Казанское математическое общество

В.Б. Живетин

Вводные лекции по курсу ‘‘Высшая математика’’

ГРАФ
Казань 1998

УДК 517
ББК 22.16
Ж 66

Вводные лекции по курсу ''Высшая математика'' /В.Б.Живетин; Казанское математическое общество. Казань, 1998. 46 с.

Пособие написано для широкого круга лиц, изучающих высшую математику и позволяет получить целостное представление об этой дисциплине. Оно может быть использовано преподавателями технических и гуманитарных ВУЗов, а также всеми желающими восстановить знания или самостоятельно начать изучение курса.

Табл. -   Ил. - 21 Библ. -

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. Шерстнев А.Н.
(Казанский государственный университет)
д.ф.-м.н., проф. Муштари Д.Х. (НИИММ им. Н.Г.Чеботарева)

Глава 1. Пределы

1.1. Предел числовой последовательности

Будем рассматривать множества (совокупности) элементов различной природы, состоящие либо из конечного, либо из бесконечного числа элементов (конечные и бесконечные множества). Множество называется упорядоченным, если для каждых двух его элементов определено, какой из них предшествует другому. Например, координаты (x,y,z) какой–либо точки пространства представляют собой упорядоченное конечное множество (абсцисса x предшествует ординате y, которая в свою очередь предшествует аппликате z).

Элемент множества часто называют точкой множества. Это связано с тем, что, например, между множеством действительных чисел x и точками числовой прямой (так называют прямую, на которой выбраны начало отсчета, масштаб и положительное направление) существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу x соответствует точка на прямой с координатой x, и, наоборот, каждой точке на прямой соответствует определенное действительное число – координата этой точки. Множество точек на прямой (множество действительных чисел) обозначают R^1.

Далее, между множеством упорядоченных пар действительных чисел (x,y) и множеством точек на плоскости также существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой паре чисел (x,y) соответствует точка на плоскости с координатами x, y, и, наоборот, каждой точке плоскости соответствует определенная пара чисел (x,y) – ее координаты. Множество точек на плоскости (множество упорядоченных пар действительных чисел) обозначается R^2.

Наконец, существует взаимно однозначное соответствие и между множеством упорядоченных троек действительных чисел (x,y,z) и множеством точек в пространстве, т. е. каждой тройке чисел (x,y,z) соответствует точка в пространстве с координатами x, y, z и, наоборот, каждой точке пространства соответствует тройка чисел (x,y,z) – ее координаты. Множество точек в пространстве (множество упорядоченных троек действительных чисел) обозначают R^3.

Обобщая сказанное, можно ввести понятие n-мерного пространства R^n, под которым понимается множество упорядоченных наборов действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, именуемых точками n-мерного пространства. При этом множество действительных чисел (множество точек прямой) будет одномерным пространством, множество упорядоченных пар действительных чисел (множество точек на плоскости) – двумерным пространством, множество упорядоченных троек действительных чисел (множество точек физического пространства) – трехмерным пространством.

В математике, физике, технике различают величины двух родов: скалярные, характеризующиеся только численным значением (температура, плотность и т. п.), и векторные, характеризующиеся помимо численного значения и направлением (скорость, сила и т. п.). Приняв некоторую точку 0 за изображение нулевого вектора (за начало отсчета), векторную величину геометрически изображают в виде направленного отрезка (вектора) с началом в точке 0, длина которого соответствует численному значению векторной величины, а направление совпадает с направлением векторной величины. Положение вектора на числовой прямой характеризуется одним действительным числом x – координатой его конца; на плоскости – двумя числами (x,y) – проекциями вектора на координатные оси или, что то же, координатами его конца; в физическом пространстве – тремя координатами (x,y,z) – также проекциями вектора на координатные оси или координатами его конца. Соответствие между множеством действительных чисел и векторами на прямой взаимно однозначное, как и между множеством упорядоченных пар действительных чисел (x,y) и векторами на плоскости, или между множеством упорядоченных троек действительных троек (x,y,z) и векторами в физическом пространстве. Поэтому можно рассматривать множество действительных чисел x (пространство R^1) не только как множество точек прямой, но и как множество векторов на прямой (с концами в точках с координатой x); множество пар действительных чисел (x,y) (пространство R^2) не только как множество точек на плоскости, но и как множество векторов на плоскости с концами в точках с координатами x, y, или с проекциями на координатные оси, равными x, y; множество троек действительных чисел (x,y,z) (пространство R^3) не только как множество точек в физическом пространстве, но и как множество векторов в этом пространстве с концами в точках с координатами x, y, z, или с проекциями на координатные оси, равными x, y, z.

Обобщая сказанное, можно рассматривать множество упорядоченных наборов n действительных чисел $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (пространство R^n) не только как множество точек n-мерного пространства, но и как множество векторов в этом пространстве (с концами в точках с координатами $x_1, \dots, x_n$ или, что то же, с проекциями на координатные оси, равными $x_1, \dots, x_n$).

Расстояние между точками x, y на прямой, между точками (x_1,y_1), (x_2,y_2) на плоскости и между точками (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) в трехмерном пространстве определяется формулами

$$\rho_1 = |x-y| = \sqrt{(x-y)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$
$$\rho_3 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

причем видно, что первые две формулы являются частным случаем третьей. Обобщая формулу (1) на n-мерный случай, определим расстояние между точками $x=(x_1, \dots, x_n)$, $y=(y_1, \dots, y_n)$ n-мерного пространства по формуле

$$\rho_n(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\ . \tag{2}$$

Множество, для элементов которого введено понятие расстояния (введена метрика), называют метрическим пространством. Метрику (2) называют евклидовой метрикой. Пространство R^n с евклидовой метрикой называют евклидовым пространством.

В формуле (2) $\rho(x,y)$ обладает следующими тремя **свойствами**:

1) симметрия $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;
2) положительность $\rho(x,y)\geq 0$;
3) неравенство треугольника (каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других сторон) $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность чисел $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. Числа x_1, x_2 и т. д. называют членами или элементами последовательности. Элемент x_n, определяющий по формуле $x_n= f(n)$ элементы последовательности с любым номером, называют общим членом последовательности. Говоря о последовательности, обычно приводят только ее общий член x_n, поскольку он однозначно определяет члены последовательности с любыми номерами (например, последовательность $x_n=1/n$ имеет вид 1, 1/2, 1/3, ... , 1/n, ...).

Число x называют пределом последовательности x_n, если члены последовательности с достаточно большими номерами по мере роста их номера n неограниченно приближаются к числу x. Иными словами, при наличии у последовательности x_n предела x все члены последовательности, начиная с некоторого достаточно большого номера N, попадают в сколь угодно малую окрестность предельной точки x (попадают на отрезок произвольно малого радиуса ε с центром в точке x). Следовательно, число x называют пределом последовательности x_n, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ n\geq N \Rightarrow \rho_1(x,x_n)<\varepsilon, \tag{3}$$

где $\rho_1(x,x_n)=|x-x_n|$ (см. первую формулу (1)). Очевидно, номер N, начиная с которого выполняется неравенство $\rho_1(x,x_n)<\varepsilon$, вообще, зависит от величины ε, т. е. $N=N(\varepsilon)$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся, не имеющую предела – расходящейся.

Если последовательность x_n имеет предел x, то пишут

$$x_n \to x \text{ при } n\to\infty \quad \text{или короче} \quad x_n \to x$$

или

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{или короче} \quad \lim x_n = x.$$

Отметим два очевидных **свойства последовательностей**. Если $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, то $\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$, т. е. предел суммы последовательностей равен сумме их пределов. Действительно, при $n\to\infty$ элементы x_n, y_n неограниченно приближаются к своим пределам x, y, и, следовательно, сумма x_n+y_n неограниченно приближается к числу $x+y$, а это означает, что

$$\lim(x_n + y_n) = x + y, \quad \text{т. е.} \quad \lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n.$$

Далее, если $\lim x_n=x$ и C – постоянная, то $\lim Cx_n=C\lim x_n$, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак предела (вносить под знак предела). Действительно, при

$n \to \infty$ элементы x_n неограниченно приближаются к своему пределу x и, следовательно, элементы Cx_n неограниченно приближаются к числу Cx, а это и означает, что $\lim Cx_n = CX$, т. е. $\lim Cx_n = C \lim x_n$.

В качестве примера рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = n/(n+1)$, имеющую такой развернутый вид

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots\ .$$

При n=99 получаем $x_n = 99/100 = 0{,}99$ – число, близкое к 1, при n=999 получаем $x_n = 999/1000 = 0{,}999$ – число, еще более близкое к 1, и т. д., т. е. члены последовательности с достаточно большим номером неограниченно приближаются к числу x=1, являющемуся, следовательно, пределом последовательности $x_n = n/(n+1)$. Дкажем это, опираясь на определение (3). Очевидно, нужно доказать, что неравенство (3), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

будет выполняться, начиная с некоторого N при любом сколь угодно малом заданном $\varepsilon > 0$. Так как $1 > n/(n+1)$, $1 - n/(n+1) > 0$, то знак модуля можно отбросить и последовательно получить

$$1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon, \quad n + 1 - n - (n+1)\,\varepsilon > 0, \quad 1 - (n+1)\varepsilon > 0, \quad n + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Так как n – натуральное число ($n \geq 1$), то наименьшее его значение N, при котором будет выполнятся равенство

$$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

очевидно равно (рассматривается малое ε, т. е. $\varepsilon << 1$, $1/\varepsilon >> 1$)

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

где $[1/\varepsilon]$ – целая часть $1/\varepsilon$. Итак, при

$$n \geq N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

а это и означает (см. определение (3)), что число x=1 есть предел последовательности $x_n = n/(n+1)$.

Рассмотрим теперь последовательность (x_{11}, x_{21}, x_{31}), ... , (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) троек чисел или, что то же, последовательность точек $M_n(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$ в трехмерном пространстве (в двумерном пространстве, т. е. на плоскости, рассуждения аналогичны). Точку $M(x_1,x_2,x_3)$ называют пределом последовательности точек $M_n(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$, если точки M_n с достаточно большими номерами по мере роста их номера n неограниченно приближаются к точке M. Иными словами, при наличии у последовательности точек M_n предельной точки M все точки M_n, начиная с некоторого достаточно большого номера N, попадают в сколь угодно малую окрестность предельной точки M (попадают в шар произвольно малого радиуса ε с центром в точке M). Следовательно, точку $M(x_1, x_2, x_3)$ называют пределом последовательности точек $M_n(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$, если для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ n\geq N\ \Rightarrow\ \rho_3(M,M_1)<\varepsilon, \tag{4}$$

где расстояние (метрика) ρ_3 определяется последней формулой (1), т. е.

$$\rho_3(M,M_n)=\sqrt{(x_1-x_{1n})^2+(x_2-x_{2n})^2+(x_3-x_{3n})^2}\ .$$

Теперь нетрудно дать определение предела последовательности точек $M_n(x_{1n}, x_{2n}, ... , x_{kn})$ в k-мерном пространстве. Предварительно, по аналогии с трехмерным случаем, совокупность точек M^*, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_k(M, M^*) < \varepsilon,$$

где точки M, M^* имеют координаты $M(x_1,x_2,...,x_k)$, $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$, и расстояние

$$\rho_k(M,M^*)=\sqrt{(x_1-x_1^*)^2+(x_2-x_2^*)^2+\cdots+(x_k-x_k^*)^2}\ , \tag{5}$$

назовем k-мерным шаром с центром в точке M радиуса ε, а совокупность точек M^*, удовлетворяющих равенству $\rho_k(M,M^*)=\varepsilon$, – k-мерной сферой с центром в точке M того же радиуса ε. Используя понятие k-мерного шара предел последовательности точек $M_n(x_{1n}, ... , x_{kn})$ в k–мерном пространстве определится так: точку $M(x_1, ... , x_k)$ называют пределом последовательности точек $M_n(x_{1n}, ... , x_{kn})$, если точки M_n с достаточно большими номерами по мере роста их номера n неограниченно приближаются к точке M, т. е., если начиная с некоторого достаточно большого номера N, все точки M_n попадают в сколь угодно малую окрестность точки M (попадают в шар произвольно малого радиуса ε с центром в точке M). Следовательно, точку $M(x_1, ... , x_k)$ называют пределом последовательности точек $M_n(x_{1n}, ... , x_{kn})$, если для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\ n\geq N\ \Rightarrow\ \rho_k(M,M_n)>\varepsilon \tag{6}$$

1.2. Предел функциональной последовательности

Как известно, функция одного аргумента $y=f(x)$ устанавливает соответствие: числу $x\to$ число y.

Это соответствие обычно задается или аналитически (формулой), или таблицей, или графиком. Множество значений аргумента x, на которых функция рассматривается, образуют область определения функции, а множество соответствующих значений y самой функции образует область ее значений. Можно сказать, что функция одного аргумента y=f(x) отображает числа x из области своего определения на соответствующие числа y из области своих значений. Указанное отображение (соответствие) принято кратко записывать так:

$$f\ :\ R^1 \to R^1,$$

что означает: f – функция, отображающая элементы (точки) пространства R^1 на элементы (точки) этого же пространства. На практике часто приходится иметь дело с функциями многих переменных (аргументов) $y=f(x_1, \dots , x_n)$, устанавливающих соответствие между упорядоченным набором чисел $(x_1, \dots , x_n)$ и числом y, т. е. устанавливающих отображение (соответствие)

$$\text{вектору}\ (x_1, \dots , x_n) \to\ \text{число}\ y.$$

Функцию такого рода записывают в виде

$$f\ :\ R^n \to R^1,$$

что означает: f – функция, отображающая элементы (точки) пространства R^n на элементы (точки) пространства $R^{n\,1}$.

Функцию многих аргументов, подобно функции одного аргумента, можно записывать в виде

$$y = f(x),$$

но при этом обязательно следует указать, что

$$x = (x_1, \dots , x_n)\quad \text{или}\quad x\in R^n,\ n\geq 2.$$

Функцию $y=f(x)$, $x\in R^n$, $n\geq 2$ часто называют функцией векторного аргумента, а функцию $y=f(x)$, $x\in R^1$ – функцией скалярного аргумента. Если функцию многих аргументов записывать в виде $y=f(x)$, $x\in R^n$, $n\geq 2$, то сохраняет силу данное выше определение области определения и области значений функций. Добавим, что если область определения рассматриваемой функции $y=f(x)$ скалярного или векторного аргумента не указана, то под ней понимают совокупность всех значений аргумента x, при которых функция имеет смысл (существует).

Рассмотрим в заключение этого пункта последовательность функций $f_n(x)$, $x\in R^1$, определенных на интервале (a,b). Если при каждом фиксированном $x\in (a,b)$ числовая последовательность $f_n(x)$ сходится, то говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится на (a,b).

Пусть последовательность $f_n(x)$ сходится на (a,b). Тогда каждой фиксированной точке $x\in (a,b)$ соответствует некоторое число y, являющееся пределом числовой последовательности $f_n(x)$, т. е. устанавливается соответствие: числу $x \to$ число y, т. е. для сходящейся на (a,b) последовательности $f_n(x)$ существует функция $y=f(x)$, которая при каждом фиксированном $x\in (a,b)$ дает значение предела числовой последовательности $f_n(x)$. Упомянутую функцию $f(x)$ называют пределом функциональной последовательности $f_n(x)$ на интервале (a,b).

Поскольку функция $f(x)$ при любом фиксированном $x\in(a,b)$ есть предел числовой последовательности $f_n(x)$, то опираясь на определение (3) предела числовой последовательности, можно дать такое определение предела функциональной последовательности: функцию $f(x)$, определенную на (a,b), называют пределом последовательности $f_n(x)$, состоящей из функций, также определенных на (a,b), если для

$$\forall\varepsilon>0 \text{ и } \forall x\in(a,b)\ \exists N:\ n\geq N \Rightarrow |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad (6')$$

В общем случае номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ зависит от ε и от x, т. е. $N=N(\varepsilon,x)$. Может случиться, однако, что номер N один и тот же для всех $x\in(a,b)$, т. е. $N=N(\varepsilon)$. В этом случае последовательность $f_n(x)$ называют равномерно сходящейся на (a,b). При наличии у последовательности $f_n(x)$ предела $f(x)$ пишут

$$f_n(x)\to f(x) \text{ при } n\to\infty \quad \text{или короче} \quad f_n(x)\to f(x)$$

или

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \quad \text{или короче} \quad \lim f_n(x)=f(x)\,.$$

Воспользуемся вышеизложенным материалом и введем определение предела функции, при этом будем рассматривать общий случай функции $f(x)$ с векторным или скалярным аргументом, т. е. $x\in R^n$, $n\geq1$. Обозначим область определения функции $f(x)$ через Df, и пусть точка $x_0\in Df$. Число f_0 называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если значения функции $f(x)$ (числа $f(x)$) неограниченно приближаются к числу f_0 при аргументе (точке) x, неограниченно приближающемся к точке x_0. Иначе, наличие у функции $f(x)$ предела f_0 в точке x_0 означает, что значения функции (числа $f(x)$) попадают в сколь угодно малую окрестность числа f_0 (попадают на отрезок сколь угодно малого радиуса ε с центром в точке f_0), если только аргумент x попадает в достаточно малую окрестность точки x_0 (попадает в шар достаточно малого радиуса δ с центром в точке x_0). Следовательно, число f_0 называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \rho(x_0,x)<\delta \Rightarrow |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad (7)$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $x_0=(x_{01},\ldots,x_{0n})$,

$$\rho_n=\sqrt{(x_{01}-x_1)^2+\cdots+(x_{0n}-x_n)^2}\,. \qquad (8)$$

В одномерном случае, когда $x\in R^1$, $x_0\in R^1$, неравенство $\rho_1(x_0,x)<\delta$ можно переписать в эквивалентном виде $|x_0-x|<\delta$.

Если у функции $f(x)$ существует предел f_0 в точке x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f_0 \quad \text{или} \quad f(x)\to f_0 \text{ при } x\to x_0.$$

Заметим в заключение этого пункта, что если для функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $x\in R^n$, $n\geq1$ известно, что

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_{1_0}, \qquad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_{2_0},$$

то

$$\lim_{x\to x_0} [f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) = f_{1_0} + f_{2_0}, \tag{9}$$

т. е. предел суммы равен сумме пределов. Действительно, при $x \to x_0$ значения функции $f_1(x)$ неограниченно приближается к числу f_{1_0}, а значение функции $f_2(x)$ – к числу f_{2_0} и, следовательно, значения суммы $f_1(x)+f_2(x)$ при $x \to x_0$ неограниченно приближаются к числу $f_{1_0} + f_{2_0}$, а именно этот факт и выражает равенство (9).

Кроме того, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$, то при C=const

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C\lim_{x\to x_0} f(x) = Cf_0, \tag{10}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак предела. Действительно, если значение $f(x)$ при $x \to x_0$ неограниченно приближается к числу f_0, то значения произведения $Cf(x)$ при $x \to x_0$ неограниченно приближается к числу Cf_0, а именно этот факт и выражает равенство (10).

1.3. Непрерывность функции

Обратимся к определению непрерывности функции. Исходя из геометрических представлений, естественно назвать функцию $f: R^1 \to R^1$ непрерывной, если ее график имеет вид непрерывной плавной кривой (рис. 1), без выброса точек (рис. 2, 3) или скачкообразных изменений (рис. 4, 5).

Эти простые геометрические представления приводят к мысли, что функцию $f: R^1 \to R^1$ следует считать непрерывной в некоторой точке x_0:

1) если она определена в этой точке, так как тогда существует точка $(x_0, f(x_0))$, на графике функции, без чего в этом месте неизбежен разрыв (рис. 2 и 3, где $f(x_0)$ не существует);

2) если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т. к. тогда при приближении к точке x_0 с любой стороны график функции будет сколь угодно близко (непрерывно) приближаться к одному и тому же значению $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (см. рис. 1, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и рис. 3, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует);

3) если предел функции в точке x_0 равен ее частному значению в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{11}$$

так как иначе при движении вдоль кривой $y=f(x)$ к точке с абсциссой x_0 в последний момент кривая может сделать скачок (нарушится непрерывность), как на рис. 5, где скачок равен разности ординат $f(x_0)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Равенство (11) и принимают за определение непрерывности в точке функции одного или нескольких аргументов, молчаливо предполагая, что предел функции и ее частное значение в рассматриваемой точке x_0 существуют. Используя определение предела (7) и полагая в нем $f_0=f(x_0)$, можно определение (11) непрерывности функции в точке сформулировать несколько иначе: функция $f(x)$, $x\in R^n$, $n\geq 1$ непрерывна в точке x_0, если для

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \rho(x_0,x)<\delta \ \Rightarrow\ |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon. \qquad (12)$$

Определение непрерывности (12) вполне ($\Leftrightarrow$)эквивалентно определению (11). Вместе с тем из него следует и такое определение: функция $f(x)$, $x\in R^n$, $n\geq 1$ непрерывна в точке x_0, если достаточно малому приращению аргумента ($\rho(x_0,x)<\delta$) соответствует сколь угодно малое приращение функции ($|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$). Функцию $f(x)$, $x\in R^n$, $n\geq 1$, непрерывную в каждой точке некоторого множества $D\subset R^n$ называют непрерывной на этом множестве D.

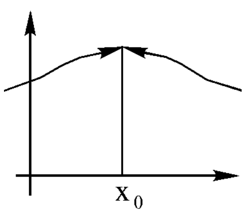

Рис. 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

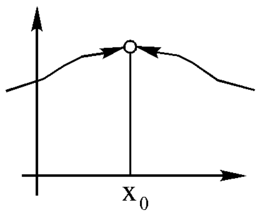

Рис. 2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует

$f(x_0)$ не существует

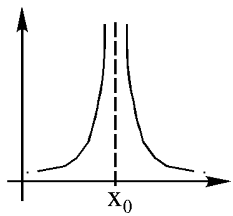

Рис. 3

$f(x_0)$ не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует

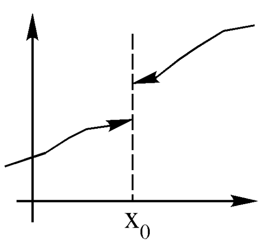

Рис. 4

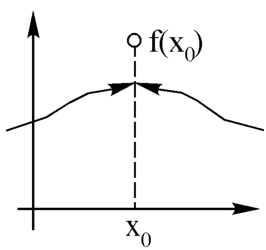

Рис. 5

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, хотя

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $f(x_0)$ существуют

Глава 2. Производные

2.1. Понятие производной

При исследовании любых функциональных зависимостей $f\colon R^n \to R^1$ особый интерес представляет определение скорости изменения функции. Начнем с одномерного случая, когда $f\colon R^1 \to R^1$. Известно, что если материальная точка M движется по закону $s=f(t)$, где s – путь, t – время, то величину

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

называют скоростью движения точки M на интервале времени $(t, t+\Delta t)$, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

– скорость точки M в момент t.

Аналогично, если мы имеем дело с функциональной зависимостью $y=f(x)$, $x \in R^1$, то, вне зависимости от физического смысла переменных x, y, величину

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называют средней скоростью изменения функции $f(x)$ на интервале $(x, x+\Delta x)$, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{13}$$

– скоростью изменения функции $f(x)$ в точке x. В курсе математического анализа предел (13) называют также производной функции $y=f(x)$, $x \in R^1$ и обозначают y' или $f'(x)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \text{èëè, ÷òî òî æå,} \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Таким образом, если некоторый процесс описывается функциональной зависимостью $y=f(x)$, $x \in R^1$, то скорость изменения этого процесса определяется производной (14).

Воспользуемся (14) и введем $f'=A$, а также $A\cdot\Delta x=dy$. Последнее соотношение называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x. Приращение аргумента Δx обозначают через dx и называют дифференциалом независимого переменного. Тогда можно записать

$$dy = f'(x)dx$$

или

$$f'(x) = dy/dx,$$

т. е. производная равна отношению дифференциалов dy и dx.

Примеры.

1. Вычислить производную постоянной, т. е. производную функции $y=C$, $C=\text{const}$. Эта функция характеризуется тем, что при любом значении аргумента x она принимает одно и то же значение C. Следовательно, $y(x)=C$, $y(x+\Delta x)=C$, $\Delta y=0$ при любом $\Delta x \neq 0$, $\Delta y/\Delta x=0$ при $\forall \Delta x \neq 0$, откуда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

поскольку предел постоянной есть она сама. Итак,

$$C' = 0.$$

2. Вычислить производную степенной функции $y=x^3$.

Имеем

$$y(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3,\quad \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3,$$

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + (3x + x^2)\Delta x.$$

Отсюда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2,$$

т. е.

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Замечание. Аналогично легко получить производные: $(x')=1$, $(x^2)'=2x$.

Сравнение производных функций x, x^2, x^3 показывает, что по-видимому производная функции x^n, где n — любое натуральное, имеет вид

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Справедливость этой формулы будет в дальнейшем строго установлена. Более того будет доказано, что эта формула справедлива при любом действительном n.

Производной функции $y=f(x)$, $x\in R^1$ можно придать наглядный геометрический смысл. Из рис. 6 видно, что

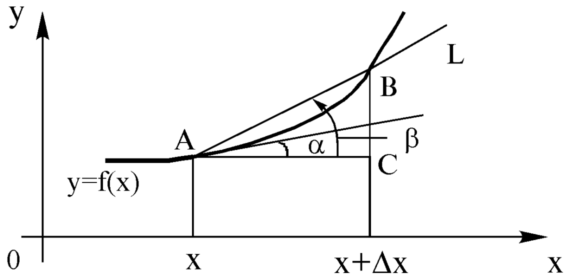

Рис. 6

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg}\beta,$$

где β – угол наклона секущей ABL к оси x. При $\Delta x \to 0$ точка B вдоль графика функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к точке A, секущая ABL поворачивается и при существовании предела (14) стремиться занять некоторое предельное положение, характеризуемое следующим тангенсом угла наклона (см. рис. 6):

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{B \to A} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Предельное значение секущей ABL при $B \to A$ вдоль кривой $y=f(x)$, называют касательной к кривой $y=f(x)$ в точке A. Следовательно, производная $y'(x)$ функции $y=f(x)$ в некоторой точке x определяет тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке $(x, f(x))$.

2.2. Частная производная функции

Дадим понятие частной производной для случая функции $f: R^n \to R^1$, т. е. для функции многих переменных $u=f(x_1, \dots, x_n)$. Фиксируя аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n$, придадим какому–либо одному аргументу x_i приращение Δx_i и по аналогии с функцией одной переменной составим отношение

$$\frac{\Delta_i u}{\Delta x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Это отношение можно рассматривать как среднюю скорость изменения функции f по переменной x_i на интервале (x_i, x_{i+1}) при фиксированных остальных переменных. Переходя в полученном отношении к пределу при $\Delta x_i \to 0$ и обозначая этот предел $\partial u/\partial x_i$ или $\partial f/\partial x_i$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i u}{\Delta x_i}$$

или, что то же,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{\Delta x_i}. \tag{15}$$

Предельную величину (15) называют частной производной функции $u=f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i. Она определяет скорость изменения функции f по переменной x_i в фиксированной точке $(x_1, \ldots, x_n)$. Существенно, что при вычислении частной производной изменяется лишь один из аргументов, остальные сохраняют постоянное (фиксированное) значение.

Поскольку предел суммы равен сумме пределов и постоянной множитель можно выносить за знак предела, то и производная суммы равна сумме производных и постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е.

$$(f_1+f_2)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x), \quad (Cf)'(x) = Cf'(x),$$

и аналогично для функций многих переменных.

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial(Cu)}{\partial x_i} = C\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

2.3. Производная высших порядков

Производная функции $f : R^n \to R^1$ является также функцией, т. е. $f' : R^n \to R^1$. Может возникнуть необходимость в определении ускорения функции, т. е. в определении скорости изменения производной $f'(x)$ и, следовательно, в вычислении производной от производной $(f')'(x)$. Используя определение (14) и вводя для производной $(f')'(x)$ обозначение $f''(x)$, получаем

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \tag{16}$$

Производную $f''(x)$, определяемую равенством (16), называют производной второго порядка или второй производной, а исходную производную $f'(x)$ – производной первого порядка или первой производной.

Аналогично можно ввести в рассмотрение производную третьего порядка

$$f'''(x) = (f'')'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$$

и вообще производную k-го порядка

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x+\Delta x) - f^{(k-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Производные порядка выше первого называют производными высшего порядка или старшими производными.

Пример: Известно, что производная степенной функции x^n вычисляется по правилу $(x^n)'=nx^{n-1}$. Поэтому

$$(x^n)'' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2},$$

$$(x^n)''' = (nx^{n-1})'' = (n(n-1)x^{n-2})' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

и вообще

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(k-1)]x^{n-k}.$$

Производные высшего порядка можно ввести и для функции многих аргументов. Предположим, что у функции $u=f(x_1, \ldots, x_n)$ вычислена производная $\partial f/\partial x_i$. Эта производная также является функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$, и мы можем вычислить ее производную, например, по переменной x_k. В результате получим вторую производную функции f по переменным x_i, x_k, которая обозначается так

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Можно было бы найти производную функции $\partial f/\partial x_i$ по той же переменной x_i, и тогда мы получили бы вторую производную функции f по одному и тому же аргументу: $\partial^2 f/\partial x_i^2$. Подобный процесс дифференцирования можно продолжить и получать производные функции многих переменных более высокого порядка.

Пример. Для функции $u=xy^2$ найти вторые производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Очевидно:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x.$$

Глава 3. Интегралы

3.1. Определенные интегралы

Поставим задачу: вычислить площадь S под графиком непрерывной функции $y=f(x)$, $y>0$ на некотором участке [a,b] (рис. 7). Эта задача приведет нас к новому понятию определенного интеграла функции f(x). Попытаемся вначале получить приближенное выражение для площади S криволинейной трапеции aABb , т. е.

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (17)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Будем теперь неограниченно увеличивать число разбиений отрезка [a,b] на части и притом так, чтобы длины $|x_i - x_{i-1}|$ всех частичных сегментов стремились к нулю (длины всех частичных сегментов будут стремиться к нулю, если будет стремиться к нулю последовательность λ_n наибольших длин частичных сегментов, что и предполагается в дальнейшем). Каждому разбиению соответствует своя сумма S_n (и свой наибольший сегмент λ_n), и мы получим, следовательно, последовательность сумм S_n вида (17) (и последовательность наибольших сегментов λ_n). Если при неограниченном увеличении числа разбиений, таком, что последовательность $\lambda_n \to 0$, предел последовательности сумм S_n существует (одно и тоже число вне зависимости от выбора точек x_i, ξ_i), то его принимают за точное значение площади криволинейной трапеции $aABb$. Таким образом, по определению

$$S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (18)$$

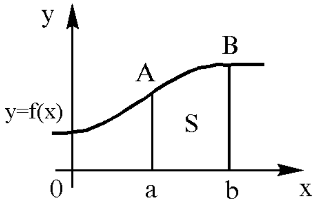

Рис. 7

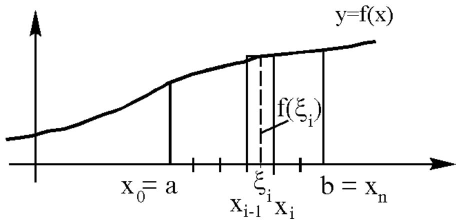

Рис. 8

Рассмотрим другую задачу. Пусть требуется вычислить массу M прямолинейного тонкого цилиндрического стержня длиной ℓ и площадью поперечного сечения C=const (см. рис. 9), плотность ρ материала которого переменна по его длине и является известной непрерывной функцией длины: $\rho = F(x)$.

Для вычисления массы стержня применим прием, аналогичный использованному для вычисления площади криволинейной трапеции. Разобьем сегмент $[0,\ell]$ точками деления $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на n малых частей и выберем на каждом частичном интервале произвольную точку ξ_i. Массу участка стержня на каждом частичном интервале (x_{i-1}, x_i), где плотность ρ мало изменяется, можно приближенно выразить произведением $f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и тогда масса M всего стержня приближенно выразится суммой, аналогичной (17),

$$M \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)C\Delta x_i,$$

или

$$M \approx M_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{17′}$$

где f(x)=CF(x). Будем, как и выше, неограниченно увеличивать число разбиений стержня $[0,\ell]$ на части и притом так, чтобы $\lambda_n \to 0$. Каждому разбиению соответствует своя сумма M_n (свое приближенное значение массы M), и мы вновь получим последовательность сумм M_n вида (17′) – (17). Если при неограниченном увеличении числа разбиений ($\lambda_n \to 0$) предел последовательности сумм M_n существует в указанном выше смысле, то его принимают за точное значение массы M стержня, и мы приходим к выражению, аналогичному (18),

$$M = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{18′}$$

Как видим, задачи различной физической природы приводят к вычислению предела сумм вида (18). В математическом анализе предел указанных сумм получил название определенного интеграла. Процесс суммирования, итогом которого является определенный интеграл, в общем случае, т. е. отвлекаясь от физического смысла суммируемой функции, строится так (рис. 10). Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная функция f(x). Разобьем отрезок [a,b] точками деления $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на n малых частей, на каждом частичном интервале произвольно

Рис. 9

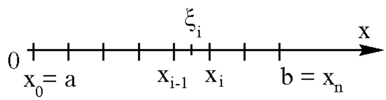

Рис. 10

выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму произведений

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \tag{19}$$

называемую интегральной суммой. Будем теперь неограниченно увеличивать число разбиений отрезка [a,b] на части и притом так, чтобы $\lambda_n \to 0$.

Если существует предел получаемой при этом последовательности интегральных сумм, т. е. существует

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то его называют определенным интегралом функции f(x) на отрезке [a,b] и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (20)$$

Можно доказать, что если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то определенный интеграл (20) существует, т. е. предел (20) – одно и то же конечное число при любом выборе точек x_i, ξ_i.

Из определения (20) легко выводятся **основные свойства определенного интеграла.**

1) Интеграл суммы равен сумме интегралов. Действительно,

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + \varphi(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda_n \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i \right] = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i$$

т. е.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx\,.$$

При доказательстве было использовано то обстоятельство (см. стр. 6), что предел суммы последовательностей равен сумме их пределов. В данном случае это последовательности интегральных сумм

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{и} \quad \tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

2) Постоянный множитель С можно выносить за знак интеграла. Действительно,

$$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_n \to 0} C\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

т. е.

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

При доказательстве было использовано то обстоятельство (см. стр. 6), что постоянный множитель можно выносить за знак предела последовательности (в данном случае последовательности $CS_n = C\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$).

3) При изменении направления интегрирования интеграл меняет знак на обратный. Действительно,

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) = -\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\int_a^b f(x)dx\,.$$

4) Интеграл с одинаковым верхним и нижним пределом равен 0, т. е.

$$\int_q^q f(x)dx = 0,$$

так как в этом случае в сумме (20) $\Delta x_i = 0$.

5) Путь интегрирования можно разбивать на части, т. е. (см. рис. 11)

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

Действительно, предел (20) не зависит от выбора точек x_i (от способа разбиения интервала интегрирования на части), и следовательно, можно осуществлять разбиение отрезка [a,b] так, что точка C останется неподвижной. При этом интегральная сумма (20) разобьется на две независимые (см. рис. 11)

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

и так как предел суммы равен сумме пределов, то

$$\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Отсюда, опираясь на определение (20) определенного интеграла, получаем требуемое равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

3.2. Теорема о среднем

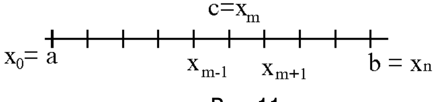

Рис. 11

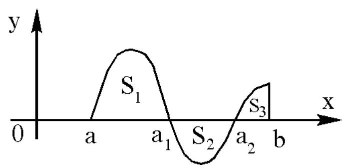

Рис. 12

Последнее свойство определенного интеграла проясняет его геометрический смысл при знакопеременной f(x). Действительно, мы уже знаем, что на интервалах, где $f(x) \geq 0$, значение определенного интеграла равно площади криволинейной трапеции, расположенной над осью x (рис. 12 площади S_1 и S_3).

На интервалах, где $f(x) \leq 0$ значение определенного интеграла, очевидно, равно со знаком минус площади криволинейной трапеции, расположенной под осью x. Действительно, для подсчета площади S_2 на рис. 12 следует в формулах (17) – (18) заменить $f(\xi_i)$ на $-f(\xi_i)$, так как площадь величина неотрицательная, т. е.

$$S_2 = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} [-f(\xi_i)]\Delta x_i = \int_{a_1}^{a_2} [-f(x)]dx = -\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx,$$

и, следовательно,

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx = -S_2 .$$

В общем случае, разбивая путь интегрирования на части $[0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, ... , $[a_{n-1},b]$, на каждой из которых f(x) знакопостоянна, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx,$$

откуда следует, что значение определенного интеграла на всем пути интегрирования численно равно алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций (с учетом их знака), расположенных над и под осью x. Обозначим эту площадь через S, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = S.$$

Очевидно существует прямоугольник с основанием (b–a) и некоторой высотой h такой, что его площадь (рис. 13, прямоугольник aA_1B_1b)

$$(b-a)h = S$$

(если S<0, то высота h<0, т. е. прямоугольник расположен под осью x). Из сравнения последних формул следует, что

$$h = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx .$$

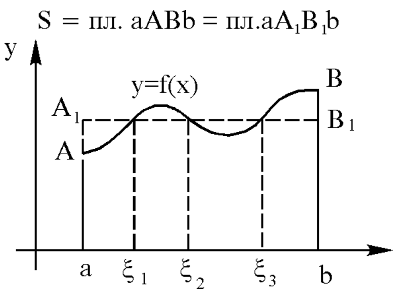

Рис. 13

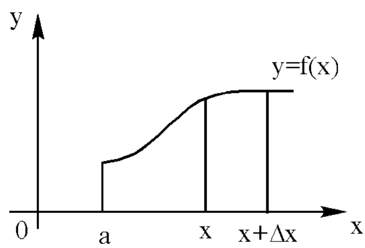

Рис. 14

Геометрические соображения подсказывают (см. рис. 13), что при непрерывной на [a,b] функции f(x) должна существовать по крайней мере одна точка $\xi \in [a,b]$, в которой $f(\xi)=h$ (в дальнейшем этот факт будет достаточно подробно обоснован; на рис. 13 таких точек три: ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Полагая в последнем равенстве $h=f(\xi)$, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)\ . \tag{21}$$

Точное положение точки ξ обычно неизвестно. Известно только, что $\xi \in [a,b]$. Подчеркнем, что формула (21) верна для непрерывных на замкнутом интервале $[a,b]$ функций. Она показывает, что значение определенного интеграла от непрерывной функции равно произведению длины интервала интегрирования на значение подинтегральной функции в некоторой “средней” точке этого интеграла. Формулу (21) называют теоремой о среднем.

3.3. Неопределенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции

$$\int_a^x f(t)dt.$$

Здесь переменный верхний предел и переменная интегрирования обозначены разными буквами, поскольку природа их различна. Верхний предел x переменный в том смысле, что он может принимать различные значения. Переменная же интегрирования t переменна в другом смысле: при каждом значении верхнего предела x она пробегает все значения, лежащие между нижним a и верхним x пределами интегрирования (см. определение (20) интеграла).

Интеграл с переменным верхним пределом есть функция своего верхнего предела (см. рис. 14). Обозначим эту функцию $F(x)$, т. е.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ . \tag{22}$$

Вычислим производную функции $F(x)$. Имеем

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt, \quad F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\ ,$$

$$\Delta F = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

и по теореме о среднем

$$\Delta F = \Delta x f(\xi),$$

где $\xi\in[x,x+\Delta x]$. Следовательно,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(\xi), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Так как $\xi\in[x,x+\Delta x]$, то при $\Delta x\to 0$ точка $\xi\to x$, а потому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)$. В силу непрерывности функции f(x) (см. определение (11))

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x),$$

и мы получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=f(x),$$

или

$$F'(x)=f(x),$$

или

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Как видим, производная интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции равна его подинтегральной функции. Функцию F(x), производная которой равна f(x) ($F'(x)=f(x)$), называют первообразной функции f(x). Следовательно, интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная своей подинтегральной функции. Легко видеть, что если F(x) – первообразная f(x), то F(x)+C тоже. Действительно, $[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$. Нетрудно убедиться, что формулой F(x)+C, где F(x) – некоторая первообразная функции f(x) исчерпываются все первообразные функции f(x). Действительно, пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ первообразные функции f(x), т. е. $F_1'(x)=f(x)$, $F_2'(x)=f(x)$ на (a,b). Тогда $F_2'(x)-F_1'(x)=0$, $[F_2(x)-F_1(x)]'=0$ на (a,b). Так как скорость изменения разности F_2-F_1 равна нулю при всех $x\in(a,b)$, то $F_2-F_1=C=\text{const}$, $F_2=F_1+C$ на (a,b), что и требовалось доказать.

Совокупность всех первообразных функции f(x) называют ее неопределенным интегралом и обозначают

$$\int f(x)dx.$$

Так как все первообразные функции f(x) определяются формулой F(x)+C, где F(x) – какая–либо первообразная, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Пусть найдена какая-либо первообразная F(x) непрерывной функции f(x). Все первообразные отличаются на постоянную, а потому интеграл с переменным верхним пределом от функции f(x), являющейся первообразной этой функции, может отличаться от функции F(x) лишь на постоянную C, т. е.

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C .$$

При $x = a$ отсюда получаем

$$0 = F(a) + C, \quad C = -F(a)$$

и, следовательно,

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a) .$$

Полагая теперь x=b, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad . \qquad (23)$$

Формула (23) носит название формулы Ньютона-Лейбница. Она показывает, что для вычисления определенного интеграла нужно найти какую-либо первообразную подинтегральной функции и вычислить разность значений при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Так как все первообразные содержатся в неопределенном интеграле (и отличаются на постоянную), то формулу (23) можно переписать так

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b , \qquad (23')$$

т. е. для вычисления определенного интеграла нужно найти неопределенный интеграл и найти разность его значений при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

<u>Пример</u>. Вычислить интеграл $J = \int_1^2 x^2 dx$.

Очевидно $(x^3/3)$ есть первообразная функции x^2, т. к.

$$\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{3x^2}{3} x^2 .$$

Поэтому $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. В соответствии с формулой (23) или (23′)

$$J = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3} .$$

Соответствующая криволинейная трапеция, площадь которой определяет вычисленный интеграл, показана на рис. 15.

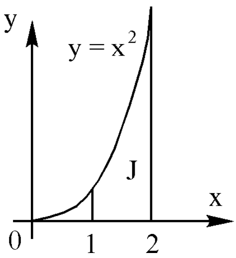

Рис. 15

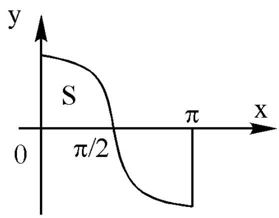

Рис. 16

Пример. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, образованной косинусоидой y=cosx и осью x на участке $x\in[0,\pi/2]$ (см. рис. 16). Искомая площадь S определяется интегралом

$$S=\int_0^{\pi/2}\cos x dx.$$

Так как первообразной функции $\cos x$ является $\sin x$ (поскольку $(\sin x)'=\cos x$) или

$$\int\cos x dx=\sin x+C,$$

то в соответствии с формулой Ньютона–Лейбница

$$S=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1-0=1.$$

В заключение отметим, что лишь для сравнительно простых функций удается найти аналитическое выражение для их неопределенного интеграла, т. е. удается ‘‘взять’’ интеграл. Интегралы большинства функций, представляющих практический интерес, ‘‘неберущиеся’’. Примерами таких интегралов являются, например,

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\sin x^2dx,\quad \int\cos x^2 dx.$$

В большинстве практических задач при вычислении интегралов (с постоянными или переменными пределами) приходится прибегать к приближенным (численным) методам интегрирования.

Глава 4. Дифференциальные уравнения и приближенные представления функции

4.1. Дифференциальные уравнения n-го порядка

Многие физические задачи приводят к соотношениям, содержащим производную от искомой функции. Рассмотрим следующий пример.

Пусть шарик массой m движется (колеблется) под воздействием пружины, закрепленной в точке A (рис. 17). Требуется определить закон движения шарика, т. е. зависимость $x(t)$.

Из курса физики известно, что сила F, с которой пружина действует на шарик, пропорциональна отклонению шарика от его нейтрального положения $x=0$ (когда пружина не натянута или сжата) и направлена в сторону обратную отклонению, т. е. $F = -kx$, где $k=const$ – коэффициент пропорциональности, характеризующий упругие свойства пружины. Как следует из второго закона Ньютона

$$ma = F,$$

где a – ускорение, и так как по физическому смыслу второй производной $a=x''$, то приходим к соотношению

$$mx'' = -kx,$$

или

$$mx'' + kx = 0,$$

или

$$x'' + a^2x = 0, \quad a = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{24}$$

Мы получили соотношение, содержащее вторую производную от искомой функции, а также саму искомую функцию. В рассмотренной задаче действующая сила F есть функция положения шарика. В других задачах материальное тело массой m может двигаться прямолинейно под воздействием силы F, закон изменения которой по времени задан, т. е. задана функция $F(t)$. Так может двигаться, например, самолет или ракета (массой m) в горизонтальном полете под воздействием силы тяги F двигателя (рис. 18), изменяющейся по времени по заданному закону $F(t)$. Второй закон Ньютона $ma=F$ в этом случае приведет к соотношению

$$mx'' = F(t). \tag{25}$$

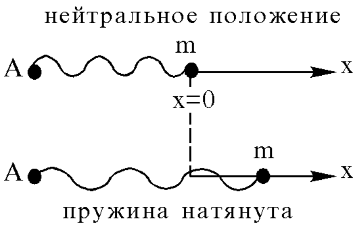

Рис. 17

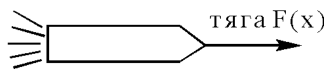

Рис. 18

в которое вновь искомая функция $x(t)$ (закон движения тела m) входит в виде второй производной, но сама искомая функция отсутствует.

Всякое соотношение, содержащее производную искомой функции и, быть может, саму искомую функцию и ее аргумент x, называют дифференциальным уравнением. Порядок старшей производной, содержащейся в уравнении, определяет порядок уравнения. Так уравнение

$$f(x, y, y', y'', \dots , y^{(n)}) = 0, \tag{26}$$

где x – аргумент, $y= y(x)$ – искомая функция, f – известная (заданная) функция своих аргументов $x, y, y', y'', \dots , y^{(n)}$ есть дифференциальное уравнение n-го порядка, записанное в общем виде. Всякая функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению (26), т. е. обращающая его в тождество по переменной x, называется решением дифференциального уравнения (26). Полученные выше в примерах дифференциальные уравнения (24), (25), очевидно, являются дифференциальными уравнениями второго порядка с искомой функцией $x(t)$. Второе из них легко интегрируется (процесс отыскания решения дифференциального уравнения кратко именуют его интегрированием), поскольку сила F задана. Действительно, интегрируя уравнение $x''=F/m$ один раз, получаем

$$x' = \frac{1}{m}\int F(t)dt + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Обозначая

$$\frac{1}{m}\int F(t)dt = \Phi(t),$$

полученное уравнение перепишем так

$$x' = \Phi(t) + C_1. \tag{27}$$

Интегрируя это уравнение первого порядка, находим искомую функцию $x(t)$:

$$x = \int \Phi(t)dt + C_1 t + C_2,$$

где C_2 – также произвольная постоянная, или, обозначая, $\int \Phi(t)dt = \Psi(t)$,

$$x = \Psi(t) + C_1 t + C_2.$$

В частности, при изменении тяги F двигателя по линейному закону

$$F = a + bt,$$

где постоянные a, b известны, имеем

$$\Phi(t) = \frac{1}{m}\int (a+bt)\,dt = \frac{1}{m}\left(at + \frac{bt^2}{2}\right),$$

$$\Psi(t) = \int \Phi(t)dt = \frac{1}{m}\int\left(at + \frac{bt^2}{2}\right)dt = \frac{1}{m}\left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{6}\right)$$

и, следовательно,

$$x(t) = \frac{1}{m}\left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{6}\right) + C_1 t + C_2. \tag{28}$$

Непосредственной подстановкой выражения (28) в уравнение (25) можно убедиться, что оно тождественно (т. е. при любых t и C_1, C_2) удовлетворяет уравнению и является, следовательно, его решением).

Обращает на себя внимание, что решение (28) дифференциального уравнения (25) содержит произвольные постоянные, т. е. дифференциальное уравнение (25) имеет не одно, а множество решений, которые можно получить, фиксируя тем или иным образом произвольные постоянные C_1, C_2. Кроме того, обращает на себя внимание, что решение (28) дифференциального уравнения второго порядка (25) зависит от двух произвольных постоянных (C_1, C_2), решение дифференциального уравнения первого порядка (27) зависит от одной произвольной постоянной (C_2).

Вместе с тем можно привести пример, когда дифференциальное уравнение вообще не имеет решения:

$$y'^2 + y^2 = -5$$

(сумма квадратов действительных чисел не может равняться отрицательному числу), или когда дифференциальное уравнение имеет единственное решение, не зависящее от произвольных постоянных: например, уравнение

$$y'^2 + y^2 = 0$$

имеет единственное решение $y(x)\equiv 0$, поскольку сумма квадратов может равняться нулю только, если каждое слагаемое равно нулю (при $y(x)\equiv 0$, очевидно и $y'(x)\equiv 0$).

В дальнейшем будет доказано, что при определенных ограничениях, накладываемых на функцию f, определяющую структуру дифференциального уравнения (26), уравнение (26) имеет бесконечное множество решений, зависящих от произвольных постоянных, причем решение уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$. Именно этот случай, представляющий наибольший практический интерес, и будет в дальнейшем рассматриваться.

4.2. Задача Коши. Метод Эйлера решения задачи Коши

Для определения произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$ на решение дифференциального уравнения следует наложить n условий. В качестве таковых обычно задают значение искомой функции и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно в некоторой характерной точке x_0, т. е. для определения постоянных $C_1, \dots, C_n$ используются условия вида

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \dots , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{29}$$

где $y_0, \ y'_0, \ \dots , \ y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Если x – время, то начальные условия обычно задают в точке $x_0 = 0$, т. е. в момент времени, принятый за начальный. Условия (29), вне зависимости от физического смысла аргумента x, называют начальными условиями Коши, а задачу отыскания решения уравнения (26), удовлетворяющего условиям Коши (29) – задачей Коши.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция:

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \tag{30}$$

зависящая от n произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$ и такая, что

1) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \dots, C_n$;

2) как бы ни были заданы начальные условия (29), можно подобрать такие значения $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n$ произвольных постоянных $C_1, \dots, C_n$, что решение $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n)$ будет удовлетворять заданным начальным условиям (29).

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое может быть получено из общего решения (30) при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Поясним сказанное примерами. В качестве первого примера рассмотрим решение (28) уравнения (25) и покажем, что оно представляет собой общее решение уравнения (25). Действительно, оно содержит две произвольные постоянные C_1, C_2, и остается показать, что с их помощью можно удовлетворить любым наперед заданным начальным условиям Коши

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \tag{31}$$

где x_0, x'_0 – какие–либо заданные числа. Переписав решение (28) в виде

$$x = \Psi(t) + C_1 t + C_2, \quad \Psi(t) = \frac{1}{m}\left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{6}\right)$$

и удовлетворяя условиям (31), получаем

$$\begin{cases} \Psi(0) + C_2 = x_0, \\ \Psi'(0) + C_1 = x'_0. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1 = x'_0 - \Psi'(0), \quad C_2 = x_0 - \Psi(0),$$

и так как

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = \frac{1}{m}\left(at + b\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0} = 0,$$

то

$$C_1 = x'_0, \quad C_2 = x_0. \tag{32}$$

Следовательно,

$$x = \frac{1}{m}\left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{6}\right) + x'_0 t + x_0. \tag{33}$$

Таким образом, установлено, что выбрав постоянные C_1, C_2 в виде (32), можно удовлетворить любым наперед заданным условиям Коши (31), а это и означает, что решение (28) – общее. Полагая в решении (28), например, $C_1=0$, $C_2=0$, находим частное решение уравнения (25)

$$x = \frac{1}{m}\left(a\frac{t^2}{2} + b\frac{t^3}{6}\right).$$

В качестве другого примера попытаемся найти общее решение, а затем и решение задачи Коши для полученного выше уравнения колебаний (24). Из уравнения (24), переписанного в виде

$$x'' = -a^2x, \qquad (34)$$

следует, что искомая функция $x(t)$, будучи дважды продифференцированной, возвращается к первоначальному виду, приобретая лишь множитель $(-a^2)$. Но таким свойством обладают тригонометрические функции

$$x_1 = \cos at, \quad x_2 = \sin at, \qquad (35)$$

вторые производные которых соответственно равны

$$x_1' = -a^2 \cos at = -a^2x_1, \quad x_2' = -a^2 \sin at = -a^2x_2,$$

т. е. функции (35) являются частными решениями уравнения (34), а значит и уравнения (24), поскольку

$$x_1' + a^2x_1 = 0, \quad x_2' + a^2x_2 = 0. \qquad (36)$$

Уравнение колебаний (24) принадлежит к классу линейных уравнений: и искомая функция, и ее производная входят в уравнение линейно. Поэтому линейная комбинация решений x_1, x_2, т. е. функция

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_1x_2(t), \qquad (37)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, будет также решением уравнения (24). Действительно, подставляя выражение (37) в левую часть уравнения (24), получаем

$$[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)]'' + a^2[C_1x_1(t) + C_2x_2(t)] =$$
$$= C_1[x_1'(t) + a^2x_1(t)] + C_2[x_2'(t) + a^2x_2(t)] = 0$$

в силу равенств (36). Выражение (37), которое мы перепишем так

$$x_1 = C_1\cos at + C_1\sin at, \qquad (38)$$

содержит две произвольные постоянные и является по доказанному решением уравнения (24). Выясним, является ли оно общим решением. С этой целью поставим задачу Коши для уравнения (24):

$$x'' + a^2x = 0, \quad x(0) = x_0, \; x'(0) = v_0 \qquad (39)$$

и попытаемся ей удовлетворить должным выбором постоянных C_1, C_2. (В начальных условиях Коши (39) x_0, v_0 – произвольно заданные числа, определяющие соответственно начальное положение x_0 и начальную скорость v_0 шарика). Подставляя решение (38) в условия Коши (39), получаем

$$\left.\begin{aligned} C_1\cos 0 + \ \ C_2 \sin 0 = x_0 \\ -aC_1 \sin 0 + aC_2 \cos 0 = v_0 \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1=x_0$, $C_2=v_0/a$, и, следовательно, решение задачи Коши (39) при произвольных начальных данных имеет вид

$$x = x_0 \cos at + \frac{v_0}{a}\sin at, \tag{40}$$

причем оно получено из решения (38) при должном выборе постоянных C_1, C_2.
Таким образом, установлено, что выражение (38) есть общее решение уравнения колебаний (24), а также найдено решение задачи Коши (39), часто ставящейся применительно к уравнению колебаний.

В рассмотренном примере найдено точное решение задачи Коши (39) в виде аналитического выражения (40). В большинстве практически интересных задач это не так, т. е. точное решение дифференциального уравнения в большинстве случаев не может быть получено в виде какого-либо аналитического выражения. Поэтому представляют особый интерес приближенные методы отыскания решений дифференциальных уравнений. Приближенные методы подразделяются на аналитические и численные. Первые дают возможность отыскать решение рассматриваемого уравнения в виде аналитического выражения, приближенно удовлетворяющего данному дифференциальному уравнению. Вторые позволяют построить алгоритм (последовательность) вычислений, с помощью которых находят приближенные численные значения искомого решения. С появлением быстродействующих ЭВМ наиболее мощным аппаратом решения дифференциальных уравнений стали численные методы. В качестве простейшего примера численного метода рассмотрим метод Эйлера решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Итак, пусть требуется найти решение $y(x)$ уравнения

$$y' = f(x,y), \tag{41}$$

где $f(x,y)$ – известная непрерывная функция переменных x, y, удовлетворяющее начальному условию Коши

$$y(x_0) = y_0, \tag{42}$$

где x_0, y_0 – заданные числа.

Для того, чтобы разобраться в существе метода, прибегнем к геометрической иллюстрации (рис. 19). В силу начального условия (42) искомая интегральная кривая, т. е. кривая, изображающая решение $y=y(x)$ задачи (41) – (42), проходит через точку $A_0(x_0,y_0)$.

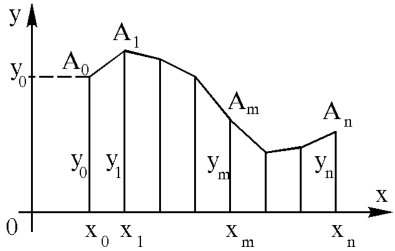

Рис. 19

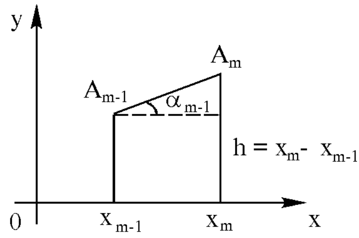

Рис. 20

Отложим на оси x, начиная от точки x_0 вправо, точки x_1, x_2, ... , x_n с шагом $\Delta x=h=const$ и попытаемся приближенно вычислить значения решения $y(x)$ в этих точках, т. е. попытаемся приближенно вычислить величины

$$y(x_1),\ y(x_2),\ \dots,\ y(x_n).$$

Учитывая геометрический смысл производной, можно заключить, что любое решение $y(x)$ уравнения (41) в каждой своей точке (x,y) имеет касательную, угловой коэффициент которой $k=tg\alpha$ определяется равенством

$$k = tg\alpha = f(x,y).$$

Имея это в виду, проведем через точку $A_0(x_0,y_0)$ отрезок прямой с угловым коэффициентом

$$k_0 = f(x_0,y_0),$$

(т. е. проведем отрезок касательной к неизвестной интегральной кривой в точке A_0) и примем ординату y_1 точки A_1 его пересечения с прямой $x=x_1$ за приближенное значение величины $y(x_1)$, т. е.

$$y_1 \approx y(x_1).$$

Далее через точку $A_1(x_1,y_1)$ проведем отрезок прямой с угловым коэффициентом, соответствующим этой точке:

$$k_1 = f(x_1,\ y_1),$$

и примем ординату y_2 точки A_2 его пересечения с прямой $x = x_2$ за приближенное значение величины $y(x_2)$, т. е.

$$y_2 \approx y(x_1).$$

Действуя так дальше, мы построим некоторую ломаную $A_0A_1A_2...A_m...A_n$, которая, вообще говоря, тем ближе будет совпадать с точным решением $y(x)$ задачи (41) – (42), чем меньше величина шага h, так как чем мельче шаг h, тем меньше каждое звено ломаной отличается от соответствующей дужки истинной интегральной кривой.

Для построения вычислительного процесса получим формулы, определяющие ординаты y_m точек $A_m(x_m,\ y_m)$. Из рис. 20 видно, что

$$y_m = y_{m-1} + htg\alpha_{m-1} = y_{m-1} + hf(x_{m-1},y_{m-1}), \qquad (43)$$

и если обозначить $f(x_{m-1},y_{m-1})=f_{m-1}$, то придавая m последовательно значения m=1, 2, ... ,n, получаем расчетные формулы:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf_0, \\ y_2 = y_1 + hf_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_{n-1} + hf_{n-1}, \end{cases} \tag{44}$$

или короче,

$$y_m = y_{m-1} + hf_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \tag{45}$$

Метод Эйлера позволяет довольно просто выяснить вид решения задачи Коши (41) – (42). На обосновании метода (на сходимости последовательности y_m приближенных значений решения к точному решению $y(x)$ при шаге $h \to 0$, на погрешности метода при выбранном h, т. е. на оценке разности $|y(x_m) - y_m|$, и проч.) мы не останавливаемся.

4.3. Приближенные представления функции. Ряд Тейлора. Ряд Фурье

На практике часто возникает задача вычисления функций, определение которых не позволяет непосредственно вычислить их с достаточной точностью. К числу таких функций относятся, например, sinx, $\sqrt[n]{1+x}$, при любом натуральном n и многие другие. Действительно, тригонометрический синус определен отношением (рис. 21)

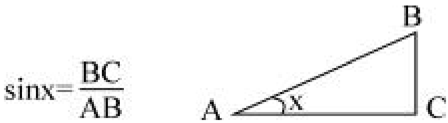

Рис. 21

и ясно, что непосредственное измерение отрезков BC, AB и угла x не позволит сколько-нибудь точно определить величину sinx. Аналогично обстоит дело с вычислением корня $y=\sqrt[n]{1+x}$, определение которого приводит к неприспособленному для вычислений выражению $y^n=1+x$ (нужно найти число y, которое будучи возведено в степень n дало бы заданное число 1+x). Поэтому возникает потребность приближенного представления таких (и иных) трудно вычисляемых функций в виде легко вычисляемого выражения, например, в виде степенного многочлена.

Выясним, каковы возможности получения подобного представления. Очевидно, любую функцию f(x), определенную на некотором интервале (a,b), можно представить на этом интервале в виде суммы

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x), \tag{46}$$

т. е. в виде многочлена по степеням $(x-x_0)$, $x_0 \in (a,b)$ и некоторого добавка $R_n(x)$, формально равного $R_n(x)=f(x)-\Phi_n(x)$, где

$$\Phi_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_{n-1}(x - x_0)^{n-1}. \tag{47}$$

Индекс у многочлена $\Phi_n(x)$ соответствует числу входящих в него слагаемых; слагаемое $R_n(x)$ носит название остаточного члена. Коэффициенты многочлена $R_n(x)$ связаны со значениями функций $f(x)$, $R_n(x)$ и их производных в точке x_0 очевидными соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &f(x_0)=A_0+R_n(x_0),\ f'(x_0)=A_1+R_n'(x_0),\ f''(x_0)=2!A_2+R_n''(x_0),\\ &f'''(x_0)=3!A_3+R_n'''(x_0),\ \dots,\ f^{(n-1)}(x_0)=(n-1)!A_{n-1}+R_n^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Потребуем, чтобы остаток $R_n(x)$ вместе со своими производными $R_n'(x),\ R_n''(x),\ \dots,\ R_n^{(n-1)}(x)$ обращался в ноль в точке x_0, т. е. чтобы

$$R_n(x_0)=0,\ R_n'(x_0)=0,\ \dots,\ R_n^{(n-1)}(x_0)=0\,. \tag{49}$$

Тогда коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ будут выражаться только через значения заданной функции $f(x)$ и ее производных $f'(x),\ \dots,\ f^{(n-1)}(x)$ в точке x_0:

$$\begin{gathered} A_0=f(x_0),\ \ A_1=f'(x_0),\ A_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\\ A_3=\frac{1}{3!}f'''(x_0),\ \dots,\ A_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0). \end{gathered} \tag{50}$$

Равенства (49) будут выполняться, если остаточный член $R_n(x)$ будет иметь структуру

$$R_n(x)=\frac{r_n(x)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{51}$$

где множитель $1/n!$ введен по чисто эстетическим соображениям (см. формулы (50)); функция $r_n(x)$ подлежит определению. В дальнейшем, в курсе ''Высшая математика'' будет показано, что

$$r_n(x) = f^{(n)}(\xi), \tag{52}$$

где ξ – некоторая ''средняя'' точка интервала (x_0,x), т. е. $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$. Точное положение точки ξ обычно неизвестно. Известно только, что $\xi\in(x_0,x)$. Формулу (51) для остаточного члена теперь можно переписать так

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n\,. \tag{53}$$

Выражение (53) называют остаточным членом в форме Лагранжа. Подставляя равенства (50) и (53) в соотношение (46), получим

$$\begin{gathered} f(x)\ =\ f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\ +\dots+\\ +\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n. \end{gathered} \tag{54}$$

Соотношение (54) имеет смысл, если $f(x)$ обладает в точке x_0 и ее окрестности непрерывными производными до n–го порядка включительно, что и предполагается в дальнейшем. Так как функция, непрерывная на замкнутом интервале, ограничена (свойства функций, ограниченных на замкнутом интервале, будут подробно рассмотрены в дальнейшем; ограниченность – одно из свойств таких функций), то производная $f^{(n)}(\xi)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, т. е. существует число $M>0$ такое, что

$$|f^{(n)}(\xi)| \le M$$

для любых ξ в замкнутой окрестности x_0. Но тогда в достаточно малой окрестности точки x_0 ($|x-x_0|<\delta$) остаточный член (53) будет сколь угодно мал ($R_n(x)<\varepsilon$) и, следовательно, в этой δ-окрестности приближенная формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}, \tag{55}$$

погрешность которой определяется величиной отброшенного члена $R_n(x)$, будет давать значения функции $f(x)$ с погрешностью $|R_n(x)|<\varepsilon$. Существенно, конечно, чтобы у функции $f(x)$ существовала точка x_0, в которой она сама и ее производные любого порядка легко вычислялись (у функции $\sin x$, $\sqrt[n]{1+x}$ такой точкой является точка $x_0=0$). Формулу (54) называют формулой Тейлора, многочлен (55) – многочленом Тейлора.

Нас будет интересовать случай, когда: 1) функция $f(x)$ обладает непрерывными производными любых порядков в точке x_0 и некоторой ее окрестности (не обязательно малой); 2) при любом x из этой окрестности

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = 0\,. \tag{56}$$

Такие функции существуют, и функции $\sin x$, $\sqrt[n]{1+x}$ принадлежат к их числу. Условие (56) чрезвычайно важно, так как оно означает, что при достаточно большом числе членов n многочлена Тейлора погрешность R_n приближенной формулы (56) может быть сделана сколь угодно малой при любых x из рассматриваемой окрестности.

Из первого условия следует, что формула Тейлора (54) имеет смысл для любого n. Опираясь на этот факт , положим в формуле (54) $n\to\infty$. Тогда на основании второго условия (формула (56)) заключаем, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)\,, \tag{57}$$

где

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}. \tag{58}$$

Как видим, при указанных выше двух условиях, функция f(x) является пределом последовательности многочленов Тейлора $T_n(x)$. Формально $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ имеет вид суммы с бесконечным числом слагаемых (такие суммы принято называть бесконечным рядом или просто рядом), и мы можем равенство (57) переписать так

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \ldots \tag{59}$$

Ряд (59) называют рядом Тейлора. Из него можно составить так называемые частичные суммы ряда по следующему правилу

$$S_1(x) = f(x_0),\ S_2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\ \ldots,\ S_n(x) = f(x_0) + \\ + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \tag{60}$$

Частичные суммы (60) ряда (59) являются очевидно многочленами Тейлора различных порядков:

$$S_1(x)=T_1(x),\ S_2(x)=T_2(x),\ \ldots,\ S_n(x)=T_n(x). \tag{60$'$}$$

Равенство (57), которое, меняя обозначение $T_n(x)$ на $S_n(x)$, можно переписать так:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \tag{61}$$

показывает, что функция f(x) является пределом последовательности частичных сумм ряда (59), и именно этом смысле следует понимать равенство (59). Указанные соображения кладутся в основу при суммировании любых бесконечных рядов. Например, пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{62}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – заданные числа. Составим последовательность частичных сумм ряда (62)

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \tag{63}$$

Если числовая последовательность S_n сходится при $n\to\infty$ и имеет предел S ($S_n\to S$), то ряд (62) называют сходящимся, предел S называют суммой ряда и пишут

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Если же последовательность частичных сумм S_n расходится (не имеет конечного предела при $n\to\infty$), то и ряд (62) называют расходящимся.

Рассмотрим теперь функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots , \qquad (64)$$

составленный из известных функций, определенных на некотором интервале (a,b). Если последовательность частичных сумм ряда (64)

$$S_1(x)=u_1(x),\ S_2(x)=u_1(x) + u_2(x),\ \ldots,\ S_1(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),\ \ldots \qquad (65)$$

сходится на интервале (a,b) и имеет пределом функцию S(x), то ряд (64) называют сходящимся на (a,b), функцию S(x) называют его суммой и пишут

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots . \qquad (66)$$

О записи (66) часто говорят, что функция S(x) разложена в ряд по функциям $u_n(x)$.

Если же последовательность частичных сумм (65) расходится на (a,b) (не имеет конечного предела хотя бы в одной точке интервала (a,b)), то ряд называют расходящимся на (a,b).

На практике весьма часто используются функциональные ряды, составленные из степенных функций (рассмотренные ряды Тейлора). Для периодических функций используют разложение по тригонометрическим функциям:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots + \\ + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \cdots, \qquad (67)$$

или короче

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \qquad (68)$$

где f(x) – периодическая функция с периодом 2π (тем же периодом обладают функции cosnx, sinnx). Если ряд (67) – (68) сходится и подобно конечным суммам допускает почленное интегрирование, т. е. интеграл от суммы ряда f(x) равен сумме интегралов от членов ряда (это не всегда так для бесконечных сумм–рядов), то коэффициенты ряда (67) – (68) определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (69)$$

поскольку, как легко проверить, при любых m=1,2, ..., n=1,2, ...:

$$\int_0^{2\pi}\cos nx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi}\cos nx \sin mx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & \text{ï ðè } n \neq m, \\ \pi, & \text{ï ðè } n = m, \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & \text{ï ðè } n \neq m, \\ \pi, & \text{ï ðè } n = m. \end{cases} \qquad (70)$$

Ряд (67) – (68) с коэффициентами (69) называют рядом Фурье функции f(x); коэффициенты (69) – коэффициентами Фурье.

Пример. Представить рядом Тейлора в окрестности точки $x_0=0$ функции $f(x)=\sin x$.
В окрестности $x_0=0$ ряд Тейлора (59) перепишется так

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (71)$$

(поскольку по определению $f^{(0)}(x) = f(x),\ 0' = 1$) и называется рядом Маклорена. Имеем

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(IV)}(x) = \sin x$$

и далее повторение. Отсюда видно, что

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (72)$$

и, следовательно,

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ï ðè } n = 2k \\ (-1)^k, & \text{ï ðè } n = 2k+1. \end{cases} \qquad (73)$$

В результате ряд (71) для $f(x)=\sin x$ принимает вид

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \pm \cdots. \qquad (74)$$

Функция sinx удовлетворяет условиям представимости рядом Тейлора (приведенным на стр. 40) при любых x, а потому ряд (74) сходится при любых x, т. е. при $x \in (-\infty, +\infty)$ (на всей числовой оси).

Содержание

Глава 1. Пределы 3
1.1. Предел числовой последовательности 3
1.2. Предел функциональной последовательности 9
1.3. Непрерывность функции 12

Глава 2. Производные 14
2.1. Понятие производной 14
2.2. Частная производная функции 17
2.3. Производная высших порядков 18

Глава 3. Интегралы 20
3.1. Определенные интегралы 20
3.2. Теорема о среднем 24
3.3. Неопределенный интеграл. Формула Ньютона–Лейбница 26

Глава 4. Дифференциальные уравнения и приближенные представления функции 30
4.1. Дифференциальные уравнения n–го порядка 30
4.2. Задача Коши. Метод Эйлера решения задачи Коши 33
4.3. Приближенные представления функции. Ряд Тейлора. Ряд Фурье 39