Д.В. Денисов

АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА

МОСКВА
2000

Содержание

1 Функции полезности. Страховые премии **4**

2 Модели индивидуального риска **15**
2.1 Модель одиночного ущерба 15
2.2 Характеристики суммарного ущерба 17

3 Модели коллективного риска **23**
3.1 Распределение суммарного иска 24
3.2 Распределение числа исков 26
3.3 Примеры распределения индивидуальных исков 28
3.4 Свойства обобщенного распределения Пуассона 29
3.5 Точные методы вычисления параметров распределения обобщенного закона Пуассона в дискретном случае 31
3.6 Аппроксимация нормальным распределением величины суммарного иска 35

4 Элементы теории разорения **42**
4.1 Изменение капитала как случайный процесс 42
4.2 Оценка вероятности разорения для случая непрерывного времени 44
4.3 Оценка вероятности разорения для случая дискретного времени . 46
4.4 Распределение капитала. Характеристики максимального суммарного ущерба 50

5 Характеристики дожития. **58**
5.1 Функции выживания. Таблицы смертности. 58
5.2 Аналитические законы смертности. 67
5.3 Отборочные и предельные таблицы. 68

6 Основные виды страхования жизни. **71**
6.1 Нетто-премии для пожизненного и срочного страхования. 71
6.2 Рекуррентные формулы для единовременных нетто-премий. . . . 78
6.3 Коммутационные функции. 80

7 Аннуитеты в страховании жизни. **84**
7.1 Ежегодные аннуитеты. 84
7.2 Аннуитеты с выплатами m раз в год 87
7.3 Непрерывные аннуитеты 90

8 Регулярные премии **95**
8.1 Принцип эквивалентности 95
8.2 Ежегодные нетто-премии 95
8.3 Премии, уплачиваемые m раз в год 97

Введение

Актуарная математика непосредственно связана с деятельностью, которая носит название страхования. Само страхование как система создания специальных фондов для компенсации ущерба от случайных потерь возникло достаточно давно. Например, в древние времена правитель любого государства создавал запасы зерна на случай неурожая в будущем. Наиболее четко данная система обозначилась в эпоху географических открытий и развития морской торговли. Суть дела в том, что в этот период времени отправка морского корабля с товаром в дальнее плавание была всегда сопряжена с возможными потерями вследствие крушения корабля, гибелью экипажа, утратой товара из-за множества причин, начиная от морского пиратства и кончая порчей от морской воды. В такой ситуации люди, которые вкладывали деньги в снаряжение морской экспедиции, рисковали крупными суммами и ущербы возникали достаточно часто. Стремление смягчить последствия возникающих случайных событий и связанных с ними материальных потерь на практике достаточно быстро привело к двум способам действий. В первом случае предприниматели, вкладывающие средства в рискованное дело, объединяются, создавая совместное предприятие и таким образом разделяя случившийся ущерб по участникам. Во втором случае предприниматель платит определенную плату лицу или организации за покрытие будущего случайного ущерба. Здесь уже возникают понятия страхователя, который подвержен случайным ущербам и платит за компенсацию этих ущербов в случае их наступления, и страховщика, который возмещает случайные ущербы, заранее получая за эту услугу деньги. На самом деле эти способы действий связаны между собой. В современной практике любое предприятие, акционерное общество в законодательном порядке обязаны быть застрахованы от разных рисков, в том числе и по основному виду деятельности. С другой стороны, страховая компания как акционерное общество фактически разделяет ответственность между акционерами. Следует подчеркнуть, что целью страхования является финансовая компенсация последствий случайных событий, повлекших за собой материальный ущерб. В то же время, например, азартные игры не являются предметом рассмотрения страхования, поскольку их участники сознательно идут на риск и ситуация может сложиться в их пользу, то есть игроки могут не только понести потери, но и выиграть. Аналогичная ситуация с торговлей ценными бумагами: участник торгов может потерпеть неудачу, но его риски не страхуются, в противном случае страховые компании расплачивались бы за любое неудачное помещение капитала. Таким образом, здесь мы видим два вида рисков, первые принято называть чистыми, как например, кораблекрушение, пожар, и т. п., а вторые - спекулятивными. Предметом интереса страховщиков являются только чистые риски.

До сих пор речь шла о страховании имущества, когда размер ущерба четко определялся в денежном выражении. В личном страховании, например, в страховании жизни, дело обстоит иначе. В таких случаях страховые компании компенсируют не долю ущерба, а выплачивают заранее оговоренную сумму. При этом деликатная проблема оценки человеческой жизни решается самим страхователем. С другой стороны, личное страхование часто напрямую связывается с покупкой в рассрочку дома. При этом размер страхового возмещения зависит от стоимости приобретаемого жилища.

Следует отметить, что страховая деятельность сама по себе перераспределяет денежные средства и аккумулирует их, с одной стороны, для непосредственно страховой деятельности, а с другой, инвестирование этих средств в различные отрасли способствует развитию таковых. Развитие промышленности и сельского хозяйства немыслима без развития страховых институтов. В современной ситуации инвестирование возможно лишь в те объекты, где все риски, обусловленные природой этих объектов, застрахованы. История развития промышленности показывает, что настоящее развитие любого государства начинается после становления страховой системы. Кроме того, качество жизни в государстве легко оценить по степени охвата страхованием его граждан.

Взаимодействие страховых компаний и их клиентов осуществляется путем продажи полисов - договоров, в которых указаны условия страхования. При заключении страхового договора сразу возникает вопрос о цене полиса. Эта цена должна быть приемлемой для клиента и страховой компании одновременно и должна учитывать такие факторы, как вероятность наступления страхового случая, величину возникающего при этом ущерба и т. д. Таким образом, при продаже полиса страховая компания должна сделать расчеты по финансовым обязательствам клиента, имея в виду, что она сама выполнит свои обязательства перед ним в будущем, причем в некотороый случайный момент. Эти расчеты делают специалисты-актуарии. В страховой деятельности невозможно обойтись без актуарных расчетов и выводов. В страховании имущества и других видах краткосрочного страхования необходимо достаточно точно описать характер тех рисков, которые страховая компания на себя берет. На основе информации о рисках необходимо определить величину взимаемой с клиента страховой премии. При этом требуется, с одной стороны, привлекать большое количество договоров, а с другой стороны, необходимо, чтобы по каждому заключенному договору можно было расплатиться. Это означает, что ответственность за обеспечение финансовой устойчивости страховой компании в значительной степени лежит на актуариях. В долгосрочных видах страхования, прежде всего в страховании жизни, появляется дополнительная задача изучать поведение нормы доходности и делать адекватные прогнозы по ее поведению в будущем. Кроме того, специфика страхования жизни диктует необходимость иметь достаточно средств, вложенных в быстроликвидные активы для своевременной выплаты по страховым случаям. Кроме того, для страхования жизни и пенсионного страхования правильная инвестиционная практика обеспечивает и возможность иметь дополнительные доходы страхователям и пенсионерам, играя тем самым и социальную роль. Следовательно, инвестиционная деятельность непосредственно связана с работой актуариев, которые обязаны делать оценки, прогнозы по поведению ценных бумаг на рынке.

1 Функции полезности. Страховые премии

Рассмотрим элементы теории полезности, где наглядно прослеживается, почему люди, организации прибегают к страхованию. Предположим, что имеется какой-либо экономический проект со случайным исходом. Тогда о качестве проекта можно судить по среднему значению экономического результата, таким образом можно сравнивать проекты между собой. На деле такой принцип, называемый принципом ожидаемого среднего, не применим. Для подтверждения этого утверждения всегда приводится такой пример. Пусть в проекте A ожидается чистая прибыль, равная 50000, с вероятностью 1, а в проекте B аналогичный выигрыш равен 200000, но с вероятностью 0.5, и с той же вероятностью ожидается убыток величины 50000. У проекта A средняя прибыль равна 50000, а у проекта B она составляет 75000. С точки зрения сравнения средней прибыли второй проект более предпочтителен, но большинство людей предпочитает проект A. Такие примеры показывают, что для описания процесса принятия решений нужны модели, учитывающие человеческую психологию. Для построения таких моделей введем понятие функции полезности, которое достаточно хорошо показывает, почему возникает потребность в страховании и с помощью которой можно узнать, какую сумму человек готов заплатить за страховку.

Человек, принимающий решения, будет обозначаться далее ЛПР, относительно которого будем считать, что он принимает решения, исходя из принципа ожидаемого среднего функции полезности, которая присуща только ему. Рассмотрим, как может быть определена эта функция и каковы ее свойства. Прежде всего положим, что величина $u(w)$ функции полезности есть величина безразмерная, аргументом этой функции является величина, выражающаяся в денежных единицах. Следовательно, $u(w)$ должна быть возрастающей функцией. Пусть w-сумма, подверженная риску, а значения функции полезности $u(0) = 0, u(w) = 1$. Считая значение $w = 1000$, будем определять значения функции полезности $u(t)$ на интервале $(0, w)$. Для этого, сначала соединив точки $(0,0)$ и $(w, 1)$, прямолинейным отрезком, будем последовательно уточнять вид графика этой функции. Предположим, что риск описывается случайной величиной ущерба X, которая принимает значения 0 и w с вероятностью 0.5. Это означает, что с вероятностью 0.5 сумма w не изменится и с такой же вероятностью ЛПР останется ни с чем. Среднее значение ущерба здесь равно $0.5w = 500$. Если в такой ситуации существует страховая компания, которая может компенсировать весь ущерб, то возникает вопрос: какую максимальную премию согласно заплатить ЛПР на таких условиях? Обозначив эту максимальную премию через G, исходя из принципа ожидаемого среднего функции полезности будем иметь равенство

$$u(w - G) = 0.5u(0) + 0.5u(w),$$

из которого находится G. Соединив три точки $(0,0), (w - G, 0.5), (w, 1)$ ломаной, получим уточнение графика функции. Далее, изменяя значение вероятности ущерба, аналогично для всех точек интервала $(0, w)$ определяются значения функции $u(t), t \in (0, w)$. Если $\mu = E(X)$, а $G > \mu$,то говорят, что построенная функция полезности принадлежит нерасположенному к риску ЛПР. Процесс построения графика функции полезности наводит на мысль, что функция $u(w)$ должна быть не только возрастающей, но и вогнутой. Напомним, что для вогнутых функций справедливо неравенство Йенсена:

$$Eu(X) \leq u(EX).$$

В нашем случае если $G-$ максимальная премия, которую готово заплатить ЛПР за полное возмещение ущерба, то она определяется из условия

$$u(w-G) = Eu(w-X) \tag{1}$$

Из неравенства Йенсена следует, что $u(w-G) \leq u(w-EX) = u(w-\mu)$, откуда вытекает, что $G \geq \mu$. Таким образом, если у ЛПР функция полезности строго вогнута, то ЛПР является нерасположенным к риску, готовым заплатить страховой копании величину большую, чем среднее значение компенсированного ущерба. Именно здесь источник возникновения страховой деятельности.

Если страховщик компенсирует не весь ущерб, а лишь $k-$ю часть его, то уравнение для определения максимальной при таком условии премии будет выглядеть аналогично (1):

$$E(u(w-(1-k)X-G)) = Eu(w-X). \tag{2}$$

В том же случае, когда страховая компания компенсирует не долю ущерба, а выплачивает фиксированную сумму A в случае возникновения этого ущерба, аналогом уравнения (1) будет

$$Eu(w-X-G+A) = pEu(w-X) + (1-p)u(w),$$

где p- вероятность возникновения ущерба.

Рассмотрим теперь проблему заключения страхового договора с точки зрения интересов не страхователя, а страховщика. Пусть $u_I(.)$- функция полезности страховщика. Если по условию компенсируется весь ущерб, то минимальная премия H, которую готов принять страховщик, определяется из равенства

$$u_I(w_I) = Eu_I(w_I+H-X), \tag{3}$$

если страховщик примет меньшую сумму, то среднее значение его функции полезности окажется меньше полезности величины его капитала w_I. Из неравенства Йенсена следует, что

$$u_I(w_I) < u_I(w_I+H-\mu),$$

откуда следует, что $H > \mu$. Если выполнено условие $G \geq H \geq \mu$, то возможна сделка по продаже полиса. Рассмотрим некоторые примеры функций полезности.

Экспоненциальная функция полезности имеет вид

$$u(w) = -e^{-\alpha w}, \alpha > 0.$$

Это возрастающая вогнутая функция, поскольку

$$u^{'}(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0, u^{''}(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0.$$

Эта функция полезности имеет ту особенность, что величина G, определяемая из условия (1), не зависит от величины w:

$$-e^{-\alpha(w-G)} = -Ee^{-\alpha(w-X)} \Longleftrightarrow$$

$$e^{\alpha G} = Ee^{\alpha X} \Longleftrightarrow G = \frac{\log M_X(\alpha)}{\alpha},$$

здесь $M_X(\alpha) = Ee^{\alpha X}$- производящая функция моментов случайной величины X.

Рассмотрим такой пример: пусть функция полезности ЛПР имеет вид $u(w) = -e^{-5w}$, и в распоряжении ЛПР имеются два экономических плана, которые мы будем рассматривать как случайные величины X и Y. Первый план имеет нормальное распределение со средним 5 и дисперсией 2, а второй так же распределен со средним 6 и дисперсией 2.5. Требуется выяснить, какой из этих планов предпочтительнее с точки зрения принципа ожидаемой полезности. Для ответа на этот вопрос заметим, что если случайная величина Z распределена как $N(\mu, \sigma^2)$, то производящая функция моментов есть

$$M_X(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_R e^{\alpha x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_R e^{\frac{-x^2-\mu^2+2\mu x+2\alpha x\sigma^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_R e^{\frac{-x^2+2x(\mu+\alpha\sigma^2)-(\mu+\alpha\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx \cdot e^{\frac{-\mu^2+(\mu+\alpha\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$e^{\frac{\alpha^2\sigma^4+2\alpha\mu\sigma^2}{2\sigma^2}} = e^{\alpha\mu+0.5\alpha^2\sigma^2}.$$

Отсюда следует, что

$$Eu(X) = E(-e^{-5X}) = -M_X(-5) = -1, \quad Eu(Y) = -M_Y(-6) = -e^{1.25} < -1,$$

откуда следует, что план X более предпочтителен. Заметим, что если бы случайная величина Y имела бы дисперсию, равную 2.4, то эти планы имели бы одинаковые значения ожидаемой полезности.

Следующий пример функции полезности-дробно-степенная функция-задается формулой

$$u(w) = w^\gamma, w > 0, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Данная функция соответствует функции полезности не склонного к риску ЛПР, поскольку

$$u^{'} = \gamma w^{\gamma-1} > 0, \quad u^{"} = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} < 0.$$

В отличие от предыдущего примера премия G, находимая из условия (1), зависит от суммы, подверженной риску. Рассмотрим следующий пример.

Функция полезности ЛПР имеет вид $u(w) = \sqrt{w}$. Состояние величины $w = 10$ подвержено риску, имеющему равномерное на интервале $(0, w)$ распределение.

Требуется найти максимальную премию, которую ЛПР готово заплатить за полное возмещение ущерба.

Для нахождения искомой премии рассмотрим уравнение (1):

$$\sqrt{w-G} = E\sqrt{w-X} \iff$$

$$\sqrt{w-G} = \int_0^w \frac{\sqrt{w-x}}{10}dx = \frac{(\sqrt{w})^{3/2}}{15} \iff G = w - w^3/225 = 5\frac{5}{9}.$$

Заметим, что здесь ожидаемый ущерб равен $EX = 5 < G$.

Следующее семейство функций полезности - квадратичные функции

$$u(w) = w - \alpha w^2, \quad \alpha > 0, w < 1/2\alpha.$$

На рассматриваемом интервале для переменной w функция u строго вогнута и возрастает:

$$u^{'} = 1 - 2\alpha w > 0, \quad u^{''} = -2\alpha < 0.$$

Несмотря на привлекательность вида таких функций, результаты, полученные с их помощью, часто не удовлетворяют исследователей. Приведем такой пример.

Пусть функция полезности ЛПР дается как

$$u(w) = w - 0.01w^2, \quad , w < 50.$$

Относительно ущерба известно, что ЛПР сохранит состояние величины w с вероятностью 0.5 и потерпит финансовый убыток, равный 10, с вероятностью 0.5. Как и в предыдущем примере, требуется определить максимальную премию G за полное возмещение ущерба.

В данном случае уравнение (1) приводит к квадратичному уравнению, решая которое для некторых значений w, получим таблицу:

Величина капитала w	Величина премии G
10	5.2769
15	5.3113
20	5.3553
25	5.4138
30	5.4951

Из приведенной таблицы видно, что величина премии возрастает с ростом капитала страхователя, хотя здесь резонно сказать, что чем большей суммой располагает ЛПР, тем с большей случайной потерей он готов смириться и тем менее интересна ему страховка. Следовательно, для тех страхователей, кто придерживается такой логики, последняя функция полезности может не подойти. Рассмотрим более сложный пример.

Известно, что с вероятностью 0.75 собственность не будет повреждена, плотность вероятности ущерба

$$f(x) = 0.25[0.01]e^{-0.01x}, \quad x > 0.$$

Обладатель собственности имеет функцию полезности $u(w) = -e^{-0.005w}$. Требуется вычислить ожидаемый убыток и максимальную страховую премию за полное возмещение ущерба.

Ожидаемый убыток вычислим по определению:

$$EX = 0.25\int_0^\infty x0.01e^{-0.01x}dx = 25.$$

Далее, уравнение (1) в нашей ситуации будет выглядеть так:

$$-e^{-0.005(w-G)} = -0.75e^{-0.005w} - 0.25\int_0^\infty e^{-0.005(w-x)}0.01e^{-0.01x}dx$$

$$\Longleftrightarrow e^{0.005G} = 0.75 + 0.0025\int_0^\infty e^{-0.005x}dx = 1.25,$$

отсюда $G = 200log1.25 = 44.63$.

Заметим, что если в приведенном примере страховщик оплачивал бы половину ущерба, то уравнение для определения премии выглядело бы так:

$$0.75u(w-G) + \int_0^\infty u(w-G-0.5x)f(x)dx = 0.75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)dx,$$

решая которое, мы получили бы значение $G = 28.62$. При этом средний покрытый риск равен 12.5.

Рассмотрим более общий случай, когда в случае ущерба величины x страховщик выплачивает сумму, равную $I(x) \le x$. Поскольку ущерб представляет собой случайную величину X, то в идеале премия, которую страхователь должен заплатить за полис, должна быть равна $EI(X) \le EX$. Здесь возникает вопрос: какая функция I является оптимальной с точки зрения функции полезности? Рассмотрим страхование вида

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < d, \\ x-d, & \text{если} \quad x > d \end{cases}$$

Такой вид страхования называется страхованием, останавливающим потери. Параметр d называется франшизой, величина премии P, как уже отмечалось, в идеале должна быть равной среднему компенсированному ущербу, то есть

$$P = \int_d^\infty (x-d)dF(x)$$

Выражение для величины P может быть представлено в другом виде, что показывает

Лемма 1 *Если у случайной величины ущерба X определено среднее, то*

$$EI_d(X) = \int_d^\infty (1-F(x))dx.$$

Доказательство. Величину $1 - F(x)$ обозначим через $s(x)$, тогда при $A > d$

$$\int_d^A (x-d)dF(x) = (A-d)s(A) + \int_d^A s(x)dx,$$

правая часть данного равенства при увеличении A стремится к $\int_d^\infty s(x)dx$, поскольку при увеличении A величина $As(A)$ бесконечно мала:

$$0 < As(A) = A\int_A^\infty dF(x) < \int_A^\infty xdF(x) \to 0, \quad A \to \infty,$$

что доказывает лемму.

В последнем виде страхования клиент оплачивает лишь разницу между возникшим ущербом и заранее установленной франшизой, если ущерб превосходит эту франшизу. В случае малого ущерба страхователь компенсации не получает. По установленной франшизе выше была установлена нетто-премия P. Напротив, если цена полиса P установлена, то значение франшизы по ней устанавливается однозначно из равенства

$$EI(X) = P \tag{4}$$

после подстановки туда выражения $EI(X) = EI_d(X) = \int_d^\infty (1 - F(x))dx$.

Справедлива

Теорема 1 *Полис для останавливающего потери страхования обеспечивает максимальное значение величины $Eu(w - X + I(X) - P)$ среди всех полисов‘ удовлетворяющих 4 при заданном значении P.*

Доказательство. Из вогнутости функции u имеем

$$u(w-x+I(x)-P) - u(w-x+I_d(x)-P) \leq [I(x) - I_d(x)]u^{'}(w-x+I_d(x)-P). \tag{5}$$

Покажем далее справедливость неравенства

$$[I(x) - I_d(x)]u^{'}(w-x+I_d(x)-P) \leq [I(x) - I_d(x)]u^{'}(w-d-P) \tag{6}$$

Неравенство refut6 очевидно выполнено, если $I(x) = I_d(x)$. В случае $I(x) < I_d(x)$ величина $I_d(x) > 0$, а значит, $x - I_d = d$, откуда следует (6). Если же $I(x) > I_d(x)$, то из неравенства $I_d(x) - x \geq -d$ и вогнутости функции u имеем

$$u^{'}(w-x+I_d(x)-P) \leq u^{'}(w-d-P),$$

отсюда и из неравенства (5) следует:

$$Eu(w-x+I(X)-P) - Eu(w-x+I_d(X)-P) \leq$$

$$E[I(X) - I_d(X)]u^{'}(w-d-P) = (P-P)u^{'}(w-d-P) = 0.\blacksquare$$

Таким образом, при заданном значении P останавливающее потери страхование является оптимальным с точки зрения ожидаемой полезности для страхователя. Кроме того, справедлива

Теорема 2 *При любом заданном значении P останавливающее потери страхование минимизирует величину $Var(X - I(X))$ на множестве всех функций $I(X)$, удовлетворяющих* $\leftharpoondown 5 \leftharpoondown\triangleright$

Справедливость этой теоремы следует из неравенства

$$(x - I(x))^2 - (x - I_d(x))^2 \geq 2(I_d(x) - I(x))(x - I_d(x)) \geq 2(I_d(x) - I(x))d$$

и рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 1.

В данном разделе нами был изложен математический подход к объяснению, почему люди, организации покупают страховые полисы, но, конечно, функции полезности не могут сами по себе дать точной оценки цены полиса в конкретных случаях. На практике все виды рисков, которые принимает страховая компания, имеют свою классификацию, в соответствии с которой составляются правила работы с тем или иным видом рисков. Полное изложение этих фактов можно найти в [5, 6].

ЗАДАЧИ

1. Пусть случайный ущерб X задается плотностью вероятности

$$f(x) = 0.1e^{-0.1x}, \quad x > 0.$$

а. Показать, что для полисов пропорционального страхования

$$I(x) = x/2$$

и останавливающего ущерба

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 10\log 2, \\ x - 10\log 2, & \text{если} \quad x > 10\log 2 \end{cases}$$

показать, что нетто-премия P в обоих случаях равна 5.

б. Вычислить $Var(X - I(X)), Var(X - I_d(X))$.

Решение. Поскольку

$$EX = \int_0^\infty xf(x)dx = 10,$$

то $P = EI(X) = 5$. Аналогично

$$EI_d(X) = \int_d^\infty (x - d)f(x)dx = 10e^{-0.1d}\int_0^\infty te^{-t}dt = 5.$$

Последнее следует из равенства

$$\int te^{-t}dt = -e^{-t}(1 + t).$$

Далее,

$$EX^2 = \int_0^\infty 0.1x^2e^{-0.1x}dx = 100\int_0^\infty t^2e^{-t}dt = 100,$$

отсюда

$$Var(X - I(X)) = Var(0.5X) = 0.25Var(X) = 0.25(100 - 25) = 18.25.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\int t^2 e^{-t} dt = (-t^2 - 2t - 2)e^{-t}.$$

Рассмотрим теперь случайную величину $[X - I_d(X)]$, принимающую значения

$$(x - I_d(x)) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x < 10ln2, \\ 10ln2, & \text{если} \quad x \geq 10ln2. \end{cases}$$

Для вычисления ее дисперсии вычислим первые два момента:

$$E(X - I_d(X)) = EX - EI_d(X) = 5, \quad E(X - I_d(X))^2 =$$

$$\int_0^{10\log 2} x^2 0.1e^{-0.1x} dx + 100\log^2 2 \int_{10\log 2}^{\infty} 0.1e^{-0.1x} dx = 100(1 - \log 2)$$

Отсюда

$$Var(X - I_d(X))^2 = 100(1 - \log 2) - 25 = 75 - 100\log 2 = 5.6853,$$

что почти в 4 раза меньше дисперсии для пропорционального страхования.

2. ЛПР имеет функцию полезности $u(w) = -e^{-\alpha w}, \quad \alpha \in (0, 0.5)$, а величина случайного ущерба имеет χ^2- распределение с n степенями свободы. Показать, что величина максимальной премии G при условии полного возмещения ущерба больше среднего ущерба $\mu = n$.

Решение. Прежде всего следует заметить, что производящая функция моментов χ^2- распределения есть

$$M_X(\alpha) = Ee^{\alpha X} = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty u^{n/2-1} e^{u(\alpha - 1/2)} du =$$

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty ((1/2 - \alpha)u)^{n/2-1} e^{-(1/2-\alpha)u} d((1/2 - \alpha)u)(1/2 - \alpha)^{-n/2} =$$

$$\frac{2^{n/2}}{(1 - 2\alpha)2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty e^{-v} v^{n/2-1} dv = (1 - 2\alpha)^{-n/2},$$

поэтому

$$G = \frac{-n}{2\alpha} \log(1 - 2\alpha) > n,$$

что следует из неравенства $\log(1 - t) < -t, t > 0$.

3. Петербургский парадокс. Рассмотрим бросание монеты, где замечается номер $N-$ первый номер, когда выпадает орел.

а. Определить $E(N), Var(N)$.

б. Показать, что для случайной величины ущерба $X = 2^N$ среднее значение не определено.

с. Для функции полезности $u(w) = \log w$ найти $Eu(X)$.

Решение. Предполагая бросания монеты независимыми, получим, что функция вероятности случайной величины N есть $f(n) = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Полагая $x = 1/2$, найдем моменты случайной величины N.

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = g'(x),$$

где функция

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x/(1-x).$$

Следовательно,

$$E(N) = \frac{1}{2(1-x)^2} = 2.$$

Аналогично находится

$$E(N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = 0.25\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 6,$$

откуда

$$Var(N) = E(N^2) - (E(N))^2 = 2.$$

4. Пусть

$$I_d(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < d, \\ x - d, & \text{если} \quad x > d \end{cases}$$

Для случайного ущерба X :

$$P(X = 3) = P(X = 12) = 0.5, \quad E(I_d(X)) = 3$$

определить значение d.

Решение. Для с.в. $I_d(X)$ в случае $d < 3$ справедливо

$$I_d(X)) = \begin{cases} 3 - d & \text{с вероятностью } 0.5, \\ 12 - d, & \text{с вероятностью } 0.5 \end{cases}$$

Отсюда $E(I_d(X)) = 7.5 - d, \quad d = 4.5$. Это означает, что $d > 3, E(I_d(X)) = 6 - 0.5d = 3$, откуда $d = 6$.

5. Для трех ЛПР функции полезности $u_i(w), \quad i = 1, 2, 3$ определяются как

$$u_1(w) = \begin{cases} 0.075w - 1, & \text{если} \quad w < 10, \\ 0.025w - 0.5, & \text{если} \quad w > 10 \end{cases}$$

$$u_2(w) = \begin{cases} 0.45w - 2, & \text{если} \quad w < 10, \\ 0.15w + 2, & \text{если} \quad w > 10 \end{cases}$$

$$u_3(w) = \begin{cases} 3w - 10, & \text{если} \quad w < 10, \\ w + 10, & \text{если} \quad w > 10 \end{cases}$$

Кто из них имеет одинаковые предпочтения для всех экономических альтернатив?

(А) ЛПР 1 и 2

(Б) ЛПР 2 и 3

(В) ЛПР 1 и 3

(Г) ЛПР 1,2, и 3

(Д) Ни одно из условий (А - Г) не верно.

Решение. Найдем удобный вид для выражений $Eu(X)$ для любой функции

$$u(w)) = \begin{cases} aw + b, & \text{если } w < w_0, \\ cw + d, & \text{если } w > w_0. \end{cases}$$

Обозначая как и ранее $1 - F(x)$ через $s(x)$, получим равенство:

$$Eu(X) = \int_0^{w_0} (ax + b)dF(x) + \int_{w_0}^{\infty} (cx + d)dF(x) =$$

$$b \int_0^{w_0} dF(x) + d \int_{w_0}^{\infty} dF(x) + a \int_0^{w_0} xdF(x) + c \int_{w_0}^{\infty} xdF(x) =$$

$$a \int_0^{w_0} s(x)dx + c \int_{w_0}^{\infty} s(x)dx + (d - b + (c - a)w_0)s(w_0) + b.$$

Для полученных коэффициентов выпишем таблицу:

ЛПР	a	c	$d - b + (c - a)w_0$
1	0.075	0.025	0
2	0.45	0.15	1
3	3	1	0

Из коэффициентов таблицы видно,что предпочтения для 1 и 3 одинаковы. При этом предпочтения первого и второго ЛПР не совпадают. Приведем пример функций $s_{1,2}(x)$, для которых при $w_0 = 10$ имеет место неравенство $Eu_1(X_1) < Eu_1(X_2)$,но в то же время $Eu_2(X_1) > Eu_2(X_2)$:

$$s_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in [0, 8], \\ (11 - x)/3, & \text{если} \quad x \in [8, 10], \\ 0, & \text{если} \quad x > 10. \end{cases}$$

$$s_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in [0, 9], \\ 10 - 10x, & \text{если} \quad x \in [9, 10], \\ 0, & \text{если} \quad x > 10 \end{cases}$$

Для них указанные соотношения выполнены, поскольку

$$\int_0^{10} s_1(x)dx = 9\frac{1}{3}, \quad \int_0^{10} s_2(x)dx = 9\frac{1}{2}, \quad s_1(10) = 1/3, \quad s_2(10) = 0.$$

6. У страхователя на счете осталось 2000 у.е., при этом его функция полезности $u(w) = \sqrt{w}, w > 0$. Медицинские издержки случайны и равномерно распределены в пределах от 0 до 1000 у.е. Страхователь должен принять одно из двух решений:

(А) заплатить премию P за полное покрытие издержек

(Б) заплатить 200 у.е. налога и платить за лечение самому.

Определить такое значение P, при котором эти решения эквивалентны.

Решение. Уравнение для определения P :

$$u(w-P) = Eu(w-200-X).$$

Из этого уравнения получаем:

$$\sqrt{2000-P} = 0.001\int_0^{1000}\sqrt{1800-x}dx,$$

отсюда $P = 716.446$.

7. Функция полезности страхователя задается формулой $u(w) = -e^{-0.01w}$. Для полиса цены G справедливы два условия:

а. иски имеют функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 0.2e^{-0.02x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$$

б. издержки на ведение дела составляют половину ожидаемых исков плюс $0.17G$.

Определить минимальное значение премии G, при которой страховщик продаст полис.

Решение. Ожидаемый ущерб равен $EX = 0.004\int_0^\infty xe^{-0.02x}dx = 10$. обозначив $5 + 0.83G$ через G_1, рассмотрим уравнение

$$u(w) = Eu(w - X + G_1),$$

Из него получим равенство для определения G_1 :

$$e^{0.01G_1} = 0.8 + 0.2Ee^{\alpha X} = 0..8 + 0.004\int_0^\infty e^{-0.01x}dx = 1.2.$$

Следовательно, $G_1 = 100\log 1.2, G = 28$.

2 Модели индивидуального риска

В моделях индивидуального риска изучается поведение одного выделенного сектора из всего набора рисков, принятых страховщиком. В таких моделях считается, что иск может быть предъявлен с вероятностью $q \in (0,1)$ и число возможных исков фиксировано и равно n. Предполагая, что весь ущерб, указанный в иске страхователя, компенсируется страхующей организацией, будем всюду далее отождествлять понятия ущерба и иска.Суммарный иск здесь представляется как сумма заранее известного числа одиночных исков. Если одиночный иск с номером i представляется случайной величиной X_i, то суммарный иск будет равен

$$S = X_1 + X_2 \ldots + X_n.$$

В моделях индивидуального риска изучается поведение случайной суммы S.

2.1 Модель одиночного ущерба

Сначала рассмотрим простейший случай $n = 1, X_1 = X$. Случайная величина X представляется в виде произведения

$$X = IB, \tag{7}$$

где I—индикаторная случайная величина, принимающая значение, равное 1 в том и только в том случае, если иск предъявлется, и 0 в противном случае, а B – случайный размер предъявленного иска. Относительно случайной величины I в (7) таким образом предполагается, что $P(I = 1) = q, \quad P(I = 0) = 1 - q$. Рассмотрим пример.

В краткосрочном страховании жизни вероятность смерти застрахованного лица в результате несчастного случая равна 0.003, а в результате других причин – 0.002. При этом величина страхового возмещения равна 10000 при смерти от несчастного случая и 5000 при смерти от других причин. Это означает, что

$$P(I = 1, B = 10000) = 0.003, \quad P(I = 1, B = 5000) = 0.002,$$

откуда $q = P(I = 1) = 0.005$. Следовательно, условные вероятности

$$P(B = 10000|I = 1) = 0.6, \quad P(B = 5000|I = 1) = 0.4.$$

Кроме того, средний размер возмещаемого ущерба есть $E(X|I = 1) = 10000 \times 0.6 + 5000 \times 0.4 = 8000$. Отсюда и из (7) величина

$$EX = E(X|I = 1)q + E(X|I = 0)(1 - q) = E(X|I = 1)q = 40.$$

Это означает, что в данном случае нетто-премия, равная среднему ущербу, равна 40.

Рассмотрим другой, более сложный пример. При страховании автомобилей известно, что иск предъявляется с вероятностью $q = 0.1$. Распределение величины иска при этом дается равенствами

$$P(B \le x|I=1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0.8(1-(1-x/2000)^2), & \text{если} \quad x \in (0, 2000), \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 2000, \end{cases}$$

$$P(B = 2000|I=1) = 0.2.$$

Следовательно, плотность вероятности величины иска задается условиями

$$f_{B|I}(x|I=1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0.0008\Big(1 - \frac{x}{2000}\Big), & \text{если} \quad x \in (0, 2000). \end{cases}$$

Приведенные соотношения показывают, что страховщик полностью покрывает ущерб величины от 0 до 2000, а свыше 2000 покрывется только величина, равная 2000.

Из соотношения

$$P(X \le x) = P(IB \le x|I=0)P(I=0) + P(IB \le x|I=1)P(I=1)$$

следует, что значение $F(x)$ функции распределения случайной величины X равно

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0.9 + 0.08\Big(1 - \Big(1 - x/2000\Big)^2\Big), & \text{если} \quad x \in (0, 2000), \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 2000. \end{cases}$$

При этом вероятности $f(0) = P(X=0) = 0.9, \quad f(2000) = P(X=2000) = 1 - 0.9 - 0.08 = 0.02$. Кроме того,

$$f(x) = F'(x) = 0.00008\Big(1 - \frac{x}{2000}\Big), \quad x \in (0, 2000).$$

Моменты случайной величины X в таком случае вычисляются по формуле

$$E(X^k) = 0 \times f(0) + 2000^k \times f(2000) + \int_0^{2000} x^k f(x)dx.$$

В частности,

$$EX = 2000 \times 0.02 + 0.00008\int_0^{2000} x\Big(1 - \frac{x}{2000}\Big)dx = 93.333,$$

$$E(X^2) = 133333.333, \quad Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 124622.2284$$

В дальнейшем нам понадобятся известные из теории вероятностей следующие соотношения для случайных величин X, Y:

$$E(X) = E(E(X|Y)), \quad Var(X) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y)). \tag{8}$$

Из этих соотношений следует, что если известны среднее и дисперсия предъявляемых исков, то есть известны

$$\mu = E(B|I=1), \quad \sigma^2 = Var(B|I=1),$$

то в силу равенств

$$E(X|I=0)=0, \quad Var(X|I=0)=0, \quad E(X|I=1)=E(B|I=1)=\mu$$

справедливы соотношения

$$E(X|I)=\mu I, \quad Var(X|I)=\sigma^2 I.$$

Отсюда получаем, что

$$Var(E(X|I)) = \mu^2 Var(I) = \mu^2 q(1-q), \quad E(Var(X|I)) = \sigma^2 q,$$

$$EX = \mu EI = \mu q, \quad VarX = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q.$$

Заметим, что в последнем примере мы могли бы вычислять среднее и дисперсию случайной величины X, исходя из полученных соотношений, так как

$$\mu = E(X|I=1) = \int_0^{2000} x f_{B|I}(x)dx + 2000 \times P(B=2000|I=1) =$$

$$\int_0^{2000} 0.0008x(1-\frac{x}{2000})dx + 2000 \times 0.2 = 933.333,$$

откуда вычисляется $\sigma^2 = E(X^2|I=1) - (E(X|I=1))^2 = 462222.81$. Теперь

$$EX = \mu q = 93.333, \quad VarX = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q = 124622.2284.$$

Полученные формулы для вычисления среднего и дисперсии случайной величины X по заданному распределению ущерба позволяют вычислить аналогичные характеристики для суммы S суммарного ущерба. Представление случайной величины X в виде произведения IB может быть далее обобщено. Например, для страхования жизни величина иска может быть представлена как IJB, где индикаторная случайная величина I равна 1 в том и только в том случае, когда смерть застрахованного наступила в результате несчастного случая, при этом значение J равно 1 в том случае, когда несчастный случай произошел при исполнении служебных обязанностей.

2.2 Характеристики суммарного ущерба

Рассмотрим различные подходы к описанию S- суммы n случайных величин. Поскольку нас интересуют неотрицательные случайные величины, то в непрерывном случае для $n=2$ функция распределения суммы $S=X+Y$ есть свертка функций распределения случайных величин X, Y :

$$F_S(s) = (F_X * F_Y)(s) = \int_0^s F_S(s-y) f_Y(y) dy,$$

аналогичное неравенство справедливо для плотности суммы:

$$f_S(s) = (f_X * f_Y)(s) = \int_0^s f_S(s-y) f_Y(y) dy,$$

в дискретном случае интеграл заменяется на соответствующую сумму. Если F_i- функция распределения случайной величины X_i, а F^k- функция распределения суммы $S_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$, то $F^{k+1} = F_{k+1} * F^k$. В том случае, когда слагаемые в сумме S одинаково распределены, функция F^n называется $n-$кратной сверткой функции F и обозначается как F^{*n}. Необходимо заметить, что в непрерывном случае непосредственное вычисление формулы для выражения свертки как правило представляет трудную задачу. В дискретном случае по заданым таблицам распределений f_i случайных величин X_i можно получить значения распределения свертки исходя из рекуррентной формулы

$$f^{k+1}(s) = \sum_{y \leq s} f_{k+1}(s-y) f^k(y).$$

Подчеркнем, что в таком случае можно вычислить любое значение для распределения S, но если требуется получить качественное описание этого распределения, то в таком случае полезны производящие функции моментов: по определению, производящая функция моментов суммы S есть

$$M_S(t) = Ee^{tS} = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n}).$$

Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ величина

$$M_S(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

В дальнейшем нам потребуются производящие функции моментов для различных типов распределений. Важно отметить, что с одной стороны, производящая функция моментов определяется своим распределением, а с другой, по заданной производящей функции моментов можно однозначно восстановить распределение. Рассмотрим такой пример.

Пусть три независимые случайные X_i величины распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_i = i, i = 1, 2, 3$. Требуется определить плотность распределения суммы $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Для определения искомой плотности определим производящую функцию каждого слагаемого X_i : поскольку плотность распределения случайной величины X_i равна $f_{X_i} = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$, то

$$M_{X_i}(t) = \lambda_i \int_0^\infty e^{tx - \lambda_i x} dx = \frac{\lambda}{\lambda_i - t}, \quad t < \lambda_i.$$

Из независимости случайных величин X_i следует, что производящая функция для суммы

$$M_S(t) = \prod_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i - t}.$$

Теперь искомую плотность распределения будем искать в виде

$$f_S(x) = \sum_i c_i \lambda_i e^{-\lambda_i x},$$

где коэффициенты c_i находятся из уравнения

$$\sum_i \frac{c_i \lambda_i}{\lambda_i - t} = \frac{\prod_i \lambda_i}{\prod_i (\lambda_i - t)}.$$

Подставляя значения параметров λ_i в данное равенство, получим: $c_1 = 3, c_2 = -3, c_3 = 1$. Теперь нетрудно проверить, что производящая функция моментов для случайной величины с плотностью $f_S(t) = 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}$ совпадает с найденной нами функцией $M_S(t)$.

Заметим, что плотность $f_S(t)$ мы могли бы найти непосредственно, последовательно находя свертки:

$$f_1 * f_2(s) = 2\int_0^s e^{-(s-x)} e^{-2x} dx = 2e^{-s}(1 - e^{-s}),$$

$$f_S(s) = f_1 * f_2 * f_3(s) = 6\int_0^s (e^{-(s-x)} - e^{-2(s-x)}) e^{-3x} dx = 3e^{-s} - 6e^{-2s} + 3e^{-3s}.$$

Для обозначения натурального логарифма производящей функции моментов будем далее использовать обозначение $\phi(t) = \log M_X(t)$. Функция $\phi(t)$ позволяет вычислять первые три момента случайной величины X :

$$\phi'(0) = EX, \quad \phi^{(k)}(0) = m_k = E(X - EX)^k, \quad k = 2, 3.$$

Действительно, поскольку

$$M_X(0) = 1, \quad \phi'(t) = M_X'(t)/M_X(t),$$

то $\phi'(0) = EX$. Аналогично соотношения

$$\phi^{(2)}(t) = \frac{M_X^{(2)}(t) M_X(t) - M_X'(t)^2}{M_X(t)^2},$$

$$\phi^{(3)}(t) = \frac{M_X^{(3)}(t) M_X(t)^3 - 3M_X^{(2)}(t) M_X'(t) M_X(t)^2 + 2M_X(t) M_X'(t)^3}{M_X(t)^4}$$

дают равенства для второго и третьего центральных моментов:

$$\phi^{(2)}(0) = VarX, \quad \phi^{(3)}(0) = E(X - EX)^3.$$

Третий способ описания распределения суммы S состоит в том, что при большом значении n и независимых одинаково распределенных случайных слагаемых $X_1, X_2, \ldots X_n$ нормированная случайная величина

$$\frac{S - ES}{\sqrt{Var(S)}}$$

считается нормальной стандартно распределенной случайной величиной. На практике проверкой независимости и сравнением распределений слагаемых X_i часто пренебрегают, поскольку практически такая проверка бывает затруднительной. Кроме того, нормальная аппроксимация распределения S бывает единственным выходом из положения при недостаточной статистике.

Продемонстрируем, как можно использовать нормальную аппроксимацию для ответа на вопрос, каков должен быть размер собранных премий, чтобы с заданной вероятностью p его хватило для выплат по искам. Величину премии, соответствующую ущербу X_i, будем представлять в виде $(1+\theta)EX_i$. Здесь θ - так называемая относительная безопасная нагрузка, а θEX_i - безопасная нагрузка на нетто-премию, которая равна EX_i. Суммарная безопасная нагрузка таким образом равна θES. Для значения $p = 0.95$ будем искать величину θ из равенства

$$P(S \leq (1+\theta)ES) = 0.95,$$

которое эквивалентно

$$P\Big(\frac{S-ES}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}}\Big) = 0.95.$$

Для стандартного нормального распределения 95-я процентиль равна 1.645, откуда и из равенства

$$\frac{\theta ES}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645.$$

получаем значение величины θ. Если слагаемые X_i независимы и одинаково распределены, то величина

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{nVar(X)}}{nEX}.$$

Нетрудно заметить, что с ростом n значение величины θ убывает со скоростью $1/\sqrt{n}$. Рассмотрим пример применения нормальной аппроксимации функции распределения S, взятый нами из [1].

Величина исков в автомобильном страховании подчиняется усеченному экспоненциальному распределению, для которого функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \in (0, L) \\ 1, & \text{если} \quad x \geq L \end{cases}$$

Обладатели полисов распределены по двум категориям. Для $k-$й категории $(k = 1, 2)$ количество клиентов равно n_k, вероятность страхового случая равна q_k, параметры распределения величины иска равны λ_k, и L_k, значения перечисленных параметров приведены в таблице:

k	n_k	q_k	λ_k	L_k
1	500	0.1	1	2.5
2	2000	0.05	2	5

Требуется определить значение относительной безопасной нагрузки θ, при котором вероятность превышения суммарного иска величины суммарной премии равно 0.05.

Здесь суммарный иск S разбивается на сумму $S_1 + S_2$, соответствующую двум категориям страхователей. Каждая из сумм $S_k, k = 1, 2$ представляет собой сумму n_k независимых одинаково распределенных случайных величин исков со средним μ_k и дисперсией σ_k^2 :

$$\mu_k = \int_0^{L_k} x\lambda_k e^{-\lambda_k x} dx + L_k e^{-\lambda_k L_k} = \frac{1 - e^{-\lambda_k L_k}}{\lambda_k},$$

$$\sigma_k^2 = \int_0^{L_k} x^2\lambda_k e^{-\lambda_k x} dx + L_k^2 e^{-\lambda_k L_k} - \mu_k^2 = \frac{1 - 2\lambda_k L_k e^{-\lambda_k L_k} - e^{-2\lambda_k L_k}}{\lambda_k^2}.$$

Если теперь X_k- произвольное слагаемое из суммы $S_k, k = 1, 2$, то из равенств $EX_k = q_k\mu_k, \quad VarX_k = \mu_k^2 q_k(1 - q_k) + \sigma_k^2 q_k$ получим

$$EX_1 = 0.09179, \quad EX_2 = 0.025, \quad VarX_1 = 0.13411, \quad VarX_2 = 0.02436.$$

Отсюда

$$ES = n_1 EX_1 + n_2 EX_2 = 95.89, \quad VarS = n_1 VarX_1 + n_2 VarX_2 = 115.78,$$

и величина

$$\theta = \frac{1.645\sqrt{115.78}}{95.89} = 0.1846.$$

Таким образом, в этом примере нетто-премия равна $ES = 95.89$, а премия с учетом безопасной нагрузки равна $(1 + \theta)ES = 113.5913$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть три случайные величины X_i независимы и равномерно распределены на интервале $(0, 1)$. Найти плотность распределения суммы $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Решение. Плотность распределения каждого слагаемого X_i есть $f(x) = 1, x \in (0, 1)$. Тогда для $s \in (0, 1)$ произведение

$$f(s - x)f(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in (0, s).$$

Следовательно, для $s \in (0, 1)$ значение $f^{*2}(s) = \int_0^s dx = s$. Если же $s \in (1, 2)$, то

$$f(s - x)f(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in (s - 1, 1).$$

Значит, при таких x величина $f^{*2}(s) = \int_{s-1}^1 dx = 2 - s$. Таким образом, мы определили плотность распределения суммы двух слагаемых $X_1 + X_2$. Теперь для $s \in (0, 1)$ свертка

$$f^{*3}(s) = \int_0^s f^{*2}(x)f(s - x)dx = \int_0^s xdx = s^2/2.$$

Если $s \in (1,2)$, то

$$f^{*3}(s) = \int_{s-1}^{1}(s-x)dx + \int_{0}^{s-1}(2-s+x)dx = \frac{2s-s^2}{2} + \frac{4s-s^2-3}{2} = \frac{-2s^2+6s-3}{2}.$$

наконец для $s \in (2,3)$

$$f^{*3}(s) = \int_{s-2}^{1}(2-s+x)dx = \frac{(s-3)^2}{2}.$$

2. Найти значение p из условия $f_1 * f_2 * f_3(4) = 0.1$,если для независимых дискретных случайных величин X_1, X_2, X_3 имеются значения вероятностей $f_i(x)$:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0.4	0.5	p
1	0.4	0.3	$1-p$
2	0.2	0.2	0

Обозначим $f_1 * f_2$ через g, тогда из таблицы следует, что:

$$f_1 * f_2 * f_3(4) = g(2) * f_3(2) + g(3) * f_3(1) + g(4) * f_3(0).$$

При этом:

$$g(4) = f_1(2) * f_2(2), \qquad g(3) = f_1(1) * f_2(2) + f_1(2) * f_2(1),$$
$$g(2) = f_1(0) * f_2(2) + f_1(1) * f_2(1) + f_1(2) * f_2(0).$$

Поскольку

$$g(3) = 0.14, \quad g(4) = 0.04, \quad f_3(1) = 1-p, \quad f_3(0) = p,$$

то отсюда и из условия задачи следует, что $0.14 \cdot (1-p) + 0.04 \cdot p = 0.1$, из чего находим $p = 0.4$.

3. При страховании от огня известно, что вероятность страхового случая равна 0.01, а величина страхового возмещения представляет собой случайную величину, распределенную по закону Парето с плотностью $\alpha x_0^\alpha / x^{\alpha+1}, \quad x > x_0$. Предполагая независимость предъявляемых исков, при количестве страхователей, равном 10000, и значении параметра $\alpha = 3, x_0 = 10$, определить цену полиса, если страховая компания намеревается быть способной покрыть все иски с вероятностью, не менее 0.95.

Решение. Если $X = IB$- случайная величина иска, то среднее страховое возмещение равно

$$\mu = \int_{x_0}^{\infty} \alpha x_0^\alpha / x^\alpha dx = 15,$$

Далее,

$$E(X^2|I=1) = \int_{x_0}^{\infty} \alpha x_0^\alpha / x^{\alpha-1} dx = \alpha x_0^\alpha / (\alpha-2) = 300.$$

$$\sigma^2 = E(X^2|I=1) - \mu^2 = 300 - 225 = 75.$$

Отсюда

$$EX = \mu q = 0.15, \quad VarX = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q = 2.9775.$$

Величина относительной страховой нагрузки θ определяется из условия

$$\theta \geq \frac{1.645\sqrt{nVarX}}{nEX} = 0.1892.$$

Следовательно, цена полиса должна быть не менее $0.15 \times 1.1892 = 0.1784$.

4. Производящая функция моментов случайной величины X есть

$$M_X(t) = (1-2t)^{-5}, \quad t < 0.5.$$

а. Определить характер распределения случайной величины X.

б. Найти $EX, \quad VarX$.

в. Определить величину z из условия $P(X > z) = 0.05$.

Решение. а. Рассмотрим случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметрами α, β, ее плотность распределения есть

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}.$$

Тогда для нее производящая функция моментов есть

$$\int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \Big(\frac{\beta}{\beta - t}\Big)^\alpha,$$

что соответствует нашему выражению при $\alpha = 5, \quad \beta = 1/2$. Таким образом, случайная величина X имеет гамма-распределение с указанными параметрами.

б. Для функции $\phi(t) = \log M_X(t)$ имеем

$$EX = \phi^{'}(0) = 10, \quad VarX = \phi^{''}(0) = 20.$$

в. Заметим, что гамма-распределение при $\alpha = n/2, \quad \beta = 1/2$ совпадает с χ^2-распределением с n степенями свободы. В нашем случае мы получаем, что случайная величина X имеет χ^2-распределение с 10 степенями свободы. Из таблицы доверительных границ для χ^2-распределения получаем, что значение z равно 18.3.

3 Модели коллективного риска

В моделях коллективного риска рассматривается весь портфель полисов, имеющихся в распоряжении страховщика, при этом количество возможных исков заранее неизвестно и представляет собой случайную величину. Таким образом, в отличие от предыдущего раздела мы будем рассматривать более общую модель суммарного иска в виде

$$S = X_1 + X_2 + \dots X_N,$$

где случайные величины $N, X_1, X_2, \dots X_N$ независимы, причем случайные величины $X_1, X_2, \dots X_N$ одинаково распределены и представляют собой величины исков. Из сказанного вытекает, что общий иск S определяется двумя характеристиками: распределением дискретной случайной величины N и функцией распределения случайных величин X_i.

3.1 Распределение суммарного иска

Для описания распределения суммарного иска применим аппарат производящих функций моментов. Поскольку случайные величины X_i одинаково распределены, то вместо X_i всюду далее будем писать просто X. Обозначим $k-$й момент случайной величины X через p_k :

$$p_k = E(X^k).$$

Тогда из (8) следует:

$$ES = E(E(S|N)) = p_1 EN, \quad VarS = E(Var(S|N)) + Var(E(S|N)) =$$

$$E(NVar(S|N)) + Var(E(S|N)) =$$

$$E(N)VarX + p_1^2 VarN = (p_2 - p_1^2)EN + p_1^2 VarN.$$

Аналогично выводится выражение для производящей функции моментов суммарного иска S:

$$M_S(t) = Ee^{tS} = E(E(e^{tS}|N)) = E(M_X(t)^N) = E(e^{N \log M_X(t)}) = M_N(\log M_X(t)).$$

Полученное выражение позволяет сразу получить формулу для производящей функции случайной суммы S, если таковые имеются для величин N, X. Рассмотрим пример.

Пусть N имеет геометрическое распределение:

$$P(N = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $0 < q < 1, \quad p = 1 - q$. Тогда

$$M_N(t) = Ee^{tN} = \sum_{n=0}^{\infty} p(qe^t)^n = \frac{p}{1 - qe^t},$$

откуда

$$M_S(t) = \frac{p}{1 - qM_X(t)}.$$

Если здесь случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 1$, то $M_X(t) = (1-t)^{-1}, \quad t < 1$ и тогда при $t < 1$ функция

$$M_S(t) = p/(1 - \frac{q}{1-t}) = (p - pt)/(p - t) = (p^2 - pt + pq)/(p - t) = p + q\frac{p}{p-t}.$$

Полученное равенство позволяет легко подобрать функцию распределения суммарного иска S, именно, S имеет функцию распределения

$$F_S(x) = p \times 1 + q \times (1 - e^{-px}) = 1 - qe^{-px}.$$

Последнее справедливо, поскольку для этой функции распределения производящая функция моментов есть

$$pe^{t\cdot 0}q\int_0^{\infty} pe^{-px+tx}dx = p + \frac{q}{p-t},$$

что совпадает с выражением для $M_S(t)$. Заметим, что $F_S(0) = p$, поэтому S имеет смешанное распределение.

Для функции распределения суммы S справедливо очевидное равенство

$$F(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \le x | N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x)P(N = n)$$

Для дискретного случая аналогично получаем равенство для распределения дискретной суммы S :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)P(N = n).$$

В этом случае вероятности $p^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \ldots X_n = x)$ легко вычисляются по рекуррентным формулам

$$p^{*(n+1)}(x) = \sum_{y \le x} p(y)p^{*n}(x - y).$$

В некоторых случаях для непрерывных распределений плотность распределения $p^{*n}(x)$ определяется аналитически. Например, для экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 1$ функция

$$p^{*n}(x) = \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Данное равенство очевидно для случая $n = 1$, и если предположить его справедливость для произвольного n, то при $n + 1$ по определению плотность

$$p^{*(n+1)}(s) = \int_0^s p^{*n}(s - x)e^{-x}dx = \int_0^s \frac{e^{-(s-x)}(s-x)^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{-x}dx =$$

$$-\frac{e^{-s}}{(n-1)!}\int_0^s (s - x)^{(n-1)}dx = \frac{e^{-s}s^n}{n!},$$

откуда следует справедливость выражения для $p^{*n}(x)$. Следовательно, для экспоненциального распределения случайной величины X вероятность

$$P(S > s|N = n) = \int_s^\infty \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx = -\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}\Big|_s^\infty + \int_s^\infty \frac{e^{-x}x^{n-2}}{(n-2)!}dx =$$

$$\frac{e^{-s}s^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{-s}s^{n-2}}{(n-2)!} + \dots e^{-x},$$

откуда вытекает, что

$$1 - F_S(s) = \sum_{n=1}^\infty P(N = n)P(S > s|N = n) = \sum_{n=1}^\infty P(N = n)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{e^{-s}s^i}{i!}.$$

3.2 Распределение числа исков

Первое распределение, которое мы рассмотрим - это распределение Пуассона:

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В таком случае $EN = VarN = \lambda$, поэтому для пуассоновского распределения числа N

$$ES = \lambda p_1, \quad VarS = \lambda p_2. \tag{9}$$

Нетрудно получить выражение для производящей функции:

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)},$$

откуда

$$M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}. \tag{10}$$

Всюду далее будем называть такую случайную величину S случайной величиной, имеющей *обобщенное распределение Пуассона*. Такое распределение определяется двумя характеристиками: значением параметра λ и функцией распределения $P(x)$ случайной величины X. Недкапиталом обобшенного распределения Пуассона является совпадение среднего и дисперсии числа N. В частности, когда дисперсия превосходит среднее для N, то данное распределение не подходит.

Рассмотрим другое распределение числа исков N- *отрицательное биноми' альное распределение*:

$$P(N = n) = \binom{r+n-1}{n}p^r q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где величины

$$\binom{r+n-1}{n} = \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{n!}$$

суть коэффициенты разложения функции

$$f(x) = (1-x)^{-r}$$

по формуле Маклорена. Это распределение определяется двумя параметрами $r > 0$ и $p \in (0,1), q = 1-p$. Из равенства

$$(1-x)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

следует выражение для производящей функции моментов отрицательного биномиального распределения:

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} p^r q^n e^{tn} =$$

$$p^r \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} (qe^t)^n = p^r (1-qe^t)^{-r} = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r, \quad qe^t < 1.$$

Отсюда легко получить

$$EN = \frac{rq}{p}, \quad VarN = \frac{rq}{p^2}.$$

Из этих равенств следует, что для рассматриваемого распределения $EN < VarN$.

Будем говорить, что суммарный иск S имеет *обобщенное отрицательное биномиальное распределение*, если число исков имеет отрицательное биномиальное распределение, а случайные величины индивидуальных исков независимы и одинаково распределены.

Обобщенное отрицательное биномиальное распределение определяется параметрами r, p и функцией распределения индивидуального иска $P(x)$. Для производящей функции моментов обобщенного отрицательного биномиального распределения справедливо равенство

$$M_S(t) = \left(\frac{p}{1-qM_X(t)}\right)^r \tag{11}$$

Отсюда получаем, что

$$ES = \frac{rq}{p} p_1, \quad VarS = \frac{rq}{p} p_2 + \frac{rq^2}{p^2} p_1^2. \tag{12}$$

Мы рассмотрели некоторые примеры распределений числа исков. Приведем в таблице основные свойства этих и некоторых других распределений:

Распределение N	$P(N=n)$	EN	$VarN$	$M_N(t)$
Бернулли	$np^n+(1-n)q^{1-n}$ $q=1-p,\ n\in\{0,1\}$	p	pq	pe^t+q
Биномиальное	$\binom{m}{n}p^nq^{m-n}$	pm	pqm^2	$(pe^t+q)^m$
Геометрическое	pq^n	q/p	q/p^2	$p/(1-qe^t)$
Пуассоновское	$e^{-\lambda}\lambda^n/n!$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Отрицательное биномиальное	$\binom{r+n-1}{n}p^rq^n$	rq/p	rq/p^2	$(p/(1-qe^t))^r$
Логарифмическое	$-p^n/(n\log q)$	$-p/(q\log q)$	$-p/(q^2\log q)$	$\log(1-pe^t)/\log q$

3.3 Примеры распределения индивидуальных исков

При исследовании свойств распределений индивидуальных исков все зависит от природы возможных ущербов. Очевидно, что при страховании космических рисков возможные ущербы имеют распределение, отличное от распределения ущербов в автомобильном или в медицинском страховании. Рассмотрим небольшой круг примеров распределения индивидуальных исков.

При страховании от огня последствия как для потерпевшего владельца поврежденного объекта, так и для страховой компании могут оказаться весьма тяжелыми, поэтому такого рода ущербы описываются распределениями с "тяжелыми хвостами," то есть плотность такого распределения убывает достаточно медленно при стремлении аргумета к бесконечности. Примерами таких распределений являются логнормальное распределение, распределение Парето и комбинация экспоненциальных распределений с плотностью вида $p(x)=\sum p_i\alpha_i e^{-\alpha_i x}$, $\sum p_i=1$.

В автомобильном страховании результатом дорожного инцидента являются, как правило, менее значительные с материальной точки зрения последствия. Кроме того, статистика по таким происшествиям гораздо более богата и поэтому возможные иски могут быть предсказаны более точно. В силу этих обстоятельств индивидуальные иски в автомобильном страховании принято описывать гамма-распределением, параметры распределения подбираются по имеющейся статистике.

В нижеследующей таблице приведены некоторые примеры распределений индивидуальных исков и их основные характеристики.

Распределение X	$f(x)$	EX	$VarX$	$M_X(t)$
Экспоненциальное	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t)$
Гамма	$\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha)$	α/β	α/β^2	$(\frac{\beta}{\beta-t})^\alpha$
Нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-0.5((x-a)/\sigma)^2}$	a	σ^2	$e^{at+0.5\sigma^2t^2}$
Логнормальное	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-0.5((\log x-a)/\sigma)^2}$	$e^{a+0.5\sigma^2}$	$e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	-
Парето	$\alpha/(1+x)^{\alpha+1}$	$\frac{1}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{[(\alpha-1)^2(\alpha-2)]}$	-
Вейбулла	$\alpha x^{\alpha-1}e^{-x^\alpha}$	$\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$	$\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})$	-

3.4 Свойства обобщенного распределения Пуассона

Если параметр λ, определяющий случайную величину N, не является фиксированной величиной, а представляет собой случайную величину Λ, то распредление числа исков N является сложным (mixed) распределением. Такие распределения применяются, когда, например, страхователи разбиты на неоднородные группы, для каждой из которых характеристики случайного числа исков различны. Если случайная величина Λ имеет плотность распределения $u(\lambda,)$ то для такого распределения

$$P(N=n)=\int_0^\infty P(N=n|\Lambda=\lambda)u(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}u(\lambda)d\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$EN=E(E(N|\Lambda))=E(\Lambda),\quad VarN=E(\Lambda)+Var(\Lambda).$$

то есть, как и для отрицательного биномиального распределения $EN < VarN$. Аналогичным образом получаем, что

$$M_N(t)=E(e^{tN})=E(E(e^{tN}|\Lambda))=E(e^{\Lambda(e^t-1)})=M_\Lambda(e^t-1).$$

Отсюда следует, что для производящей функции моментов суммарного иска S

$$M_S(t)=M_\Lambda(M_X(t)-1).$$

Рассмотрим следующий пример.

Пусть случайная величина Λ имеет гамма-распределение с параметрами α,β, то есть плотность $u(x)$ случайной величины Λ есть

$$u(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x},\quad x>0.$$

Напомним, что по определению функция

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

и при $\alpha=1,\quad \beta=n$ гамма-распределение является χ^2-распределением с n степенями свободы. Для гамма-распределения производящая функция моментов

$$M_\Lambda(t)=\Big(\frac{\beta}{\beta-t}\Big)^\alpha,\quad t<\beta,$$

следовательно,

$$M_S(t)=\Big(\frac{\beta}{\beta+1-e^t}\Big)^\alpha=\Big(\frac{\beta/(\beta+1)}{1-(1-\beta/(\beta+1))e^t}\Big)^\alpha,$$

это означает, что случайная величина N имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r = \alpha, \quad p = \beta/(\beta+1), \quad q = 1/(\beta+1)$. Кроме того,

$$M_S(t) = \Big(\frac{\beta}{\beta + 1 - M_X(t)}\Big)^{\alpha},$$

откуда следует, что

$$ES = \frac{\alpha p_1}{1+\beta}, \quad VarS = \frac{\alpha p_2}{1+\beta} + \frac{\alpha p_1^2}{(1+\beta)^2}.$$

Вернемся к случаю, когда параметр распределения Пуассона является фиксированной величиной. Справедлива

Теорема 3 *Если независимые случайные суммы $S_i, i = 1, 2, \dots m$ имеют обобщенное распределение Пуассона с параметрами λ_i и функциями распределения величины исков $P_i(x)$, то сумма*

$$S = S_1 + S_2 + \dots S_m \tag{13}$$

имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

и функцией распределения величины иска

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x).$$

Доказательство. Из представления (10) и независимости сумм S_i имеем

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) = exp\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (M_{S_i}(t) - 1)\}.$$

Полученное равенство перепишем в виде

$$M_S(t) = exp\{\lambda [\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_{S_i}(t) - 1]\},$$

откуда следует, что функция $M_S(t)$ является производящей функцией моментов случайной суммы, имеющей обобщенное распределение Пуассона с параметром λ и функцией распределения величин иска $P(x)$.■

Лемма 2 *Пусть случайные величины $N_i, i = 1, 2, \dots m$ независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_i. Тогда для произвольных вещественных коэффициентов $x_1, x_2, \dots x_m$ сумма*

$$S = \sum_{i=1}^{m} x_i N_i \tag{14}$$

имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

распределение величины индивидуального иска равно

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda}, & \textit{если} \quad x = x_i \in \{x_1, x_2, \dots x_m\} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что каждое слагаемое в сумме (14) имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λ_i и случайной величиной иска, принимающей значение x_i с вероятностью 1. Теперь остается воспользоваться теоремой 3. ■

3.5 Точные методы вычисления параметров распределения обобщенного закона Пуассона в дискретном случае

Если в обобщенном законе Пуассона имеет место дискретное распределение величины иска, то справедливо утверждение, обратное теореме 3. Именно, пусть индивидуальные иски, как и ранее, независимы, одинаково распределены и принимают значения $x_1, x_2, \dots x_m$ с соответствующими вероятностями

$$\pi_i = p(x_i). \tag{15}$$

Пусть далее N_i-количество слагаемых в сумме S, принимающих значение x_i. Тогда сумма

$$S = x_1 N_i + x_2 N_2 + \dots x_m N_m. \tag{16}$$

При этом, конечно, величина $N = N_1 + N_2 + \dots N_m$. В общем случае случайные величины зависимы, но для обобщенного распределения Пуассона эти случайные величины оказываются независимыми. Прежде чем доказывать этот интересный факт, рассмотрим полиномиальное распределение и соответствующую производящую функцию моментов. Пусть производится n независимых испытаний, каждое испытание имеет m возможных исходов $i = 1, 2, \dots m$, при этом π_i - вероятность исхода i, не зависит от номера испытания. Далее, N_i- случайное количество испытаний с исходом i. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} N_i = n$$

а совместное распределение случайных величин $N_1, N_2, \dots N_m$ определяется как

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_m = n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m};$$

Тогда производящая функция моментов для такого распределения определяется как

$$E\{exp\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\} = (\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} \cdots + \pi_m e^{t_m})^n.$$

Таким образом полиномиальное распределение определяется количеством испытаний n и набором вероятностей $\{\pi_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Справедлива

Теорема 4 *Если сумма (13) имеет обобщенное распределение Пуассона, определяемое параметром λ и дискретным распределением величин исков (15), то случайные величины $N_1, N_2, \ldots, N_m$ независимы и имеют пуассоновское распределение с параметрами $\lambda_i = \lambda\pi_i$.*

Доказательство. Определим производящую функцию моментов совместного распределения случайных величин $N_1, N_2, \ldots, N_m$. Для этого заметим, что эти случайные величины определены так же, как соответствующие величины в полиномиальном распределении. Поэтому при условии $N = n$ совместное распределение $N_1, N_2, \ldots, N_m$ полиномиально. Отсюда вытекает, что

$$E\{exp\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\{exp\sum_{i=1}^{m} t_i N_i | N = n\} P(N = n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} + \ldots + \pi_m e^{t_m})^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_1 \pi_1 e^{t_1} + \lambda_2 \pi_2 e^{t_2} + \ldots + \lambda_m \pi_m e^{t_m})^n / n! =$$

$$exp(-\lambda) exp(\lambda\pi_1 e^{t_1} + \lambda\pi_2 e^{t_2} + \ldots + \lambda\pi_m e^{t_m}) = \prod_{i=1}^{m} exp[\lambda\pi_i(e^{t_i} - 1)],$$

в последнем равенстве мы использовали условие $\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$. В этом равенстве получено разбиение производящей функции совместного распределения на произведение производящих функций с параметрами t_i, причем в каждый $i-$ й множитель входит только параметр t_i, что означает независимость случайных величин N_i. Кроме того, каждый множитель $exp[\lambda\pi_i(e^{t_i} - 1)]$ представлет собой производящую функцию моментов пуассоновского распределения с параметром $\lambda_i = \lambda\pi_i$. ■

Доказанная теорема имеет важное практическое применение. Именно, если суммарный иск имеет обобщенное распределение Пуассона, определяемое параметром λ и дискретным распределением величин исков $\pi_i = p(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m$, то вероятности $f(x_i) = P(S = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m$ можно вычислить, получив свертку распределений m случайных величин $x_i N_i$, то есть свертку фиксированного числа слагаемых.

Как следствие из доказанной теоремы следует заметить, что для суммарного иска (16) справедливы равенства

$$ES = \sum_{i=1}^{m} x_i \lambda_i, \quad VarS = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \lambda_i.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть общий иск S имеет обобщенное распределение Пуассона, определяемое параметром λ и дискретным распределением величины иска:

$$\lambda = 0.5, \quad P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 4) = P(X = 5) = 0.25. \tag{17}$$

Требуется найти величины $f(x) = P(S = x), \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Сначала применим прямой метод вычисления сверток по формуле

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S = x|N = n)P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{*n}(x)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad x \geq 1,$$

$$f(0) = e^{-\lambda} = 0.6071991.$$

Полученные данные приведем в таблице

x	$p(x)$	$p^{*2}(x)$	$p^{*3}(x)$	$p^{*4}(x)$	$p^{*5}(x)$	$f(x)$
0	0	0	0	0	0	0.60653
1	0.5	0	0	0	0	0.15163
2	0	0.25	0	0	0	0.01890
3	0	0	0.125	0	0	0.001585
4	0.25	0	0	0.0625	0	0.0759
5	0.25	0.25	0	0	0.03125	0.094775
n	1	2	3	4	5	
$P(N = n)$	0.303265	0.0758	0.0126	0.00158	0.000158	

Теперь вычислим те же величины $f(x)$ используя результат теоремы 4, используя равенства

$$f(x) = P(N_1 + 4N_4 + 5N_5 = x), \quad \lambda_1 = 0.25, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 0.125,$$

$$P(N_i = 0) = e^{-\lambda_i}, \quad P(iN_i = x) = \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{x/i}}{(x/i)!}, \quad i = 1, 4, 5$$

и представляя данные в аналогичной таблице:

x	$P(N_1 = x)$	$P(4N_4 = x)$	$P(5N_5 = x)$	$P(N_1 + 4N_4 = x)$	$f(x)$
0	0.7788	0.882497	0.882497	0.687289	0.60653
1	0.1947	0	0	0.171822	0.151632
2	0.024338	0	0	0.021478	0.01894
3	0.002029	0	0	0.00179	0.00158
4	0.000127	0.110312	0	0.086023	0.075915
5	0.00000634	0	0.110312	0.01896	0.094775

Как видно из построения таблиц, последний метод имеет преимущество по количеству вычислений. Рассмотрим третий метод вычисления вероятностей распределения, который применим для целочисленных значений исков. Прежде всего заметим, что поскольку случайные величины одинаково распределены, то условные средние $E(X_k|X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = x)$ одинаковы для всех $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Поскольку их сумма равна x, то

$$E(X_k|X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = x) = x/(n+1)$$

для всякого $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Если возможные значения X_k суть $\{0, 1, 2, \ldots\}$, то отсюда и из независимости X_i следует равенство

$$E(X_k|X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = x) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(X_k = i|X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = x) =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} ip(i)p^{*n}(x-i)}{p^{*(n+1)}(x)} = \frac{x}{n+1}.$$

Следовательно, для всякого $x \geq 1$ вероятность

$$f(x) = P(S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*(n+1)}(x)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{x}\right)\Big(\frac{x}{n+1}p^{*(n+1)}(x)\Big) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{x}\right)ip(i)p^{*n}(x-i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\frac{i}{x}p(i)p^{*n}(x-i) =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda p(i)\sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x-i)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda_i f(x-i).$$

Следовательно, здесь мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda_i f(x-i). \tag{18}$$

Например, для $x = 1, 2$ отсюда вытекает, что

$$f(1) = \lambda_1 f(0) = \lambda_1 e^{-\lambda}, \quad f(2) = 0.5\lambda_1 f(1) + \lambda_2 f(0) \quad \text{и т. д.}$$

В примере с данными (17) полученные формулы дают равенства:

$$f(0) = e^{-\lambda} = 0.60653, \quad f(1) = \lambda_1 f(0) = 0.151632,$$

$$f(2) = 0.5\lambda_1 f(1) = 0.018954, \quad f(3) = \frac{1}{3}\lambda_1 f(2) = 0.00158,$$

$$f(4) = 0.25\lambda_1 f(3) + \lambda_4 f(0) = 0.075915, \quad f(5) = \frac{1}{5}\lambda_1 f(4) + \frac{4}{5}f(1) + \lambda_5 f(0) = 0.094775.$$

Таким образом, если распределение исков дискретно и возможные значения исков целочисленны, то полученные рекуррентные формулы позволяют в еще большей степени упростить вычисление параметров распределения суммарного иска.

3.6 Аппроксимация нормальным распределением величины суммарного иска

До сих пор нормальная аппроксимация распределения суммарного иска использовалась нами только в моделях индивидуального иска. Для рассматриваемых моделей коллективного риска имеет место

Теорема 5 *Если суммарный иск S имеет обобщенное пуассоновское или обоб› щенное отрицательное биномиальное распределение с параметрами λ или r, p соответственно и функцией распределения индивидуального иска $P(x)$‹ то рас› пределение случайной величины*

$$Z = \frac{S - ES}{\sqrt{VarS}}$$

стремится к стандартному нормальному распределению при $\lambda \to \infty$ для обоб› щенного пуассоновского и при $r \to \infty$ для отрицательного биномиального рас› пределения▷

Доказательство. Если $\sigma_S = \sqrt{VarS}$, то производящая функция моментов случайной величины Z равна

$$M_Z(t) = exp(-\frac{tES}{\sigma_S})M_S(\frac{t}{\sigma_S}),$$

и теорема будет доказана, если мы покажем, что для функции $\phi(t) = \log M_Z(t)$ будет

$$\phi(t) \to t^2/2$$

при $\lambda \to \infty$ для обобщенного пуассоновского и при $r \to \infty$ для отрицательного биномиального распределения. Будем далее использовать разложение производящей функции

$$M_X(u) = 1 + p_1 u + 0.5 p_2 u^2 + o(u^2). \tag{19}$$

Для обобщенного пуассоновского распределения из (9) имеем:

$$ES = \lambda p_1, \quad \sigma_S^2 = \lambda p_2,$$

поэтому, подставляя $u = t/\sigma_S$ в равенство (19), получим

$$\phi(t) = \lambda(M_X(t/\sigma_S) - 1) - tES/\sigma_S =$$

$$\lambda\left(\frac{p_1 t}{\sqrt{\lambda p_2}} + \frac{1}{2}\frac{p_2 t^2}{\lambda p_2} + o(\frac{1}{\lambda})\right) - \frac{t\lambda p_1}{\sqrt{\lambda p_2}} = \frac{1}{2}t^2 + o(1) \to \frac{1}{2}t^2 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Для обобщенного отрицательного биномиального распределения из (12) следует:

$$ES = r(q/p)p_1, \quad \sigma_S^2 = r(q/p)p_2 + r(q^2/p^2)p_1^2,$$

поэтому из (19) получаем

$$\phi(t) = r\log\left[p/\left(1-q\left(1+\frac{tp_1}{\sigma_S}+\frac{t^2p_2}{2\sigma_S^2}+o(1/r)\right)\right)\right]-tES/\sigma_S =$$

$$r\log\left[1/\left(1-\frac{tqp_1}{p\sqrt{r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2}}-\frac{t^2qp_2}{2p^2(r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2)}-o(1/r)\right)\right]=$$

$$\frac{rtqp_1}{p\sqrt{r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2}}+\frac{rt^2qp_2}{2p(r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2)}+$$

$$\frac{rt^2q^2p_1^2}{2p^2(r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2)}+o(1)-\frac{rtqp_1}{p\sqrt{r(q/p)p_2+r(q^2/p^2)p_1^2}}=$$

$$\frac{qt^2}{2p^2}\frac{p_2p+p_1^2q}{(q/p)p_2+(q^2/p^2)p_1^2}+o(1)=\frac{t^2}{2}+o(1)\to\frac{t^2}{2}\quad \text{при}\quad r\to\infty. \quad \blacksquare$$

Обозначая, как и ранее, через $\phi(t)$ натуральный логарифм производящей функции моментов суммарного иска, для обобщенного распределения Пуассона будем иметь:

$$\phi(t)=\lambda(M_X(t)-1),\quad \phi^{(k)}(t)=\lambda M_X^{(k)}(t),\quad k\geq 1,$$

отсюда и из разд. 2.2 следует, что для обобщенного пуассоновского распределения первые три центральных момента вычисляются достаточно просто:

$$ES=\phi^{'}(0)=\lambda p_1,\quad VarS=\phi^{(2)}(0)=\lambda p_2,\quad E(S-ES)^3=\phi^{(3)}(0)=\lambda p_3. \qquad (20)$$

Из теоремы 5 следует, что при больших значениях λ суммарный иск можно считать нормально распределенной случайной величиной со средним и дисперсией, равными соответственно λp_1 иλp_2. На самом деле суммарный иск можно аппроксимировать не только нормальным распределением. Именно, пусть гамма-функция распределения с параметрами α,β есть

$$G(x:\alpha,\beta)=\int_0^x\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt,$$

тогда смещенная на x_0 гамма-функция распределения определяется как

$$H(x:\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0:\alpha,\beta).$$

Следует отметить, что введенная таким образом функция распределения является трехпараметрической. Если случайная величина Y имеет смещенное на x_0 гамма-распределение, то ее производящая функция моментов

$$M_Y(t)=e^{tx_0}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

обусловливает вид функции $\phi_Y(t) = \log M_Y(t)$:

$$\phi_Y(t) = tx_0 + \alpha \log \frac{\beta}{\beta - t}$$

Отсюда вытекает (см. разд. 2.2), что

$$EY = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}, \quad VarS = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad E(S - ES)^3 = \frac{2\alpha}{\beta^3}. \tag{21}$$

Считая теперь величину β бесконечно большой, получим

$$\phi_Y(t) = tx_0 + \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{\alpha}{2}\frac{t^2}{\beta^2} + o(\alpha t^2/\beta^2) =$$

$$t(x_0 + \frac{\alpha}{\beta}) + \frac{t^2}{2}\frac{\alpha}{\beta^2} + o(\alpha t^2/\beta^2).$$

Из полученного равенства для функции $\phi_Y(t)$ непосредственно следует

Теорема 6 *Если параметры α, β, x_0 смещенного гамма-распределения таковы, что $\alpha \to \infty, \quad \beta \to \infty, \quad , x_0 \to -\infty$, причем*

$$x_0 + \frac{\alpha}{\beta} = a, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = \sigma^2,$$

то распределение $H(x : \alpha, \beta, x_0)$ сходится к $N(a, \sigma^2)$– нормальному распределению с параметрами a, σ^2.

Из этой теоремы следует, что если для обобщенного распределения Пуассона заданы моменты (20), то это распределение можно аппроксимировать смещенным гамма-распределением, определив параметры последнего из условий (21):

$$\lambda p_1 = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lambda p_2 = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad \lambda p_3 = \frac{2\alpha}{\beta^3},$$

которые дают

$$\alpha = 4\frac{\lambda p_2^3}{p_3^2}, \quad \beta = 2\frac{p_2}{p_3}, \quad x_0 = \lambda p_1 - 2\frac{\lambda p_2^2}{p_3}.$$

Найденные отсюда параметры α, β, x_0 удовлетворяют условиям теоремы 6 при $a = \lambda p_1, \quad \sigma^2 = \lambda p_2, \quad \lambda \to \infty$. Для обобщенного отрицательного биномиального распределения имеет место другой факт, именно, справедлива

Теорема 7 *Если члены последовательности случайных величин $\{S_k\}$ имеют обобщенное отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r, p(k)$ и функцией распределения индивидуального иска $P(x)$, при этом отношение*

$$q(k)/p(k) = kq/p, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q = 1 - p$ постоянна, то распределение случайной величины

$$Z_k = S_k/ES_k$$

стремится к распределению $G(x : r, r)$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Из (11) следует, что производящая функция моментов случайной величины $Z_k = S_k/ES_k$ равна

$$\left(\frac{p(k)}{1-q(k)M_X(t/ES_k)}\right)^r.$$

Поскольку по условию теоремы $ES_k \to \infty$, то при этом

$$M_X(t/ES_k) = 1 + \frac{p_1}{ES_k}t + \frac{1}{2}\frac{p_2}{(ES_k)^2}t^2 + o(1/(ES_k)^2),$$

а отсюда

$$M_{Z_k}(t) = \left(\frac{p(k)}{1-q(k)-q(k)p_1t/ES_k - 0.5q(k)p_2(t/ES_k)^2 - o(1/(ES_k))^2}\right)^r =$$

$$\left(1 - \frac{t}{r} - \frac{1}{2}\frac{p(k)}{q(k)}\frac{p_2t^2}{p_1^2r^2} - o(1/k^2)\right)^{-r} =$$

$$\left(1 - \frac{t}{r} - \frac{1}{2}\frac{p}{qk}\frac{p_2t^2}{p_1^2r^2} - o(1/k^2)\right)^{-r} \to \left(1-\frac{t}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

последнее выражение, а именно $(r/(r-t))^r$, есть производящая функция распределения $G(x : r, r)$. ■

Замечание. При больших номерах k производящая функция моментов S_k приближенно равна

$$\left(\frac{r}{r-tES_k}\right)^r = \left(\frac{r}{r-tq(k)rp_1/p(k)}\right)^r =$$

$$\left(\frac{u}{u-t}\right)^r, \quad \text{где} \quad u = p(k)/p_1q(k),$$

то есть распределение S_k с ростом k беконечно мало отличается от распределения $G(x : r, u)$. Кроме того, при выполнении условий доказанной теоремы

$$Var(S_k/ES_k) = VarS_k/(ES_k)^2 = \frac{pp_2}{rkqp_1^2} + \frac{1}{r} \to \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим пример. Пусть суммарный иск S имеет обобщенное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 12$ и случайной величиной индивидуального иска, равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$. Требуется оценить вероятность $P(S < 10)$ с помощью нормальной аппроксимации и с помощью аппроксимации смещенным гамма-распределением.

Сначала определим моменты случайной величины X : $\quad EX = 1/2, \quad EX^2 = 1/3, \quad EX^3 = 1/4$. Отсюда

$$\lambda p_1 = 6, \quad \lambda p_2 = 4, \quad \lambda p_3 = 3.$$

Теперь из равенств

$$x_0 + \frac{\alpha}{\beta} = 6, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = 4, \quad \frac{2\alpha}{\beta^3} = 3$$

определяем $\alpha = 28.444, \quad \beta = 2.667, \quad x_0 = -4.667$. Таким образом, суммарный иск S аппроксимируется распределением $N(6,4)$ или распределением $H(x : 28.444, 2.667, -4.667)$. Тогда для нормальной аппроксимации вероятность

$$P(S < 10) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{10} exp(-\frac{(x-6)^2}{8}) dx = \Phi(2) = 0.97725,$$

а для гамма-аппроксимации та же вероятность оценивается как

$$\int_0^{14.667} \frac{2.667^{28.444}}{\Gamma(28.44)} x^{27.444} e^{-2.667x} dx = 0.968156.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть случайная величина N имеет биномиальное распределение с параметрами m, p. Получить выражения для $ES, VarS, M_S(t)$ через $m, p, p_1, p_2, M_X(t)$.

Решение. Поскольку

$$M_N(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p^k) e^{tk} = (pe^t + q)^m,$$

то для функции $\phi_S(t) = \log M_S(t)$ имеет место выражение

$$\phi_S(t) = m \log(pM_X(t) + q);$$

беря две первые производные $\phi_S(t)$ в нуле, получим

$$ES = mpp_1, \quad VarS = mpp_2 - mp^2 p_1^2.$$

2. Пусть случайная величина N принимает значения 0,1,2,и 3 с соответствующими вероятностями $1/2, 1/3, 1/8, 1/24$, а величина индивидуального иска X принимает значения 10,20,и 40 с соответствующими вероятностями $1/2, 1/4, 1/4$. Требуется вычислить $EN, VarN, EX, VarX, ES, VarS$.

Решение. Моменты величин N, X вычисляются непосредственно:

$$EN = 1/3 + 1/4 + 1/8 = 17/24, \quad EN^2 = 1/3 + 1/2 + 9/24 = 29/24,$$

$$VarN = 29/24 - (17/24)^2 = 407/576, \quad EX = 20, \quad EX^2 = 550, \quad VarX = 550 - 400 = 150.$$

Моменты случайной величины S вычислим, исходя из производящей функции моментов: поскольку

$$M_N(t) = 1/2 + e^t/3 + e^{2t}/8 + e^{3t}/24, \quad M_X(t) = e^{10t}/2 + e^{20t}/4 + e^{40t}/4, \quad \text{то}$$

$$M_S(t) = 1/2 + M_X(t)/3 + M_X(t)^2/8 + M_X(t)^3/24$$

и теперь две первые производные в нуле функции $\phi(t) = \log M_S(t)$ дают

$$ES = \phi'(0) = 85/6 = 14.167, \quad VarS = \phi''(0) = 12350/36 = 343.0556.$$

3. Если суммарный иск S имеет обобщенное распределение Пуассона с параметром λ и дискретное распределение индивидуального иска

$$p(x) = -\frac{c^x}{x\log(1-c)}, \quad x = 1, 2, \dots; c \in (0, 1),$$

то требуется показать, что S имеет отрицательное биномиальное распределение и найти параметры этого распределения.

Решение. Прежде всего производящая функция моментов

$$M_X(t) = \frac{\log(1-ce^t)}{\log(1-c)}$$

Следовательно, для функции $\phi_S(t) = \log M_S(t)$ справедливы равенства

$$\phi_S(t) = \lambda\left[\frac{\log(1-ce^t)}{\log(1-c)}\right] = \frac{\lambda}{\log(1-c)}\log\left(\frac{1-ce^t}{1-c}\right) =$$
$$\frac{\lambda}{-\log(1-c)}\log\left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right) = \log\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r,$$

где параметры p, r равны соответственно $1-c$, $\frac{\lambda}{-\log(1-c)}$.

4. Случайная величина N имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Требуется выразить вероятность $P(N = n+1)$ через $P(N = n)$.

Решение. Пусть X- случайная величина, имеющая вырожденное распределение, то есть $P(X = 1) = 1$. Тогда случайная величина $S = N$ имеет обобщенное пуассоновсое распределение с параметром λ и вырожденным распределением индивидуального иска $p(1) = 1$. Из соотношения 18 следует, что

$$f(n+1) = \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda p_i f(n+1-i)/(n+1) = \lambda f(n)/(n+1).$$

5. Случайные величины N_1, N_2, N_3 независимы и имеют пуассоновское распределение, при этом $EN_i = i^2, \quad i = 1, 2, 3$. Какое распределение имеет сумма $S = -2N_1 + N_2 + 3N_3$?

Решение. Для произвольного набора коэффициентов k_1, k_2, k_3 из независимости случайных величин N_i следует, что производящая функция моментов суммы $S = \sum_{i=1}^{3} k_i N_i$ равна

$$M_S(t) = M_{k_1N_1}(t)M_{k_2N_2}(t)M_{k_2N_2}(t),$$

при этом

$$M_{k_iN_i}(t) = exp(\lambda_i(e^{k_it} - 1)),$$

в данной задаче $\lambda_i = i^2$. Обозначая $\sum \lambda_i$ через λ, а λ_i/λ через $\lambda_i^{'}$, получим что

$$M_S(t) = exp(\lambda(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{'} e^{k_it} - 1).$$

Отсюда следует, что S имеет обобщенное пуассоновское распределение с параметром λ и дискретным распределением величины иска

$$p(k_i) = \lambda_i', \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, полученное обобщенное пуассоновское распределение определяется параметром $\lambda = 14$ и распределением $p(-2) = 1/14, \quad p(1) = 2/7, \quad p(3) = 9/14$.

6. Для данного α определить β, x_0 из условия, что $H(x : \alpha, \beta, x_0)$ имеет нулевое среднее и единичную дисперсию. К какому распределению стремится полученное распределение при $\alpha \to \infty$?

Решение. Из (21) следует, что

$$x_0 + \alpha/\beta = 0, \quad \alpha/\beta^2 = 1 \Longleftrightarrow x_0 = -\sqrt{\alpha}, \quad \beta = \sqrt{\alpha}.$$

Производящая функция моментов распределения $H(x : \alpha, \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha})$ равна

$$e^{-t\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - t} \right)^{\alpha},$$

поэтому ее натуральный логарифм, равный

$$-t\sqrt{\alpha} - \alpha \log(1 - t/\sqrt{\alpha}) = -t\sqrt{\alpha} - \alpha(-t/\sqrt{\alpha} - 0.5t^2/\alpha + o(1/\alpha)) =$$

$$0.5t^2 + o(1) \to 0.5t^2 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty.$$

Следовательно, предельное распределение есть стандартное нормальное распределение.

4 Элементы теории разорения

До сих пор мы рассматривали свойства случайной величины общего иска. При этом никак не затрагивался вопрос о том, достаточно ли у страховщика средств для покрытия возникающих ущербов. Дело здесь в том, что, с одной стороны, эти средства могут взяться только из собранных премий, причем эти премии поступают регулярно в соответствии с заключенными страховыми договорами, а с другой - предъявляемые иски поступают не одновременно, а в соответствии с происшедшими ущербами, причем последовательность возникновения последних представляет собой случайный процесс. Таким образом мы до сих пор не затрагивали вопрос об изменении общего иска во времени, о соотношении в каждый момент времени размера собственных средств страховщика и величины иска. В дальнейшем будем использовать понятие *фонд собственных средств* страховщика для обозначения суммы денег в рассматриваемый момент времени, сформировавшейся в результате поступления премий и выплат по искам. Для краткости фонд собственных средств страховщика будем именовать просто капиталом.

4.1 Изменение капитала как случайный процесс

Пусть суммарная величина премий, поступающих от страхователей за единицу времени, равна c, а начальное значение капитала равно u. Тогда, если в момент времени $t \geq 0$ поступает суммарный иск величины $S(t)$, то значение капитала в момент времени t будет равно

$$U(t) = u + ct - S(t). \tag{22}$$

Если в какой-то момент времени t величина $u(t) \leq 0$, то будем говорить, что произошло разорение. При этом величина

$$T = min\{t \geq 0 | U(t) < 0\}$$

называется *моментом разорения*. Если величина T равна ∞, то считается, что разорения не происходит. Функция $\psi(u) = P(T < \infty)$ называется *вероятностью разорения при начальном остатке* u, а величина $\psi(u, t) = P(T < t)$ есть *вероятность разорения до момента* t *при начальном значении фонда собственных средств равном* u. Случайный процесс $S(t)$, как и ранее, представляется в виде

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)},$$

при этом i–й иск величины X_i поступает в момент времени T_i. Зависимость $u(t)$ можно представить себе из нижеследующего рисунка:

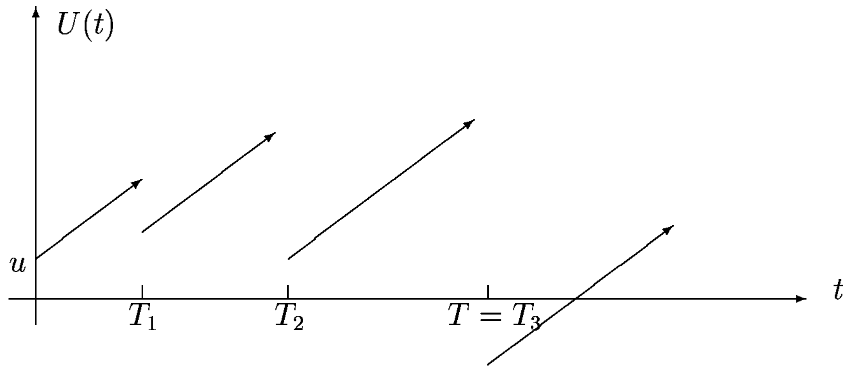

Рис. 1

Случайный процесс $S(t)$ описывается двумя характеристиками: случайным процессом числа исков $N(t)$ и распределением каждого иска X_i. Относительно $N(t)$ будем предполагать, что $N(t)$ является пуассоновским процессом:

$$P(N(t+h)-N(t)=k)|N(s),s\leq t)=\frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}, k=0,1,2,...,$$

то есть данный процесс является стационарным с независимыми приращениями. При $k=1$ отсюда следует:

$$P(N(t+h)-N(t)=1)|N(s),s\leq t)=e^{-\lambda h}\lambda h.$$

Если, кроме того, положить $h=dt$, то последнее равенство примет вид:

$$P(N(t+dt)-N(t)=1)|N(s),s\leq t)=e^{-\lambda dt}\lambda dt\approx\lambda dt,$$

а W_{i+1} - случайное время ожидания $i+1-$ го иска, равное $T_{i+1}-T_i$ имеет экспоненциальное распределение:

$$P(W_{i+1}>h|T_i=t,N(s),s\leq t)=$$

$$P(N(t+h)-N(t)=0|T_i=t,N(s),s\leq t)=e^{-\lambda h}.$$

Если случайные величины исков $X_1,X_2,\ldots$ независимы и одинаково распределены, а $N(t)$ является пуассоновским процессом, то процесс $S(t)$ будем называть *обобщенным пуассоновским процессом*‘ определяемым параметром λ и функцией распределения $P(x)$.

Для обобщенного пуассоновского процесса вероятность

$$P(S(y+t)-S(y)\leq x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}P^{*k}(x).$$

Полагая $y=0$, отсюда получаем, что

$$E[S(t)]=\lambda tp_1,\quad Var[S(t)]=\lambda tp_2,\quad M_{S(t)}(r)=e^{\lambda t(M_X(r)-1)}.\tag{23}$$

4.2 Оценка вероятности разорения для случая непрерывного времени

Будем оценивать величину $\psi(u)$ для величины (22). Предположим, что для $M_X(t)$ - производящей функции моментов случайной величины индивидуального иска можно указать такие значения $\gamma, \delta > 0$, для которых

$$M_X^{''}(t) > \delta > 0 \quad \text{если} \quad t > \gamma. \tag{24}$$

Данное предположение выполнено, если, например, случайные величины X_i имеют гамма-распределение. Далее, будем считать, что величина премии c равна $\lambda(1+\theta)p_1$, $\theta-$ как и ранее, относительная безопасная нагрузка. Рассмотрим уравнение

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r) \tag{25}$$

Записывая его в виде

$$(1+\theta)p_1 r = M_X(r) - 1,$$

сразу видим, что $r = 0$ является решением. Кроме того, у функции

$$f(r) = (1+\theta)p_1 r - M_X(r) + 1$$

производная $f^{'}(0) = \theta p_1 > 0$, а при достаточно больших значениях r условие (24) означает, что $f(r) < 0$. Следовательно, уравнение (25) имеет положительный корень, который обозначается как R и называется *коэффициентом поправки*$\triangleright$ Смысл введенного термина будет ясен позже.

Рассмотрим пример. Пусть индивидуальные иски имеют экспоненциальное распределение с параметром β. Требуется определить величину R. Поскольку в данном случае функция $M_X(r) = \beta/(\beta - r)$, то уравнение (25) принимает вид

$$1 + (1+\theta)r/\beta = \beta/(\beta - r),$$

откуда коэффициент $R = \theta\beta/(1+\theta)$ получается как решение квадратного уравнения.

Для оценки сверху вероятности разорения $\psi(u)$ имеет место

Теорема 8 *Для любого $u \geq 0$ вероятность разорения*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T < \infty]}.$$

Доказательство. Для произвольных $t > 0, \quad r > 0$

$$E[e^{-rU(t)}] = E[e^{-rU(t)}|T \leq t]P(T \leq t) + E[e^{-rU(t)}|T > t]P(T > t),$$

при этом левая часть этого неравенства вследствие (22,23) равна

$$M_{U(t)}(-r) = e^{-ru-rct}e^{\lambda t(M_X(r)-1)}.$$

Представляя $U(t)$ в виде

$$U(t) = U(T) + U(t) - U(T) = U(T) + c(t - T) - [S(t) - S(T)]$$

и учитывая, что разность $S(t) - S(T)$ является обобщенным пуассоновским процессом с параметром $\lambda(t - T)$ и функцией распределения индивидуального иска $P(x)$, отсюда получим:

$$e^{-ru-rct}e^{\lambda t(M_X(r)-1)} =$$

$$E[e^{-rU(T)}e^{-rc(t-T)+\lambda(t-T)(M_X(r)-1)}|T \le t]P(T \le t) + E[e^{-rU(t)}|T > t]P(T > t)$$

Выбирая в последнем равенстве значение $r = R$, из (25) получим

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)}|T \le t]P(T \le t) + E[e^{-RU(t)}|T > t]P(T > t) \qquad (26)$$

Теперь покажем, что второе слагаемое в правой части (26) беконечно мало при $t \to \infty$. Для этого обозначим $\theta\lambda p_1 = c - \lambda p_1$ через α, а $\sqrt{\lambda p_2}$ через β, тогда из $(22, 23)$ получаем

$$E[U(t)] = u + ct - \lambda t p_1 = u + \alpha t, \quad Var[U(t)] = Var[S(t)] = \beta^2 t.$$

Обозначим далее через A событие, состоящее в том, что $T > t, \quad 0 \le U(t) \le u + \alpha t - \beta t^{2/3}$, а событие B включает в себе те исходы, при которых $T > t, \quad U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}$. Поскольку $R > 0, \quad U(t) > 0$ при $t < T$, то $e^{-RU(t)} < 1$, следовательно,

$$E[e^{-RU(t)}|T > t]P(T > t) =$$

$$E[e^{-RU(t)}|A]P(A) + E[e^{-RU(t)}|B]P(B) < P(A) + e^{-R(u+\alpha t-\beta t^{2/3})}.$$

Из неравенства Чебышева вероятность

$$P(A) = P(U(t) - u - \alpha t \le -\beta t^{2/3}) = P(U(t) - E[U(t)] \le -\sqrt{Var[U(t)]}t^{1/6}) \le t^{-1/3},$$

то есть является бесконечно малой, произведение $R(u + \alpha t - \beta t^{2/3})$ - бесконечно большим. Следовательно,

$$E[e^{-RU(t)}|T > t]P(T > t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Поэтому из (26) вытекает

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)}|T < \infty]P(T < \infty). \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Поскольку $U(T) < 0$, то $E[e^{-RU(T)}|T < \infty] > 1$, следовательно, вероятность разорения

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Замечание 2. Если $\theta \to 0$, то коэффициент поправки $R \to 0$, поэтому если при назначении премии безопасная нагрузка отсутсвует, то разорение будет иметь место почти наверное.

Рассмотрим пример, когда индивидуальные иски имеют экспоненциальное распределение. Для этого нужно определить характер условного распределения случайной величины $U(T)$ при условии $T < \infty$. С этой целью для произвольного $x < 0$ найдем условную вероятность $P(U(T) < x|T < \infty)$. Обозначим событие, состоящее в том, что $U(T-0) = z$, $X(t) > z$ через $C(t,z)$, а событие, состоящее в том, что $X(T) > z - x$ обозначим через $B(t,z)$. Теперь, поскольку условная вероятность

$$P(B(t,z)|C(t,z)) = (1 - \int_{-x+z}^{\infty} \beta e^{-\beta t} dt)/(1 - \int_{z}^{\infty} \beta e^{-\beta t} dt) = e^{-\beta(-x+z)}/e^{-\beta z} = e^{\beta x}$$

не зависит от t, z, то $P(U(T) < x|T < \infty) = e^{\beta x}$. Отсюда следует, что

$$E[e^{-RU(T)}|T < \infty] = \int_{-\infty}^{0} e^{-Rx} \beta e^{\beta x} dx = \beta/(\beta - R).$$

Подставляя полученное в предыдущем примере выражение для R, отсюда заключаем

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}(\beta - R)}{\beta} = \frac{e^{-\beta u\theta/(1+\theta)}}{1+\theta}.$$

4.3 Оценка вероятности разорения для случая дискретного времени

В реальности премии поступают не непрерывным образом, а по месяцам, кварталам, годам и в соответствии с этими целочисленными календарными датами проходит отчетность и подведение итогов работы страховой организации. Поэтому наряду с рассмотренной непрерывной моделью рассмотрим теперь дискретную модель изменения капитала

$$U_n = u + nc - S_n, \tag{27}$$

где $n-$ номер рассматриваемого временного отрезка, $c-$ размер полученных за этот отрезок премий, S_n- суммарный иск за весь рассматриваемый период из n отрезков:

$$S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n,$$

W_i- суммарный иск за $i-$й отрезок. Величины W_i предполагаются независимыми и одинаково распределенными, со средним $\mu = EW < c$. Обозначим по аналогии с непрерывным случаем момент разорения как

$$\tilde{T} = min\{n : U_n < 0\},$$

а вероятность разорения

$$\tilde{\psi}(u) = P(\tilde{T} < \infty).$$

Уравнение для определения коэффициента поправки $-\tilde{R}$ в дискретном случае будет выглядеть как

$$e^{-cr} M_W(r) = 1. \tag{28}$$

Рассматривая функцию $f(r) = cr - \log M_W(r)$, сразу видим, что $r = 0$ является решением данного уравнения. Как и в непрерывном случае, нас интересует положительное решение данного уравнения. Заметим, что значение производной в нуле

$$f^{'}(0) = c - \mu = (1+\theta)\mu - \mu = \theta\mu > 0,$$

то есть $f(r) > 0$ в окрестности нуля. Предположим далее, что функция $\phi(r) = \log M_W(r)$ сильно вогнута, тогда при некотором $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\phi^{''}(r) > \delta$$

при всех $r > 0$ и данное предположение гарантирует существования положительного коэффициента $R-$ решения (28).

Рассмотрим пример. Пусть случайная величина W имеет распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Найдем коэффициент поправки R. Для этого рассмотрим уравнение

$$cr = \mu r + 0.5\sigma^2 r^2,$$

решая которое, найдем $R = 2(c-\mu)/\sigma^2$.

Докажем теперь дискретный аналог теоремы (8):

Теорема 9 *Для любого* $u \geq 0$ *вероятность разорения*

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{E[e^{-\tilde{R}U_{\tilde{T}}}|\tilde{T} < \infty]}.$$

Доказательство. Аналогично непрерывному случаю, для произвольных $n \in \{1, 2, \dots\}$, $r > 0$ величина

$$E[e^{-rU_n}] = E[e^{-rU_n}|\tilde{T} \leq n]P(\tilde{T} \leq n) + E[e^{-rU_n}|\tilde{T} > n]P(\tilde{T} > n),$$

левая часть этого неравенства из определения U_n равна

$$e^{-ru-rcn}M_W(r)^n.$$

Выбирая теперь в качестве $r = \tilde{R}$, из (28) получаем, что $E[e^{-rU_n}] = e^{-\tilde{R}u}$. В остальном доказательство данной теоремы повторяет доказательство теоремы 9 с заменой t на n. ■

Замечание. Записывая уравнение (28) в виде $cr = \log M_W(r)$ и разлагая функцию $\phi(r) = \log M_W(r)$ по формуле Маклорена, получим

$$cr = \mu r + 0.5\sigma^2 r^2 + \dots,$$

откуда следует, что $\tilde{R} \cong 2(c-\mu)/\sigma^2$. В частности, данное равенство справедливо как точное, если случайная величина является нормально распределенной. В этом случае $\phi^{''}(r) = \sigma^2$ при всех $r > 0$. Если же случайная величина W имеет обобщенное распределение, то в таком случае

$$\mu = EW = p_1 EN,\ \sigma^2 = VarW = (p_2 - p_1^2)EN + p_1^2 VarN,$$

откуда

$$\tilde{R} \cong \frac{2\theta p_1 EN}{(p_2 - p_1^2)EN + p_1^2 VarN}.$$

Рассмотрим пример. Если W имеет обобщенное пуассоновское распределение с параметром λ или обобщенное отрицательное биномиальное распределение с параметрами r, p, то требуется оценить величину $\tilde{R}$. Для обобщенного пуассоновского распределения $EN = VarN = \lambda$, откуда $\tilde{R} \cong 2\theta p_1/p_2$. Для обобщенного отрицательного биномиального распределения

$$\mu = EW = rp_1 q/p_2,\ \sigma^2 = (p_2 - p_1^2)rq/p + p_1^2 rq^2/p^2,$$

следовательно,

$$\tilde{R} \cong \frac{2\theta p_1}{p_2 + p_1^2(1/p - 1)}.$$

Рассмотрим более общий случай, когда случайные величины W_i не являются независимыми. Именно, рассмотрим авторегрессионную модель

$$W_i = Y_i + aW_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots,\ W_0 = w;$$

здесь случайные величины Y_i независимы и одинаково распределены,

$$a \in (-1, 1),\ EY < (1 - a)c,$$

случай независимых W_i получается при $a = 0$. Таким образом, здесь вероятность разорения зависит уже от двух параметров:

$$\tilde{\psi}(u, w) = P(\hat{T} < \infty).$$

Поскольку

$$W_n = Y_n + aY_{n-1} + \ldots a^{n-1}Y_1 + a^n w,$$

то

$$EW_n = (1 + a + a^2 + \ldots a^{n-1})EY + a^n w = \frac{1 - a^n}{1 - a}EY + a^n w;$$

кроме того,

$$S_n = Y_n + (1 + a)Y_{n-1} + \ldots (1 + a + a^2 + \ldots a^n)Y_1 + (a + a^2 + \ldots a^n)w =$$

$$Y_n + \frac{1 - a^2}{1 - a}Y_{n-1} + \ldots + \frac{1 - a^n}{1 - a}Y_1 + a\frac{1 - a^n}{1 - a}w;$$

$$ES_n = EY[1 + \frac{1 - a^2}{1 - a} + \ldots + \frac{1 - a^n}{1 - a}] + a\frac{1 - a^n}{1 - a}w.$$

Коэффициент поправки $\hat{R}$ для рассматриваемого случая будем определять как положительное решение уравнения

$$e^{-cr}M_{Y/(1-a)}(r) = 1.$$

Наряду с последовательностью U_n будем рассматривать случайные величины

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{a}{1-a}W_n.$$

Здесь полагается

$$\hat{U}_0 = \hat{u} = u - \frac{a}{1-a}w.$$

Справедлива

Теорема 10 *Для любого $\hat{u} \geq 0$ вероятность разорения*

$$\tilde{\psi}(u,w) = \frac{e^{-\hat{R}\hat{u}}}{E[e^{-\hat{R}\hat{U}_{\hat{T}}}|\hat{T} < \infty]}.$$

Доказательство. Для последовательности $\{\hat{U}_n\}$ получим рекуррентную формулу

$$\hat{U}_i = U_i - \frac{a}{1-a}W_i = U_{i-1} + c - W_i - \frac{a}{1-a}W_i = U_{i-1} + c - \frac{1}{1-a}W_i =$$

$$U_{i-1} + c - \frac{1}{1-a}(Y_i + aW_{i-1}) = \hat{U}_{i-1} + c - \frac{1}{1-a}Y_i,$$

из которой следует, что

$$E\hat{U}_i = \hat{u} + ci - iEY/(1-a) = \hat{u} + ic(1-k),\ Var\hat{U}_i = i^2 VarY/[(1-a)^2],\ i = 1,2,\ldots$$

где $k = EY/(c(1-a)) \in (0,1)$; если обозначить $\alpha = c(1-k)$, $\beta = VarY/[(1-a)^2]$, то получим

$$E\hat{U}_i = \hat{u} + \alpha i, \quad Var\hat{U}_i = i^2\beta \tag{29}$$

кроме того, в силу независимости случайных величин Y_i

$$E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}] = e^{-\hat{R}\hat{u}}E[e^{-\hat{R}(\hat{U}_n - \hat{u})}] = e^{-\hat{R}\hat{u}}\prod_{i=0}^{n-1}E[e^{-\hat{R}(\hat{U}_{i+1} - \hat{U}_i)}] =$$

$$e^{-\hat{R}\hat{u}}(E[exp(-\hat{R}(c - \frac{1}{1-a}Y)])^n = e^{-\hat{R}\hat{u}}(e^{-\hat{R}c}M_{Y/(1-a)}(\hat{R}))^n = e^{-\hat{R}\hat{u}}.$$

Кроме того, при любом $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$

$$E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|\hat{T} = i] = E[e^{-\hat{R}\hat{U}_i}|\hat{T} = i]\prod_{k=i}^{n-1}E[e^{-\hat{R}(\hat{U}_{k+1} - \hat{U}_k)}|\hat{T} = i] = E[e^{-\hat{R}\hat{U}_i}|\hat{T} = i]$$

Отсюда равенство

$$E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}] = \sum_{i=1}^{n}E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|\hat{T} = i]P(\hat{T} = i) + E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|\hat{T} > n]P(\hat{T} > n)$$

принимает вид

$$e^{-\hat{R}\hat{u}} = \sum_{i=1}^{n} E[e^{-\hat{R}\hat{U}_i}|\hat{T}=i]P(\hat{T}=i) + E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|\hat{T}>n]P(\hat{T}>n) \qquad (30)$$

Если $n \to \infty$, то первое слагаемое в правой части (30) будет равно

$$E[e^{-\hat{R}\hat{U}_{\hat{T}}}|\hat{T}<\infty]P(\hat{T}<\infty).$$

Теперь осталось показать, что второе слагаемое в правой части (30) бесконечно мало при $n \to \infty$. Для этого рассмотрим события

$$A_n : \hat{T} > n,\ \hat{U}_n < \hat{u} + \alpha n - \beta n^{2/3},$$

$$B_n : \hat{T} > n,\ \hat{U}_n > \hat{u} + \alpha n - \beta n^{2/3},$$

Тогда второе слагаемое в правой части (30) оценивается как

$$E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|A_n]P(A_n) + E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|B_n]P(B_n) < P(A_n) + E[e^{-\hat{R}\hat{U}_n}|B_n] <$$

$$P(A_n) + e^{-\hat{R}(\hat{u}+\alpha n-\beta n^{2/3})}.$$

В полученном неравенстве слагаемое $P(A)$ оценивается с помощью неравенства Чебышева, исходя из (29)

$$P(A_n) = P(\hat{U}_n - \hat{u} - \alpha n < -\beta n^{2/3}) = P(\hat{U}_n - E\hat{U}_n < -\frac{\beta n^{2/3}}{\beta n^2} Var\hat{U}_n) < n^{-2/3}.$$

Отсюда $P(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $\alpha, \beta > 0$, то и $e^{-\hat{R}(\hat{u}+\alpha n-\beta n^{2/3})} \to 0$. ■

4.4 Распределение капитала. Характеристики максимального суммарного ущерба

В предыдущих разделах были получены оценки вероятности разорения. Основной целью настоящего раздела является описание характера распределения фонда собственных средств. Кроме того, будут получены соотношения, имеющие и самостоятельный интерес в описании поведения случайного процесса изменения величины фонда. Здесь мы вернемся к непрерывному случаю процесса изменения капитала $U(t)$. Для обобщенного пуассоновского процесса (22) справедлива

Теорема 11 *Вероятность события, состоящего в том, что величина капитала при его первом понижении до уровня не превосходящего начальной величины и примет значение на интервале $(u-y-dy, u-y)$, где $y>0$ произвольно, равна*

$$\frac{\lambda}{c}(1-P(y))\,dy.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $u = 0$

$$P(U(T) < -h | T < \infty)\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_h^{\infty}(1 - P(y))\,dy,$$

поскольку от изменения величины u значение данной вероятности не изменится. Пусть $w(x)$ - неотрицательная ограниченная функция, определенная на множестве $x < 0$, для нее определим функцию

$$\psi(u, w) = E[w(U(T))|T < \infty]\psi(u)$$

переменного u. Для пуассоновского процесса вероятность возникновения иска на отрезке $[0, dt]$ равна λdt, поэтому из формулы полной вероятности

$$\psi(u, w) = (1 - \lambda dt)\psi(u + cdt, w) + \lambda dt\int_0^u \psi(u - x, w)p(x)dx + \lambda dt\int_u^{\infty} w(u - x)p(x)dx,$$

откуда

$$\psi^{'}(u, w) = \frac{\psi(u + cdt, w) - \psi(u, w)}{cdt} =$$

$$\frac{\lambda}{c}\left(\psi(u, w) - \int_0^u \psi(u - x, w)p(x)dx - \int_u^{\infty} w(u - x)p(x)dx\right).$$

Поскольку при замене $y = u - x$ интеграл

$$\int_0^z\int_0^u \psi(u - x, w)p(x)dxdu = \int_0^z\int_0^{z-y}\psi(y, w)p(x)dxdy = \int_0^z \psi(y, w)P(z - y)dy,$$

а при замене $y = x - u$ интеграл

$$\int_0^z\int_u^{\infty} w(u - x)p(x)dxdu = \int_0^{\infty}\int_y^{y+z} w(-y)p(x)dxdy =$$

$$\int_0^{\infty} w(-y)[P(y + z) - P(y)]dy,$$

то, интегрируя $\psi^{'}(u, w)$ по переменной u от 0 до z, получаем

$$\psi(z, w) - \psi(0, w) = \frac{\lambda}{c}\int_0^z \psi(y, w)[1 - P(z - y)]dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} w(-y)[P(y + z) - P(y)]dy.$$

Устремляя здесь z к бесконечности и учитывая, что $\psi(\infty, w) = 0$, $P(\infty) = 1$, получаем равенство

$$\psi(0, w) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} w(-y)[1 - P(y)]dy.$$

Далее, учитывая, что при выборе $w = w_h$, где

$$w_h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x < -h, \\ 0, & \text{если} \quad -h \le x \le 0, \end{cases}$$

величина

$$\psi(0,w_h)=P(U(T)<-h|T<\infty)\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty w_h(-y)[1-P(y)]dy=\frac{\lambda}{c}\int_h^\infty[1-P(y)]dy,$$

то отсюда вероятность

$$P(U(T)\in(-h-dh,-h)|T<\infty)\psi(0)=\frac{\lambda}{c}(1-P(h))dh. \quad \blacksquare$$

Замечание. Из доказанного следует, что вероятность того, что капитал когда-либо опустится ниже своего начального значения, равна

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty(1-P(y))dy=\frac{1}{(1+\theta)p_1}\int_0^\infty(1-P(y))dy=\frac{1}{(1+\theta)},$$

поскольку $\int_0^\infty(1-P(y))dy=p_1$, что следует при $d=0$ из леммы на с. 8. Следовательно, величина

$$\psi(0)=\frac{1}{(1+\theta)}.$$

Рассмотрим случайную величину L_1, равную разности $u-U(t)=S(t)-ct$, при условии, что в рассматриваемый момент времени t эта разность положительна. Тогда из вышесказанного следует, что плотность распределения случайной величины L_1, равна

$$\frac{\lambda}{c\psi(0)}(1-P(y))=\frac{1-P(y)}{p_1}.$$

Соответствующая производящая функция моментов есть

$$M_{L_1}(r)=\frac{1}{p_1}\int_0^\infty e^{ry}(1-P(y))dy=\frac{1}{p_1}\left(\frac{e^{ry}}{r}(1-P(y))|_0^\infty+\frac{1}{r}\int_0^\infty e^{ry}p(y)dy\right).$$

Поскольку из условия существования $M_X(r)$ следует, что

$$e^{rA}(1-P(A))=e^{rA}\int_A^\infty p(y)dy<\int_A^\infty e^{ry}p(y)dy\to 0$$

при $A\to\infty$, то отсюда

$$M_{L_1}(r)=\frac{M_X(r)-1}{p_1 r} \tag{31}$$

Рассмотрим пример. Пусть индивидуальные иски имеют экспоненциальное распределение с параметром β. Требуется определить вид распределения случайной величины L_1.

Искомое распределение получим из равенства

$$1-P(y)=e^{-\beta y},\ y>0,$$

из которого плотность

$$\frac{1-P(y)}{p_1}=\beta e^{-\beta y}.$$

Это означает, что случайная величина L_1 имеет то же распределение, что и индивидуальные иски. Производящая функция случайной величины L_1, напомним, есть $\beta/(\beta - r)$.

Рассмотрим новое понятие - случайную величину *максимального ущерба*, определяемую как

$$L = max\{S(t) - ct,\, t \geq 0\},$$

эта случайная величина неотрицательна, поскольку $L \geq S(0) - c0 = 0$. Для получения функции распределения L используем функцию $\psi(u)$:

$$P(L \leq u) = P(S(t) - ct \leq u, \text{ при всех } t \geq 0) = P(U(t) \geq 0, \text{ при всех } t \geq 0) = 1 - \psi(u).$$

В частности, $P(L \leq 0) = P(L = 0) = 1 - \psi(0)$. Теперь получим выражения для производящей функции моментов случайной величины L.

Теорема 12 *Для любого* $r < R$

$$M_L(r) = \frac{\theta p_1 r}{1 + (1+\theta)p_1 r - M_X(r)}$$

Доказательство. Рассмотрим те моменты предъявления исков t_i^r , в которые функция $S(t) - ct$ принимает свои рекордные значения:

$$S(t_i^r) - ct_i^r > L_i^r = max\{S(t) - ct,\, t \in [0, t_i^r)\}.$$

Поскольку наш обобщенный пуассоновский процесс является стационарным с независимыми приращениями, то для каждого номера i вероятность того, что разность $S(t) - ct$ превзойдет достигнутое в t_i^r значение, равна $\psi(0)$. Обозначим разность $S(t_i^r) - ct_i^r - L_i^r$ через L_i. Тогда случайная величина L равна

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_N.$$

Здесь N - количество моментов, в которых разность $S(t) - ct$ принимает рекордные значения, имеет геометрическое распределение:

$$P(N = n) = (1 - \psi(0))(\psi(0))^n = \theta \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n+1}, \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

соответствующая производящая функция есть

$$M_N(r) = \frac{\theta}{1 + \theta - e^r}, \, r < \log(1+\theta).$$

Тогда из (31) следует, что если $r < M_X(r)$, то

$$M_L(r) = M_N(\log M_{L_1}(r)) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)} = \frac{\theta p_1 r}{1 + (1+\theta)p_1 r - M_X(r)},$$

при этом, если $r \to M_X(r)$, то $M_L(r) \to \infty$. ■

Поскольку разность $1 - \psi(u)$ является функцией распределения случайной величины L, то

$$M_L(r) = E[e^{rL}] = e^{r\cdot 0}P(L=0) + \int_0^\infty e^{ru} d(1-\psi(u)) =$$

$$1 - \psi(0) - \int_0^\infty e^{ru}\psi'(u)du = \frac{\theta}{1+\theta} - \int_0^\infty e^{ru}\psi'(u)du,$$

поэтому из доказанной теоремы следует, что

$$-\int_0^\infty e^{ru}\psi'(u)du = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(M_X(r)-1)}{1+(1+\theta)p_1 r - M_X(r)} \tag{32}$$

Полученная формула дает возможность определять аналитическое выражение функции $\psi(u)$ в некоторых случаях, например, когда плотность распределения индивидуального иска равна

$$p(x) = \sum_{i=1}^n A_i\beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0,\ A_i > 0,\ A_1 + A_2 + \dots A_n = 1.$$

В таком случае

$$M_X(r) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - r}, \quad r < min\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n\}.$$

Подставляя данное выражение в уравнение (32), получим:

$$-\int_0^\infty e^{ru}\psi'(u)du = \sum_{i=1}^n c_i \frac{r_i}{r_i - r},$$

где c_i, r_i- некоторые константы, из последнего равенства вытекает, что выражение для $\psi(u)$ есть

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-r_i u}.$$

Рассмотрим пример, когда $p(x) = \beta e^{-\beta x}$, то есть $n = 1$, распределение индивидуального иска экспоненциально. Тогда $M_X(r) = \beta/(\beta - r) = 1/(1-p_1 r)$, и правая часть в (32) равна

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta}{\theta - (1+\theta)p_1 r} = c_1\frac{r_1}{r_1 - r},$$

здесь $c_1 = 1/(1+\theta)$, $r_1 = \theta/((1+\theta)p_1)$. Отсюда

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u}.$$

В частности, если $\theta = 0.25, \beta = 1$, то $p_1 = 1, c_1 = 0.8, r_1 = 0.2, \psi(u) = 0.8exp(-0.2u)$. В этом случае $\psi(u) < 0.05 \iff u > 20\log 2 \cong 13.863$.

В данном разделе были изложены основные факты, касающиеся стохастического процесса поведения исков и изменения величины фонда собственных средств компании, теории разорения. Более полное изложение этой теории можно найти в [4]. Вопросы, когда страховая компания не может брать на себя большие иски и должна обращаться к перестраховочной компании, достаточно хорошо развиты с математической точки зрения [1, 3].

ЗАДАЧИ

1. Пусть $N(T)$- пуассоновский процесс с параметром λ и $P(N(t)=n)=p_n(t)$. Доказать, что

$$p_0'(t)=-\lambda p_0(t), \quad p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t), \quad n\geq 1.$$

Решение. По определению величин $p_n(t)$ вероятность

$$p_0(t+dt)=P(N(t+dt)=0|N(t)=0)P(N(t)=0)=$$

$$(1-\lambda dt)p_0(t)\Longleftrightarrow p_0'(t)=-\lambda p_0(t),$$

$$p_n(t+dt)=P(N(t+dt)=n|N(t)=n)P(N(t)=n)+$$

$$P(N(t+dt)=n|N(t)=n-1)P(N(t)=n-1)=$$

$$(1-\lambda dt)p_n(t)+\lambda dt p_{n-1}(t)\Longleftrightarrow$$

$$p_n(t+dt)-p_n(t)=(-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t))dt\Longleftrightarrow$$

$$p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t), \quad n\geq 1.$$

2. Доказать, что $R<2\theta p_1/p_2$.

Решение. Поскольку моменты случайной величины X положительны, то из равенства

$$M_X(R)=1+(1+\theta)p_1R$$

и разложения $M_X(R)=1+p_1R+0.5p_2R^2+\ldots$ следует

$$p_1R+0.5p_2R^2<p_1R+\theta p_1R\Longleftrightarrow R<\frac{2\theta p_1}{p_2}$$

3. Пусть для производящей функции $M_X(r)$ существует γ, для которого $M_X(r)\to\infty$ при $r\to\gamma-0$. Найти $\lim_{c\to\lambda p_1}R$, $\lim_{c\to\infty}R$

Решение. Заметим, что $c\to\lambda p_1 \Longleftrightarrow \theta\to 0$, поэтому из неравенства $R<2\theta p_1/p_2$ следует, что $\lim_{c\to\lambda p_1}R=0$. Далее, из равенства (25) следует, что $\lim_{c\to\infty}M_X(r)=\infty$, откуда $\lim_{c\to\infty}R=\gamma$.

4. Известно, что распределение индивидуального иска дискретно, причем $p(1)=1/4$, $p(2)=3/4$, при этом$R=\log 2$. Найти величину θ.

Решение. Находим $p_1 = EX = 7/4, \quad M_X(r) = 0.25e^r + 0.75e^{2r}$, откуда уравнение для определения R будет

$$0.25e^r + 0.75e^{2r} = 1 + 7r(1+\theta)/4,$$

из которого при $r = R$ величина $\theta = (10 - 7\log 7)/7\log 2$.

5. Выписать выражения для $EL_1, \quad VarL_1$.

Решение. Из представления (31) и равенства

$$M_X(r) = 1 + p_1 r + 0.5p_2 r^2 + p_3 r^3/6 + \dots$$

следует

$$M_{L_1}(r) = 1 + 0.5p_2 r/p_1 + p_3 r^2/(6p_1) + \dots.$$

Отсюда

$$EL_1 = 0.5p_2/p_1, \quad E(L_1)^2 = p_3/(3p_1), \quad VarL_1 = p_3/(3p_1) - 0.25(p_2/p_1)^2.$$

6. Пусть случайные величины W_i принимают значения 0 или 2, при этом $P(W=0) = p > 1/2$, $P(W=1) = 1-p$. Для $c = 1$, $u \in \{0,1,2,\dots\}$ требуется найти $U(\tilde{T}), \tilde{R}, \tilde{\psi}(u)$.

Решение. Пусть $\tilde{T} = n$, тогда U_{n-1} может принимать только нулевое значение. Тогда, поскольку $U_{n-1} = 0$, то $U_n = 0 + c - W \in \{-1, 1\}$, откуда следует $U(\tilde{T}) = -1$. Для определения $\tilde{R}$ учтем, что

$$M_W(r) = e^{2r}p + 1 - p,$$

тогда из равенства $\log M_W(r) = r$ находим $e^{\tilde{R}} = p/(1-p)$, откуда $\tilde{R} = \log p/(1-p)$. Далее,

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{e^{-\tilde{R}u}}{e^{-\tilde{R}(-1)}} = e^{-\tilde{R}(u+1)}.$$

7. Определить вид $M_L(r)$, если индивидуальные иски равны 2.

Решение. Из равенства (32) следует

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(e^{2r}-1)}{1+2(1+\theta)r - e^{2r}} = \frac{2r\theta}{1+2(1+\theta)r - e^{2r}}.$$

8. Вероятность разорения

$$\psi(u) = 0.4e^{-2u} + 0.2e^{-4u}.$$

Требуется вычислить θ и R.

Решение. Так как $\psi(0) = 1/(1+\theta) = 3/5$, то $\theta = 2/3$. Из теоремы 12 и равенства (32) следует, что $R = 2$.

9. Известно, что $c = 1$, $\lambda = 2$ и $p(x) = e^{-2x} + 2e^{-4x}$. Требуется найти p_1, θ, $M_X(r)$, R, $\psi(u)$.

Решение. По определению легко найти

$$M_X(r) = 1/(2-r) + 2/(4-r),$$

отсюда

$$p_1 = {M_X}'(0) = 3/8.$$

Далее из равенства $c = (1+\theta)p_1\lambda$ получаем $\theta = 1/3$. Коэффициент поправки $R \in (0,2)$ находим из уравнения

$$r/2 = 1/(2-r) + 1/(4-r) - 1,$$

решая которое, получаем $R = 2 - \sqrt{2}$. Подставляя полученные значения p_1, θ в равенство (32), получим, что правая часть этого равенства равна

$$\frac{1/(2-r) + 2/(4-r) - 1}{2r - 4(1/(2-r) + 2/(4-r) - 1)} = \frac{3/2 - r/2}{(r-(2+\sqrt{2}))(r-(2-\sqrt{2}))},$$

теперь, записывая левую часть (32) в виде

$$\frac{c_1(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}-r} + \frac{c_2(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}-r},$$

и приравнивая полученные выражения, находим

$$c_1 = (3-2\sqrt{2})/8, \quad c_2 = (3+2\sqrt{2})/8,$$

откуда

$$\psi(u) = \frac{3-2\sqrt{2}}{8}e^{-(2+\sqrt{2})u} + \frac{3+2\sqrt{2}}{8}e^{-(2-\sqrt{2})u}.$$

5 Характеристики дожития.

5.1 Функции выживания. Таблицы смертности.

Для каждого человека продолжительность его жизни будем считать непрерывной случайной величиной и обозначать как X. Человек может жить в различных условиях как природных, так и социальных, заниматься тем или иным видом деятельности, иметь предрасположенности к определенным заболеваниям - все эти и другие факторы влияют на его продолжительность жизни. Тем не менее будем считать, что мы знаем функцию распределения случайной величины X, обозначая ее через $F(x)$. На практике это означает, что при работе с достаточно большой и достаточно однородной по условиям жизни и роду занятий группой населения известна статистика смертности внутри данной группы. На основании этой статистики и строится функция F. Далее, индивидуума, находящегося в возрасте x, будем именовать просто как жизнь x и обозначать (x). Разность $1 - F(x)$ будем обозначать как $s(x)$ и называть функцией выживания, имея в виду указанную группу населения. Функция выживания $s(x)$ непрерывно убывает, $s(0) = 1, s(+\infty) = 0$. Из определения следует, что $P(a < X < b) = s(a) - s(b)$. Далее, вероятность того, что жизнь (x) умрет на интервале $(x, x+t)$ равна

$$P(x < X < x+t|X > x) = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - {}_tp_x,$$

где величина ${}_tp_x$ есть вероятность дожития до возраста $x+t$ индивидуума X при условии дожития до возраста x. Разность $1 - {}_tp_x$ будем обозначать через ${}_tq_x$, где величина ${}_tq_x$ равна вероятности наступления смерти у жизни (x) до возраста $x + t$. Введем в рассмотрение случайную величину $T(x)-$ случайную величину будущего времени (x). Тогда

$$P(T(x) < t) = {}_tq_x,$$

это означает, что величина ${}_tq_x$ является функцией распределения случайной величины $T(x)$. При значении $x = 0$ величина ${}_tp_x$ равна, очевидно, значению $s(t)$. Кроме того, при значении $t = 1$ величины ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ будем обозначать как p_x, q_x соответственно. Вероятность того, что жизнь (x) умрет на возрастном интервале $(x+t, x+t+u)$, равна

$${}_{t|u}q_x = P(t < T(x) < t+u) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$$

Следовательно,

$${}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} - \frac{s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}\frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} = {}_tp_x \; {}_uq_{x+t}.$$

При значении $u = 1$ величина ${}_{t|1}q_x$ обозначается просто как ${}_{t|}q_x$. До сих пор мы рассматривали непрерывные случайные величины, связанные с продолжительностью жизни индивидуума, но статисические таблицы имеют дело с дискретными величинами, поэтому введем понятие округленной (по годам) случайной величины будущего времени жизни: $[T(x)] = K(x)$, при этом

$$P(K(x) = k) = P(k < T(x) < k+1) = \ {}_kp_x - \ {}_{k+1}p_x = \ {}_{k|}q_x = \ {}_kp_x q_{x+k},$$

откуда, в частности, следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \ {}_{k|}q_x = \ {}_{n+1}q_x.$$

Рассмотрим понятие интенсивности смертности в возрасте x. При малых значениях t величина $\ {}_tq_x$ равна

$$\frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = -\frac{s^{'}(x)t}{s(x)},$$

в последнем выражении множитель, не зависящий от t, а именно -$s^{'}(x)/s(x)$, называется интенсивностью смертности в возрасте x и обозначается как μ_x. Поскольку $-\mu_x = \frac{d}{dx}(\log s(x))$, то справедливы равенства

$$\log(\ {}_np_x) = \log(\frac{s(x+n)}{s(x)}) = -\int_x^{x+n} \mu_t dt,$$

откуда следует, что

$$\ {}_np_x = exp(-\int_0^n \mu_{x+t} dt).$$

Кроме того, при $x = 0$ полученное соотношение дает:

$$s(n) = exp(-\int_0^n \mu_t dt),$$

тогда плотность распределения $f(x)$ случайной величины X равна

$$-s^{'}(x) = exp(-\int_0^x \mu_t dt.)\mu_x = s(x)\mu_x.$$

Теперь получим выражение для плотности распределения случайной величины $T(x)$:

$$g(t) = \frac{d}{dt}(\ {}_tq_x) = \frac{d}{dt}(1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}) = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x)} = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x+t)}\frac{s(x+t)}{s(x)} = \ {}_tp_x \mu_{x+t},$$

из которого вытекает, в частности, что

$$\int_0^\infty \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = 1.$$

Поскольку $\ {}_np_x \to 0 \quad (n \to \infty)$, то

$$-\log(\ {}_np_x) \to \infty, \quad \int_x^{x+n} \mu_t dt \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Пример. Пусть $0 < t < 1$, событие $A = (T(x) \leq t)$, а событие $B = (t < T(x) \leq 1)$. Из формулы $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$ следует, что

$$q_x = \ _tq_x + \ _tp_x \ _{1-t}q_{x+t}.$$

Полученное равенство означает, что для (x) вероятность умереть в течение ближайшего года складывается из вероятности умереть в течение первой $t-$й части года и вероятности умереть в течение оставшейся $(1-t)-$й части года при условии выживания в течение первой $t-$й части.

Рассмотрим схематический процесс построения таблиц величин, введенных выше. Предположим, что в поле нашего наблюдения имеется имеется некоторое число l_0 (например, 100000) одновременно родившихся индивидуумов, из них $\overline{L}(x)$ дожило до возраста x. Отметим еще раз, что $\overline{L}(x)$ является случайной величиной. Если для каждого индивидуума с номером $j, j = 1, 2, \ldots, l_0$ обозначить через $I_j(x)$ индикатор дожития до возраста x,, то есть величину, равную 1, если указанный индивидуум жив к возрасту x, и равную 0 в противном случае, то, считая всех индивидуумов наделенными одинаковыми вероятностными характеристиками смертности, из равенства $EI_j(x) = s(x)$ получаем:

$$E\overline{L}(x) = l_0 s(x),$$

Всюду в дальнейшем среднее число доживших до возраста x, то есть значение $E\overline{L}(x)$, будем обозначать через l_x. Наряду с величиной $\overline{L}(x)$ рассмотрим величину $\ _n\overline{D}_x-$ случайное число умерших на возрастном интервале $(x, x+n)$ из начальной группы l_0 человек. Тогда, обозначив через $\ _nd_x$ среднее число умерших на данном интервале, получим:

$$\ _nd_x = E(\ _n\overline{D}_x) = l_0(s(x) - s(x+n)).$$

Выразим некоторые соотношения через величины l_x.

$$\ _tp_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad d_x = l_x - l_{x+1}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x},$$

$$\ _{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}, \qquad \ _{n|}q_x = \frac{d_x}{l_x},$$

$$\mu_x = -\frac{s^{'}(x)}{s(x)} = -\frac{l_x^{'}}{l_x}, \Longleftrightarrow -dl_x = l_x\mu_x dx,$$

$$l_x = l_0 exp(-\int_0^x \mu_t dt), \quad l_{x+n} = l_x exp(-\int_x^{x+n} \mu_t dt),$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_t\mu_t dt.$$

Рис. 2

Здесь мы рассматриваем случай, когда $x-$ целочисленный возраст. Кроме того, наличие достаточно большой группы наблюдения практически трудно осуществимо. Поэтому для построения таблиц смертности приходится в каждом конкретном случае делать свои предположения [2]. Кроме того, имеющаяся статистика, как правило, недостаточно полна. Здесь мы не останавливаемся на этих вопросах, полагая таблицу смертности изначально заданной. Замечание. В применении к человеку оперировать бесконечными возрастными категориями часто бывает неудобно, поэтому определяется предельный возраст w такой, что $s(w) = 0$.

Рассмотрим пример. Пользуясь таблицей величин l_x на стр. 68, требуется выразить:

а. вероятность того, что (30) доживет до 45.

б. вероятность того, что (30) умрет к 40.

в. вероятность того, что (30) умрет на пятом десятке.

Решение.

а. ${}_{15}p_{30} = l_{45}/l_{30} = \frac{89231}{93757} = 0.9517.$

б. ${}_{10}q_{30} = 1 - l_{40}/l_{30} = 1 - \frac{91179}{93757} = 0.0275.$

в. ${}_{10|10}q_{30} = {}_{10}p_{30}\ {}_{10}q_{40} = l_{40}/l_{30}(1 - l_{50}/l_{40}) = 0.04617.$

На рис 2 - 4 представлены графики зависимостей от возраста x соответственно величин $\mu_x, l_x, l_x\mu_x$. Из вида гафиков и соотношения

$$\frac{d}{dx}(l_x\mu_x) = \frac{d}{dx}(-\frac{dl_x}{dx}) = -\frac{d^2}{dx^2}l_x$$

следует, что локальные экстремумы функции $l_x\mu_x$ соответствуют точкам перегиба функции l_x.

Получим выражения для моментов случайных величин $T(x), K(x)$. Для этого докажем две леммы, касающиеся непрерывного и дискретного случаев.

Лемма 3 *Пусть $X-$ неотрицательная непрерывная случайная величина с функцией распределения $F(x)$, а $z(t)-$ монотонная дифференцируемая функ-*

Рис. 3

Рис. 4

ция, принимающая неотрицательные значения. Тогда при условии существования $Ez(X)$ справедливо равенство

$$Ez(X) = z(0) + \int_0^\infty (1 - F(x)dz(x).$$

Доказательство. Для всякого $A > 0$ имеем

$$\int_0^A z(x)dF(x) = -\int_0^A z(x)d(1-F(x)) = z(0) - z(A)(1-F(A)) + \int_0^A (1-F(x)dz(x).$$

Доказательство леммы будет завершено, если будет показано, что

$$\lim_{A\to\infty} z(A)(1-F(A)) = 0.$$

Последнее равенство очевидно, если функция $z(x)$ невозрастает. В случае неубывания функции $z(x)$ справедливы соотношения

$$0 \le z(A)(1-F(A)) = z(A)\int_A^\infty dF(x) \le \int_A^\infty z(x)dF(x) \to 0 \quad \text{при } A \to \infty,$$

поскольку по предположению интеграл $\int_0^\infty z(x)dF(x)$ сходится. Отсюда следует утверждение леммы. Из данной леммы легко получить ожидаемое время будущей жизни: полагая $z(x) = x$, имеем равенство

$$ET(x) = \int_0^\infty t \ {}_tp_x\mu_{x+t}dt = \int_0^\infty \ {}_tp_x dt.$$

Всюду далее величина $ET(x)$ будет обозначаться как $\overset{o}{e}_x$. Аналогично, полагая $z(x) = x^2$, получим выражение для второго момента случайной величины $T(x)$:

$$E(T(x))^2 = 2\int_0^\infty t \ {}_tp_x dt.$$

Отсюда выражение для дисперсии случайной величины $T(x)$будет

$$Var(T(x)) = 2\int_0^\infty t \ {}_tp_x dt - (\overset{o}{e}_x)^2.$$

Рассмотрим теперь аналогичные преобразования для округленной случайной величины $K(x)$.

Рассмотрим любую дискретную случайную величину X, принимающую значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с соответствующими вероятностями $g(k)$. Для нее функция распределения $G(k)$ определяется из равенств $g(k) = G(k) - G(k-1) = \Delta G(k-1)$, при этом $G(-1) = G(0) = 0$. Кроме того, справедлива

Лемма 4 *Пусть $z(k)$– произвольная монотонная неотрицательная функция такая, что существует $Ez(X)$. Тогда*

$$Ez(X) = \sum_{k=0}^\infty z(k)g(k) = z(0) + \sum_{k=0}^\infty (1 - G(k))\Delta z(k).$$

Доказательство. Прежде всего обозначим разность $1 - G(k)$ через $s(k)$. Тогда сумма

$$\sum_{j=0}^{k} z(j)g(j) = \sum_{j=0}^{k} z(j)(s(j-1) - s(j)) =$$

$$z(0)s(-1) - z(0)s(0) + z(1)s(0) - z(1)s(1) + \ldots z(k)s(k-1) - z(k)s(k-1) =$$

$$z(0) - z(k)s(k-1) + \sum_{j=0}^{k-1} s(j)\Delta z(j)$$

Справедливость леммы теперь следует из условия

$$\lim_{k\to\infty} z(k)s(k-1) = 0,$$

которое очевидно при невозрастающей функции $z(k)$ и следует из $s(j) \to 0$ при $j \to \infty$. Для неубывающей функции $z(k)$ не убывает, то из соотношений

$$0 \le z(k)s(k-1) = z(k)\sum_{j=k}^{\infty} g(j) \le \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j),$$

где

$$\sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j) \to 0, \quad (n \to \infty),$$

вытекает утверждение леммы.

Для случайной величины $X = K(x)$ разность $1 - G(k) = {}_{k+1}p_x$, поэтому

$$Ez(K(x)) = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta z(k)\ {}_{k+1}p_x.$$

Полагая $z(k) = k$, получаем:

$$Ez(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\ {}_{k+1}p_x.$$

Если же в качестве $z(k)$ выбрать k^2, то получим простое выражение для второго момента случайной величины $K(x)$:

$$E(K(x))^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x.$$

Всюду далее обозначая $EK(x)$ через e_x, несложно получить, что

$$Var(K(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x - e_x.$$

Рассмотрим еще 4 функции - характеристики смертности. Обозначим через L_x общее среднее количество лет, прожитых на интервале $(x, x+1)$ теми, кто изначально был членом когорты, состоящей из l_0 человек. Тогда

$$L_x = l_{x+1} + \int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$L_x = l_{x+1} - \int_0^1 t dl_{x+t} = l_{x+1} + \int_0^1 l_{x+t} dt - t l_{x+t}|_0^1 = \int_0^1 l_{x+t} dt.$$

Введем с помощью L_x так называемый центральный коэффициент смертности в возрасте x, обозначаемый как m_x :

$$m_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} dt} = \frac{l_x - l_{x+1}}{L_x}.$$

Пусть теперь T_x означает количество лет, прожитых после возраста x членами указанной группы. Тогда

$$T_x = \int_0^\infty t l_{x+t}\mu_{x+t} dt = -\int_0^\infty t dl_{x+t} = \int_0^\infty l_{x+t} dt.$$

Из последнего выражения для T_x следует, что

$$\frac{T_x}{l_x} = \int_0^\infty \ {}_t p_x dt = \overset{o}{e}_x,$$

поэтому можно величину T_x определить как произведение $\overset{o}{e}_x \ l_x$. Наконец, среднее время жизни на возрастном интервале $(x, x+1)$ у тех, кто умер на указанном интервале, равно

$$a(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t} dt} = \frac{\int_0^1 t \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 \ {}_t p_x \mu_{x+t} dt} = E(T(x)|T(x) < 1).$$

При этом, если смерти равномерно распределены на данном интервале, то $l_{x+t}\mu_{x+t} = d_x$ и тогда $a(x) = 0.5$. Кроме того, величина

$$a(x) = \frac{L_x - l_x}{l_x - l_{x+1}},$$

что эквивалентно представлению

$$L_x = a(x) l_x + (1 - a(x)) l_{x+1} \cong \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

До сих пор мы предполагали, что аргументы t, x, u и др. у функций дожития таких как ${}_t p_x, l_x$, являются целочисленными. Это означает, что фактически имеются таблицы определяющие распределение случайной величины $K(x)$. Будем по этим данным строить значения функций дожития для дробных возрастов вида $x + t, \quad t \in (0, 1)$. Для этого существуют три основных предположения:

A. Равномерное распределение смертей на каждом интервале $(x, x+1)$, где $x-$ целое. Здесь полагается $s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+t), \quad t \in (0,1)$.

B. Постоянная интенсивность смертности на каждом интервале $(x, x+1)$, где $x-$ целое. В этом случае $s(x+t) = s(x)exp(-\mu t), \quad t \in (0,1), \quad \mu = -\log p_x$.

C. Предположение Балдуччи, где справедливо соотношение$1/s(x+t) = (1-t)/s(x) + t/s(x+1)$.

Для каждого из этих предположений легко вывести выражения для различных функций. Например, пусть для равномерного распределения смертей требуется вывести выражение для ${}_tp_x$. Используя данное предположение, получим

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{(1-t)s(x) + ts(x+1)}{s(x)} = (1-t) + tp_x = 1 - tq_x. $$

Для этого же предположения получим выражение для $\mu_{x+t}, \quad t \in (0,1)$. По определению для таких t величина

$$ \mu_{x+t} = -\frac{s^{'}(x+t)}{s(x+t)} = -\frac{s(x+1) - s(x)}{s(x) + t(s(x+1) - s(x))} = \frac{q_x}{1 - tq_x}. $$

Для произвольных $t, u \in (0,1), \quad t + u < 1$ предположение постоянной интенсивности смертности дает выражение для ${}_uq_{x+t}$:

$$ {}_uq_{x+t} = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} = \frac{s(x)e^{-\mu t} - s(x)e^{-\mu(t+u)}}{s(x)e^{-\mu t}} = 1 - e^{-\mu u}. $$

Аналогично, выражая величину $s(x+t), \quad t \in (0,1)$ для каждого из трех предположений, можно получить выражения для любой функции. Приведем некоторые выражения для этих функций при предположениях A,B,C в таблице:

Функция	A	B	C
${}_tq_x$	tq_x	$1 - e^{-\mu t}$	$tq_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_tp_x$	$1 - tq_x$	$e^{-\mu t}$	$p_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_uq_{x+t}$	$uq_x/(1 - tq_x)$	$1 - e^{-\mu u}$	$uq_x/(1-(1-u-t)q_x)$
μ_{x+t}	$q_x/(1 - tq_x)$	μ	$q_x/(1-(1-t)q_x)$
${}_tp_x\mu_{x+t}$	q_x	$\mu e^{-\mu t}$	$p_xq_x/(1-(1-t)q_x)^2$

Из приведенных предположений для дробных возрастов наиболее часто применимым является первое. При данном предположении график функции l_x представляет собой кусочно-линейную линию. Рассмотрим еще одно полезное свойство равномерного распределения смертей. Представим случайную величину будущего времени жизни в виде $T(x) = K(x) + S(x), \quad S(x)-$ дробная часть функции $T(x)$. Тогда для всякого целого неотрицательного k и любого $s \in (0,1)$

$$ P(k < T(x) < k+s) = P(K(x) = k, S(x) \le s) = {}_{k|s}q_x = {}_kp_x \ {}_sq_{x+k}. $$

При этом для равномерного распределения смертей на интервале $(k, k+1)$ величина ${}_sq_{x+k} = sq_{x+k}$, в то же время $P(K(x) = k) = {}_kp_xq_{x+k}$, поэтому условная вероятность

$$ P(S(x) \le s | K(x) = k) = \frac{P(K(x) = k, S(x) \le s)}{P(K(x) = k)} = s $$

не зависит от значений, которые принимает случайная величина $K(x)$. Это означает независимость случайных величин $K(x)$и$S(x)$. Кроме того, из полученного равенства следует равномерность распределения на интервале $(0,1)$ случайной величины $S(x)$. Для сравнения заметим, что предположение постоянной интенсивности смертности на интервале $(k,k+1)$ влечет представление

$$_sq_{x+k} = 1 - e^{-\mu s} = 1 - p_{x+k}^s,$$

поэтому случайные величины $K(x)$и$S(x)$ будут независимыми в том и только в том случае, если отношение $(1-p_{x+k}^s)/(1-p_{x+k})$ не зависит от k. Это будет справедливо, если,например, $p_{x+k} = p$, в таком случае вероятность

$$P(S(x) \le s) = (1-p^s)/(1-p).$$

Для равномерного распределения смертей среднее и дисперсия случайных величин $T(x)$и$K(x)$связаны равенствами

$$\overset{o}{e}_x = e_x + \frac{1}{2}, \quad Var(T(x)) = Var(K(x)) + \frac{1}{12},$$

которые следуют из равномерности распределения случайной величины $S(x)$ на интервале $(0,1)$ и независимости $K(x)$и$S(x)$.

5.2 Аналитические законы смертности.

Для удобного представления законов смертности удобно оперировать не громоздкими таблицами различных характеристик, а простыми формулами, из которых эти таблицы при необходимости можно получить. При этом, конечно, параметры формул должны быть такими, чтобы полученные из них на основе этих формул таблицы соответствовали имеющейся статистике смертности. Кроме удобства использования, полученные на основе статистических данных формулы часто помогают сделать качественные выводы о смертности в интересующем круге людей, что бывает полезным в деле страхования жизни. Приведем в таблице несколько аналитических законов смертности, которые определяются через величину интенсивности смертности. Эти законы называются по фамилиям своих авторов.

Автор	μ_x	$s(x)$	Ограничения
Де Муавр(1729)	$(w-x)^{-1}$	$1-x/w$	$0 \le x < w$
Гомперц(1825)	Bc^x	$exp(-\frac{B}{\log c}(c^x-1))$	$B>0, c>1, x\ge 0$
Мэйкхам(1860)	$A+Bc^x$	$exp(-Ax-\frac{B}{\log c}(c^x-1))$	$B>0, A>-B, c>1, x\ge 0$
Вейбулл(1939)	kx^n	$exp(-\frac{k}{n+1}x^{n+1})$	$k>0, n>0, x\ge 0$

Из приведенной таблицы легко заметить, что закон Мэйкхама при $A=0$ превращается в закон Гомперца. Кроме того, в законе Мэйкхама интенсивность смертности разбита на две составляющие. Первая, соответсвующая величине A, не зависит от вораста x, а вторая обусловлена возрастом. Необходимо заметить, что параметры A, B, c невозможно подобрать подходящими для всех возрастов сразу. В частности, для первого года жизни законы смертности другие, чем для других возрастов. Это объясняется особенностями природы младенческой смертности. Для иллюстративной таблицы, приведенной ниже, параметры A, B, c взяты равными $0.001186, 0.0000714, 10^{0.04}$ соответственно.

Таблица смертности для возрастов 30 - 50 лет

x	l_x	μ_x	L_x	q_x	m_x	$a(x)$	$\overset{o}{e}_x$	$l_x\mu_x$
30	93757	0.002157	93650	0.002199	0.002202	0.4808	42.37	202
31	93551	0.002252	93440	0.002299	0.002302	0.4810	41.46	210.75
32	93336	0.002357	93219	0.002408	0.002411	0.4812	40.56	220.05
33	93111	0.002472	92989	0.002528	0.002531	0.4813	39.65	230.22
34	92876	0.002598	92748	0.002659	0.002663	0.4815	38.75	241.34
35	92629	0.002736	92494	0.002803	0.002808	0.4816	37.86	253.49
36	92369	0.002888	92227	0.002961	0.002966	0.4818	36.96	266.77
37	92096	0.003054	91946	0.003134	0.003139	0.4819	36.07	281.27
38	91807	0.003236	91649	0.003324	0.003333	0.4821	35.18	297.11
39	91502	0.003435	91335	0.003532	0.003538	0.4822	34.30	314.39
40	91179	0.003654	91001	0.003760	0.003767	0.4824	33.42	333.25
41	90836	0.003894	90647	0.004010	0.004018	0.4825	32.54	353.79
42	90472	0.004158	90271	0.004284	0.004293	0.4826	31.66	376.19
43	90084	0.004446	89870	0.004584	0.004595	0.4827	30.80	400.58
44	89671	0.004763	89443	0.004913	0.004926	0.4828	29.94	427.12
45	89231	0.005110	88987	0.005274	0.005288	0.4829	29.08	455.98
46	88760	0.005490	88500	0.005669	0.005686	0.4830	28.23	487.34
47	88257	0.005907	87978	0.006103	0.006122	0.4831	27.39	521.40
48	87718	0.006367	87420	0.006578	0.006600	0.4831	26.56	558.34
49	87141	0.006866	86821	0.007098	0.007125	0.4832	25.73	598.37
50	86523	0.007416	86180	0.007669	0.007699	0.4832	24.91	641.71

5.3 Отборочные и предельные таблицы.

Те таблицы смертности, о которых упоминалось выше, называются общими, или агрегированными, поскольку они имеют дело с общей группой населения, независимо от рода занятий, состояния здоровья и т.д. В практической работе часто страховщик имеет дело не с общей группой населения, а со своими клиентами. Относительно этих клиентов происходит отбор, например, с целью исключить лиц, страдающих какими-либо серьезными заболеваниями. При этом часто отбор носит неявный характер. Например, при коллективном страховании жизни можно страховать на небольшой период времени работников, занятых физическим трудом, заранее при этом зная, что на данной работе могут находиться только достаточно здоровые люди. В то же время при продаже полисов по страхованию жизни и здоровья для выезжающих за границу туристов какой-либо отбор провести невозможно, поэтому необходимо иметь дело с агрегированными таблицами. Таблицы смертности, полученные для лиц, прошедших отбор по состоянию здоровья, будем называть отборочными таблицами. Рассмотрим основные понятия и обозначения, связанные с отборочными таблицами. Будем через $[x]+t$ обозначать человека в возрасте $x+t$, который прошел отбор по состоянию здоровья в возрасте x. Для каждого такого человека вероятность умереть в течение ближайшего года равна $q_{[x]+t}$. Таким образом, здесь для использования этого параметра нужно хранить не вектор с координатами $q_x, x=0,1,2,\ldots$, а матрицу, соответствующую значениям x,t. Так же величинам p_x соответствуют вероятности $p_{[x]+t}$. Более сложный пример-величина ${}_{n|m}q_{[x]+t}$, соответствующие вероятности умереть на интервале $(x+t+n, x+t+n+m)$ для человека, возраста $x+t$ и прошедшего отбор в возрасте x. Величины ${}_tq_{[x]+0}$ обозначается просто как ${}_tq_{[x]}$.

Несмотря на достаточно очевидный факт, что характеристики функции выживания у лиц, прошедших отбор, лучше, нежели у всей группы населения, тем не менее с течением времени эффект отбора исчезает. Поэтому не менее очевидно, что, например, вероятность умереть в течение ближайшего года для человека возраста 55 лет практически такая же как для человека того же возраста, прошедшего самый строгий отбор 30 лет назад. Поэтому введем еще одно понятие. Величина r называется периодом отбора, если для всякого $j>0$ выполнено равенство

$$q_{[x-j]+r+j} \cong q_{[x]+r}.$$

Знак приближенного равенства означает, что эффектом отбора в имеющейся таблице можно пренебречь. В таком случае величина $q_{[x]+r}$считается равнойq_{x+r}. Если составить таблицу величин $q_{[x]+t}$, откладывая x по горизонтали и t по вертикали, то строки получившейся таблицы, начиная с $r+1-$ й, принято называть предельной таблицей. В приведенном ниже примере величина r взята равной 2.

$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$
0	$q_{[x-1]}$	$q_{[x]}$	$q_{[x+1]}$
1	$q_{[x-1]+1}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x+1]+1}$
2	q_x	q_{x+1}	q_{x+2}

В общем случае, как уже отмечалось, справедливы неравенства

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_x.$$

Будем обозначать среднее число доживших до возраста x и прошетших в этом возрасте отбор как $l_{[x]}$. Тогда по определению имеют место равенства

$$l_{[x]+r-k} = l_{[x]+r-k-1}p_{[x]+r-k-1}, \quad k=0,1,\ldots,r-1,$$

$$
{}_{n|m}q_{[x]+r} = \frac{l_{[x]+r+n} - l_{[x]+r+n+m}}{l_{[x]+r}}, \;\; {}_t p_{[x]+r} = \frac{l_{[x]+r+1}}{l_{[x]+r}},
$$

$$
l_{[x]+r} = d_{[x]+r} + d_{[x]+r+1} + d_{[x]+r+1} + \ldots .
$$

Например, при $r = 2$ величина ${}_2p_{[x]}l_{[x]} = l_{[x]+2} = l_{x+2}$.

6 Основные виды страхования жизни.

Рассмотренные ранее характеристики дожития позволят теперь для различных видов страхования жизни назначать величины страховых премий. Для этого предположим, что если в соответствии со страховым полисом в момент времени t выгодоприобретатель получает страховую сумму величины b_t, где $t-$ длина временного интервала после момента покупки полиса, то стоимость этой величины b_t в нулевой момент, то есть *текущая ‹—современная‹ настоящая‹— стоимость* равна $z_t = b_t v_t$, v_t- дисконтирующий множитель. Например, если процентная ставка равна i, а полис предусматривает выплату по смерти величины b, при этом выплаты производятся в момент смерти, то величина $z_t = bv^t$, где $v = 1/(1+i)$. Теперь, если полис обязывает страховщика выплатить страховое возмещение величины в момент смерти страхователя, то текущая величина этого возмещения является случайной величиной $Z = b_T v_T$, где $T = T(x)$ как и ранее - случайное время остаточной жизни. Зависимость b_T от T определяется конкретным договором. Если полис предполагает размер выплат b_t, $t \in A$ для некоторого множества $A \in (0, \infty)$, то их *актуарная настоящая величина* равна среднему значению их текущей величины, то есть

$$EZ = \int_A b_t v_t g(t) dt = \int_A b_t v_t \; {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

Величина EZ является величиной текущих обязательств страховщика по отношению к владельцу данного полиса Если страхователь оплачивает полис полностью в момент заключения договора, то будем говорить о *единовременной‹ или разовой‹ премии*. Эта премия включает в себя не только указанные выплаты в будущем, но и расходы по заключению договора, ведению полиса и многие другие расходы, которые мы здесь учитывать не будем и поэтому определим *единовре› менную нетто›премию* как EZ. В страховании жизни как правило страховое возмещение по случаю смерти выплачивается в течение нескольких дней после наступления страхового случая, поэтому в идеале можно рассматривать выплату страховой суммы в момент смерти. С другой стороны, как будет далее показано, при некоторых предположениях выражение для разовой нетто-премии в случае выплаты в момент смерти легко сводится к случаю выплаты в конце года смерти. Поэтому начнем рассмотрение нетто-премий со случая выплаты страховой суммы в конце года смерти. Здесь текущая стоимость выплат по случаю смерти равна случайной величине $Z = b_K v_{K+1}$. Тогда виды страхования жизни различаются видом зависимости b_K от K. Далее считаем $v_{K+1} = v^{K+1}$.

6.1 Нетто-премии для пожизненного и срочного страхования.

Первый вид страхования жизни - *пожизненое страхование*▷ Здесь b_K постоянно и поэтому можно считать $b_K = 1$. Текущая стоимость страховой выплаты

$$Z = v^{K+1},$$

соответствующая единовременная нетто-премия для такого вида страхования обозначается как A_x :

$$A_x = EZ = Ev^{K+1} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}.$$

Дисперсия случайной величины Z равна $Var(Z) = E(Z^2) - A_x^2$, при этом $k-$й момент случайной величины Z вычисляется достаточно легко: для параметра δ, называемого *силой процента—непрерывной процентной ставкой—* и равного $\log(1+i)$,

$$EZ^k = E(e^{-k\delta(K+1)}),$$

последнее выражение является не чем иным, как разовой нетто-премией при увеличенной в k раз силе процента и обозначаемого в актуарной математике как ${}^kA_x$. Таким образом, $Var(Z) = {}^2A_x - A_x^2$.

Рассмотрим далее виды срочного страхования, где выплаты производятся только в пределах определенного срока. Первый вид - $n-$годичное страхование жизни. Здесь

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{33}$$

Для данного вида страхования разовая нетто-премия обозначается как $A^1_{x:\overline{n}|}$ и вычисляется как

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \ {}_kp_x q_{x+k}.$$

При этом очевидно

$$A_x = A^1_{x:\overline{\infty}|}.$$

Аналогично случаю пожизненого страхования,

$$VarZ = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2,$$

где как и ранее, ${}^2A^1_{x:\overline{n}|}$ есть нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни с удвоенной силой процента.

Рассмотрим теперь страхование *чистого дожития* до возраста $x+n$, когда страховая выплата производится, если застрахованный прожил n лет после покупки полиса. Здесь

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ v^n, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{34}$$

В таком случае единовременная нетто-премия равна

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = EZ = v^n \ {}_np_x,$$

и дисперсия случайной величины Z равна

$$VarZ = v^{2n} \ {}_np_x(1 - \ {}_np_x).$$

Следующий вид страхования - n › *годичное смешанное страхование жизни*, когда страхуется как риск смерти в течение ближайших n лет, так и риск дожития до возраста $x+n$. Если страховые суммы по случаю смерти и по дожитию равны b_1 и b_2 соответствено, то текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} b_1 v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ b_2 v^n, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases} \tag{35}$$

Очевидно, что при этом $Z = b_1 Z_1 + b_2 Z_2$, где Z_1, Z_2 - текущие стоимости страховых выплат со страховым возмещением, равным 1, для риска смерти и риска дожития соответственно; поскольку $EZ_1 = A^1_{x:\overline{n}|}$, $EZ_2 = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, то

$$EZ = b_1 A^1_{x:\overline{n}|} + b_2 A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

В частном случае, когда $b_1 = b_2 = 1$, нетто-премия для смешанного страхования обозначается как $A_{x:\overline{n}|}$:

$$A_{x:\overline{n}|} = EZ = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_k p_x q_{x+k} + v^n\ {}_n p_x.$$

Из определений (33) и (34) следует, что $Z_1 Z_2 = 0$, поэтому

$$Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - EZ_1 EZ_2 = -EZ_1 EZ_2 = -A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Отсюда следует, что для дисперсии случайной величины Z справедливо равенство

$$VarZ = b_1^2 VarZ_1 + b_2^2 VarZ_2 - 2b_1 b_2 A^1_{x:\overline{n}|} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1},$$

из которого следует, что один полис по смешанному страхованию жизни должен стоить меньше, чем два отдельных полиса по риску смерти и по дожитию.

Рассмотрим теперь *отсроченное на m лет пожизненное страхование*▷ Здесь современная стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ v^{K+1}, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия здесь обозначается как ${}_{m|}A_x$ и равна

$${}_{m|}A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m} = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1} A_{x+m} = A_x - A^1_{x:\overline{m}|},$$

и, как и ранее,

$$VarZ = {}^2_{m|}A_x - {}_{m|}A_x^2,$$

${}^2_{m|}A_x$ – соответствующая разовая нетто-премия при удвоенной силе процента.

До сих пор мы определяли разовые нетто-премии для случая, когда выплаты страхового возмещения производились в конце страхового года. Однако на практике в договорах страхования жизни оговаривается условие выплаты страховой суммы в течение нескольких дней после получения документов об имевшем место страховом случае. Это означает, что фактически можно предполагать, что выплаты производятся в момент смерти, то есть в возрасте $x + T(x)$. Текущая стоимость единичной страховой суммы равна

$$Z = v^T.$$

Разовая нетто-премия для различных видов страхования с выплатой в момент смерти имеет обозначение, аналогичное случаю выплаты в конце года смерти, отличие состоит в том, что над символом A ставится черта. Так, разовая нетто-премия для пожизненного страхования с выплатой в момент смерти обозначается как $\overline{A}_x$, а разовая нетто-премия для $n-$годичного смешанного страхования обозначается как $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$, при этом

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Выразим величину разовой премии для случая выплаты в момент смерти через соответствующую величину для случая выплат в конце года смерти. Для этого будем предполагать равномерное распределение смертей на каждом из целочисленных интервалов, свойства такого распределения подробно были рассмотрены в разд. 5.1.

Рассмотрим вид пожизненного страхования. Здесь

$$\overline{A}_x = Ev^T = Ev^{K+S} = Ev^{(K+1)-(1-S)}.$$

Поскольку, как показано в разд. 5.1, случайные величины K и S независимы, то отсюда

$$\overline{A}_x = Ev^{(K+1)}E(1+i)^{1-S} = A_x E(1+i)^{1-S}.$$

Кроме того, так как случайная величина $1 - S$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то

$$E(1+i)^{1-S} = \int_0^\infty (1+i)^t dt = \frac{i}{\delta},$$

откуда

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Аналогичные выражения справедливы и для видов срочного страхования. Например, для $n-$годичного смешанного страхования

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.$$

Пусть теперь выплаты производятся в конце $m-$й части года, например, в течение месяца или квартала, то есть в момент $K + S_m$, где S_m- случайная величина, для которой при предположении равномерного распределения смертей справедливо

$$P(S_m = k/m) = 1/m, \ k = 1, 2, \ldots m,$$

причем случайные величины K, S_m независимы. В таком случае для пожизненного страхования текущая стоимость единичной страховой суммы равна

$$Z = v^{K+S_m},$$

а разовая нетто-премия обозначается как $A_x^{(m)}$. При этом разность $1-S_m$ принимает каждое из значений $\{0, 1/m, \dots 1-1/m\}$ с вероятностью $1/m$. Из представления $K + S_m = K + 1 - 1 + S_m$ это влечет

$$Ev^{K+S_m} = Ev^{K+1}Ev^{-(1-S_m)} = A_x \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(1+i)^{k/m} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x,$$

где величина

$$i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1) = \frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1/m}$$

называется *номинальной годовой процентной ставкой с выплатами m раз в год^c эквивалентной i*▷ Следовательно, при предположении равномерного распределения смертей имеет место равенство

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x \tag{36}$$

Предельное значение величины $i^{(m)}$ при $m \to \infty$ равно δ, поэтому в пределе получаем

$$A_x^{(m)} \to \frac{i}{\delta}A_x = \overline{A}_x \text{ при } m \to \infty.$$

Для $n-$годичного страхования жизни текущая величина единичной страховой суммы при $m-$разовых выплатах равна

$$Z = \begin{cases} v^{K+S_m}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия для такого случая обозначается как $A_{x:\overline{n}|}^{1(m)}$ и равна

$$\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{n}|}.$$

Аналогично разовая нетто-премия для $n-$годичного смешанннного страхования обозначается как $A_{x:\overline{n}|}^{(m)}$ и равна

$$\frac{i}{i^{(m)}}A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Рассмотрим теперь *возрастающее* страхование. В данном виде страховая сумма равна $K+1$, текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = (K+1)v^{K+1};$$

единовременная нетто-премия для пожизненного страхования обозначается как $(IA)_x$ и равна

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k}, \tag{37}$$

а нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k}.$$

Для *убывающего n-годичного страхования жизни* страховая сумма равна $n-\ K$. Тогда текущая стоимость страховой суммы

$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & \text{если} \quad K \in \{0, 1, \dots n-1\} \\ 0, & \text{если} \quad K \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия в таком случае

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_kp_xq_{x+k}.$$

Пусть теперь страховая сумма возрастает на единицу каждый год, то есть равна $K+1$, но выплата ее происходит в момент смерти. Тогда текущая стоимость страховой суммы равна

$$Z = (K+1)v^T,$$

разовая нетто-премия обозначается символом $(I\overline{A})_x$ для пожизненного страхования, при этом при гипотезе равномерного распределения смертей

$$(I\overline{A})_x = E[(K+1)v^T] = E[(K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S}] = \frac{i}{\delta}(IA)_x.$$

Если теперь страховая сумма возрастает не раз в год, а m раз в год на величину, равную $1/m$, то текущая стоимость страховой суммы

$$Z = (K+S_m)v^T,$$

тогда разовая нетто-премия имеет обозначение $(I^{(m)}\overline{A})_x$ для пожизненного страхования и для равномерного распределения смертей равна

$$E[(K+S_m)v^T] = E[(K+1)v^T - v^T + S_m(1+i)^{1-S}v^{K+1}] = (I\overline{A})_x - \overline{A}_x + A_xE[S_m(1+i)^{1-S}].$$

Поскольку

$$E[S_m(1+i)^{1-S}] = \sum_{k=1}^{m}(1-\frac{k-1}{m})\int_{(k-1)/m}^{k/m}(1+i)^tdt = \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{m}(1-\frac{k-1}{m})[e^{k\delta/m} - e^{(k-1)\delta/m}] =$$

$$\frac{i}{\delta} + \frac{(1+i)^{1/m}}{\delta m(1-(1+i)^{1/m})}[(m-1)(1+i)+1-m(1+i)^{1-1/m}] =$$

$$\frac{(1+i)^{1/m} m[1-im+(m-1)(1+i)]}{\delta m(1-(1+i)^{1/m})} = \frac{i-d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}.$$

Здесь величина $d = d^{(1)} = i/(1+i)$ носит название *дисконта‘* или *годовой фак’тической ставки дисконта‘* а величина

$$d^{(m)} = m(1-(1+i)^{-1/m})$$

называется *номинальной ставкой дисконта‘* или *номинальной ставкой авансо’вого процентного дохода‘ выплачиваемого m раз в год‘ эквивалентной d.* Величины $d^{(m)}$ и $i^{(m)}$ связаны соотношением

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1+i^{(m)}/m},$$

из которого следует, что

$$d^{(m)} \to \delta \text{ при } m \to \infty.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$(I^{(m)}\overline{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i-d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}A_x \tag{38}$$

Если рассмотреть непрерывно возрастающую страховую сумму $b_t = t$, то ее текущая стоимость

$$Z = Tv^t,$$

соответсвующая единовременная нетто-премия получается переходом к пределу при $m \to \infty$ в уравнении (38) :

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}(IA)_x - \frac{i}{\delta}A_x + \frac{i-\delta}{\delta^2}A_x.$$

Соотношение, аналогичное (38) для $n-$годичного страхования жизни, выводится способом, аналогичным выводу (38) : или из (38), используя равенства

$$(I^{(m)}\overline{A})_x = (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(I^{(m)}\bar{A})_{x+n},$$

$$(IA)_x = (IA)^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}(IA)_{x+n},\ A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}A_{x+n}.$$

Для $n-$годичного страхования жизни с выплатой страховой суммы в момент смерти в случае, когда страховая сумма уменьшается m раз в год на величину, равную $1/m$, текущая стоимость страховой выплаты равна

$$Z = \begin{cases} (n+1/m-K-S_m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n. \end{cases}$$

Разовая нетто-премия для такого вида страхования обозначается как $(D^{(m)}\overline{A})^1_{x:\overline{n}|}$. Для ее выражения через уже введенные величины заметим, что случайная величина Z равна разности $Z_1 - Z_2$, где

$$Z_1 = \begin{cases} (n+1/m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n, \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} (K+S_m)v^T, & \text{если} \quad T \in [0, n-1) \\ 0, & \text{если} \quad T \geq n. \end{cases}$$

При этом $EZ_1 = (n+1/m)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, $EZ_2 = (I^{(m)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$. Таким образом,

$$(D^{(m)}\bar{A})^1_{x:\bar{n}|} = (n+1/m)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - (I^{(m)}\overline{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}[(n+1/m)A^1_{x:\overline{n}|} - (IA)^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}] - \frac{i-d^{(m)}}{\delta d^{(m)}}A_x.$$

Последнее равенство справедливо при предположении равномерности смертей.

В заключение приведем некоторые интересные соотношения, связывающие разовые нетто-премии с возрастающей страховой суммой с нетто-премией для отстроченного страхования. Рассмотрим сначала случай выплат в конце года. Для этого сначала (37) перепишем в виде

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k},$$

после чего, меняя порядок суммирования в последнем равенстве, получаем

$$(IA)_x = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{j=0}^{\infty}\ {}_{j|}A_x.$$

Для непрерывного случая, заменяя операцию суммирования интегрированием, совершенно аналогично получаем равенство

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^{\infty}\ {}_{s|}\bar{A}_x ds.$$

Таким же образом перепишем равенство

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k} =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}.$$

Для непрерывного случая

$$(\bar{D}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \int_0^{n-t} v^t\ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^n \int_0^{n-s} v^t\ {}_tp_k \mu_{x+t} dt = \int_0^n \bar{A}^1_{x:\overline{n-s}|} ds.$$

6.2 Рекуррентные формулы для единовременных нетто-премий.

Приводимые ниже формулы позволяют не только строить вычислительные ал- лгритмы для определениият разовых нетто-премий, но представляют интерес с точки зрения страховой интерпрпетации. Рассмотрим дискретный и непрерывный варианты смешанного $n-$годичного страхования жизни. В первом случае перепишем $A_{x:\overline{n}|}$ в виде

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\frac{l_{x+k}}{l_x}(1-\frac{l_{x+k+1}}{l_{x+k}}) + v^n\ {}_np_x = vq_x + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\frac{d_{x+k}}{l_x} + v^n\ {}_np_x =$$

$$vq_x + vp_x\left[\sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1}\frac{d_{x+1+k}}{l_{x+1}} + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_{x+1}\right] = vq_x + vp_xA_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Следовательно, для дискретного случая мы получили рекуррентное соотношение

$$A_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_xA_{x+1:\overline{n-1}|} \tag{39}$$

Для страховой интерпретации умножим равенство (39) на $(1+i)l_x$:

$$l_x(1+i)A_{x:\overline{n}|} = d_x + l_{x+1}A_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Теперь полученное равенство можно интерпретировать следующим образом. Сумма разовых нетто-премий, собранная со страхователей возраста x, равна вкладу, который через год вместе с процентами по нему будет равен выплатам по смерти умершим на возрастном интервале $(x, x+1)$ и сумме нетто-премии, собранных с доживших до возраста $x+1$. Далее, разделив последнее равенство на $(1+i)^{x+1}l_x$, получим

$$v^{x+1}A_{x+1:\overline{n-1}|} - v^xA_{x:\overline{n}|} = q_xv^{x+1}(A_{x+1:\overline{n-1}|} - 1).$$

Отсюда

$$v^{x+k}A_{x+k:\overline{n-k}|} - v^{x+k-1}A_{x+k-1:\overline{n-k+1}|} = q_{x+k-1}v^{x+k}(A_{x+k:\overline{n-k}|} - 1),\ k = 1, 2, \dots n.$$

Просуммировав это равенство по k от 1 до n, учитывая $A_{x+n:\overline{0}|} = 1$, получим

$$v^{x+n} - v^xA_{x:\overline{n}|} = -\sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1}q_{x+k}(1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}) \Longleftrightarrow$$

$$A_{x:\overline{n}|} = v^n + \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}q_{x+k}(1 - A_{x+k:\overline{n-k}|}).$$

Последнее равенство можно интерпретировать в том смысле, что разовая нетто-премия для $n-$годичного страхования жизни складывается из текущих средних доходов выгодоприобретателя от заключенной сделки по страхованию. Здесь текущий средний доход, отнесенный к году $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$ равен $v^{k+1}q_{x+k}(1 - A_{x+k:\overline{n-k}|})$, а текущий средний доход при дожитии до возраста $x+n$ равен v^n. Такая интерпретация позволяет разовую премию, выплаченную страхователем, разложить на временные составляющие ту выгоду, что несет данный договор страхователю.

В непрерывном случая аналогом рекуррентных соотношений будет дифференциальное уравнение. Рассмотрим опять случай $n-$годичного смешанного страхования жизни. Для него $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, поэтому сначала получим выражения для производных каждого из двух слагаемых. Приняв $s = x + t$ в качестве переменной интегрирования, представим $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ в виде

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \frac{1}{v^x \ {}_xp_0} \int_x^{x+n} v^s \ {}_sp_0 \mu_s ds$$

Дифференцируя данное произведение по x, отсюда получаем

$$\frac{d}{dx} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \mu_x.$$

Далее, дифференцируя равенство

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n \ {}_np_x$$

по переменной x, выпишем равенство для второго слагаемого:

$$\frac{d}{dx} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n \frac{d}{dx} \ {}_np_x = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} (\mu_x - \mu_{x+n}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dx} \bar{A}_{x:\overline{n}|} = (\delta + \mu_x) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_{x+n} A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \mu_x + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} (\mu_x - \mu_{x+n}) =$$

$$(\delta + \mu_x) \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \mu_x A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} - \mu_x.$$

Полученное равенство означает, что при $n \to \infty$ производная

$$\frac{d}{dx} \bar{A}_x = (\delta + \mu_x) \bar{A}_x - \mu_x.$$

Переписав последнее уравнение в виде

$$\delta \bar{A}_x dx = d\bar{A}_x + \mu_x (1 - \bar{A}_x) dx,$$

можно интерпретировать его следующим образом: доход, полученный страховщиком за бесконечно малый отрезок времени dx, складывается из повышения в цене разовой премии за тот же отрезок и дохода выгодоприобретателя в случае смерти застрахованного в течение указанного временного интервала.

6.3 Коммутационные функции.

Коммутационные функции служат для краткой записи актуарных выражений, как то нетто-премий, величин взносов и т.д. в виде некоторых табличных параметров, что позволяет, не прибегая к сложным выкладкам, по соответствующим таблицам определять значения интересущих выражений. Наличие таких таблиц несомненно является большим практическим преимуществом, с другой стороны, как мы увидим далее, параметры этих таблиц зависят от величны процента i, поэтому в случае изменения величины ставки i значения табличных параметров необходимо пересчитывать.

Перепишем равенство для A_x :

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_k p_x q_{x+k}$$

в виде

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \Longleftrightarrow v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k},$$

тогда последнее равенство будет выглядеть очень кратко, если ввести в рассмотрение коммутационные функции:

$$D_x = v^x l_x, \ \ C_x = v^{x+1} d_x = D_x v q_x,$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}, \ \ R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) C_{x+k}.$$

В таком случае равенство для A_x будет выглядеть как

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Имея таблицы перечисленных четырех коммутационных функций, можно значения всех вышеприведенных разовых нетто-премий вычислить по этим таблицам. Например, величины

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \ \ A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}, \ \ A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

В более сложном случае возрастающей страховой суммы разовая нетто-премия

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} \ {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{x+k+1} d_{x+k} / (v^x l_x) =$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_{x+k}}{D_x} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (M_{x+k} - M_{x+n})}{D_x} = \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x}$$

Рассмотрим пример. Для стандартного $n-$годичного страхования жизни со страховой суммой, убывающей на единицу в год и выплатой в момент смерти требуется выразить разовую нетто-премию через коммутационные функции. Распределение смертей равномерное.

Для требуемого выражения сначала заметим, что

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} (DA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}.$$

Далее из представления $A^1_{x:\overline{n}|}$ для каждого n получим

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{M_x - M_{x+n-j}}{D_x} = \frac{i}{\delta}\frac{nM_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть смертность подчиняется закону $l_x = 100 - x$, $x \in (0, 100)$, а сила процента $\delta = 0.1$. Страхователь возраста 50 лет заключает договор на 10-летнее смешанное страхование жизни с выплатами по смерти и по дожитию b_1 и b_2 соответственно. Вычислить $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$, $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$. Принимая $b_1 + b_2 = b$, определить, при каком отношении b_1/b дисперсия текущих выплат минимальна.

Решение. Пусть Z_1, Z_2- текущие выплаты по смерти и по дожитию соответственно. Тогда

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = EZ_1 = \int_0^n e^{-\delta t}/(100-x)dt = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta(100-x)} = 0.1264,$$

$$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = EZ_2 = e^{-\delta n}\frac{100-x-n}{100-x} = 0.2943,$$

$${}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1-e^{-2\delta n}}{2\delta(100-x)} = 0.08647, \quad {}^2A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = e^{-2\delta n}\frac{100-x-n}{100-x} = 0.1083,$$

$$Cov(Z_1, Z_2) = -\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = -0.0372, VarZ_1 = 0.0705, VarZ_2 = 0.02169.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$Var(b_1Z_1 + b_2Z_2) = b_1^2VarZ_1 + b_2^2VarZ_2 + 2b_1b_2Cov(Z_1, Z_2) \to min,\ \ b_2 = b - b_1 \in (0, b).$$

Ее решением служит

$$b_1^* = \frac{b[VarZ_2 - Cov(Z_1, Z_2)]}{VarZ_1 + VarZ_2 - 2Cov(Z_1, Z_2)} =$$

$$\frac{b[VarZ_2 - Cov(Z_1, Z_2)]}{[VarZ_1 - Cov(Z_1, Z_2)] + [VarZ_2 - Cov(Z_1, Z_2)]} \in (0, b),$$

откуда оптимальное отношение $b_1/b = 0.3535$.

2. Для постоянной интенсивности смертности μ при $x > 0$ и силе процента δ определить выражение для $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

Решение. По определению

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\ {}_tp_x\mu_{x+t}dt + v^n\ {}_np_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}(1 - e^{-(\mu+\delta)n}) + e^{-(\mu+\delta)n}.$$

3. Показать, что $\bar{A}_x$ равна производящей функции моментов случайной величины остаточной жизни $T(x)$ при значении аргумента, равном $-\delta$.

Решение. По определению

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_{T(x)}(t) dt = M_{T(x)}(-\delta).$$

4. Пусть случайная величина $T(x)$ имеет гамма-распределение с параметрами α, β. Найти значение $\bar{A}_x$.

Решение. Используем замену $y = (\beta + \delta)x$ для вычисления итеграла в выражении

$$\bar{A}_x = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\beta+\delta)x} x^{\alpha-1} dx = \left(\frac{1}{1+\delta/\beta}\right)^\alpha.$$

5. Пусть $b_t = t,\ \mu_{x+t} = \mu,\ \delta_t = \delta$ при всех $t > 0$. Выразить через δ, μ величины $(\bar{I}\bar{A})_x = E(b_T v^T),\ Var(b_T v^T)$.

Решение. Используя замену $y = (\mu + \delta)x$, вычислим интеграл:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int_0^\infty t e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2},$$

откуда

$${}^2(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)^2},\ \ Var(b_T v^T) = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)^2} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^4}.$$

6. Известно, что $A_x = 0.3,\ A_{x+10} = 0.4,\ A_{x:\overline{10|}} = 0.5$. Вычислить $A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}},\ A^1_{x:\overline{10|}}$.

Решение. Из условия имеем два уравнения

$$A^1_{x:\overline{10|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}} = 0.5,\ \ A^1_{x:\overline{10|}} + 0.4 A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}} = 0.3$$

относительно $A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}},\ A^1_{x:\overline{10|}}$. Решая их как систему, находим $A^1_{x:\overline{10|}} = 1/6,\ A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}} = 1/3$.

7. Используя предположение равномерного распределения смертей, выразить в терминах коммутационных функций величину $(I\bar{A})_{30:\overline{35|}}$.

Решение. При указанных условиях случайные величины K, S независимы. Поэтому

$$(I\bar{A})_{30:\overline{35|}} = (i/\delta)(IA)_{30:\overline{35|}} = \frac{i}{\delta} \frac{R_{30} - R_{65} - 35 M_{35}}{D_{30}}.$$

7 Аннуитеты в страховании жизни.

Под аннуитетами понимается последовательность регулярно поступающих платежей с заранее оговоренным сроком действия. Таким образом, понятия регулярного взноса и аннуитета совпадают и принято называть взносами те платежи, которые поступают от страхователя к страховщику, а платежи, идущие в адрес страхователя, принято называть аннуитетами. Например, при покупке полиса в договоре страхования клиент может получить не страховую сумму, а пенсию, выплачиваемую в течение определенного периода времени и начиная с некоторого возраста. Естественно, стоимость этой пенсии должна соответствовать страховой сумме. Следовательно, пенсия является не чем иным, как отсроченным на определенный срок анннуитетом. С другой стороны, разовая премия может быть суммой, заплатить которую бывает затруднительно и поэтому страхователь вместо выплаты разовой премии может выплачивать взносы, причем суммарная стоимость этих взносов должна быть эквивалентной разовой премии. Этим обстоятельством объясняется термин "нетто-премия аннуитета", которым мы будем пользоваться. Аннуитеты могут различаться частотой поступающих платежей, сроком действия, величиной. Поэтому, как и для разовых нетто-премий, мы начнем с более простых по периодичности взносов.

7.1 Ежегодные аннуитеты.

Аннуитеты, выплачиваемые ежегодно, разделяются на два вида - выплачиваемые предварительно, то есть в начале текущего года, и выплачиваемые впоследствии, то есть выплачиваемые в конце текущего года. Первые носят название *пренумерандо‘* вторые - *постнумерандо▷* Рассмотрим аннуитет пренумерандо, выплачиваемый в течение n лет, то есть в моменты $0, 1, \dots n-1$. Величину аннуитета будем считать равной единице. Тогда текущая стоимость этого аннуитета обозначается как $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ и равна

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}.$$

Теперь предположим, что тот же аннуитет выплачивается уже в течение всей жизни страхователя, то есть в течение $K = K(x)$ лет в моменты $0, 1, \dots K(x)$. Тогда его текущая стоимость является случайной величиной и равна

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1-v^{K+1}}{d}.$$

Нетто›премия данного аннуитета, равная его *актуарной настоящей ↼текущей‘современной↽ величине‘* определяется как математическое ожидание его текущей стоимости:

$$E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \frac{1-A_x}{d}$$

и обозначается как $\ddot{a}_x$. Отсюда следует соотношение

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x,$$

которое означает, что нетто-премия пожизненого годового аннуитета-пренумерандо величины d вместе с разовой премией пожизненного страхования равна 1. Кроме того, из определения нетто-премии аннуитета и из леммы 4 разд. 5.1 следует

$$\ddot{a}_x = E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_kp_x.$$

Отсюда следует важная рекуррентная формула для аннуитетов:

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1} \tag{40}$$

Выражение для дисперсии текущей стоимости получается достаточно просто:

$$Var[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = Var\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = Var[v^{K+1}]/d^2 = [\ {}^2A_x - A_x^2]/d^2.$$

В том случае когда рассматривается аннуитет-постнумерандо, выплачиваемый в течение n лет, его текущая стоимость, обозначаемая как $a_{\overline{n}|}$, равна

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots v^n = v\ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Текущая стоимость пожизненного аннуитета-постнумерандо и его нетто-премия соответственно равны

$$a_{\overline{K}|} = v\frac{1 - (1+i)v^{K+1}}{d}, \ a_x = v\frac{1 - (1+i)A_x}{d}.$$

Как и в случае аннуитета-пренумерандо, согласно лемме 4 разд. 5.1

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|} \ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \ {}_kp_x = \ddot{a}_x - 1.$$

Кроме того,

$$1 = ia_x + (1+i)A_x.$$

Рассмотрим теперь срочные взносы единичной величины. Для $n-$годичных взносов-пренумерандо их текущая стоимость определяется случайной величиной

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge n. \end{cases}$$

Нетто-премия этого аннуитета равна $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = EY$. Если учесть, что $Y = (1-Z)/d$, где случайная величина

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

то можно сразу сказать, что

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}(1 - EZ) = \frac{1}{d}(1 - A_{x:\overline{n}|}).$$

Отсюда следует равенство, аналогичное случаю пожизненных аннуитетов

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}.$$

Кроме того, величина

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x.$$

Для дисперсии текущих выплат имеем

$$VarY = \frac{1}{d^2}VarZ = \frac{1}{d^2}(\ {}^2A_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}).$$

Рассмотрим случай отсроченных на m лет аннуитетов, которые начинают выплачиватся по достижении страхователем возраста $x + m$. Нетто-премия такого аннуитета

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k \ {}_kp_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}$$

равна среднему значению текущей стоимости Y, где случайная величина

$$Y = \begin{cases} 0 = \ddot{a}_{\overline{K}|} - \ddot{a}_{\overline{K}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < m \\ \ddot{a}_{\overline{K}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}, & \text{если} \quad K \ge m. \end{cases}$$

Кроме того, эту цену можно представить как

$$_{m|}\ddot{a}_x = E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}), \quad {}_{m|}\ddot{a}_x = A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x+m}.$$

Как уже было сказано, отсроченные на определенный срок аннуитеты реализуются в виде пенсий при достижении соответствующего возраста. При этом для получения этой пенсии страхователь платит регулярные взносы в в течение заранее обусловленного периода времени; кроме того, величина годового взноса должна находиться в соответствии с величиной будущей пенсии. Далее вопрос о величине взноса, соответствующей будущему страховому вознаграждению, будет рассмотрен. Пока только отметим, что на практике приведенные здесь виды страховых аннуитетов применяются в сочетании друг с другом.

Следует заметить, что в выражениях цены аннуитета в виде суммы присутствуют слагаемые вида $v^k \ {}_kp_x = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$. Например, для $-$годичного аннуитета

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{n-1} A_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}.$$

Это означает, что цена аннуитета равна соответствующей сумме нетто-премий чистого дожития. Для удобства обозначим величину $A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\;1}$ как ${}_nE_x$. Определим теперь *аккумулированную величину* $n-$годичного аннуитета-пренумерандо в конце срока как отношение

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Если величина $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ характеризует ценность $n-$годичного аннуитета с точки зрения момента возраста x, то показатель $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ определяет ту же ценность в будущем, то есть через n лет. Величина $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ несложно преобразуется к виду

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_kE_x}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}.$$

В дополнение к введенным ранее коммутационным функциям рассмотрим функцию $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$, тогда легко видеть, что цена аннуитета может быть кратко выражена через эти функции. Например,

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},\ \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

7.2 Аннуитеты с выплатами m раз в год

Здесь мы рассмотрим аннуитеты в которых выплаты производятся m раз в год и при этом величина каждой выплаты равна $1/m$, поэтому годовая выплата попрежнему равна единице. По условию выплаты на $(k+1)-$м году осуществляются в моменты $k, k+1/m, \dots k+(m-1)/m$ для аннуитета-пренумерандо и соответственно в моменты $k+1/m, k+2/m, \dots k+1$ для случая постнумерандо. Для каждой пары $k, s,\ s \geq 1$ неотрицательных целых чисел текущая цена аннуитета-пренумерандо, выплачиваемого в течение срока $n+s/m$, равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n+s/m}|} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+j/m} + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{s-1} v^{n+j/m} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{v^k(1-v)}{m(1-v^{1/m})} + v^n\frac{1-v^s}{m(1-v^{1/m})} = \frac{1-v}{m(1-v^{1/m})}\frac{1-v^n}{1-v} + v^n\frac{1-v^{s/m}}{m(1-v^{1/m})} = \frac{1-v^{n+s/m}}{d^{(m)}}.$$

Следовательно, если мы рассмотрим пожизненный аннуитет-пренумерандо с $m-$разовыми выплатами, то его текущая стоимость как случайная величина равна

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+S_m}|} = \frac{1-v^{K+S_m}}{d^{(m)}}.$$

Здесь как и ранее, случайная величина $K = [T(x)]$, а случайная величина $S_m = ([m(T-K)]+1)/m \in \{1/m, \dots (m-1)/m, 1\}$. Отсюда нетто-премия данного аннуитета как среднее значение его текущей стоимости равна

$$\ddot{a}^{(m)}_x = E\ddot{a}_{\overline{K+S_m}|} = \frac{1-A^{(m)}_x}{d^{(m)}}.$$

Отсюда получаем соотношение, обобщающее случай $m = 1$:

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}. \tag{41}$$

Если аннуитет является срочным на n лет, то в таком случае его текущая стоимость

$$\ddot{a}_{\overline{K+S_m}|}^{(m)} = \begin{cases} (1 - v^{K+S_m})/d^{(m)}, & \text{если} \quad K + S_m < n \\ (1 - v^n)/d^{(m)}, & \text{если} \quad K + S_m \geq n \end{cases}$$

определяет нетто-премию

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

Это равенство эквивалентно

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} + A_{x:\overline{n}|}^{(m)}.$$

Полученное равенство при $n \to \infty$ превращается в (41).

Рассмотрим *отсроченный на q лет n-годичный аннуитет с выплатами m раз в год*. Для него нетто-премия равна

$$_{q|n}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{q+n}|}^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{q}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{q}|}^{(m)} - A_{x:\overline{q+n}|}^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

При этом текущая стоимость такого аннуитета есть разность случайных величин $Z - Y$, где $Z-$ текущая стоимость $q + n-$ годичного аннуитета, а $Y-$ аналогичная стоимость $q-$ годичного аннуитета.

Получим выражения для аннуитетов с $m-$разовыми выплатами через аннуитеты с выплатами один раз в год. Ограничимся случаем пожизненных аннуитетов, поскольку для других случаев получаются аналогичные формулы. Выразим величину $\ddot{a}_x^{(m)}$ из равенства (41) :

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}[A_x^{(m)} - A_x] =$$

$$\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}[A_x^{(m)} - A_x].$$

Предположим теперь равномерное распределение смертей, тогда равенство (36) дает

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\overline{\infty}|}^{(m)}[\frac{i}{i^{(m)}} - 1]A_x = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}A_x,$$

где величина

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)}(1 + i)^n$$

носит название *накопленной стоимости n-годичных аннуитетов-постнумерандо с m-разовыми выплатами*. В частности при $n = 1$ величина $s_{\overline{1}|}^{(m)} = i/i^{(m)}$. Подставляя сюда выражение для $\ddot{a}_x$ из (41) при $m = 1$, получим:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}(1 - d\ddot{a}_x) =$$

$$s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}},$$

поскольку $d^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = d$. Обозначив $\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = id/(i^{(m)}d^{(m)})$, $\beta(m) = (s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1)/d^{(m)} = (i - i^{(m)})/(i^{(m)}d^{(m)})$, получим краткую запись

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m).$$

Коэффициенты $\alpha(m), \beta(m)$ при малых процентных ставках вычисляются достаточно легко. Поскольку выражение для

$$\alpha(m) = \frac{i^2}{1+i}\frac{(1+i)^{1/m}}{m^2[(1+i)^{1/m} - 1]^2]} = \frac{(e^\delta - 1)^2}{e^\delta}\frac{e^{\delta/m}}{[m(e^{\delta/m} - 1)]^2} = \frac{f(\delta)}{f(\delta/m)} = g(\delta),$$

где функции

$$f(\delta/m) = \frac{[m(e^{\delta/m} - 1)]^2}{e^{\delta/m}},\ g(\delta) = \frac{e^{\delta/m}}{e^\delta}\frac{1 + \delta + \gamma(\delta)}{1 + \delta/m + \gamma(\delta/m)},\ \gamma(\delta) \cong (\delta)^2.$$

при этом

$$g(0) = 1,\ g^{'}(0) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(m) = 1 + o(\delta).$$

Аналогично из представления коэффициента

$$\beta(m) = \frac{0.5(1 - 1/m) + \psi(\delta)/\delta^2 - \psi(\delta/m)/\delta^2}{(1 + 0.5\delta/2m)^2},\ \psi(\delta) \cong \delta^3$$

следует, что

$$\beta(m) = 0.5(1 - 1/m) + o(1),$$

таким образом, при малых величинах δ коэффициенты

$$\alpha(m) \cong 1,\ \beta \cong \frac{1}{2}(1 - 1/m).$$

Для отсроченных на целое число n лет аннуитетов с $m-$разовыми выплатами полученные выражения позволяют написать равенство

$${}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}^{(m)} = {}_nE_x[\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)]$$

Отсюда нетто-премия для $n-$годичных аннуитетов-пренумерандо

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x\ddot{a}_{x+n}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) - {}_nE_x[\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)] =$$

$$\alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x).$$

При сделанном предположении равномерного распределения смертей полученные формулы позволяют представить нетто-премии для аннуитетов с

$m-$разовыми выплатами выразить сначала через разовые нетто-премии соответствующих видов страхования, а затем через коммутационные числа:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\frac{1-A_x}{d} - \beta(m) = \alpha(m)\frac{D_x - M_x}{dD_x} - \beta(m),$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{D_{x+n}}{D_x}\left[\alpha(m)\frac{D_{x+n}-M_{x+n}}{dD_{x+n}} - \beta(m)\right],$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\left[\frac{D_x - M_x + M_{x+n} - D_{x+n}}{dD_x}\right] - \beta(m)(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}).$$

7.3 Непрерывные аннуитеты

Непрерывные аннуитеты получаются из аннуитетов с $m-$ разовыми выплатами при неограниченном увеличениии m. Так,текущая стоимость непрерывного пожизненного аннуитета равна

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T v^t dt.$$

Таким образом, в течение бесконечно малого промежутка времени dt здесь выплачивается сумма, равная dt, ее современная стоимость равна $v^t dt$. В более общем случае, если в момент времени t уровень выплат равен b_t, то текущая стоимость пожизненного аннуитета равна

$$\int_0^\infty b_t v^t dt.$$

Нетто-премия непрерывного пожизненного аннуитета равна

$$\bar{a}_x = E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\ {}_t p_x \mu_{x+t} dt.$$

В соответствии с леммой 3 последнее выражение равно

$$\int_0^\infty v^t\ {}_t p_x dt.$$

С другой стороны, случайную величину текущей стоимости пожизненного аннуитета можно представить как

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1-v^T}{\delta},$$

откуда нетто-премия $\bar{a}_x = (1-A_x)/\delta$, что дает равенство $1 = \delta\bar{a}_x + A_x$, которое является непрерывным аналогом равенства (41). При этом дисперсия текущей стоимости

$$Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = Var(\frac{1-v^T}{\delta}) = \frac{1}{\delta^2}Var(v^T) = \frac{1}{\delta^2}(\ {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2).$$

Рассмотрим следующий пример.

При предположении постоянной интенсивности смертности $\mu = 0.06$, и неизменной непрерывной процентной ставки $\delta = 0.1$ найти:

а.выражение для текущей стоимости пожизненного аннуитета,

б.его нетто-премию,

в.дисперсию текущей стоимости и

г.вероятность того, что текущая стоимость аннуитета превысит величину нетто-премии.

а.Величина текущей стоимости

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T e^{-0.1t} dt = 10 - 10e^{-0.1T}.$$

б.Нетто-премия

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-0.1t} e^{-0.06} dt = \int_0^\infty e^{-0.16} dt = 6.25.$$

в.

$$\bar{A}_x = E(e^{-0.01T}) = \int_0^\infty e^{-0.1t} e^{-0.06t} 0.06 dt = 3/8 = 0.375,$$

$$^2\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-0.2t} e^{-0.06t} 0.06 dt = 3/13 = 0.2308 \Rightarrow$$

$$Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 100(0.2308 - 0.375^2) = 9.0144.$$

г.Искомая вероятность $P(\bar{a}_{\overline{T}|} > 2\bar{a}_x)$ равна

$$P(\frac{1 - v^T}{0.1} > 6.25) = P(e^{-0.1T} < 0.375) = P(T > -10 \log 0.375) =$$

$$P(T > 9.8083) = \int_{9.8083}^\infty e^{-0.06t} 0.06 dt = 0.5552.$$

Для $n-$годичного непрерывного аннуитета величина текущей стоимости равна

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{если} \quad 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad T \ge n. \end{cases}$$

Интегрируя по частям, получим выражение для нетто-премии:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = EY = \int_0^n \bar{a}_{\overline{T}|} \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \ {}_np_x = \int_0^n v^t \ {}_tp_x dt.$$

Из вида случайной величины Y следует, что

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = EY = \frac{1}{\delta}(1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}).$$

Кроме того, выражение для дисперсии величины текущей стоимости непрерывного $n-$годичного аннуитета будет

$$Var(Y) = \frac{1}{\delta^2}(\, ^2\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\delta^2}[1 - 2\delta \, ^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} - (1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|})^2] =$$

$$\frac{2}{\delta}[\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}] - \bar{a}^2_{x:\overline{n}|}.$$

Для отсроченного на n лет непрерывного аннуитета нетто-премия равна

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t\ {}_tp_x dt = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x dt - \int_0^n v^t\ {}_tp_x dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}_x}{\delta}.$$

При этом текущая стоимость отсроченного аннуитета равна

$$Y = \begin{cases} 0 = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{T}|}, & \text{если} \quad 0 \le T < n \\ v^n \bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad T \ge n. \end{cases}$$

Заметим, что нетто-премия

$$_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x \bar{a}_{x+n}.$$

Получим выражения, связывающие нетто-премии непрерывных аннуитетов с соответствующими дискретными аналогами. Как и ранее, будем предполагать равномерное распределение смертей на каждом целочисленном интервале. Рассмотрим пожизненный аннуитет, для него непрерывная нетто-премия равна

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} = \frac{1 - (i/\delta)A_x}{\delta} = \frac{\delta - iA_x}{\delta^2} = \frac{\delta - i}{\delta^2} + \frac{id}{\delta^2}\ddot{a}_x.$$

Аналогичным образом можно аппроксимировать непрерывные аннуитеты других видов.

До сих пор мы предполагали, что начальный возраст является целым числом. Если данное предположение не выполняется, то есть начальный возраст равен $x + u,\ x \in \{1, 2, \ldots\}, u \in [0, 1)$, нетто-премия

$$\ddot{a}_{x+u} = \sum_{k=0}^\infty v^k \frac{l_{x+k+u}}{l_{x+u}}.$$

Если предположение равномерного распределения смертей нами принимается, то отношение

$$\frac{l_{x+k+u}}{l_{x+u}} = \frac{l_{x+k+u}}{l_{x+k}}\frac{l_{x+k}}{l_x}\frac{l_x}{l_{x+u}} = {}_kp_x \frac{l_{x+k+u}}{l_{x+k}}\frac{l_x}{l_{x+u}} = \frac{{}_kp_x(1 - uq_{x+k})}{1 - uq_x}.$$

Отсюда и в силу (40)

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1}{1 - uq_x}\sum_{k=0}^\infty v^k\ {}_kp_x(1 - uq_{x+k}) = \frac{\ddot{a}_x}{1 - uq_x} - \frac{u(1+i)A_x}{1 - uq_x} =$$

$$\frac{\ddot{a}_x}{1 - uq_x} - \frac{u(1+i)(1 - d\ddot{a}_x)}{1 - uq_x} = \frac{(1 + iu)\ddot{a}_x - (1+i)u}{1 - uq_x} =$$

$$\frac{(1+i)\ddot{a}_x + (iu - i)\ddot{a}_x - u(1+i)}{1 - uq_x} = \frac{1 + i + p_x\ddot{a}_{x+1} + i(u-1)\ddot{a}_x - u(1+i)}{1 - uq_x} =$$

$$\frac{(1-u)(1+i-i\ddot{a}_x)+p_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x}.$$

Представив равенство (40) в виде

$$1+i-i\ddot{a}_x=\ddot{a}_x-p_x\ddot{a}_{x+1},$$

из последнего равенства получаем

$$\ddot{a}_{x+u}=\frac{(1-u)(\ddot{a}_x-p_x\ddot{a}_{x+1})+p_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x}=\frac{(1-u)\ddot{a}_x+up_x\ddot{a}_{x+1}}{1-uq_x}. \qquad (42)$$

При малых значениях q_x величина

$$\ddot{a}_{x+u}\cong(1-u)\ddot{a}_x+u\ddot{a}_{x+1}.$$

Представление (42) влечет за собой соответствующее представление для разовой нетто-премии. Именно, из равенства выражая $\ddot{a}_x$, $\ddot{a}_{x+u}$ из равенства (41) при $m=$ 1, равенство (42) запишем в виде

$$A_{x+u}=\frac{(1-u)A_x+up_xA_{x+1}}{1-uq_x}.$$

Рассмотрим пример. Требуется показать, что для любого закона смертности справедливы неравенства

$$\bar{a}_x<\bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x|}},\ a_x<a_{\overline{e_x}|}.$$

Для обоснования первого неравенства рассмотрим функцию $f(t)=\bar{a}_{\overline{t}|}$. Тогда условие

$$f''(t)=-\delta e^{-\delta t}<0$$

означает строгую вогнутость этой функции, для которой неравенство Йенсена влечет

$$\bar{a}_x=E(\bar{a}_{\overline{T}|})<\bar{a}_{\overline{E(T)}|}=\bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x|}}.$$

Для второго неравенства рассмотрим функцию $f(t)=(1-v^t)/i$. Тогда эта функция дифференцируема и так же строго вогнута:

$$f''(t)=-\frac{\delta^2}{i}v^t<0.$$

Тогда неравенство Йенсена дает:

$$a_x=E(a_{\overline{K}|})\le a_{\overline{E(K)}|}=a_{\overline{e_x}|}.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти выражение для $Cov[\delta a_{\overline{T}|},v^T]$.

Решение.

$$Cov[\delta a_{\overline{T|}}, v^T] = E(\delta a_{\overline{T|}} v^T) - E(\delta a_{\overline{T|}})E(v^T) = E(v^T - v^{2T}) - E(1 - v^T)E(v^T) =$$

$$- \,{}^2\bar{A}_x + \bar{A}_x^2 = -Var v^T.$$

2. Доказать равенство

$$\delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T|}} + Tv^T = \bar{a}_{\overline{T|}}.$$

Решение. Интегрирование по частям дает

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T e^{-\delta t} dt = tv^t|_0^T + \delta \int_0^T tv^t dt = Tv^T + \delta(\bar{I}\bar{a})_{\overline{T|}}.$$

3. Выразить величину ${}^2A_x$ через нетто-премию пожизненного аннуитета.

Решение. Равенство $1 = d\ddot{a}_x + A_x$ представим для удвоенной силы процента как

$${}^2A_x = 1 - \,{}^2\ddot{a}_x + \frac{1}{e^{2\delta}}\,{}^2\ddot{a}_x \Longleftrightarrow {}^2A_x = 1 - (1 - v^2)\,{}^2\ddot{a}_x = 1 - (2d - d^2)\ddot{a}_x.$$

4. Выразить производную $d\ddot{a}_x/di$ в терминах нетто-премий пожизненных аннуитетов.

Решение. Из равенства для производной члена ряда

$$\frac{d}{di}(v^k\,{}_kp_x) = -kv^{k+1}\,{}_kp_x$$

следует, что

$$\frac{d}{di}\ddot{a}_x = -v(Ia)_x.$$

5. Доказать равенство

$$\alpha(m) - \beta(m)d = \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}.$$

Решение. Поскольку $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = d/d^{(m)}$, то исходное равенство эквивалентно каждому из нижеприведенных равенств

$$\alpha(m) - \beta(m)d = \frac{d}{d^{(m)}} \Longleftrightarrow \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}d + \frac{i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}d \Longleftrightarrow 0 = 0.$$

8 Регулярные премии

Ранее единовременные нетто-премии определялись как среднее значение текущих страховых выплат. Тем самым подразумевалось, что, если отвлечься от рисковой надбавки, от надбавок, связанным с необходимостью вести текущие дела, платить налоги и т. д., страхователь за будущее страховое вознаграждение должен заплатить указанную премию. Таким образом, при определении нетто-премии мы исходили из равенства средних текущих обязательств страхователя и страховщика. Как уже было рассмотрено ранее, страхователь вместо выплаты разовой премии выплачивать регулярные взносы определенной величины. При этом размер данного взноса будем назвать *регулярной премией*.

8.1 Принцип эквивалентности

Введем понятие *случайной величины убытка* как разности между текущей стоимостью страховых выплат и текущей стоимостью премий и обозначать как L. Например, для рассмотренных ранее разовых премий в случае пожизненного страхования с единичной выплатой в момент смерти величина $L = v^T - A_x$. При этом величина A_x определена нами из условия

$$E(L) = 0. \tag{43}$$

Аналогично обстоит дело с другими выше рассмотренными видами страхования. Условие (43) будем называть принципом эквивалентности и в дальнейшем использовать для определения нетто-премий в регулярном случае.

8.2 Ежегодные нетто-премии

Рассмотрим полностью дискретный случай, когда страховая сумма выплачивется в конце года смерти, взносы страхователя выплачиваются в начале года. Величина годового взноса будет определена из условия (43) для каждого вида страхования. Так, пусть единичная страховая выплата для пожизненного страхования производится в конце года смерти, а страхователь выплачивает в начале каждого года премию величины P_x, тогда случайная величина L определяется как

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, \ K = 0, 1, 2, \ldots,$$

и принцип эквивалентности дает

$$E(L) = A_x - P_x \ddot{a}_x = 0, \Longleftrightarrow P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Случайную величину L можно теперь представить в виде

$$L = v^{K+1} - P_x \frac{1 - v^{K+1}}{d} = (1 + \frac{A_x}{\ddot{a}_x}) v^{K+1} - \frac{A_x}{d\ddot{a}_x} = (\frac{1}{d\ddot{a}_x}) v^{K+1} - \frac{A_x}{d\ddot{a}_x},$$

откуда выражение для дисперсии вытекает как

$$Var(L) = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2}.$$

В общем случае функция потерь выглядит как разность

$$b_{K+1}v_{K+1} - PY,$$

где $b_{K+1},\ v_{K+1}-$ соответственно страховая сумма и дисконтирующая функция, а $P,\ Y-$ подлещая определению нетто-премия и текущая стоимость рассматриваемого аннуитета.

Рассмотрим $n-$годичное смешанное страхование жизни с единичной страховой суммой и выплатами ежегодной премии-пренумерандов течение h лет. Здесь величина потерь

$$L = Z - PY,$$

случайные величины Z, Y равны

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < h \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge h. \end{cases}$$

В таком случае условие (43) дает

$$P = {}_hP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

Пусть теперь страховым вознаграждением является отсроченный на n лет пожизненный аннуитет, а страховые премии выплачиваются в течение $h < n$ лет. Тогда случайная величина $L = Z - PY$, определяется по случайным величинам Z, Y :

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < h \\ \ddot{a}_{\overline{h}|}, & \text{если} \quad K \ge h, \end{cases}$$

Нетто-премия для данного случая равна

$$P = {}_hP({}_{n|}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.$$

Из приведенных случаев видно, что общий принцип обозначений для регулярных нетто-премий состоит в том, что префикс у символа P служит для характеристики взносов страхователя, а индекс, или в сложных случаях типа последнего приведенного выше, в скобках - для описания страхового вознаграждения.

Рассмотрим случайную величину потерь для страхования чистого дожития до возраста $x+n$, при условии выплат взносов в начале каждого года. Здесь убыток

$$L = \begin{cases} -P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & \text{если} \quad 0 \le K < n \\ v^n - P\ddot{a}_{\overline{n}|}, & \text{если} \quad K \ge n, \end{cases}$$

откуда ежегодная нетто-премия для страхования чистого дожития с выплатами взносов в течение n лет равна

$$P = P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Из равенства $A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ получаем, что ежегодная нетто-премия для смешанного страхования жизни равна сумме нетто премий для $n-$годичного страхования и чистого дожития:

$$P_{x:\overline{n}|} = P^1_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

8.3 Премии, уплачиваемые m раз в год

Здесь мы рассмотрим случай, когда премии выплачиваются m раз в год, при этом размер одной выплаты равен $m-$ части годовой премии. В таком случае годовая премия обозначается в зависимости от вида страхования как

$$P_x^{(m)}, P_{x:\overline{n}|}^{(m)},\ {}_hP(\ {}_{n|}\ddot{a}_x)^{(m)},$$

то есть прибавлением верхнего индекса $^{(m)}$ к соответствующей годовой нетто-премии с выплатой один раз в год. При этом принцип вычисления таких премий ничем не отличается от случая годовых выплат. Например, ежегодная нетто-премия для смешанного страхования жизни равна

$$P_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}.$$

Сравним величины годовых премий в случае $m-$разовых и ежегодных выплат. Рассмотрим случай пожизненного страхования. Здесь имеем равенство

$$A_x = P_x\ddot{a}_x = P_x^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} = P_x^{(m)}(\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)),$$

откуда

$$P_x^{(m)} = \frac{P_x\ddot{a}_x}{\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)} = \frac{P_x}{\alpha(m) - \beta(m)/\ddot{a}_x} < P_x.$$

Аналогичные неравенства справедливы и для других видов страхования.

Рассмотрим пример. Страхователь возраста 35 лет покупает полис 2 - хгодичного смешанного страхования жизни с общей страховой суммой 10000. Выплата по случаю смерти в конце года смерти, взносы-пренумерандо полугодовые, норма доходности $i = 0.1$. Требуется вычислить годовую нетто-премию, предполагая равномерное распределение смертей на каждом возрастном целочисленном интервале и пользуясь таблицей на стр. 68. Как изменится эта нетто-премия, если выплаты по смерти будут в момент смерти?

Сначала вычислим

$$\ddot{a}_{35:\overline{2}|} = 1 + (1.1)^{-1}\frac{l_{36}}{l_{35}} = 1 + \frac{92369}{1.1 \times 92629} = 1.9065,$$

$$A^1_{35:\overline{2}|} = \frac{l_{35} - l_{36}}{1.1 \times l_{35}} + \frac{l_{36} - l_{37}}{1.1^2 \times l_{35}} = \frac{92629 - 92369}{1.1 \times 92629} + \frac{92369 - 92096}{1.1^2 \times 92629} = 0.004987,$$

$$A_{35:\overline{2}|}^{\ \ 1} = \frac{l_{37}}{1.1^2 \times l_{35}} = \frac{92096}{1.1^2 \times 92629} = 0.821691,$$

$$\alpha(2) = \frac{0.1 \times 0.1/1.1}{2(\sqrt{1.1} - 1)2(1 - \sqrt{1/1.1})} = 1.000568, \ \beta(2) = \sqrt{1.1}/4 = 0.262202.$$

Отсюда следует, что

$$\ddot{a}^{(2)}_{35:\overline{2}|} = \alpha(2)\ddot{a}_{35:\overline{2}|} - \beta(2)[1 - A_{35:\overline{2}|}^{\ \ 1}] = 1.000568 \times 1.9065 - 0.262202(1 - 0.821691) = 1.86083,$$

и значение искомой нетто-премии равно

$$10000P(A_{35:\overline{2}|})^{(2)} = A_{35:\overline{2}|}/\ddot{a}^{(2)}_{35:\overline{2}|} = 10000(0.004987 + 0.821691)/1.86083 = 4442.52.$$

Для сравнения нетто-премия в случае годовых взносов равна

$$10000P(A_{35:\overline{2}|}) = 10000(0.004987 + 0.821691)/1.9065 = 4336.1.$$

Для выплат в момент смерти величин премии

$$10000P(\bar{A}_{35:\overline{2}|})^2 = (1.049206 \times 0.004987 + 0.821691)/1.86083 = 4443.84,$$

как видно отсюда, изменится очень незначительно. Это объясняется тем, что для выбранного возраста показатели смертности низки и выплаты по смерти не влияют существенно на премию.

ЗАДАЧИ

1. Страховщик продает полис по 4-хгодичному страхованию жизни клиенту, для которого вероятности смерти на первых четырех годах равны соответственно 0.125, 0.125, 0.25 и 0.5. Страховая сумма, равная 1, выплачивается в конце года смерти, а страховая премия величины P вносится в начале каждого из четырех лет при условии дожития. Требуется определить величину P и дисперсию случайной величины ущерба, если значение $i = 0.1$.

Решение. Для решения задачи рассмотрим таблицу

k	v^{k+1}	$\ddot{a}_{\overline{k+1}\rvert}$	$P(K=k)$
0	0.909	1	0.125
1	0.826	1.909	0.125
2	0.751	2.735	0.25
3	0.683	3.487	0.5

Из данной таблицы, согласно условию баланса $EL = E[v^{K+1}] - P\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}] = 0$, получаем $P = E[v^{K+1}]/E[\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert} = 0.3058$. Теперь $Var(L) = E[L^2] = 0.122$.

2. Докажите, что если интенсивность смертности μ_x возрастает с возрастом x, то величина $\overline{P}(\overline{A}_x) > \mu_x$.

Решение. Поскольку

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt > \mu_x \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x dt = \mu_x \overline{a}_x,$$

то $\overline{P}(\overline{A}_x) = \overline{A}_x / \overline{a}_x > \mu_x$.

3. Докажите равенство

$${}_{20}P^1_{x:\overline{30}\rvert} - P^1_{x:\overline{20}\rvert} = {}_{20}P({}_{20|10}A_x).$$

Решение. Требуемое равенство получается делением на $\ddot{a}_{x:\overline{20}\rvert}$ равенства

$$A^1_{x:\overline{30}\rvert} = A^1_{x:\overline{20}\rvert} + {}_{20|10}A_x.$$

4. Докажите равенство

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}} - \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{n}\rvert}} = P^1_{x:\overline{n}\rvert} + d.$$

Решение. Требуемое равенство получается из цепочки эквивалентных равенств

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}} - \frac{1}{\ddot{s}_{x:\overline{n}\rvert}} = P^1_{x:\overline{n}\rvert} + d \Longleftrightarrow \frac{1 - {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}} = P^1_{x:\overline{n}\rvert} + d \Longleftrightarrow$$

$$1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} - {}_nE_x = P^1_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} \Longleftrightarrow A^1_{x:\overline{n}\rvert} = A^1_{x:\overline{n}\rvert},$$

поскольку $1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} = A_{x:\overline{n}\rvert}$.

5. Определите значение $P^1_{x:\overline{n}\rvert}$, если известно, что ${}_nP_x = 0.04625$, $P_{x:\overline{n}\rvert} = 0.06$, $A_{x+n} = 0.725$.

Решение. Поскольку $A_x = {}_nP_x \ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$, то, переписав равенство

$$A_x = P^1_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert} + P_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}A_{x+n}$$

в виде ${}_nP_x = P^1_{x:\overline{n}\rvert} + P_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1} A_{x+n}$ и учитывая, что $P^1_{x:\overline{n}\rvert} + P_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1} = 0.06$, получаем $P^1_{x:\overline{n}\rvert} = 0.01$.

6. Страхователь в возрасте x покупает полис бессрочного страхования жизни со страховой суммой равной 1. Выплата по смерти производится в конце года

смерти, срок уплаты премий - начало каждого года в течение всей жизни. Найдите величину годовой премии в следующих случаях:

а. $M_x = 100$, $N_x = 2000$.

б. $M_x = 100$, $i = 0.0526$, $D_x = 200$.

в. $M_x = 100$, $N_x = 2000$, $D_x = 200$, а премии уплачиваются в начале каждого месяца.

Решение. а. Поскольку $A_x = M_x/D_x$, $\ddot{a}_x = N_x/D_x$, то величина $P_x = M_x/N_x = 0.05$.

б. $P_x = A_x/\ddot{a}_x = dA_x/(1 - A_x) = 0.0499\frac{M_x/D_x}{1-M_x/D_x} = 0.0499$.

в. $P_x^{(12)} = A_x/\ddot{a}_x^{(12)} = A_x/(\alpha(12)\ddot{a}_x - \beta(12))$. Нужные коэффициенты найдем из равенства $1 = d\ddot{a}_x + A_x = d(N_x/D_x) + M_x/D_x$, откуда $d = 0.05, i = 1/19 = 0.0526316, i^{(12)} = 0.051403, d^{(12)} = 0.0511836, \alpha(12) = id/(i^{(12)}d^{(12)}) = 1.000224, \beta(12) = (i - i^{(12)})/(i^{(12)}d^{(12)}) = 0.4669724$. Теперь

$$P_x^{(12)} = \frac{M_x/D_x}{\alpha(12)N_x/D_x - \beta(12)} = 0.0524368.$$

7. Страхователь в возрасте x покупает полис страхования жизни на срок n лет со страховой суммой равной 1. Годовая премия - пренумерандо за первый год равна P, за последующие годы - $2P$. Требуется определить значение P, если $M_x = 100$, $M_{x+n} = 75$, $N_x = 2000$, $D_x = 200$, $N_{x+n} = 1500$.

Решение. Величина P получается из равенства $A^1_{x:\overline{n}|} = 2P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - P$, из которого

$$P = \frac{M_x - M_{x+n}}{2(N_x - N_{x+n}) - D_x} = 0.03125.$$

Список литературы

[1] N.L. Bowers, H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit. Actuarial Mathematics. - The Sociaty of Actuaries, 1986.

[2] Х. Гербер. Математика страхования жизни. - М., "Мир", 1995.

[3] Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Введение в актуарную математику. - М.,ФАЦ МГУ, 1994.

[4] R.E. Beard, T. Pentikäinen, E. Pesonen. Risk Theory. The stochastic Basis of Insurance(2nd ed.)London:methuen, 1977.

[5] А.П. Архипов и др. Основы страховой деятельности. - М., Бек, 1999.

[6] Д. Бланд. Страхование: Принципы и практика.(пер. с англ.) - М., "Финиансы и статистика", 1998.