указанному на с.* 225*) и, наконец, базис подпространства $S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp$ (вновь воспользовавшись алгоритмом, указанным после доказательства теоремы* 2*).*

Решим с помощью этого алгоритма задачу, уже рассмотренную в §29: найдем базис пересечения подпространства M_1, порожденного векторами $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$ и $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$, и подпространства M_2, порожденного векторами $\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$ и $\vec{b}_3 = (1, 0, 2, 0)$. Сначала найдем базис $M_1^\perp$. Действуя по алгоритму, указанному после доказательства теоремы 2, запишем компоненты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ в матрицу по строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является ступенчатой. Фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы линейных уравнений состоит из одного вектора: $\vec{c}_1 = (-1, 1, -1, 1)$. Этот вектор и образует базис $M_1^\perp$. Действуя аналогично, найдем базис $M_2^\perp$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базис $M_2^\perp$ (т.е. фундаментальный набор решений однородной системы, соответствующей полученной матрице) состоит из вектора $\vec{c}_2 = (2, -2, -1, 1)$. Чтобы найти базис $M_1^\perp + M_2^\perp$, запишем в матрицу по строкам компоненты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ и приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Нулевых строк не возникло. Следовательно, векторы $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ образуют базис пространства $M_1^\perp + M_2^\perp$. Чтобы найти базис $M_1 \cap M_2 = (M_1^\perp + M_2^\perp)^\perp$, осталось найти фундаментальный набор решений однородной системы, соответствующей последней из выписанных матриц. Эта система имеет два свободных неизвестных — x_2 и x_4. Полагая сначала $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, а затем $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, находим, что базис $M_1 \cap M_2$ состоит из векторов (1,1,0,0) и (0,0,1,1). Отметим, что этот базис отличается от базиса того же пространства, найденного в §29 (см. с. 248).

§41. Симметрические операторы

Линейные операторы, действующие в евклидовых пространствах, обладают дополнительными свойствами по сравнению с линейными операторами в векторных пространствах без скалярного произведения. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением только одного типа линейных операторов в евклидовых пространствах — так называемых симметрических операторов.

Линейный оператор $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ евклидова пространства E называется *симметрическим* (или *самосопряженным*), если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in E$ выполнено равенство

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}(\mathbf{z})).$$

Очевидными примерами симметрических операторов являются тождественный оператор $\mathcal{E}$ и нулевой оператор $\mathcal{O}$. В самом деле,

$$(\mathcal{E}(\mathbf{x}), \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathcal{E}(\mathbf{z})) \text{ и } (\mathcal{O}(\mathbf{x}), \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{z}) = 0 = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathcal{O}(\mathbf{z})).$$

Приведем более содержательный пример симметрического оператора. Пусть S — подпространство евклидова пространства E. В силу теоремы 3 из §40 $E = S \oplus S^\perp$. Следовательно, мы можем рассмотреть оператор проектирования на S параллельно $S^\perp$ (см. с. 280). Он называется *оператором ортогонального проектирования на подпространство* S и обозначается через $\mathcal{P}_S$. Отметим, что тождественный оператор можно рассматривать как оператор ортогонального проектирования на E, а нулевой оператор — как оператор ортогонального проектирования на нулевое подпространство. Можно проверить, что $\mathcal{P}_S$ — симметрический оператор. Доказательство этого несложного факта мы оставляем читателю. Положим $\dim E = n$ и $\dim S = m$. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ — базис в S, а $\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис в $S^\perp$. Поскольку $E = S \oplus S^\perp$, получаем, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис всего пространства E (см. замечание на с. 227). Матрица оператора $\mathcal{P}_S$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ имеет вид, изображенный на с. 282 (где число единиц на главной диагонали равно m). В частности, эта матрица диагональна.

Определение. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *симметрической*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Иными словами, матрица A симметрична, если $A^\top = A$. Отметим, что всякая диагональная матрица симметрична.

В частности, матрица оператора $\mathcal{P}_S$ в базисе, полученном объединением базисов S и $S^\perp$, симметрична. Этот факт не случаен. Справедливо следующее утверждение, которое, кстати, объясняет термин "симметрический оператор".

Теорема 1. *Линейный оператор* $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ *евклидова пространства E является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе является симметрической.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — симметрический оператор, а $A = (a_{ij})$ — его матрица в ортонормированном базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$. Тогда для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{b}_j)$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ составляют j-й столбец матрицы A, т.е. равны $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$. Координаты вектора $\mathbf{b}_i$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ имеют вид $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где 1 стоит на i-м месте. Поскольку базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ является ортонормированным, из теоремы 2 в §39 вытекает, что $(\mathcal{A}(\mathbf{b}_j), \mathbf{b}_i) = a_{ij}$. Аналогичные соображения показывают, что $(\mathbf{b}_j, \mathcal{A}(\mathbf{b}_i)) = a_{ji}$. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ является симметрическим, получаем, что $a_{ij} = a_{ji}$. Мы доказали, что матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе является симметрической.

Пусть теперь $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ — произвольный линейный оператор, имеющий в ортонормированном базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ симметрическую матрицу $A = (a_{ij})$. Докажем, что в этом случае оператор $\mathcal{A}$ является симметрическим. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ соответственно. Тогда, как нетрудно понять, скалярное произведение $(\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{z})$ можно выразить с использованием матричного умножения следующим образом:

$$(A\mathbf{x}^\top)^\top \mathbf{z}^\top = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^\top \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n) \cdot A^\top \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(последнее равенство вытекает из свойства 6 на с. 252). В то же время для $(\mathbf{x}, \mathcal{A}(\mathbf{z}))$ аналогичное равенство имеет вид

$$\mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{z}^\top = (x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A^\top = A$ (в силу симметричности матрицы A), получаем, что $(\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}(\mathbf{z}))$. Таким образом, $\mathcal{A}$ — симметрический оператор. Теорема 1 доказана. ■

Заметим, что (как вытекает из доказательства теоремы 1) для проверки самосопряженности оператора нет необходимости вычислять его матрицы во всех ортонормированных базисах: достаточно найти его матрицу только в одном таком базисе.

Отметим одно важное свойство собственных векторов симметрического оператора.

Теорема 2. *Собственные векторы симметрического оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к собственным значениям s и t соответственно, причем $s \neq t$. Используя симметричность оператора $\mathcal{A}$, имеем

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (s\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathcal{A}(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = t(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Следовательно, $(s - t)\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$. Поскольку $s - t \neq 0$, получаем, что $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$. Теорема 2 доказана. ■

Как мы видели выше, для оператора ортогонального проектирования существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна. Аналогичный факт имеет место для произвольного симметрического оператора. А именно, справедлива следующая

Теорема 3. *Для любого симметрического оператора $\mathcal{A}$ в пространстве E найдется ортонормированный базис этого пространства, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна.*

Доказательство. В силу теоремы из §35 достаточно убедиться, что в евклидовом пространстве E найдется ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов нашего оператора. Докажем это в случае, когда размерность пространства E равна двум. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ — ортонормированный базис пространства E и $A = (a_{ij})$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Матрица A симметрическая (в силу теоремы 1), и потому $a_{12} = a_{21}$. Обозначим этот элемент просто через a. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$g(t) = |A - tE| = (a_{11} - t)(a_{22} - t) - a^2 = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a^2.$$

Рассмотрим уравнение $g(t) = 0$. Его дискриминант D равен

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2.$$

Он неотрицателен, и потому уравнение $g(t) = 0$ всегда имеет действительные корни.

Предположим сначала, что корни совпадают, т.е. $D = 0$. Это означает, что $a_{11} = a_{22}$ и $a = 0$. Следовательно, матрица A диагональна и, в силу теоремы из §35, векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ являются собственными (и составляют ортонормированный базис).

Пусть теперь $D > 0$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ имеет два различных собственных значения t_1 и t_2. Пусть $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ — собственные векторы оператора $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$, относящиеся соответственно к t_1 и t_2. В силу теоремы 2 векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ ортогональны. Следовательно, в качестве искомого базиса можно взять векторы $\dfrac{\mathbf{c}_1}{|\mathbf{c}_1|}, \dfrac{\mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_2|}$. Теорема 3 доказана. ■

В силу теоремы из §35 доказанную только что теорему можно переформулировать следующим образом.

> *Для любого симметрического оператора $\mathcal{A}$ в пространстве E найдется ортонормированный базис этого пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.*

Укажем теперь одно свойство корней характеристического уравнения симметрического оператора. Отметим, что в случае произвольного линейного оператора эти корни являются, вообще говоря, комплексными числами.

Теорема 4. *Все корни характеристического уравнения симметрического оператора являются действительными числами.* ■

В случае, когда оператор действует в пространстве размерности 2, эта теорема фактически доказана в процессе доказательства теоремы 3. В самом деле, там проверено, что в указанном случае характеристический многочлен оператора (являющийся квадратным трехчленом) имеет неотрицательный дискриминант и потому этот многочлен имеет только действительные корни. Доказывать теорему 4 в общем случае мы не будем.

Укажем способ нахождения ортонормированного базиса, в котором матрица симметрического оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Эта задача решается в три шага, каждый из которых мы уже умеем делать.

На первом шаге надо найти *какой-нибудь* базис пространства, в котором матрица нашего оператора диагональна (это всегда можно сделать в силу теоремы 2). Способ его нахождения указан в §35. Напомним, в чем он состоит. Надо сначала найти все собственные значения оператора, а затем для каждого из них отыскать максимальный линейно независимый набор собственных векторов, относящихся к этому собственному значению. Объединив эти наборы, мы получим искомый базис. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — совокупность всех попарно различных собственных значений оператора $\mathcal{A}$. Пусть максимальный линейно независимый набор собственных векторов, относящихся к t_1, есть $\{\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1q}\}$, относящихся к t_2 — $\{\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \ldots, \mathbf{a}_{2r}\}$, …, наконец, относящихся к t_m — $\{\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{a}_{m2}, \ldots, \mathbf{a}_{ms}\}$. Поскольку все эти векторы образуют базис пространства, суммарное число векторов во всех наборах равно размерности пространства.

На втором шаге ищется *ортогональный* базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Для этого сначала применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта, описанный в §39 (см. доказательство теоремы 3 в этом параграфе), к набору векторов $\{\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1q}\}$. Полученные векторы обозначим через $\mathbf{b}_{11}$, $\mathbf{b}_{12}$, …, $\mathbf{b}_{1q}$. Каждый из них отличен от нулевого вектора и является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1q}$. Учитывая первое утверждение теоремы из §34, получаем, что $\mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{12}, \ldots, \mathbf{b}_{1q}$ — ортогональный набор собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, относящихся к t_1. Применим теперь процесс ортогонализации к каждому из наборов $\{\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \ldots, \mathbf{a}_{2r}\}, \ldots, \{\mathbf{a}_{m1}, \mathbf{a}_{m2}, \ldots, \mathbf{a}_{ms}\}$. Каждый раз мы будем получать ортогональный набор собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, относящихся к тому же собственному значению, что и до ортогонализации. Векторы из разных наборов будут ортогональны в силу теоремы 3. Поэтому, объединив все полученные наборы, мы получим ортогональный набор ненулевых векторов. В силу теоремы 1 из §39 этот набор векторов линейно независим. Число векторов в этом наборе будет равно числу векторов в базисе, построенном на первом шаге, т.е. размерности пространства. Следовательно, мы построили ортогональный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. В силу замечания, сделанного на с. 294, матрица оператора в этом базисе диагональна.

Третий шаг — самый простой. Разделив каждый из векторов ортогонального базиса, построенного на втором шаге, на его длину, мы получим искомый ортонормированный базис.

Продемонстрируем сказанное на примере. Пусть оператор $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 1 оператор $\mathcal{A}$ является симметрическим. Найдем его собственные значения. После вычислений имеем $|A - tE| = (t-2)^3(t+2)$. Итак, наш оператор имеет всего два различных собственных значения: $t_1 = 2$ и $t_2 = -2$. Найдем собственные векторы, относящиеся к t_1. Имеем

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с алгоритмом, изложенным на с. 291, получаем, что собственными векторами, относящимися к t_1, будут векторы

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 0, 1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 0, 0, 1)$$

(и их нетривиальные линейные комбинации). Найдем теперь собственные векторы, относящиеся к t_2:

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы получаем, что собственные векторы, относящиеся к t_2, пропорциональны вектору $\vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1)$. Применим к векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Имеем

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0); \\
\vec{b}_2 &= -\frac{\vec{b}_1\vec{a}_2}{\vec{b}_1\vec{b}_1}\vec{b}_1 + \vec{a}_2 = -\frac{\vec{b}_1}{2} + \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right); \\
\vec{b}_3 &= -\frac{\vec{b}_1\vec{a}_3}{\vec{b}_1\vec{b}_1}\vec{b}_1 - \frac{\vec{b}_2\vec{a}_3}{\vec{b}_2\vec{b}_2}\vec{b}_2 + \vec{a}_3 = -\frac{\vec{b}_1}{2} - \frac{\vec{b}_2}{3} + \vec{a}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).
\end{aligned}$$

Поскольку к собственному значению t_2 относится лишь один линейно независимый собственный вектор, процесс ортогонализации в этом случае тривиален: $\vec{b}_4 = \vec{a}_4 = (-1, 1, 1, 1)$. Разделив каждый из полученных векторов на его длину, получаем ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ диагональна:

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right);\\
\vec{c}_2 &= \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{3/2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right);\\
\vec{c}_3 &= \frac{\vec{b}_3}{2/\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);\\
\vec{c}_4 &= \frac{\vec{b}_4}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

§42. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) нахождение ортогонального базиса подпространства, порожденного данной системой векторов;

2) дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса пространства;

3) задачи, связанные с понятием ортогонального дополнения подпространства: нахождение базиса ортогонального дополнения, ортогональной проекции вектора на подпространство, ортогональной составляющей вектора относительно подпространства;

4) нахождение ортонормированного базиса пространства, состоящего из собственных векторов данного симметрического оператора.

В §39 и 41 приведены примеры решения задач первого, второго и четвертого типа, а в §40 подробно изложены алгоритмы решения задач третьего типа и показано, что они сводятся к решению некоторых задач, каждая из которых уже была разобрана ранее. Учитывая это, мы не будем приводить здесь новые примеры.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длины сторон и величины углов треугольника в пятимерном евклидовом пространстве с вершинами $A(2,4,2,4,2)$, $B(6,4,4,4,6)$, $C(5,7,5,7,2)$.

2*. Рассмотрим следующую операцию $\bullet$ над векторами в пространстве $\mathbb{R}_2$: если $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$, то $\vec{x}\bullet\vec{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$. Проверить, что эта операция удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения и найти базис в $\mathbb{R}_2$, ортонормированный относительно этого скалярного произведения.

3*. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства E, а вектор $\mathbf{x} \in E$ имеет в этом базисе координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Доказать, что $x_1 = \mathbf{x}\mathbf{b}_1$, $x_2 = \mathbf{x}\mathbf{b}_2$, …, $x_n = \mathbf{x}\mathbf{b}_n$.

4. Найти ортогональный базис подпространства, порожденного данной системой векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1,2,0,-2)$, $\vec{a}_2 = (7,2,4,1)$, $\vec{a}_3 = (4,-1,2,1)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,2,1,3)$, $\vec{a}_2 = (4,1,1,1)$, $\vec{a}_3 = (3,1,1,0)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,2,2,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,-5,3)$, $\vec{a}_3 = (3,2,8,-7)$;

г) $\vec{a}_1 = (1,-1,0,2)$, $\vec{a}_2 = (4,0,1,1)$, $\vec{a}_3 = (5,-1,0,3)$, $\vec{a}_4 = (1,2,3,-1)$.

5. Найти ортонормированный базис подпространства, порожденного данной системой векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1,-1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (3,1,1,1)$, $\vec{a}_3 = (3,1,1,4)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,2,0,1)$, $\vec{a}_2 = (0,5,2,2)$, $\vec{a}_3 = (-1,3,2,1)$, $\vec{a}_4 = (-2,4,5,0)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,1,0,-1,2)$, $\vec{a}_2 = (2,0,1,1,3)$, $\vec{a}_3 = (4,-2,3,0,4)$.

6. Найти ортогональный базис пространства решений однородной системы линейных уравнений:

а) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; б) $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$;

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

7. Проверить ортогональность системы векторов и дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства:

а) $\vec{a}_1 = (-1,1,0,-1)$, $\vec{a}_2 = (3,1,2,-2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1,0,1,2)$, $\vec{a}_2 = (-2,1,-2,2)$;

в) $\vec{a}_1 = (1,0,2,-1,3)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,-2,0,1)$.

8. Проверить ортонормированность системы векторов и дополнить ее до ортонормированного базиса всего пространства:

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{a}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

9. Пространство M порождается векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найти базис ортогонального дополнения подпространства M:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 4, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (4, 8, -1, -1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 5, 3)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, 1$;
г) $\vec{a}_1 = (2, 0, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-1, 2, 1, 4)$, $\vec{a}_3 = (5, 1, 2, 0)$.

10. Пространство M является пространством решений следующей однородной системы линейных уравнений. Найти базис ортогонального дополнения подпространства M:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

11. Пространство M порождается векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найти ортогональную проекцию $\vec{c}$ вектора $\vec{b}$ на M и ортогональную составляющую $\vec{d}$ вектора $\vec{b}$ относительно M:

а) $\vec{a}_1 = (2, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (3, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (7, 5, 3, 1)$, $\vec{b} = (-5, 1, -1, -3)$;
б) $\vec{a}_1 = (-2, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 3, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (-3, -1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1, -1)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, 0, 3)$, $\vec{b} = (4, -1, -3, 4)$;
г) $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 8, 1)$, $\vec{b} = (5, 2, -2, 2)$.

12. Найти расстояние от вектора $\vec{x} = (7, -4, -1, 2)$ до подпространства, являющегося пространством решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

13. Найти расстояние от вектора $\vec{x} = (4, 2, -5, 1)$ до линейного многообразия, заданного системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

14. Найти угол между вектором $\vec{x} = (1, 0, 3, 0)$ и подпространством, порожденным векторами $\vec{a}_1 = (5, 3, 4, -3)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 4, 5)$ и $\vec{a}_3 = (2, -1, 1, 2)$.

15. Найти угол между вектором $\vec{x} = (2, 2, 1, 1)$ и линейным многообразием $\vec{x}_0 + M$, где $\vec{x}_0 = (1, 5, 3, 7)$, а подпространство M порождено векторами $\vec{a}_1 = (3, 4, -4, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -1, 2)$ и $\vec{a}_3 = (2, 3, -3, 0)$.

16. Найти базис пересечения подпространств M_1 и M_2, где M_1 порождается векторами $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 1, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, -2, 1, 0, -4)$, а M_2 — векторами $\vec{b}_1 = (1, -1, 1, 2, 3)$, $\vec{b}_2 = (3, -2, 2, 1, -5)$, $\vec{b}_3 = (0, 4, -1, 1, 7)$.

17*. Доказать, что оператор ортогонального проектирования является симметрическим.

18. Найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора:

а) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1 + 2x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 11x_1 + 2x_2 - 8x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 2x_2 + 10x_3, \\ y_3 = -8x_1 + 10x_2 + 5x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \quad, \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3, \\ y_3 = - x_2 + x_3. \end{cases}$

19*. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — набор векторов из евклидова пространства E. Положим $a_{ij} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка k называется *определителем Штурма* набора векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Доказать, что набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависим тогда и только тогда, когда определитель Штурма этого набора векторов равен 0.

3. Ответы

1. Длины всех сторон — 6, величины всех углов — $\frac{\pi}{3}$. **2.** (1,0),(1,1).

3. *Указание*: умножить скалярно обе части равенства $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n$ на $\mathbf{b}_i$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) или воспользоваться теоремой 2 из §39.

4. а) $\vec{b}_1 = (1, 2, 0, -2)$, $\vec{b}_2 = (6, 0, 4, 3)$, $\vec{b}_3 = (34, -61, -18, -44)$; б) $\vec{b}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{b}_2 = (10, -1, 1, -3)$, $\vec{b}_3 = (-19, 87, 61, -72)$; в) $\vec{b}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{b}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\vec{b}_3 = (2, -1, -1, -2)$; г) $\vec{b}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{b}_2 = (3, 1, 1, -1)$, $\vec{b}_3 = (3, 1, -11, -1)$.

5. а) $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{b}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\vec{b}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; б) $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{b}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\vec{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; в) $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$, $\vec{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$, $\vec{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, 0\right)$.

6. а) $(2, 1, -1)$, (0,1,1); б) $(5, -1, 2)$, (0,2,1); в) $(0, 2, 1, -1)$, (0,0,1,1); г) $(2, -3, 3, 2)$, (0,1,1, 0).

7. а) $\vec{a}_3 = (-1, -1, 2, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, 1, 2)$; б) $\vec{a}_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (-1, -6, -1, 1)$; в) $\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, -2, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_5 = (-12, 5, -4, 7, 9)$.

8. $\vec{a}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{a}_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

9. а) $(41, -20, 1, 3)$, (0,1,2,6); б) $(9, -1, -4, -2)$, $(0, 2, -1, 1)$; в) $(1, 0, 0, -1)$; г) $(13, 17, -41, 5)$.

10. а) $\vec{a}_1 = (-1, -2, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (-3, 0, 0, 2)$; б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, -1, 1)$.

11. а) $\vec{c} = (-5, 1, -1, -3)$, $\vec{d} = \vec{0}$; б) $\vec{c} = \vec{0}$, $\vec{d} = (1, 0, 1, -1)$; в) $\vec{c} = (1, -1, -1, 5)$, $\vec{d} = (3, 0, -2, -1)$; г) $\vec{c} = (3, 1, -1, -2)$, $\vec{d} = (2, 1, -1, 4)$.

12. $\sqrt{15}$. **13.** 5. **14.** $\frac{\pi}{6}$. **15.** $\frac{\pi}{3}$. **16.** (7,2,3,4,0), $(-1, 2, -1, 0, 4)$.

18. а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

в) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

4. Самостоятельная работа №8

1. Найти ортогональный базис подпространства, порожденного данной системой векторов:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (4, -2, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (5, 3, -2, 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 2, -3, 0)$, $\vec{a}_2 = (4, 7, -8, 1)$, $\vec{a}_3 = (4, 5, 0, -5)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (4, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_3 = (-4, 0, 5, 1)$;

г) $\vec{a}_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 0, 1, 4)$, $\vec{a}_3 = (-3, 6, -3, 0)$.

2. Пространство L порождается векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Найти базис его ортогонального дополнения:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{a}_2 = (2, 4, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (4, 8, -1, -1)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 5, 3)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 0, -1, 3)$, $\vec{a}_3 = (0, -2, -3, 1)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (-1, -3, -5, -10)$.

3. Пространство L является пространством решений следующей однородной системы линейных уравнений. Найти базис его ортогонального дополнения:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

4. Пространство L порождается векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на L и ортогональную составляющую $\vec{b}$ относительно L:

а) $\vec{a}_1 = (2, 1, 3, -4)$, $\vec{a}_2 = (5, 3, 5, -8)$, $\vec{b} = (-2, 0, 2, 8)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 3, 1, 2)$, $\vec{b} = (3, 1, 1, -2)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 1, -1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-1, -1, 4, -6)$, $\vec{b} = (2, 1, 0, 1)$;

г) $\vec{a}_1 = (0, 2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -2, 1)$, $\vec{b} = (6, 2, 1, 1)$.

5. Найти ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора, задаваемого в некотором ортонормированном базисе следующей матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Глава 9

Квадрики на плоскости

В главе 2 мы изучили прямые и плоскости, т.е. кривые и поверхности, задаваемые уравнениями первого порядка. Сейчас мы приступаем к рассмотрению кривых и поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка. Их принято называть *квадриками.* В данной главе рассматриваются квадрики на плоскости (т.е. кривые второго порядка). Квадрикам в пространстве (поверхностям второго порядка) будет посвящена следующая глава.

Мы начнем эту главу с рассмотрения трех конкретных квадрик на плоскости, а затем дадим общее определение квадрики и приведем их полную классификацию.

На протяжении всей этой главы система координат предполагается прямоугольной декартовой.

§43. Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипса.

Ясно, что в случае $a = b$ эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса a.

Отметим вначале ряд простых свойств эллипса. Заметим прежде всего, что если точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1), то $|x| \leqslant a$ и $|y| \leqslant b$. В самом деле, из (1) вытекает, что $x^2 = a^2\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$, откуда $|x| = a\cdot\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}} \leqslant a$. Неравенство $|y| \leqslant b$ проверяется аналогично. Это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ координатной плоскости.

Далее, если точка $M(x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению (1), т.е. выполняется равенство $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, то и точки $M'(-x_0, y_0)$ и $M''(x_0, -y_0)$ удовлетворяют уравнению (1). Это означает, что эллипс симметричен как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат. Следовательно, достаточно изучить форму эллипса в первой четверти, а затем симметрично отразить полученную кривую сначала в четвертую четверть, а потом — в левую полуплоскость.

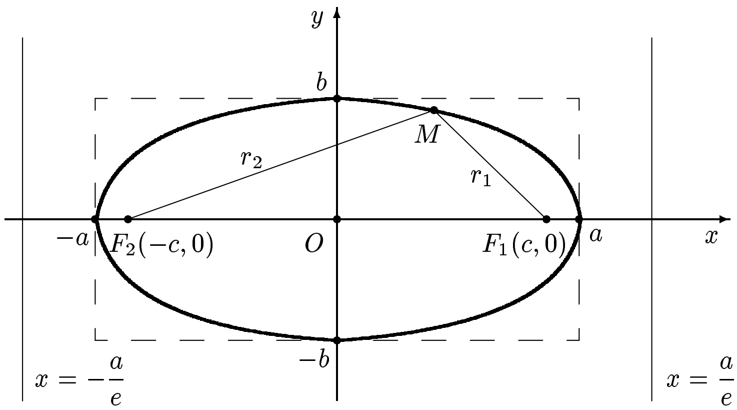


Рис. 1

Итак, пусть $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Тогда из уравнения (1) вытекает, что $y = \dfrac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$. Ясно, что если $x = 0$, то $y = b$. Затем с ростом x значение y уменьшается и при $x = a$ становится равным 0. Вторая производная y'' равна $\dfrac{-ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$. Отсюда следует, что $y'' < 0$ при $x \in [0, a)$. Это означает, что в первой четверти эллипс является вогнутым (т.е. выпуклым вверх). Отразив полученную кривую симметрично сначала в четвертую четверть, а затем в левую полуплоскость, получим кривую, изображенную на рис. 1.

Точки с координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ называются *вершинами* эллипса, величина a — *большой полуосью* эллипса, а величина b — его *малой полуосью*. Введем новую величину c следующим образом: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ясно, что $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* эллипса. Фокус F_1 мы иногда будем называть *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Отметим, что если $a = b$ (т.е. если эллипс является окружностью), то обе полуоси равны радиусу окружности, $c = 0$ и $F_1 = F_2$ — центр окружности (совпадающий с началом координат). Если точка M принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* и обозначаются соответственно через r_1 и r_2 (если $a = b$, то $r_1 = r_2 = a$ — радиус окружности). Величина $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса. Так как $0 \leqslant c < a$, то $0 \leqslant e < 1$. Эксцентриситет можно рассматривать как меру вытянутости эллипса, его "удаленности" от окружности. Ясно, что $e = 0$ тогда и только тогда, когда эллипс является окружностью. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше похож на окружность, чем эксцентриситет ближе к единице, тем более эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.

Лемма. *Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то $r_1 = a - ex$ и $r_2 = a + ex$.*

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$. Следовательно,

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}.$$

Поскольку $c^2 + b^2 = a^2$, $1 - \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2} = e^2$ и $ea = c$, имеем

$$r_1 = \sqrt{e^2x^2 - 2eax + a^2} = \sqrt{(ex - a)^2} = |ex - a|.$$

Так как $0 \leqslant e < 1$ и $x \leqslant a$, то $ex - a \leqslant 0$. Это означает, что $r_1 = a - ex$. Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. Лемма доказана. ∎

Следующее утверждение часто называют *фокальным свойством* эллипса. Оно дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая была эллипсом. Это условие нередко принимают за определение эллипса.

Теорема 1. *Точка M принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от M до фокусов равна $2a$.*

Доказательство. Необходимость. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то, в силу леммы,

$$|F_1M| + |F_2M| = r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

Достаточность. Предположим, что $M(x, y)$ — точка плоскости, для которой $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

и возведем обе части полученного равенства в квадрат. Получим

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

что после очевидных преобразований дает

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \quad \text{или}$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Поскольку $a^2 - c^2 = b^2$, последнее равенство можно переписать в виде $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Разделив это равенство на a^2b^2, получим уравнение (1). Следовательно, если сумма расстояний от точки M до фокусов равна $2a$, то M принадлежит эллипсу. Теорема 1 доказана. ∎

Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса (если эллипс является окружностью, т.е. если $e = 0$, то он не имеет директрис). Поскольку абсцисса любой точки эллипса по модулю не превосходит a и $e < 1$, то директрисы не пересекают эллипса (рис. 1). Директрису $x = \frac{a}{e}$ будем называть *правой* или *соответствующей фокусу* F_1, а директрису $x = -\frac{a}{e}$ — *левой* или *соответствующей фокусу* F_2.

Следующее утверждение называют *директориальным свойством* эллипса.

Теорема 2. *Точка M принадлежит эллипсу (не являющемуся окружностью) тогда и только тогда, когда отношение расстояния* *от точки M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.*

Доказательство. Докажем сформулированное утверждение для правого фокуса и правой директрисы. Для левого фокуса и левой директрисы доказательство абсолютно аналогично.

Обозначим через ℓ директрису с уравнением $x = \dfrac{a}{e}$. Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то

$$\frac{|F_1M|}{d(M, \ell)} = \frac{r_1}{\frac{a}{e} - x} = \frac{a - ex}{a - ex} \cdot e = e.$$

Пусть теперь $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, для которой выполнено равенство $\dfrac{|F_1M|}{d(M, \ell)} = e$ или $|F_1M| = e \cdot d(M, \ell)$. Ясно, что $|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Используя формулу (16) из §7, получаем, что $d(M, \ell) = \left|x - \dfrac{a}{e}\right|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \cdot \left|x - \frac{a}{e}\right|.$$

Если возвести это равенство в квадрат, то после приведения подобных мы получим $(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$. Учитывая, что $1 - e^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$ и $a^2 - c^2 = b^2$, имеем $\dfrac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$. Разделив это равенство на b^2, приходим к уравнению (1). Теорема 2 доказана. ■

§44. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболы.

Изучим форму гиперболы. Как и в случае эллипса, легко убедиться, что гипербола симметрична относительно обеих осей координат. В силу этого достаточно изучить форму гиперболы лишь в первой четверти. Предположим, что точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, причем $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Тогда, в силу (1), $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Рассмотрим прямую с уравнением $y = \frac{b}{a} \cdot x$, точнее, луч этой прямой, расположенный в первой четверти. Ясно, что $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Это означает, что гипербола расположена ниже прямой. Далее,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ гипербола неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a} \cdot x$, которая, таким образом, является асимптотой гиперболы. Нетрудно видеть, что в первой четверти нет точек гиперболы, для которых $x < a$. (В самом деле, $x^2 = a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right)$, и потому если $x \geqslant 0$, то $x = a\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \geqslant a$.)

Как уже отмечалось выше, из того, что $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, вытекает, что $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$. Если $x = a$, то $y = 0$. Далее, с ростом x значение y возрастает. Вторая производная y'' равна $\frac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$. В частности, $y'' < 0$ при $x \in [a, +\infty)$. Это означает, что в первой четверти гипербола вогнута (т.е. выпукла вверх). С учетом симметрии относительно осей координат и того, что прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$ является асимптотой, получаем кривую, изображенную на рис. 2. Мы видим, что гипербола распадается на две части, одна из которых лежит в правой полуплоскости, а другая — в левой полуплоскости. Эти части называются соответственно *правой ветвью* и *левой ветвью* гиперболы. Отметим еще, что, в силу симметрии относительно осей координат, асимптотой гиперболы является не только прямая $y = \frac{b}{a} \cdot x$, но также и прямая $y = -\frac{b}{a} \cdot x$.

Точки с координатами $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы, величина a — *действительной полуосью* гиперболы, а величина b — ее *мнимой полуосью*. Введем новую величину c правилом: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ясно, что $c > a$ (в отличие от эллипса). Точки $F_1(c, 0)$ и

$F_2(-c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы; фокус F_1 называется *правым*, а фокус F_2 — *левым*. Как и в случае эллипса, если точка M принадлежит гиперболе, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами*. Но в отличие от эллипса здесь нужно различать случаи, когда точка M принадлежит правой ветви гиперболы и когда M принадлежит левой ветви. Фокальные радиусы точек, расположенных на правой ветви гиперболы, будем обозначать через $r_{1\text{пр}}$ и $r_{2\text{пр}}$, а фокальные радиусы точек, расположенных на левой ветви гиперболы, — через $r_{1\text{лев}}$ и $r_{2\text{лев}}$ (цифры 1 и 2 в индексах соответствуют фокусам F_1 и F_2). Величина $e = \dfrac{c}{a}$, как и в случае эллипса, называется *эксцентриситетом* гиперболы. Легко понять, что для гиперболы всегда выполнено неравенство $e > 1$ (что отличается от случая эллипса).

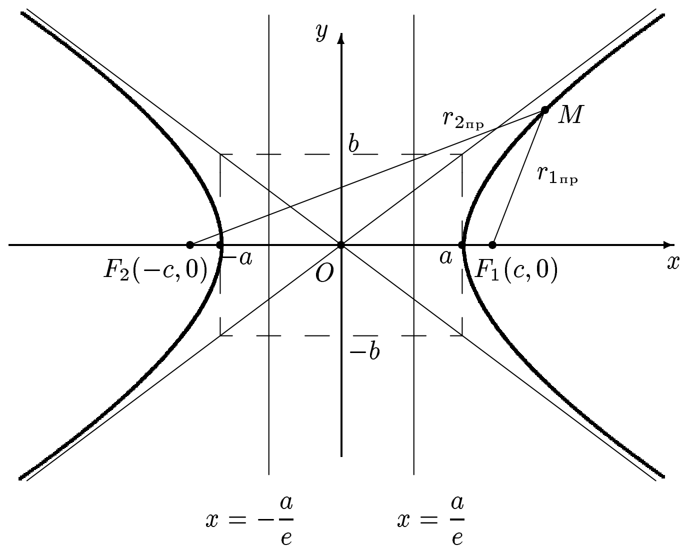


Рис. 2

Лемма. *Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то*

$$r_{1\text{пр}} = ex - a,\ r_{2\text{пр}} = ex + a,\ r_{1\text{лев}} = -ex + a,\ r_{2\text{лев}} = -ex - a.$$

Доказательство. Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$. Предположим, что точка M лежит на правой ветви гиперболы. Тогда

$$r_{1\text{пр}} = |F_1M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{x^2-2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}.$$

Так как $c^2-b^2=a^2$, $1+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{a^2}=e^2$ и $ea=c$, то

$$r_{1\text{пр}} = \sqrt{e^2x^2-2eax+a^2} = \sqrt{(ex-a)^2} = |ex-a|.$$

Поскольку $x \geqslant a$, $e > 1$, то $|ex-a| = ex-a$ и потому $r_{1\text{пр}} = ex-a$. Остальные равенства из формулировки леммы проверяются вполне аналогично. Лемма доказана. ■

Следующее утверждение часто называют *фокальным свойством* гиперболы. Оно дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая была гиперболой. Это условие нередко принимают за определение гиперболы.

Теорема 1. *Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний от M до фокусов равен $2a$.*

Доказательство. Необходимость. В силу леммы имеем $|r_{1\text{пр}} - r_{2\text{пр}}| = |r_{1\text{лев}} - r_{2\text{лев}}| = 2a$.

Достаточность. Пусть $M(x,y)$ — точка плоскости, для которой выполнено равенство $\big||F_1M|-|F_2M|\big| = 2a$. Следовательно,

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

После возведения обеих частей этого равенства в квадрат и приведения подобных получим

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx.$$

Еще раз возведем полученное равенство в квадрат. Получим

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4+2a^2cx+c^2x^2 \text{ или } (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Поскольку $a^2-c^2=-b^2$, последнее равенство можно переписать в виде $-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$. Разделив это равенство на $-a^2b^2$, мы получим уравнение (1). Теорема 1 доказана. ■

Как и в случае эллипса, прямые $x = \pm\dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы. Они не пересекают гиперболы, поскольку $\left|\dfrac{a}{e}\right| < a$ (рис. 2). Директрису $x = \dfrac{a}{e}$ будем называть *правой* или *соответствующей фокусу* F_1, а директрису $x = -\dfrac{a}{e}$ — *левой* или *соответствующей фокусу* F_2.

Справедливо следующее утверждение, которое называют *директориальным свойством* гиперболы и которое аналогично соответствующему свойству эллипса (см. теорему 2 в §43).

Теорема 2. *Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояния от точки M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.* ■

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, поскольку оно полностью аналогично доказательству теоремы 2 из §43.

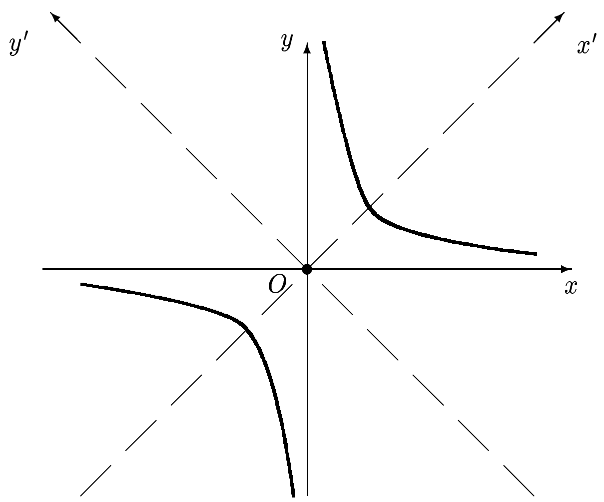


Рис. 3

В школьном курсе математики гиперболой назывался график функции $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Естественно возникает вопрос, как соотносится “школьная” гипербола с гиперболой, введенной в этом параграфе.

Можно ограничиться случаем $k > 0$ (в противном случае можно сделать замену неизвестных $x' = -x$, $y' = y$). Рассмотрим новую систему координат $Ox'y'$, полученную из старой поворотом на $45°$ (рис. 3).

Используя формулы (9) из §5, получаем, что формулы поворота системы координат на угол $45°$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases} \tag{2}$$

Если $x \neq 0$, то равенство $y = \dfrac{k}{x}$ эквивалентно равенству $xy = k$. Если в последнее подставить x и y из формул (2), мы получим

$$k = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}((x')^2 - (y')^2).$$

Это означает, что в системе координат $Ox'y'$ "школьная" гипербола определяется уравнением $\dfrac{(x')^2}{2k} - \dfrac{(y')^2}{2k} = 1$. Поскольку $k > 0$, то $2k = a^2$ для некоторого $a > 0$. Следовательно, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1.$$

Гипербола, заданная уравнением вида (1) при $a = b$, называется *равносторонней.* Таким образом, "школьная" гипербола является частным случаем гиперболы, определяемой уравнением (1), а именно равносторонней гиперболой.

§45. Парабола

Определение. *Параболой* называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* параболы.

Отметим несколько простых свойств параболы. Поскольку y входит в каноническое уравнение параболы только во второй степени, то график параболы симметричен относительно оси Ox. Далее, ясно, что

$x = \dfrac{y^2}{2p} \geqslant 0$, т.е. вся парабола расположена в правой полуплоскости. Если ограничиться только первой четвертью, то y можно представить функцией от x, а именно $y = \sqrt{2px}$. Если $x = 0$, то $y = 0$. С ростом x возрастает и y, причем неограниченно. Поскольку $y'' = \dfrac{-\sqrt{2p}}{4x^{3/2}} < 0$ при $x > 0$, то парабола вогнута (т.е. выпукла вверх). Учитывая все сказанное, получаем линию, изображенную на рис. 4.

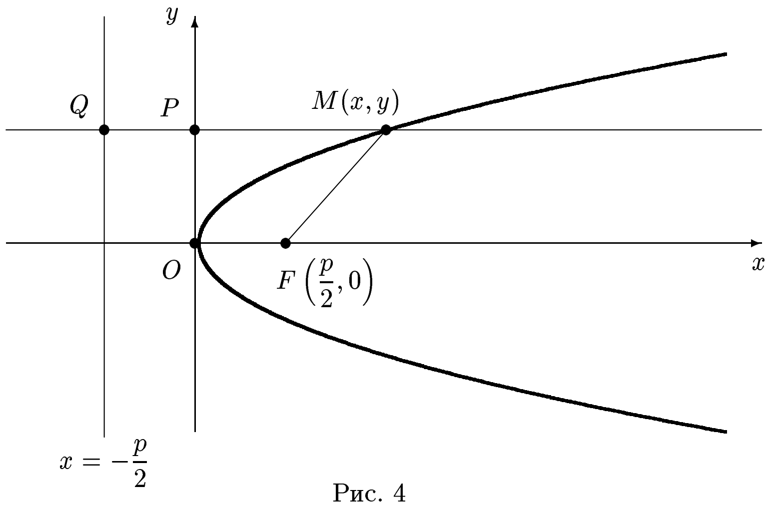


Рис. 4

Точка $O(0,0)$ (начало координат) называется *вершиной* параболы, а точка $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ — ее *фокусом*. Прямая с уравнением $x = -\dfrac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы, а число p (равное расстоянию от фокуса до директрисы) — ее *параметром*.

Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая была параболой. Это условие нередко принимают за определение параболы.

Теорема. *Точка M принадлежит параболе тогда и только тогда, когда она равноудалена от фокуса параболы и от ее директрисы.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что ℓ — директриса параболы, а точка $M(x,y)$ принадлежит параболе. Тогда

$$|FM| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \\ = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $x \geqslant 0$, а $p > 0$). Проведем через точку M прямую, перпендикулярную оси ординат. Точки пересечения этой прямой с осью ординат и с директрисой параболы обозначим через P и Q соответственно (рис. 4). Ясно, что $d(M,\ell) = |MP| + |PQ| = x + \dfrac{p}{2}$; отметим, что $d(M,\ell)$ легко найти также с помощью формулы (16) из §7. Следовательно, $|FM| = d(M,\ell)$.

Достаточность. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка плоскости и $|FM| = d(M,\ell)$. Используя формулу (16) из §7, получим $\sqrt{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \dfrac{p}{2}\right|$. После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат и приведения подобных имеем $y^2 = 2px$. Это означает, что точка M принадлежит параболе. Теорема доказана. ■

В школьном курсе математики параболой называется график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Легко понять, что "школьная" парабола является и параболой в смысле определения, введенного в начале данного параграфа. В самом деле, выделив в правой части равенства $y = ax^2 + bx + c$ полный квадрат по x, получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{b}{2a}, \\ y' = y + \dfrac{b^2}{4a} - c, \end{cases}$$

получим уравнение $y' = a(x')^2$. Применяя теперь замену неизвестных $x'' = y'$, $y'' = x'$ и полагая $p = \dfrac{1}{2a}$ (напомним, что $a \neq 0$), мы приходим к уравнению $(y'')^2 = 2px''$. Если $p > 0$, мы получили каноническое уравнение параболы. В противном случае, чтобы прийти к тому же результату, надо еще сделать замену неизвестных $x''' = -x''$, $y''' = y''$.

§46. Понятие квадрики на плоскости

1. Определение квадрики на плоскости

Определение. *Уравнением второго порядка с двумя неизвестными* называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{1}$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Последнее условие означает, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} отличен от нуля.

Определение. *Квадрикой на плоскости* (или *кривой второго порядка*) называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют некоторому уравнению второго порядка с двумя неизвестными.

Примерами квадрик на плоскости являются кривые, рассмотренные в §43–45, — эллипс, гипербола и парабола. Как мы увидим в §47, кроме этих трех кривых существуют лишь несколько "вырожденных" квадрик на плоскости.

По определению квадрики на плоскости, она задается уравнением второго порядка *в некоторой* системе координат. Оказывается, справедливо следующее более сильное утверждение.

Теорема 1. *Произвольная квадрика на плоскости в любой системе координат может быть задана уравнением второго порядка с двумя неизвестными.*

Доказательство. Пусть линия ℓ в системе координат Oxy определяется уравнением (1), в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} отличен от нуля. Рассмотрим новую систему координат $O'x'y'$ и докажем, что уравнение линии ℓ в ней также является уравнением второго порядка.

Как указано в §5 на с. 44, формулы перехода от Oxy к $O'x'y'$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = p_1 + t_{11}x' + t_{12}y', \\ x = p_2 + t_{21}x' + t_{22}y', \end{cases} \tag{2}$$

где (x, y) и (x', y') — соответственно старые и новые координаты произвольной точки плоскости, (p_1, p_2) — старые координаты точки O', а

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от старого базиса к новому. При этом, в силу леммы 2 из §28,

$$\Delta = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подставив x и y, выраженные через x' и y' с помощью равенств (2), в (1) и произведя необходимые преобразования, получим уравнение вида

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0,$$

где, в частности,

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}t_{11}^2 + 2a_{12}t_{11}t_{21} + a_{22}t_{21}^2, \\ a'_{22} &= a_{11}t_{12}^2 + 2a_{12}t_{12}t_{22} + a_{22}t_{22}^2, \\ a'_{12} &= a_{11}t_{11}t_{12} + a_{12}(t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21}) + a_{22}t_{21}t_{22}. \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что $a'_{11} = a'_{12} = a'_{22} = 0$. Иными словами,

$$a_{11}t_{11}^2 + 2a_{12}t_{11}t_{21} + a_{22}t_{21}^2 = 0, \tag{4}$$

$$a_{11}t_{11}t_{12} + a_{12}(t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21}) + a_{22}t_{21}t_{22} = 0, \tag{5}$$

$$a_{11}t_{12}^2 + 2a_{12}t_{12}t_{22} + a_{22}t_{22}^2 = 0. \tag{6}$$

Покажем, что все элементы матрицы T отличны от 0. В самом деле, предположим, что $t_{11} = 0$. Ясно, что тогда $t_{12} \neq 0$ и $t_{21} \neq 0$, так как в противном случае $\Delta = 0$. Из (4) и того, что $t_{11} = 0$, вытекает, что $a_{22}t_{21}^2 = 0$. Поскольку $t_{21} \neq 0$ получаем, что $a_{22} = 0$. Из (5) и того, что $t_{11} = 0$, вытекает теперь, что $a_{12}t_{12}t_{21} = 0$. Учитывая, что $t_{12} \neq 0$ и $t_{21} \neq 0$, имеем $a_{12} = 0$. Но тогда из (6) и того, что $t_{12} \neq 0$, вытекает, что $a_{11} = 0$. Но это невозможно, поскольку по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} должен быть отличен от 0. Итак, $t_{11} \neq 0$. Аналогично проверяется, что все остальные элементы матрицы T отличны от 0.

Разделим теперь равенство (4) на t_{21}^2, равенство (5) — на $t_{21}t_{22}$, а равенство (6) — на t_{22}^2. Получим равенства

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}u + a_{22} = 0, \tag{7}$$

$$a_{11}uv + a_{12}(u + v) + a_{22} = 0, \tag{8}$$

$$a_{11}v^2 + 2a_{12}v + a_{22} = 0, \tag{9}$$

где $u = \dfrac{t_{11}}{t_{21}}$ и $v = \dfrac{t_{12}}{t_{22}}$. При этом $u \neq v$, поскольку равенство $u = v$ влечет $\Delta = 0$. Сложим уравнения (7) и (9) и вычтем из результата уравнение (8), умноженное на 2. Получим $a_{11}(u - v)^2 = 0$. Поскольку $u \neq v$, то $a_{11} = 0$. Разделив равенства (4), (5) и (6) на t_{11}^2, $t_{11}t_{12}$ и t_{12}^2 соответственно и рассуждая так же, как выше, получим, что $a_{22} = 0$. Из равенства (4) вытекает теперь, что $a_{12}t_{11}t_{21} = 0$. Учитывая, что $t_{11} \neq 0$ и $t_{21} \neq 0$, получаем, что $a_{12} = 0$. Мы вновь пришли к противоречию с тем фактом, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} должен быть отличен от 0.

Итак, равенства $a'_{11} = a'_{12} = a'_{22} = 0$ ведут к противоречию, и потому по крайней мере один из коэффициентов a'_{11}, a'_{12} и a'_{22} отличен от нуля. Теорема 1 доказана. ∎

2. Упрощение уравнения квадрики

Уравнение (1) содержит шесть коэффициентов. Поэтому анализировать это уравнение и определять вид заданной им кривой крайне затруднительно. Оказывается, однако, что можно подобрать систему координат, в которой уравнение той же кривой будет выглядеть намного проще.

Лемма 1. *Пусть в системе координат Oxy квадрика ℓ задается уравнением (1). Тогда систему Oxy можно повернуть вокруг точки O на некоторый угол α так, что в новой системе координат уравнение той же квадрики ℓ не будет содержать слагаемого с произведением неизвестных.*

Доказательство. Если $a_{12} = 0$, то уже в исходной системе координат уравнение квадрики ℓ не содержит слагаемого с произведением неизвестных и в качестве искомого α можно взять угол 0°. Поэтому далее можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Как показано в §5 на с. 45, формулы поворота системы координат на угол α имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

Эти равенства являются частным случаем формул (2) при $p_1 = p_2 = 0$, $t_{11} = \cos\alpha$, $t_{12} = -\sin\alpha$, $t_{21} = \sin\alpha$ и $t_{22} = \cos\alpha$. Учитывая формулу (3), получаем, что в системе координат $Ox'y'$ коэффициент при произведении $x'y'$ в уравнении квадрики ℓ будет иметь вид

$$\begin{aligned} 2a'_{12} &= 2a_{11}t_{11}t_{12} + 2a_{12}(t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21}) + 2a_{22}t_{21}t_{22} = \\ &= -2a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= -(a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы необходимо найти угол α так, чтобы выполнялось равенство $a'_{12} = 0$, или

$$2a_{12}\cos 2\alpha = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha. \qquad (10)$$

Ясно, что $\alpha \neq 0$ (в противном случае, т.е. при “повороте” системы координат на 0°, коэффициент при xy останется без изменения и потому будет отличен от 0). Следовательно, и $2\alpha \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, и потому $0 < 2\alpha < \pi$. Поэтому из того, что $2\alpha \neq 0$, вытекает, что $\sin 2\alpha \neq 0$. Кроме того, напомним, что $a_{12} \neq 0$. Разделив обе части равенства (10) на $2a_{12}\sin 2\alpha$, получаем уравнение

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \tag{11}$$

которое всегда имеет решение. Лемма 1 доказана. ∎

Будем теперь считать, что уже в исходной системе координат уравнение квадрики ℓ не содержит произведения неизвестных, т.е. имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{12}$$

В силу теоремы 1 можно считать, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11} и a_{22} отличен от 0.

Лемма 2. *Пусть в системе координат Oxy квадрика ℓ задается уравнением* (12)*. Если $a_{11} \neq 0$, то сдвигом начала системы координат вдоль оси Ox можно получить новую систему координат, в которой уравнение квадрики ℓ не содержит линейного слагаемого по x. Если $a_{22} \neq 0$, то сдвигом системы координат вдоль оси Oy можно получить новую систему координат, в которой уравнение квадрики ℓ не содержит линейного слагаемого по y.*

Доказательство. Оба утверждения леммы доказываются абсолютно аналогично. Поэтому мы ограничимся проверкой только первого из них. Итак, пусть $a_{11} \neq 0$. В уравнении (12) выделим полный квадрат по x:

$$a_{11} \cdot \left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_{11}}$. Проведем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y \quad . \end{cases}$$

Геометрически этой замене неизвестных соответствует параллельный перенос системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $\left(-\dfrac{a_1}{a_{11}}, 0\right)$. В новой системе координат квадрика ℓ имеет уравнение $a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + 2a_2y' + a_0' = 0$. Лемма 2 доказана. ∎

Теорема 2. *Для всякой квадрики на плоскости существует система координат, в которой уравнение этой квадрики имеет один из следующих видов:*

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \text{ где } A \neq 0,\ B \neq 0, \tag{13}$$

$$Dy^2 + 2Ex + F = 0, \text{ где } D \neq 0. \tag{14}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и теоремы 1 можно считать, что уравнение квадрики ℓ имеет вид (12) и по крайней мере один из коэффициентов a_{11} и a_{22} отличен от нуля. Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$. Тогда по лемме 2 параллельным переносом системы координат можно избавиться от линейного слагаемого по неизвестной x. Из доказательства леммы 2 видно, что коэффициенты при x^2 и y^2 при этом не изменятся, т.е. по-прежнему будут отличны от 0. Вновь применяя лемму 2, получаем, что параллельным переносом системы координат можно избавиться и от линейного слагаемого по неизвестной y. Поскольку при этом, как и ранее, коэффициенты при x^2 и y^2 останутся ненулевыми, уравнение квадрики примет вид (13).

Предположим теперь, что $a_{11} = 0$ и $a_{22} \neq 0$. В силу леммы 2 параллельным переносом системы координат можно избавиться от линейного слагаемого по неизвестной y. При этом коэффициент при y^2 будет ненулевым, и потому уравнение квадрики будет иметь вид (14).

Наконец, если $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, вновь применяя лемму 2, можно получить систему координат, в которой уравнение квадрики будет иметь вид $Dx^2 + 2Ey + F = 0$, где $D \neq 0$. Переименовав x в y и наоборот (т.е. сделав замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$), мы вновь придем к уравнению (14).

Теорема 2 доказана. ∎

§47. Классификация квадрик на плоскости

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Всякая квадрика на плоскости является или эллипсом, или гиперболой, или параболой, или парой прямых (пересекающихся, параллельных или совпавших), или точкой, или пустым множеством.*

Доказательство. В силу теоремы 2 из §46 можно считать, что квадрика задается уравнением вида

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \text{ где } A \neq 0,\ B \neq 0, \tag{1}$$

или уравнением вида

$$Dy^2 + 2Ex + F = 0, \text{ где } D \neq 0. \tag{2}$$

Поэтому дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на два случая.

Случай 1: *квадрика задается уравнением вида* (1). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 1.1: С $\neq 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-C/A} + \frac{y^2}{-C/B} = 1. \tag{3}$$

Предположим сначала, что числа $-\dfrac{C}{A}$ и $-\dfrac{C}{B}$ положительны. Введя обозначения $a = \sqrt{-\dfrac{C}{A}}$ и $b = \sqrt{-\dfrac{C}{B}}$, мы получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если $a \geqslant b$, оно является каноническим уравнением эллипса. В противном случае мы получим тот же результат, сделав замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$.

Пусть теперь числа $-\dfrac{C}{A}$ и $-\dfrac{C}{B}$ имеют разные знаки. Без ограничения общности можно считать, что $-\dfrac{C}{A} > 0$ и $-\dfrac{C}{B} < 0$ (в противном случае следует сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\dfrac{C}{A}}$, $b = \sqrt{\dfrac{C}{B}}$, мы получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е. каноническое уравнение гиперболы.

Наконец, если числа $-\dfrac{C}{A}$ и $-\dfrac{C}{B}$ отрицательны, то уравнение (3) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 1.2: C = 0. В этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} = 0. \tag{4}$$

Если числа $\dfrac{1}{A}$ и $\dfrac{1}{B}$ имеют один и тот же знак, то уравнение (4) имеет единственное решение: $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, его геометрическим образом является точка (начало координат).

Пусть теперь числа $\dfrac{1}{A}$ и $\dfrac{1}{B}$ имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на -1, можно добиться того, чтобы выполнялись неравенства $\dfrac{1}{A} > 0$ и $\dfrac{1}{B} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\dfrac{1}{A}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{1}{B}}$, мы получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Геометрическим образом последнего уравнения является совокупность прямых $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ и $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$. Нормальными векторами этих прямых являются векторы $\vec{n}_1 = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{b}\right)$ и $\vec{n}_2 = \left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}\right)$. Очевидно, что эти векторы не коллинеарны. Следовательно, наши прямые пересекаются (см. теорему 3 в §7). Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть пара пересекающихся прямых.

Случай 2: *квадрика задается уравнением вида* (2). Здесь также возможны два подслучая.

Подслучай 2.1: $E \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (2) в виде

$$y^2 = -\frac{2E}{D}x - \frac{F}{D} = -\frac{2E}{D}\left(x + \frac{F}{2E}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{F}{2E}, \\ y' = y \qquad\quad , \end{cases}$$

что соответствует параллельному переносу системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку с координатами $\left(-\frac{F}{2E}, 0\right)$. В новой системе координат квадрика имеет уравнение $(y')^2 = -\frac{2E}{D}x'$. Полагая $p = -\frac{E}{D}$, получаем уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, то оно является каноническим уравнением параболы. Если же $p < 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных $x'' = -x'$, $y'' = y'$.

Подслучай 2.2: $E = 0$. В этом случае уравнение (2) можно переписать в виде
$$y^2 = -\frac{F}{D}. \tag{5}$$

Если $-\frac{F}{D} > 0$, то, полагая $a = \sqrt{-\frac{F}{D}}$, мы получаем уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных прямых $y = a$ и $y = -a$.

Если $-\frac{F}{D} = 0$, то уравнение (5) эквивалентно уравнению $y = 0$, которое определяет прямую (ось абсцисс). В этом случае принято говорить, что квадрика представляет собой пару совпавших прямых.

Наконец, если $-\frac{F}{D} < 0$, то уравнение (5) не имеет решений и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Теорема доказана. ■

§48. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) задачи на нахождение элементов квадрики;

2) задачи о распознавании квадрики или о приведении квадрики к каноническому виду;

3) задачи о касательных к квадрике.

Под элементами квадрики понимаются такие величины, как длины полуосей (для эллипса и гиперболы), расстояние от центра квадрики до фокусов (также для эллипса и гиперболы), эксцентриситет (для тех же кривых), координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы) и т.п. В качестве примера задачи первого типа рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти длины полуосей гиперболы, если угол между асимптотами равен 60°, а расстояние между фокусами равно $4\sqrt{3}$.

Решение. Пусть α — угол между одной из асимптот и положительным направлением оси абсцисс. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$. С другой стороны, α — половина угла между асимптотами, т.е. $\alpha = 30^\circ$. Используя, кроме того, формулу $c = \sqrt{a^2+b^2}$ и тот факт, что c равно половине расстояния между фокусами, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Следовательно, $a = \sqrt{3}b$ и $a^2 + b^2 = 12$. Отсюда $a = 3$ и $b = \sqrt{3}$.

Ответ: $a = 3$, $b = \sqrt{3}$.

Перейдем к задачам второго типа. Алгоритм приведения квадрики на плоскости к каноническому виду изложен в доказательствах лемм 1 и 2 и теоремы 2 в §46 и теоремы в §47. Проиллюстрируем его на конкретном примере.

Задача 2. Определить тип квадрики

$$2x^2 - 8xy + 8y^2 + 10x - 5y - 4 = 0,$$

найти ее каноническое уравнение и изобразить эту квадрику на чертеже в исходной системе координат.

Решение. Обозначим систему координат, в которой квадрика имеет заданное уравнение, через Oxy. Найдем сначала угол α, при повороте на который этой системы координат в уравнении квадрики исчезает произведение неизвестных. В силу формулы (11) из §46

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{3}{4}.$$

Используя формулу

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

получаем, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ или $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Для определенности будем считать, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ (мы имеем право выбирать здесь любое из двух значений тангенса, так как нам достаточно найти *какой-нибудь* угол с указанным в начале решения свойством). Поскольку

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

получаем, что $\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. Мы можем выбрать любое из двух возможных значений косинуса (по той же причине, по которой ранее можно было выбрать любое из двух возможных значений тангенса). Будем считать, что $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ясно, что $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, получаем, что $\sin \alpha > 0$, и потому $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. В силу формулы (9) из §5, формулы поворота системы координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x' + 2y'). \end{cases}$$

Заменяя x и y по этим формулам в исходном уравнении квадрики, раскрывая скобки и приводя подобные, получаем уравнение квадрики в системе координат $Ox'y'$:

$$10(y')^2 + 3\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' - 4 = 0.$$

Выделив полный квадрат по y' в левой части этого уравнения, получим уравнение

$$10\left((y')^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y' + \frac{1}{5}\right) - 2 + 3\sqrt{5}x' - 4 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{3\sqrt{5}}{10}\left(x' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Геометрически ей соответствует параллельный перенос начала системы координат в точку P, которая в системе координат $Ox'y'$ имеет координаты $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Уравнение квадрики в системе координат $Px''y''$ имеет вид $(y'')^2 = -\dfrac{3\sqrt{5}}{10} \cdot x''$. Ясно, что это парабола. Чтобы получить ее каноническое уравнение, осталось сделать замену неизвестных

$$\begin{cases} x''' = -x'', \\ y''' = y'', \end{cases}$$

после чего уравнение параболы примет вид $(y''')^2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} \cdot x'''$. Итак, наша квадрика является параболой с параметром $p = \dfrac{3\sqrt{5}}{20}$. Ее расположение относительно исходной системы координат Oxy приблизительно изображено на рис. 5.

Ответ: парабола, $y^2 = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} \cdot x$.

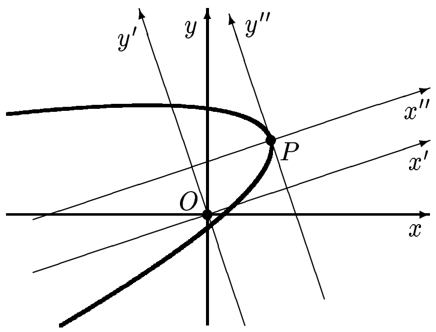


Рис. 5

Прежде чем переходить к задачам третьего типа, уточним определения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Под *касательной к эллипсу* мы будем понимать произвольную прямую, имеющую с эллипсом ровно одну общую точку. *Касательная к гиперболе* — это прямая, имеющая с гиперболой ровно одну общую точку и не параллельная ни одной из асимптот гиперболы. Наконец, *касательная к параболе* — это прямая, имеющая с параболой ровно одну общую точку и не параллельная оси симметрии параболы. Смысл оговорок в двух последних определениях ясен из рис. 6 и 7: на каждом из них прямая ℓ имеет с квадрикой ровно одну общую точку, но было бы странно считать эту прямую касательной. Отметим, что приведенные определения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе согласуются с определением касательной к произвольной кривой, которое дается в курсе математического анализа.

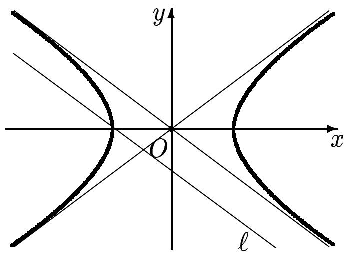


Рис. 6

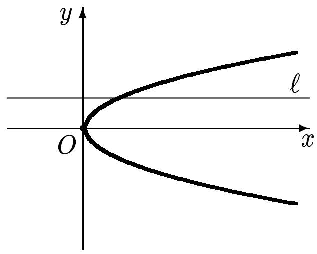


Рис. 7

Задача 3. Написать уравнения касательных к гиперболе

$$4x^2 - y^2 - 4 = 0,$$

проходящих через точку $M(1, 4)$.

Решение. Рассмотрим множество S всех прямых, проходящих через точку M. Уравнения этих прямых имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 + kt, \\ y = 4 + \ell t, \end{cases}$$

где $k^2 + \ell^2 \neq 0$. Возьмем произвольную прямую из множества S и найдем точки ее пересечения с данной гиперболой. Подставляя в уравнение гиперболы $1 + kt$ вместо x и $4 + \ell t$ вместо y, после приведения подобных получаем следующее уравнение относительно t:

$$(4k^2 - \ell^2)t^2 + 8(k - \ell)t - 16 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку касательная имеет с гиперболой ровно одну общую точку, это уравнение должно иметь единственное решение. Это возможно в двух случаях: либо уравнение (1) линейно и имеет единственное решение, т.е. $4k^2 - \ell^2 = 0$ и $8(k - \ell) \neq 0$, либо это уравнение является квадратным и имеет единственное решение, т.е. $4k^2 - \ell^2 \neq 0$ и $D = 64(k - \ell)^2 + 64(4k^2 - \ell^2) = 0$. В первом случае, как легко понять, прямая параллельна одной из асимптот гиперболы и потому не является касательной. Остался второй случай. В этом случае $5k^2-2k\ell=0$. Это уравнение имеет бесконечно много решений (что и не удивительно, так как (k,ℓ) — направляющий вектор искомой прямой, а у прямой бесконечно много направляющих векторов). Но любое из решений этого уравнения пропорционально одному из решений (0,1) или (2,5). Это означает, что есть две касательные к нашей гиперболе, проходящие через точку M:

$$\begin{cases} x = 1 & , \\ y = 4 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 4 + 5t. \end{cases}$$

Координатные уравнения этих прямых имеют вид $x = 1$ и $5x - 2y + 3 = 0$.

Ответ: $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса, заданного уравнением:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $25x^2 + 9y^2 = 225$.

2. Эксцентриситет эллипса $e = \dfrac{1}{3}$, центр совпадает с началом координат, один из фокусов имеет координаты $(-2, 0)$. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, соответствующей данному фокусу.

3. Эксцентриситет эллипса $e = \dfrac{1}{2}$, центр совпадает с началом координат, одна из директрис определяется уравнением $x - 16 = 0$. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной -4, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

4. Найти эксцентриситет эллипса, если:

а) малая ось эллипса видна из фокуса под углом 90°;

б) отрезок между фокусами виден из вершин эллипса, расположенных на оси ординат, под углом 120°;

в) расстояние между директрисами в 3 раза больше расстояния между фокусами;

г) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на директрису, делится вершиной пополам;

д) расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

5. Определить, как расположена прямая относительно эллипса $9x^2+4y^2 = 36$ (пересекает эллипс, касается его, проходит вне эллипса):

а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $x - y + \sqrt{13} = 0$; в) $x + y - 4 = 0$.

6. Определить, при каких значениях параметра m прямая $x + y + m = 0$ пересекает эллипс $x^2 + 4y^2 = 20$, касается его, проходит вне эллипса.

7. Написать уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$:

а) параллельных прямой $x - y + 10 = 0$;

б) перпендикулярных прямой $2x - 2y - 13 = 0$;

в) проходящих через точку $M(4, -1)$.

8. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот и директрис гиперболы, заданной уравнением:

а) $x^2 - 4y^2 = 20$; б) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

9. Составить каноническое уравнение гиперболы, если даны:

а) точки $M_1(6, -2)$ и $M_2(-8, \sqrt{11})$, принадлежащие гиперболе;

б) точка $M(-5, 3)$, принадлежащая гиперболе, и эксцентриситет $e = \sqrt{2}$;

в) точка $M(6, 2)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения асимптот $y = \pm\frac{1}{2}x$;

г) точка $M(4, 0)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения директрис $x = \pm\frac{16}{5}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm 2x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

10. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти:

а) расстояние от фокуса гиперболы до ее асимптоты;

б) произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот.

11. Составить уравнение гиперболы, если известны:

а) эксцентриситет $e = \frac{5}{4}$, фокус $F(5, 0)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $x = \frac{16}{5}$;

б) эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $3x - y + 3 = 0$.

12. Определить, как расположена прямая относительно гиперболы $x^2 - 4y^2 = 12$ (пересекает ее, касается, проходит вне гиперболы):

а) $x - 2y - 4 = 0$; б) $2x - y = 0$; в) $x - y - 3 = 0$; г) $x - 3y - 4 = 0$.

13. Определить, при каких значениях параметра m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$ касается гиперболы $4x^2 - y^2 = 36$.

14. Написать уравнение касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$:

а) параллельных прямой $2x - y = 0$;

б) перпендикулярных прямой $x + 3y + 2 = 0$;

в) проходящих через точку $M(-1, -7)$.

15. Показать, что уравнение $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ определяет гиперболу, найти координаты фокусов, уравнения директрис и асимптот в исходной системе координат. Сделать чертеж.

16. Найти параметр, координаты вершины и фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y^2 = 4 - 6x$; в) $x^2 = 6y + 2$; г) $x^2 = 2 - y$.

17. Составить уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F(-7, 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$;

б) фокус $F(4, 3)$ и уравнение директрисы $y + 1 = 0$;

в) фокус $F(2, -1)$ и уравнение директрисы $x - y - 1 = 0$.

18. Определить, как расположена прямая относительно параболы $y^2 = 8x$ (пересекает ее, касается, проходит вне параболы):

а) $x - y - 4 = 0$; б) $2x - y + 2 = 0$; в) $x - y + 2 = 0$; г) $3y - 5 = 0$.

19. Определить, при каких значениях параметра k прямая $y = kx + 2$ касается параболы $y^2 = 4x$.

20. Написать уравнение касательных к параболе $y^2 = 4x$:

а) параллельных прямой $x - y + 5 = 0$;

б) перпендикулярных прямой $2x + y - 3 = 0$;

в) проходящих через точку $M(9, 6)$.

21. Определить вид квадрики, найти ее каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат):

а) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

в) $y^2 - 2x + 6y + 17 = 0$; г) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$.

22. Определить вид квадрики, найти ее каноническое уравнение и изобразить на чертеже расположение квадрики (относительно исходной системы координат):

а) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

б) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

в) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

г) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

д) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;

е) $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$;

ж) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

3. Ответы

1. а) $a = 3$, $b = 2$, вершины $(\pm3, 0)$, $(0, \pm2)$, фокусы $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, директрисы $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$; б) $a = 5$, $b = 3$, вершины $(\pm3, 0)$, $(0, \pm5)$, фокусы $(0, \pm4)$, $e = \dfrac{4}{5}$, директрисы $y = \pm\dfrac{25}{4}$.

2. 20. **3.** 10. **4.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{1}{2}$; д) $\dfrac{4}{5}$.

5. а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне эллипса.

6. Пересекает эллипс при $|m| < 5$, касается его при $m = \pm5$, проходит вне эллипса при $|m| > 5$.

7. а) $x-y-5=0$, $x-y+5=0$; б) $x+y-5=0$, $x+y+5=0$; в) $x-y-5=0$.

8. а) $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}$, вершины $(\pm2\sqrt{5}, 0)$, фокусы $(\pm5, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{2}x$, директрисы $x = \pm4$; б) $a = 4$, $b = 3$, вершины $(0, \pm4)$, фокусы $(0, \pm5)$, $e = \dfrac{5}{4}$, асимптоты $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, директрисы $y = \pm\dfrac{16}{5}$.

9. а) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; д) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

10. а) b; б) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

11. а) $9x^2 - 16y^2 = 144$; б) $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$.

12. а) Пересекает в одной точке; б) проходит вне гиперболы; в) касается; г) пересекает в двух точках.

13. $m = \pm\dfrac{9}{2}$.

14. а) $y = 2x \pm 4\sqrt{3}$; б) $y = 3x \pm 8\sqrt{2}$; в) $5x-3y-16 = 0$ и $13x+5y+48 = 0$.

15. Фокусы (6,2), $(0, -10)$; директрисы $x + 2y + 2 = 0$, $x + 2y + 8 = 0$; асимптоты $4x + 3y = 0$, $y + 4 = 0$.

16. а) $p = 2$, вершина (2,0), фокус (3,0), директриса $x - 1 = 0$; б) $p = 3$, вершина $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$, фокус $\left(-\dfrac{5}{6}, 0\right)$, директриса $6x - 13 = 0$; в) $p = 3$, вершина $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$, фокус $\left(0, \dfrac{7}{6}\right)$, директриса $6y + 11 = 0$; г) $p = \dfrac{1}{2}$, вершина (0,2), фокус $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, директриса $2y - 5 = 0$.

17. а) $y^2 = -28x$; б) $y = \dfrac{1}{8}x^2 - x + 3$; в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

18. а) Пересекает в двух точках; б) проходит вне параболы; в) касается; г) пересекает в одной точке.

19. $k = \dfrac{1}{2}$. **20.** а) $x - y + 1 = 0$; б) $x - 2y + 4 = 0$; в) $x - 3y + 9 = 0$.

21. а) Эллипс, $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$; б) гипербола, $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; в) парабола, $y^2=2x$; г) пустое множество.

22. а) Эллипс, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) гипербола, $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$; в) пара пересекающихся прямых, $x+2y=0$, $x-2y=0$; г) точка; д) парабола, $y^2=6x$; е) пара параллельных прямых, $y+5=0$, $y-5=0$; ж) пара совпавших прямых, $y=0$.

4. Самостоятельная работа №9

1. а) Расстояние между директрисами эллипса в 2 раза больше расстояния между фокусами. Найти его эксцентриситет.

б) Расстояние между фокусами гиперболы в 2 раза больше расстояния между директрисами. Найти угол между ее асимптотами.

в) Расстояние между директрисами эллипса в 4 раза больше расстояния между фокусами. Найти его эксцентриситет.

г) Расстояние между фокусами гиперболы в 3 раза больше расстояния между директрисами. Найти уравнения ее асимптот.

2. Найти вид и расположение квадрики. Сделать чертеж.

а) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$; б) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$;
в) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$; г) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$.

3. Доказать, что квадрика является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат:

а) $2x^2-xy-y^2+3y-2=0$; б) $2x^2+3xy-2y^2-5x+5y-3=0$;
в) $2x^2-xy-3y^2-2x+3y=0$; г) $2x^2-2y^2+7x+5y+3=0$.

4. Найти касательные к квадрике σ, проведенные через точку A, сделать чертеж:

а) σ: $x^2+4y^2-4=0$, $A(2,2)$; б) σ: $y^2=4x$, $A(-1,1)$;
в) σ: $x^2+4y^2-4=0$, $A(-2,-3)$; г) σ: $y^2=4x$, $A(1,3)$.

Глава 10

Квадрики в пространстве

Глава посвящена изучению поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка (квадрик в пространстве). Как и в предыдущей главе, вначале рассматриваются некоторые конкретные виды квадрик, а затем приводится их полная классификация. После этого рассматриваются прямолинейные образующие квадрик в пространстве.

На протяжении всей этой главы система координат предполагается прямоугольной декартовой.

§49. Цилиндрические и конические поверхности

1. Цилиндрические поверхности

Определение. Пусть в пространстве заданы линия ℓ и ненулевой вектор $\vec{a}$. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через всевозможные точки линии ℓ и коллинеарными вектору $\vec{a}$, называется *цилиндрической*. Линия ℓ называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а упомянутые выше прямые — ее *образующими*.

Пример цилиндрической поверхности изображен на рис. 1.

Покажем, как можно написать уравнение цилиндрической поверхности, если даны уравнения направляющей ℓ и координаты вектора $\vec{a}$. Пусть линия ℓ задана координатными уравнениями, т.е. в виде пересечения двух поверхностей (см. начало §9):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x - y + z = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Первая поверхность является сферой радиуса 2 с центром в начале координат, вторая — плоскостью. Обозначим сферу через S, а плоскость — через μ. Используя формулу (12) из §8, легко сосчитать, что расстояние от центра сферы S до плоскости μ равно $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. В частности, оно меньше радиуса сферы. Следовательно, линия ℓ является окружностью. Пусть $\vec{a} = (1, 2, 2)$. Цилиндрическую поверхность с направляющей ℓ и образующими, коллинеарными $\vec{a}$, обозначим через σ.

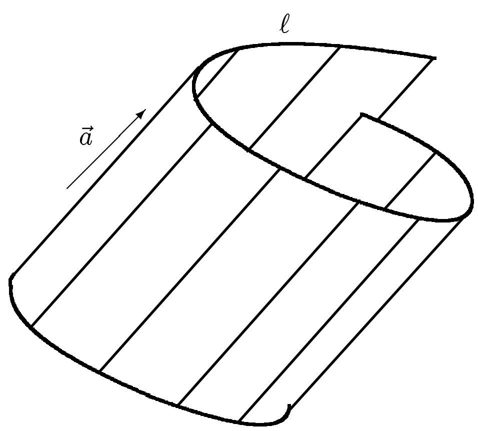


Рис. 1

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка, принадлежащая σ. По определению цилиндрической поверхности через каждую ее точку проходит образующая. Обозначим образующую поверхности σ, проходящую через точку M, через m. Итак, m — прямая, проходящая через точку M, коллинеарная вектору $\vec{a}$ и пересекающая кривую ℓ (направляющую поверхности σ) в некоторой точке. Параметрические уравнения прямой m имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + 2t, \\ z = z_0 + 2t. \end{cases}$$

Найдем точку M' пересечения m и плоскости μ:

$$(x_0 + t) - (y_0 + 2t) + (z_0 + 2t) - 1 = 0, \text{ откуда } t = -x_0 + y_0 - z_0 + 1.$$

Следовательно, точка M' имеет координаты:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \ \ t = & y_0 - \ \ z_0 + 1, \\ y &= y_0 + 2t = -2x_0 + 3y_0 - 2z_0 + 2, \\ z &= z_0 + 2t = -2x_0 + 2y_0 - \ \ z_0 + 2. \end{aligned}$$

Но эта же точка M' принадлежит и сфере S и потому удовлетворяет ее уравнению. Имеем

$$(y_0 - z_0 + 1)^2 + (-2x_0 + 3y_0 - 2z_0 + 2)^2 + (-2x_0 + 2y_0 - z_0 + 2)^2 = 4.$$

Итак, координаты любой точки цилиндрической поверхности σ удовлетворяют уравнению

$$(y - z + 1)^2 + (-2x + 3y - 2z + 2)^2 + (-2x + 2y - z + 2)^2 = 4. \qquad (2)$$

Нетрудно понять, что если точка M не принадлежит σ, то точка пересечения m и μ не лежит на сфере S и потому ее координаты не удовлетворяют уравнению (2). Это означает, что (2) — уравнение поверхности σ. Если раскрыть скобки и привести подобные, то уравнение примет вид

$$8x^2 + 14y^2 + 6z^2 - 20xy + 12xz - 18yz - 16x + 22y - 14z + 5 = 0.$$

Пусть σ — цилиндрическая поверхность с направляющей ℓ, образующие которой параллельны вектору $\vec{a}$, а μ — плоскость, неколлинеарная $\vec{a}$ и пересекающая σ по некоторой кривой s. Очевидно, что σ совпадает с цилиндрической поверхностью, направляющей которой является s, а образующие параллельны $\vec{a}$ (рис. 2). Линия s, очевидно, является плоской. Таким образом,

> *любая цилиндрическая поверхность имеет направляющую, являющуюся плоской линией.*

Пусть теперь σ — цилиндрическая поверхность, а ℓ — плоская линия, являющаяся направляющей σ. Подобрав соответствующим образом систему координат, мы можем добиться того, чтобы эта линия лежала в плоскости Oxy. Тогда ℓ задается координатными уравнениями вида

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ \qquad z = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Ясно, что в плоскостной системе координат уравнение линии ℓ имеет вид $F(x,y)=0$. Рассмотрим случай, когда образующие поверхности σ коллинеарны вектору $\vec{a}=(0,0,1)$ (т.е. оси Oz). Пусть $M\in\sigma$. Обозначим координаты точки M через (x_0,y_0,z_0). Существует точка $M'\in\ell$ такая, что прямая MM' коллинеарна $\vec{a}$. Ясно, что точка M' имеет координаты $(x_0,y_0,0)$. Поскольку $M'\in\ell$, получаем, что $F(x_0,y_0)=0$. Итак, координаты любой точки, лежащей на поверхности σ, удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. Пусть теперь точка M с координатами (x_0,y_0,z_0) не лежит на σ. Проведем через M прямую, коллинеарную $\vec{a}$, и обозначим через M' точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Ясно, что точка M' имеет координаты $(x_0,y_0,0)$. Поскольку $M\notin\sigma$, то $M'\notin\ell$. Следовательно, $F(x_0,y_0)\neq 0$. Таким образом, точка пространства принадлежит σ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x,y)=0$. Мы доказали следующее утверждение.

Лемма. *Если направляющая цилиндрической поверхности задана координатными уравнениями* (3), *а образующие этой поверхности коллинеарны вектору* $\vec{a}=(0,0,1)$, *то эта поверхность задается в пространстве уравнением* $F(x,y)=0$. ∎

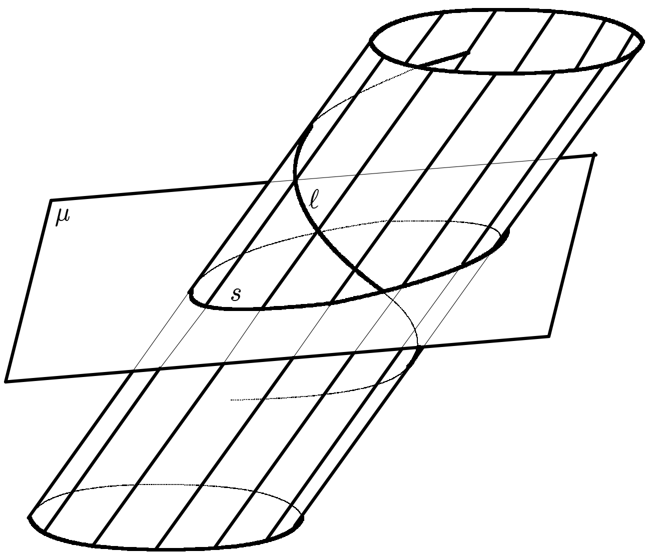


Рис. 2

Приведем несколько примеров цилиндрических поверхностей.

Определение. *Эллиптическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a, b > 0$ и $a \geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического цилиндра.

В силу леммы эллиптический цилиндр является цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит эллипс, задаваемый уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ \qquad\qquad z = 0, \end{cases}$$

а образующие коллинеарны вектору $\vec{a}=(0,0,1)$, т.е. оси Oz (рис. 3).

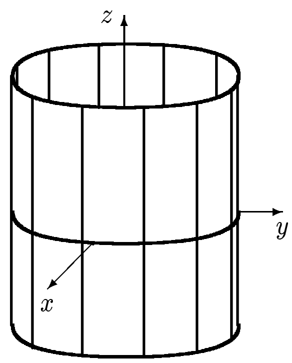


Рис. 3

Определение. *Гиперболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического цилиндра.

В силу леммы гиперболический цилиндр является цилиндрической поверхностью. В качестве ее направляющей можно взять гиперболу, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

а ее образующие коллинеарны вектору $\vec{a} = (0, 0, 1)$, т.е. оси Oz (рис. 4).

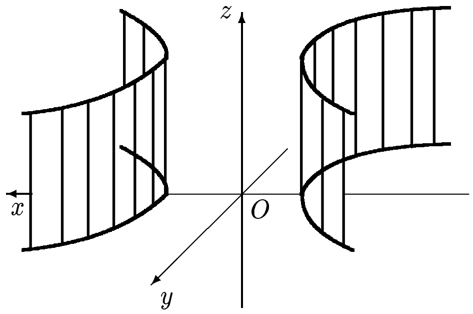


Рис. 4

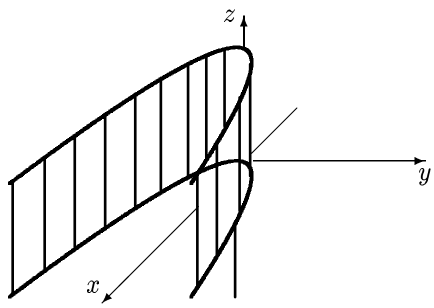


Рис. 5

Определение. *Параболическим цилиндром* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* параболического цилиндра.

В силу леммы параболический цилиндр является цилиндрической поверхностью. В качестве ее направляющей можно взять параболу, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0, \end{cases}$$

а ее образующие коллинеарны вектору $\vec{a} = (0, 0, 1)$, т.е. оси Oz (рис. 5).

2. Конические поверхности

Определение. Пусть в пространстве заданы линия ℓ и точка P. Поверхность, образованная прямыми, проходящими через точку P и всевозможные точки линии ℓ, называется *конической*. Линия ℓ называется *направляющей* конической поверхности, упомянутые выше прямые — ее *образующими*, а точка P — ее *вершиной*.

Пример конической поверхности изображен на рис. 6.

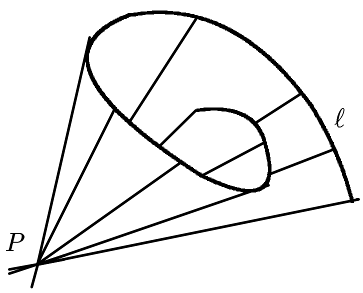


Рис. 6

Как и в случае цилиндрической поверхности, покажем, как написать уравнение конической поверхности. Пусть направляющей служит окружность (1), а вершина P совпадает с началом координат. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка на соответствующей конической поверхности. Рассмотрим прямую m, проходящую через точки P и M. Напишем параметрические уравнения этой прямой, взяв точку

$P(0,0,0)$ в качестве начальной и вектор $\overrightarrow{PM} = (x_0, y_0, z_0)$ в качестве направляющего. Получим уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем точку пересечения m и плоскости μ. Для этого подставим в уравнение этой плоскости $x_0 t$ вместо x, $y_0 t$ вместо y и $z_0 t$ вместо z. Получим $x_0 t - y_0 t + z_0 t - 1 = 0$, откуда $t = \dfrac{1}{x_0 - y_0 + z_0}$. Это означает, что точка M' пересечения прямой m и плоскости μ имеет координаты

$$\left(\frac{x_0}{x_0 - y_0 + z_0}, \frac{y_0}{x_0 - y_0 + z_0}, \frac{z_0}{x_0 - y_0 + z_0}\right).$$

Поскольку точка M' лежит и на сфере S, ее координаты должны удовлетворять уравнению сферы. Имеем

$$\frac{x_0^2}{(x_0 - y_0 + z_0)^2} + \frac{y_0^2}{(x_0 - y_0 + z_0)^2} + \frac{z_0^2}{(x_0 - y_0 + z_0)^2} = 1.$$

В силу сказанного выше этому равенству удовлетворяют координаты всех точек нашей поверхности, кроме вершины P. Очевидно, что уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y + z)^2 \tag{5}$$

удовлетворяют координаты уже всех точек поверхности, включая P. Легко понять, что и обратно, если (x_0, y_0, z_0) — решение уравнения (5), то точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на нашей поверхности. Следовательно, (5) — искомое уравнение этой поверхности. Если в правой части этого уравнения раскрыть скобки и привести подобные, получим более простое уравнение

$$xy - xz + yz = 0,$$

равносильное (5).

Приведем важный для дальнейшего пример конической поверхности.

Определение. *Конусом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6}$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* конуса.

Убедимся в том, что конус является конической поверхностью. Пусть ℓ — линия, задаваемая координатными уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c, \end{cases} \tag{7}$$

где $c \neq 0$. Пусть σ — коническая поверхность с вершиной в начале координат и направляющей (7). Как и ранее, вершину будем обозначать буквой P. Ясно, что координаты вершины поверхности σ удовлетворяют уравнению (6). Если $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой конической поверхности, отличная от вершины, то образующая PM имеет уравнения (4). Легко понять, что точка пересечения образующей PM и плоскости $z = c$ имеет координаты $\left(\dfrac{cx_0}{z_0}, \dfrac{cy_0}{z_0}, c\right)$. Подставив их в уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, получим равенство $\dfrac{c^2x_0^2}{z_0^2a^2} + \dfrac{c^2y_0^2}{z_0^2b^2} = 1$, откуда

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}. \tag{8}$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению (6). Мы показали, что если точка принадлежит σ, то ее координаты удовлетворяют (6).

Проверим обратное утверждение. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (6). Тогда выполнено равенство (8). Если $z_0 = 0$, то $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, откуда $x_0 = y_0 = 0$. Но тогда M — начало координат, и потому $M \in \sigma$. Пусть теперь $z_0 \neq 0$. Рассмотрим точку $M'\left(\dfrac{x_0c}{z_0}, \dfrac{y_0c}{z_0}, c\right)$. Точка M' принадлежит направляющей (7). В самом деле, ее третья координата равна c, а из равенства (8) вытекает, что

$$\frac{x_0^2c^2}{z_0^2a^2} + \frac{y_0^2c^2}{z_0^2b^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{c^2}{z_0^2} = \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}} = 1.$$

Поэтому осталось проверить, что точка M принадлежит прямой OM'.

В самом деле, эта прямая имеет уравнения

$$\begin{cases} x = & \dfrac{x_0 c}{z_0} \cdot t, \\ y = & \dfrac{y_0 c}{z_0} \cdot t, \\ z = & ct. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения $\dfrac{z_0}{c}$ вместо t, имеем $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = z_0$. Следовательно, $M \in OM'$. Таким образом, если координаты точки M удовлетворяют уравнению (6), то $M \in \sigma$. Объединяя это с доказанным в предыдущем абзаце, получаем, что конус совпадает с конической поверхностью σ.

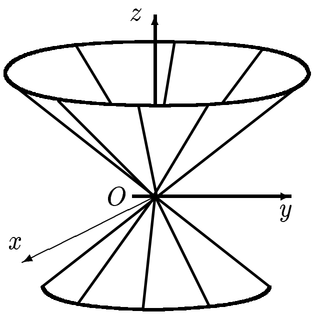


Рис. 7

Изображение конуса см. на рис. 7.

§50. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды

В параграфе рассматриваются пять конкретных поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка.

1. Эллипсоид

Определение. *Эллипсоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипсоида.

Отметим, что при $a = b = c$ приведенное только что уравнение равносильно уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, которое, как известно из школьного курса, задает сферу радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, сфера является частным случаем эллипсоида (подобно тому как окружность есть частный случай эллипса).

Исследуем форму эллипсоида, применив так называемый *метод сечений*. Суть этого метода состоит в следующем. Мы рассекаем поверхность плоскостями, параллельными координатным плоскостям. В сечениях получаются линии, вид которых мы распознаем. Проведя достаточно много таких сечений, мы в итоге получим интегрированный образ поверхности.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Уравнение всякой такой плоскости имеет вид $z = h$, где h — некоторое действительное число. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ \qquad\qquad\qquad z = h, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ \qquad z = h \qquad . \end{cases}$$

Последняя система при $|h| > c$ решений не имеет (т.е. определяет пустое множество), при $|h| = c$ имеет единственное решение (определяет точку), а при $|h| < c$ геометрическим образом множества решений этой системы является эллипс, задаваемый уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a\sqrt{1 - h^2/c^2})^2} + \dfrac{y^2}{(b\sqrt{1 - h^2/c^2})^2} = 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z = h. \end{cases}$$

Если $h = 0$, то полуоси эллипса имеют наибольшее значение, с ростом $|h|$ они уменьшаются, и при $|h| = c$ эллипс “сжимается” в точку.

Чтобы иметь более полное представление о форме эллипса, надо рассмотреть сечения плоскостями, параллельными плоскости Oxz (т.е. задаваемыми уравнениями вида $y = h$) и параллельными плоскости Oyz (т.е. задаваемыми уравнениями вида $x = h$). Для простоты рассмотрим только сечения плоскостями $y = 0$ и $x = 0$. В обоих случаях в сечении получаются эллипсы:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

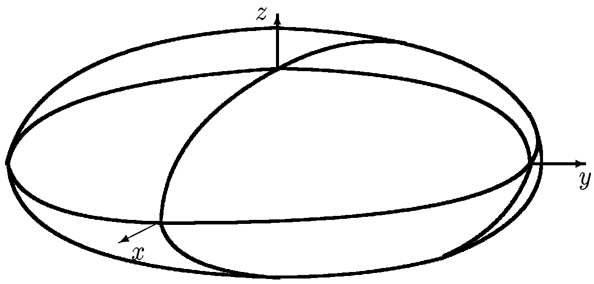


Рис. 8

Окончательно представление о форме эллипсоида дает рис. 8.

2. Однополостный и двуполостный гиперболоиды

Определение. *Однополостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* однополостного гиперболоида.

В сечении горизонтальной координатной плоскостью $z = h$ получается эллипс с полуосями $a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$. Значения полуосей минимальны при $h = 0$ и возрастают с ростом $|h|$. В сечении координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ получаются соответственно гиперболы $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. В целом однополостный гиперболоид выглядит так, как показано на рис. 9. Отметим еще, что плоскости $x = \pm a$ и $y = \pm b$ пересекают поверхность по паре прямых.

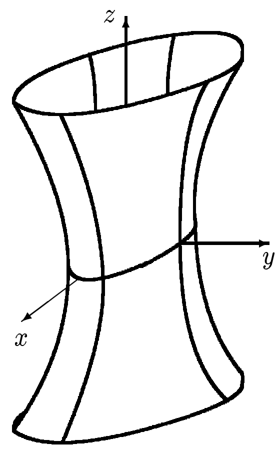


Рис. 9

Определение. *Двуполостным гиперболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a, b, c > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* двуполостного гиперболоида.

Рассмотрим сечения двуполостного гиперболоида горизонтальной координатной плоскостью $z = h$. Получится кривая

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}.$$

Если $|h| < c$, то эта система решений не имеет; если $|h| = c$, то система имеет единственное решение; если же $|h| > c$, то сечение есть эллипс, полуоси которого растут с ростом $|h|$. Их рост определяется гиперболами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases}$$

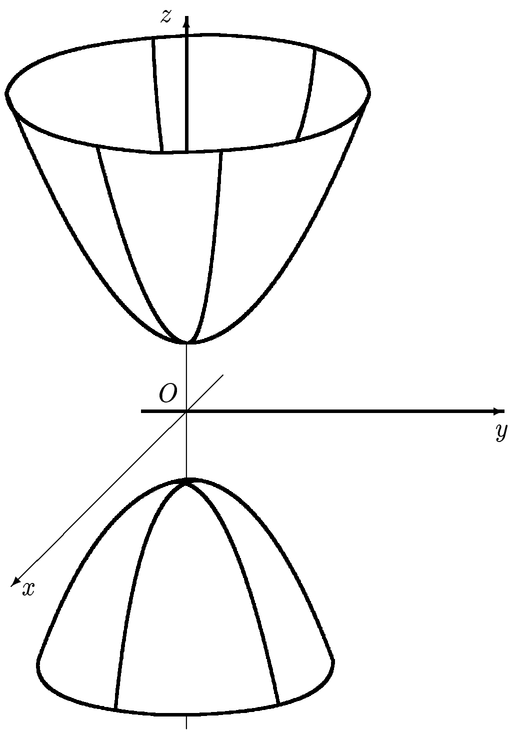


Рис. 10

В результате получается поверхность, изображенная на рис. 10. Отметим еще, что эта поверхность состоит из двух частей, что отражается в названии “двуполостный”.

3. Эллиптический и гиперболический параболоиды

Определение. *Эллиптическим параболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

где $a,b>0$ и $a\geqslant b$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

Если точка M принадлежит эллиптическому параболоиду, то, очевидно, $z \geqslant 0$. Это означает, что поверхность расположена над координатной плоскостью Oxy, имея с ней только одну общую точку — начало координат. В сечении плоскостью $z = h$ при $h > 0$ появляется эллипс, полуоси которого растут с ростом h. Сечение плоскостями $y = h$ и $x = h$ дает параболы (рис. 11).

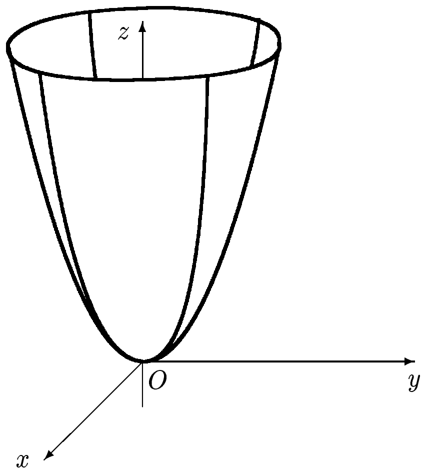


Рис. 11

Определение. *Гиперболическим параболоидом* называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где $a, b > 0$. Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Эта поверхность наиболее сложная из рассмотренных в данном параграфе. Поэтому остановимся на ней несколько подробнее.

Рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостями, параллельными Oxy. Получим кривую

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h = 0$, в сечении получается пара пересекающихся прямых, которые в плоскости Oxy задаются уравнениями $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$. При $h > 0$ наше сечение является гиперболой, у которой ось Ox является действительной, а ось Oy — мнимой; при $h < 0$ возникает гипербола, у которой ось Ox является мнимой, а ось Oy — действительной (точнее, в обоих случаях следует говорить не о самих осях Ox и Oy, а о их ортогональных проекциях на плоскость $z = h$).

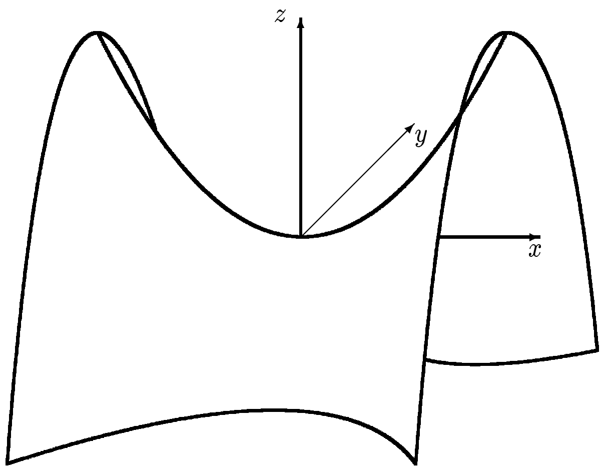


Рис. 12

Проведем теперь сечения плоскостями, параллельными Oxz. Получим кривую

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 2z + \dfrac{h^2}{b^2}, \\ y = h . \end{cases}$$

Если $h = 0$, то в сечении получается парабола ветвями вверх, т.е. в направлении оси Oz. С ростом $|h|$ парабола не изменяется “в размерах”, но ее вершина поднимается вдоль оси Oz.

Аналогичная картина получается при сечении плоскостями вида $x = h$. В сечении тоже получаются параболы, только их ветви направлены вниз. В целом получается поверхность, изображенная на рис. 12.

§51. Понятие квадрики в пространстве

1. Определение квадрики в пространстве

Определение. *Уравнением второго порядка с тремя неизвестными* называется уравнение вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2 \;&+\; 2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\\ &+\; 2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0, \end{aligned} \tag{1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}$ и a_{23} отличен от нуля. Сумма

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

называется *квадратичной формой старших членов* уравнения (1), сумма $2a_1x+2a_2y+2a_3z$ — *линейной формой младших членов* этого уравнения, а a_0 — его *свободным членом.*

Определение. *Квадрикой в пространстве* (или *поверхностью второго порядка*) называется множество всех точек пространства, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению второго порядка с тремя неизвестными.

Примерами квадрик в пространстве являются поверхности, рассмотренные в §49 и 50, — эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры, конус, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Как мы увидим в §52, кроме этих девяти поверхностей существуют лишь несколько вырожденных квадрик в пространстве.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+2(a_1,a_2,a_3)\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}+a_0=0, \tag{2}$$

где $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$ и $a_{32}=a_{23}$. Такую запись уравнения квадрики мы будем называть *полной матричной формой записи.* Введем следующие обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad \vec{x}=(x,y,z),\quad \vec{a}=(a_1,a_2,a_3).$$

Матрица A называется *матрицей квадратичной формы старших членов*. Используя введенные обозначения, равенство (2) можно записать в виде

$$\vec{x}A\vec{x}^\top + 2\vec{a}\vec{x}^\top + a_0 = 0. \tag{3}$$

Такую запись мы будем называть *краткой матричной формой записи* уравнения квадрики.

Выясним, как меняется матрица квадратичной формы старших членов при замене системы координат. Для этого нам понадобится матричная запись формул перехода от старой системы координат к новой. Пусть $\vec{x} = (x, y, z)$ и $\vec{x}' = (x', y', z')$ — координаты данной точки в старой и новой системах координат соответственно, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ — координаты нового начала координат в старой системе координат, а T — матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда формулы замены системы координат, т.е. формулы (6) из §5, могут быть записаны в виде

$$\vec{x}^\top = T(\vec{x}')^\top + \vec{p}^\top. \tag{4}$$

Если в старой системе координат квадрика задается уравнением (3), то ее уравнение в новой системе координат получится, если в (3) заменить $\vec{x}$ по формуле (4). Учитывая, что

$$\vec{x} = (\vec{x}^\top)^\top = (T(\vec{x}')^\top + \vec{p}^\top)^\top = (T(\vec{x}')^\top)^\top + (\vec{p}^\top)^\top = ((\vec{x}')^\top)^\top T^\top + \vec{p} = \vec{x}'T^\top + \vec{p},$$

имеем

$$(\vec{x}'T^\top + \vec{p})A(T(\vec{x}')^\top + \vec{p}^\top) + 2\vec{a}(T(\vec{x}')^\top + \vec{p}^\top) + a_0 = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (5) вытекает, что в новой системе координат квадратичная форма старших членов имеет матрицу $T^\top AT$.

По определению квадрики в пространстве она задается уравнением второго порядка *в некоторой* системе координат. Оказывается, справедливо следующее более сильное утверждение.

Теорема 1. *Произвольная квадрика в пространстве в любой системе координат может быть задана уравнением второго порядка с тремя неизвестными.*

Доказательство. Предположим, что множество точек в пространстве в исходной системе координат задается уравнением (3). В новой системе координат это множество точек будет геометрическим образом уравнения (5), матрица квадратичной формы которого равна $T^\top AT$. Из формул замены системы координат с очевидностью вытекает, что они не могут повысить степень уравнения, и потому в новой системе координат наше множество точек задается уравнением первого или второго порядка. Предположим, что оно задается уравнением первого порядка. Это означает, что матрица квадратичной формы в новой системе координат — нулевая. Итак, $T^\top AT = O$. Учитывая лемму 2 из §28, свойство 9 из §13 и теорему из §31, получаем, что матрицы T и $T^\top$ обратимы. Следовательно,

$$A = (T^\top)^{-1}(T^\top AT)T^{-1} = (T^\top)^{-1} \cdot O \cdot T^{-1} = O.$$

Но равенство $A = O$ противоречит определению уравнения второго порядка. Следовательно, $T^\top AT \neq O$. Теорема 1 доказана. ■

2. Упрощение уравнения квадрики

Уравнение (1) содержит десять коэффициентов. Поэтому анализировать это уравнение и определять вид заданной им поверхности крайне затруднительно. Оказывается, однако, что можно подобрать систему координат, в которой уравнение той же поверхности будет выглядеть намного проще.

Теорема 2. *Для всякой квадрики в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение этой квадрики не содержит слагаемых с произведением различных неизвестных.*

Доказательство. Пусть $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — исходная прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение квадрики имеет вид (3). В частности, A — матрица квадратичной формы старших членов этого уравнения. Пусть $A = (a_{ij})$. Ясно, что уравнение квадрики не содержит слагаемых с произведением различных неизвестных тогда и только тогда, когда матрица A диагональна. Надо найти новую прямоугольную декартову систему координат, в которой матрица $T^\top AT$ была бы диагональной (здесь, как обычно, T — матрица перехода от старого базиса к новому).

Рассмотрим линейный оператор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, задаваемый в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ матрицей $A = (a_{ij})$. Поскольку эта матрица симметрична, оператор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ также будет симметрическим (см. теорему 1 в §41). Следовательно, существует ортонормированный базис $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, составленный из собственных векторов оператора $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ (см. замечание на с. 332).

Убедимся, что в качестве искомой новой системы координат можно взять систему $(O;\ \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$. Пусть векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ имеют в старом базисе координаты (c_{11}, c_{12}, c_{13}), (c_{21}, c_{22}, c_{23}) и (c_{31}, c_{32}, c_{33}) соответственно. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ — собственные векторы оператора $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, существуют числа t_1, t_2 и t_3 такие, что $\mathcal{A}(\vec{c}_1) = t_1\vec{c}_1$, $\mathcal{A}(\vec{c}_2) = t_2\vec{c}_2$ и $\mathcal{A}(\vec{c}_3) = t_3\vec{c}_3$.

Оператор $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ задается равенствами

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

Если в эти равенства вместо x_1, x_2, x_3 подставить, например, c_{11}, c_{12}, c_{13}, то получим $y_1 = t_1c_{11}$, $y_2 = t_1c_{12}$, $y_3 = t_1c_{13}$, поскольку $\vec{c}_1$ — собственный вектор нашего оператора, относящийся к собственному числу t_1. Аналогичные результаты получатся при постановке в указанные равенства координат векторов $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$. С учетом этого имеем

$$AT = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1c_{11} & t_2c_{21} & t_3c_{31} \\ t_1c_{12} & t_2c_{22} & t_3c_{32} \\ t_1c_{13} & t_2c_{23} & t_3c_{33} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ попарно ортогональны и имеют единичную длину, имеем

$$T^\top AT = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1c_{11} & t_2c_{21} & t_3c_{31} \\ t_1c_{12} & t_2c_{22} & t_3c_{32} \\ t_1c_{13} & t_2c_{23} & t_3c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 доказана. ∎

Теорема 3. *Для всякой квадрики в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение этой квадрики имеет один из следующих трех видов:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \text{ где } A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0; \qquad (6)$$

$$Ex^2 + Fy^2 + 2Gz + H = 0, \text{ где } E \neq 0,\ F \neq 0; \qquad (7)$$

$$Ky^2 + 2Lx + M = 0, \text{ где } K \neq 0. \qquad (8)$$

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 можно считать, что уравнение квадрики имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \qquad (9)$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22} и a_{33} отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Выделим полный квадрат по x. Получим равенство

$$a_{11} \cdot \left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_2y + 2a_3z + a_0' = 0,$$

где $a_0' = a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_{11}}$. Сделав замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{a_1}{a_{11}}, \\ y' = y \qquad\quad , \\ z' = z \end{cases}$$

(геометрически ей соответствует сдвиг вдоль оси Ox), мы получим уравнение

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_2y' + 2a_3z' + a_0' = 0,$$

не содержащее линейного слагаемого по x. Аналогично, если $a_{22} \neq 0$, то сдвигом вдоль оси Oy можно избавиться от линейного слагаемого по y, а если $a_{33} \neq 0$, то сдвигом вдоль оси Oz можно избавиться от линейного слагаемого по z. Таким образом, можно считать, что если в уравнении (9) отличен от нуля коэффициент при квадрате некоторой неизвестной, то в нем нет линейного слагаемого по той же неизвестной. Если в (9) все три коэффициента при квадратах неизвестных отличны от 0, то мы пришли к уравнению вида (6). Если в (9) отличны от 0 ровно два коэффициента при квадратах неизвестных, то, сделав при необходимости соответствующую замену неизвестных, мы получим уравнение вида (7). Предположим, наконец, что в (9) отличен от 0 ровно один коэффициент при квадрате неизвестной. Можно считать, что этим коэффициентом является a_{22} (в противном случае можно сделать соответствующую замену неизвестных). Таким образом, уравнение квадрики имеет вид

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_3z + a_0 = 0, \tag{10}$$

где $a_{22} \neq 0$. Если $a_3 = 0$, мы пришли к уравнению вида (8). Если $a_1 = 0$, то мы придем к тому же результату, “переименовав” x в z, а z в x. Пусть, наконец, $a_1 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$. Сделаем следующую замену неизвестных:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha \quad - z'\sin\alpha, \\ y = \qquad\quad y' \qquad\quad , \\ z = x'\sin\alpha \quad + z'\cos\alpha. \end{cases} \tag{11}$$

Как показывают формулы (9) из §5, эта замена соответствует повороту на угол α вокруг оси Oy. Подставив правые части равенств (11) вместо x, y и z в (10) и проведя необходимые преобразования, получим уравнение

$$a_{22}(y')^2 + 2(a_1 \cos\alpha + a_3 \sin\alpha)y' + 2(-a_1 \sin\alpha + a_3 \cos\alpha)z' + a_0 = 0,$$

где по-прежнему $a_{22} \neq 0$. Выбрав в качестве α решение уравнения $-a_1 \sin\alpha + a_3 \cos\alpha = 0$ (или, что эквивалентно, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a_1}{a_3}$), мы получим уравнение вида (8). Теорема 3 доказана. ■

§52. Классификация квадрик в пространстве

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Всякая квадрика в пространстве является или цилиндром (эллиптическим, гиперболическим или параболическим), или конусом, или эллипсоидом, или гиперболоидом (однополостным или двуполостным), или параболоидом (эллиптическим или гиперболическим), или парой плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпавших), или прямой, или точкой, или пустым множеством.*

Доказательство. В силу теоремы 3 из §51 можно считать, что квадрика задается уравнением одного из видов:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \text{ где } A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0; \tag{1}$$

$$Ex^2 + Fy^2 + 2Gz + H = 0, \text{ где } E \neq 0,\ F \neq 0; \tag{2}$$

$$Ky^2 + 2Lx + M = 0, \text{ где } K \neq 0. \tag{3}$$

Поэтому дальнейшие рассмотрения естественно распадаются на три случая.

Случай 1: *квадрика задается уравнением вида* (1). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 1.1: $D \neq 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-D/A} + \frac{y^2}{-D/B} + \frac{z^2}{-D/C} = 1. \tag{4}$$

Если числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ положительны, то, введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение эллипсоида.

Предположим теперь, что среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть два положительных и одно отрицательное. Без ограничения общности можно считать, что $-\frac{D}{A} > 0$, $-\frac{D}{B} > 0$ и $-\frac{D}{C} < 0$ (в противном случае следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{-\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{\frac{D}{C}}$, мы получим каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

Пусть теперь среди чисел $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ есть одно положительное и два отрицательных. Можно считать, что $-\frac{D}{A} < 0$, $-\frac{D}{B} < 0$ и $-\frac{D}{C} > 0$ (в противном случае, как и ранее, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{D}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{D}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{D}{C}}$, мы получим уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Умножив его на -1, получим каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

Наконец, если числа $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ и $-\frac{D}{C}$ отрицательны, то уравнение (4) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 1.2: $D = 0$. Ясно, что в этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/A} + \frac{y^2}{1/B} + \frac{z^2}{1/C} = 0. \tag{5}$$

Если числа $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ имеют один и тот же знак, то уравнение (5) имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и потому его геометрическим образом является точка (а именно начало координат).

Пусть теперь среди чисел $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ и $\frac{1}{C}$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Умножив, если потребуется, уравнение (5) на -1, можно добиться того, чтобы среди этих чисел было два положительных и одно отрицательное. Более того, можно считать, что $\frac{1}{A} > 0$, $\frac{1}{B} > 0$ и $\frac{1}{C} < 0$ (в противном случае, как обычно, следует соответствующим образом переименовать неизвестные). Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{A}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{B}}$, $c = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, мы получим каноническое уравнение конуса.

Случай 2: *квадрика задается уравнением вида* (2). Здесь возможны три подслучая.

Подслучай 2.1: $G \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (2) в виде

$$Ex^2 + Fy^2 = -2Gz - H = -2G\left(z + \frac{H}{2G}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = z + \dfrac{H}{2G}, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Oz. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $E(x')^2 + F(y')^2 = -2Gz'$ или

$$\frac{(x')^2}{-G/E} + \frac{(y')^2}{-G/F} = 2z'. \qquad (6)$$

Предположим сначала, что числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют одинаковый знак. Если оба этих числа отрицательны, то, умножив уравнение (6) на -1, а затем сделав замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = -z'$, мы придем к уравнению того же вида, в котором $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} > 0$. Поэтому можно сразу считать, что выполнены два последних неравенства. Можно считать также, что $-\frac{G}{E} \geqslant -\frac{G}{F}$ (в противном случае можно переименовать x' в y', а y' в x'). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического параболоида.

Пусть теперь числа $-\frac{G}{E}$ и $-\frac{G}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{G}{E} > 0$ и $-\frac{G}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x'' = y'$, $y'' = x'$, $z'' = z'$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{G}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{G}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Подслучай 2.2: $G = 0$, $H \neq 0$. В этом случае уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{-H/E} + \frac{y^2}{-H/F} = 1. \tag{7}$$

Предположим, что числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ положительны. Можно считать, что $-\frac{H}{E} \geqslant -\frac{H}{F}$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение эллиптического цилиндра.

Пусть теперь числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ имеют разные знаки. Можно считать, что $-\frac{H}{E} > 0$ и $-\frac{H}{F} < 0$ (в противном случае надо сделать замену неизвестных $x' = y$, $y' = x$, $z' = z$). Введя обозначения $a = \sqrt{-\frac{H}{E}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{F}}$, мы получим каноническое уравнение гиперболического цилиндра.

Наконец, если числа $-\frac{H}{E}$ и $-\frac{H}{F}$ отрицательны, то уравнение (7) не имеет решений, и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Подслучай 2.3: $G = H = 0$. В этом случае уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{1/E} + \frac{y^2}{1/F} = 0. \tag{8}$$

Предположим сначала, что числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют одинаковые знаки. Ясно, что в этом случае решениями уравнения (8) являются тройки чисел вида $(0, 0, z)$ (где z — любое число) и только они. Следовательно, геометрическим образом этого уравнения является прямая (а именно ось Oz).

Пусть теперь числа $\frac{1}{E}$ и $\frac{1}{F}$ имеют разные знаки. Умножив, если потребуется, наше уравнение на -1, можно прийти к ситуации, когда $\frac{1}{E} > 0$ и $\frac{1}{F} < 0$. Введя обозначения $a = \sqrt{\frac{1}{E}}$, $b = \sqrt{-\frac{1}{F}}$, мы получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Геометрическим образом последнего уравнения является совокупность плоскостей $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Очевидно, что нормальные векторы этих плоскостей, т.е. векторы $\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0\right)$ и $\vec{n}_2 = \left(\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, 0\right)$, не коллинеарны. Следовательно, эти плоскости пересекаются (см. теорему 3 в §8). Итак, в рассматриваемом случае квадрика есть пара пересекающихся плоскостей.

Случай 3: *квадрика задается уравнением вида* (3). Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 3.1: $L \neq 0$. В этом случае уравнение квадрики можно упростить, избавившись от свободного члена. Для этого перепишем уравнение (3) в виде

$$y^2 = -\frac{2L}{K}x - \frac{M}{K} = -\frac{2L}{K}\left(x + \frac{M}{2L}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{M}{2L}, \\ y' = y, \\ z' = z, \end{cases}$$

которой соответствует сдвиг вдоль оси Ox. Уравнение квадрики в новой системе координат будет иметь вид $(y')^2 = -\frac{2L}{K}x'$. Полагая $p = -\frac{L}{K}$, получим уравнение $(y')^2 = 2px'$. Если $p > 0$, оно является каноническим уравнением параболического цилиндра. Если же $p < 0$, то мы придем к тому же результату после замены неизвестных $x'' = -x'$, $y'' = y'$, $z'' = z'$.

Подслучай 3.2: $L = 0$. Уравнение (3) в этом случае можно переписать в виде

$$y^2 = -\frac{M}{K}. \tag{9}$$

Если $-\dfrac{M}{K} > 0$, то, полагая $a = \sqrt{-\dfrac{M}{K}}$, мы получим уравнение $y^2 = a^2$, геометрическим образом которого является пара параллельных плоскостей $y = a$ и $y = -a$.

Если $-\dfrac{M}{K} = 0$, то уравнение (9), очевидно, эквивалентно уравнению $y = 0$, которое определяет плоскость Oxz. В этом случае принято говорить, что квадрика представляет собой пару совпавших плоскостей.

Наконец, если $-\dfrac{M}{K} < 0$, то уравнение (9) не имеет решений и потому его геометрическим образом является пустое множество.

Теорема доказана. ■

§53. Прямолинейные образующие

Определение. Прямая, лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности.

Прямолинейные образующие по определению имеют цилиндрические и конические поверхности. В §50 отмечалось, что прямолинейные образующие есть у однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида. Легко понять, что другие “невырожденные” квадрики в пространстве (т.е. эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид) прямолинейных образующих не имеют. В этом параграфе мы укажем некоторые свойства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, а также способы их нахождения.

Один из способов связан с преобразованием канонических уравнений квадрик.

Рассмотрим уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right). \qquad (1)$$

Составим две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=s\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=s\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ s\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad (2)$$

где t и s — действительные числа, не равные нулю. Если почленно перемножить уравнения в каждой из систем (2), то после сокращения на ts и для первой, и для второй системы получим уравнение (1). Это означает, что геометрические образы систем (2) лежат на однополостном гиперболоиде.

Рассмотрим более внимательно первую систему. Уравнения этой системы являются уравнениями первого порядка, и потому определяют плоскости. Нормальные векторы этих плоскостей равны соответственно $\left(\frac{t}{a},\frac{s}{b},-\frac{t}{c}\right)$ и $\left(\frac{s}{a},-\frac{t}{b},\frac{s}{c}\right)$. Как нетрудно видеть, эти векторы не коллинеарны, а значит, плоскости пересекаются (см. теорему 3 в §8). Следовательно, геометрический образ системы — прямая, целиком лежащая на гиперболоиде, т.е. прямолинейная образующая. Тем же способом можно проверить, что и вторая из систем (2) задает прямолинейную образующую.

Меняя параметры t и s, можно получать различные прямолинейные образующие. Таким образом, каждая из систем (2) задает бесконечное семейство прямолинейных образующих. Отметим без доказательства несколько свойств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Теорема 1. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно две прямолинейных образующих (по одной из каждого семейства). Любые две прямолинейные образующие из одного семейства либо скрещиваются, либо параллельны. Любые две прямолинейные образующие из разных семейств пересекаются.* ■

Рассмотрим пример. Пусть гиперболоид задан уравнением

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

Найдем его прямолинейные образующие, проходящие через точку M_0 с координатами (5,5,7). Системы (2) для этого гиперболоида имеют вид

$$\begin{cases} t_1(x+z)=s_1(1+y), \\ s_1(x-z)=t_1(1-y) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t_2(x+z)=s_2(1-y), \\ s_2(x-z)=t_2(1+y). \end{cases}$$

Поскольку обе эти прямые проходят через точку M_0, параметры t_1, s_1, t_2, s_2 можно найти, подставив координаты M_0 в уравнения. Имеем

$$\begin{cases} 12t_1 = 6s_1, \\ -2s_1 = -4t_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 12t_2 = -4s_2, \\ -2s_2 = 6t_2. \end{cases}$$

Отсюда $s_1 = 2t_1$ и $s_2 = -3t_2$, а так как нам подойдут любые значения параметров, удовлетворяющие этим равенствам, мы можем положить $t_1 = t_2 = 1$, $s_1 = 2$, $s_2 = -3$. Итак, искомые прямолинейные образующие задаются координатными уравнениями

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2, \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 3y + z = -3, \\ 3x + y - 3z = -1. \end{cases} \tag{3}$$

На том же примере рассмотрим еще один способ нахождения прямолинейных образующих. Параметрические уравнения произвольной прямой, проходящей через точку $M_0(5, 5, 7)$, имеют вид

$$\begin{cases} x = 5 + kt, \\ y = 5 + \ell t, \\ z = 7 + mt, \end{cases} \tag{4}$$

где $\vec{a} = (k, \ell, m)$ — направляющий вектор этой прямой. Правые части этих уравнений подставим в уравнение гиперболоида. После преобразований получим

$$(k^2 + \ell^2 - m^2)t^2 + (10k + 10\ell - 14m)t = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться при каждом значении t (при любом t соответствующая точка прямой лежит на гиперболоиде), то

$$\begin{cases} k^2 + \ell^2 - m^2 = 0, \\ 10k + 10\ell - 14m = 0. \end{cases}$$

Если $m = 0$, то $k = \ell = 0$, что невозможно, так как $\vec{a} \neq \vec{0}$. Следовательно, $m \neq 0$. Поскольку длина направляющего вектора несущественна, m можно придать любое (ненулевое) значение. Полагая $m = 5$, получим систему уравнений относительно k и ℓ:

$$\begin{cases} k^2 + \ell^2 = 25, \\ k + \ell = 7. \end{cases}$$

Она имеет два решения: (3,4) и (4,3). Это означает, что имеются две прямолинейные образующие, проходящие через точку $M_0(5, 5, 7)$. Эти образующие имеют направляющие векторы $\vec{a}_1 = (3, 4, 5)$ и $\vec{a}_2 = (4, 3, 5)$ и задаются соответственно первой и второй системами (3).

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида могут быть найдены сходным образом. Пусть параболоид задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Тогда прямолинейные образующие могут быть заданы системами уравнений

$$\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = sz, \\ s\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2s, \\ s\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = tz. \end{cases}$$

Таким образом, мы вновь имеем два семейства образующих. Для них справедливы все свойства, выполняющиеся для прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. В частности, справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Через каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно две прямолинейных образующих (по одной из каждого семейства). Любые две прямолинейные образующие из одного семейства либо скрещиваются, либо параллельны. Любые две прямолинейные образующие из разных семейств пересекаются.* ■

§54. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) задачи о распознавании квадрики или о приведении квадрики к каноническому виду;

2) задачи о сечениях квадрики плоскостью;

3) задачи о нахождении уравнений прямолинейных образующих.

Примеры решения задач третьего типа рассмотрены в §53. Поэтому здесь мы ограничимся задачами первых двух типов.

Начнем с задачи первого типа. Алгоритм приведения квадрики в пространстве к каноническому виду изложен в доказательствах теорем 2 и 3 в §51 и теоремы в §52. Проиллюстрируем его на конкретном примере.

Задача 1. Определить вид квадрики

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0 \qquad (1)$$

и найти ее каноническое уравнение.

Решение. Решение задачи распадается на три этапа. Первый состоит в нахождении прямоугольной декартовой системы координат, в которой уравнение исходной квадрики не содержит слагаемых с произведением различных неизвестных. Такая система координат существует в силу теоремы 2 из §51, а алгоритм ее нахождения содержится в доказательстве той же теоремы.

Матрица квадратичной формы старших членов уравнения (1) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ исходную прямоугольную декартову систему координат, в которой уравнение квадрики имеет вид (1), а через $\mathcal{A}$ — линейный оператор, заданный в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ матрицей A. В соответствии с доказательством теоремы 2 из §51 искомая система координат имеет вид $(O;\ \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$, где $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Этот базис и надо найти. В силу теоремы 1 из §41 оператор $\mathcal{A}$ является симметрическим. Алгоритм нахождения ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметрического оператора, изложен в конце §41. Вкратце напомним, в чем он состоит: сначала ищется *какой-нибудь* базис, состоящий из собственных векторов оператора, затем производится переход от него к *ортогональному* базису с тем же свойством, после чего векторы последнего базиса нормируются.

Реализуем этот план в нашей конкретной ситуации. Сначала найдем собственные значения оператора $\mathcal{A}$, т.е. корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ -5 & 4-t & 2 \\ 2 & 2 & -8-t \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, стоящий в левой части этого равенства, получаем, что $-t^3 + 81t = 0$. Следовательно, наш оператор имеет три различных собственных значения: $t_1 = 0$, $t_2 = 9$ и $t_3 = -9$. Действуя в соответствии с алгоритмом, изложенным в §34, находим, что к каждому из собственных значений t_1, t_2 и t_3 относится только один линейно независимый собственный вектор, а именно: к t_1 — вектор $\vec{c}_1 = (2, 2, 1)$, к t_2 — вектор $\vec{c}_2 = (1, -1, 0)$, а к t_3 — вектор $\vec{c}_3 = (1, 1, -4)$. В силу теоремы из §34 набор векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ линейно независим. Поскольку в этом наборе три вектора, он является базисом пространства. Более того, теорема 2 из §41 показывает, что этот базис является ортогональным (в этом, впрочем, легко убедиться и непосредственно). Нормируя векторы $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$, находим искомый ортонормированный базис. Он состоит из векторов

$$\vec{d}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \ \vec{d}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ и } \vec{d}_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right).$$

Итак, в системе координат $(O;\ \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$ уравнение исходной квадрики не содержит слагаемых с произведением различных неизвестных. Второй этап решения состоит в нахождении этого уравнения. В силу формул (6) из §5 формулы перехода от системы координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ к системе координат $(O;\ \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$ имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}z', \\ y = \dfrac{2}{3}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}z', \\ z = \dfrac{1}{3}x' \qquad\qquad - \dfrac{4}{3\sqrt{2}}z', \end{cases}$$

где (x, y, z) и (x', y', z') — старые и новые координаты одной и той же точки пространства соответственно. Чтобы получить уравнение квадрики в новой системе координат, надо подставить правые части последних равенств вместо x, y и z в уравнение (1) и произвести необходимые упрощения. Эту работу можно сократить. В самом деле, как видно из доказательства теоремы 2 из §51, квадратичная форма старших членов после подстановки должна иметь вид $t_1(x')^2 + t_2(y')^2 + t_3(z')^2$. Это означает, что подстановку можно делать только в линейную форму младших членов уравнения (1). В результате получится уравнение нашей квадрики в системе координат $(O;\ \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3)$:

$$9(y')^2 - 9(z')^2 - 18x' - \frac{24}{\sqrt{2}}z' - 2 = 0. \tag{2}$$

Третий и последний этап решения задачи состоит в преобразовании полученного уравнения для проведения последующей замены неизвестных, соответствующей параллельному переносу системы координат. Прежде всего выделим в левой части равенства (2) полный квадрат по неизвестной z'. Получим уравнение

$$9(y')^2 - 9\left(z' + \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2 - 18x + 6 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(y')^2 - \left(z' + \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 2\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{1}{3}, \\ y'' = y', \\ z'' = z' + \dfrac{4}{3\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Геометрически этой замене соответствует параллельный перенос системы координат в точку P, которая в системе координат $(O;\ \vec{d_1}, \vec{d_2}, \vec{d_3})$ имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$. Уравнение квадрики в системе координат $(P;\ \vec{d_1}, \vec{d_2}, \vec{d_3})$ имеет вид $(y'')^2 - (z'')^2 = 2x''$. Сделав замену неизвестных $x''' = y''$, $y''' = z''$, $z''' = x''$, мы получим уравнение $(x''')^2 - (y''')^2 = 2z'''$, которое является каноническим уравнением гиперболического параболоида.

Ответ: гиперболический параболоид, $x^2 - y^2 = 2z$.

На первом этапе решения задачи первого типа возможна ситуация, когда линейный оператор имеет лишь два различных собственных значения, к одному из которых относятся два линейно независимых собственных вектора. В этом случае к этим двум векторам следует применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Еще одна особенность может возникнуть на третьем этапе решения: в уравнении, найденном на втором этапе, квадратичная форма старших членов может содержать только одно слагаемое с квадратом какой-нибудь неизвестной, а линейная форма младших членов — слагаемые с первыми степенями двух других неизвестных. Действия, которые нужно предпринять в этом случае, указаны в конце доказательства теоремы 3 в §51.

Приведем теперь пример решения задачи второго типа.

Задача 2. Доказать, что квадрика $x^2 - y^2 - 2z + 4\sqrt{3} = 0$ и плоскость $x - y + z = 0$ пересекаются по гиперболе, и найти полуоси этой гиперболы.

Решение. Введем в плоскости $x - y + z = 0$ прямоугольную декартову систему координат. В качестве начала системы координат возьмем точку $O(0,0,0)$, которая, очевидно, принадлежит нашей плоскости. В качестве базисных векторов надо взять два неколлинеарных вектора, лежащих в плоскости. Таковыми являются, например, векторы $\vec{a}_1 = (1,1,0)$ и $\vec{a}_2 = (-1,0,1)$ (см. замечание к доказательству теоремы 1 в §8). Эти векторы не ортогональны и их длины не равны 1. Чтобы получить ортонормированный базис нашей плоскости, применим к векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ процесс ортогонализации Грама–Шмидта (см. доказательство теоремы 3 в §39). Получим векторы (1,1,0) и $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Нормируя эти векторы, получим векторы $\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ и $\vec{b}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Мы получили прямоугольную декартову систему координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ в нашей плоскости. Запишем параметрические уравнения плоскости $x - y + z = 0$, взяв в качестве начальной точки точку O, а в качестве направляющих векторов — векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u - \dfrac{1}{\sqrt{6}}v, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u + \dfrac{1}{\sqrt{6}}v, \\ z = \qquad\quad \dfrac{2}{\sqrt{6}}v. \end{cases}$$

Подставляя правые части этих уравнений вместо x, y и z в уравнение квадрики, после очевидных преобразований получаем уравнение линии пересечения квадрики и плоскости в системе координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$:

$$uv + \sqrt{2}v - 6 = 0.$$

Эта линия является квадрикой на плоскости. Найдем ее каноническое уравнение. В соответствии с доказательством леммы 1 из §46 для этого надо повернуть систему координат на угол α, определяемый равенством (11) из §46. В нашем случае это равенство принимает вид $\operatorname{ctg} 2\alpha = 0$, откуда $2\alpha = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 45^\circ$. В силу формулы (9) из §5, формулы поворота на этот угол имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u' - v'), \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u' + v'). \end{cases}$$

Систему координат, полученную поворотом системы координат $(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ на угол 45°, обозначим через $(O;\ \vec{c}_1, \vec{c}_2)$. Уравнение линии в этой системе координат после очевидных преобразований принимает вид

$$(u')^2 - (v')^2 + 2u' + 2v' - 12 = 0.$$

Выделим в этом уравнении полный квадрат по u' и v':

$$(u' + 1)^2 - (v' - 1)^2 = 12.$$

Сделаем замену неизвестных

$$\begin{cases} u'' = u' + 1, \\ v'' = v' - 1. \end{cases}$$

Геометрически этой замене соответствует параллельный перенос системы координат, при котором начало системы координат переходит в точку $P(-1, 1)$. Уравнение линии пересечения квадрики и плоскости в системе координат $(P;\ \vec{c}_1, \vec{c}_2)$ имеет вид

$$\frac{(u'')^2}{12} - \frac{(v'')^2}{12} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы. Ее полуоси совпадают между собой и равны $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $a = b = 2\sqrt{3}$.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение сферы, если:

а) точки $K(4, 1, -3)$ и $L(2, -3, 5)$ являются концами ее диаметра;

б) центр сферы находится в точке $C(3, -5, -2)$ и она касается плоскости $2x - y - 3z + 11 = 0$;

в) радиус сферы равен 3 и она касается плоскости $x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точке $A(1, 1, -3)$.

2. Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 10 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$.

3. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a} = (2, 3, -4)$, а направляющая определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$$

4. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $\vec{a} = (1, 1, 1)$, а направляющая определяется уравнениями

$$\begin{cases} \quad x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

5. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат, направляющая которой определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ \quad y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

6. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $C(3, -1, -2)$, направляющая которой определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

7. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если известно, что она описана около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, а ее образующие перпендикулярны плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$.

8. Составить уравнение цилиндрической поверхности, если известно, что она описана около сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$, а ее образующие параллельны прямой

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 7 - t, \\ z = 5 - 2t. \end{cases}$$

9. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики, пользуясь параллельным переносом системы координат:

а) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 8y - 8z = 0$;

б) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$;

в) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 8y - 6z + 6 = 0$;

г) $x^2 + 2z^2 - 2x + 4z = 0$.

10. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из осей:

а) $2xy - z^2 = 0$; б) $z^2 - 3x - 4y = 0$; в) $x^2 + y^2 + 2xy - z + 1 = 0$.

11. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики:

а) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

б) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;

в) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$;

г) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$;

д) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;

е) $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$;
ж) $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$;
з) $9x^2 + y^2 + 4z^2 - 6xy + 12xz - 4yz - 12x + 4y - 8z + 4 = 0$;
и) $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 6xy + 8xz - 10yz - 2x - 10z + 5 = 0$;
к) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy + 2x - 4y + 4 = 0$.

12. Определить вид линии пересечения квадрики σ и плоскости μ:
а) σ: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, μ: $3x + 4y - 5z = 0$;
б) σ: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, μ: $x - z + 1 = 0$;
в) σ: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$, μ: $x + z + \dfrac{4\sqrt{5}}{3} = 0$.

13. Доказать, что плоскость μ пересекает квадрику σ по прямолинейным образующим и составить уравнения этих прямолинейных образующих:
а) μ: $2x - 12y - z + 16 = 0$, σ: $x^2 - 4y^2 = 2z$;
б) μ: $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, σ: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

14. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

15. Найти прямолинейные образующие квадрики σ, проходящие через точку M:
а) σ: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $M(1, 1, 1)$; б) σ: $4x^2 - z^2 = y$, $M(1, 3, -1)$;
в) σ: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, $M(-1, -1, 1)$.

16. Найти острый угол между прямолинейными образующими квадрики σ, проходящими через точку M:
а) σ: $9x^2 - 4y^2 - 36z = 0$, $M(-2, 0, 1)$;
б) σ: $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 4 = 0$, $M(1, 4, 8)$.

3. Ответы

1. а) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$; б) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$; в) $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$ и $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$.

2. а) $C(1, 2, -3)$, $r = \sqrt{14}$; б) $C\left(\dfrac{3}{2}, 0, 0\right)$, $r = \dfrac{7}{2}$; в) $C(-4, 0, 0)$, $r = 4$.

3. $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz + 16x - 24y - 26z - 131 = 0$.

4. $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$. **5.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

6. $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 - 6xy + 10xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 4 = 0$.

7. $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz - 6 = 0$.

8. $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 8xz - 4yz + 6x + 24y - 6z - 63 = 0$.

9. а) Эллипсоид, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9/4} + \dfrac{z^2}{9/4} = 1$; б) однополостный гиперболоид, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$; в) конус, $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{1/2} - \dfrac{z^2}{1/3} = 0$; г) эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3/2} = 1$.

10. а) Конус, $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{1} = 0$; б) параболический цилиндр, $y^2 = 5x$; в) гиперболический параболоид, $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 2z$.

11. а) Эллипсоид, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2/3} = 1$; б) однополостный гиперболоид, $\frac{x^2}{1/3} + \frac{y^2}{1/6} - \frac{z^2}{1/2} = 1$; в) гиперболический цилиндр, $\frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{1/3} = 1$; г) эллиптический цилиндр, $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$; д) гиперболический параболоид, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 2z$; е) пара пересекающихся плоскостей, $2x+y=0$, $y+2z-2=0$; ж) пара параллельных плоскостей, $2x-y+6=0$, $2x-y-6=0$; з) пара совпавших плоскостей, $3x-y+2z-2=0$; и) прямая, $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ x - y + 3z - 2 = 0; \end{cases}$ к) пустое множество.

12. а) Две параллельные прямые; б) парабола; в) эллипс.

13. а) $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 12y - z + 16 = 0, \\ x + 2y - 8 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ x - 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 5z = 0, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = t, \\ y = 3, \\ z = -2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3t, \\ z = -4t. \end{cases}$

15. а) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1, \\ z = 1 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + 12t, \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 3 + 4t, \\ z = -1 - 2t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = t, \\ y = -2 - t, \\ z = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$

16. а) $\cos\alpha = \frac{1}{17}$; б) $\cos\alpha = \frac{83}{85}$.

4. Самостоятельная работа №10

1. Определить вид и найти каноническое уравнение квадрики:
а) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 18 = 0$;
б) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$;
в) $2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$;
г) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$.

2. Определить линию пересечения квадрики σ и плоскости μ:

а) σ: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z$, μ: $3x - y + 6z - 14 = 0$;

б) σ: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 2z$, μ: $x - 2y + 2 = 0$;

в) σ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1$, μ: $9x - 6y + 2z - 28 = 0$;

г) σ: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 2z$, μ: $2x + 3y - 6 = 0$.

3. Найти прямолинейные образующие квадрики σ, проходящие через точку A:

а) σ: $4x^2 - y^2 - 16z = 0$, $A(1, 2, 0)$;
б) σ: $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2 = 0$, $A(1, 1, 0)$;
в) σ: $4x^2 - y^2 - 16z = 0$, $A(2, 0, 1)$;
г) σ: $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2 = 0$, $A(0, 2, 1)$.

Глава 11

Квадратичные формы

В главах 9 и 10 были рассмотрены геометрические образы уравнений второго порядка от двух и трех переменных (соответственно квадрики на плоскости и в пространстве). Мы видели, что определяющую роль при распознавании геометрического образа (т.е. при определении типа кривой или поверхности) играет "квадратичная часть" уравнения — сумма одночленов второй степени. Данная глава посвящена рассмотрению "квадратичных частей" уравнений второго порядка от произвольного числа неизвестных — так называемых квадратичных форм. В начале главы вводятся основные понятия теории квадратичных форм и излагается метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду. Затем доказывается закон инерции квадратичных форм и изучаются положительно определенные формы (в частности, доказывается критерий Сильвестра положительной определенности).

§55. Квадратичная форма, канонический вид

Определение. *Квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n называется сумма одночленов вида $c_{ij}x_ix_j$, где c_{ij} — действительные числа для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \leqslant j$.

Квадратичную форму можно определить как многочлен от нескольких переменных, все одночлены которого имеют степень 2. В общем виде квадратичную форму от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{11}x_1^2 &+ c_{12}x_1x_2 + \dots + c_{1n}x_1x_n + \\ &+ \quad c_{22}x_2^2 + \dots + c_{2n}x_2x_n + \\ &\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ &\qquad\qquad + \quad c_{nn}x_n^2 \,. \end{aligned}$$

Коэффициенты при неизвестных образуют верхнетреугольную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

В силу этого приведенную форму записи квадратичной формы называют *треугольной.* Такая запись не всегда удобна, и мы будем, как правило, записывать квадратичную форму в более симметричном виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \quad a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \;, \end{aligned}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Такую запись квадратичной формы будем называть *прямоугольной.* Переход от треугольной записи к прямоугольной делается просто: достаточно положить $a_{ii} = c_{ii}$ и $a_{ij} = a_{ji} = \dfrac{c_{ij}}{2}$ при $i < j$. Матрица коэффициентов при переменных в прямоугольной записи квадратичной формы является симметрической квадратной матрицей порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а элементы матрицы A — *коэффициентами формы* f.

Подчеркнем, что коэффициенты квадратичной формы — это не то же самое, что коэффициенты многочлена от нескольких переменных, совпадающего по внешнему виду с этой формой. Например, коэффициентами многочлена $x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$ являются числа 1, 3 и 8, а коэффициентами квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2$ — числа 1, 3 и 4 (так как $a_{12} = a_{21} = \dfrac{8}{2} = 4$).

Легко проверить, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Такую запись квадратичной формы называют *полной матричной записью.* Наконец, *краткой матричной записью* квадратичной формы называют ее запись в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^\top A X, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Основная цель данного параграфа — показать, что с помощью замены переменных произвольную квадратичную форму можно привести к более простому виду (такому, в котором будут присутствовать только квадраты переменных). При этом допускаются не произвольные, а только так называемые невырожденные линейные замены переменных. Введем необходимые понятия.

Определение. Система равенств вида

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — наборы переменных, а b_{ij} — действительные числа, называется *линейной заменой переменных.* Линейная замена переменных называется *невырожденной*, если матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

невырожденна. Матрица B называется *матрицей линейной замены переменных* (1). Запись линейной замены переменных в виде системы равенств (1) называется *координатной записью.* Кроме того, линейную замену переменных можно задать в *полной матричной записи*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

или в *краткой матричной записи*

$$X = BY, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ а } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $X = BY$ — невырожденная линейная замена переменных. Положим $B^{-1} = (c_{ij})$. Тогда замена переменных $Y = B^{-1}X$ или, в координатной записи,

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n \end{cases}$$

называется *обратной к замене* $X = BY$.

Легко видеть, что если к квадратичной форме применяется невырожденная линейная замена переменных, то в результате снова получается квадратичная форма. Справедлива следующая

Лемма. *Если к квадратичной форме*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^\top AX$$

применить невырожденную линейную замену переменных $X = BY$, *то полученная квадратичная форма* $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ *будет иметь матрицу* $B^\top AB$.

Доказательство. Используя свойство 6 на с. 252, имеем

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = (BY)^\top A(BY) = (Y^\top B^\top)A(BY) = Y^\top(B^\top AB)Y.$$

Это означает, что матрица формы g равна $B^\top AB$. ∎

Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если матрица этой формы диагональна. Иными словами, форма имеет канонический вид, если в ней все коэффициенты при произведениях различных переменных равны 0, т.е. если она выглядит следующим образом:

$$t_1x_1^2 + t_2x_2^2 + \dots + t_nx_n^2.$$

Теорема. *Из любой квадратичной формы можно с помощью невырожденной линейной замены переменных получить квадратичную форму, имеющую канонический вид.*

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по числу переменных квадратичной формы. Пусть дана форма

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^\top AX, \text{ где } A = (a_{ij}).$$

База индукции очевидна: при $n = 1$ форма $f(x_1) = a_{11}x_1^2$ сама имеет канонический вид.

Шаг индукции. Предположим, что теорема верна для произвольной формы от $(n-1)$-й переменной. Если все коэффициенты квадратичной формы f равны 0, то эта форма сама имеет канонический вид. Предположим поэтому, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Случай 1: *отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов при квадратах переменных.* Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (в общем случае годятся полностью аналогичные рассуждения). Соберем вместе все слагаемые, содержащие переменную x_1, а сумму всех остальных слагаемых формы f обозначим через f_1:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + f_1(x_2, \ldots, x_n).$$

Мы воспользовались здесь равенством $a_{1i} = a_{i1}$ и вместо суммы одночленов $a_{1i}x_1x_i + a_{i1}x_ix_1$ записали один одночлен — $2a_{1i}x_1x_i$. Сумму слагаемых, содержащих x_1, дополним до полного квадрата. Получим

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;&=\; a_{11} \cdot \Big[x_1^2 \;+\; 2x_1 \cdot \frac{1}{a_{11}} \cdot (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \\
&\qquad\qquad + \;\frac{1}{a_{11}^2} \cdot (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2\Big] - \\
&\;-\; \frac{1}{a_{11}} \cdot (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n) = \\
&\;=\; a_{11} \cdot \Big[x_1 \;+\; \frac{1}{a_{11}} \cdot (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\Big]^2 + \\
&\quad + f_2(x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

где $f_2(x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_2, \ldots, x_n) - \dfrac{1}{a_{11}} \cdot (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2$. Квадратичная форма $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ зависит от $(n-1)$-й переменной. По предположению индукции существует невырожденная линейная замена переменных

$$\begin{cases} x_2 = b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n, \\ x_3 = b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \dots + b_{3n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n2}y_2 + b_{n3}y_3 + \dots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2}$$

которая приводит форму $f_2(x_2, \dots, x_n)$ к каноническому виду

$$c_2y_2^2 + c_3y_3^2 + \ldots + c_ny_n^2.$$

Положим

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n.$$

Используя замену (2), получаем, что

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n = \\ &= y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot (b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2n}y_n) - \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot (b_{n2}y_2 + b_{n3}y_3 + \dots + b_{nn}y_n) = \\ &= y_1 + d_2y_2 + \dots + d_ny_n \end{aligned}$$

для некоторых чисел $d_2, \dots, d_n$. Рассмотрим линейную замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + d_2y_2 + \dots + d_ny_n, \\ x_2 = \qquad b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \qquad b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n. \end{cases} \tag{3}$$

Матрица замены (3) невырожденна. В самом деле, разлагая определитель этой матрицы по первому столбцу и учитывая, что замена (2) невырожденна, имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Применяя замену (3) к форме f, получаем форму

$$a_{11}y_1^2 + c_2y_2^2 + \dots + c_ny_n^2,$$

которая имеет канонический вид.

Случай 2: *все коэффициенты при квадратах в форме f равны* 0, *но по крайней мере один из коэффициентов при произведении различных переменных отличен от нуля.* Будем считать, что $a_{12} \neq 0$ (в общем случае годятся полностью аналогичные рассуждения). Рассмотрим линейную замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 & , \\ x_2 = y_1 - y_2 & , \\ x_3 = \quad\quad y_3 & , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_n = \quad\quad\quad y_n. & \end{cases} \tag{4}$$

Разлагая определитель матрицы этой замены сначала по n-й строке, затем по по $(n-1)$-й строке, $\dots$, наконец, по третьей строке, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, наша замена невырожденна. Применяя ее к исходной форме $f = X^\top AX$, получим форму $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, в которой коэффициент при y_1^2 равен $2a_{12}$. Поскольку этот коэффициент отличен от 0, мы попадаем в условия первого случая. Теорема доказана. ∎

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду, изложенный в доказательстве теоремы, называется *методом выделения полных квадратов* или *методом Лагранжа.* Кратко его можно сформулировать следующим образом.

> *Если форма содержит квадрат какой-то переменной x_i и произведение этой переменной на другую переменную, выделяем полный квадрат по x_i. Если форма содержит произведение различных переменных x_i и x_j, но не содержит квадратов этих переменных, применяем к этим переменным замену вида* (4), *т.е. заменяем x_i на $x_i + x_j$, а x_j на $x_i - x_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока форма не примет канонический вид.*

Проиллюстрируем сказанное на примере. Приведем к каноническому виду форму

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

и найдем соответствующую линейную замену переменных. Поскольку форма f содержит как x_1^2, так и произведения x_1 на другие переменные, выделим полный квадрат по x_1:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 2(x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2)- \\ &- 2(x_2-x_3)^2+2x_2^2+2x_3^2+x_2x_4+x_3x_4= \\ &= 2(x_1+x_2-x_3)^2+4x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \\ y_4 = x_4. \end{cases} \tag{5}$$

Ясно, что матрица этой замены — верхнетреугольная, причем все элементы ее главной диагонали равны 1. Следовательно, замена (5) невырожденна. Применяя ее к форме f, получим форму

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4) = 2y_1^2+4y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4.$$

Отметим, что мы несколько отклонились от алгоритма, изложенного в доказательстве теоремы. В самом деле, замена (5) выражает новые переменные y_1,y_2,y_3,y_4 через старые переменные x_1,x_2,x_3,x_4, а в доказательстве речь шла о замене, выражающей старые переменные через новые. Найти такую замену несложно — надо взять замену, обратную к (5). Матрица замены (5) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислив обратную матрицу, получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратной к замене (5) является замена

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases} \tag{6}$$

Продолжим приведение формы f к каноническому виду. Форму $g(y_1, y_2, y_3, y_4)$ можно записать в виде $2y_1^2 + g_1(y_2, y_3, y_4)$, где $g_1(y_2, y_3, y_4) = 4y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4$. Форма g_1 не содержит квадратов переменных. Применим поэтому замену переменных того типа, которая описана в случае 2 доказательства теоремы, а именно замену

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_2 - z_3, \\ y_4 = z_4. \end{cases} \tag{7}$$

Получим форму

$$h(z_1, z_2, z_3, z_4) = 2z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2 + 2z_2z_4.$$

Выделим полный квадрат по переменной z_2:

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2, z_3, z_4) &= 2z_1^2 + 4\left(z_2^2 + 2z_2 \cdot \frac{1}{4}z_4 + \frac{1}{16}z_4^2\right) - \frac{1}{4}z_4^2 - 4z_3^2 = \\ &= 2z_1^2 + 4\left(z_2 + \frac{1}{4}z_4\right)^2 - 4z_3^2 - \frac{1}{4}z_4^2. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} u_1 = z_1, \\ u_2 = z_2 + \dfrac{1}{4}z_4, \\ u_3 = z_3, \\ u_4 = z_4. \end{cases} \tag{8}$$

Найдем сразу обратную замену. Матрица замены (8) имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица есть

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и потому замена, обратная к (8), есть

$$\left\{\begin{array}{llllll} z_1 &= u_1 & & & , \\ z_2 &= & u_2 & & -\dfrac{1}{4}u_4, \\ z_3 &= & & u_3 & , \\ z_4 &= & & & u_4. \end{array}\right. \qquad (9)$$

Применим теперь замену (8) к форме h. Получим форму

$$e(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2u_1^2 + 4u_2^2 - 4u_3^2 - \frac{1}{4}u_4^2.$$

Эта форма уже имеет канонический вид. Найдем теперь замену переменных, переводящую форму f в форму e. Комбинируя равенства (6), (7) и (9), имеем

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 &= z_1 - 2z_3 = u_1 - 2u_3, \\ x_2 = y_2 &= z_2 + z_3 = u_2 + u_3 - \dfrac{1}{4}u_4, \\ x_3 = y_3 &= z_2 - z_3 = u_2 - u_3 - \dfrac{1}{4}u_4, \\ x_4 = y_4 &= z_4 = u_4. \end{array}\right.$$

Итак, форма f переводится в форму e невырожденной линейной заменой переменных

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = u_1 - 2u_3, \\ x_2 = u_2 + u_3 - \dfrac{1}{4}u_4, \\ x_3 = u_2 - u_3 - \dfrac{1}{4}u_4, \\ x_4 = u_4. \end{array}\right.$$

Если из формы f с помощью невырожденной линейной замены переменных получена квадратичная форма g, имеющая канонический вид, то форма g называется *каноническим видом формы* f. Отметим, что канонический вид данной квадратичной формы определен неоднозначно, так как существует много невырожденных линейных замен переменных, приводящих данную форму к (вообще говоря) различным формам, имеющим канонический вид. Например, форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$$

невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{3}{2}y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

приводится к каноническому виду $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$, а другой невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + \frac{1}{3}z_2 - \frac{1}{2}z_3, \\ x_2 = z_2 + \frac{3}{2}z_3, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

— к виду $h(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + \frac{8}{3}z_2^2$.

§56. Закон инерции квадратичных форм

Как отмечено в конце §55, существует много различных квадратичных форм канонического вида, которые могут быть получены невырожденными линейными заменами переменных из одной и той же квадратичной формы. В связи с этим возникает вопрос о том, существует ли что-то общее между различными каноническими видами данной квадратичной формы. Ответ на него оказывается положительным (см. теорему 2 ниже).

Определение. *Рангом квадратичной формы* $f = X^\top AX$ называется ранг матрицы A.

Очевидно, что ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на ее главной диагонали. Следовательно,

> *если квадратичная форма имеет канонический вид, то ее ранг равен числу ненулевых коэффициентов при квадратах переменных.*

Теорема 1. *Если квадратичная форма $f = X^\top AX$ невырожденной линейной заменой переменных приведена к каноническому виду g, то число ненулевых коэффициентов при квадратах в форме g равно рангу матрицы A.*

Доказательство. Обозначим матрицу невырожденной линейной замены, которая переводит форму f в форму g, через B, а матрицу формы g — через C. В силу замечания, сделанного перед формулировкой теоремы, число ненулевых коэффициентов при квадратах в форме g равно рангу матрицы C. Поэтому достаточно доказать, что $r(A) = r(C)$. В силу леммы из §55 выполнено равенство $C = B^\top AB$. В силу теоремы из §30 $r(C) \leqslant r(A)$. Из невырожденности матрицы B и свойства 9 из §13 вытекает, что матрица $B^\top$ также невырожденна. Умножая равенство $C = B^\top AB$ слева на $(B^\top)^{-1}$ и справа на B^{-1}, получаем, что $A = (B^\top)^{-1}CB^{-1}$. Вновь используя теорему из §30 имеем $r(A) \leqslant r(C)$. Следовательно, $r(A) = r(C)$. Теорема 1 доказана. ■

Из теоремы 1 немедленно вытекает следующее

Следствие. *Если квадратичная форма двумя различными невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум различным формам, имеющим канонический вид, то полученные формы имеют одинаковое число ненулевых коэффициентов при квадратах переменных.* ■

Оказывается, что справедливо следующее более сильное утверждение, которое называется *законом инерции квадратичных форм.*

Теорема 2. *Если квадратичная форма двумя различными невырожденными линейными заменами переменных приведена к двум различным формам, имеющим канонический вид, то полученные формы имеют одинаковое число положительных коэффициентов при квадратах переменных и одинаковое число отрицательных коэффициентов при квадратах переменных.*

Доказательство. Пусть форма $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \tag{1}$$

приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \cdots + t_ky_k^2 - {} \\ & - t_{k+1}y_{k+1}^2 - t_{k+2}y_{k+2}^2 - \cdots - t_{k+\ell}y_{k+\ell}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

(где $t_1, t_2, \ldots, t_{k+\ell} > 0$), а невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \dots + c_{1n}z_n, \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \dots + c_{2n}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \dots + c_{nn}z_n \end{cases} \tag{3}$$

— к каноническому виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {} & s_1 z_1^2 + s_2 z_2^2 + \dots + s_p z_p^2 - \\ & - s_{p+1} z_{p+1}^2 - s_{p+2} z_{p+2}^2 - \dots - s_{p+q} z_{p+q}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

(где $s_1, s_2, \dots, s_{p+q} > 0$). Следствие из теоремы 1 показывает, что $k + \ell = p + q$. Требуется доказать, что $k = p$ и $\ell = q$. Ясно, что одно из этих равенств следует из другого, и потому достаточно доказать какое-нибудь одно из них. Докажем, что $k = p$. Предположим противное: пусть $k \neq p$. Для определенности будем считать, что $k < p$.

Так как замены переменных (1) и (3) являются невырожденными, то существуют обратные к ним замены переменных. Пусть замена переменных

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n, \\ y_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \dots + d_{nn}x_n \end{cases} \tag{5}$$

является обратной к (1), а замена переменных

$$\begin{cases} z_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n, \\ z_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + \dots + f_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \dots + f_{nn}x_n \end{cases} \tag{6}$$

— обратной к (3). Замены (5) и (6) также невырожденны. Положим

$$y_1 = y_2 = \dots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \dots = z_n = 0.$$

Тогда выполняются равенства

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = 0, \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{k1}x_1 + d_{k2}x_2 + \dots + d_{kn}x_n = 0, \\ f_{p+1\,1}x_1 + f_{p+1\,2}x_2 + \dots + f_{p+1\,n}x_n = 0, \\ f_{p+2\,1}x_1 + f_{p+2\,2}x_2 + \dots + f_{p+2\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}x_1 + f_{n2}x_2 + \dots + f_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Мы получили однородную систему линейных уравнений, число уравнений в которой равно $k+n-p$. Поскольку $k<p$, получаем, что $k+n-p<n$. По теореме 3 из §12 система (7) имеет ненулевое решение $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Подставив эти значения вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в правые части равенств (5) и (6), получим значения левых частей этих равенств:

$$y_1 = y'_1, y_2 = y'_2, \ldots, y_n = y'_n, z_1 = z'_1, z_2 = z'_2, \ldots, z_n = z'_n.$$

Отметим, что

$$y'_1 = y'_2 = \cdots = y'_k = z'_{p+1} = z'_{p+2} = \cdots = z'_n = 0.$$

В то же время среди чисел $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ есть ненулевые, так как среди чисел $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ есть ненулевые и замена (6) невырожденна.

Равенство (2) означает, что если в его левой части произвести замену переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то получим правую часть этого равенства. Отсюда и из того, что $y'_1 = y'_2 = \cdots = y'_k = 0$, следует, что

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = {} & t_1(y'_1)^2 + t_2(y'_2)^2 + \cdots + t_k(y'_k)^2 - \\ & - t_{k+1}(y'_{k+1})^2 - t_{k+2}(y'_{k+2})^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y'_{k+\ell})^2 = \\ = {} & - t_{k+1}(y'_{k+1})^2 - t_{k+2}(z'_{k+2})^2 - \cdots - t_{k+\ell}(y'_{k+\ell})^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогично из равенства (4) и того, что $z'_{p+1} = z'_{p+2} = \cdots = z'_n = 0$, а среди чисел $z_1, z_2, \ldots, z_p$ есть отличные от нуля, следует, что

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = {} & s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \cdots + s_p(z'_p)^2 - \\ & - s_{p+1}(z'_{p+1})^2 - s_{p+2}(z'_{p+2})^2 - \cdots - s_{p+q}(z'_{p+q})^2 = \\ = {} & s_1(z'_1)^2 + s_2(z'_2)^2 + \cdots + s_p(z'_p)^2 > 0. \end{aligned}$$

Итак, $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \leqslant 0$ и $f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) > 0$. Противоречие доказывает, что предположение о том, что $k \neq p$, ложно. Следовательно, $k = p$. Теорема 2 доказана. ∎

§57. Положительно определенные квадратичные формы

В приложениях довольно часто возникают квадратичные формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающие следующим свойством: если $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — произвольный ненулевой набор значений переменных формы f

(т.е. если по крайней мере одно из чисел $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ отлично от нуля), то $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) > 0$. Квадратичная форма, обладающая этим свойством, называется *положительно определенной.*

Данный параграф посвящен изложению двух критериев положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 1. *Пусть квадратичная форма $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет канонический вид $t_1y_1^2 + t_2y_2^2 + \dots + t_ny_n^2$. Форма f положительно определена тогда и только тогда, когда $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$.*

Доказательство. Пусть форма f приводится к указанному в теореме каноническому виду невырожденной линейной заменой переменных

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n. \end{cases} \quad (1)$$

Нам понадобится также обратная замена:

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n. \end{cases} \quad (2)$$

Она тоже невырожденна.

Докажем **необходимость**. Предположим, что $t_i \leqslant 0$ для некоторого i. Положим $y'_i = 1$ и $y'_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, $j \neq i$. Подставим в левые части равенств (2) y'_1 вместо y_1, y'_2 вместо y_2, ..., y'_n вместо y_n. Получим неоднородную крамеровскую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{i-1\,1}x_1 + c_{i-1\,2}x_2 + \dots + c_{i-1\,n}x_n = 0, \\ c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n = 1, \\ c_{i+1\,1}x_1 + c_{i+1\,2}x_2 + \dots + c_{i+1\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Матрица этой крамеровской системы совпадает с матрицей замены (2). Поскольку эта замена невырожденна, получаем, что определитель системы (3) отличен от нуля. По правилу Крамера (см. теорему 1 в §14) система (3) имеет единственное решение $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Это решение — ненулевое, так как система (3) неоднородна. Поскольку $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + \dots + t_n y_n^2$, имеем

$$f(x_1', x_2', \dots, x_n') = t_1 (y_1')^2 + t_2 (y_2')^2 + \dots + t_n (y_n')^2 = t_i \leqslant 0.$$

Следовательно, форма f не является положительно определенной. Итак, если f положительно определена, то $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$. Необходимость доказана.

Докажем теперь **достаточность**. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$. Возьмем произвольный ненулевой набор $x_1', x_2', \dots, x_n'$ значений переменных формы f. Подставив их в равенства (2), получим набор $y_1', y_2', \dots, y_n'$ значений переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Если $y_1' = y_2' = \dots = y_n' = 0$, то, подставив эти значения в правые части равенств (1), получим, что $x_1' = x_2' = \dots = x_n' = 0$. Следовательно, набор $y_1', y_2', \dots, y_n'$ — ненулевой. Имеем

$$f(x_1', x_2', \dots, x_n') = t_1 (y_1')^2 + t_2 (y_2')^2 + \dots + t_n (y_n')^2 > 0.$$

Таким образом, если $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$, то форма f положительно определена. Теорема 1 доказана. ∎

Предположим, что нам дана конкретная квадратичная форма и требуется узнать, является ли она положительно определенной. Чтобы применить критерий положительной определенности, даваемый теоремой 1, требуется привести данную форму к каноническому виду. Существует критерий положительной определенности, который позволяет быстрее ответить на указанный вопрос. Чтобы сформулировать его, нам понадобится следующее

Определение. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Миноры этой матрицы, расположенные в ее первых k строках и первых k столбцах (для всех $k = 1, 2, \dots, n$), т.е. определители

$$\Delta_1 = |(a_{11})| = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{vmatrix} = |A|,$$

называются *угловыми минорами* матрицы A.

Обещанный выше критерий положительной определенности дает следующая теорема, называемая *критерием Сильвестра*.

Теорема 2. *Квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему только в случае, когда форма зависит от двух переменных. Пусть

$$f = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Докажем **необходимость**. Предположим, что форма f положительно определена. Тогда $\Delta_1 = a_{11} = f(1,0) > 0$. Осталось проверить, что $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Приведем форму f к каноническому виду методом Лагранжа. Учитывая, что $a_{11} = f(1,0) \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \\ &= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2, \\ y_2 = \phantom{x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \cdot {}} x_2, \end{cases}$$

получим, что форма f имеет канонический вид

$$a_{11}y_1^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)y_2^2.$$

Поскольку f положительно определена, из теоремы 1 вытекает, что

$$a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} > 0.$$

Вспоминая еще раз, что $a_{11} = f(1,0) > 0$, получаем, что

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Докажем теперь **достаточность**. Пусть $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ и (x_1', x_2') — ненулевой набор переменных. Используя тот факт, что $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned} f(x_1', x_2') &= a_{11}(x_1')^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}(x_2')^2 = \\ &= a_{11}\left(x_1' + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2'\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)(x_2')^2 = \\ &= a_{11}\left(x_1' + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2'\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \cdot (x_2')^2 = \\ &= \Delta_1 \cdot \left(x_1' + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2'\right)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot (x_2')^2. \end{aligned}$$

Если $x_2' = 0$, то $x_1' \neq 0$ и потому $f(x_1', x_2') = \Delta_1 (x_1')^2 > 0$. Пусть теперь $x_2' \neq 0$. Тогда $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot (x_2')^2 > 0$. Учитывая, что

$$\Delta_1 \cdot \left(x_1' + \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2' \right)^2 \geqslant 0,$$

получаем, что и в этом случае $f(x_1', x_2') > 0$. Следовательно, форма f положительно определена. Теорема 2 доказана. ∎

Продемонстрируем применение критерия Сильвестра на следующем примере: определить, при каких значениях параметра t форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2tx_2^2 + 4x_2x_3 + 3tx_3^2$$

положительно определена. Матрица формы f имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2t & 2 \\ -1 & 2 & 3t \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры этой матрицы:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2t \end{vmatrix} = 2t - 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2t & 2 \\ -1 & 2 & 3t \end{vmatrix} = 6t^2 - 14t + 4.$$

В силу критерия Сильвестра форма f положительно определена тогда и только тогда, когда t удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} 6t^2 - 14t + 4 > 0, \\ 2t - 4 > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем ответ: $t > 2$. Итак, форма f положительно определена тогда и только тогда, когда $t > 2$.

§58. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) приведение квадратичной формы к каноническому виду и нахождение соответствующей замены переменных;

2) выяснение того, является ли квадратичная форма положительно определенной.

В §55 и 57 имеются примеры решения задач обоих типов, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Привести квадратичные формы к каноническому виду:
а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
в) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

2. Привести квадратичные формы к каноническому виду и найти соответствующую замену переменных:
а) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
б) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
в) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$;
г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

3. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма положительно определена:
а) $5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$;
в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
г) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

4. Доказать, что если квадратичная форма положительно определена, то в ней все коэффициенты при квадратах переменных положительны.

5*. Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при подстановке в нее любого ненулевого набора значений переменных значение формы отрицательно. Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма, а Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n — угловые миноры матрицы этой формы. Доказать, что форма f отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки чисел Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

3. Ответы

1. а) $y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{7}{3}y_3^2$; б) $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2$; в) $y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2$; г) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

2. а) $y_1^2 + 4y_2^2 - 7y_3^2$, замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{3}{2}y_3, \\ x_2 = \phantom{y_1 - {}} y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = \phantom{y_1 - y_2 + \frac{1}{2}} y_3; \end{cases}$$

б) $4y_1^2 + y_2^2 - 3y_3^2$, замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3; \end{cases}$$

в) $2y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2$, замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 + y_3, \\ x_3 = \qquad y_2 - y_3; \end{cases}$$

г) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \dfrac{3}{4}y_4^2$, замена переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3 + \dfrac{3}{2}y_4, \\ x_2 = y_1 - y_2 - y_3 + \dfrac{3}{2}y_4, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 - \dfrac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \qquad\qquad\qquad y_4. \end{cases}$$

3. а) $t > 2$; б) $|t| < \sqrt{\dfrac{5}{3}}$; в) $-0{,}8 < t < 0$; г) таких значений t не существует.

5. *Указание*: умножить форму на -1 и воспользоваться критерием Сильвестра.

4. Самостоятельная работа №11

1. Привести квадратичные формы к каноническому виду:
а) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;
б) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;
в) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 5x_3^2 + 4x_3x_4 + 8x_4^2$;
г) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$.

2. Привести квадратичные формы к каноническому виду и найти соответствующую замену переменных:
а) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2$;
б) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$;
в) $2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$;
г) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2$.

3. Найти все значения параметра t, при которых квадратичная форма положительно определена:
а) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - tx_1x_3 - 8x_2x_3$;
б) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - tx_1x_3$;
в) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + tx_2x_3$;
г) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + tx_2x_3$.

Глава 12

Неотрицательные матрицы

Цель этой главы — показать, как понятия и результаты линейной алгебры возникают и используются при математическом моделировании экономических процессов. Разумеется, в рамках нашего курса мы можем рассмотреть только самые простые модели. Более сложные должны быть предметом отдельного курса. В начале главы доказывается теорема Фробениуса–Перрона о свойствах собственных векторов и собственных значений неотрицательных матриц. Затем рассматривается простая линейная модель производства (модель Леонтьева), которая приводит к понятию продуктивной матрицы, и доказываются критерии продуктивности матрицы. После этого мы рассмотрим простую линейную модель обмена, приводящую к понятию матрицы обмена, и укажем некоторые свойства таких матриц.

7

§59. Теорема Фробениуса–Перрона

Как мы увидим в §60 и 61, в экономических приложениях линейной алгебры естественно возникают матрицы, все элементы которых неотрицательны. В данном параграфе мы рассмотрим некоторые свойства таких матриц, которые понадобятся нам в §60.

Назовем матрицу *неотрицательной*, если все ее элементы неотрицательны. В частности, вектор из пространства $\mathbb{R}_n$ (который можно рассматривать как матрицу, состоящую из одной строки) неотрицателен, если неотрицательны все его компоненты.

Для произвольной квадратной матрицы A, будем называть действительные корни уравнения $|A-tE|=0$ *собственными значениями* (или *собственными числами*) *матрицы* A (здесь E — единичная матрица того же порядка, что и A). Иными словами, собственные значения матрицы A — это собственные значения линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу A. Собственные векторы этого оператора будем называть *собственными векторами матрицы* A.

Пусть матрица A имеет порядок n. Тогда степень многочлена $|A-tE|$ равна n. В силу следствия 3 из §19 уравнение $|A-tE|=0$ имеет n корней (некоторые из которых могут совпадать), являющихся, вообще говоря, комплексными числами. Выберем среди них наибольшее по модулю число и обозначим его через t_A.

Следующее утверждение известно как *теорема Фробениуса–Перрона.*

Теорема. *Пусть A — неотрицательная квадратная матрица. Тогда:*

1) *t_A — неотрицательное действительное число (в частности, t_A — собственное значение матрицы A);*

2) *существует относящийся к t_A неотрицательный собственный вектор матрицы A.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему только для матриц второго порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и $a_{ij}\geqslant 0$ для всех $i,j=1,2$. Обозначим через $g(t)$ характеристический многочлен матрицы A. Тогда

$$\begin{aligned} g(t)=|A-tE| &= (t-a_{11})(t-a_{22})-a_{12}a_{21}= \\ &= t^2-(a_{11}+a_{22})t+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Найдем дискриминант многочлена $g(t)$:

$$D=(a_{11}+a_{22})^2-4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}.$$

Очевидно, что $D\geqslant 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $D=0$. Тогда $a_{11}=a_{22}$ и либо $a_{12}=0$, либо $a_{21}=0$. Для определенности будем считать, что $a_{12}=0$. Таким образом, матрица A имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Но тогда $g(t) = (t - a_{11})^2$, и потому A имеет единственное собственное значение, равное a_{11}. Следовательно, $t_A = a_{11}$. Напомним, что по условию матрица A неотрицательна. В частности, $a_{11} \geqslant 0$. Первое утверждение теоремы доказано. Легко понять, что неотрицательный вектор $\vec{x} = (0,1)$ будет собственным вектором матрицы A, относящимся к $t_A = a_{11}$. В случае $D = 0$ теорема доказана.

Пусть теперь $D > 0$. Тогда характеристический многочлен имеет два различных корня:

$$t_1 = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2}.$$

Ясно, что $t_2 > 0$ и

$$\begin{aligned} |t_1| &= \left|\frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2}\right| \leqslant \left|\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{D}}{2}\right| = \\ &= \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2} = t_2 = |t_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, $t_A = t_2$. Первое утверждение теоремы доказано. Далее, пусть $\vec{x} = (x_1, x_2)$ — собственный вектор матрицы A, относящийся к t_2. Если $x_1, x_2 \geqslant 0$, то все доказано. Если $x_1, x_2 \leqslant 0$, то для завершения доказательства надо заметить, что вектор $-\vec{x}$ также является собственным вектором матрицы A, относящимся к t_2 (см. теорему в §34). Осталось рассмотреть случай, когда x_1 и x_2 — ненулевые числа с разными знаками. Для определенности будем считать, что $x_1 > 0$, а $x_2 < 0$. Поскольку t_2 — собственное значение матрицы A, имеем

$$\begin{cases} (a_{11} - t_2)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t_2)x_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $a_{12} \geqslant 0$, из первого равенства следует, что $a_{11} - t_2 \geqslant 0$. Аналогично из второго равенства следует, что $a_{22} - t_2 \geqslant 0$. В таком случае $t_2 \leqslant a_{11}$, $t_2 \leqslant a_{22}$ и потому $t_2 \leqslant \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}$. Однако $t_2 = \dfrac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2}$ и $D > 0$. Полученное противоречие показывает, что случай, когда x_1 и x_2 — ненулевые числа с разными знаками, невозможен. Теорема доказана. ■

Из доказательства теоремы немедленно вытекает

Следствие. *Пусть A — неотрицательная квадратная матрица второго порядка. Тогда уравнением $|A - tE| = 0$ имеет два действительных корня (возможно, совпадающих).* ■

Проиллюстрируем теорему Фробениуса–Перрона на примере. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 28 & 41 & 12 \end{pmatrix}.$$

Найдем наибольшее по модулю собственное значение этой матрицы и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор. Сначала найдем характеристический многочлен матрицы A, разложив определитель матрицы $A - tE$ по второй строке:

$$\begin{aligned} |A - tE| &= \begin{vmatrix} 7-t & 9 & 3 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 28 & 41 & 12-t \end{vmatrix} = \\ &= (2-t)(t^2 - 19t) = t(2-t)(t-19). \end{aligned}$$

Следовательно, собственными значениями матрицы A являются числа 0, 2 и 19, и потому $t_A = 19$. Запишем теперь матрицу $A - 19E$ и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} A - 19E &= \begin{pmatrix} -12 & 9 & 3 \\ 0 & -17 & 0 \\ 28 & 41 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 28 & 41 & -7 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 62 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полагая $x_3 = 4$, из второй строки полученной матрицы находим, что $x_2 = 0$, а из ее первой строки — что $x_1 = 1$. Таким образом, в качестве искомого собственного вектора можно взять вектор (1,0,4).

§60. Продуктивные матрицы

1. Простая линейная модель производства

Рассмотрим n технологических процессов (или n предприятий) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые производят n продуктов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ при следующих ограничениях:

1) каждый технологический процесс производит один и только один продукт;

2) модель замкнута, т.е. нет притока продуктов извне и потока продуктов из модели.

Для удобства обозначений будем считать, что технологический процесс p_i производит продукт G_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Для производства продукта G_i в технологическом процессе p_i могут понадобиться продукты $G_1, G_2, \dots, G_n$. Пусть a_{ij} — количество единиц продукта G_i, необходимое для производства одной единицы продукта G_j. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *матрицей потребления*. Ясно, что A — неотрицательная матрица.

Зафиксируем некоторый временной интервал, скажем, год. Пусть в течение этого времени произведено x_1 единиц продукта G_1, x_2 единиц продукта G_2, …, x_n единиц продукта G_n. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *вектором валового выпуска*. Отметим, что $\vec{x}$ — неотрицательный вектор. Часть произведенной продукции расходуется в процессе производства. Эта часть описывается вектором

$$\vec{y} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \dots,\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n).$$

Переходя к матричным обозначениям, имеем $\vec{y}^\top = A\vec{x}^\top$. Вектор $\vec{y}$ называется *вектором производственных затрат*. Отметим, что $\vec{y} = (A\vec{x}^\top)^\top = \vec{x}A^\top$ (см. свойство 6 на с. 252). Остаток $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} - \vec{x}A^\top$ предназначен для использования в непроизводственной сфере и накопления. Он называется *вектором конечного потребления*.

Основная задача, возникающая в планировании производства на наш временной интервал, формулируется следующим образом: при заданном векторе конечного потребления $\vec{c}$ найти необходимый вектор валового выпуска $\vec{x}$. Другими словами, необходимо при заданных векторе $\vec{c}$ и матрице A найти хотя бы один неотрицательный вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству $\vec{x} - \vec{x}A^\top = \vec{c}$ или $\vec{x}(E - A^\top) = \vec{c}$. Учитывая, что $E = E^\top$, последнее равенство можно переписать в виде $\vec{x}(E - A)^\top = \vec{c}$. Транспонировав обе части этого равенства, получим систему линейных уравнений

$$(E - A)\vec{x}^\top = \vec{c}^\top. \tag{1}$$

Система уравнений (1) с указанной интерпретацией матрицы A и векторов $\vec{x}$ и $\vec{c}$ называется *простой линейной моделью производства*, а также *моделью Леонтьева* или *моделью межотраслевого баланса*.

Определение. Неотрицательная квадратная матрица A называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $\vec{c}$ существует неотрицательное решение системы (1).

Пример 1. Будет ли продуктивной матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}?$$

Возьмем $\vec{c} = (1, 1)$. Тогда система (1) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $\vec{x} = (-1, -1)$. Следовательно, матрица A не является продуктивной. Впрочем, это и так ясно: если для производства единицы первого продукта требуются две единицы второго, а для производства единицы второго продукта требуются две единицы первого, то такое производство ничего не произведет (при условии замкнутости).

Пример 2. Рассмотрим более сложную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 1 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она также непродуктивна. Но проверить это простыми рассуждениями довольно трудно. Необходимы достаточно простые для применения критерии продуктивности. Два таких критерия будут получены ниже (см. теоремы 1 и 2). Там же будет доказана непродуктивность матрицы A.

2. Критерии продуктивности матрицы

Из вида системы (1) ясно, что на продуктивность или непродуктивность матрицы A должны влиять свойства матрицы $E - A$. Это подтверждает следующая теорема.

Теорема 1. *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $E - A$ обратима и матрица, обратная к $E - A$, неотрицательна.*

Доказательство. Достаточность устанавливается просто. Действительно, если матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то из (1) следует, что $\vec{x}^\top = (E - A)^{-1}\vec{c}^\top$. А если матрица $(E - A)^{-1}$ и вектор $\vec{c}$ неотрицательны, то и произведение $(E - A)^{-1}\vec{c}^\top$ неотрицательно.

Необходимость. Предположим, что матрица A продуктивна. Обозначим порядок матрицы A через n. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$. Очевидно, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ неотрицательны. По определению продуктивной матрицы для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ существует неотрицательное решение системы $(E - A)\vec{x}^\top = \vec{e}_i^\top$. Обозначим это решение через $\vec{b}_i$. Иными словами, векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, …, $\vec{b}_n$ неотрицательны и выполнены равенства

$$(E - A)\vec{b}_1^\top = \vec{e}_1^\top, (E - A)\vec{b}_2^\top = \vec{e}_2^\top, \ldots, (E - A)\vec{b}_n^\top = \vec{e}_n^\top. \tag{2}$$

Пусть, далее, B — квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой совпадает со столбцом $\vec{b}_i^\top$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$). Очевидно, что матрица, в которой i-й столбец совпадает со столбцом $\vec{e}_i^\top$ (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$), есть не что иное, как единичная матрица порядка n. Из равенств (2) вытекает, что $(E - A)B = E$. В силу следствия 2 из §31 матрица $E - A$ обратима и $(E - A)^{-1} = B$. Остается учесть, что матрица B неотрицательна, поскольку каждый ее столбец неотрицателен. Теорема 1 доказана. ∎

Докажем с помощью теоремы 1 непродуктивность матрицы A из примера 2, приведенного на с. 434. В этом случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -1 \\ -1{,}2 & 1 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $(E - A)^{-1}$ с помощью алгоритма, указанного на с. 267 (если матрица $E - A$ необратима, это, как мы увидим ниже, выяснится в процессе соответствующих элементарных преобразований). Имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1{,}2 & 1 & -0{,}3 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ -12 & 10 & -3 & 0 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ -12 & 10 & -3 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & -2 & -5 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 22 & -63 & 0 & 10 & -60 \\ 0 & -7 & 20 & 5 & 0 & 25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 15 & 10 & 15 \\ 0 & -7 & 20 & 5 & 0 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 15 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 110 & 70 & 130 \end{array}\right).$$

Прервем здесь процесс элементарных преобразований, чтобы отметить следующее. Мы привели левую часть нашей матрицы (т.е. матрицу

$E - A$) к ступенчатому виду. Нулевых строк при этом не возникло. В силу замечания, сделанного на с. 267, это означает, что матрица $E - A$ обратима. Если бы в левой части матрицы возникла нулевая строка, то, в силу того же замечания, это означало бы, что матрицы $(E - A)^{-1}$ не существует. Но тогда из теоремы 1 вытекало бы, что матрица A непродуктивна. Отметим еще, что на четвертом шаге проделанных выше элементарных преобразований мы для упрощения вычислений прибавили ко второй строке третью, умноженную на 3. Продолжим элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 15 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 110 & 70 & 130 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 0 & 550 & 350 & 655 \\ 0 & 1 & 0 & -315 & -200 & -375 \\ 0 & 0 & -1 & 110 & 70 & 130 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & 235 & 150 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & -315 & -200 & -375 \\ 0 & 0 & -1 & 110 & 70 & 130 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -235 & -150 & -280 \\ 0 & 1 & 0 & -315 & -200 & -375 \\ 0 & 0 & 1 & -110 & -70 & -130 \end{array}\right).$$

Итак,

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -235 & -150 & -280 \\ -315 & -200 & -375 \\ -110 & -70 & -130 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта матрица не является неотрицательной, и, в силу теоремы 1, матрица A непродуктивна.

В рассмотренном примере все элементы матрицы $E - A$ оказались отрицательными. Но для того чтобы матрица не являлась неотрицательной, достаточно, чтобы какой-то один ее элемент был отрицательным. В ряде случаев это позволяет доказать непродуктивность матрицы A не находя полностью матрицу $(E - A)^{-1}$. Покажем, как это сделать для рассмотренной выше матрицы A. Прежде всего проверим, существует ли матрица $(E - A)^{-1}$. В силу теоремы из §31 надо проверить, равен ли 0 определитель матрицы $E - A$. Имеем:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}4 & -1 \\ -1{,}2 & 1 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0{,}94 - (-0{,}4) \cdot (-1{,}26) + (-1) \cdot 0{,}44 =$$
$$= 0{,}94 - 0{,}504 - 0{,}44 = -0{,}004 < 0.$$

В частности, $|E - A| \neq 0$ и потому матрица $(E - A)^{-1}$ существует. Осталось проверить, будет ли она неотрицательной. В силу формулы (1) из §31 матрица неотрицательна тогда и только тогда, когда алгебраические дополнения всех ее элементов либо равны 0, либо имеют тот же знак, что и определитель этой матрицы. Как мы убедились выше, $|E-A|<0$. Но

$$(E-A)_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -0{,}3\\ -0{,}2 & 1\end{vmatrix}=0{,}94>0.$$

Следовательно, матрица $(E-A)^{-1}$ не является неотрицательной и потому матрица A непродуктивна.

Следующее утверждение показывает, что продуктивность или непродуктивность матриц второго порядка можно проверять не находя обратной матрицы.

Предложение. *Неотрицательная квадратная матрица $A=(a_{ij})$ второго порядка продуктивна тогда и только тогда, когда $a_{11}<1$, $a_{22}<1$ и $|E-A|>0$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрица A продуктивна. По определению продуктивной матрицы для любого неотрицательного вектора $\vec{c}=(c_1,c_2)$ найдется неотрицательное решение системы

$$\begin{cases}(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = c_1,\\ -a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=c_2.\end{cases}\tag{3}$$

Выбрав в качестве $\vec{c}$ вектор (1,1), получим систему

$$\begin{cases}(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = 1,\\ -a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=1.\end{cases}\tag{4}$$

Пусть $\vec{x}=(x_1,x_2)$ — неотрицательное решение этой системы. Из неоднородности системы (4) вытекает, что $\vec{x}\neq\vec{0}$, т.е. либо $x_1\neq 0$, либо $x_2\neq 0$. Для определенности будем считать, что $x_1\neq 0$ и потому $x_1>0$. Если $x_2=0$, то $-a_{21}x_1+(1-a_{22})x_2=-a_{21}x_1\leqslant 0$ (напомним, что матрица A неотрицательна, а $x_1>0$), что противоречит второму уравнению системы (4). Итак, $x_2\neq 0$ и потому $x_2>0$. Из (4) и неотрицательности матрицы A вытекает теперь, что

$$1-a_{11}=\frac{1+a_{12}x_2}{x_1}>0 \quad \text{и} \quad 1-a_{22}=\frac{1+a_{21}x_1}{x_2}>0.$$

Следовательно, $a_{11}<1$ и $a_{22}<1$. Осталось показать, что $|E-A|>0$. Для того чтобы сделать это, к первому уравнению системы (4), умноженному на $1-a_{22}$, прибавим второе, умноженное на a_{12}. Получим, что $[(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}]x_1=1-a_{22}+a_{12}$. Это равенство можно переписать в виде $|E-A|\cdot x_1=1-a_{22}+a_{12}$. Поскольку $0\leqslant a_{22}<1$, $a_{12}\geqslant 0$ и $x_1>0$, получаем, что $|E-A|>0$.

Достаточность. Предположим теперь, что $a_{11} < 1$, $a_{22} < 1$ и $|E - A| > 0$. Требуется доказать, что матрица A продуктивна. Пусть $\vec{c} = (c_1, c_2)$ — произвольный неотрицательный вектор. Надо доказать, что система уравнений (3) имеет неотрицательное решение. Эта система является крамеровской, а ее основной матрицей является матрица $E - A$. По условию $E - A \neq 0$. По правилу Крамера (см. теорему 1 в §14) система (3) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -a_{12} \\ c_2 & 1 - a_{22} \end{vmatrix}}{|E - A|} = \frac{c_1(1 - a_{22}) + c_2 a_{12}}{|E - A|},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - a_{11} & c_1 \\ -a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{|E - A|} = \frac{c_2(1 - a_{11}) + c_1 a_{21}}{|E - A|}.$$

Поскольку $|E - A| > 0$, а $1 - a_{11}, 1 - a_{22}, a_{12}, a_{21}, c_1, c_2 \geqslant 0$, получаем, что $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$. Следовательно, матрица A продуктивна. Предложение доказано. ■

Отметим, что из доказанного предложения немедленно вытекает непродуктивность матрицы из примера 1, приведенного на с. 434. В самом деле, в этом случае

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Прежде чем сформулировать еще один критерий продуктивности (для матриц произвольного порядка), условимся о следующем. В силу свойства 11 на с. 208 $|tE - A| = (-1)^n |A - tE|$, где n — порядок матрицы A. Следовательно, многочлены $|tE - A|$ и $|A - tE|$ имеют одни и те же корни. С учетом этого условимся называть характеристическим многочленом матрицы A также многочлен $|tE - A|$.

Теорема 2. *Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда все корни ее характеристического уравнения по модулю меньше единицы.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему лишь в случае, когда порядок матрицы равен 2. Характеристический многочлен матрицы A обозначим через $g(t)$. Таким образом,

$$g(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t - a_{22} \end{vmatrix} = (t - a_{11})(t - a_{22}) - a_{12}a_{21}.$$

Отметим, что $g(a_{11}) = g(a_{22}) = -a_{12}a_{21}$.

Необходимость. Предположим, что матрица A продуктивна (в частности, неотрицательна). В силу следствия из §59 многочлен $g(t)$ имеет два действительных корня (возможно, совпадающих). Далее, в силу предложения $a_{11} < 1$, $a_{22} < 1$ и $|E-A| > 0$. Последнее неравенство означает, что $g(1) > 0$. Пусть t_A — наибольшее по модулю собственное значение матрицы A. По теореме Фробениуса–Перрона (см. §59) $t_A \geqslant 0$. Предположим, что $t_A \geqslant 1$. Тогда

$$g(t_A) = (t_A - a_{11})(t_A - a_{22}) - a_{12}a_{21} \geqslant (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} = g(1) > 0.$$

Итак, $g(t_A) \neq 0$ вопреки тому, что t_A — собственное значение матрицы A. Полученное противоречие показывает, что $t_A < 1$. В силу выбора t_A отсюда вытекает, что все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Достаточность. Как и выше, в силу следствия из §59, матрица A имеет два действительных собственных значения (возможно, совпадающих). Предположим, что оба этих собственных значения, т.е. оба корня многочлена $g(t)$, по модулю меньше 1. Графиком этого многочлена является парабола, направленная вверх. Это означает, что $g(1) > 0$, т.е. $|E-A| > 0$. Далее, $g(a_{11}) = -a_{12}a_{21} \leqslant 0$. Предположим, что $a_{11} \geqslant 1$. Тогда a_{11} не является корнем многочлена $g(t)$ и потому $g(a_{11}) < 0$. Поскольку парабола $y = g(t)$ направлена вверх, $g(t') = 0$ для некоторого $t' > a_{11}$. Напомним, что $a_{11} \geqslant 1$. Таким образом, многочлен $g(t)$ имеет корень, который больше 1. Полученное противоречие показывает, что $a_{11} < 1$. Аналогично проверяется, что $a_{22} < 1$. Итак, $a_{11} < 1$, $a_{22} < 1$ и $|E - A| > 0$. В силу предложения матрица A продуктивна. Теорема 2 доказана. ∎

Приведем пример использования теоремы 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Требуется проверить, будет ли матрица A продуктивной. Найдем ее характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} |A - tE| &= \begin{vmatrix} 0{,}2-t & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4-t & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4-t \end{vmatrix} = \\ &= (0{,}4-t) \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2-t & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4-t \end{vmatrix} = (0{,}4-t)(t^2 - 0{,}6t - 0{,}01). \end{aligned}$$

Ясно, что одним из собственных значений матрицы A является число $t_1 = 0{,}4$. Чтобы найти два других собственных значения, надо решить уравнение $t^2 - 0{,}6t - 0{,}01 = 0$. Имеем

$$t_{2,3} = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 + 0{,}04}}{2} = 0{,}3 \pm \sqrt{0{,}1}.$$

Очевидно, что числа t_1, t_2 и t_3 по модулю меньше 1. По теореме 2 матрица A продуктивна.

§61. Матрицы обмена

1. Простая линейная модель обмена

Мы начнем этот параграф с рассмотрения *простой линейной модели обмена* (или *модели международной торговли*). Пусть n стран $C_1, C_2, \ldots, C_n$ торгуют друг с другом. Будем считать, что весь доход x_j страны C_j складывается из продажи своих товаров либо внутри страны, либо другим странам. Предположим также, что структура торговли установилась: часть дохода страны C_j, которая тратится на покупку товаров у страны C_i, постоянна и равна a_{ij}.

Положим $A = (a_{ij})$. Ясно, что A — неотрицательная квадратная матрица порядка n и сумма элементов каждого ее столбца равна 1. Такие матрицы называются *матрицами обмена* или *стохастическими матрицами*.

Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор доходов (т.е. x_i — доход i-й страны, где $i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда, начиная торговать в соответствии с матрицей обмена A, после одного тура торговли страны будут обладать доходами, величина которых описывается вектором-столбцом $A\vec{x}^\top$. Действительно, страна C_j тратит $a_{ij}x_j$ денежных единиц на импорт из страны C_i, а для страны C_i величина $a_{ij}x_j$ — слагаемое дохода. Следовательно, суммарный доход страны C_i удовлетворяет равенству

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Таким образом, вектор доходов $\vec{x}$ удовлетворяет соотношению $\vec{x}^\top = A\vec{x}^\top$, которое можно записать как однородную систему линейных уравнений

$$(E - A)\vec{x}^\top = \vec{0}^\top. \tag{1}$$

Это означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A, относящимся к собственному значению 1. Кроме того, очевидно, что этот вектор неотрицателен. Возникает вопрос: всегда ли матрица обмена имеет собственное значение 1 и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор?

Рассмотрим еще одну ситуацию, которая также приводит к системе уравнений (1), где A — матрица обмена. Пусть, как и в простой линейной модели производства, имеется n предприятий (или технологических процессов) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и n продуктов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и выполняются те же ограничения:

1) каждое предприятие производит один и только один продукт (а именно, предприятие p_i производит продукт G_i, $i = 1, 2, \ldots, n$);

2) модель замкнута.

Зафиксируем некоторый временной интервал, скажем, год. Будем считать, что вся произведенная за этот период продукция потреблена в процессе производства. Пусть в течение этого времени предприятие p_i потребляет часть продукта, произведенного предприятием p_j, равную a_{ij}. Матрица $A = (a_{ij})$ будет матрицей обмена, так как она очевидным образом неотрицательна, а в силу замкнутости модели сумма элементов в каждом ее столбце равна 1.

Обозначим через x_i количество единиц продукта G_i, произведенного предприятием p_i, а через c_i — цену единицы продукта G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Годовой доход предприятия p_i равен $c_i x_i$, а его ежегодные расходы определяются суммой $c_1 x_1 a_{i1} + c_2 x_2 a_{i2} + \cdots + c_n x_n a_{in}$. Мы будем говорить, что цены $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *обеспечивают равновесие торговли*, если

$$c_1 x_1 a_{i1} + c_2 x_2 a_{i2} + \cdots + c_n x_n a_{in} \leqslant c_i x_i \qquad (2)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Суть этого неравенства предельно проста: оно означает лишь, что ни один производитель не тратит больше, чем он зарабатывает. Возникает вопрос: всегда ли для матрицы обмена A и неотрицательного вектора $\vec{x}$ существуют цены $\vec{c}$, обеспечивающие равновесие торговли, т.е. удовлетворяющие неравенству (2)?

Положим $y_i = c_i x_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда совокупность неравенств (2) можно записать следующим образом:

$$A\vec{y}^{\top} \leqslant \vec{y}^{\top} \qquad (3)$$

(это векторное неравенство, разумеется, означает, что каждая компонента вектора, стоящего в его левой части, не превосходит соответствующей компоненты вектора, стоящего в правой части). Оказывается, что при сделанных предположениях из неравенства (3) следует равенство

$$A\vec{y}^{\top} = \vec{y}^{\top}. \qquad (4)$$

Докажем этот факт при $n = 2$. Предположим, что одно из двух неравенств, которые получатся, если расписать векторное неравенство (3) в компонентах (скажем, первое), является строгим:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 < y_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leqslant y_2. \end{cases}$$

Рассмотрим сумму этих неравенств. Сумма их левых частей равна

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = (a_{11} + a_{21})y_1 + (a_{12} + a_{22})y_2 = y_1 + y_2$$

(напомним, что A — матрица обмена). Следовательно, сумма неравенств имеет вид $y_1 + y_2 < y_1 + y_2$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле выполнено равенство (4), которое, с точностью до обозначений, равносильно системе (1). Таким образом, вопрос, сформулированный в конце предыдущего абзаца, сводится к возникшему ранее вопросу: всегда ли матрица обмена имеет собственное значение 1 и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор? Как мы увидим ниже, ответ на него оказывается положительным.

2. Свойства матриц обмена

Теорема. *Пусть A — матрица обмена. Тогда:*

1) *1 является собственным значением матрицы A;*

2) *существует относящийся к 1 неотрицательный собственный вектор матрицы A.*

Доказательство. Первое утверждение проверяется несложно. В самом деле, пусть A — матрица обмена. Прибавим к первой строке матрицы $A - tE$ все остальные ее строки и обозначим полученную матрицу через $B(t)$. Поскольку сумма элементов каждого столбца матрицы A равна 1, получаем, что в матрице $B(t)$ все элементы первой строки равны $1 - t$. По свойствам 1 и 6 из §13 $|A - tE| = |B(t)| = (1 - t) \cdot |B'(t)|$, где $B'(t)$ — матрица, полученная из $B(t)$ заменой в последней матрице всех элементов первой строки на 1. Таким образом, характеристический многочлен матрицы A делится на $1 - t$ и потому 1 является корнем этого многочлена, т.е. собственным значением этой матрицы.

Осталось проверить, что существует относящийся к 1 неотрицательный собственный вектор матрицы A, т.е. что система (1) имеет ненулевое неотрицательное решение. Мы докажем это только в случае, когда

A — матрица второго порядка. В этом случае система (1) имеет вид

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = 0, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Определитель этой системы равен 0. В самом деле, учитывая, что A — матрица обмена, имеем

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, система (5) имеет некоторое ненулевое решение (x_1, x_2) (см. теорему 2 в §14). Если $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, то теорема доказана. Если $x_1 \leqslant 0$ и $x_2 \leqslant 0$, то в качестве ненулевого неотрицательного решения системы (1) можно взять вектор $(-x_1, -x_2)$. Осталось рассмотреть случай, когда x_1 и x_2 — ненулевые числа разных знаков. Для определенности будем считать, что $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$. Из того, что A — матрица обмена, вытекает, что $0 \leqslant a_{11} \leqslant 1$ и $0 \leqslant a_{22} \leqslant 1$. Анализируя знаки слагаемых в уравнениях системы (1), легко понять, что в рассматриваемом случае $a_{11} = a_{22} = 1$ и $a_{12} = a_{21} = 0$. Но тогда $E - A = O$ и потому любой ненулевой неотрицательный вектор является решением системы (1). Теорема доказана. ∎

Приведем пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что A — матрица обмена. В силу теоремы единица является ее собственным значением. Требуется найти относящийся к 1 неотрицательный собственный вектор, т.е. неотрицательное и ненулевое решение однородной системы линейных уравнений с матрицей $A - E$. Выпишем эту матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A - E = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 6 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 0 & -19 & 25 \\ 0 & 19 & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 0 & -19 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_3 = 19$, из второй строки полученной матрицы получаем $x_2 = 25$, а из первой — $x_1 = 26$. Итак, одним из неотрицательных собственных векторов матрицы A, относящихся к собственному значению 1, является вектор (26,25,19).

§62. Задачи

1. Основные типы задач

Основными типами задач по теме данной главы являются:

1) нахождение наибольшего по модулю собственного значения и относящегося к нему неотрицательного собственного вектора неотрицательной квадратной матрицы;

2) выяснение того, является ли матрица продуктивной.

Примеры решения задач обоих типов даны в §59 и 60, и потому здесь мы их решать не будем.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наибольшее по модулю собственное значение и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Для данной матрицы потребления

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

найти вектор валового выпуска, если вектор конечного потребления равен:

а) $(0{,}8; 0{,}5; 0{,}7)$; б) $(1{,}3; 1{,}3; 1{,}8)$.

3. Для матрицы потребления из задачи 2 найти вектор конечного потребления, если вектор валового выпуска равен:

а) (1,2,3); б) (2,1,1).

4. Пусть производство новой единицы стали требует 0,4 единицы стали и 0,5 единицы труда; производство новой единицы продуктов питания требует 0,1 единицы продуктов питания и 0,7 единицы труда; производство новой единицы труда — 0,8 единицы продуктов питания и 0,1 единицы труда. Будет ли такое производство продуктивным?

5. Будут ли следующие матрицы продуктивными:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 1 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$?

6. Для следующих матриц обмена найти неотрицательный собственный вектор, относящийся к собственному значению 1:

а) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 & 1/2 \\ 3/4 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3. Ответы

1. а) 6, (1,2); б) 5, (1,1); в) 5, (1,0,4); г) 4, (1,0,3).
2. а) (1,1,1); б) (2,1,3). **3.** а) (1,4; 1,1; 1,5); б) (1,1; 0,7; 1). **4.** Да.
5. а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да. **6.** а) (4,3,4); б) (10,9, 3).

4. Самостоятельная работа №12

1. Найти наибольшее по модулю собственное значение и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Доказать продуктивность матрицы, используя критерий продуктивности, указанный в теореме 1 из §60:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

3. Доказать продуктивность матрицы, используя критерий продуктивности, указанный в теореме 2 из §60:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

4. Доказать непродуктивность матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Приложение

Метод математической индукции

В самых различных разделах математики многие утверждения доказываются с помощью так называемого метода математической индукции. В основной части пособия такие доказательства встречались в §13, 34 и 55. Здесь приводится краткое изложение этого метода.

Предположим, что нам надо доказать некоторое утверждение $\mathcal{S}(n)$, зависящее от натурального параметра n. Фактически речь идет о бесконечной серии утверждений $\mathcal{S}(1)$, $\mathcal{S}(2)$, $\mathcal{S}(3)$, ..., $\mathcal{S}(n)$, ... *Метод математической индукции* состоит в проверке того, что:

1) выполнено утверждение $\mathcal{S}(1)$ (т.е. доказываемое утверждение верно при $n = 1$);

2) для произвольного натурального числа k, большего 1, из утверждений $\mathcal{S}(1)$, $\mathcal{S}(2)$, ..., $\mathcal{S}(k-1)$ вытекает утверждение $\mathcal{S}(k)$ (т.е. если доказываемое утверждение выполнено при всех $n = 1, 2, \ldots, k-1$, то оно выполнено и при $n = k$).

Утверждение 1 называется *базой индукции*, а утверждение 2 — *шагом индукции*. В доказательстве утверждения 2 предположение о том, что утверждение $\mathcal{S}(n)$ верно при всех $n = 1, 2, \ldots, k-1$, называется *предположением индукции*.

Если утверждения 1 и 2 будут доказаны, то тем самым будет доказано, что утверждение $\mathcal{S}(n)$ выполнено при любом натуральном n. В самом деле, согласно базе индукции утверждение $\mathcal{S}(n)$ выполнено при $n = 1$. Применяя шаг индукции при $k = 2$, получаем, что оно выполнено при $n = 2$. Вновь применяя шаг индукции, на этот раз при $k = 3$, заключаем, что наше утверждение выполнено и при $n = 3$. Продолжая этот процесс, мы рано или поздно убедимся в справедливости нашего утверждения при любом наперед заданном значении n.

Схема доказательства методом математической индукции допускает различные модификации. Укажем две наиболее часто встречающиеся. Во многих случаях достаточно использовать более слабую форму предположения индукции, а именно — предполагать справедивость нашего утверждения не при всех $n = 1, 2, \ldots, k-1$, а только при $n = k-1$. В частности, именно так обстоит дело во всех доказательствах в основной части пособия, в которых используется метод математической индукции. Кроме того, возможна ситуация, когда требуется доказать некоторое утверждение $\mathcal{S}(n)$ не для всех натуральных n, а только для всех n, начиная с некоторого m (т.е. для $n = m, m+1, m+2, \ldots$). В этом случае база индукции состоит в проверке справедливости нашего утверждения при $n = m$, а предположение индукции — в том, что для всякого k, большего m, наше утверждение справедливо при всех $n = m, m+1, \ldots, k-1$ (или, если этого достаточно для доказательства, только при $n = k-1$). Отметим, что последняя модификация метода математической индукции (при $m = 2$) использовалась при доказательстве теоремы в §34.

Список литературы

Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.

Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988.

Важенин Ю. М. Лекции по аналитической геометрии и высшей алгебре: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрГУ, 1999.

Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.

Жильцов И. Ю., Замятин А. П. Задачи по линейной алгебре: Метод. разраб. для студентов 2 курса экон. факультета. Екатеринбург: УрГУ, 1996.

Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988.

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1986.

Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.

Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.

Овсянников А. Я. Линейная алгебра: Учеб. пособие для экон. специальностей. Екатеринбург: Изд-во Гуманитарного ун-та, 1997.

Овсянников А. Я. Сборник задач по линейной алгебре: Учеб. пособие для экон. специальностей. Екатеринбург: Изд-во Гуманитарного ун-та, 1998.

Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.

Сесекин Н. Ф. Основы линейной алгебры: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.

Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

Чуркин В. А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов: Метод. указ. к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1991.

Предметный указатель

Список обозначений

Множества

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X.

$X \subseteq Y$ — множество X содержится в множестве Y.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$\{x \in X \mid \mathcal{P}(x)\}$ — множество всех элементов x из множества X, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$f : X \longmapsto Y$ — f есть отображение из множества X в множество Y.

Векторная алгебра. Прямые и плоскости

$\vec{0}$ — нуль-вектор.

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ — вектор $\vec{a}$ на плоскости имеет в некотором базисе координаты a_1, a_2.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор $\vec{a}$ в пространстве имеет в некотором базисе координаты a_1, a_2, a_3.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

$\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленны.

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ антинаправленны.

$\vec{a} \perp \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

$|\vec{a}|$ — длина (модуль) вектора $\vec{a}$.

$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a}\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$ — векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — система координат на плоскости, состоящая из начала координат O и базиса $\vec{b}_1, \vec{b}_2$.

$(O;\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — система координат в пространстве, состоящая из начала координат O и базиса $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

$M(x, y)$ — точка M на плоскости имеет в некоторой системе координат координаты x, y.

$M(x, y, z)$ — точка M в пространстве имеет в некоторой системе координат координаты x, y, z.

$|AB|$ — длина отрезка AB.

$d(M, \ell)$ — расстояние от точки M до прямой ℓ.

$d(M, \sigma)$ — расстояние от точки M до плоскости σ.

Матрицы

(a_{ij}) — матрица, состоящая из элементов a_{ij}.

ε_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

E — единичная матрица.

O — нулевая матрица.

$|A|$ или $\det A$ — определитель квадратной матрицы A.

$\operatorname{tr} A$ — след квадратной матрицы A.

A^{-1} — матрица, обратная к A.

M_{ij} — минор квадратной матрицы, полученный при вычеркивании ее i-й строки и j-го столбца.

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы A, стоящего на пересечении ее i-й строки и j-го столбца.

A^* — матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A (если $A = (a_{ij})$, то $A^* = (A_{ij})$).

$A^\top$ — матрица, транспонированная к A.

$r(A)$ — ранг матрицы A.

$A \sim B$ — матрица B может быть получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований.

$(A|B)$ — матрица, полученная приписыванием матрицы B к матрице A справа (предполагается, что A и B имеют одинаковое число строк).

Комплексные числа

i — мнимая единица.

$|x|$ — модуль числа x.

$\arg(x)$ — аргумент числа x.

$\overline{x}$ — число, комплексно сопряженное к числу x.

Векторные пространства

$\mathbb{R}_n$ — пространство строк длины n.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ или E — стандартный базис пространства $\mathbb{R}_n$.

$\mathbf{Pol}_n$ — пространство многочленов степени не выше n от одной переменной.

$\mathbf{Pol}$ — пространство многочленов от одной переменной.

$\mathbf{Mat}_{m,n}$ — пространство матриц порядка $m \times n$.

$\dim V$ — размерность пространства V.

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор $\mathbf{x}$ имеет в некотором базисе координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

X_F — столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе F.

T_{FG} — матрица перехода от базиса F к базису G.

$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ — подпространство, порожденное векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$.

$M_1 + M_2$ — сумма подпространств M_1 и M_2.

$M_1 \oplus M_2$ или $M_1 \dotplus M_2$ — прямая сумма подпространств M_1 и M_2.

$M_1 \cap M_2$ — пересечение подпространств M_1 и M_2.

$\mathbf{x}_0 + M$ — линейное многообразие с вектором сдвига $\mathbf{x}_0$ и направляющим подпространством M.

Линейные операторы

$\mathcal{E}$ — тождественный (единичный) линейный оператор.

$\mathcal{O}$ — нулевой линейный оператор.

A_F — матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе F.

$\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — образ оператора $\mathcal{A}$.

$\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — ядро оператора $\mathcal{A}$.

Евклидовы пространства

$\mathbf{ab}$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$|\mathbf{a}|$ — длина вектора $\mathbf{a}$.

$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — расстояние между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

$\rho(\mathbf{x}, S)$ — расстояние от вектора $\mathbf{x}$ до подпространства или линейного многообразия S.

$(\widehat{\mathbf{x}, S})$ — угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством или линейным многообразием S.

$S^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства S.

$\mathcal{P}_S$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство S.

Квадрики на плоскости

a — большая полуось эллипса или действительная полуось гиперболы.

b — малая полуось эллипса или мнимая полуось гиперболы.

c — половина расстояния между фокусами эллипса или гиперболы.

e — эксцентриситет эллипса или гиперболы.

p — параметр параболы.

Учебное издание

Алексей Петрович Замятин
Андрей Арнольдович Булатов
Борис Муневич Верников

Алгебра и геометрия

Учебное пособие

Редактор Т. А. Сасина
Оригинал-макет — Б. М. Верников
при участии А. А. Булатова

Лицензия ИД №05974 от 03 октября 2001 г.

Подписано в печать 20.12.2001. Формат 60×84 1/16.
Бумага для множительных аппаратов.
Уч.-изд. л. 27,0. Усл.-печ. л. 26,27.
Заказ . Тираж 150 экз.
Уральский государственный университет,
620083, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ “Издательство УрГУ”.
620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.