

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.С.Желтухин

Неопределенные интегралы:
методы вычисления

КАЗАНЬ – 2005

ПЕЧАТАЕТСЯ
ПО РЕШЕНИЮ СЕКЦИИ
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СОВЕТА
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Составитель:
доцент В. С. Желтухин

В пособии рассматриваются основные приемы и методы вычисления неопределенных интегралов. Рекомендуется студентам первого курса факультета ВМК.

1 ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение. Функция $F(x)$ в данном промежутке $\mathcal{X}$ называется *первообразной функции* $f(x)$ или *неопределенным интегралом* от $f(x)$, если во всем промежутке $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x) dx$.

Теорема. Если в некотором промежутке $\mathcal{X}$ функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — любая постоянная, также будет первообразной для $f(x)$, и наоборот, каждая функция, первообразная для $f(x)$ в некотором промежутке $\mathcal{X}$, может быть представлена в этой форме.

В силу теоремы, выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, представляет собой общий вид функции, которая имеет производную $f(x)$ или дифференциал $f(x) dx$ и обозначается символом

$$\int f(x) dx,$$

в котором неявным образом уже заключена произвольная постоянная. Выражение $f(x)dx$ называют *подинтегральным выражением*, а функцию $f(x)$ — *подинтегральной функцией*.

Операция интегрирования проверяется обратным действием — дифференцированием. Например,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad \text{поскольку} \quad \left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2.$$

Свойства интеграла

$$1) \quad d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \text{или} \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

$$2) \quad \int F'(x) dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

(знаки дифференциала d и интеграла $\int$ взаимно сокращаются, только во втором случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную).

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производной будет $f(x)$, приводит к соответствующей формуле интегрального исчисления

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Перебрав формулы, по которым вычисляются производные элементарных функций, и добавив некоторые формулы, выведенные дальше, можно составить таблицу интегралов (см. табл. 1).

Правила интегрирования

I) Если a – произвольная постоянная, то

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx.$$

$$\text{II)} \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$\text{III)} \text{ Если } \int f(t) dt = F(t) + C, \text{ то } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Частные случаи:

$$(a) \int f(x + b) dx = F(x + b) + C;$$

$$(b) \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

Рассмотрим применение правил интегрирования на примерах.

П р и м е р 1. Вычислить интеграл $\int (6x^2 - 3x + 5) dx$.

▷ Применим сначала правило II:

$$\int (6x^2 - 3x + 5) dx = \int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx,$$

затем правило I:

$$\int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx,$$

Основные интегралы от элементарных функций

-
- | | |
|--|--|
| 1) $\int 0 \cdot dx = C.$ | 2) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C.$ |
| 3) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$ | |
| 4) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x \neq 0.$ | |
| 5) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$ | |
| 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad x < 1.$ | |
| 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C, \quad x > 1.$ | |
| 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$ | |
| 9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1.$ | 10) $\int e^x dx = e^x + C.$ |
| 11) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ | 12) $\int \cos x dx = \sin x + C.$ |
| 13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$ | 14) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ |
| 15) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$ | 16) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$ |
| 17) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$ | 18) $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$ |
-

и напоследок воспользуемся п.п. 2, 3 табл. 1:

$$6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Таким образом, $\int (6x^2 - 3x + 5) dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C. \triangleleft$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\int (1 + \sqrt{x})^4 dx$.

$$\begin{aligned} \triangleright \int (1 + \sqrt{x})^4 dx &= \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2) dx = \\ &= \int dx + 4 \int \sqrt{x} dx + 6 \int x dx + 4 \int x^{3/2} dx + \int x^2 dx = \\ &= x + \frac{8}{3}x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + C. \triangleleft \end{aligned}$$

П р и м е р 3. Вычислить $J = \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \triangleright J &= \int \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{3x^2} dx = \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{3} \int dx - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln x + \frac{1}{x} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Примеры на применение правила III:

П р и м е р 4. $\triangleright$

$$1) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

$$2) \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C.$$

$$3) \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C. \triangleleft$$

П р и м е р 5. $\triangleright$

$$1) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \triangleleft$$

Примеры на все правила:

Пример 6. $\triangleright$

$$\begin{aligned} \int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} dx &= \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 7. $\triangleright$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} dx &= \int \frac{(2x - 5)(x + 1) + 6}{x + 1} dx = \\ &= \int \left(2x - 5 + \frac{6}{x + 1} \right) dx = x^2 - 5x + 6 \ln |x + 1| + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование дроби со сложным знаменателем часто облегчается разложением ее на сумму дробей с более простыми знаменателями.

Пример 8. $\triangleright$ Так, например,

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \triangleleft$$

Вообще, дробь вида $\frac{1}{(x + a)(x + b)}$ разлагается на сумму дробей:

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)} = \frac{(x + a) - (x + b)}{(x + a)(x + b)} \cdot \frac{1}{a - b} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a} \right),$$

поэтому

Пример 9. $\triangleright$

$$\int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \left(\int \frac{dx}{x + b} - \int \frac{dx}{x + a} \right) = \frac{1}{a - b} \ln \left| \frac{x + b}{x + a} \right| + C. \triangleleft$$

П р и м е р 10. Вычислить

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C}, \quad B^2 - AC > 0.$$

▷ Знаменатель дроби разлагается на вещественные множители:

$$Ax^2 + 2Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta),$$

где

$$\alpha = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \beta = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Тогда, в соответствии с примером 9, полагая в нем $a = -\beta$, $b = -\alpha$, получим

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2 - AC}} \ln \left| \frac{Ax + B - \sqrt{B^2 - AC}}{Ax + B + \sqrt{B^2 - AC}} \right| + C_1. \triangleleft$$

П р и м е р 11. ▷ В частности,

$$1) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x - 2)(x - 3)} = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x - 1/2)(x + 3/2)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 3} \right| + C. \triangleleft$$

Некоторые тригонометрические выражения, после тех или иных элементарных преобразований, также интегрируются при помощи простейших приемов.

П р и м е р 12. ▷ Очевидно, например, что

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2},$$

следовательно

$$\int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2mx \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C. \triangleleft$$

П р и м е р 13. ▷ Аналогично,

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m + n)x + \sin(m - n)x];$$

считая $m \pm n \neq 0$, получим, что

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{1}{2(m + n)} \cos(m + n)x - \frac{1}{2(m - n)} \cos(m - n)x + C. \triangleleft$$

В заключение рассмотрим немного более сложный пример:

Пример 14. Вычислить $J = \int \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

▷ Так как

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^n [\sin 2kx - \sin(2k-2)x] = 2 \sin x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x,$$

то подинтегральная функция приводится к $2 \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x$ и искомый интеграл

$$J = 2 \sum_{k=1}^n \int \cos(2k-1)x dx = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + C. \triangleleft$$

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Метод *замены переменной* или метод *подстановки* является одним из сильнейших приемов интегрирования функций. В основе метода лежит следующее простое

Свойство: если известно, что $\int g(t) dt = G(t) + C$, то тогда

$$\int g[\omega(x)]\omega'(x) dx = G[\omega(x)] + C.$$

(функции $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ предполагаются непрерывными).

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x) dx$. Во многих случаях удастся в качестве новой переменной выбрать такую функцию от x

$$t = \omega(x),$$

чтобы подинтегральное выражение представилось в виде

$$f(x) dx = g[\omega(x)]\omega'(x) dx,$$

где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция, чем $f(x)$. Тогда, по сказанному выше, достаточно найти интеграл

$$\int g(t) dt = G(t) + C,$$

чтобы из него подстановкой $t = \omega(x)$ получить искомый интеграл. Обычно пишут просто

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt, \quad (1)$$

подразумевая, что в функции от t , которая представлена интегралом справа, уже произведена указанная замена.

Пример 15. Найдем интеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

▷ Так как $d \sin x = \cos x dx$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подинтегральное выражение к виду

$$\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d(\sin x) = t^3 dt.$$

Интеграл от последнего выражения легко вычисляется:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Возвращаясь к переменной x , и подставляя $\sin x$ вместо t , получим:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \triangleleft$$

При выборе подстановки $t = \omega(x)$, упрощающей подинтегральное выражение, **необходимо помнить, что в его составе должен найтись множитель $\omega'(x) dx$, дающий дифференциал новой переменной, dt .**

Пример 16. Вычислить интеграл $J = \int \sin^3 x dx$.

▷ Здесь подстановка $t = \sin x$ непригодна именно ввиду отсутствия упомянутого множителя. Если попробовать выделить из подинтегрального выражения, в качестве дифференциала новой переменной, множитель $\sin x dx$, или лучше $-\sin x dx$, то это приведет к подстановке $t = \cos x$; так как остающееся выражение

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1,$$

этой подстановкой упрощается, то подстановка оправдана. Имеем

$$J = \int \sin^3 x dx = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C. \triangleleft$$

При некотором навыке в производстве подстановки можно самой переменной t и не писать. Например, в интеграле

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x),$$

мысленно рассматривают $\sin x$ как новую переменную и сразу переходят к результату.

Пример 17. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$;

$$\begin{aligned} \triangleright \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + C = \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

где $C_1 = C - \ln a$. Подстановка $t = x/a$ в этом примере подразумевается.

Из этого примера сразу видно, что правило интегрирования III является непосредственным следствием применения метода замены переменных. $\triangleleft$

Иногда подстановка применяется в форме, отличной от указанной. Именно, в подинтегральное выражение $f(x) dx$ подставляют, вместо x , функцию $x = \varphi(t)$ от новой переменной t и получают в результате выражение

$$f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = g(t) dt.$$

Если в этом выражении произвести подстановку $t = \omega(x)$, где $\omega(x)$ — функция, обратная для $\varphi(t)$, то, очевидно, вернемся к исходному подинтегральному выражению $f(x) dx$. Поэтому имеет место равенство (1), в правой части которого, после вычисления интеграла, необходимо подставить $t = \omega(x)$.

Пример 18. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$.

▷ Если положить $x = t^6$ (чтобы все корни “извлеклись”), то получим $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5 dt$, и

$$\begin{aligned} J &= 6 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6 \left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = \\ &= 6(t - \operatorname{arctg} t + C) = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 19. ▷ Аналогично, в интеграле $J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ разность квадратов под корнем, первый из которых — константа, подсказывает тригонометрическую подстановку $x = a \sin t$. При этом мы считаем, что $x \in (-a, a)$, а $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, поэтому $t = \arcsin x$. Имеем:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt.$$

При этом

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C,$$

(см. пример 12). Подставляя в последнее выражение $t = \arcsin(x/a)$, получим

$$J = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(здесь учтено, что $a^2 \sin 2t = 2a \sin t \cdot a \cos t = 2x \sqrt{a^2 - x^2}$). $\triangleleft$

Умение находить удобные подстановки создается упражнениями. Ниже приведены отдельные частные замечания, облегчающие их поиск.

Пример 20. ▷ Интегралы вида $\int g(x^2) x dx$, где $g(x)$ — удобная для интегрирования функция, берутся подстановкой $t = x^2$. Например,

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Аналогично, интегралы вида $\int g(x^3) x^2 dx$ берутся подстановкой $t = x^3$, и т.д. $\triangleleft$

Пример 21. $\triangleright \int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x dx$, $(\mu \neq -1)$ — в этом интеграле можно было бы положить $t = x^2$, но проще сразу взять $u = \alpha x^2 + \beta$, так как множитель $x dx$ лишь множителем отличается от $du = 2\alpha x dx$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int (\alpha x^2 + \beta)^\mu x dx &= \frac{1}{2\alpha} \int u^\mu du = \frac{1}{2\alpha(\mu + 1)} u^{\mu+1} + C = \\ &= \frac{1}{2\alpha(\mu + 1)} (\alpha x^2 + \beta)^{\mu+1} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 22. $\triangleright$ Интегралы вида $\int g(\ln x) \frac{dx}{x} = \int g(\ln x) d \ln x$ берутся подстановкой $t = \ln x$. Например,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + C. \triangleleft$$

Пример 23. $\triangleright$ Интегралы вида

$$\int g(\sin x) \cos x dx, \quad \int g(\cos x) \sin x dx, \quad \int g(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x},$$

берутся, соответственно, подстановками

$$t = \sin x, \quad t = \cos x, \quad t = \operatorname{tg} x.$$

Например,

$$\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} \sin x + C. \triangleleft$$

Пример 24. $\triangleright$ Интегралы вида $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d f(x)}{f(x)}$ (числитель представляет собой дифференциал знаменателя) сразу берутся подстановкой $t = f(x)$. Например,

$$1) \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C. \triangleleft$$

При интегрировании выражений, содержащих двучлены вида $a^2 - x^2$, $x^2 + a^2$, $x^2 - a^2$ обычно бывает выгодно заменить x тригонометрической или гиперболической функцией от новой переменной t , используя при этом соотношения

$$\begin{aligned}\sin^2 t + \cos^2 t &= 1, & 1 + \operatorname{tg}^2 t &= \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \\ \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= 1, & 1 - \operatorname{th}^2 t &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.\end{aligned}$$

Пример 25. Рассмотрим интеграл $J = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

▷ Подстановка

$$x = a \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \quad x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2),$$

приводит искомый интеграл к виду

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cdot \cos t) + C = \\ &= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C.\end{aligned}$$

(при подстановке $t = \operatorname{arctg} x$ необходимо выразить $\sin t$ и $\cos t$ через $\operatorname{tg} t = x/a$ — см. приложение А). ◁

Пример 26. ▷

В интеграле $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ удобнее применить гиперболическую подстановку:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{sh} t dt, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{sh} t.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int dt = t + C.$$

При переходе к переменной x учтем, что $\operatorname{Arch} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$ (см. приложение А), так что

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right] + C = \\ &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + C',\end{aligned}$$

причем в постоянную C' включено слагаемое $-\ln a$. $\triangleleft$

Рассмотрим еще два примера, где подстановка не столь естественна, как в предыдущих, но зато быстро ведет к цели.

Пример 27. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}, \quad (\alpha \neq 0)$.

▷ Положим $\sqrt{x^2 + \alpha} = t - x$ и примем t за новую переменную. Возводя последнее равенство в квадрат, получим: $x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2$, откуда

$$x = \frac{t^2 - \alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + \alpha} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}.$$

Подставляя эти равенства в подынтегральное выражение, получаем

$$J = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right) + C,$$

(сравните с предыдущим примером). $\triangleleft$

Пример 28. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}}, \quad (\alpha < x < \beta)$.

Положим $x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi$, ($0 < \varphi < \pi/2$), где φ — новая переменная; тогда

$$\begin{aligned} x - \alpha &= (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi, & \beta - x &= (\beta - \alpha) \cos^2 \varphi, \\ dx &= 2(\beta - \alpha) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, & \varphi &= \arctg \sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(\beta - x)}} = 2 \int d\varphi = 2\varphi + C = 2 \arctg \sqrt{\frac{x - \alpha}{\beta - x}} + C. \triangleleft$$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, $d(uv) = u dv + v du$, или

$u dv = d(uv) - v du$. Для выражения $d(uv)$ первообразной будет, очевидно, uv . Поэтому имеет место формула *интегрирования по частям*

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (2)$$

которая позволяет привести интегрирование выражения $u dv = uv' dx$ к интегрированию выражения $v du = vu' dx$.

Пример 29. Пусть требуется найти $\int x \cos x dx$.

▷ Положим $u = x$, $dv = \cos x dx$, так что $du = dx$, $v = \sin x$ (для интегрирования по частям достаточно представить $\cos x dx$ **хотя бы одним способом** в виде dv ; поэтому нет необходимости писать наиболее общее выражение для v , включающее произвольную постоянную). По формуле (2),

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \triangleleft$$

Таким образом, интегрирование по частям позволило заменить сложную подинтегральную функцию $x \cos x$ на простую $\sin x$. При этом для получения v пришлось заодно проинтегрировать выражение $\cos x dx$, поэтому формула и называется: интегрирование по частям.

При применении формулы (2) необходимо стараться так разбить подинтегральное выражение, чтобы интегрирование дифференциала dv не представляло трудностей и переход к интегралу от $v du$ **в совокупности** приводил бы к упрощению подинтегрального выражения. Так, в приведенном примере, явно невыгодно было бы взять $x dx$ за dv , а $\cos x$ — за u .

Правило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например,

$$\int P_n(x) f(x) dx,$$

где $P_n(x)$ — полином степени n (n — натуральное), а $f(x)$ — любая из функций $\ln^m ax$, e^{ax} , $\sin^m ax$, $\cos^m ax$, $\operatorname{tg}^m ax$, $\operatorname{sh}^m ax$, $\operatorname{ch}^m ax$, $\operatorname{th}^m ax$,

$\arcsin^m ax$, $\arccos^m ax$, $\arctg^m ax$, $\text{Arch}^m ax$, $\text{Arsh}^m ax$, $\text{Arth}^m ax$, где $m \geq 1$ – целое, $a \neq 0$ – вещественное, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

Часто для получения окончательного выражения необходимо применять интегрирование по частям неоднократно.

П р и м е р 30. Вычислить $J = \int x^2 \sin x \, dx$.

$$\begin{aligned} \triangleright J &= \int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2) = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \, d \sin x = \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Иногда использование формулы (2) приводит к уравнению относительно искомого интеграла.

П р и м е р 31. Вычислить $J_n = \int e^{ax} \cos(bx) \, dx$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

$\triangleright$ Выберем сначала

$$u = \cos(bx), \quad dv = e^{ax} \, dx;$$

тогда

$$du = -b \sin(bx) \, dx, \quad v = \frac{e^{ax}}{a},$$

и интеграл преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) \, dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям еще раз, положив

$$u = \sin(bx), \quad dv = e^{ax} \, dx, \quad du = b \cos(bx) \, dx, \quad v = \frac{e^{ax}}{a}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} J. \end{aligned}$$

После двукратного применения формулы интегрирования по частям искомый интеграл оказался выраженным через самого себя. Разрешая полученное равенство относительно J , получим

$$J = \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax} + C. \triangleleft$$

В ряде случаев применение формулы (2) приводит к рекуррентным соотношениям.

Пример 32. Вычислить $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

▷ Выберем

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = -\frac{2nx dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}}, \quad v = x,$$

и по формуле (2)

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot \tilde{J}.$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{(n+1)}} = J_n - a^2 J_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, приходим к соотношению

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1},$$

откуда

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \quad (3)$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла J_{n+1} к вычислению интеграла J_n с показателем степени в подинтегральном выражении на единицу меньшим. Зная интеграл $J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_1$, найдем по формуле (3) при $n = 1$,

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_2,$$

где $C_2 = \frac{1}{2a^2} C_1$. Полагая в формуле (3) $n = 2$, получим

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \\ &= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C_3, \end{aligned}$$

и т.д. Таким образом, можно вычислить интеграл J_n для любого показателя n . $\triangleleft$

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Дробно-рациональной функцией называется отношение двух полиномов $P_n(x)/Q_m(x)$, где

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m,$$

n и m — натуральные числа.

При $n \geq m$ в дробно-рациональной функции можно выделить целую часть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n_1}(x) + \frac{P_{n_2}(x)}{Q_m(x)},$$

где $n_2 < m$, так что достаточно рассмотреть случай правильной дроби ($n < m$).

Элементарными дробями называют дроби следующего вида

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{A}{x-a}; & \text{II. } & \frac{A}{(x-a)^k}, \quad (k=2,3,\dots); \\ \text{III. } & \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; & \text{IV. } & \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}, \quad (l=2,3,\dots); \end{aligned}$$

где A, M, N, a, p, q — вещественные числа, и, кроме того, $p^2/4 - q < 0$, так что трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней.

Дроби вида I и II интегрируются легко:

$$\begin{aligned} J_{\text{I}} &= A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln |x-a| + C, \\ J_{\text{II}} &= A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование дробей вида III и IV облегчается следующей подстановкой. Выделим из трехчлена $x^2 + px + q$ полный квадрат двучлена:

$$x^2 + px + q = \left(x + p/2\right)^2 + \left(q - p^2/4\right).$$

Так как $q - p^2/4 > 0$, положим $q - p^2/4 = a^2$, считая, например, для определенности $a = +\sqrt{q - p^2/4}$.

Выберем подстановку $x + p/2 = t$, $dx = dt$, так что

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2, \quad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right).$$

В случае III будем иметь

$$\begin{aligned} J_{\text{III}} &= \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{t^2 + a^2} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Для случая IV та же подстановка дает

$$\begin{aligned} J_{IV} &= \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \int \frac{Mt + (N - Mp/2)}{(t^2 + a^2)^m} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первый из интегралов в правой части (4) легко вычисляется подстановкой $t^2 + a^2 = u$, $2t dt = du$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^m} &= \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{(m-1)} \frac{1}{u^{m-1}} + C = \\ &= -\frac{1}{(m-1)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C. \end{aligned} \quad (5)$$

Второй из интегралов в правой части (4) при любом m может быть вычислен по рекуррентной формуле (3). Остается лишь подставить в результат $t = (2x + p)/2$, чтобы вернуться к переменной x .

При интегрировании дробно-рациональной функции фундаментальное значение имеет следующая теорема из области алгебры:

Каждая правильная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа элементарных дробей.

Это разложение правильной дроби на элементарные тесно связано с разложением ее знаменателя $Q_m(x)$ на простые множители. Известно, что каждый целый полином с вещественными коэффициентами единственным образом разлагается на вещественные множители вида $(x - a)$ и $(x^2 + px + q)$, причем квадратичный трехчлен не имеет вещественных корней. Объединяя одинаковые множители, и полагая, для простоты, старший коэффициент полинома $Q_m(x)$ равным единице, запишем разложение этого полинома в виде

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s} \cdot \\ &\cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_1, \dots, k_s, m_1, \dots, m_r$ — натуральные числа.

Согласно теореме, каждому множителю вида $(x - a_i)^{k_i}$ в разложении полинома $Q_m(x)$ в форме (6) соответствует сумма k_i элементарных дробей вида

$$\frac{A_1^{(i)}}{x - a_i} + \frac{A_2^{(i)}}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x - a_i)^{k_i}}, \quad (7)$$

в разложении дроби $P_n(x)/Q_m(x)$, а множителю вида $(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}$ — сумма m_j элементарных дробей вида

$$\frac{M_1^{(j)}x + N_1^{(j)}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{M_2^{(j)}x + N_2^{(j)}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{M_{m_j}^{(j)}x + N_{m_j}^{(j)}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}}. \quad (8)$$

Таким образом, зная разложение (6), мы знаем знаменатели тех элементарных дробей, на которые разлагается дробь $P_n(x)/Q_m(x)$. Для определения числителей этих дробей, т.е. коэффициентов

$$A_\alpha^{(i)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k_i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

и

$$M_\beta^{(j)}, \quad N_\beta^{(j)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

применяют *метод неопределенных коэффициентов*, который состоит в следующем.

Зная вид разложения $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби в соответствии с формулами (7), (8), записывают это разложение с буквенными коэффициентами в числителях. Общим знаменателем всех элементарных дробей будет, очевидно, полином $Q_m(x)$; складывая эти элементарные дроби, получим правильную дробь, в числителе которой будет полином с коэффициентами в виде комбинации неизвестных множителей при элементарных дробях. Отбрасывая знаменатель $Q_m(x)$ слева и справа, приходим к равенству двух полиномов степени $(m - 1)$. Приводя подобные члены в полиноме с буквенными коэффициентами, и приравнивая выражения при одинаковых степенях численным коэффициентам полинома $P_n(x)$, получим систему линейных уравнений, из которой определятся значения неизвестных коэффициентов. Возможность разложения дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби — строго доказанный факт,

поэтому полученная система никогда не будет противоречивой, и всегда — определенной.

Поясним сказанное примером.

Пример 33. Вычислить интеграл $J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$.

▷ Согласно теореме, для дроби $\frac{P_2(x)}{Q_5(x)} = \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ имеется разложение

$$\frac{P_2(x)}{Q_5(x)} = \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя сумму справа к общему знаменателю, и приравнявая числители получившихся дробей, придем к тождеству

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему из пяти уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0 = A + B, \\ x^3 & 0 = -2B + C, \\ x^2 & 2 = 2A + B - 2C + D, \\ x^1 & 2 = -2B + C - 2D + E, \\ x^0 & 13 = A - 2C - 2E, \end{array}$$

откуда $A = 1$, $B = -1$, $C = -2$, $D = -3$, $E = -4$. Таким образом,

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Используя приведенные выше формулы для интегралов от элементарных дробей, получим

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Нахождение коэффициентов разложения дробно-рациональной функции, соответствующих множителям вида $(x - a_i)$ в разложении полинома $Q_m(x)$, облегчается следующим приемом. Приравняв числители двух дробно-рациональных функций — заданной и с неопределенными коэффициентами, — и, *не приводя в последней подобные члены*, подставим в них значения $x = a_i$. При этом в равенстве слева получим некоторое число, а справа останется лишь одно слагаемое с неизвестным коэффициентом, соответствующим дроби вида $\frac{1}{x - a_i}$ в разложении $P_n(x)/Q_m(x)$.

Пример 34. ▷ Разложение дроби $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

Из этого равенства элементарных дробей следует равенство многочленов

$$x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2).$$

Подставляя последовательно в равенство значения $x = -1$, $x = -2$, $x = 3$, найдем

$$-1 = -4A_1, \quad -2 = 5A_2, \quad 3 = 20A_3,$$

или

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = -\frac{2}{5}, \quad A_3 = \frac{3}{20}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{3}{20} \frac{1}{x-3}. \triangleleft$$

В случае кратных вещественных корней нахождение коэффициентов разложения дробно-рациональной функции на элементарные дроби облегчает дифференцирование полиномов.

Пример 35. Рассмотрим $J = \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}.$

▷ Разложим знаменатель рациональной дроби на множители:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - x^3 - x^2 &= x^2(x^3 + x^2 - x - 1) = \\ &= x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1). \end{aligned}$$

Из этого разложения следует, что

$$\frac{x^4 + 1}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Из равенства дробей следует равенство многочленов

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= Ax(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + \\ &+ Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в равенстве (9) поочередно $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, получим $B = -1$, $C = 1/2$, $E = -1$.

Чтобы найти коэффициент A , продифференцируем равенство (9):

$$\begin{aligned} 4x^3 &= A(x+1)(4x^2 - x - 1) + B(x+1)(3x-1) + \\ &+ 2Cx(x+1)(2x+1) + 2Dx(2x^2-1) + Ex(3x-2), \end{aligned}$$

и положим в последнем соотношении $x = 0$. Получим:

$$0 = -A - B, \quad \text{или} \quad A = 1.$$

Аналогично, подставляя $x = -1$, получаем $-4 = -2D + 5E$, откуда находим $D = -1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \\ &= \frac{2x+1}{x(x+1)} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-1)x^2}{x+1} \right|. \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Если знаменатель правильной дроби $P_n(x)/Q_m(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные, целесообразно воспользоваться следующей *формулой Остроградского*:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \frac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)} + \int \frac{P_{n_2}(x)}{Q_{m_2}(x)} dx, \quad (10)$$

где $Q_{m_2}(x) = (x - a_1) \dots (x - a_s)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_rx + q_r)$ — многочлен, все корни (вещественные и комплексные) которого простые и совпадают с корнями полинома $Q_m(x)$, полином $Q_{m_1}(x) = Q_m(x)/Q_{m_2}(x)$, а $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых меньше, чем степени, соответственно, полиномов $Q_{m_1}(x)$ и $Q_{m_2}(x)$. Коэффициенты полиномов $P_{n_1}(x)$ и $P_{n_2}(x)$ находят после дифференцирования равенства (10), приведения правой части к общему знаменателю и приравнивания числителей получившихся выражений.

Первое слагаемое в формуле (10) называют *рациональной частью*, а второе — *трансцендентной частью* интеграла $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$. Замечательно то, что метод Остроградского позволяет найти рациональную часть интеграла от правильной дробно-рациональной функции чисто алгебраическим путем, т.е. не прибегая к интегрированию каких-либо функций.

Пример 36. Выделить рациональную часть интеграла

$$J = \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

▷ Имеем: $Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$, поэтому

$$J = \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1} + \int \frac{dx^2 + ex + f}{x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\begin{aligned} J' &= \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \\ &= \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1} \right)' + \frac{dx^2 + ex + f}{x^3 + x^2 + x + 1}. \end{aligned}$$

После дифференцирования дроби в правой части, приведения полученного выражения к общему знаменателю и приравнивания числи-

телей, получим

$$4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 = (2ax + b)(x^3 + x^2 + x + 1) - (ax^2 + bx + c)(3x^2 + 2x + 1) + (dx^2 + ex + f)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, получим систему уравнений, из которых и определяются неизвестные $a, b, \dots, f$:

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 0 = d \text{ (в последующем } d \text{ в расчет не берем),} \\ x^4 & 4 = -a + e, \\ x^3 & 4 = -2b + e + f, \\ x^2 & 16 = a - b - 3c + e + f, \\ x^1 & 12 = 2a - 2c + e + f, \\ x^0 & 8 = b - c + f. \end{array}$$

Из этой системы следует, что $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$, $d = 0$, $e = 3$, $f = 3$, и искомый интеграл

$$J = -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \operatorname{arctg} x + C. \triangleleft$$

* * *

Выше описаны методы интегрирования дробно-рациональных функций. В дальнейшем основным приемом интегрирования различных классов функций будет разыскивание таких подстановок $t = \omega(x)$, которые привели бы подинтегральное выражение к рациональному виду. Всюду ниже выражение $R[x, u(x), \dots]$ будет означать рациональную функцию своих аргументов, т.е.

$$R[x, u(x), \dots] = \frac{P[x, u(x), \dots]}{Q[x, u(x), \dots]},$$

где $P[x, u(x), \dots]$, $Q[x, u(x), \dots]$ — полиномы от переменных $x, u(x), \dots$, $u(x)$ — заданная функция переменной x .

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

Интегрирование выражений вида $\int R \left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{1/m} \right] dx$

В интеграле вида

$$J = \int R \left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{1/m} \right] dx, \quad (11)$$

положим

$$t = \omega(x) = \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{1/m}, \quad (12)$$

откуда

$$t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}. \quad (13)$$

Интеграл примет вид

$$J = \int R[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt. \quad (14)$$

Так как R, φ, φ' — рациональные функции, то выражение (14) есть интеграл от рациональной функции. Вычислив его по правилам, изложенным выше, к переменной x вернемся, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралам вида (14) сводятся и более общие интегралы

$$\int R \left[x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^s, \dots \right] dx$$

с рациональными показателями $r, s, \dots$. Для приведения этого интеграла к рациональному виду используется подстановка (12), в которой за m принимают общий знаменатель дробей $r, s, \dots$.

Пример 37. Вычислить $J = \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$.

▷ Здесь дробно-линейная функция $(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$ свелась просто к линейной функции, $x + 1$. Полагаем

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \int \frac{t+2}{t^4-t} t dt = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt = \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \\
 &= \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \\
 &= \ln \frac{x-2\sqrt{x+1}+2}{x+\sqrt{x+1}+2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C. \triangleleft
 \end{aligned}$$

Пример 38. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

▷ Интеграл преобразуется к виду (11) с помощью элементарного преобразования подинтегральной функции:

$$J = \int \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{1/3} \frac{dx}{(2-x)^2}.$$

Полагаем

$$\begin{aligned}
 t &= \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{1/3}, & x &= \frac{1-t^3}{1+t^3}, \\
 dx &= -\frac{12t^2 dt}{(1+t^3)^2}, & \frac{1}{2-x} &= \frac{1+t^3}{4t^3}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$J = -12 \int \frac{(t^3+1)^2 t^3 dt}{16t^6 (t^3+1)^2} = -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8} \left(\frac{2+x}{2-x} \right)^{2/3} + C. \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2-4ac \neq 0, \quad (15)$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций с помощью одной из следующих **подстановок Эйлера**:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$, в случае, если $a > 0$.

Пусть, например, выбрана подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x.$$

Возводя это равенство в квадрат, получим, что $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, так что

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b}.$$

“Изюминка” эйлеровой подстановки заключается в том, что для определения x получается уравнение первой степени, так что x , а вместе с ним и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ выражаются рационально через t . При подстановке полученных выражений в (15) получим интеграл от рациональной функции. Для возврата к переменной x в полученном результате нужно положить $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{a}x$.

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, в случае, если $c > 0$.

Поступая аналогично описанному выше, получим (при выборе в подстановке знака “+”):

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x},$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}.$$

3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \lambda)$ или $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \mu)$, в случае, если квадратный трехчлен имеет различные вещественные корни λ и μ :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu);$$

знаки в подстановке можно выбрать любые.

Пусть выбрана подстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$. Возводя это равенство в квадрат и сокращая на $(x - \lambda)$, получим уравнение первой степени:

$$a(x - \mu) = t^2(x - \lambda),$$

так что

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \quad dx = 2 \frac{a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2} dt,$$

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x - \lambda)}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}.$$

Пример 39. Рассмотрим $J = \int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

▷ Применим вторую подстановку Эйлера. Положим

$$\sqrt{1 + x + x^2} = tx + 1,$$

и возведем это равенство в квадрат; получим

$$1 + x + x^2 = t^2 x^2 + 2tx + 1,$$

так что

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = 2 \frac{1 - t + t^2}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}, \quad \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{1 - t + t^2}{1 - t^2}.$$

Подставляя эти выражения в искомый интеграл, получим

$$J = \int \frac{-2t dt}{1 - t^2} = \ln |1 - t^2| + C = \ln \left| \frac{2\sqrt{1 + x + x^2} - 2 - x}{x^2} \right| + C. \triangleleft$$

Заметим, что первая подстановка Эйлера фактически применена в примере 27 к вычислению интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Пример 40. Табличный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ известен из элементарных соображений, но для упражнения применим к нему подстановки Эйлера.

▷ Воспользуемся третьей подстановкой

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x);$$

тогда

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4at \, dt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1},$$

и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Так как имеет место тождество

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin \frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}, \quad (-a < x < a),$$

то этот результат лишь формой разнится от известного нам. $\triangleleft$

Приведенный пример показывает, что при интегрировании необходимо иметь в виду возможность для интеграла получаться в разных формах, в зависимости от применяемого для его вычисления метода. Поэтому **в сомнительных случаях результат интегрирования следует обязательно проверять дифференцированием.**

Пример 41. $\triangleright$ Если к тому же интегралу применить вторую подстановку $\sqrt{a^2 - x^2} = xt - a$, то, поступая аналогично предыдущему, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

Здесь имеет место другое обстоятельство: этот результат годится отдельно для промежутка $(-a, 0)$ и $(0, a)$, ибо в точке $x = 0$ выражение

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

лишено смысла, так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) &= \pi, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) &= -\pi. \end{aligned}$$

Выбирая для упомянутых промежутков *различные* значения постоянной C так, чтобы второе из них было на 2π больше первого, можно составить функцию, непрерывную на всем промежутке $(-a, a)$, если принять за ее значение при $x = 0$ общий предел слева и справа.

И на этот раз мы получили прежний результат лишь в другой форме, ибо имеют место тождества

$$-2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} - \pi & \text{для } 0 < x < a, \\ \arcsin \frac{x}{a} + \pi & \text{для } -a < x < 0. \end{cases} \triangleleft$$

Подстановки Эйлера часто приводят к довольно сложным интегралам от рациональных функций. В простых случаях целесообразно воспользоваться приемами, приведенными ниже.

Интегрирование выражений вида $\int \frac{P_n(x) dx}{Q_m(x) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$

В интегралах вида

$$\int \frac{P_n(x) dx}{Q_m(x) \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, необходимо разложить дробно-рациональную функцию $P_n(x)/Q_m(x)$ на элементарные дроби. При этом получим интегралы следующего вида

- 1) $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$
- 2) $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}};$
- 3) $\int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad p^2 - 4q < 0.$

Методы интегрирования этих выражений рассмотрены ниже.

Интегрирование выражений вида $\int P_n(x) (ax^2 + bx + c)^{\pm 1/2} dx$

Интегралы вида $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n , вычисляются по формуле

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (16)$$

Здесь λ — число, $P_{n-1}(x)$ — полином степени $n - 1$. Коэффициенты полинома $P_{n-1}(x)$ и число λ считаются неизвестными и определяются после дифференцирования равенства (16), приведения правой части к общему знаменателю и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях в числителях получившихся дробей.

Так как

$$P_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{P_n(x)(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

то описанный метод применим и к вычислению интегралов вида

$$\int P_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

Пример 42. Вычислить $J = \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx$.

▷ По формуле (16) имеем

$$J = (Ax + B) \sqrt{x^2 - 2x + 10} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}},$$

где A , B и λ — неизвестные пока коэффициенты. Дифференцируя обе части равенства, находим

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} &= \\ &= A \sqrt{x^2 - 2x + 10} + \frac{(Ax + B)(x - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}. \end{aligned}$$

Приводя выражение справа к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$x^2 + 3x + 5 = A(x^2 - 2x + 10) + (Ax + B)(x - 1) + \lambda,$$

откуда

$$1 = 2A, \quad 3 = -3A + B, \quad 5 = 10A - B + \lambda,$$

или

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{9}{2}, \quad \lambda = \frac{9}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(x+9)\sqrt{x^2-2x+10} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+9}} = \\ &= \frac{x+9}{2}\sqrt{x^2-2x+10} + \frac{9}{2} \ln \left(x-1 + \sqrt{x^2-2x+10} \right) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $n > 0$ — целое число, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x - \alpha = \frac{1}{t}$.

Пример 43. Вычислить $J = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4}}$.

▷ Применяем подстановку

$$x - 3 = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2};$$

тогда

$$\begin{aligned} J &= - \int \frac{dt}{\sqrt{13t^2+6t+1}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{13}} \int \frac{d(\sqrt{13}t+3/\sqrt{13})}{\sqrt{(\sqrt{13}t+3/\sqrt{13})^2+4/13}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \sqrt{13}t + \frac{3}{\sqrt{13}} + \sqrt{13t^2+6t+1} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{\sqrt{13}}{x-3} + \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-3} \right| + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Прежде, чем перейти к методам вычисления интегралов вида

$$\int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

рассмотрим два интеграла частного вида.

Интегрирование выражений вида $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}}$

Для вычисления интегралов вида

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}} &= \\ &= \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m (ax^2 + bx + c)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $m > 0$ — целое число, применяется *подстановка Абеля*

$$t = \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \right)' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (18)$$

Возводя это равенство в квадрат, и умножая на $4(ax^2 + bx + c)$, получим

$$4t^2(ax^2 + bx + c) = (4a^2x^2 + 4abx + b^2).$$

Вычитая из обеих частей этого равенства выражение $4a(ax^2 + bx + c)$, получим, что

$$4(a - t^2)(ax^2 + bx + c) = 4ac - b^2,$$

и, таким образом,

$$(ax^2 + bx + c)^m = \left(\frac{4ac - b^2}{4} \right)^m \frac{1}{(a - t^2)^m}. \quad (19)$$

Из (18) следует, что

$$t\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax + b}{2}.$$

Дифференцируя это равенство, найдем:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} dt + t \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \right)' dx &= \\ &= \sqrt{ax^2 + bx + c} dt + t^2 dx = a dx, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{dt}{a - t^2}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2} \right)^m \int (a - t^2)^{m-1} dt,$$

и интеграл (17) привелся к интегралу от полинома.

Пример 44. Вычислить $J = \int \frac{dx}{(2x^2 - x + 2)^{7/2}}$.

▷ Подстановка Абеля

$$t = \left(\sqrt{2x^2 - x + 2} \right)' = \frac{4x - 1}{2\sqrt{2x^2 - x + 2}}$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} &= \frac{dt}{2 - t^2}, \\ (2x^2 - x + 2)^3 &= \left(\frac{15}{4} \right)^3 \frac{1}{(2 - t^2)^3} = \frac{3375}{64} \frac{1}{(2 - t^2)^3}. \end{aligned}$$

Искомый интеграл преобразуется к виду

$$J = \frac{64}{3375} \int (2 - t^2)^2 dt.$$

Интегрируя его и возвращаясь к переменной x , получим

$$\begin{aligned} J = \frac{64}{3375} \left[2 \frac{4x - 1}{(2x^2 - x + 2)^{1/2}} - \frac{1}{6} \frac{(4x - 1)^3}{(2x^2 - x + 2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{160} \frac{(4x - 1)^5}{(2x^2 - x + 2)^{5/2}} \right]. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида $\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^n \sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$

В интегралах вида $\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^n \sqrt{\alpha x^2 + \beta}}$, где $n > 0$ — целое число, удобно использовать подстановку

$$\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x^2}} = t. \quad (21)$$

Эффективной также оказывается подстановка Абеля

$$t = \left(\sqrt{\alpha x^2 + \beta} \right)' = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \quad (22)$$

В силу (20),

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{dt}{\alpha - t^2};$$

кроме того,

$$x^2 + \lambda = \frac{(\beta - \alpha\lambda^2)t^2 + \lambda^2\alpha^2}{\alpha(\alpha - t^2)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \lambda^2)^k \sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \alpha^k \int \frac{(\alpha - t^2)^{k-1} dt}{[(\beta - \alpha\lambda^2)t^2 + \lambda^2\alpha^2]^k},$$

и искомый интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

П р и м е р 45. Найти $J = \int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 1}}$.

▷ а) Применим сначала подстановку

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = v, \quad \frac{1}{x^2} = 1 - v^2, \quad \frac{dx}{x^3} = v dv;$$

тогда

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dv}{3 - 2v^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + v\sqrt{2}}{\sqrt{3} - v\sqrt{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2x^2 - 2}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2x^2 - 2}} \right| + C. \end{aligned}$$

б) Подстановка Абеля приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} t = \left(\sqrt{x^2 - 1} \right)' &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dt}{1 - t^2}, \\ x^2 + 2 &= \frac{2 - 3t^2}{1 - t^2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{dt}{2-3t^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t\sqrt{3}}{\sqrt{2}-t\sqrt{3}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2x^2-2}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2x^2-2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Таким образом, обе подстановки эквивалентны, как с точки зрения тождественности окончательных результатов, так и по объему вычислительной работы. $\triangleleft$

Интегрирование выражений вида $\int \frac{(Mx+N) dx}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$

При вычислении интегралов вида

$$J = \int \frac{(Mx+N) dx}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (23)$$

выделяют два случая.

1) $(ax^2+bx+c) = a(x^2+px+q)$ — трехчлены в знаменателе совпадают или отличаются лишь множителем. Тогда искомый интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{(Mx+N) dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} = \frac{M}{2\sqrt{a}} \int \frac{(2x+p) dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}} + \\ &+ \frac{2N-Mp}{2\sqrt{a}} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2m+1)/2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Первый интеграл сразу берется подстановкой $t = x^2+px+q$, ко второму применяют подстановку Абеля (18).

2) В общем случае, когда $(ax^2+bx+c) \neq a(x^2+px+q)$, к цели ведет подстановка, уничтожающая члены в первой степени в обоих трехчленах одновременно. Этот случай также разбивается на два варианта.

2а) При $p \neq b/a$ применяется подстановка

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}, \quad (25)$$

где коэффициенты μ и ν подбираются так, чтобы удовлетворить указанному условию. Подставляя (25) в трехчлены, входящие в подинтегральное выражение, получим

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \frac{(\mu^2 + p\mu + q)t^2}{(t + 1)^2} + \\ &+ \frac{[2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(t + 1)^2}, \\ ax^2 + bx + c &= \frac{(a\mu^2 + b\mu + c)t^2}{(t + 1)^2} + \\ &+ \frac{[2a\mu\nu + b(\mu + \nu) + 2c]t + (a\nu^2 + b\nu + c)}{(t + 1)^2}. \end{aligned}$$

Значения μ и ν определяются из условий равенства нулю коэффициентов при первых степенях t :

$$2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q = 0, \quad 2a\mu\nu + b(\mu + \nu) + 2c = 0.$$

или

$$(\mu + \nu) = -2 \frac{aq - c}{ap - b}, \quad \mu\nu = \frac{bq - cp}{ap - b}.$$

Согласно теореме Виета, μ и ν есть корни квадратного уравнения

$$(ap - b)z^2 + 2(aq - c)z + (bq - cp) = 0. \quad (26)$$

Можно доказать, что корни уравнения (26) вещественны и различны, и, таким образом, подстановка (25) определена.

В результате подстановки интеграл (23) преобразуется к виду

$$J = \int \frac{P(t) dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\alpha t^2 + \beta}},$$

где $P(t)$ — полином степени $2m - 1$ и $\lambda > 0$. При $m > 1$ правильную дробь $P(t)/(t^2 + \lambda)^m$ разложим на элементарные, в результате чего придем к сумме интегралов вида

$$J_k = \int \frac{(A_k t + B_k) dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}, \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (27)$$

2b) Если $p = b/a$, то линейная замена $x = t - p/2$ сразу приводит интеграл (23) к интегралу вида (27).

Полученный интеграл разлагается на два:

$$J_k = \frac{A_k}{\alpha} \int \frac{\alpha t dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}} + B_k \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\alpha t^2 + \beta}}.$$

Первый из них легко берется подстановкой $u = \sqrt{\alpha t^2 + \beta}$. Ко второму применяются подстановки (21) или (22).

П р и м е р 46. Вычислить $J = \int \frac{(x+3) dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

▷ Дробно-линейная подстановка

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1},$$

дает

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\mu^2 \pm \mu + 1)t^2 + [2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2]t + (\nu^2 \pm \nu + 1)}{(t + 1)^2}.$$

Требования

$$2\mu\nu \pm (\mu + \nu) + 2 = 0,$$

или

$$\mu + \nu = 0, \quad \mu\nu = -1,$$

удовлетворяются, например, при $\mu = 1$, $\nu = -1$. Имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{t-1}{t+1}, & dx &= \frac{2dt}{(t+1)^2}, & x+3 &= \frac{4t+2}{t+1}, \\ x^2 - x + 1 &= \frac{t^2+3}{(t+1)^2}, & \sqrt{x^2+x+1} &= \frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1}, \end{aligned}$$

если, для определенности, считать $t+1 > 0$ (т.е. $x < 1$). Таким образом,

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(8t+4) dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = \\ &= 8 \int \frac{t dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} + 4 \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}. \end{aligned}$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой $u = \sqrt{3t^2 + 1}$ и оказывается равным $\sqrt{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3t^2 + 1}{8}} + C'$. Ко второму применим подстановку Абеля $u = \frac{3t}{\sqrt{3t^2 + 1}}$, которая приведет его к виду

$$J_2 = 12 \int \frac{du}{27 - 8u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}u} \right| + C''.$$

Остается лишь вернуться к переменной x :

$$J = \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{2}(x + 1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{2}(x + 1)} \right| + C. \triangleleft$$

Интегрирование выражений вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ с помощью тригонометрических и гиперболических подстановок

При вычислении интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

иногда оказываются удобными тригонометрическая или гиперболическая подстановки.

Выделим в подкоренном выражении, входящем в интеграл, полный квадрат и применим подстановку $t = x + b/(2a)$. В результате получим: $ax^2 + bx + c = \pm p^2 t^2 \pm q^2$, а интеграл приведет к одному из следующих интегралов

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 + q^2}) dt; \\ \text{(II)} \quad & \int R(t, \sqrt{p^2 t^2 - q^2}) dt; \\ \text{(III)} \quad & \int R(t, \sqrt{q^2 - p^2 t^2}) dt. \end{aligned}$$

Интегралы вида I–III могут быть сведены к интегралам от выражений, рациональных относительно синуса или косинуса (тригонометрических или гиперболических), с помощью следующих подстановок, соответственно:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad t &= \frac{p}{q} \operatorname{tg} z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q} \operatorname{sh} z; \\ \text{(II)} \quad t &= \frac{p}{q} \sec z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q} \operatorname{ch} z; \\ \text{(III)} \quad t &= \frac{p}{q} \sin z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q} \cos z, \quad \text{или} \quad t = \frac{p}{q} \operatorname{th} z. \end{aligned}$$

Пример 47. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.

▷ $5+2x+x^2 = 4+(x+1)^2$, поэтому применяем подстановку $t = x+1$. Тогда

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}},$$

— интеграл типа I. Подстановка $t = 2 \operatorname{tg} z$ дает

$$dt = \frac{2 dz}{\cos^2 z}, \quad \sqrt{(4+t^2)^3} = 2^3 \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 z)^3} = \frac{8}{\cos^3 z}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} \int \cos z \, dz = \frac{1}{4} \sin z + C = \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}} + C = \\ &= \frac{1}{4} \frac{t/2}{\sqrt{1+t^2/4}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 48. Вычислить $J = \int \sqrt{(x^2-1)^3} \, dx$.

▷ Интеграл типа II; применяем подстановку

$$x = \operatorname{ch} t, \quad dx = \operatorname{sh} t \, dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J &= \int \sqrt{(\operatorname{ch}^2 t - 1)^3} dt = \int \operatorname{sh}^4 t dt = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \right)^2 dt = \\
 &= \frac{1}{4} \int \operatorname{ch}^2 2t dt - \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2t dt + \frac{1}{4} \int dt = \\
 &= \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t + 1) dt - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{1}{4} t = \\
 &= \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4t - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t + \frac{3}{8} t + C.
 \end{aligned}$$

Возвратимся к переменной x :

$$\begin{aligned}
 t &= \operatorname{Arch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right); \\
 \operatorname{sh} 2t &= 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2x \sqrt{x^2 - 1}; \\
 \operatorname{sh} 4t &= 2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{8} x (2x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) + C. \triangleleft$$

Тригонометрические подстановки могут быть полезны и в других случаях, не отмеченных выше.

Пример 49. Вычислить $J = \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x}) \sqrt{x - x^2}}$.

▷ Применим подстановку

$$x = \sin^2 t, \quad dx = 2 \sin t \cos t dt.$$

Получим

$$\begin{aligned}
 J &= \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{(1 + \sin t) \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}} = \int \frac{2 dt}{1 + \sin t} = 2 \int \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t} dt = \\
 &= 2 \operatorname{tg} t - \frac{2}{\cos t} + C = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{1-x}} + C = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{1-x}} + C. \triangleleft
 \end{aligned}$$

Интегрирование дифференциального бинома

Интегралы вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \quad (28)$$

где a, b — любые постоянные ($a \neq 0, b \neq 0$), показатели m, n, p — рациональные числа, ($n \neq 0, p \neq 0$), называют *интегралом от дифференциального бинома*. Интеграл (28) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

- 1) p — целое число; в этом случае применяется подстановка $t = x^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n ;
- 2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число; к цели ведет подстановка $ax^n + b = t^s$, где s — знаменатель дроби p ;
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число; применяется подстановка $a + bx^{-n} = t^s$, где s — знаменатель дроби p .

Если ни одно из указанных условий не выполняется, то согласно *теореме Чебышева* интеграл (28) не может быть выражен через элементарные функции.

П р и м е р 50. $J = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/4})^{1/3} dx.$

▷ Здесь

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3};$$

так как

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-(1/2) + 1}{(1/4)} = 2,$$

то имеем второй случай интегрируемости. Положим

$$1 + \sqrt[4]{x} = t^3, \quad x = (t^3 - 1)^4, \quad dx = 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4 (4t^3 - 7) + C = \\ &= \frac{3}{7} (1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} (4\sqrt[4]{x} - 3) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 51. $J = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx.$

▷ Здесь

$$m = 0, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{4};$$

третий случай интегрируемости, так как

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Положим

$$1+x^{-4} = \frac{x^4+1}{x^4} = t^4, \quad x = (t^4-1)^{-1/4}, \quad dx = -t^3 (t^4-1)^{-5/4} dt,$$

так что $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-1/4}$ и

$$\begin{aligned} J &= - \int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

В случае, когда показатели являются большими неправильными дробями, интегрирование дифференциального бинома облегчается использованием *формулы приведения*. Предварительно, с помощью подстановки $z = x^n$ интеграл преобразуется к виду

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx = \frac{1}{n} \int (az + b)^p z^q dz = \frac{1}{n} J_{p,q}, \quad (29)$$

где $q = \frac{m+1}{n} - 1$. Условия интегрируемости для $J_{p,q}$ принимают вид:

1) p — целое; 2) q — целое; 3) $p+q$ — целое.

Для интеграла $J_{p,q}$ имеют место следующие формулы приве-

дения:

$$(I) \quad J_{p,q} = -\frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(p+1)} + \frac{p+q+2}{b(p+1)} J_{p+1,q}, \quad (p \neq -1),$$

$$(II) \quad J_{p,q} = \frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(q+1)} - a \frac{p+q+2}{b(q+1)} J_{p,q+1}, \quad (q \neq -1),$$

$$(III) \quad J_{p,q} = \frac{(az+b)^p z^{q+1}}{p+q+1} + \frac{bp}{p+q+1} J_{p-1,q}, \quad (p+q \neq -1),$$

$$(IV) \quad J_{p,q} = \frac{(az+b)^{p+1}z^q}{a(p+q+1)} - \frac{bq}{a(p+q+1)} J_{p,q-1}, \quad (p+q \neq -1),$$

которые позволяют уменьшить или увеличить показатели p или q на единицу.

Пример 52. Получить рекуррентную формулу для интеграла

$$H_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (m - \text{целое}),$$

и установить, к каким выражениям сводится вычисление интеграла при разных m .

▷ Здесь $n = 2$, $p = -1/2$; поэтому при m нечетном оказывается целым число

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{2},$$

а при m четном — число

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2},$$

так что во всех случаях интеграл берется в конечном виде. Подстановкой $z = x^2$ сведем его к интегралу

$$\frac{1}{2} \int (1-z)^{-1/2} z^{(m-1)/2} dz = \frac{1}{2} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}}.$$

Если, считая $m > 1$, применить к последнему интегралу формулу (IV), то получим

$$J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} = -2 \frac{(1-z)^{1/2} z^{(m-1)/2}}{m} + \frac{m-1}{m} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-3}{2}},$$

или, возвращаясь к заданному интегралу,

$$H_m = -\frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m} H_{m-2}.$$

Эта формула, уменьшая значение m на 2, последовательно сводит вычисление H_m либо к

$$H_1 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

при m нечетном, либо же к

$$H_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

при m четном.

Пусть теперь $m < -1$, так что $m = -\mu$, $\mu > 1$. Применим на этот раз формулу (II)

$$J_{-\frac{1}{2}, \frac{m-1}{2}} = 2 \frac{(1-z)^{1/2} z^{(m+1)/2}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} J_{-\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}},$$

откуда

$$H_{-\mu} = -\frac{x^{-(\mu-1)} \sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1} H_{-(\mu-2)}.$$

С помощью этой формулы мы имеем возможность уменьшать значение μ на 2, и последовательно свести вычисление $H_{-\mu}$ либо к

$$H_{-1} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C,$$

при μ нечетном, либо же к

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C,$$

при m четном. $\triangleleft$

6 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегрирование выражений вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Дифференциалы этого вида **всегда** могут быть рационализированы с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2},$$

так что

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка иногда приводит к сложным выкладкам. В некоторых случаях цель может быть быстрее и проще достигнута с помощью других подстановок:

- 1) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобнее оказывается подстановка $t = \cos x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- 2) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $t = \sin x$, $x \in (0, \pi)$;
- 3) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ то эффективнее применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Пример 53. Вычислить $J = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

▷ Подинтегральное выражение нечетно относительно $\cos x$, поэтому применяем подстановку $t = \sin x$, $\cos x dx = dt$, $\sin^2 x = 1 - t^2$:

$$J = \int t^2(1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \triangleleft$$

Пример 54. Вычислить $J = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.

▷ Подинтегральное выражение меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$. Подстановка $t = \cos x$ дает:

$$J = - \int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + C. \triangleleft$$

Пример 55. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

▷ Подинтегральное выражение не изменяет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$. Подстановка

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

приводит искомый интеграл к виду

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(t^2+1)^2}{t^4} dt = \\ &= t + \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 56. Вычислить $J = \frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx$.

▷ Применим универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Имеем

$$\begin{aligned} J &= (1-r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} t \right) + C = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

В некоторых случаях интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ может быть проведено другими методами.

Пример 57. Вычислить $J = \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

▷ Используем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; получим

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} = \\ &= - \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} - \int \frac{d \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$.

Дифференциалы этого вида, так же, как и тригонометрические дифференциалы $R(\sin x, \cos x) dx$, всегда можно привести к рациональному виду с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$. При

ЭТОМ

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th}(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{Arth} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 - t^2},$$

ТАК ЧТО

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right) \frac{dt}{1 - t^2}.$$

Так же, как и при интегрировании тригонометрических выражений, в ряде случаев удобнее другие подстановки:

- 1) Если $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{ch} x$;
- 2) Если $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{sh} x$;
- 3) Если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то $t = \operatorname{th} x$.

Также, как и в интегралах от тригонометрических функций, иногда интегрирование выражений вида $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ может быть выполнено другими методами.

Пример 58. Вычислить $J = \int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^8 x dx$.

▷ Подинтегральное выражение нечетно относительно $\operatorname{ch} x$; применяем подстановку $t = \operatorname{sh} x$. Имеем

$$\begin{aligned} J &= \int (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{sh}^8 x d \operatorname{sh} x = \int (1 + t^2) t^8 dt = \\ &= \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{1}{9} \operatorname{sh}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{sh}^{11} x + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Пример 59. Вычислить $J = \int \frac{2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx$.

▷ Воспользуемся тем обстоятельством, что и числитель и знаменатель есть линейная комбинация $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, и, кроме того,

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$2 \operatorname{sh} x + 3 \operatorname{ch} x = \alpha(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x) + \beta(4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x).$$

Для определения α и β получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4\alpha + 5\beta = 2, \\ 5\alpha + 4\beta = 3, \end{cases}$$

откуда $\alpha = 7/9$, $\beta = -2/9$. Следовательно,

$$\begin{aligned} J &= \frac{7}{9} \int dx - \frac{2}{9} \int \frac{4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} dx = \\ &= \frac{7}{9} x - \frac{2}{9} \int \frac{d(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x)}{4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x} = \\ &= \frac{7}{9} x - \frac{2}{9} \ln(4 \operatorname{sh} x + 5 \operatorname{ch} x) + C. \triangleleft \end{aligned}$$

Интегрирование выражений вида

$$\int \sin^\nu x \cdot \cos^\mu x \, dx, \quad \int \operatorname{sh}^\nu x \cdot \operatorname{ch}^\mu x \, dx$$

Интегралы вида

$$J_1 = \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx, \quad J_2 = \int \operatorname{sh}^\nu x \operatorname{ch}^\mu x \, dx$$

(μ, ν — рациональные числа) подстановками

$$t = \sin x, \quad t = \cos x,$$

и, соответственно,

$$t = \operatorname{sh} x, \quad t = \operatorname{ch} x,$$

всегда можно привести к интегралу от дифференциального бинома.

Значительно больший интерес представляет подстановка

$$t = \sin^2 x, \quad dt = 2 \sin x \cos x \, dx,$$

которая приводит интеграл J_1 к интегралу $J_{p,q}$, определенному формулой (29) на с. 46:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int \sin^{\nu-1} (1 - \sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - t)^{\frac{\mu-1}{2}} t^{\frac{\nu-1}{2}} \, dt = \frac{1}{2} J_{\frac{\mu-1}{2}, \frac{\nu-1}{2}}. \end{aligned}$$

Из условий интегрируемости дифференциального бинома следует, что интеграл J_1 берется в конечном виде, если μ или ν есть нечетное целое число, либо если $\mu + \nu$ есть четное целое число.

Если показатель ν (или μ) будет *нечетным*, то рационализация сразу достигается подстановкой $t = \cos x$ (или $t = \sin x$). Если же оба показателя μ и ν четные (а также если они оба *нечетные*), то можно для той же цели применить подстановку $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

Если показатели μ и ν оба *положительные четные* числа, то предпочтительнее другой прием, основанный на использовании формул

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Именно, если $\nu = 2n$, $\mu = 2m$, то при $\nu \geq \mu$ получим

$$\begin{aligned} \sin^{2n} x \cos^{2m} x &= (\sin x \cos x)^{2m} \sin^{2(n-m)} x = \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^{2m} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{n-m}, \end{aligned}$$

а при $\nu < \mu$

$$\begin{aligned} \sin^{2n} x \cos^{2m} x &= (\sin x \cos x)^{2n} \cos^{2(m-n)} x = \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^{2n} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{n-m}. \end{aligned}$$

В развернутом виде получится сумма членов вида

$$C \sin^{\nu_1} 2x \cdot \cos^{\mu_1} 2x,$$

где $\nu_1 + \mu_1 \geq n + m = \frac{\nu + \mu}{2}$. Те члены, у которых хотя бы один из показателей ν_1 , или μ_1 есть нечетное число, легко интегрируются по указанному выше способу. Остальные члены подвергаем подобному же разложению, переходя к $\sin 4x$ и $\cos 4x$, и т.д. Так как при каждом разложении сумма показателей уменьшается, по крайней мере, вдвое, то процесс быстро завершается.

При больших показателях степеней μ и ν (не обязательно целых) имеют место следующие *формулы приведения*, вытекающие из

соответствующих формул для интеграла от дифференциального бинома (с. 47):

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx &= - \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \\
 &\quad + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1} \int \sin^\nu x \cos^{\mu+2} x \, dx, \quad \mu \neq -1; \\
 \text{(II)} \quad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx &= \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} + \\
 &\quad + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1} \int \sin^{\nu+2} x \cos^\mu x \, dx, \quad \nu \neq -1; \\
 \text{(III)} \quad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx &= \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} + \\
 &\quad + \frac{\mu-1}{\nu+\mu} \int \sin^\nu x \cos^{\mu-2} x \, dx, \quad \nu+\mu \neq 0; \\
 \text{(IV)} \quad \int \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx &= \frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} + \\
 &\quad + \frac{\nu-1}{\nu+\mu} \int \sin^{\nu-2} x \cos^\mu x \, dx, \quad \nu+\mu \neq 0.
 \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют увеличить или уменьшить показатель ν или μ на 2 (за указанными исключениями). Если оба показателя ν и μ — целые числа, то последовательным применением формул приведения можно свести вычисление интеграла к одному из девяти элементарных интегралов, отвечающих различным комбинациям из значений ν и μ , равных -1 , 0 или 1 :

$$\begin{aligned}
 1) \quad \int dx &= x + C; & 2) \quad \int \cos x \, dx &= \sin x + C; \\
 3) \quad \int \sin x \, dx &= -\cos x + C; & 4) \quad \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C; \\
 5) \quad \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; & 6) \quad \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx &= -\ln |\cos x| + C; \\
 7) \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx &= \ln |\sin x| + C; & 8) \quad \int \sin x \cos x \, dx &= \frac{\sin^2 x}{2} + C; \\
 9) \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \ln |\operatorname{tg} x| + C.
 \end{aligned}$$

Аналогичные приемы применяются для вычисления интегралов от гиперболических функций вида

$$\int \operatorname{sh}^{\nu} x \operatorname{ch}^{\mu} x dx.$$

Пример 60. Вычислить $J = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

▷ Здесь пригодна подстановка $t = \operatorname{tg} x$, но проще воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (\cos 2x + 1) = \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16} (1 - \cos 4x);$$

поэтому

$$J = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C. \triangleleft$$

Пример 61. Вычислить $J = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$.

▷ Пригодна подстановка $t = \cos x$, но проще воспользоваться II и III формулами приведения:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= -\frac{\cos^5 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx, \\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx &= \frac{1}{3} \cos^3 x + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \end{aligned}$$

так что после упрощающих преобразований

$$J = -\frac{\cos^5 x}{2 \sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \triangleleft$$

Обзор других случаев.

В разделе 3 показано, как интегрируются выражения вида

$$P_n(x)e^{ax}, \quad P_n(x) \sin bx,$$

где $P_n(x)$ — целый полином. Отметим, что дробные выражения

$$\frac{e^x}{x^n}, \quad \frac{\sin x}{x^n},$$

уже не интегрируются в конечном виде.

С помощью интегрирования по частям легко установить для интегралов от этих выражений рекуррентные формулы и свести их, соответственно, к следующим основным интегралам

(интегральный логарифм)

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \text{li}(y) + C, \quad y \in (0, 1)$$

(интегральный синус)

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = \text{Si}(x) + C, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

(интеграл вероятностей)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2} dx = \Phi_0(x) + C, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Подчеркнем, что **все эти интегралы реально существуют, но они представляют собой совершенно новые функции и не приводятся к тем функциям, которые называют “элементарными”**. При этом символами $\text{li}(x)$, $\text{Si}(x)$, $\Phi_0(x)$ обозначаются те первообразные функций

$$\frac{x}{\ln x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{Si}(0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \text{li}(y) = 0, \quad \Phi_0(0) = 0.$$

Пример 62. Выразить через интегральный логарифм $\text{li}(x)$ и элементарные функции интеграл $J = \int \frac{dx}{\ln^2 x}$.

▷ Воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив $u = x$, $dv = \frac{dx}{x \ln^2 x}$ так, что

$$du = dx, \quad v = \int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}.$$

Тогда

$$J = -\frac{x}{\ln x} + \int \frac{dx}{\ln x} = -\frac{x}{\ln x} + \text{li}(x) + C. \triangleleft$$

7 ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{(x - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx.$
2. $\int \frac{dx}{(x - a)^k} \quad (k > 1).$
3. $\int \frac{ax + b}{cx + d} dx.$
4. $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 2}{x + 3} dx.$
5. $\int \cos mx \sin nx dx \quad (m \pm n \neq 0).$
6. $\int \frac{\sin(2n + 1)x}{\sin x} dx \quad (n > 0).$
7. $\int \frac{x dx}{1 + x^4}.$
8. $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx.$
9. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}.$
10. $\int \operatorname{tg} x dx.$
11. $\int \frac{dx}{A^2 \sin^2 x + B^2 \cos^2 x}.$
12. $\int \operatorname{ctg} x dx.$
13. $\int \frac{dx}{\cos x}.$
14. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx.$
15. $\int \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$
16. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$
17. $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}}.$
18. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$
19. $\int x^3 \ln x dx.$
20. $\int \arcsin x dx.$
21. $\int \operatorname{arctg} x dx.$
22. $\int e^{ax} \sin bx dx.$
23. $\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^2}.$
24. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x + 1}}.$
26. $\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^2)^2}.$
27. $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + x^5}} dx.$
28. $\int \sqrt[3]{x - x^3} dx.$
29. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)^3} dx.$

$$30. \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2 (x^2 + x + 1)^3} dx.$$

Вывести рекуррентные соотношения и вычислить интегралы при $m = -3$ и $m = 4$:

$$31. \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$32. \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Вычислить интегралы:

$$33. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + b}}.$$

$$34. \int \frac{\sqrt{ax^2 + b}}{x} dx.$$

$$35. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

$$36. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

$$37. \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$38. \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 - 2x - 1}} dx.$$

$$39. \int \frac{x^3 dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$40. \int \frac{dx}{\sqrt{(7x-x^2-10)^3}} dx.$$

$$41. \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}} dx.$$

$$43. \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}.$$

$$44. \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$45. \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}.$$

$$46. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$47. \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x}.$$

$$48. \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

$$49. \int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

$$50. \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx.$$

$$51. \int \operatorname{tg}^6 x dx.$$

$$52. \int \sin^4 \cos^6 x dx.$$

$$53. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx.$$

$$54. \int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x} dx.$$

$$55. \int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx.$$

$$56. \int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}.$$

$$57. \int \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} - x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} dx.$$

$$58. \int \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \sin x \cos x + C \sin^2 x}, \quad (AC - B^2 > 0).$$

Выразить через функции $\text{Si}(x)$, $\text{li}(x)$, $\Phi_0(x)$ и элементарные функции интегралы

$$59. \int \sin x \text{Si}(x) dx. \quad 60. \int \text{li}(x) dx.$$

$$61. \int x \Phi_0(x) dx. \quad 62. \int \Phi_0(x) dx.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

А Основные соотношения для тригонометрических и гиперболических функций, а также обратных к ним

А.1 Тригонометрические функции и обратные к ним

Основные тождества

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1; & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\text{Если } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ то } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Формулы сложения

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \\ \sin(x + y + z) &= \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \\ &\quad + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z; \\ \cos(x + y + z) &= \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \\ &\quad - \sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z; \\ \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; & \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x};\end{aligned}$$

Формулы для половинного значения аргумента

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.\end{aligned}$$

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Функции кратных аргументов

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \\ \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}; \\ \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x; & \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x; \\ \operatorname{tg} 3x &= \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}; & \operatorname{ctg} 3x &= \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}; \\ \sin 4x &= 8 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin x; & \cos 4x &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1; \\ \operatorname{tg} 4x &= \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}; & \operatorname{ctg} 4x &= \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6 \operatorname{ctg}^2 x + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 x - 4 \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

Функции кратных аргументов при больших n

$$\begin{aligned}\cos nx &= \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \\ &\quad + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \dots; \\ \sin nx &= C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \\ &\quad + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots.\end{aligned}$$

Сумма и разность функций

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2};$$

$$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} \mp x \right);$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}; \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y = \pm \frac{\cos(x+y)}{\sin x \cos y}.$$

Произведения функций

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)];$$

$$\cos(x+y) \cos(x-y) = \cos^2 y - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 y;$$

$$\sin(x+y) \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y;$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y};$$

$$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = - \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y} = - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y};$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y \sin z &= \frac{1}{4} [\sin(x+y-z) + \sin(y+z-x) + \\ &\quad + \sin(z+x-y) - \sin(x+y+z)]; \end{aligned}$$

$$\sin x \cos y \cos z = \frac{1}{4} [\sin(x+y-z) - \sin(y+z-x) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(z + x - y) + \sin(x + y + z)]; \\
\sin x \sin y \cos z &= \frac{1}{4} [-\cos(x + y - z) + \cos(y + z - x) + \\
& + \cos(z + x - y) - \cos(x + y + z)]; \\
\cos x \cos y \cos z &= \frac{1}{4} [\cos(x + y - z) + \cos(y + z - x) + \\
& + \cos(z + x - y) + \cos(x + y + z)].
\end{aligned}$$

Формулы понижения степени

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}; & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}; \\
\sin^3 x &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}; & \cos^3 x &= \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}; \\
\sin^4 x &= \frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8}; & \cos^4 x &= \frac{\cos 4x + 4 \cos 2x + 3}{8}.
\end{aligned}$$

Обратные функции

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \\
\arccos x &= \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \\
\operatorname{arctg} x &= -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \\
\operatorname{arcctg} x &= \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Сумма и разность обратных функций

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \quad \text{при } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \quad \text{при } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \quad \text{при } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\arcsin x - \arcsin y &= \begin{cases} -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \text{при } xy \geq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \geq 1; \\ \pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \text{при } x > 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \\ \text{при } x < 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \\
\arccos x + \arccos y &= \begin{cases} \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), \\ \text{при } x + y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), \\ \text{при } x + y \leq 0; \end{cases} \\
\arccos x - \arccos y &= \begin{cases} -\arccos \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), \\ \text{при } x \geq y; \\ \arccos \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \right), \\ \text{при } x < y; \end{cases} \\
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{при } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{при } x > 0, xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & \text{при } x < 0, xy > 1; \end{cases} \\
\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{при } xy > -1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{при } x > 0, xy < -1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, & \text{при } x < 0, xy < -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Связь тригонометрических (или обратных тригонометрических) функций

	$a = \sin x$	$a = \cos x$	$a = \operatorname{tg} x$	$a = \operatorname{ctg} x$
$\sin x$	a	$\pm\sqrt{1-a^2}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-a^2}$	a	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	a	$\frac{1}{a}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\frac{1}{a}$	a

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части. Таблица позволяет найти соотношения как между тригонометрическими, так и между обратными тригонометрическими функциями одного аргумента. Например, если $\sin x = a$, то

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}), \quad \arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

А.2 Гиперболические функции и обратные к ним

Определения

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Связь с тригонометрическими функциями

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{cth} x &= i \operatorname{ctg} iz, \\ \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz. \end{aligned}$$

Здесь $z = x + iy$ — комплексное число, i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Равенства, в которых гиперболические функции f встречаются в форме $f(x)$, или $f(ax)$, могут быть получены из аналогичных соотношений для соответствующих тригонометрических функций, если формально заменить $\sin x$ на $i \operatorname{sh} x$ и $\cos x$ на $\operatorname{ch} x$.

Основные тождества

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1; & \operatorname{th} x \operatorname{cth} x &= 1; \\ 1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; & \operatorname{cth}^2 x - 1 &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}; \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &= e^x; & \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Универсальная гиперболическая подстановка

Если $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{2 \operatorname{th}(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 - t^2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{1 + \operatorname{th}^2(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \\ dx &= \frac{2 dt}{1 - t^2}, & x &= 2 \operatorname{Arth} t. \end{aligned}$$

Функции отрицательного аргумента

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

Формулы сложения

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; & \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \\ \operatorname{th}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}; & \operatorname{cth}(x \pm y) &= \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}. \end{aligned}$$

Функции для половинного значения аргумента

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} \frac{x}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}; & \operatorname{ch} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}; \\ \operatorname{th} \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}; \\ \operatorname{cth} \frac{x}{2} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}}.\end{aligned}$$

Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Функции кратных аргументов

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}; \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1; \\ \operatorname{sh} 3x &= 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x; & \operatorname{ch} 3x &= -3 \operatorname{ch} x + 4 \operatorname{ch}^3 x; \\ \operatorname{sh} 4x &= 4 \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x + 4 \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x; & \operatorname{ch} 4x &= \operatorname{ch}^4 x + 6 \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^4 x; \\ \operatorname{th} 2x &= \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}; & \operatorname{cth} 2x &= \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x}.\end{aligned}$$

Сумма и разность функций

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}; \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2}; & \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}; \\ \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y &= \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}; & \operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y &= \frac{\operatorname{sh}(y \pm x)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}.\end{aligned}$$

Произведения функций

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)]; \\ \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x - y) + \operatorname{ch}(x + y)];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x - y) + \operatorname{sh}(x + y)]; \\ \operatorname{sh}(x + y) \operatorname{sh}(x - y) &= \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y; \\ \operatorname{ch}(x + y) \operatorname{ch}(x - y) &= \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.\end{aligned}$$

Формула Муавра

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} y)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

Формулы понижения степени

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - 1); \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + 1);$$

Обратные гиперболические функции

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Arsh} x \text{ (аресинус),} & \text{если } x = \operatorname{sh} y; \\ y &= \operatorname{Arch} x \text{ (арекосинус),} & \text{если } x = \operatorname{ch} y; \\ y &= \operatorname{Arth} x \text{ (аретангенс),} & \text{если } x = \operatorname{th} y; \\ y &= \operatorname{Arcth} x \text{ (арекотангенс),} & \text{если } x = \operatorname{cth} y.\end{aligned}$$

Следует учесть, что $y = \operatorname{ch} x$ не во всей области определения – монотонная функция. Поэтому для каждого из двух интервалов монотонности получают свою обратную функцию $y = \operatorname{Arch} x$.

Связь обратных гиперболических функций с логарифмической функцией

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Arsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right); \\ y &= \operatorname{Arch} x = \begin{cases} \ln \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right), & \text{для } x \geq 1 \text{ и } -\infty < y \leq 0; \\ \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), & \text{для } x \geq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq +\infty; \end{cases} \\ y &= \operatorname{Arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{при } |x| < 1;\end{aligned}$$

$$y = \operatorname{Arcth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad \text{при } |x| > 1.$$

Соотношения между гиперболическими (или обратными гиперболическими) функциями

	$a = \operatorname{sh} x$	$a = \operatorname{ch} x$	$a = \operatorname{th} x$	$a = \operatorname{cth} x$
$\operatorname{sh} x$	a	$\pm \sqrt{a^2 - 1}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{a^2 + 1}$	a	$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$
$\operatorname{th} x$	$\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$	a	$\frac{1}{a}$
$\operatorname{cth} x$	$\pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}$	$\frac{1}{a}$	a

Если $\operatorname{sh} x = a$, то $\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$ ($x \geq 0$), $\operatorname{Arsh} a = \operatorname{Arcth} \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$.
Знак выбирается в соответствии со знаком левой части.

Сумма и разность обратных гиперболических функций

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arch} y &= \operatorname{Arsh} \left(xy \pm \sqrt{(1+x^2)(y^2-1)} \right) = \\
 &= \operatorname{Arch} \left[y\sqrt{1+x^2} \pm x\sqrt{y^2-1} \right]; \\
 \operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y &= \operatorname{Arsh} \left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2} \right); \\
 \operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y &= \operatorname{Arsh} \left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} \right); \\
 \operatorname{Arth} x + \operatorname{Arth} y &= \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}; \\
 \operatorname{Arcth} x \pm \operatorname{Arcth} y &= \operatorname{Arcth} \frac{1 \pm xy}{x \pm y}.
 \end{aligned}$$

В Обзор методов интегрирования

В данном приложении приведена сводка основных интегралов и методы их интегрирования с указанием номеров страниц и примеров, в которых подробно разбирается применение этих методов.

Всюду ниже $P_n(x)$, $Q_m(x)$ означают полиномы целой степени относительно x ; $R[x, u(x), \dots]$ — рациональную функцию переменных $x, u(x), \dots$; $u(x)$ — произвольное выражение относительно x . Предполагается, что квадратные трехчлены, за исключением особо оговоренных случаев, не имеют вещественных корней. Ограничения на области определения приведенных выражений указаны в тексте пособия.

1. $\int g[\omega(x)]\omega'(x) dx$ (с. 9).

▷ Подстановка $\omega(x) = t$. ◁

См. примеры №№ 15–17, 20–24.

2. $\int u(x)v'(x) dx$ (с. 15).

▷ Интегрирование по частям:

$$\int u(x)v'(x) dx = uv - \int v(x)u'(x) dx. \quad \triangleleft$$

См. примеры №№ 29–32.

3. $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, где $n < m$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — правильная рациональная дробь (с. 21).

▷ Подинтегральную функцию представляют в виде суммы элементарных дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Интеграл от первой дроби легко сводится к табличному, ко второй применяют методы, изложенные в п.п. 4, 5 данного приложения.

В случае кратных корней полинома $Q_m(x)$ для выделения рациональной части интеграла используют формулу Остроградского

(с. 26). ◁

См. примеры №№ 33–36.

4. $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$, где M, N, p, q — вещественные числа (с. 20).

▷ Подстановка $x + p/2 = t$ ◁

См. пример № 33 .

5. $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$, где M, N, p, q — вещественные числа, n — целое (с. 20).

▷ Подстановка $x + p/2 = t$ приводит интеграл к сумме интегралов вида

$$\int \frac{2t dt}{(t^2 + 1)^n} \quad \text{и} \quad \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n}.$$

К первому применяется подстановка $t^2 + a^2 = u$, ко второму — рекуррентная формула из п. 6 данного приложения. ◁

См. пример № 33 .

6. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, где n — целое (с. 19).

▷ Рекуррентная формула

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \frac{1}{a^2} J_n. \quad \triangleleft$$

или тригонометрическая подстановка (с. 14).

См. примеры №№ 25, 32 .

7. $\int R(x, Y^r, Y^s, \dots) dx$, где $Y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $r, s, \dots$ рациональные (с. 28).

▷ Подстановка

$$t = \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{1/m},$$

где m — общий знаменатель дробей $r, s, \dots$. ◁

См. примеры №№ 18, 37, 38.

8. $\int x^m (ax^n + b)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа (с. 45).

▷ Интегрируется в трех случаях:

1) если p — целое число, то применяется подстановка

$$t = x^N,$$

где N — общий знаменатель дробей m и n ;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то применяется подстановка

$$ax^n + b = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p ;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, то применяется подстановка

$$a + bx^{-n} = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p .

В случае, когда p и m — “большие” неправильные дроби подстановка $z = x^n$ приводит его к интегралу

$$J_{p,q} = \int (az + b)^p z^q dz$$

(с. 45), к которому применяются формулы приведения из следующего пункта. ◁

См. примеры №№ 50 – 52.

9. $J_{p,q} = \int (az + b)^p z^q dz$, где p, q — “большие” неправильные дроби.

▷ Формулы приведения (с. 47):

$$J_{p,q} = \begin{cases} -\frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(p+1)} + \frac{p+q+2}{b(p+1)} J_{p+1,q}; \\ \frac{(az+b)^{p+1}z^{q+1}}{b(q+1)} - a\frac{p+q+2}{b(q+1)} J_{p,q+1}; \\ \frac{(az+b)^p z^{q+1}}{p+q+1} + \frac{bp}{p+q+1} J_{p-1,q}; \\ \frac{(az+b)^{p+1}z^q}{a(p+q+1)} - \frac{bq}{a(p+q+1)} J_{p,q-1}. \end{cases} \triangleleft$$

См. пример № 52.

10. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$.

▷ I. Одна из подстановок Эйлера (с. 29):

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - \lambda)$, если у трехчлена есть вещественные корни; λ — один из таких корней.

II. Тригонометрическая или гиперболическая подстановки (с. 42). ◁

См. примеры №№ 19, 26–28, 39–41, 47–49.

11. $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ (с. 33).

▷ Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ разлагается на сумму элементарных дробей, после чего интеграл приводится к сумме интегралов одного из ниже приведенных видов. ◁

12. $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \int P_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ (с. 34).

▷ Используется формула

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = P_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

в которой коэффициенты полинома $P_{n-1}(x)$ и постоянная λ определяются методом неопределенных коэффициентов. ◁

См. пример № 42.

13. $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ (с. 35)

▷ Подстановка $x - \alpha = \frac{1}{t}$. ◁

См. пример № 43.

15. $\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^n \sqrt{ax^2 + c}}$, где n — целое, a, b, c — вещественные (с. 37).

▷ Подстановка $\sqrt{a + \frac{c}{x^2}} = t$, или подстановка Абеля

$$t = \left(\sqrt{\alpha x^2 + \beta} \right)' = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \triangleleft$$

См. пример № 45.

16.
$$\int \frac{(Mx + N) dx}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad \text{где } m \text{ — целое,}$$

M, N, a, b, c, p, q — вещественные (с. 39).

▷ 1) Если $(ax^2 + bx + c) = a(x^2 + px + q)$, то интеграл разбивается на сумму интегралов

$$J_1 = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}}$$

и

$$J_2 = \left(N - \frac{Mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{(2m+1)/2}}.$$

К первому применяется подстановка $t = ax^2 + bx + c$, ко второму — подстановка Абеля (см. п. 14).

2) Если $(ax^2 + bx + c) \neq a(x^2 + px + q)$ и $p \neq b/a$, то применяется подстановка $x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}$, где коэффициенты μ и ν подбираются так, чтобы уничтожить члены в первой степени в обоих трехчленах одновременно (с. 40).

3) Если $(ax^2 + bx + c) \neq a(x^2 + px + q)$ и $p = b/a$, то применяется подстановка $x = t - p/2$ (с. 41). $\triangleleft$

См. пример № 46.

17.
$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (\text{с. 48}).$$

▷ 1) Если

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяют подстановку $t = \cos x$;

2) Если

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяют подстановку $t = \sin x$;

3) Если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{tg} x$;

4) В остальных случаях применяют универсальную подстановку

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

или специальные приемы. $\triangleleft$

См. примеры №№ 53–57.

18. $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$ (с. 50).

▷ 1) Если

$$R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{ch} x$;

2) Если

$$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x),$$

то применяют подстановку $t = \operatorname{sh} x$;

3) Если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, то применяют подстановку $t = \operatorname{th} x$;

4) В остальных случаях применяют универсальную подстановку

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$$

или другие приемы. $\triangleleft$

См. примеры №№ 58, 59.

19. $\int R(\sin^m x, \cos^n x) dx, \quad \int R(\operatorname{sh}^m x, \operatorname{ch}^n x) dx,$ где m, n — целые числа (с. 53)

▷ 1) Если m — нечетное положительное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \cos x$ и $t = \operatorname{ch} x$.

2) Если n — нечетное положительное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \sin x$ и $t = \operatorname{sh} x$.

3) Если $m + n$ — четное отрицательное, то применяют, соответственно, подстановки $t = \operatorname{tg} x$ и $t = \operatorname{th} x$.

4) Если m и n — четные неотрицательные, то применяют формулы понижения степени;

При больших m и n применяют формулы приведения, аналогичные формулам п. 9. $\triangleleft$

См. примеры №№ 60, 61.

20. $\int R(\sin^p x, \cos^q x) dx, \quad \int R(\operatorname{sh}^p x, \operatorname{ch}^q x) dx,$ где p, q — рациональные числа (с. 52).

▷ Подстановкой $t = \sin x$ ($t = \operatorname{sh} x$) приводится к интегралу от дифференциального бинома

$$\int t^p (1 \pm t^2)^{q-1} dt,$$

При больших p и q применяют формулы приведения (с. 54). $\triangleleft$

21. $\int P_n(x) f(x) dx$, где $f(x)$ — тригонометрическая, обратная тригонометрическая, гиперболическая, обратная гиперболическая, показательная или логарифмическая функции.

▷ Интегрирование по частям (с. 15). $\triangleleft$

См. примеры №№ 29–32.

Список литературы

- [1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.– М.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1948.
- [2] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды.: Учеб. пособие для вузов/Под ред. Л.Д.Кудрявцева – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986.
- [3] Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. - Казань: Унипресс, 1998.
- [4] Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1962.

Содержание

1	ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ	3
2	ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ	9
3	ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ	15
4	ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ	19
5	ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ	28
6	ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ	48
7	ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	57
A	Основные соотношения для тригонометрических и гиперболических функций, а также обратных к ним	60
A.1	Тригонометрические функции и обратные к ним . . .	60
A.2	Гиперболические функции и обратные к ним	65
B	Обзор методов интегрирования	70
	Список литературы	77

Сдано в набор . .2005 г. Подписано в печать . .2005 г.
Форм. бум. 60×84 1/16. Печ. л. 5. Тираж 300. Заказ .

Лаборатория оперативной полиграфии КГУ
420045, Казань, ул. Кр. Позиция, 2а