

Федеральное агентство по образованию

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

Методы обработки результатов ядерно-физического эксперимента

Учебное пособие

Под редакцией В.Т. Самосадного

*Рекомендовано УМО «Ядерная физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 539.1.08(075)

ББК 22.38я7

М 54

Методы обработки результатов ядерно-физического эксперимента: Учебное пособие. / Г.Л. Деденко, В.В. Кадилин, Е.В. Рябева, В.Т. Самосадный; Под ред. В.Т. Самосадного. — М.: МИФИ, 2008. — 156 с.

Учебное пособие по курсу «Методы обработки результатов ядерно-физического эксперимента» общепрофессиональных дисциплин специальности «Физика кинетических явлений» направления 651000 «Ядерная физика и технологии» посвящено изложению основных способов и методов обработки результатов экспериментов и представления экспериментальных данных. За время обучения по программе курса студенты получают современные, востребуемые и крайне необходимые знания методов обработки результатов экспериментов.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области прикладной ядерной физики и смежных с ней областях, а также может быть рекомендовано аспирантам широкого профиля для совершенствовании ими навыков обработки результатов экспериментов.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент д-р физ.-мат.наук, проф. Е.А. Крамер-Агеев

ISBN 978-5-7262-1065-0

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Основные понятия теории вероятности	11
1.1. Числовые характеристики случайных величин	11
1.2. Распределения случайных величин	18
1.2.1. Биноминальное (дискретное) распределение (Распределение Бернулли)	18
1.2.2. Распределение Пуассона (дискретное)	19
1.2.3. Равномерное распределение (непрерывное)	22
1.2.4. Нормальное распределение (непрерывное)	24
1.2.5. Центральная предельная теорема	37
1.2.6. Распределение χ^2 (непрерывное)	38
1.2.7. Распределение Стьюдента (непрерывное)	40
1.2.8. Показательное распределение (непрерывное)	45
1.2.9. Распределение Лоренца	46
Вопросы к главе 1	47
2. Оценки параметров распределения	49
2.1. Свойства оценок	49
2.2. Интервальные оценки	50
2.2.1. Доверительный интервал для математического ожидания	51
2.2.2. Доверительный интервал для дисперсии	53
2.3. Методы точечного оценивания параметров	54
2.3.1. Метод максимального правдоподобия	54
2.3.2. Байесовский подход к получению оценок	59
2.3.3. Метод наименьших квадратов (МНК)	61
2.4. Погрешности косвенных измерений	75
Вопросы к главе 2	78
3. Статистические гипотезы	79
3.1. Проверка гипотез о значении параметра распределения ..81	
3.1.1. Ошибки первого и второго рода	81
3.1.2. Проверка гипотезы о математическом ожидании	84
3.1.3. Критерий Неймана – Пирсона для проверки простых гипотез о значении параметра	90
3.1.4. Односторонний критерий для проверки простой гипотезы против сложной гипотезы о среднем значении	93

3.1.5. Критерий отношения правдоподобия для проверки сложных гипотез	95
3.2. Критерии для проверки гипотез о виде закона распределения	96
3.2.1. Критерий согласия χ^2 (Пирсона)	96
3.2.2. Критерий согласия Колмогорова	107
3.2.3. Критерий согласия ω^2 (Критерий Мизеса).....	113
3.3. Анализ грубых ошибок	114
Вопросы к главе 3	117
4. Планирование эксперимента	118
4.1. Оптимизация распределения времени наблюдений.....	119
4.2. Выбор точек наблюдений.....	127
Вопросы к главе 4	130
5. Обработка линейчатых спектров	131
5.1. Основные задачи анализа спектра	132
5.2. Аппроксимация линейчатого спектра аналитической кривой	137
Вопросы к главе 5	140
Список литературы.....	142
ПРИЛОЖЕНИЕ	143

ВВЕДЕНИЕ

Материалом пособия явился курс лекций, читаемый студентам специальности «Физика кинетических явлений» в МИФИ более 25 лет. Курс посвящен основам статистической обработки ядерно-физического эксперимента. Так как явления в ядерной физике носят стохастический характер, то при обработке результатов экспериментов не обойтись без применения статистических методов. Все статистические методы основываются на специальном разделе математики – теории вероятности. В пособии приведены в очень сжатом виде основные понятия теории вероятностей. Из статистических методов рассматриваются методы по оценке величин и проверке статистических гипотез, т.е. основные статистические методы для анализа экспериментальных данных.

Главная цель, которую преследовали авторы – дать ясную формулировку задачи и предложить ее решение в очень ограниченном объеме времени. При этом считалось, что читатели знакомы с высшей математикой и с основами теории вероятности. Описываемые статистические методы находят самое широкое применение во всех областях деятельности человека: ядерная физика, экономика, финансы, медицина и другие. В пособии приведены самые разнообразные примеры на применение тех или иных методов. Приведены примеры по обработке результатов экспериментов, поставленных на кафедре «Прикладная ядерная физика».

В целом авторы придерживались классических приемов изложения методов обработки результатов, но при этом принималась во внимание ограниченность по времени данного курса для этой специальности и рассматривались те задачи, которые необходимы инженеру-физику названной специальности.

Кроме чисто статистических методов, затрагивается вопрос, который очень часто стоит перед экспериментаторам в области прикладной ядерной физики, а именно, обработка аппаратурных спектров. Представлены подходы по обработке линейчатых спектров.

В конце пособия приводится довольно обширный список литературы по предлагаемому вопросу.

Схема проведения эксперимента

Основу физики составляет наблюдение за каким-либо явлением, в процессе которого познаются законы, управляющие данным явлением. Такое наблюдение носит название *эксперимента*.

Рассмотрим последовательно, какие шаги должны быть приняты для проведения эксперимента. Первым шагом в схеме проведения эксперимента является возникновение, формулировка или постановка физической задачи. Правильная постановка задачи предопределяет успех при исследовании изучаемого явления.

Задачи для проведения эксперимента могут быть различными. На первоначальном этапе постановки физической задачи исследователь может делать некоторые теоретические предположения, которые будут либо подтверждены, либо опровергнуты в ходе проведения эксперимента. Таким образом, проверка теоретических предсказаний важна сама по себе и для подтверждения жизнеспособности теории. Расхождение между теорией и практикой часто является основанием для постановки новой экспериментальной работы. Следовательно, можно сделать вывод, что *теория и практика взаимно помогают и дополняют друг друга*.

В настоящее время проводится большое число различных исследований и наблюдений. Несмотря на то, что все они различны, в большинстве случаев они ставятся по определенным правилам. Знание этих правил позволяет правильно понять сущность интересующего нас явления.

Следующим шагом проведения эксперимента должно быть *моделирование: математическое или физическое*. В связи с развитием компьютерных технологий в настоящее время большое значение получил метод математического моделирования процессов, происходящих в природе. Число физических задач, решаемых методами математического моделирования, достаточно велико. Основной особенностью такого моделирования является то, что физический прибор, объект или явление заменяются их математической моделью. Изучая свойства разработанной модели с помощью ЭВМ, можно предсказывать поведение моделируемого объекта в произвольных физических условиях. Причем изучение свойств

объекта-модели не требует больших затрат времени и финансовых расходов и, что самое главное, позволяет получать данные, необходимые для исследования свойств объекта в реальных условиях.

Метод математического моделирования – это удобный и универсальный метод, позволяющий изучать свойства изучаемого объекта, прибора, физического явления. Метод математического моделирования можно представить в виде схемы (рис. В.1).

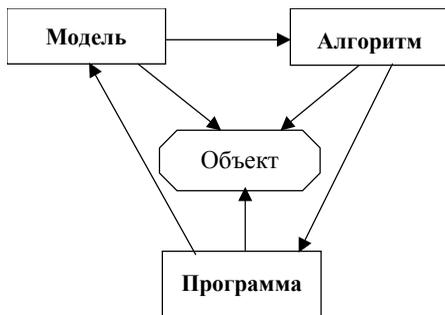


Рис. В.1. Схема «модель-алгоритм-программа»

Реализация данной схемы включает следующие этапы. Сначала строится эквивалентная математическая модель физического объекта, отражающая все его основные свойства. Затем происходит выбор или разработка алгоритма, который должен отражать все основные свойства модели и объекта и не искажать их. И, наконец, на основе алгоритма пишется программа для компьютера.

Схема проверяется на тестовых примерах. Если установлено, что она реально отражает исследуемый объект, то с ее помощью можно проводить всестороннее исследование свойств интересующего нас объекта.

Если происходит моделирование не на компьютере, а физическое моделирование, то его проводят следующим образом: для определения работоспособности объекта строят небольшую модель (ускоритель, макет детектора) и обкатывают основную идею.

После проведения этапа моделирования, в процессе которого проявилась некоторая идея, характеризующая изучаемую величину, наступает следующий шаг исследования – выбор метода изме-

рения исследуемой величины. Под методом измерения, в свою очередь, понимают совокупность правил и средств измерений. Измерение, это нахождение физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Физическая величина является характеристикой физического объекта, определяющая какое-либо его свойство.

Методы измерения могут быть:

прямыми – искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных. Прямые измерения дают наиболее адекватную характеристику исследуемого объекта. Остальные типы измерений представляют собой различные комбинации прямых измерений;

совместными называют одновременные измерения двух или нескольких неоднородных величин, характеризующих состояние исследуемой системы. Важно, что измерения проводятся одновременно;

косвенными – исследуемая величина определяется с помощью известных соотношений между физическими величинами, найденными в результате прямых измерений;

совокупными – проводятся измерения нескольких одноименных величин, при которых результаты измерений находят из решения системы линейных уравнений.

В качестве средств измерения подразумевается все многообразие измерительных приборов и устройств. Обычно измерительный прибор состоит из датчиков, каналов передачи информации от них, регистрирующего устройства, связанного с ЭВМ, вспомогательных устройств, необходимых для проведения эксперимента, различных дополнительных устройств. При создании экспериментальной установки ее разработчику надо учитывать уже существующие технологические решения. Желательно, чтобы разрабатываемые конструкции отличались простотой и технологичностью.

Измерительный прибор необходимо градуировать и для него необходимо метрологическое обеспечение. Таким образом, метрологическое обеспечение – следующий шаг в алгоритме. Условия, при которых делается градуировка приборов, определяются соответствующими стандартами и называются нормальными ус-

ловиями. В зависимости от величины погрешности инструментам и приборам присваивается тот или тип точности, который обозначается на шкале прибора. Единого принципа определения классов точности для приборов разного типа не существует. К некоторым приборам прилагается градуировочный график, некоторые снабжаются паспортом, в котором указаны поправки или ошибки для всех точек шкалы. Приборам, ошибка которых превышает ошибки, предусмотренные шкалой классов точности, но которые все же могут быть использованы для грубых измерений, класс точности не присваивается и за величину ошибки принимается половина цены наименьшего деления или цена деления.

Погрешности измерений

Как бы тщательно не проводился эксперимент, его результаты всегда подвержены некоторым погрешностям или ошибкам. В процессе проведения эксперимента истинные значения физических величин обычно определяются с некоторыми ошибками, т.е. на самом деле находятся их эмпирические представления – результаты наших измерений. Можно сказать, что на самом деле истинное значение это – идеал, который недостижим.

Пусть проводится серия измерений (n измерений): $i=1 \dots n$. В результате i -го измерения получают величину x_i . Погрешность i -го измерения представляет собой следующую величину: $\Delta x_i = x_i - x_0$, где x_0 – неизвестное истинное значение измеряемой величины.

Так как x_0 неизвестна, то вместо нее обычно подставляют ее действительное значение. Под действительным значением понимают значение физической величины, найденное экспериментально и настолько приближенное к данной цели, что может быть использовано вместо него.

Погрешности могут быть следующих видов.

По причине появления:

- математическая модель,
- промахи персонала при обработке,
- аппаратурный коэффициент.

По закономерности проявления:

- систематические,
- случайные.

По форме числового выражения:

- абсолютные,
- относительные,
- приведенные.

Следующий шаг на пути исследования изучаемого явления – это автоматизация измерений и представление экспериментальных данных в удобочитаемом виде.

Предполагается, что надо измерить некоторую величину. На практике производят ограниченное число измерений, например n . В этом случае говорят, что имеет место **выборка** из генеральной совокупности объема n .

Под **генеральной совокупностью** понимают неограниченное число измерений ($n \rightarrow \infty$). При анализе полученной выборки основные усилия направлены на получение сведений о группировке данных (**среднем**), о рассеянии данных (**дисперсии**) и о связи различных данных между собой (**корреляции**).

Опыт показывает, что при повторении измерений получаются разные значения одной и той же величины. Следовательно, каждое полученное единичное измерение можно рассматривать как **случайное событие**. Поэтому действия над группами полученных таким образом чисел или же обработка результатов измерений являются действиями над случайными числами. Таким образом, **случайной величиной** называют измеряемую физическую величину, значения которой подвержены неконтролируемому разбросу при повторении измерений. Для обработки результатов измеряемых величин применяют аппарат теории вероятности.

1. Основные понятия теории вероятности

Случайные величины могут быть *одномерными* (зависящими от одной переменной) и *многомерными* (зависящими от нескольких переменных). Кроме того, они могут быть *дискретными и непрерывными*.

Если в процессе эксперимента проводится n повторных наблюдений случайной величины X , то процесс можно рассматривать как одно наблюдение *случайного вектора*, имеющего компоненты x_1, x_2, \dots, x_n .

Чтобы обеспечить полное описание эксперимента, недостаточно задать лишь пространство элементарных событий для искомой случайной величины. Необходимо, кроме того, знать для каждого дискретного значения частоту ν появления случайной величины или P_ν вероятность попадания на ν -й уровень:

$$P_\nu = P(X = x_\nu), \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Случайные величины бывают дискретными или непрерывными. Случайная величина может принимать различные значения. Если количество этих значений конечно, то такую величину называют *дискретной*. Если количество таких значений бесконечно, то такую величину называют *непрерывной*.

1.1. Числовые характеристики случайных величин

Функция распределения

Пусть переменная величина ξ является случайной и принимает ряд значений x_1, x_2, \dots, x_n . В процессе эксперимента проводят n повторных наблюдений случайной величины ξ . Для описания одномерных случайных величин ξ достаточно задать способ вычисления вероятностей $P(\Delta x) = P(\xi \in \Delta x)$ для полузамкнутых слева интервалов вида $\Delta x = [x_{\min}, x)$, где x_{\min} – минимально возможное значение величины ξ , а x – текущее возможное значение ξ . Вероятность $P([x_{\min}, x)) = P(\xi < x)$ однозначно определяется числом x

– правой границей интервала и является функцией x . Определим функцию распределения вероятностей (ФР) $F_{\xi}(x)$ случайной величины ξ , ставящей в соответствие любому значению случайной величины x вероятность события $\xi < x$:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x).$$

Обычно пишут $F(x)$, т.е. опускают упоминание собственно случайной величины, для которой написана функция распределения.

Определение функции распределения применимо как к дискретным, так и к непрерывным величинам.

Рассмотрим основные свойства *функции распределения вероятностей $F(x)$* :

- a) $F(x)$ является неубывающей функцией аргумента x ;
- b) $F(-\infty) = 0$;
- c) $F(\infty) = 1$;
- d) в случае дискретного аргумента x $F(x)$ возрастает скачками;
- e) $P(a \leq x \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$.

Если случайная величина – экспериментальные данные, то обычно вид $F(x)$ неизвестен при первичной обработке.

Функция плотности вероятности

Понятие функции плотности вероятности применимо только к непрерывным случайным величинам.

Определение функции плотности вероятности $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x - \Delta x/2 \leq x \leq x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2)}{\Delta x}$$

Функция плотности вероятности $f(x)$ есть производная функции распределения в точке x

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Свойства функции плотности вероятности:

- a) $f(x) \geq 0$, т.к. ФР неубывающая;
- b) $P\{\xi \in [x, x + \Delta x]\} \approx f(x)\Delta x$ для малых Δx ;
- c) $P\{\xi \in [x_{\min}, x]\} = F(x) = \int_{x_{\min}}^x f(u)du$ для $\forall x$;
- d) $P\{\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]\} = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(u)du$,
 для $\forall x_0$ и Δx ;
- e) $P\{\xi \in [x_{\min}, x_{\max}]\} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx = 1$ – условие нормировки.

Рассмотрим на примере нормального распределения примеры графиков $F(x)$ и $f(x)$ на рис. 1.1 и 1.2.

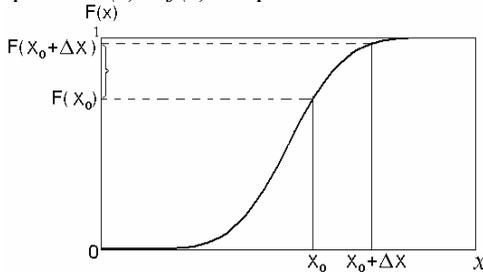


Рис.1.1. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_0; x_0 + \Delta x]$ равна в соответствии со свойством ФР ϵ : $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. На рисунке отмечен отрезок

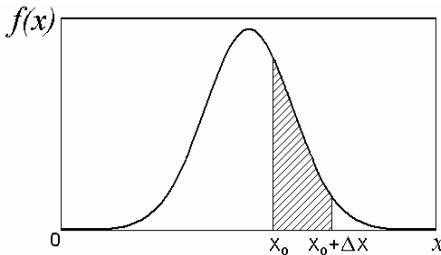


Рис.1.2. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_0; x_0 + \Delta x]$ пропорциональна заштрихованной площади в соответствии со свойством d)

Для дискретных величин понятие функции плотности вероятности не используют, а используют значение вероятности P_i при-

нятия того или иного значения x_i (при непрерывной случайной величине такая вероятность будет равна 0 и не имеет никакого физического смысла).

График функции распределения случайной дискретной величины значения на грани шестигранной бросаемой игральной кости представлен на рис.1.3.

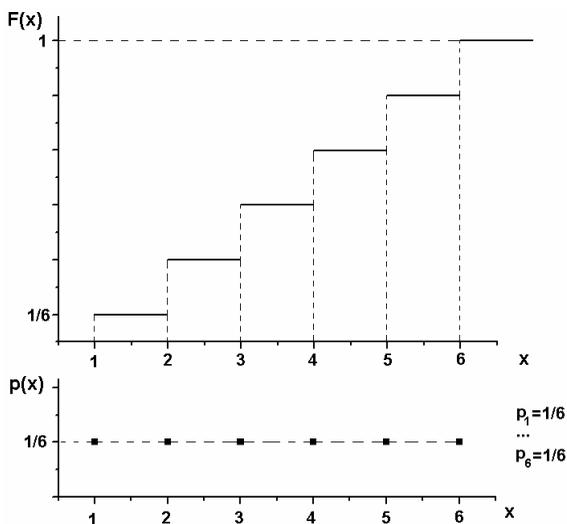


Рис.1.3. График функции распределения случайной дискретной величины значения на грани шестигранной бросаемой игральной кости. Внизу – график вероятности принятия значения

Внизу под графиком функции распределения приведен график вероятности принять то или иное значение. Необходимо обратить внимание, что это не график функции плотности распределения.

Возможные принимаемые значения $x_i=1,2,3,4,5,6$:

$$F(x_i) = \sum_i^{x_i < x} P(x_i).$$

Вероятность принятия одного из возможных значений (любого) одинакова и равна $P(P=1/6)$. Функция распределения равна вероятности того, что будет принято значение меньше x .

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины $E\{x\}$ называют сумму всех возможных значений случайной величины x_i , умноженной на соответствующие вероятности:

$$E\{x\} = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i).$$

Для непрерывных случайных величин:

$$E\{x\} = \int xf(x)dx.$$

Математическое ожидание может обозначаться несколькими способами: $E\{x\}$, M , μ .

Математическое ожидание указывает центр группирования значений случайной величины.

Если $\varphi(x)$ – интегрируемая функция случайной величины, которая тоже является случайной величиной, тогда:

$$E\{\varphi(x)\} = \int \varphi(x)f(x)dx.$$

При этом интегрирование производится по всей области изменения величины x , $f(x)$ – функция плотности вероятности.

Рассмотрим свойства математического ожидания:

- a) $E\{c\} = c, \quad c = \text{const};$
- b) $E\left\{\sum_k c_k \varphi_k(x)\right\} = \sum_k c_k E\{\varphi_k(x)\}; \quad c_k = \text{const}_k;$
- c) $E\left\{\sum_k x_k\right\} = \sum_k E\{x_k\}.$

Эмпирическим, т.е. взятым из опыта, аналогом математического ожидания является **выборочная средняя величина**.

Для набора значений случайной величины выборочное среднее равно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

если x_i равновероятны, или

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i P_i,$$

где P_i – вероятность проявления значения x_i .

Если данные сгруппированы, т.е. указаны значения x_i и частота принятия таких значений v_i , то

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i x_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ т.к. } \sum_{i=1}^k v_i = n,$$

где n – **объем выборки**; k – число значений, которые принимала случайная величина.

Кроме математического ожидания о группировке данных могут свидетельствовать **моды, медианы, квантили**.

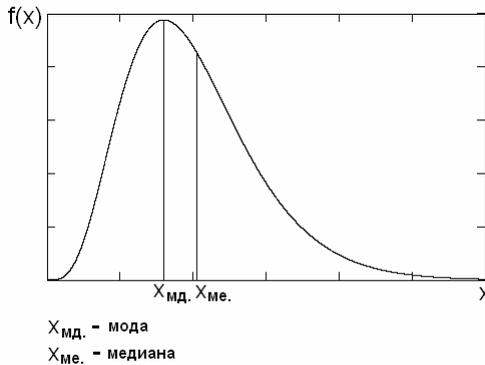


Рис. 1.4. Характеристики несимметричного распределения

На рис. 1.4 показаны мода и медиана. Мода показывает максимум распределения, а медиана делит функцию плотности вероятности на две одинаковые области, в которые случайная величина попадает с одинаковыми вероятностями. Квантиль будет описан ниже.

Дисперсия случайной величины

Характеристикой отклонения случайной величины от математического ожидания $\bar{x} - x_0$ является дисперсия, которая обозначается каким-либо одним из символов: D , σ^2 или var .

Для дискретных величин дисперсия представлена формулой:

$$D(x) = \sum_i (x_i - E\{x\})^2 P_i = \sum_i (x_i - \mu)^2 P_i = E\left\{\sum_i (x_i - \mu)^2\right\},$$

где P_i – вероятность проявления значения x_i .

Для непрерывных случайных величин дисперсия выражается:

$$D(x) = \int (x - \mu)^2 f(x) dx = E\{(x - \mu)^2\},$$

где $f(x)$ – функция плотности вероятности.

Рассмотрим свойства дисперсии:

а) $D(c) = 0$;

б) $D(ax) = \int [ax - E\{ax\}]^2 f(x) dx = a^2 D(x)$, где $a = \text{const}$;

в) $D(a + x) = \int [(a + x) - E\{a + x\}]^2 f(x) dx =$
 $= \int [x - E\{x\}]^2 f(x) dx = D(x)$, где $a = \text{const}$.

Часто используют величину $\sigma = \sqrt{D}$ – *среднее квадратичное отклонение*.

Эмпирическим (полученным в результате опыта) аналогом дисперсии является *выборочная дисперсия* S_n^2 , которая для выборки объема n имеет вид:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ (для равновероятных значений } x_i).$$

Удобно использовать следующие формулы для нахождения дисперсии:

$$\begin{aligned} D(x) &= E\{[x - E\{x\}]^2\} = E\{[x - \mu]^2\} = \\ &= E\{x^2\} - 2\mu E\{x\} + \mu^2 = E\{x^2\} - \mu^2 = \\ &= E\{x^2\} - [E\{x\}]^2, \text{ или } \sigma^2 = E\{x^2\} - \mu^2. \end{aligned}$$

1.2. Распределения случайных величин

Одним из основных этапов обработки результатов измерений является нахождение функции распределения или *функции плотности вероятности наблюдаемой случайной величины*.

На практике встречаются распределения самых разных видов. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в экспериментальной физике распределения случайных величин. Причем они могут быть как дискретными, так и непрерывными. Рассмотрим для таких наиболее часто используемых распределений функции распределения, функции плотности вероятности, их графики и свойства.

1.2.1. Биноминальное (дискретное) распределение (Распределение Бернулли)

Пусть опыт может приводить к одному из двух несовместимых исходов A или B . Опыт в любом случае завершается исходом либо A , либо B , т.е. $A + B = U$, и это U достоверно происходит. Вероятность того, что исход U произойдет, равна 1.

Пусть вероятности исходов A и B равны соответственно:

$$P(A) = p \text{ и } P(B) = 1 - p = q .$$

Пусть проводится N экспериментов. Сколько раз в этих экспериментах исходом будет событие A ?

Вероятности событий A и B независимы, поэтому вероятность того, что первые k экспериментов имеют исход A , а остальные – исход B , будет равна произведению вероятностей для каждого отдельного случая:

$$p^k (1 - p)^{N-k} .$$

Из комбинаторики известно количество сочетаний C_N^k – количество наборов, состоящих из k элементов, взятых из данных N элементов:

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} .$$

Следовательно, полную вероятность появления p_k k исходов A можно записать в виде:

$$P_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Это распределение и носит название **биномиального**. Биноминальное распределение дает вероятность получения k событий A (иногда для определенности их называют успешными событиями), если общее количество испытаний равно N , а вероятность успеха в одном испытании равна p .

Биноминальное распределение переходит в пуассоновское распределение при N , стремящемся к бесконечности.

1.2.2. Распределение Пуассона (дискретное)

Распределению Пуассона подчиняются многие природные события, в том числе и события попадания при определенных условиях в детектор частиц радиоактивного распада. Условия для такого соответствия распределению Пуассона будут рассмотрены ниже.

Распределение Пуассона дает вероятность наблюдения количества событий в заданный промежуток времени при условии, что события независимы и возникают с постоянной скоростью.

Рассмотрим пример попадания частиц в детектор. Введем следующие обозначения:

$p_k(t)$ – вероятность попадания k частиц в детектор за интервал времени t ;

$p_0(t)$ – вероятность отсутствия попадания хотя бы одной частицы в детектор за интервал времени t ;

n – среднее значение числа частиц, попавших в детектор за единицу времени;

$N = nt$ – среднее значение числа попавших в детектор частиц за время t .

Пусть события попадания частиц в детектор удовлетворяют следующим требованиям: стационарности, отсутствию последовательности и ординарности.

Стационарность означает, что вероятность появления k событий $p_k(t)$ в течение промежутка времени от τ до $\tau + t$ не зависит от начального момента τ , а зависит только от k и t .

Отсутствие последствий означает, что вероятность $p_k(t)$ наступления k событий в течение промежутка времени $\tau \div \tau + t$ не зависит от того, сколько раз и как появлялось событие ранее.

Ординарность означает, что $p_{>1}$ – вероятность появления более одного события за промежуток времени $\tau \div \tau + \Delta t$ представляет собой величину бесконечно малую по сравнению с Δt , т.е. $p_{>1}(t, t + \Delta t) = O(\Delta t)$, где $O(\Delta t)$ – бесконечно малая величина по отношению к Δt . Иными словами, два или несколько событий за время Δt практически появиться не могут.

Такой поток событий называется пуассоновским, а вероятность таких событий описывается формулой Пуассона:

$$p_k(t) = \frac{(nt)^k}{k!} \exp(-nt),$$

или, используя среднее число событий за интересующее нас время:

$$N = nt \quad p_k(t) = \frac{N^k}{k!} \exp(-N).$$

Можно рассмотреть следующие частные случаи такой вероятности.

Какова вероятность того, что за промежуток времени t не произойдет ни одного события? Для нахождения такой вероятности надо количество событий k приравнять к нулю. Из формулы при $k = 0$ получим:

$$p_0 = \exp(-nt).$$

Какова вероятность того, что произойдет только одно событие? Приравняем $k=1$. Из общей формулы для вероятности имеем:

$$p_1 = nt \exp(-nt).$$

Математическое ожидание и дисперсия для пуассоновского потока событий равны между собой:

$$E\{k\} = D\{k\} = N = nt.$$

Этим свойством можно пользоваться для первичной проверки того, соответствует ли исследуемое распределение пуассоновскому.

Функция распределения для пуассоновского потока событий представлена на рис.1.5, а вероятность принятия значения представлена на рис. 1.6.

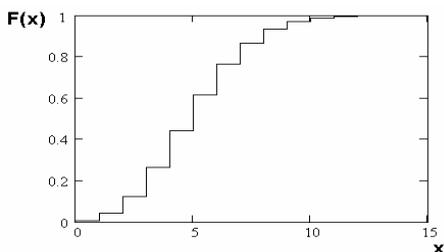


Рис.1.5. График функции распределения ($nt=5$)

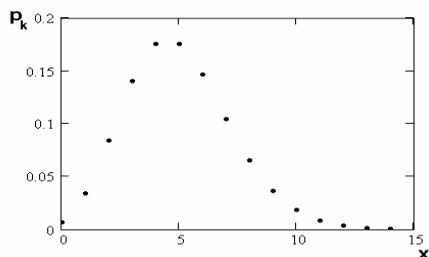


Рис.1.6. График вероятности принятия значений для случайной величины

Функция распределения вероятности для пуассоновского потока определяется как вероятность того, что произойдет число событий меньше, чем заданное значение x . Такое представление о функции распределения – прямое следствие определения функции распределения.

Исходя из этого, можно написать, что функция распределения есть сумма всех вероятностей для $k < x$:

$$F(x) = \sum_{k < x} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt}.$$

Рассмотрим пример на применение распределения Пуассона:

Среднее число отсчетов счетчика за 1 мин равно 5.

Определить вероятность того, что за 2 мин произойдет:

а) два отсчета;

- б) менее двух отсчетов;
- в) не менее двух отсчетов.

В соответствии с формулой среднее количество отсчетов составит:

$$N = nt = 5 \cdot 2 = 10;$$

а) подставляем $k=2$: $p_2 = \frac{10^2}{2!} e^{-10} = 2,5 \cdot 10^{-5}$;

б) для $k < 2$, $p_{<2} = p_0 + p_1 = \exp(-N) + N \exp(-N) =$
 $= (1 + N) \exp(-N) = 11 \exp(-10) = 4,9 \cdot 10^{-4}$;

в) для $k > 2$, $p_{>2} = 1 - p_{<2} = 0,9995$.

Установим, когда пуассоновское распределение можно использовать при решении практических задач по регистрации частиц радиоактивного распада. Радиоактивный распад данного источника определяется числом активных ядер и вероятностью распада каждого ядра λ , с^{-1} . Если длительно производить измерения за одинаковые промежутки времени, то активность источника может заметно уменьшиться.

В этом случае нарушится условие стационарности и распределение Пуассона применять нельзя. Однако если интервал времени измерения существенно меньше времени жизни рассматриваемых радиоактивных ядер, и за время измерения распадается ничтожная доля радиоактивных ядер, то распределение Пуассона можно использовать.

Обозначая интервал времени измерения t , а время жизни ядер - τ , можно записать условие применимости распределения Пуассона:

$$\frac{t}{\tau} \ll 1.$$

1.2.3. Равномерное распределение (непрерывное)

Встречаются ситуации, когда значения непрерывной случайной величины лежат в определенном интервале и при этом все они равновероятны. В таких случаях считают, что случайная величина имеет равномерное распределение. Это бывает тогда, когда пока-

зания считаются со шкалы измерительных приборов или фиксируют показания с ограниченным числом значащих цифр.

Например: длина образца измерена с точностью до 1 см. Если обозначить погрешность измерения через x , то на отрезке $-0,5 \text{ см} \leq x \leq 0,5 \text{ см}$ вероятность любого значения x будет одинакова.

Пусть переменная случайная величина x имеет равновероятное значение функции плотности вероятности на интервале от a до b , тогда можно записать:

$$f(x) = \begin{cases} c & a \leq x \leq b, \\ 0 & x < a, \quad x > b. \end{cases}$$

Из условия нормировки (свойство функции плотности вероятности) следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_a^b dx = c \cdot \frac{1}{(b-a)},$$

следовательно, $c = \frac{1}{b-a}$.

Функция $F(x)$ получается путем интегрирования:

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Графики функции плотности вероятности и функции распределения приведены на рис. 1.7 и 1.8.

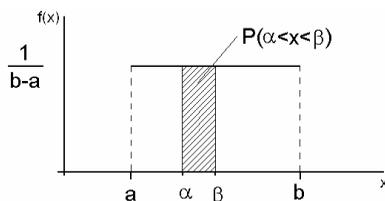


Рис. 1.7. Функция плотности вероятности равномерного распределения

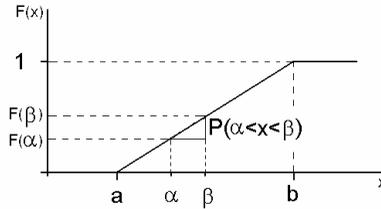


Рис. 1.8. Функция распределения равномерного распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию:

$$E\{x\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$D\{x\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания в интервал от α до β равна заштрихованной площади на графике функции плотности вероятности (см. рис. 1.7), на графике функции распределения она отмечена отрезком (см. рис. 1.8):

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

или

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

1.2.4. Нормальное распределение (непрерывное)

Нормальное распределение, или распределение Гаусса, является предельной формой, в которую могут переходить многие дру-

гие виды функций распределения. Приблизительно нормальное распределение имеет случайная величина, характеризующая результат одновременного влияния большого числа случайных факторов, каждый из которых по своему влиянию не превышает заметным образом остальные.

Нормальным называют распределение вероятности непрерывной случайной величины, которое описывается функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где σ^2 – дисперсия, μ – математическое ожидание.

Нормальное распределение, имеющее математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 , обозначается $N(\mu, \sigma^2)$, $N(x, \mu, \sigma^2)$.

График функции плотности нормального распределения представлен на рис. 1.9, график функции распределения – на рис. 1.10.

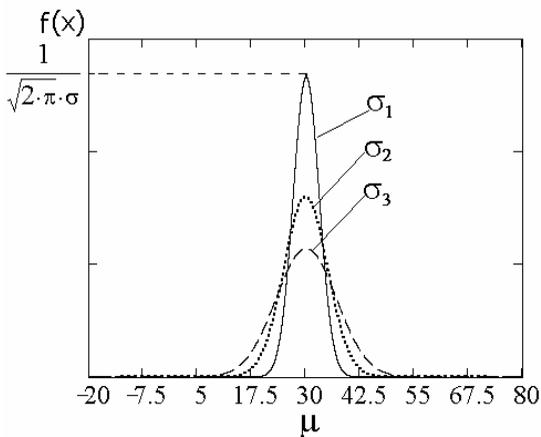


Рис.1.9. График функции плотности нормального распределения для $\mu=30$ при различных значениях σ ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$)

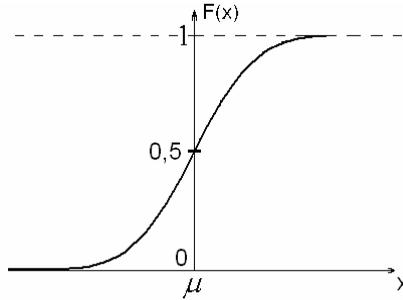


Рис 1.10. График функции распределения

График функции плотности вероятности имеет колоколообразный вид. Максимальное значение ординаты получается при $x = \mu$ и равно $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}}$. По мере удаления x от $x = \mu$ функция плотности уменьшается и при $x = \pm\infty$ обращается в 0. Математическое ожидание характеризует положение центра рассеяния. Кривая нормального распределения симметрична относительно оси — вертикальной прямой $x = \mu$. Изменение математического ожидания при неизменной дисперсии приводит к перемещению оси симметрии вдоль оси абсцисс.

Дисперсия является характеристикой рассеяния в целом. При малых значениях σ кривая распределения имеет более остроконечную вершину, чем при больших σ .

Одновременное изменение параметров математического ожидания и дисперсии приводит к изменению формы и положения кривой нормального распределения.

Функция распределения как интегральная по отношению к функции плотности вероятности для нормального распределения имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt .$$

Сразу можно отметить, что значение подобного интеграла нельзя найти из элементарных функций. Следовательно, нельзя найти с помощью простых вычислений с какой вероятностью слу-

чаяная величина, подчиняющаяся нормальному распределению, будет принимать значения меньше и больше заданного. Но так как поставленная задача очень распространена, введены в обиход табулированные значения интегралов для стандартного нормального распределения, и уже с их помощью можно ответить на такой вопрос. Ниже рассматривается последовательность необходимых действий для вычисления различных характеристик нормального распределения.

Стандартное нормальное распределение

Распределение, имеющее математическое ожидание $\mu = 0$ и дисперсию $\sigma = 1$, называют стандартным нормальным распределением и обозначают $N(0, 1)$.

В этом случае функция плотности вероятности имеет вид:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \text{ и ее график представлен на рис 1.11.}$$

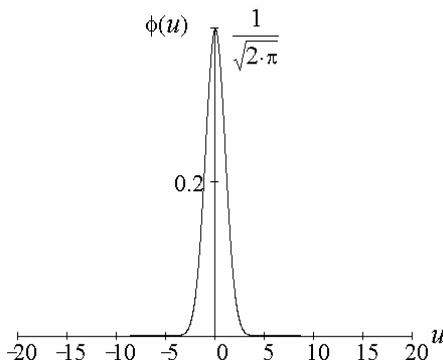


Рис. 1.11. График функции плотности вероятности стандартного нормального распределения

Функция распределения для стандартного нормального распределения имеет вид:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

Значения функции распределения – это вероятности того, что случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному распределению, будет принимать значения меньше заданного. Так как знание о таких вероятностях очень важны, а рассчитать значения функции вероятности в элементарных функциях невозможно, то значения приводятся в статистических таблицах. Говорят, что «затабулированы» вероятности того, что величина, имеющая стандартное нормальное распределение, будет иметь значение меньше, чем u :

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

Такие интегралы называются интегралами Гаусса, их значения – гауссианами.

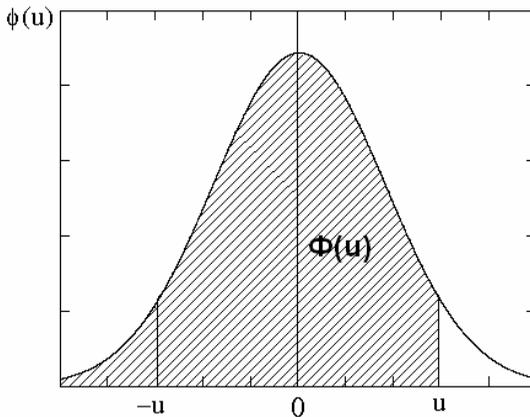


Рис.1.12. График функции плотности стандартного нормального распределения

Заштрихованная площадь – значения интеграла Гаусса и есть вероятность того, что стандартная нормальная величина принимает значения меньше, чем u .

Обычно значений интеграла Гаусса от отрицательных величин в таблице не приводится. Однако их можно вычислить, используя симметрию функции распределения относительно математического ожидания, а значит относительно 0 для стандартного нормального распределения.

Также из рис. 1.12. видно, что:

$$\Phi(-u) + \Phi(u) = 1,$$

тогда

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Интеграл Лапласа

В таблицах приводят и функцию Лапласа, которая определяется следующим образом:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

— вероятность того, что случай-

ная стандартная нормальная величина принимает значения в интервале от 0 до z . Для обозначения интегралов Лапласа применяют маленький символ 0 внизу, что показывает, что интегрирование производится не от $-\infty$ как для интеграла Гаусса, а только от 0.

Графическое представление интеграла Лапласа приведено на рис. 1.13.

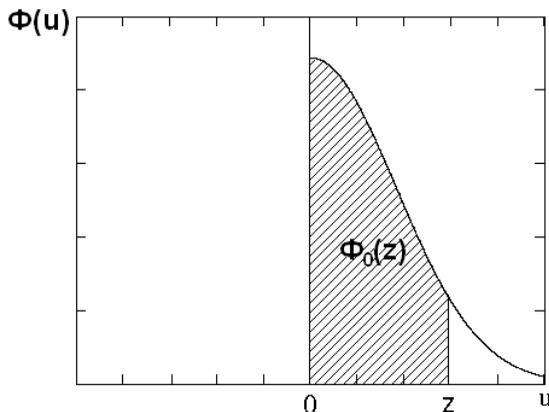


Рис. 1.13. Графическая интерпретация интеграла Лапласа

Чтобы перейти к стандартной функции нормального распределения, нужно найти вероятность того, что случайная нормальная величина меньше z :

$$P(z) = \frac{1}{2} + \Phi_0(z) .$$

Вероятность, что случайная нормальная величина $< -z$:

$$P(-z) = \frac{1}{2} - \Phi_0(z) .$$

Кроме того, имеет смысл определение функции Лапласа для отрицательных чисел (рис. 1.14):

$$\begin{aligned} \Phi_0(-z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = -\Phi_0(z) . \end{aligned}$$

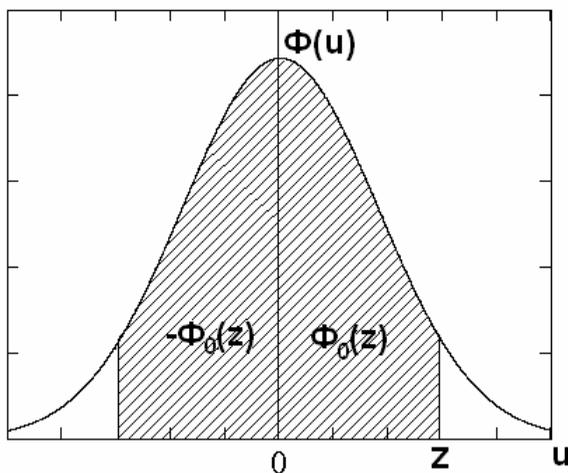


Рис.1.14. Графическая интерпретация свойств интеграла Лапласа

Таким образом, для интегралов Лапласа справедливо:

$$\Phi_0(z) = -\Phi_0(-z) ;$$

$$\Phi_0(-z) = -\Phi_0(z);$$

$$\Phi_0(0) = 0;$$

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

Преобразование нормального распределения в стандартное нормальное распределение

Преобразование $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ переводит нормальное распределение с параметрами μ и σ в стандартное нормальное распределение, имеющее математическое ожидание $\mu = 0$ и дисперсию $\sigma^2 = 1$.

Такое преобразование используется для решения задач о нахождении вероятности для нормальных случайных величин с произвольными параметрами μ и σ . Преобразуя случайную величину x в стандартную нормальную u , можно по таблицам найти требуемую вероятность.

Рассмотрим такую задачу.

Задача 1.1. Нормальная случайная величина имеет математическое ожидание $\mu = 50$ и стандартное отклонение $\sigma = 5$. Требуется найти вероятность того, что случайная величина меньше 60 (рис. 1.15).

Решение: По определению функции распределения:

$$P(x < 60) = F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{60 - 50}{5}\right) = \Phi(2) = 0,977.$$

Сначала сделали переход от случайной величины с параметрами μ и σ к стандартной нормальной величине, затем нашли в статистических таблицах значение функции распределения $\Phi(2)$ для стандартной нормальной величины $u=2$, а значит вероятность того, что стандартная нормальная величина будет принимать значения меньше 2 или, что то же самое вероятность того, что нормальная величина с параметрами (50, 5) будет принимать значения меньше 60.

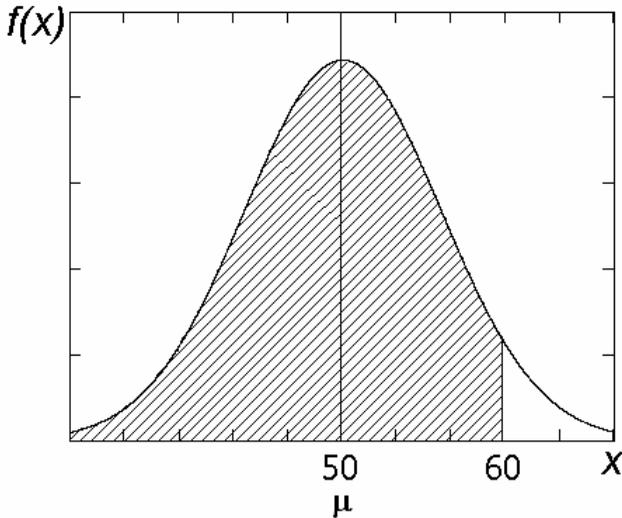


Рис.1.15. График функции плотности вероятности для задачи 1.1

Ответ: $P(x < 60) = 0,977$.

Рассмотрим вероятность попадания случайной величины x в интервал от α до β (α и β – произвольные значения).

По определению функции распределения:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha < x < \beta) &= F(\beta) - F(\alpha) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\int_{-\infty}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx - \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx .
 \end{aligned}$$

Подставим $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$ и используем табулированные значения функции Лапласа:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha < x < \beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-\mu}{\sigma}}^{\frac{\beta-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \\
 &= \Phi_0\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right),
 \end{aligned}$$

где Φ_0 – значения функции Лапласа.

Правило «трех сигм»

Если рассматриваемый интервал симметричен относительно μ (пусть ε – некоторое значение), то

$$\alpha = \mu - \varepsilon, \quad \beta = \mu + \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
 P(\mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon) &= \Phi_0\left(\frac{\mu - \mu + \varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\mu - \varepsilon - \mu}{\sigma}\right) = \\
 &= \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

Если величина интервала кратна σ , то $\varepsilon = k\sigma$, где $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) = 2\Phi_0(k).$$

Берем таблицы функций Лапласа:

$$k = 1, \quad F_0(|x - \mu| < \sigma) = 2\Phi_0(1) = 0,682$$

– значит в интервал от $x - \mu$ до $x + \mu$ случайная нормальная величина попадает с вероятностью 0,682;

$$k = 2, \quad F_0(|x - \mu| < 2\sigma) = 2\Phi_0(2) = 0,954;$$

$k = 3$. $F_0(|x - \mu| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0,997$ – правило три сигма. В интервал от $\mu - 3\sigma$ до $\mu + 3\sigma$ нормальная случайная величина попадает с вероятностью 0,997.

Квантиль нормального распределения

Понятие квантиля применимо для любого распределения.

Определение квантиля: *Квантилем x_q уровня q называется величина, определяемая формулой:*

$$F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x)dx = q .$$

Определение квантиля является задачей обратной к определению вероятности, с которой случайная величина будет меньше заданного значения.

Для нормального распределения квантиль уровня P – $\Omega[P] = u_p$, такая величина, что:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

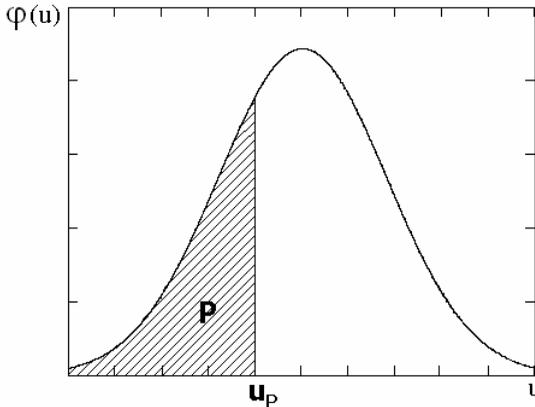


Рис.1.16. Графическая интерпретация понятия квантиль u_p уровня P

Рис 1.16 поясняет понятие квантиля уровня P для нормального распределения. Если известен уровень (вероятность P), то по этой вероятности можно однозначно найти значение u_p . Причем стандартная нормальная величина будет принимать значения ниже u_p с вероятностью P .

Значения квантилей для стандартного нормального распределения приводятся в статистических таблицах.

Из симметрии $\varphi(u)$ относительно 0:

$$\int_{-\infty}^{-u} \varphi(t) dt = \int_u^{\infty} \varphi(t) dt, \text{ следовательно } \int_u^{\infty} \varphi(t) dt = 1 - \int_{-\infty}^{-u} \varphi(t) dt .$$

$\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$, если $\Phi(u_p) = P$, следовательно

$$P = 1 - \Phi(-u), \text{ значит } -u_p = u_{1-P} .$$

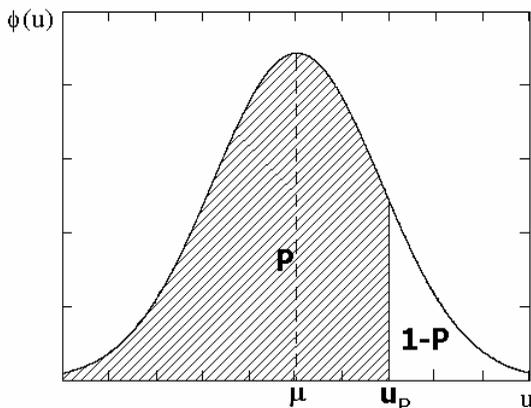


Рис.1.17. Квантиль положительной величины

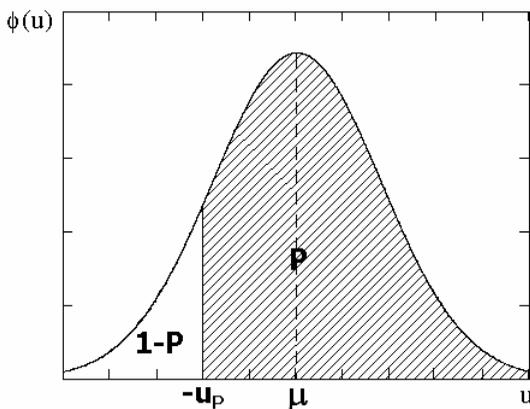


Рис.1.18. Квантиль отрицательной величины

Рис. 1.17 и 1.18 иллюстрируют соотношение между u_p и u_{1-p} . Рассмотрим задачу на использование понятия квантиля.

Задача 1.2. (обратная к задаче 1.1).

Нормальная случайная величина имеет $\mu = 50$ и $\sigma = 5$ (рис. 1.19).

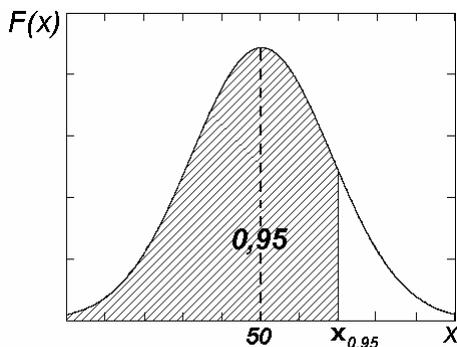


Рис.1.19. Функция плотности распределения для задачи 2.1

Найти такое значение переменной случайной величины x , чтобы с $P = 0,95$ значение x было меньше найденного x .

Решение:

Надо найти такое значение $x_{0,95}$, чтобы $F(x_{0,95})=0,95$. Сначала найдем квантиль стандартного нормального распределения, т.е. значение стандартной нормальной величины, меньше которого случайная величина может принимать значения с вероятностью $P = 0,95$.

Такое значение можно найти по таблице квантилей для заданной величины вероятности, в данном случае: $\Phi(u_{0,95}) = 0,95$ и $u_{0,95} = 1,645$ – по таблице квантилей.

Затем сделаем переход от стандартного нормального распределения к нормальному распределению с параметрами $(50, 5)$:

$$\Phi(1,645) = 0,95 = F\left(\frac{x_{0,95} - \mu}{\sigma}\right),$$

$$\frac{x_{0,95} - \mu}{\sigma} = \frac{x_{0,95} - 50}{5} = 1,645. \text{ Отсюда следует, что } x_{0,95} = 58,22.$$

Значение переменной случайной величины 58,22 таково, что с $P = 0,95$ значение случайной нормальной величины меньше найденного 58,22.

Ответ: $x_{0,95} = 58,22$.

1.2.5. Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема играет важнейшую роль в статистике, так как обосновывает применение нормального распределения к большинству практических случаев.

Пусть x_k представляют собой множество независимых случайных величин, имеющих один и тот же закон распределения, с математическим ожиданием μ и конечной дисперсией σ^2 . При увеличении объема выборки $n \rightarrow \infty$ распределение выборочного среднего \bar{x} будет стремиться к нормальному распределению с математическим ожиданием μ и дисперсией $\frac{\sigma^2}{n}$.

По определению среднего:
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Математическое ожидание для всех x_k есть $\mu \forall k$ и дисперсия $\sigma^2 \forall k$. Тогда:

$$E\{\bar{x}\} = E\left\{\frac{1}{n} \sum_k x_k\right\} = \frac{1}{n} \sum_k E\{x_k\} = \frac{1}{n} \sum \mu n = \mu,$$

$$D\{x\} = D\left\{\frac{1}{n} \sum_k x_k\right\} = \frac{1}{n^2} \sum_k D\{x_k\} = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Эти выражения не являются доказательством центральной предельной теоремы, а только иллюстрацией правильности соотношений. Не доказываем здесь и то, что распределение \bar{x} стремится к нормальному.

1.2.6. Распределение χ^2 (непрерывное)

Распределение χ^2 (хи – квадрат) является непрерывным. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – независимые нормальные случайные величины, причем $x_i \in N(0,1)$. Сумма квадратов этих величин носит название распределения χ^2 с n степенями свободы.

$$\chi_n^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

χ^2 имеет функцию распределения:

$$F(\chi_n^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_0^{\chi_n^2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Соответствующая плотность вероятности определяется выражением:

$$f(\chi_n^2) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

Графики плотности вероятности для различного числа степеней свободы представлены на рис. 1.20.

Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

$$E\{\chi^2\} = n; \quad \sigma^2(\chi^2) = 2n.$$

При $n > 30$ распределение χ_n^2 можно считать нормальным.

Из статистических таблиц можно найти вероятность P того, что величина χ^2 принимает значение, не превышающее данное значение $\chi_{n,P}^2$.

Эта вероятность равна площади, которая ограничена ветвью кривой плотности слева от значения $\chi_{n,P}^2$ на рис 1.21.

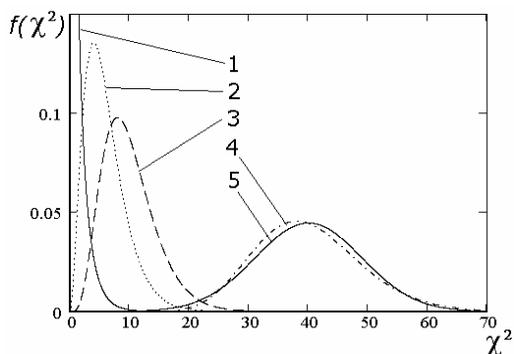


Рис.1.20. Графики плотности вероятности распределения χ_n^2 при различных n :
 1 – $n=1$; 2 – $n=6$; 3 – $n=10$; 4 – $n=40$; 5 – нормальное распределение $N(40,80)$

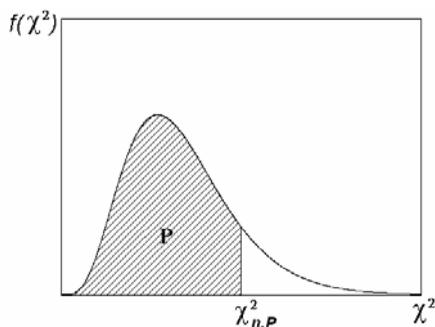


Рис. 1.21. График функции плотности распределения χ^2 .
 Заштрихованная площадь равна вероятности того, что случайная величина, подчиняющаяся распределению χ^2 меньше, чем $\chi_{n,P}^2$

Применение распределения χ_n^2

Покажем, что величина $(n - 1)S^2/\sigma^2$, где S – выборочная дисперсия, подчиняется χ^2 - распределению с числом степеней свободы $n-1$.

Несмещенное выражение для S^2 :

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Если выборка производится из x_i независимых величин, подчиняющихся нормальному распределению со средним \bar{x} и дисперсией σ^2 , то $\frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ подчиняется стандартному нормальному рас-

пределению. Тогда $\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$ – подчиняется распределению χ^2 .

Следовательно, и

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \frac{S^2 (n-1)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

также подчиняется распределению χ^2 .

Надо учесть, что квадраты $(x_i - \bar{x})^2$ не являются независимыми, так как $(x_i - \bar{x})^2$ связаны уравнением $\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} = 0$. В этом уравнении x_i независимы друг от друга до $(n - 1)$ номера. Но последнее n -е значение переменной x определяется величиной \bar{x} , и поэтому происходит утрата одной степени свободы. Она идет на получение среднего значения.

Таким образом, величина $S^2(n - 1)/\sigma^2$ подчиняется распределению χ^2 с $(n - 1)$ числом степеней свободы.

1.2.7. Распределение Стьюдента (непрерывное)

Если считать что y , а также y_1, y_2, \dots, y_n – независимые величины, имеющие нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, то отношением

Стьюдента называют безразмерную величину $t = \frac{y}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Говорят, что величина t подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы n . Причем величины y и y_i не имеют различия. Величину y можно записать в ряду y_i . Распределение t не зависит от σ^2 , поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $\sigma^2 = 1$ и $y, y_i \in N(0, 1)$.

Можно показать, что плотность распределения Стьюдента, представляющая собой отношение нормально распределенной величины к величине, подчиняющейся распределению χ^2 , имеет следующий вид:

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где n – число степеней свободы. График функции плотности вероятности представлен на рис. 1.22.

Функция распределения:

$$S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \frac{d\alpha}{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

При больших n и ограниченных x величина $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ устремляется к $\exp(-x^2/2)$, а множитель перед интегралом к $\rightarrow 1/\sqrt{2\pi}$.

Следовательно, распределение Стьюдента при большом числе степеней свободы переходит в нормальное распределение $N(0, 1)$. В статистических таблицах имеются так называемые процентные точки t распределения Стьюдента. Величины $t_{n,P}$ таковы, что

$$P = \int_{-\infty}^{t_{n,P}} S_n(t) dt, \text{ т.е. случайная величина, подчиняющаяся распределению Стьюдента с числом степеней свободы } n \text{ меньше такой}$$

величины с вероятностью P (рис. 1.23). По таблицам можно найти $t_{n,P}$, зная P , т.е. такую величину, менее которой должна быть студентовская величина с вероятностью P .

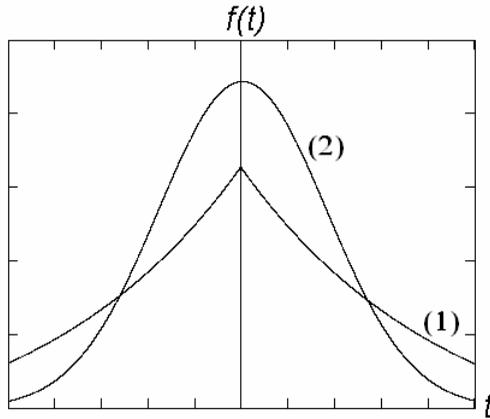


Рис.1.22. График плотности вероятности величины, подчиняющейся распределению Стюдента (1). Для сравнения приведена плотность вероятности стандартного нормального распределения (2)

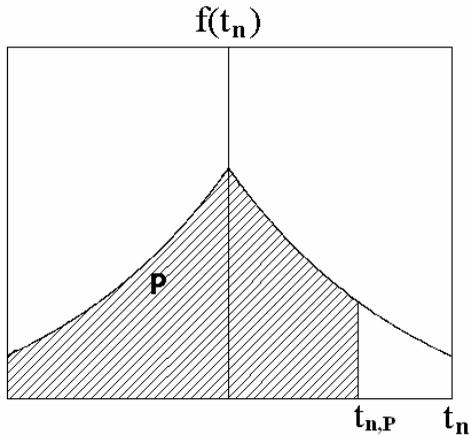


Рис.1.23. Процентные точки $t_{n,P}$ распределения Стюдента

Рассмотрим пример применения распределения Стьюдента. Пусть имеется случайная нормально распределенная величина x с дисперсией $\sigma^2(x)$ в выборке объема n . Ее среднее значение \bar{x} . По центральной предельной теореме, дисперсия среднего $\sigma^2(\bar{x}) = \sigma(x)/n$. Из центральной предельной теоремы также следует, что для достаточно большой выборки выборочное среднее \bar{x} распределено нормально с математическим ожиданием μ и дисперсией $\sigma(\bar{x})$. Таким образом, величина $y = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma(\bar{x})}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Проводя измерения, экспериментатор обычно не знает величины $\sigma(x)$ и пользуется выборочной оценкой для дисперсии $S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Следовательно, оценка для дисперсии среднего $S^2(\bar{x}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Величина $\frac{(\bar{x} - \mu)}{S(\bar{x})} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S(x)} = t_{n-1}$ представляет собой от-

ношение нормально распределенной величины к величине, подчиняющейся распределению χ^2 , и, следовательно, по определению является стьюдентовской величиной, т.е. подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$. Число степеней свободы определяется так же, как и для S^2 , подчиняющегося распределению χ^2 .

Задача 1.3.

Действительно ли средний рост большой группы людей равен 167 см?

В выборке из 10 человек рост распределился следующим образом:

160, 160, 167, 170, 173, 176, 178, 178, 181, 181 см.

Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 172,4$ см.

Может ли тот факт, что $\bar{x} > 167$ см обусловлен просто игрой случая?

Построим величину с известным заранее характером распределения:

$$\begin{aligned}\bar{x} &\rightarrow N(\mu, \sigma(\bar{x})), \\ z &= \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma(\bar{x})} \rightarrow N(0,1), \\ z &= \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma(\bar{x})} \rightarrow N(0,1).\end{aligned}$$

Если бы $\sigma(x)$ была известна, то можно было бы воспользоваться таблицами нормального распределения вероятности и проверить, является ли z значительно больше 0 при условии, что $\mu = 167$. Но мы не знаем $\sigma^2(x)$, а оцениваем дисперсию с помощью выборочной дисперсии:

$$S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(x_i - 172,4)^2}{9} = 62,9,$$

т.е. $S = 7,93$.

Оценка среднеквадратичного отклонения для величины \bar{x} :

$$S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{62,9}{10}} = 2,51.$$

Введем величину $t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S(\bar{x})}$, которая подчиняется рас-

пределению Стьюдента с числом степеней свободы $n-1=10-1=9$:

$$t_9 = \frac{172,4 - 167,0}{2,51} = 2,15.$$

Смотрим в таблицы распределения Стьюдента. С какой вероятностью величина, подчиняющаяся распределению Стьюдента, будет принимать значения 2,15 ?

Из статистических таблиц можно видеть, что с вероятностью 5% $t_9 > 1,83$, т.е. вероятность того, что случайная величина, подчиняющаяся распределению Стьюдента с числом степеней свободы 9 больше 1,83, равна 5%. Это значит, что меньше чем в 5% случаев может быть $t_9 > 1,83$. В нашем эксперименте $t_9 = 2,15$.

Делаем вывод, что только в 5% случаев экспериментальные данные могут подтверждать гипотезу о том, что средний рост человека равен 167 см. Очевидно, что эта вероятность очень низкая.

1.2.8. Показательное распределение (непрерывное)

Из распределения Пуассона: вероятность $p_0(t)$ того, что за время t при среднем числе событий n не произойдет ни одного, равна $p_0(t) = \exp(-nt)$. Это выражение можно рассматривать как надежность, т.е. вероятность безотказной работы элемента за время t .

Введем понятие **функция надежности** $R(t) = \exp(-nt)$. При этом считается, что события, приводящие к отказам, распределены по закону Пуассона (что соответствует природе многих событий). Если надежность описана функцией R , то функцию распределения отказов $F(t)$ можно записать:

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp(-nt).$$

Учитываем, что $R(t) + F(t) = 1$, а $F(t)$ – вероятность того, что за время t произойдет отказ.

$F(t)$ – функция распределения для показательного распределения. Функция плотности вероятности по определению является производной функции распределения. Таким образом, функция плотности вероятности:

$$f(t) = F'(t) = n \cdot \exp(-nt).$$

Графики $F(t)$ и $f(t)$ представлены на рис. 1.24 и 1.25.

Математическое ожидание показательного распределения (функции распределения отказов), или средний интервал времени между двумя отказами:

$$\bar{t} = E\{t\} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot n \exp(-nt) dt = 1/n.$$

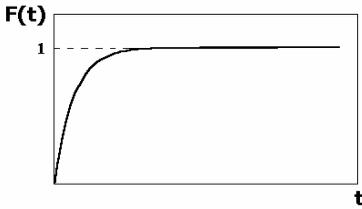


Рис. 1.24. График функции распределения для показательного распределения

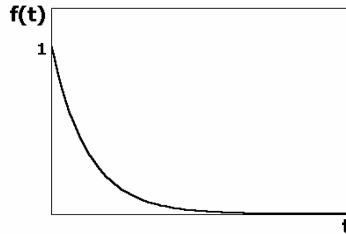


Рис. 1.25. График функции плотности вероятности для показательного распределения

Дисперсия для показательного распределения:

$$D(t) = E\{t^2\} - E^2\{t\} = \int_0^{\infty} t^2 n \exp(-nt) dt - (1/n)^2 =$$

$$= 2/n^2 - 1/n^2 = 1/n^2.$$

Вероятность попадания в интервал $[t_1 ; t_2]$ – вероятность того, что отказ произойдет в интервале времени от t_1 до t_2 :

$$P(t_1 < t < t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \exp(-nt_1) - \exp(-nt_2)$$

1.2.9. Распределение Лоренца

Распределение Лоренца описывает события, которые изучают с помощью метода резонанса. Плотность вероятности и функция распределения имеют вид:

$$p(x; x_0, \Gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(x - x_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{\Gamma/2}.$$

Величины математического ожидания и дисперсии нельзя определить, поскольку интегралы от функции $p(x; x_0, \Gamma)$ расходятся. Поэтому такое распределение характеризуют медианой x_0 и полушириной Γ . Полуширина Γ определяется таким образом, что при $x = x_0 \pm \Gamma/2$ плотность вероятностей достигает половины максимального значения. На рис. 1.26 наглядно показаны распределения Лоренца и Гаусса с одинаковой «полушириной» – полной шириной на половине высоты.

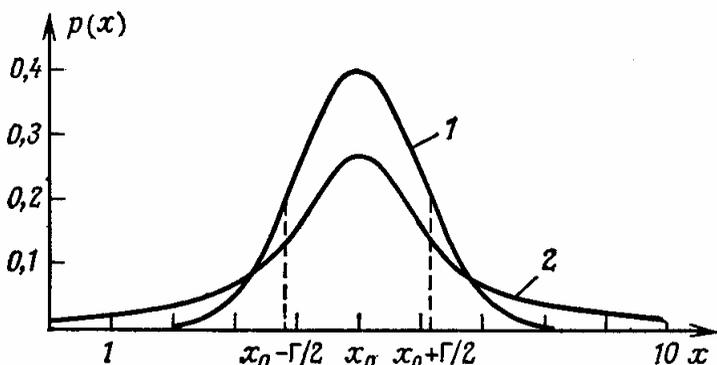


Рис 1.26. Распределения Гаусса (1) и Лоренца (2) с одинаковой полушириной Γ

Хорошо видно, что распределение Лоренца более широкое, иными словами, плотность вероятностей падает медленнее. То же самое справедливо и для вероятностей в интервале $\left[x_0 - \frac{\Gamma}{2}; x_0 + \frac{\Gamma}{2} \right]$:

$$P\left(x_0 - \frac{\Gamma}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\Gamma}{2}\right) = 76\% \text{ для распределения Гаусса и}$$

$$P\left(x_0 - \frac{\Gamma}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\Gamma}{2}\right) = 50\% \text{ для распределения Лоренца.}$$

Вопросы к главе 1

1. Какие числовые характеристики имеются у случайных величин?
2. Что такое функция распределения и функция плотности распределения? Как эти функции взаимосвязаны? Применимы ли понятия функции распределения и плотности распределения к дискретным и непрерывным случайным величинам?
3. Какие процессы подчинятся распределению Пуассона?
4. Какова функция плотности для нормального распределения? Каковы значения параметров для стандартного нормального распределения? В чем смысл «правила 3σ »?

5. Как используется центральная предельная теорема при обработке экспериментальных данных?
6. Как связаны с нормальным распределением распределение Стьюдента и распределение χ^2 ?
7. Как определить, с какой вероятностью случайная величина будет принимать значения в определенном интервале, если известна функция плотности вероятности для случайной величины?
8. Какие процессы описываются показательным распределением?

2. Оценки параметров распределения

Чтобы найти оценку параметра, необходимо сначала выбрать способ перехода от наблюдаемых экспериментальных значений к оценке. Численное значение, получаемое в результате применения какого-либо способа к определенному набору экспериментальных данных, называется оценкой. Не существует однозначного алгоритма оценивания. Оценку можно получить различными путями, но они всегда основаны на априорной информации об исследуемом процессе и апостериорных данных, полученных в результате измерений. Оценка может быть представлена единственным значением, тогда она называется *точечной оценкой*. Или оценка может быть задана интервалом значений, тогда она называется *интервальной оценкой*. Интервальные оценки применимы, когда выборка экспериментальных данных имеет небольшой объем n . Оценка параметра интервалом точнее, поскольку интервал либо ближе к истинному значению, либо интервал включает истинное значение.

2.1. Свойства оценок

Каждая оценка имеет свои свойства, однако при этом желательно, чтобы она обладала следующими свойствами:

- 1) состоятельностью;
- 2) несмещенностью;
- 3) эффективностью;
- 4) устойчивостью.

Оценка называется *состоятельной*, если она стремится к истинному значению параметра с увеличением объема выборки n .

Определим понятие смещенности и несмещенности оценки. Пусть $\hat{\theta}$ – будет оценкой параметра θ , полученной на основании N наблюдений.

Смещенность оценки называется отклонение:

$$b_N(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E(\hat{\theta} - \theta_0).$$

Поэтому оценка называется *несмещенной*, если для всех N

$$b_N(\hat{\theta}) = 0 \text{ или } E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Определим понятие *эффективности* оценки. Оценка $\hat{\theta}$ считается эффективной, если она среди других оценок обладает наименьшим случайным разбросом относительно истинного значения оцениваемого параметра. Мерой разброса служит дисперсия $\sigma^2(\hat{\theta})$:

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\}.$$

Под *устойчивостью* понимают нечувствительность оценки к малым изменениям во входных данных – экспериментальных значениях.

2.2. Интервальные оценки

Для небольших по объему выборок широко используются *интервальные оценки*, которые определяются двумя числами – концами интервалов.

Если $\tilde{\theta}$ является оценкой θ , то *значение* $|\theta - \tilde{\theta}|$ характеризует *точность* этой оценки. Полагая $\delta > 0$ – погрешность оценки, тогда погрешность можно представить в виде $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$.

Следует иметь в виду, что из-за случайности $\tilde{\theta}$ можно говорить лишь о вероятности P , с которой это неравенство реализуется.

Надежностью или *доверительной вероятностью оценки θ* называют вероятность $P = 1 - \alpha$, с которой реализуется неравенство

$|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$. Здесь $\alpha = 1 - P$ называют *уровнем значимости*.

Значения α выбирают обычно равными 0,01; 0,05; 0,1. Выбор уровня значимости чаще всего остается за экспериментатором, т.е. результаты одного и того же эксперимента можно представить с разными уровнями значимости. Поэтому так важно указывать уровень значимости, ведь оценка и результат эксперимента напрямую зависят от него:

$$P(|\theta - \tilde{\theta}| < \delta) = 1 - \alpha; P(\tilde{\theta} - \delta < \theta < \tilde{\theta} + \delta) = 1 - \alpha.$$

Вероятность того, что в интервале $(\tilde{\theta} - \delta; \tilde{\theta} + \delta)$ заключен неизвестный параметр θ , равна $P = 1 - \alpha$.

Доверительным интервалом называют интервал $(\tilde{\theta} - \delta; \tilde{\theta} + \delta)$, который накрывает неизвестный параметр с заданной надежностью или доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha$.

Дать **интервальную оценку** для параметра – это значит задать доверительный интервал для параметра, куда этот параметр попадает с выбранной доверительной вероятностью (или уровнем значимости).

2.2.1. Доверительный интервал для математического ожидания

1. При известной дисперсии

Пусть имеется ряд экспериментальных значений x_1, x_2, \dots, x_n , и известна дисперсия σ^2 . Оценим математическое ожидание одним значением:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Здесь \bar{x} подчиняется $N(\mu, \sigma^2/n)$ – нормальному распределению, по центральной предельной теореме:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma(\bar{x})} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}, \text{ подчиняется } N(0, 1) \text{ – стандартному нор-}$$

мальному распределению.

Выберем уровень значимости α так, чтобы надежность $P = 1 - \alpha$ соответствовала u_p , где u_p – квантиль стандартного распределения уровня P , т.е. по определению квантиля

$$P\left(\frac{|\bar{x} - \mu|\sqrt{n}}{\sigma} < u_p\right) = 1 - \alpha = \Phi(u_p),$$

где $\Phi(u_p)$ – табулированный интеграл Гаусса, т.е.

$$P\left(|\bar{x} - \mu| < \frac{u_p \sigma(x)}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u_p).$$

Из этого следует, что

$$P\left(\bar{x} - \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u_p).$$

Это выражение понимаем так: оценка μ попадет в заданный интервал в P процентов случаев, а в $(1 - P)$ процентов случаев не попадает. Это собственно и есть интервальная оценка для математического ожидания.

Ширина доверительного интервала

$$\bar{x} + \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} + \frac{u_p \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2u_p \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Можно использовать эту оценку и другим способом. Если заранее задана погрешность $\delta = u_p \sigma / \sqrt{n}$, то по найденному из таблиц значению квантиля u_p уровня P и известной дисперсии σ^2 можно определить предстоящий объем выборки $n = u_p^2 \sigma^2 / \delta^2$. Такой объем выборки позволит в дальнейшем после проведения эксперимента представить оценку математического ожидания в интервале с заданной погрешностью и заданной доверительной вероятностью. Так как объем выборки – это количество проведенных экспериментов, а, следовательно, это – количество затраченных на получение знания ресурсов, такая оценка желательна при планировании эксперимента.

2. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Та же задача, что и выше, но σ^2 неизвестна. В этом случае выбирают статистику Стьюдента:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{S} \sqrt{n}.$$

Имея определенный объем выборки n и задав доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$, можно по таблицам определить процентную точку t распределения $t_{n-1, P}$ такой, что будет выполняться соотношение:

$$P\left(\frac{|\bar{x} - \mu| \sqrt{n}}{S} < t_{n-1, p}\right) = 1 - \alpha,$$

или

$$P\left(\bar{x} - \frac{t_{n-1, p} S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{n-1, p} S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Полуширина доверительного интервала $\delta = \frac{t_{n-1, p} S}{\sqrt{n}}$ зависит от n и P . Поэтому n определить уже не получится, так как $t_{n-1, p}$ зависит от n .

2.2.2. Доверительный интервал для дисперсии

Пусть имеются экспериментальные данные x_1, x_2, \dots, x_n . Можно посчитать выборочную дисперсию $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Для построения доверительного интервала для σ^2 выбирают статистику $\chi^2: S^2(n-1)/\sigma^2$ – подчиняется χ_{n-1}^2 .

Для уровня значимости α доверительная вероятность $P = 1 - \alpha$:

$$P\left(\chi_{1, n-1}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{2, n-1}^2\right) = 1 - \alpha.$$

По таблицам для χ^2 -распределения выбирают такие значения $\chi_{1, n-1}^2$ и $\chi_{2, n-1}^2$, чтобы соответствующая суммарная площадь под кривой была равна $1 - P = \alpha$ (рис. 2.1).

Этому условию удовлетворяет равенство:

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha/2.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} P\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) &= 1 - P(\chi^2 < \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = \\ &= P(\chi^2 > \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

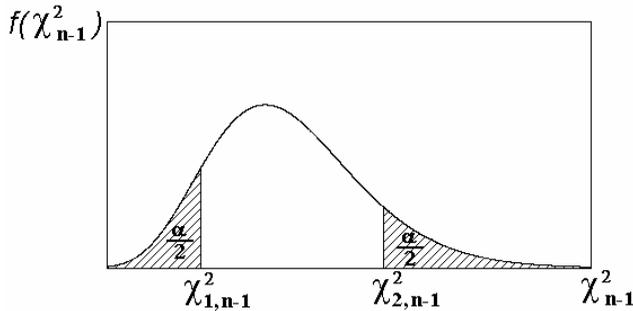


Рис.2.1. График плотности распределения для χ^2

Неравенство $\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ можно преобразовать к виду:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{2,n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1,n-1}^2}.$$

Для планирования эксперимента (определение объема выборки n) данное неравенство использовать сложно, так как χ_{n-1}^2 зависит от n , и необходимо оценивать S^2 до основного эксперимента.

2.3. Методы точечного оценивания параметров

2.3.1. Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия

Пусть имеется выборка из n независимых результатов наблюдений: $x_1 \dots x_n$. При этом случайная величина x распределена по известному закону $f(x, \theta)$ с неизвестным параметром (или параметрами) $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ ($\vec{\theta}$).

Совместная функция вероятности $L(x, \theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ в силу независимости каждого измерения может быть представлена в виде:

$$L(x, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

Здесь $L(x, \theta)$ рассматривается как функция θ при фиксированных, полученных в измерениях x . Чем больше значение каждого из сомножителей в L , тем больше само значение L и тем более вероятна система значений x_1, x_2, \dots, x_n при значении параметра θ . Поэтому L называют функцией правдоподобия.

Функция L может быть симметрична, иметь один пик, но она может иметь и сложный вид с несколькими пиками. На рис. 2.2 и 2.3 представлены возможные виды совместной функции вероятности – функции правдоподобия.

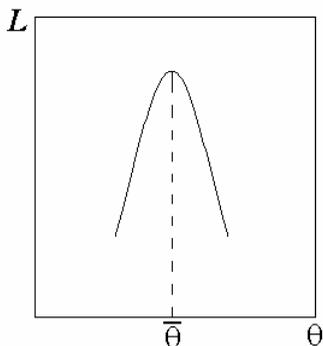


Рис.2.2 Одновершинная функция правдоподобия

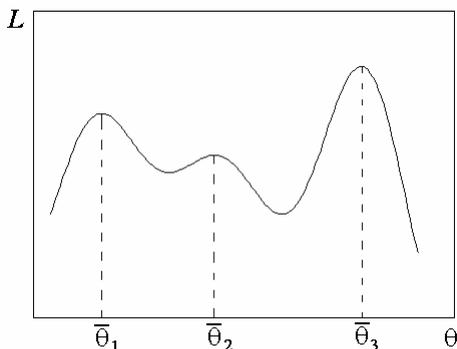


Рис.2.3 Многовершинная функция правдоподобия

Основы метода максимального правдоподобия

Метод оценки параметра θ состоит в поиске максимума функции правдоподобия $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$. При этом x_1, \dots, x_n считаются постоянными, а параметр θ – переменным. Находят такое значение θ , при котором $L(x, \theta)$ становится наиболее правдоподобной. При этом каждый из сомножителей в L принимает наибольшее значение, а значит набор значений x и θ наиболее вероятен.

Оценки, полученные таким методом – состоятельные, асимптотически несмещенные и эффективные.

В общем случае доказано, что вторая производная от $L(x, \theta)$ меньше 0, и, таким образом, равенство нулю первой производной дает максимальное значение $L(x, \theta)$.

Максимум можно определять по любой методике. Не изменяя общий подход, можно искать максимум у логарифмической функции L .

Введем обозначение:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sum \ln f(x_i, \theta) - \text{логарифми-}$$

ческая функция правдоподобия.

Уравнение для получения оценки параметра можно записать в виде:

$$\frac{dl(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{d\theta} = \theta.$$

Если параметров несколько, например k , то можно записать систему уравнений:

$$\frac{\partial l(x_1, x_2, \dots, x_n, \vec{\theta})}{\partial \theta_j} = 0; \quad j = 1 \dots k.$$

Рассмотрим несколько задач на метод максимального правдоподобия.

Задача 2.1. Оценить математическое ожидание $\tilde{\mu}$ и дисперсию $\tilde{\sigma}^2$ для величины, подчиняющейся нормальному распределению. Имеется выборка объема n : x_1, x_2, \dots, x_n .

Функция плотности нормального распределения для величины x :

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma^2) = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \end{aligned}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Для получения оценок составим систему уравнений, приравняв частные производные по μ и σ^2 к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial l(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0, \\ \frac{\partial l(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находится μ : $\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$.

Используя $\tilde{\mu}$, из второго уравнения можно определить $\tilde{\sigma}^2$.

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Оценка $\tilde{\sigma}^2$ является *асимптотически несмещенной*, так как несмещенной оценкой σ^2 является выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Покажем, что оценка дисперсии $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ является только асимптотически несмещенной, т.е. оценка смещена при малом объеме выборки n .

Определим математическое ожидание полученной оценки:

запишем оценку $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \mu)^2 - (\bar{x} - \mu)^2 \right]$.

Найдем математическое ожидание такой величины:

$$E\{\widetilde{\sigma}^2\} = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i - \mu)^2\right\} - E\left\{(\bar{x} - \mu)^2\right\}.$$

Помним о том, что по определению

$$\sigma^2 = E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i - \mu)^2\right\}.$$

В соответствии с центральной предельной теоремой:

$$E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\bar{x} - \mu)^2\right\} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Тогда математическое ожидание полученной оценки $\widetilde{\sigma}^2$:

$$E\{\widetilde{\sigma}^2\} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Из него следует, что несмещенная оценка σ^2 :

$$\widetilde{\sigma}_{\text{несмещ}}^2 = S^2 = \frac{n}{n-1}\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i - \bar{x})^2.$$

Задача 2.2. Оценить математическое ожидание на основании выборки объема n . Случайная величина подчиняется распределению Пуассона.

Решение. Имеется x_1, \dots, x_n ; оценить μ . Функция распределения для x : $f(x, \mu) = \mu^x e^{-\mu}/x!$. Функция правдоподобия:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \frac{\mu^{x_1}}{x_1!} e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{x_2}}{x_2!} e^{-\mu} \cdot \dots \cdot \frac{\mu^{x_n}}{x_n!} e^{-\mu};$$

логарифмическая функция правдоподобия:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = \sum_{k=1}^n x_k \ln \mu - n\mu - \ln(x_1! x_2! \dots x_n!).$$

Для поиска максимума приравняем нулю частную производную:

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n x_k - n = 0.$$

Ответ: $\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

2.3.2. Бейесовский подход к получению оценок

Метод Байеса учитывает априорное знание о виде закона распределения исследуемой величины при анализе экспериментальных результатов.

Определение 1. Априорная вероятность $p(\theta)$ параметра θ характеризует возможность осуществления различных значений θ до того, как проведен эксперимент.

Определение 2. Апостериорная вероятность $q(\theta|x)$ характеризует возможность осуществления различных значений θ после того, как к априорному значению добавлено знание, извлеченное из экспериментальных данных \vec{x} .

Теорема Байеса. Апостериорная вероятность параметра θ получается умножением априорной вероятности на функцию правдоподобия:

$$q(\theta/x) = \frac{p(\theta)L(x|\theta)}{\text{const}}.$$

Const находится из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(\theta|x)d\theta = 1 \text{ для непрерывных } \theta,$$

или

$$\sum_{i=1}^n q(\theta_i|x) = 1 \text{ для дискретных } \theta,$$

где n – количество измерений; $L(x/\theta)$ – плотность условного распределения выборки x при заданном значении θ совпадает с функцией правдоподобия:

$$\text{const} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\theta)L(x|\theta)d\theta,$$

или

$$\text{const} = \sum_{i=1}^n p_i(\theta_i)L(x|\theta_i).$$

Любой постоянный множитель в функциях p и L может быть опущен.

Точечной байесовской оценкой для θ служит среднее значение, вычисленное по апостериорному распределению:

$$\tilde{\theta} = E_{\theta} \{ \theta | x \} = \int \theta q(\theta | x) d\theta,$$

если априорная вероятность неизвестна, то применяют постулат Бейеса.

Постулат Бейеса: Если распределение априорной вероятности для θ неизвестно, то, предполагая, что значения θ априори равновероятны, мы можем охарактеризовать полную неосведомленность относительно θ и следует положить: $P(\theta) = \text{const}$.

Задача 2.3 (на байесовский подход). Оценить параметр θ , когда θ принимает только два значения $\theta_1 = 0$ или $\theta_2 = 1$.

Априорное распределение задается априорными вероятностями q_i для θ_i ($i = 1, 2$). Имеется выборка из одного наблюдения – значение величины x . Апостериорное распределение параметра θ имеет вид:

$$q(\theta = 0 | x) = \frac{q_1 L(x | \theta = 0)}{q_1 L(x | \theta = 0) + q_2 L(x | \theta = 1)}.$$

Так как выборка только из одного измерения, то вместо функции максимального правдоподобия $L(x|\theta)$ можно использовать $f(x|\theta)$ – вероятность того, что x принимает какие-либо значения при заданных θ .

$$q(\theta = 0 | x) = \frac{q_1 f(x | \theta = 0)}{q_1 f(x | \theta = 0) + q_2 f(x | \theta = 1)},$$

$$q(\theta = 1 | x) = 1 - q(\theta = 0 | x).$$

Бейесовскую оценку $\tilde{\theta}$ получаем, если выберем значение θ , дающее максимум условной апостериорной плотности $q(\theta|x)$. Таким образом, за счет априорной плотности $q(\theta)$ подправляется оценка максимального правдоподобия.

Предполагаем, что максимальное значение функции плотности достигается при максимальном значении аргумента:

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} 1, & \text{если } q(\theta = 1 | x) > q(\theta = 0 | x), \\ 0, & \text{если } q(\theta = 1 | x) \leq q(\theta = 0 | x). \end{cases}$$

Вот это и есть байесовское решающее правило – по максимуму апостериорной вероятности.

Полученное значение оценки можно выразить в терминах правдоподобия:

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{f(x|1)}{f(x|0)} < \frac{q_2}{q_1}, \\ 0, & \text{если } \frac{f(x|1)}{f(x|0)} \geq \frac{q_2}{q_1}. \end{cases}$$

2.3.3. Метод наименьших квадратов (МНК)

Имеется вектор неизвестных параметров $\theta_1 \dots \theta_r$ – $\vec{\theta}$, который необходимо определить.

В эксперименте вместо собственно параметров определяют какие-либо другие величины $y_1 \dots y_n$ (\vec{y}), причем каждая экспериментальная величина y_i определена с погрешностью ε_i .

Полагаем, что эти погрешности случайные, а не систематические (нет постоянного смещения у ошибки), т.е. $E\{\varepsilon_i\} = 0$ для любого ε_i . Причем имеется связь экспериментальных величин y_i с параметрами $\vec{\theta}$ и некоторыми значениями x_i ($i=1 \dots n$). Величины x_i определяют условия эксперимента по получению величины y_i .

Таким образом, известна связь $y_i = \eta(x_i, \vec{\theta}) + \varepsilon_i$. Задача состоит в определении $\vec{\theta}$ при известных \vec{y} , \vec{x} , $\vec{\varepsilon}$.

Метод наименьших квадратов заключается в минимизации суммы квадратов, характеризующих отклонение экспериментального значения y_i от некоего идеального значения $\eta(x_i, \vec{\theta})$.

Минимизируется следующий функционал:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \eta(x_i, \vec{\theta}))^2 \rightarrow \min.$$

Рассмотрим метод наименьших квадратов для некоторых конкретных типов функции η .

МНК для прямых равноточных измерений

Измеряется непосредственно величина θ , которую необходимо узнать. Получены результаты n измерений с погрешностью ε_i :

$y_i = \theta + \varepsilon_i$; по условиям задачи:

$$E\{\varepsilon_i\} = 0; D\{\varepsilon_i^2\} = \sigma^2; E\{y\} = \theta; \eta(\theta) = 0.$$

Считаем, что погрешности распределены нормально. Предположение о нормальном распределении результатов можно оправдать центральной предельной теоремой.

Если погрешности ε распределены нормально, то значит, нормальное распределение имеют и y .

Вероятность получить в результате i -го измерения значения в интервале $y_i \div y_i + dy$:

$$f_i dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dy.$$

Функция правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right] dy;$$

логарифмическая функция правдоподобия:

$$l = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 + \text{const};$$

l принимает максимальное значение, если $\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2$ принимает минимальное значение. Это и есть принцип метода наименьших квадратов:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \rightarrow \min,$$

а min значение для положительной величины $Q = 0$. Тогда:

$\tilde{\theta} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ – оценка, полученная методом наименьших

квадратов. Оценка совпадает с оценкой по методу максимального правдоподобия и совпадает с простым выборочным средним.

МНК для прямых неравноточных измерений

Измеряется непосредственно сама величина, интересующая нас, но погрешности разные:

$$y_i = \theta + \varepsilon_i ; E\{\varepsilon_i\} = 0 ; E\{\varepsilon_i^2\} = \sigma_i^2 = \frac{1}{g_i}.$$

Здесь введено понятие «*вес измерения g*». Вес – это величина обратно пропорциональная дисперсии.

Полагаем, что погрешности распределены нормально относительно нуля. Так как измерения прямые, то измеряется непосредственно величина искомого параметра, т.е.:

$$y = \eta(\theta) = \theta.$$

Вероятность получить в результате i -го измерения значение в интервале $y_i \div y_i + dy$ составляет:

$$f_i dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(y_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}\right] dy.$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \theta)^2}{\sigma_i^2} + \text{const} \quad (\text{т.е. не функция от } \theta),$$

l принимает максимальное значение, если

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \theta)^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \min.$$

Таким образом, условие метода наименьших квадратов:

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \theta)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n g_i (y_i - \theta)^2 = \sum_{i=1}^n g_i \varepsilon_i^2 \rightarrow \min.$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i y_i}{\sum_{i=1}^n g_i} - \text{так называемое } \underline{\text{средневзвешенное}} \text{ индивидуаль-$$

ных измерений.

МНК для косвенных измерений (линейный случай)

Интересующие нас величины θ непосредственно не измеряются, а измеряются некие величины $y_i = \eta_i(x_i, \vec{\theta}) + \varepsilon_i \quad i = 1 \dots n$.

Параметров θ может быть несколько: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ ($\vec{\theta}$); x_i – известные величины, определяющие i -й номер эксперимента.

Если η – линейная функция и связана с параметрами так:

$$y_i = \eta(x_i, \vec{\theta}) + \varepsilon_i = x_{i1} \theta_1 + x_{i2} \theta_2 + \dots + x_{ir} \theta_r + \varepsilon_i.$$

Можно определить векторы, состоящие из столбцов:

$$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{Bmatrix}; \quad \vec{\eta} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{Bmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}; \quad \vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix}$$

и матрицу $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1r} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nr} \end{Bmatrix}$.

В матричном виде уравнение $y_i = \eta(x_i, \vec{\theta}) + \varepsilon_i$ можно представить как: $\vec{\eta} = \mathbf{x}\vec{\theta} \Rightarrow \vec{y} = \mathbf{x}\vec{\theta} + \vec{\varepsilon} \Rightarrow \vec{y} - \vec{\varepsilon} - \mathbf{x}\vec{\theta} = 0$.

Эту систему уравнений надо решить относительно θ , используя метод максимального правдоподобия и тот факт, что погрешности

измерений y_i с дисперсиями σ_i подчиняются нормальному распределению, т.е.:

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left[-\frac{(y_i - \eta_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}\right).$$

Функция правдоподобия для n измерений имеет вид:

$$L = \prod_{i=1}^n f(y_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^{-1}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}\right\}.$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$l = \ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi + \ln\left(\prod_{i=1}^n \sigma_i^{-1}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}.$$

Это выражение достигает максимума, когда последнее слагаемое будет минимально, что и соответствует условию МНК:

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i^T \vec{\theta})^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \min.$$

Величину ε_i , используя введенные матричные обозначения, можно записать следующим образом:

$$\vec{y} - \vec{\varepsilon} - \mathbf{X}\vec{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{y} - \mathbf{X}\vec{\theta} \Rightarrow \varepsilon_i = y_i - \mathbf{x}_i^T \vec{\theta}.$$

Введем понятие: **матрица ошибок**:

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{C}_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{Bmatrix}.$$

Обратная ей матрица называется **весовой**:

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{G}_\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \mathbf{g}_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{g}_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

С учетом введенных обозначений для \mathbf{G}_y можно переписать:

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow \min$$

или

$$Q = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x}\bar{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{G}_y (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x}\bar{\boldsymbol{\theta}}) \rightarrow \min.$$

Для получения \min функционала необходимо образовать частные производные Q по θ_i и приравнять их к 0:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} = 0; i = 1 \dots r, \quad \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{x}^T,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}} &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}} (\mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \\ &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{x}\bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x}\bar{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Для получения искомой оценки параметра $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ необходимо подействовать на уравнение оператором $(\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1}$:

$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = -(\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\mathbf{y}}$ – это полученная методом наименьших квадратов оценка для вектора параметров.

Рассмотрим частный случай: когда все измерения равноточные, т.е. $\sigma_i^2 = \sigma^2$ и не зависят от y_i . Тогда веса одинаковы:

$\mathbf{g}_i = g = \frac{1}{\sigma^2}$. Подставим постоянные веса в полученную ранее

оценку для $\tilde{\theta}$. $\tilde{\theta} = -(\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \bar{\mathbf{y}}$ и получим для равнооточных измерений: $\tilde{\theta} = -(\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}$.

Подбор коэффициентов линейной регрессии

Рассмотрим случай подбора коэффициентов линейной регрессии по экспериментальным данным в самом простом случае – для подбора коэффициентов линейной зависимости.

В этом случае нужно подобрать только два коэффициента для определения прямой линии. Пусть известна форма зависимости y от x , т.е. известно, что зависимость можно представить в виде прямой: $y = \theta_1 x + \theta_0$.

Для выявления значений коэффициентов θ_1 и θ_0 проводят ряд экспериментов и получают экспериментальные значения y_1, y_2, \dots, y_n .

Для каждого эксперимента можно записать:

$$y_i = x_{i1} \theta_1 + \theta_0 + \varepsilon_i, \quad i = 1..n,$$

где ε_i – погрешность измерений.

Если измерения равнооточны $D\{\varepsilon_i\} = \sigma^2$, можно сразу написать сумму квадратов отклонений от «истинной» линии, т.е. функционал для метода наименьших квадратов:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - x_{i1} \theta_1 - \theta_0)^2.$$

Затем постараться найти такие θ_1 и θ_0 , чтобы Q было минимально: $Q \rightarrow \min$.

По обычному МНК для нахождения таких $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_0$ можно находить минимум Q , дифференцируя Q по θ_1 и θ_0 , таким образом имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_0} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \theta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_{i1}) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_{i1} (y_i - \theta_0 - \theta_1 x_{i1}) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - n\theta_0 - \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i - \theta_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} - \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 n + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} = \sum_{i=1}^n y_i \\ \theta_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \theta_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 = \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \end{cases}$$

При решении этой системы уравнений получены следующие оценки:

$$\theta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_{i1}\right)^2}{n}}; \quad \theta_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n} - \theta_1 \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_{i1}}{n}\right).$$

Таким образом, получены оценки для двух коэффициентов для прямой линии в случае любого количества проведенных измерений.

Если измерений было всего два (это минимальное количество измерений для оценки двух коэффициентов), то можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = x_{11} \theta_1 + \theta_0 + \varepsilon_1, \\ y_2 = x_{12} \theta_1 + \theta_0 + \varepsilon_2; \end{cases}$$

и ее решением будут являться оценки:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_{11} - x_{12}}, \\ \tilde{\theta}_0 = \frac{(y_1 + y_2) - (x_{11} + x_{12})\theta_1}{2}. \end{cases}$$

Эти оценки совпадают с общей оценкой для любого n .

Можно представить это решение в матричной форме:

$$\begin{cases} y_1 = \theta_0 + x_{11}\theta_1, \\ y_2 = \theta_0 + x_{12}\theta_1. \end{cases}$$

$$x_{10} = 1,$$

$$x_{20} = 1.$$

Матрица $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \end{pmatrix}$, вектор-столбец $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

вектор-строка $\vec{\boldsymbol{\theta}} = (\theta_0, \theta_1)$, искомая оценка: $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \vec{\mathbf{y}}$.

Такая оценка совпадает с данной ранее оценкой для вектора параметров в линейном МНК.

Задача 2.4. Оценить θ для прямых неравноточных измерений.

В этом случае: $y_i = \theta + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, E\{\varepsilon_i\} = 0, g_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & g_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \left[(1, 1 \dots 1) \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times (1, 1 \dots 1) \times \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n g_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n g_i y_i. \end{aligned}$$

Оценка погрешности МНК

Ковариационная матрица (матрица ошибок) выборочных оценок $\bar{\theta}$ для неизвестных θ : $\mathbf{C}_{\bar{\theta}} = \mathbf{G}_{\bar{\theta}}^{-1} = (\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1}$ показывает как влияют погрешности измерений на неизвестные параметры $\bar{\theta}$. Диагональные элементы этой матрицы можно рассматривать как дисперсии, а квадратные корни из этих элементов в качестве “погрешностей измерения” $\bar{\theta}$, хотя $\bar{\theta}$ непосредственно не измеряется.

МНК для косвенных измерений (нелинейный случай)

МНК в нелинейном случае можно свести к линейному при определенных условиях.

Между измеряемыми величинами \bar{y} и неизвестными параметрами $\bar{\theta}$ есть зависимость \bar{f} , т.е. пусть в i -м измерении

$f_i(\bar{\theta}, y_i) = 0$; $i=1 \dots n$, где n – число измерений, $\bar{\theta}(\theta_1 \dots \theta_r)$, r – число параметров. В матричном виде:

$$\bar{\mathbf{f}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$$

Пусть функция f дифференцируема. Выберем точку $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0(\theta_{10}, \theta_{20} \dots \theta_{r0})$. Произведем разложение функции f_i в ряд Тейлора в точке $\bar{\boldsymbol{\theta}}_0$ и рассмотрим только линейные члены:

$$f_i(\vec{\theta}, y_i) = f_i(\vec{\theta}_0, y_i) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \theta_1} \right|_{\vec{\theta}} (\theta_1 - \theta_{10}) + \dots + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \theta_r} \right|_{\vec{\theta}_0} (\theta_r - \theta_{r0}) + \dots$$

Для такого разложения, конечно, нужно выбрать такую точку $\vec{\theta}_0$, чтобы производная в этой точке существовала, и функция не сильно менялась в окрестности этой точки. Функция \vec{f} не должна сильно отличаться от линейной вблизи $\vec{\theta}_0$ и $\vec{\theta}$.

Только в этом случае можно ограничиться линейными членами в разложении в ряд Тейлора.

Введем обозначение для поправки:

$$\vec{\xi} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_0 = \begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_{10} \\ \vdots \\ \theta_r - \theta_{r0} \end{pmatrix}.$$

Введем элементы матрицы \mathbf{x} :

$$x_{ji} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} \right) \Big|_{\vec{\theta}_0} \text{ и элементы } c_i = \overbrace{f_i(\vec{\theta}_0, y_i)}^{\text{идеальное значение}} - \varepsilon_i.$$

Тогда выражение для \vec{f} можно записать в виде::

$$\vec{f} = \mathbf{x}\vec{\xi} + \vec{c} - \vec{\varepsilon}.$$

Величины ξ являются поправками, поэтому, решая последнюю систему уравнений относительно ξ , получаем поправки МНК:

$$\vec{\xi} = -(\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \vec{c}.$$

Практически здесь получен ответ для нелинейного МНК, но он получен не собственно для самого параметра, а для поправки при определении параметра. Сам параметр можно найти следующим образом: $\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\xi}$.

Ковариационная матрица такая же: $\mathbf{G}_{\vec{\xi}}^{-1} = \mathbf{C}_{\vec{\xi}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1}$.

Значение θ_0 фиксировано, поэтому ковариационная матрица $\overline{\boldsymbol{\theta}}_1 = \overline{\boldsymbol{\theta}} + \overline{\boldsymbol{\xi}}$ совпадает с \mathbf{G}_{ξ}^{-1} т. е. $\mathbf{G}_{\overline{\boldsymbol{\theta}}_1}^{-1} = (\mathbf{x}^T \mathbf{G}_y \mathbf{x})^{-1}$.

Найдена ли последняя поправка для параметра? Или надо продолжить процесс нахождения поправок?

Заменив θ_0 на θ_1 , можно повторить все расчеты и получить лучшее приближение для параметра и так далее.

Когда можно остановиться в нахождении поправок для параметра? На этот вопрос ответим ниже.

Свойства оценок, полученных методом наименьших квадратов

В методе полагалось, что функция распределения погрешностей нормальна, а, следовательно, результаты наблюдения также распределены по нормальному закону.

Оценка $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ обладает следующими свойствами:

1) имеет нулевое смещение: $E \{ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i \} = \theta_i ; i = 1 \dots r$;

2) имеет минимальную дисперсию:

$$\sigma^2(\theta_i) = E \{ (\tilde{\theta}_i - \theta_i)^2 \} = \min;$$

3) величина $Q = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{G}_y \boldsymbol{\varepsilon}$ подчиняется χ^2 -распределению с $n-r$ степенями свободы.

Покажем это для простейшего случая прямых неравноточных измерений, когда имеется один параметр $r = 1$:

$$\mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}.$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}, \text{ где } \varepsilon_i \text{ распределено, по предположению, по нор-}$$

мальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_i^2 , поэтому

величина $\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}$ имеет стандартное нормальное распределение.

Значит, сумма $\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}$ подчиняется χ^2 -распределению с $n-1$ степе-

нями свободы.

Применение данного свойства. Если в n измерениях определяется r параметров, то, выбирая (сами!) уровень значимости α , находим из таблицы для χ -квадрат распределения значение $\chi_{1-\alpha, n-r}^2$. Результат подгонки не может быть принят, если полученное из расчета значение функционала $Q = \mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{G}_y \mathbf{\varepsilon} > \chi_{1-\alpha, n-r}^2$.

Величина функционала Q всегда вычисляется в процессе расчета параметра, поэтому в конце надо просто сравнить Q и $\chi_{1-\alpha, n-r}^2$.

Если $Q > \chi_{1-\alpha, n-r}^2$, то продолжим расчеты поправки к параметру. Если $Q < \chi_{1-\alpha, n-r}^2$, то расчеты поправки можно остановить и принять оценку параметра ту, которая получена для данного значения функционала.

Следует отметить еще одно следствие того, что функционал Q подчиняется χ^2 -распределению с $n-r$ степенями свободы, а именно: математическое ожидание Q равно $n-r$.

Пример использования метода наименьших квадратов. Есть шестимодульный детектор нейтронов с анизотропной чувствительностью (рис. 2.4).

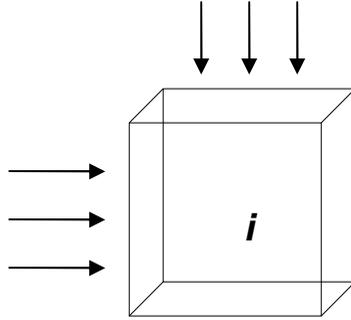


Рис.2.4. Шестимодульный детектор нейтронов

Чувствительность i -го модуля к потоку нейтронов из направления пространства j обозначим A_{ij} . Понятно, что из-за экранировки модулей друг другом такая чувствительность A_{ij} будет разной у разных модулей i к нейтрону, приходящих из направления j .

Счет нейтронов в каждом i -м детекторе равен N_i с погрешностью ε_i . Требуется определить Φ_j число нейтронов, приходящих из каждого j - элемента пространства. $i = 1 \dots 6 ; j = 1 \dots 6$.

Считаем, что

$$N_i = \sum_{j=1}^6 A_{ij} \Phi_j + \varepsilon_i,$$

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \mathbf{C}_N = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_6^2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица или матрица весов:

$$\mathbf{G}_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_6^2} \end{array} \right\}.$$

Так как счет N_i распределен по закону Пуассона, то $\sigma_i^2 = N_i$.

В этом случае оценка числа нейтронов Φ_j , приходящих из каждого j - элемента, определяемая по МНК, составит следующую величину: $\vec{\Phi} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G}_\varepsilon \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{G}_\varepsilon (\vec{\mathbf{N}})$.

Преимуществом применения здесь МНК являются получение ответа сразу после постановки задачи и учет погрешности определения числа нейтронов Φ_j , приходящих из каждого j - элемента пространства: $\mathbf{C}_{\vec{\Phi}} = \mathbf{G}_{\vec{\Phi}}^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G}_\varepsilon \mathbf{A})^{-1}$.

2.4. Погрешности косвенных измерений

Часто результат эксперимента представляет собой некоторую функцию от нескольких случайных величин x_r . Предположим, что каждое наблюдаемое значение x_r принадлежит генеральной совокупности со средним μ_r и среднеквадратичным отклонением σ_r . Теория переноса ошибок позволяет определить значение среднеквадратичного отклонения, которое следует приписать величине $y(x_1 \dots x_r)$.

Для набора m случайных величин x_r ($r=1 \dots m$) – элементы матрицы ошибок (ковариационной матрицы) $\mathbf{D}(x)$ определяются следующим образом:

$$[\mathbf{D}(x)]_{rs} = E \{ (x_r - \mu_r)(x_s - \mu_s) \} = \mathbf{cov}(x_r; x_s),$$

где $r, s = 1 \dots m$. Из определения следует, что $\mathbf{D}(x)$ – симметричная матрица ранга m , диагональные элементы которой представляют собой дисперсии соответствующих величин:

$$[\mathbf{D}(x)]_{rr} = \sigma_r^2,$$

Недиагональные элементы этой матрицы связаны коэффициентом корреляции

$$[\mathbf{D}(x)]_{rs} = \sigma_r \sigma_s \rho_{rs}.$$

Если случайные переменные x_r и x_s независимы, то $\rho_{rs} = 0$

Если все величины некоррелированы, т.е. независимы, то матрица $\mathbf{D}(x)$ будет диагональна.

При обработке результатов измерений часто дисперсии и математические ожидания неизвестны, поэтому приходится использовать оценки $S(x_r)$, $S(x_s)$ и $g(x_r, x_s)$.

Линейные функции. Пусть величины $y_r (r=1 \dots m)$ являются линейными функциями переменных $x_s (s=1 \dots n)$. Это означает, что

$$y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = \sum_{s=1}^n a_{rs}x_s,$$

где a_{rs} – постоянная, представляющая собой элементы матрицы \mathbf{A} .

Можно написать в матричном виде $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$.

Если произведено несколько измерений каждой величины x_s , то оценка величины y_r получается при замене x_s на их средние значения \bar{x}_s .

Пусть $\mathbf{D}(x)$ – матрица ошибок для x_s , тогда матрицей ошибок для функций y_r будет $\mathbf{D}(y) = \mathbf{A}\mathbf{D}(x)\mathbf{A}^T$.

Нелинейные функции. Приведенные выше результаты можно обобщить на случай нелинейных функций $y_r = f_r(x_1 \dots x_n)$.

Предположим, что функция f_r слабо меняется в области, ограниченной среднеквадратичным отклонением от ее среднего значения, или, иными словами, что с точностью до первого порядка ее разложение в ряд Тейлора имеет вид:

$$y_r = f_r(x_1 \dots x_n) = f_r(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) + \sum_{s=1}^n \left\{ (x_s - \bar{x}_s) \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \Big|_{\bar{x}} \right\}.$$

В этом разложении \bar{x}_s – среднее значение x_s , а \bar{x} обозначает набор $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$.

Тогда оценка величины $\widetilde{y}_r = f_r(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ будет функцией средних значений \bar{x} . Обозначим $\mathbf{F}_{rs} = \left. \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \right|_{\bar{x}}$.

Тогда, используя предыдущий результат, можно записать:

$\mathbf{D}(y) = \mathbf{F}\mathbf{D}(x)\mathbf{F}^T$, а элементы матрицы ошибок можно получить из соотношения:

$$[D(y)]_{rs} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \left. \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}} \left. \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}} \right\}.$$

Если случайные переменные $x_1 \dots x_n$ независимы, то $\mathbf{cov}(x_r, x_s) = 0$ и формула упрощается:

$$D(y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i).$$

Полученное выражение позволяет получить формулу для расчета погрешности функции y в зависимости от погрешностей независимых переменных x_i :

$$\sigma(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma^2(x_i)},$$

которая получила название *закон переноса погрешностей*.

В качестве примера рассмотрим погрешность отношения двух величин:

$$y = \frac{x_1}{x_2}; \quad \sigma^2(y) = \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{x}_2^2} \left\{ \frac{s_1^2}{x_1^2} + \frac{s_2^2}{x_2^2} - 2g_{12} \frac{s_1 s_2}{x_1 x_2} \right\}.$$

Вопросы к главе 2

1. Что такое точечные и интервальные оценки параметров распределения?
2. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
3. Приведите интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии.
4. Что такое функция максимального правдоподобия и как с ее помощью получают оценки параметров?
5. Объясните, как применять «байесовское решающее правило».
6. Какой функционал предлагается минимизировать в методе наименьших квадратов и почему?
7. Приведите примеры оценки параметра с использованием метода наименьших квадратов для прямых измерений, произведенных с одинаковой и разной точностью.
8. Как используется метод наименьших квадратов для косвенных измерений?
9. Как используется метод наименьших квадратов для нахождения параметров линейной регрессии?
10. Каковы свойства оценок, полученных методами наименьших квадратов, и как используются эти свойства?
11. Приведите формулу «переноса погрешностей». В каких случаях ею можно пользоваться?

3. Статистические гипотезы

Статистическая гипотеза – это предположение о свойствах случайных величин и их распределений, которые можно проверить статистическими методами по результатам наблюдений.

Например, часто надо знать закон распределения случайной величины. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его A), тогда можно выдвинуть гипотезу: случайная величина распределена по закону A . Эта гипотеза называется *гипотезой о виде закона распределения*.

Бывают случаи, когда закон распределения известен, но неизвестны его параметры. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр θ равен определенному значению θ_0 , то выдвигают гипотезу $\theta = \theta_0$. Эта гипотеза называется *гипотезой о значении параметра распределения*.

Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и многие другие.

Примеры статистических гипотез:

- случайная величина подчиняется закону Пуассона;
- дисперсии двух нормальных случайных чисел равны между собой.

Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статистической, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Наряду с выдвигаемой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу – ее обозначают H_0 .

Конкурирующей называют альтернативную гипотезу, которая противоречит H_0 – ее обозначают H_1 .

Пример: если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание μ нормального распределения равно 10, то альтернативная гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $\mu \neq 10$.

Коротко это записывают так: $H_0: \mu = 10$; $H_1: \mu \neq 10$.

Простой называют гипотезу, которая содержит только одно предположение. Например $H_0: \mu = 10$ – это простая гипотеза.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. $H_1: \mu \neq 10$ – сложная гипотеза.

В итоге проверки статистической гипотезы может быть принято неверное решение. Ошибки могут быть двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет опровергнута правильная гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Последствия этих ошибок могут оказаться весьма различными.

Для проверки статистической гипотезы используют специально подобранную случайную величину, распределение которой известно ($f(x, \theta)$). Такая величина называется **выборочной статистикой** или **статистическим критерием**.

Приведем примеры таких статистик.

При оценке математического ожидания используется знание о среднем \bar{x} , которое распределено по нормальному закону. Если дисперсия σ^2 известна, то статистика $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma^2}$ имеет стандартное нормальное распределение.

При оценке математического ожидания в случае неизвестной

дисперсии величина $\frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S}$ подчиняется распределению

Стьюдента. Следовательно, используется статистический критерий

или статистика $t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S}$.

Наблюдаемым значением критерия называют значение критерия (или статистики), вычисленное с использованием выборочных (экспериментальных) данных.

После выбора критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из

них содержит значения критерия, при которых гипотеза принимается, а другое – при которых гипотеза отвергается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Принцип проверки статистической гипотезы. Если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают. Если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают, т.е. считают, что она не противоречит выборочным (экспериментальным) данным.

Критическими точками (границами) называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают **одностороннюю** (правостороннюю или левостороннюю) и **двустороннюю критические области**.

Как найти критическую область?

Если мы выбрали критерий с известным распределением, то задавшись уровнем значимости α , зная функцию распределения вероятности для критерия K , можем указать такие K_α , что:

1) $P(K > K_\alpha) = \alpha$, где K_α – граница правосторонней критической области;

2) $P(K < K_\alpha) = \alpha$, где K_α – граница левосторонней критической области.

В случае 1) в критической области неправдоподобно большие значения K , в случае 2) в критической области – неправдоподобно малые значения K .

3.1. Проверка гипотез о значении параметра распределения

3.1.1. Ошибки первого и второго рода

Для иллюстрации рассмотрим гипотезу о значении параметра распределения – математического ожидания.

Пусть нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что $\mu = \theta_0$. Так как набор экспериментальных данных всегда ограничен, всегда есть вероятность принятия ошибочного решения. Доля случаев, когда гипотеза будет отвергнута, в то время, когда она верна, называется **уровнем значимости α** . Чаще всего уровень значимости выбирают равным 0,1; 0,05; 0,025 и считают, что ошибка первого рода, т.е. неприятие гипотезы, совершается в доле случаев α (с вероятностью α), в то время как гипотеза H_0 верна.

Ошибка второго рода получается в доле случаев β , т.е. гипотеза H_0 будет принята в то время, как справедлива гипотеза H_1 . $\mu = \theta_1$:

$$\alpha = \int_{K_\alpha}^{\infty} f(K, \theta) dK ; \beta = \int_{-\infty}^{K_\alpha} f(K, \theta_1) dK.$$

Рассмотрим последовательность проверки статистической гипотезы:

- 1) определяют вид критерия;
- 2) задаются уровнем значимости α ;
- 3) находят границы критических областей;
- 4) вычисляют наблюдаемое значение критерия;
- 5) определяют, в какую область попадает наблюдаемое значение критерия: если в критическую – делают вывод о том, что экспериментальные данные не подтверждают гипотезу; если в область принятия – делают вывод о том, что экспериментальные данные не противоречат гипотезе.

Вывод делается с уровнем значимости α .

Простой критерий с уровнем значимости α контролирует лишь ошибки первого рода и не измеряет степень риска, связанного с ошибкой второго рода. Для оценки вероятности совершения ошибки второго рода мы должны так уточнить постановку задачи, чтобы допустить существование альтернативной гипотезы.

Мерой полезности критерия служит **мощность критерия**. Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива альтернативная (конкурирующая) гипотеза.

Мощность критерия обозначают: $\pi = 1 - \beta = \int_{K_\alpha}^{\infty} f(K, \theta_1) dK$.

Чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода. Поясним это с помощью распределения, представленного на рис. 3.1.

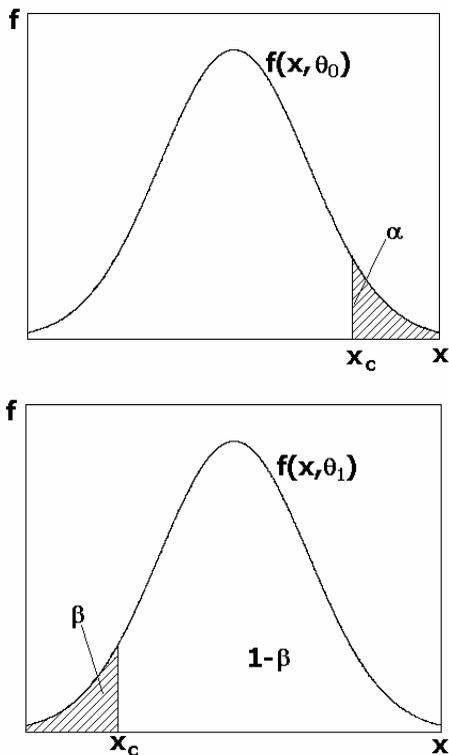


Рис. 3.1 Графическая интерпретация вероятностей совершить ошибку первого и второго рода: в доле случаев α совершается ошибка 1-го рода; в доле случаев β совершается ошибка второго рода; в доле случаев $1 - \beta$ ошибка второго рода не совершается

Приведем несколько задач на построение статистик (величин с известным законом распределения) для проверки гипотез о значении параметра распределения.

3.1.2. Проверка гипотезы о математическом ожидании

Проверка гипотезы о математическом ожидании, если дисперсия известна

Задача 3.1.

Индийский чай расфасовывается в пачки с массой $\mu = 100$ г со стандартным отклонением 0,1 г. Случайная выборка $n = 15$ пачек готовой продукции показала среднюю массу равной $\bar{x} = 100,2$ г. Имеется ли основание для заключения, что фасовочная машина работает без нарушения в настройке?

Решение:

Можно полагать, что распределение массы пачек соответствует нормальному распределению. Нулевая гипотеза состоит в том, что выборочное среднее согласуется с выборкой, взятой из нормальной генеральной совокупности, т.е. $\mu = 100$.

$H_0: \mu = 100$ г.

Альтернативная гипотеза $H_1: \mu \neq 100$ г, т.е. выборка взята из нормального распределения с другим математическим ожиданием.

Из гипотезы H_0 следует, что выборочное распределение среднего тоже нормальное с $\mu = 100$ г и дисперсией $\frac{0,1^2}{15}$ (по центральной предельной теореме).

Выберем обычный уровень значимости $\alpha = 5\%$.

Сначала построим нормальное распределение с $\mu = 100$ г и $\sigma^2 = 0,1^2/15$ (рис.3.2).

Определим критические значения выборочного распределения для 5% уровня значимости. Для этого найдем квантили стандартного нормального распределения, т.е. такие значения, которые ограничат критическую область. Если уровень значимости 5%, то вероятность попадания в критическую область не должна превышать 5%.

Нормальное распределение симметрично, это значит, что имеется две критические области: область слишком маленьких значений и область слишком больших значений. Вероятность попасть в обе области должна быть не более 5% , из-за симметрии распреде-

ления можно считать, что вероятность попасть в одну из областей будет не меньше половины от уровня значимости, т.е. 2,5%. Ищем квантиль нормального распределения для уровня 2,5%.

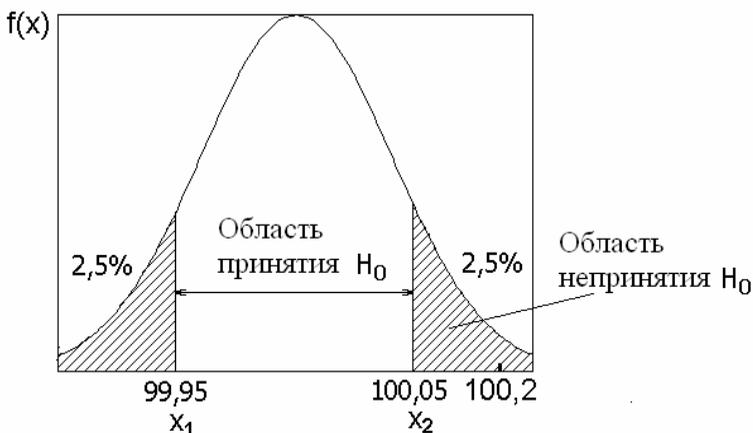


Рис. 3.2. Пример статистического распределения для принятия правильного решения (гипотезы)

Из таблиц можно найти квантили только для стандартного нормального распределения, а реальное распределение массы не стандартное, а имеющее математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Перейти от точек, ограничивающих критическую область в стандартном нормальном распределении к точкам для имеющегося распределения μ и σ можно с помощью замены $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

Тогда: $\Phi(U_p) = P$, $P = 2,5\%$, $U_p = 1,96$, $U_{1-p} = -1,96$.

Найдем значения x_1 и x_2 ,

$$x_2 = \mu + \frac{0,1}{\sqrt{15}} \cdot 1,96 = 100 + 0,05 = 100,05,$$

$$x_1 = \mu - \frac{0,1}{\sqrt{15}} \cdot 1,96 = 100 - 0,05 = 99,95.$$

Нанесем точки x_1 и x_2 на рис. 3.2.

Точки x_1 и x_2 разделили все возможные значения случайной величины на три области:

1) меньше x_1 , первая критическая область для случайной величины. Вероятность попадания в эту область всего 2,5%. Если случайная величина попадает в эту область, то считаем, что это значение маловероятно и поэтому неправдоподобно. Такая область называется областью **неправдоподобно маленьких значений** случайной величины. Так как значения неправдоподобны, говорят, что при попадании значения случайной величины в эту область гипотеза не подтверждается;

2) область от x_1 до x_2 . Вероятность попадания в эту область достаточно большая – 95%. Поэтому, если случайная величина попадает в эту область, то считаем, что такое значение вероятно и поэтому правдоподобно. Такая область называется областью **правдоподобных значений**, и поэтому также называется областью принятия гипотезы;

3) больше x_2 , вторая критическая область для случайной величины. Вероятность попадания в эту область также всего 2,5%. Если случайная величина попадает в эту область, то считаем, что это значение маловероятно и поэтому неправдоподобно. Такая область называется областью **неправдоподобно больших значений** случайной величины. Так как значения неправдоподобны, говорят, что при попадании значения случайной величины в эту область гипотеза не подтверждается.

Теперь нанесем на рис. 3.2 значение выборочного среднего $\bar{x}=100,2$. Значения полученного среднего попадают в область неприятия гипотезы H_0 .

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать следующий вывод: с уровнем значимости 5% полученные экспериментальные данные не подтверждают гипотезу H_0 о том, что значение математического ожидания равно 100 г.

К сожалению, предложенная задача часто имеет теоретический характер. Так как в практике заранее значение дисперсии бывает известно крайне редко. Гораздо чаще значение дисперсии оценивается по результатам того же эксперимента. Рассмотрим такую задачу.

**Проверка гипотезы для нормально распределенных величин
при неизвестной дисперсии**

Задача 3.2. Фирма «Светлана» производит электрические лампочки. Для определенного типа лампочек установлен нормативный срок использования (ресурс) $\mu = 1500$ ч. Для испытания новой партии была взята выборка $n = 10$ лампочек. Среднее время пользования лампочкой в выборке $\bar{x} = 1410$ ч со среднеквадратичным выборочным отклонением $S = 90$ часов. Свидетельствуют ли эти данные о том, что ожидаемый срок использования изменился по сравнению с нормативно установленным ресурсом, равным 1500 ч?

Решение.

Нулевая гипотеза состоит в предположении о том, что выборка взята из генеральной совокупности со средним временем использования лампочки 1500 ч.

$H_0: \mu = 1500$ ч.

Гипотеза альтернативная состоит в том, что математическое ожидание времени использования лампочки не равно 1500ч.: $\mu \neq 1500$ ч.

Из гипотезы H_1 следует, что мы будем использовать двухсторонний критерий. Кроме того, из гипотезы H_0 следует, что выборочное среднее имеет нормальное распределение со средним $\mu = 1500$ ч и дисперсию $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right)$ ч – по центральной предельной теореме.

Построим выборочную статистику, т.е. такую величину, которая имела бы известное распределение.

Величина $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ имела бы нормальное распределение, но у

нас есть только выборочная дисперсия S , тогда мы можем построить только следующую статистику:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{S\sqrt{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\overbrace{(\bar{x} - \mu)}^{\sim N}\sqrt{n-1}}{\underbrace{S}_{\sim \chi^2}}$$

Как было показано ранее (см. распределение Стьюдента), величина t подчиняется распределению Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы.

Посчитаем значение нашей статистики из экспериментальных данных: $t_0 = \frac{(1410 - 1500)}{90 / \sqrt{10 - 1}} = -3,0$.

Выберем уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Применим такие же рассуждения, как и в предыдущей задаче.

Найдем квантили распределения Стьюдента, т.е. такие значения, которые ограничат критическую область. Если уровень значимости 5%, то вероятность попадания в критическую область не должна превышать 5%. Распределение Стьюдента симметрично, это значит, что имеются две критические области: область слишком маленьких значений и область слишком больших значений. Вероятность попасть в обе области должна быть 5%. Из-за симметрии распределения можно считать, что вероятность попасть в одну из областей будет не меньше половины от уровня значимости, т.е. 2,5%. Ищем квантиль распределения Стьюдента для уровня 2,5%.

Внесем эти значения на рис. 3.3.

Точки $-x_c$ и x_c разделили все возможные значения случайной величины на три области:

1) меньше $-x_c$ первая критическая область для случайной величины. Вероятность попадания в эту область всего 2,5%. Если случайная величина попадает в эту область, то считаем, что это значение маловероятно и поэтому неправдоподобно. Такая область называется область неправдоподобно маленьких значений случайной величины. Так как значения неправдоподобны, говорят, что при попадании значения случайной величины в эту область, гипотеза не подтверждается;

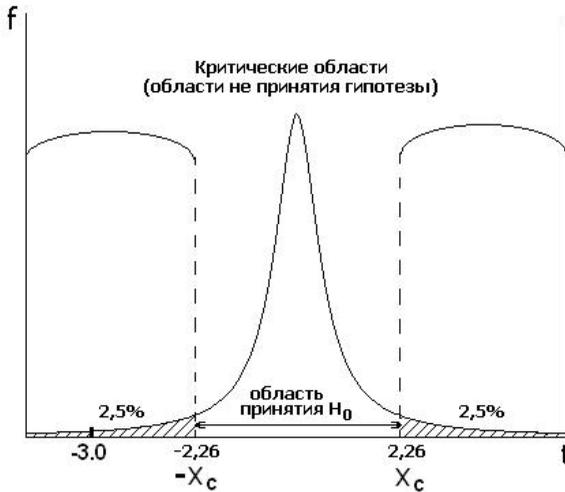


Рис 3.3. Области принятия и неприятия гипотезы

2) область от $-x_c$ до x_c . Вероятность попадания в эту область достаточно большая 95%. Поэтому, если случайная величина попадает в эту область, то считаем что такое значение вероятно и поэтому правдоподобно. Такая область называется областью правдоподобных значений и поэтому также называется областью принятия гипотезы;

3) больше x_c – вторая критическая область для случайной величины. Вероятность попадания в эту область 2,5%. Если случайная величина попадает в эту область, то считаем, что это значение маловероятно и поэтому неправдоподобно. Такая область называется областью неправдоподобно больших значений случайной величины. Так как значения неправдоподобны, говорят, что при попадании значения случайной величины в эту область, гипотеза не подтверждается.

Отметим на рис. 3.3 точку со значением статистики при $t = -3,0$. Это значение статистики $t = -3,0$ лежит за пределами области принятия гипотезы. Выборочные данные не подтверждают нулевую гипотезу.

Вероятность появления выборочного среднего, равного 1410 ч или менее, из-за случайности отбора при выборке размером 10 единиц, взятой из нормальной генеральной совокупности с $\mu = 1500$, меньше, чем 5 %. С вероятностью 95 % гипотеза не подтверждается, и, значит, ресурс лампочек изменился.

3.1.3. Критерий Неймана – Пирсона для проверки простых гипотез о значении параметра

Проверяем гипотезы о значении параметра распределения. Пусть есть гипотеза H_0 . Она состоит в том, что для случайной величины x , которая имеет функцию плотности распределения $f(x)$ – значение параметра этой функции равно θ_0 .

Альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что значение параметра равно θ_1 .

Нужен критерий для проверки гипотезы H_0 по сравнению с альтернативной гипотезой H_1 .

Полагаем, что функция плотности вероятности случайной величины $f(x/\theta)$ непрерывна и непрерывно отношение функций

$$\frac{f(x/\theta_1)}{f(x/\theta_0)}$$

Тогда можно найти максимальное значение мощности критерия $1 - \beta$. Для критической области ω (какая она, выясним позже)

$$1 - \beta = \int_{\omega} f(x/\theta_1) dx = \int_{\omega} \frac{f(x/\theta_1)}{f(x/\theta_0)} f(x/\theta_0) dx = E_{\omega} \left\{ \frac{f(x/\theta_1)}{f(x/\theta_0)} \right\}_{\theta=\theta_0}$$

Мощность критерия $1 - \beta$ будет максимальна тогда, когда ω – такая

часть пространства, где отношение $\frac{f(x/\theta_1)}{f(x/\theta_0)}$ максимально.

Поэтому наилучшей критической областью является та, которая состоит из точек, удовлетворяющих неравенству:

$$\frac{f(x/\theta_1)}{f(x/\theta_0)} \geq C_{\alpha}$$

Это отношение тоже называют функцией правдоподобия l , которая зависит от (x, θ_0, θ_1) .

C_α выбирают так, чтобы удовлетворить неравенству:

$$\alpha = \int_{x_c}^{\infty} f(x / \theta_0) dx.$$

Гипотеза $H_0: f(x/\theta_0)$ принимается, если $l(x, \theta_0, \theta_1) \leq C_\alpha$. Гипотеза $H_1: f(x/\theta_1)$ принимается, если $l(x, \theta_0, \theta_1) > C_\alpha$.

Если отношение $l(x, \theta_0, \theta_1)$ имеет известный закон распределения, тогда можно из таблиц и по заданному уровню значимости найти процентные точки такого известного распределения. Практически $l(x, \theta_0, \theta_1)$ является квантилем такого распределения для уровня α . Вычислив из имеющихся после эксперимента данных отношение и сравнив с C_α , можно будет делать вывод о приемлемости гипотезы H_0 или H_1 .

Этот критерий называется критерием Неймана – Пирсона. Он является наиболее мощным для проверки двух простых гипотез.

Пример на критерий Неймана – Пирсона. Предположим, что измеряется некоторая величина. Например, плотность потока x . Через некоторое время в аппаратуру внесли какие-то изменения.

Необходимо знать, увеличилась ли плотность потока после внесения в аппаратуру модернизаций. Чтобы ответить на этот вопрос, измерим N раз плотность потока и вычислим среднее \bar{x} . Полагаем, что погрешности распределены по нормальному закону с дисперсией σ^2 .

На языке статистики гипотезы H_0 и H_1 можно сформулировать следующим образом:

гипотеза H_0 состоит в том, что математическое ожидание осталось прежним: $H_0: \mu = \mu_0$, т.е. распределение $N(\mu_0, \sigma^2)$;

гипотеза H_1 состоит в том, что математическое ожидание изменилось: $H_1: \mu = \mu_1$, т.е. распределение $N(\mu_1, \sigma^2)$.

Надо проверить эти гипотезы. Наиболее мощный критерий по лемме Неймана – Пирсона основан на следующей статистике:

$$t = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_1)^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_0)^2\right]}.$$

Тогда $\sigma^2 \ln t = \frac{1}{2} N(\mu_0^2 - \mu_1^2) + (\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=1}^N x_i.$

Функция t является монотонной функцией переменной Z :

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{N}}.$$

Переменная Z распределена по нормальному закону $N(\mu_1 - \mu_0, 1)$, если верна гипотеза H_1 , или по закону $N(0, 1)$ – если верна H_0 .

По критерию Неймана – Пирсона мы должны найти такую область X , где Z было бы больше некоего значения, назовем его λ_α :

$\{X, Z > \lambda_\alpha\}$, где α – уровень значимости.

Мы вводим как бы обрезание по Z , а λ_α – есть α -точка стандартного нормального распределения, такая что:

$$P(Z > \lambda_\alpha |_{\mu=\mu_0}) = \alpha.$$

Для приведения к табличному интегралу удобно получить величину $1 - \alpha$: для нормального распределения:

$$P(Z < \lambda_\alpha |_{\mu=\mu_0}) = 1 - \alpha = \Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{N}}\right) = \Phi_{1-\alpha} \Rightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}} = U_{1-\alpha}$$

– квантиль нормального распределения уровня $1-\alpha$.

Найдем критическую область для выборочного среднего

$$\bar{x}_{\text{кр}} = \mu_0 + U_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

Если принять $\alpha = 0,05$, то квантиль уровня $U_{1-\alpha} = U_{0,95} = 1,645$ и нижняя граница критического множества составит

$$\bar{x}_{\text{кр.}} = \mu_0 + 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

т.е. при гипотезе $H_0 \rightarrow \bar{x}$ должно быть расположено слева от значения $\mu_0 + 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

Таким образом, при попадании результатов измерений в область $x < \mu_0 - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ или в область $x > \mu_0 + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ говорят, что экспериментальные данные не подтвердили гипотезу о том, что математическое ожидание не изменилось.

Если значение \bar{x} , рассчитанное из экспериментальных данных, попадает в область от $\mu_0 - u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ до $\mu_0 + u_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то говорят, что экспериментальные данные подтверждают гипотезу о том, что математическое ожидание не изменилось.

Рассмотрим мощность этого критерия. По определению мощность: $1-\beta = P(Z > \lambda_\alpha)$. Если значения x_i распределены по закону $N(\mu, \sigma^2)$, а переменная Z распределена по закону $N(d, 1)$, где $d = \frac{\sqrt{N}}{\sigma}(\mu_1 - \mu_0)$. Тогда мощность критерия $(1 - \beta)$:

$$\begin{aligned} P(Z > \lambda_\alpha) &= 1 - \beta = \int_{\lambda_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(Z-d)^2}{2}\right] dz = \\ &= \Phi(d - \lambda_\alpha) = \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(\mu_1 - \mu_0) - U_\alpha\right). \end{aligned}$$

Таким образом, мощность критерия $(1 - \beta)$ является возрастающей функцией $(\mu_1 - \mu_0)$ и N .

3.1.4. Односторонний критерий для проверки простой гипотезы против сложной гипотезы о среднем значении

Не существует наиболее мощного критерия при сравнении простой и сложной гипотезы. Рассмотрим нормально распре-

ленную случайную величину x , имеющую неизвестное математическое ожидание μ (дисперсия σ^2 – известна) $N(\mu, \sigma^2)$. Пусть производится одно измерение.

Проверяется гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$ против сложной альтернативы $H_1: \mu > \mu_0$. Сначала считаем, что альтернатива имеет лишь одно значение $\mu = \mu_1$, где $\mu_1 > \mu_0$. Проверочная статистика строится в виде отношения правдоподобия, как и в предыдущей задаче. При определенных значениях μ_1 , μ_0 и известной дисперсии σ^2 отношение

$$\frac{f_1}{f_0} = \exp \left\{ \frac{x(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma^2} - \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2\sigma^2} \right\}$$

тоже имеет определенное значение. Тогда проверочная статистика приобретает вид: $\text{sehr}(ax)$. Константы c и a положительны, поэтому проверочная статистика – монотонная функция x .

Двигаясь по оси x от $+\infty$ до границы критической области x_c , определим уровень значимости:

$$P(x > x_c |_{\mu=\mu_0}) = \alpha.$$

Удобнее записать выражение для $1 - \alpha$, тогда

$$P(x < x_c |_{\mu=\mu_0}) = \Phi \left(\frac{x_c - \mu}{\sigma} \right) = 1 - \alpha = \Phi(U_{1-\alpha}).$$

Откуда следует, что возможно определить границу критической области x_c :

$$U_{1-\alpha} = \frac{x_c - \mu}{\sigma} \quad \text{или} \quad x_c = \mu_0 + U_{1-\alpha} \sigma.$$

Из этого видно, что критическая область не зависит от μ_1 и остается одной и той же при любых $\mu > \mu_0$. Значит можно применять такой критерий и для проверки простой гипотезы против сложной.

Мощность критерия $1 - \beta$ равна вероятности того, что отвергается гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$, если верна альтернатива $H_1: \mu = \mu_1$, или же вероятности того, что при альтернативе H_1 результат измерения попадет в критическую область $[x_c; +\infty)$:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu_1) &= P(x > x_c |_{\mu=\mu_1}) = 1 - P(x < x_c |_{\mu=\mu_1}) = 1 - \Phi\left(\frac{x_c - \mu_1}{\sigma}\right) = \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + U_{1-\alpha}\sigma - \mu_1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(U_{1-\alpha} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}\right) = \\
&= \Phi\left(-U_{1-\alpha} - \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma}\right) = \Phi\left(U_\alpha + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Если принять уровень значимости $\alpha = 0,05$ и $U_{1-\alpha} = U_{0,95} = 1,645$, то нижняя граница критического множества $x_c = \mu_0 + 1,645\sigma$, т.е. при гипотезе H_0 граница x_c расположена справа от математического ожидания на $1,645\sigma$.

3.1.5. Критерий отношения правдоподобия для проверки сложных гипотез

В теории Неймана – Пирсона можно полагать параметр $\vec{\theta}$ векторной величиной, т.е. в r -мерном пространстве $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$. Наиболее мощный критерий, в этом случае, также задается отношением правдоподобия.

Обозначим Ω и ω множества, определяемые гипотезами H_1 и H_0 .

Обозначим $L(x/\omega)$ наибольшее значение функции правдоподобия при $\vec{\theta} \in \omega$ и $L(x/\Omega)$ – при $\vec{\theta} \in \Omega$. Составляем проверочную статистику λ для проверки H_0 из соотношений $L(x/\omega)$ и $L(x/\Omega)$. Представим ее в следующем виде: $\lambda = \frac{L(x/\omega)}{L(x/\Omega)}$. Она будет зависеть

только от значений случайной величины x .

Статистика λ не зависит от неизвестных параметров и используется для проверки H_0 .

Она не может быть меньше 0, так как представляет собой отношение положительных чисел, и не может быть больше 1, так как параметрическое множество Ω включает в себя ω и, следовательно, максимальное значение функции $L(x/\omega)$ не может быть

больше $L(x/\Omega)$, т.е. статистика λ заключена в интервале между 0 и 1: $0 \leq \lambda \leq 1$.

Если λ меньше некоторого критического значения λ_c , то гипотезу H_0 отвергают.

Значение λ_c выбирают из условия, что уровень значимости критерия равен α .

3.2. Критерии для проверки гипотез о виде закона распределения

3.2.1. Критерий согласия χ^2 (Пирсона)

Полигоны распределения и гистограммы экспериментальных данных

Прежде чем перейти к рассмотрению критериев для проверки гипотез о виде закона распределения, рассмотрим один из методов предоставления экспериментальных данных, а именно – построение гистограммы. Представление экспериментальных данных в виде гистограммы – удобный способ отобразить графически зависимость частоты проявления того или иного значения (а значит и вероятность такого появления) от значения экспериментальной величины. Ранее экспериментальные значения мы предоставляли в виде ряда x_1, x_2, \dots, x_n .

Если в этом ряду значения расположены так, что

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

то такой ряд называется вариационным.

Если n (число проведенных экспериментов) велико, а набор возможных экспериментальных значений ограничен, то в вариационном ряду будут повторяющиеся значения. Таким образом, каждому значению случайной величины можно поставить в соответствие количество ее повторений в вариационном ряду.

Если это число попаданий поделим на общее число экспериментов, то получим частоту попадания случайной величины в это значение. И тогда каждому значению случайной величины можно поставить в соответствие частоту появления в вариационном ряду такого значения.

Если рассматриваемая величина дискретная, то описанные зависимости можно отложить на графике, который называется полигон распределения (рис.3.4). На нем по оси абсцисс откладывают значения случайной величины, а по оси ординат – частоты проявления случайной величины в вариационном ряду, т.е. в экспериментальных значениях. Такой график строится для дискретных величин, и когда набор значений этих величин не слишком велик.

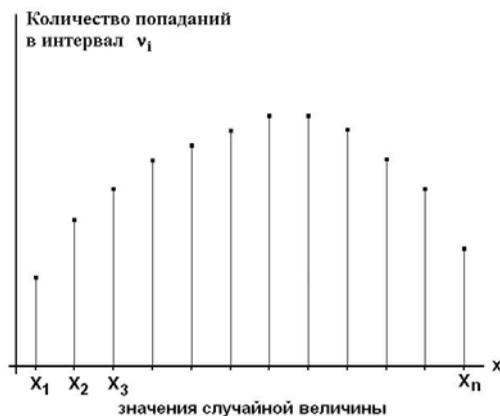


Рис 3.4. График полигона распределения

Если же величина имеет большой набор возможных значений, или же она непрерывная, то график зависимости частоты проявления от значения величины строят иначе. В этом случае все пространство возможных значений случайной величины разбивают на r интервалов. Для каждого такого интервала можно посчитать V_i – число попаданий случайной величины в этот интервал или, разделив на общее число экспериментальных данных $\frac{V_i}{n}$, частоту

попадания в интервал. По оси абсцисс будем откладывать интервалы (т.е. отрезки), на которые мы договорились разбить значения случайной величины. Над каждым отрезком оси абсцисс построим прямоугольник, высота которого равна частоте появления значений в этом интервале. Таким способом строится гистограмма для непрерывной случайной величины (рис.3.5).

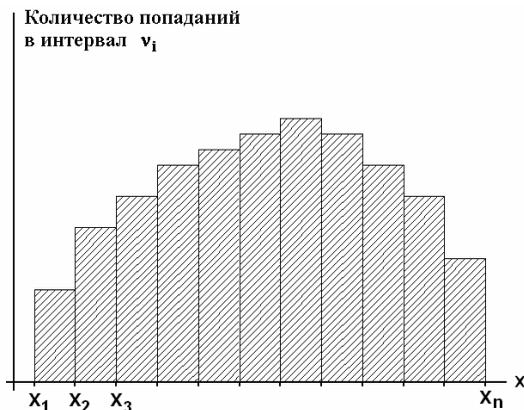


Рис 3.5. График-гистограмма экспериментальных данных

Рассмотрим, как представление экспериментальных данных в виде гистограммы поможет в анализе гипотезы о виде закона распределения случайной величины.

Методика проверки гипотезы по критерию

Критерий χ^2 проверки гипотез о виде закона распределения выглядит следующим образом.

Сначала представляют экспериментальные данные в виде гистограммы (рис.3.6.). Затем пространство значений исследуемой случайной величины S разбивают на r интервалов $S_1, S_2 \dots S_r$. Как и на какие интервалы надо разбивать все пространство поговорим чуть позже. Однако понятно, что для наглядности отображения зависимости частоты появления от значения случайной величины интервалов должно быть много, и их длины должны быть одинаковы. К сожалению, экспериментатор не всегда может построить хорошую гистограмму в таких условиях. У него может не быть большого количества данных в интервалах, где частоты проявления малы. А вот в некоторых интервалах частоты могут быть очень велики. Поэтому надо понимать, что графическое представление будет идеальным при одном разбиении, а вот анализ данных можно и нужно делать при другом разбиении.

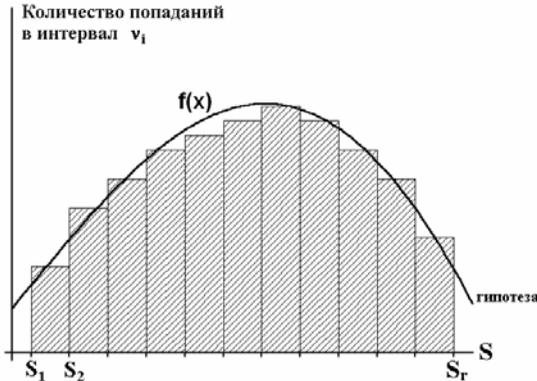


Рис 3.6. Гистограмма экспериментальных данных и гипотетическое распределение для критерия согласия χ^2

Гистограмме сопоставляется некоторая конкретная вероятностная функция, которая наилучшим образом (по мнению экспериментатора) описывает экспериментальные данные $f(x)$. Это – гипотеза. Если сопоставляется функция, то экспериментатор должен знать функцию гипотетического распределения. Раз есть функция плотности вероятности, то можно посчитать гипотетическую вероятность попадания случайной величины в тот или иной интервал.

Гипотетическая вероятность внутри интервалов принимает значение $p_i(S_i)$. По правилам нормировки:

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1, p_i > 0.$$

С другой стороны, из экспериментальных данных каждому интервалу S_i соответствует v_i выборочных значений, а так как всего экспериментов было n , то:

$$\sum_{i=1}^r v_i = n.$$

Для каждого интервала существует частота попадания v_i в этот интервал, это, собственно, и отображено на гистограмме. Частоту попадания v_i в интервал с точки зрения теории вероятности можно

трактовать как экспериментальную вероятность попадания в интервал. Такие вероятности будут нормированы, так как

$$\sum_{i=1}^r \frac{v_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

Значит, любому интервалу S_i можно поставить в соответствие v_i/n – экспериментальную вероятность попадания в интервал и гипотетическую вероятность p_i .

В соответствии с общим принципом метода наименьших квадратов в качестве меры расхождения между гипотетической и экспериментальной вероятностями выбираем величину Z , равную:

$$Z = \sum_{i=1}^r c_i \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2.$$

При этом коэффициенты c_i , строго говоря, произвольны. Однако ясно, что c_i должны содержать учет абсолютных величин p_i . Поэтому вводят веса $c_i = n/p_i$.

Пирсон доказал, что если $c_i = n/p_i$, то величина

$$Z = n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{v_i}{np_i} - n$$

обладает очень важным свойством – подчиняется распределению χ^2 . При этом χ^2 имеет $r-1$ степень свободы.

Однако для расчета часто необходимо определить сначала параметры гипотетического распределения. Такие параметры рассчитываются из тех же самых экспериментальных данных. Использование экспериментальных данных для расчета параметров распределения понижает число степеней свободы k на число параметров l .

При рассмотрении нормального распределения необходимо рассчитать μ и D , следовательно $l = 2$. Отсюда $k = r - l - 1 = r - 3$.

При рассмотрении распределения Пуассона необходимо рассмотреть только один параметр, и тогда: $k = r - l - 1 = r - 2$.

Так Пирсон доказал, что Z может быть статистикой, т.е. величиной, построенной из экспериментальных данных, но имеющей

известное распределение. В этом случае критерий проверки гипотез можно сформулировать следующим образом.

Проверка гипотезы H_0 о том, что экспериментальные данные имеют выбранное теоретическое распределение при уровне значимости α , равносильна построению критической области, определяемой вероятностью:

$$P(Z \geq \chi_{1-\alpha, k}^2) = \int_{\chi_{1-\alpha, k}^2}^{\infty} P_k(u) du = \alpha.$$

Если значение $Z = \chi^2$ в результате опытов превосходит $\chi_{1-\alpha, k}^2$ или равно $\chi_{1-\alpha, k}^2$, т.е. $Z \geq \chi_{1-\alpha, k}^2$, то считают, что гипотеза не согласуется с экспериментальными данными. $\chi_{1-\alpha, k}^2$ выбирается из таблиц процентных точек распределения χ_k^2 . Выбор уровня значимости в большинстве случаев, как и при проверке других гипотез, есть произвол экспериментатора.

Пошаговая процедура проверки гипотезы о виде закона распределения по критерию χ^2

Рассмотрим пошаговую процедуру проверки по критерию χ^2 .

1. Выборку объема n разбивают на r интервалов. При этом необходимо, чтобы число интервалов r было больше 7, а каждый интервал содержал бы не меньше 5 значений; при этом длина интервалов может быть различной; количество значений в каждом интервале должно быть примерно одинаково.

2. На основе выборочных данных выбирают гипотетическую функцию.

3. Оценивают ее параметры (и их количество l).

4. Рассчитывают число степеней свободы $k = r - l - 1$.

5. Выбирают уровень значимости α .

6. Из таблицы находят $\chi_{1-\alpha, k}^2$.

7. Для каждого интервала вычисляют число попаданий v_i .

8. Для каждого интервала вычисляют гипотетическую вероятность p_i .

9. Вычисляют $Z = n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2$,

10. Производят сравнение: если $Z < \chi_{1-\alpha, k}^2$ – гипотеза принимается, если $Z \geq \chi_{1-\alpha, k}^2$ – гипотеза отвергается.

Величину Z можно представить в другом виде (более удобном для вычислений). С учетом того, что

$$\sum_{i=1}^r v_i = n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1,$$

$$\begin{aligned} Z = \chi^2 &= n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i^2}{n^2} - \frac{2v_i}{n} p_i + p_i^2 \right) = \\ &= n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} \frac{v_i^2}{n^2} - n \sum_{i=1}^r \frac{2v_i p_i}{n p_i} + n \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} p_i^2 = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{p_i n} - 2 \sum_{i=1}^r v_i + \\ &+ n \sum_{i=1}^r p_i = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{p_i n} - 2n + n = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{p_i n} - n. \end{aligned}$$

Таким образом, $Z = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{p_i n} - n$.

Задачи на критерий Пирсона

Задача 3.3 (первая задача на критерий χ^2 , приведена в книге Д. Худсона «Статистика для физиков»)

Двадцать лет собирались сведения о количестве кавалеристов прусской армии, погибших в результате гибели под ними коня. Эти данные основывались на ежегодных докладах десяти армейских корпусов, представленных за 20 лет, что в целом составляет 200 донесений. Задача – проверить гипотезу, что данные о гибели кавалеристов описываются распределением Пуассона (табл. 3.1). Применим приведенный выше алгоритм.

1. Разбиваем данные на интервалы (табл. 3.2).
2. Получаем оценки параметров распределения.

Таблица 3.1

Число погибших x	0	1	2	3	4	5	6	всего
Число донесений v_i с указанием x погибших	109	65	22	3	1	0	0	200
Ожидаемое число донесений p_i/n по распределению Пуассона	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6	0,07	0,01	200

Таблица 3.2

x	0	1	2	≥ 3
v_i	109	65	22	4
$p_i/n/p_i$	108,7/0,543	66,3/0,33	20,2/0,10	4,8/0,024

Распределение Пуассона $p_k = \frac{N^k}{k!} e^{-N}$ для k -событий, где N

– математическое ожидание.

Нужен один параметр – N , его эмпирическим аналогом будет выборочное среднее.

3. Находим выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum v_i x_i =$$

$$= \frac{1}{200} \sum (0 \cdot 109 + 65 + 44 + 9 + 4) = 0,61 \text{ (кавалериста),}$$

$k = r - l - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ – рассчитанное число степеней свободы.

4. Тогда для гипотетических np_k получим значения:

$np_k = \frac{0,61^k e^{-0,61}}{k!} 200$, которые приведены в табл. 3.1.

5. Устанавливаем уровень значимости $\alpha = 0,05$. Находим по таблице $\chi^2_{0,95,2} = 5,991$.

6. Вычисляем $Z = \chi^2_{\text{эксп}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \frac{v_i^2}{np_i} - n &= n \sum_{i=1}^4 \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{np_i} (v_i - np_i)^2 = \frac{1}{108,7} 0,3^2 + \\ &+ \frac{1,3^2}{66,3} + \frac{1,8^2}{20,2} + \frac{0,8^2}{4,8} = 0,32. \end{aligned}$$

7. Производим сравнение $\chi^2_{\text{эксп}}(0,32) < \chi^2_{\text{теорит}}(5,991)$.

8. Делаем вывод:

С уровнем значимости 5% (или с доверительной вероятностью 95%) экспериментальные данные не опровергают гипотезу о том, что число погибших распределено по закону Пуассона.

Задача 3.4 (вторая задача на критерий χ^2)

Условие. Произведено 23 измерения случайной величины x . Проверить с помощью критерия χ^2 согласие наблюдений с законом нормального распределения. Результаты измерений: 269, 266, 275, 280, 297, 300, 331, 300, 281, 328, 306, 296, 293, 299, 299, 298, 309, 324, 298, 308, 312, 290, 309.

Решение. Упорядочим экспериментальные данные, т.е. построим вариационный ряд, где $x_1 < x_2 \dots < x_{23}$, и разобьем все пространство возможных значений на $r = 9$ интервалов, помеченных скобками. Получим (266, 269, 275), (280, 281), (290, 293, 296), (297, 298, 298), (299, 299, 300, 300), (306, 308), (309, 309, 312), (324, 328), (331).

Для каждого интервала посчитаем экспериментальную вероятность попадания в интервал (частота попадания в интервал – v_i , поделенное на общее количество экспериментов – $n=23$) и гипотетическую вероятность попадания в рассматриваемый интервал.

Данные и результаты задачи приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>x</i>	$x \leq 275$	275 $<x \leq$ 281	281 $<x \leq$ 296	296 $<x \leq$ 298	298 $<x \leq$ 300	300 $<x \leq$ 308	308 $<x \leq$ 312	312 $<x \leq$ 328	$x > 328$
v_i	3	2	3	3	4	2	3	2	1
v_i/n	0,13	0,09	0,13	0,13	0,17	0,09	0,13	0,09	0,04
p_i	0,09	0,07	0,29	0,04	0,04	0,17	0,08	0,18	0,04
$v_i/n - p_i$	0,04	0,02	0,16	0,09	0,13	0,08	0,05	0,09	0,00

Гипотетическую вероятность (попадания) в интервал ищем, исходя из предположения о том, что распределение нормальное, т.е.:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Сначала надо найти неизвестные параметры: математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Так как параметры неизвестны, то воспользуемся их эмпирическими аналогами: арифметическим средним \bar{x} и выборочной дисперсией S^2 соответственно.

Арифметическое среднее найдем по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} x_i = 298,6,$$

а выборочную дисперсию по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{23} (x_i - 298,6)^2 = 289,34.$$

Среднее квадратичное отклонение при этом:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{289,34} = 17,01.$$

Далее, для нормального распределения надо найти вероятность попадания в заданный интервал. В соответствии с определением функции распределения:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = p_b$$

Значения можно посчитать при помощи пакета математических функций или взять из таблиц. Но неизвестны значения $F(b)$ и $F(a)$, а известны из таблиц значения $\Phi(b)$ и $\Phi(a)$ для стандартного нормального распределения, где

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для того чтобы воспользоваться знанием о $\Phi(u)$, сделаем перенос $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$, а в наших обозначениях $u = \frac{x - \bar{x}}{S}$.

Таким образом, для того чтобы найти гипотетическую вероятность попадания в первый интервал $x \leq 275$, сделаем перенос

$$u = \frac{275 - 298,6}{17,01} = -1,38.$$

Из таблицы $\Phi(1,38) = 0,91$. По свойству $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ можно найти $\Phi(-1,38) = 0,09$, значит $P(x \leq 275) = 0,09$.

Для последующих интервалов, действуя аналогично, получаем:

$$\begin{aligned} P(a < x < b) &= F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a - \bar{x}}{S}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{b - 298,6}{17,01}\right) - \Phi\left(\frac{a - 298,6}{17,01}\right). \end{aligned}$$

Полученные значения приведены в табл. 3.3.

Произведем сравнение гипотетических и экспериментальных вероятностей, т.е. рассмотрим разность $p_i - \frac{v_i}{n}$. Полученные значения приведены также табл. 3.4.

$$\text{Посчитаем значение величины } Z = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \left(\frac{v_i}{n} - p_i \right) = 13,8.$$

Определим количество степеней свободы $k = r - l - 1 = 9 - 2 = 6$. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 2,5\%$. Найдем из таблицы величину $\chi_{0,975;6}^2 = 14,45$.

Сравниваем табличное значение и значение Z , полученное из экспериментальных данных:

$$Z < \chi_{1-\alpha,6}^2, \text{ т.к. } 13,8 < 14,45.$$

На основании этого неравенства можно утверждать, что экспериментальные данные с уровнем значимости 2,5% не противоречат гипотезе о нормальном распределении.

3.2.2. Критерий согласия Колмогорова

Построение экспериментальной функции распределения

Выводы при проверке гипотезы о виде закона распределения можно делать не только на основании сравнения функций плотности распределения, но и на основании сравнения значений другой характеристической функции, а именно — функции распределения. На сравнении значений функции распределения основаны два критерия, рассматриваемых ниже: это критерий Колмогорова и критерий Мизеса.

Итак, будем сравнивать значения гипотетической функции распределения, т.е. такой, которая в представлении экспериментатора наилучшим образом соответствует набору экспериментальных данных, и значения функции распределения, которые получены из эксперимента.

Сначала попытаемся представить, как из ряда экспериментальных значений можно построить экспериментальную функцию распределения.

Ряд экспериментальных значений представляют в виде вариационного ряда, т.е.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

тогда экспериментальную функцию распределения $F(x)$ по определению можно представить следующим образом:

$F(x)$ по определению – вероятность того, что случайная величина меньше x .

Как можно оценить на основании экспериментальных данных вероятность того, что случайная величина будет меньше x_1 ? Мы знаем, что x_1 – наименьшее значение в выборке, и, следовательно-

но, в эксперименте получилось, что вероятность принять значения меньше x_1 равно 0.

Следовательно, $F(x)=0$ при $x < x_1$.

Какова вероятность, что случайная величина будет меньше чем x_2 ? Из вариационного ряда видно, что случайная величина приняла один раз значение меньше чем x_2 . Значит, такая вероятность равна $1/n$ и $F(x)=1/n$ при $x < x_2$.

Какова вероятность, что случайная величина будет меньше чем x_3 ? Из вариационного ряда видно, что случайная величина приняла два раза значение меньше чем x_3 . Значит, такая вероятность равна $2/n$ и $F(x)=2/n$ при $x < x_3$.

Обобщим полученные значения для любых x .

Когда вариационный ряд закончится, мы напишем вероятность того, что случайная величина приняла значение меньше самого большого значения в ряду. Очевидно, что эта вероятность равна 1.

Построим обобщенное выражение для функции распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{k}{n}, & x_k \leq x < x_{k+1}; k = 1 \dots n-1, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

График экспериментальной функции распределения вероятности для экспериментальных данных x_1, \dots, x_n представлен на рис. 3.7.

В точках разрыва $x = x_k$ функция $F(x)$ переходит скачками от значения $(k-1)/n$ к значению k/n для $x_{k-1} < x < x_{k+1}$.

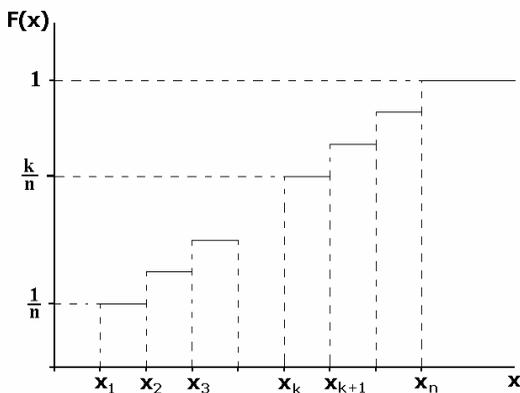


Рис. 3.7. График экспериментальной функции распределения

Основы критерия согласия Колмогорова

Этот критерий основывается на теореме Колмогорова.

Теорема Колмогорова. Какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины при неограниченном возрастании числа независимых измерений n , вероятность неравенства $\sqrt{n} D < \lambda$ стремится к пределу $k(\lambda)$ — функция Колмогорова.

$$\text{Т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D < \lambda) = k(\lambda).$$

Здесь $D = \max |F(x) - F_0(x)|$;

$F(x)$ — функция распределения, полученная в эксперименте;

$F_0(x)$ — гипотетическая функция распределения;

$k(\lambda)$ — функция Колмогорова, которая описывается следующим образом:

$$k(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2); \quad \lambda > 0 \\ 0; \quad \lambda < 0 \end{array} \right\}.$$

Используя теорему Колмогорова, можно оценить вероятность того, что расхождение между гипотетической и экспериментальной

ной функцией имеет полученное значение. Если эта вероятность высока – гипотетическая функция хорошо описывает экспериментальные данные. Если вероятность полученного значения расхождения мала – гипотетическая функция плохо описывает экспериментальные данные.

Такой критерий называют критерием согласия Колмогорова.

Практически критерий Колмогорова используют, когда $F_0(x)$ известна априори. Но его можно так же применять и тогда, когда параметры $F(x)$ рассчитываются из эксперимента.

Пошаговая схема проверки по критерию Колмогорова

1. Для выбранного числа интервалов строят экспериментальную функцию $F(x)$ и гипотетическую $F_0(x)$.

2. Из полученных данных определяют $D = \max|F(x) - F_0(x)|$.

3. Определяют величину $\lambda = D\sqrt{n}$.

4. По таблице функции Колмогорова находят вероятность $P(\lambda)$. $P(\lambda)$ указывает, что за счет случайного характера экспериментальных данных максимальное расхождение между $F(x)$ и $F_0(x)$ будет не меньше найденного.

5. При малых $P(x)$ гипотеза отвергается; при больших $P(\lambda)$ гипотеза может считаться совместимой с экспериментальными данными.

Вместо проверки гипотезы согласия величина D может быть использована при построении доверительных границ для непрерывной функции распределения.

Какова бы ни была истинная (теоретическая) функция распределения, можно записать $P[F(x) - d_\alpha \leq F_0(x) \leq F(x) + d_\alpha] = 1 - \alpha$.

Здесь d_α – критическое значение D при уровне значимости α .

Доверительная область представляет собой зону (полосу) шириной $\pm d_\alpha$ около экспериментальной (выборочной) функции распределения $F(x)$. С вероятностью $1 - \alpha$ истинная функция распределения $F_0(x)$ лежит внутри этой полосы.

Для случаев большой статистики ($n > 80$) экспериментальных данных

$$d_\alpha \approx \frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{n}}.$$

Это выражение можно использовать при оценке объема выборки (т.е. необходимого числа измерений n), необходимой для аппроксимации функции распределения с заданной точностью.

При $\alpha = 0,05$ с вероятностью 0,95 при выборке объема n $F(x)$ будет отстоять от истинной $F_0(x)$ не более, чем на $\Delta = 0,61/\sqrt{n}$. Например, при $n = 100$, $\Delta = 0,061$.

Задача 3.5 (на проверку гипотезы по критерию Колмогорова)

На основании приведенных данных (табл. 3.4) проверить достоверность (при $\alpha = 0,05$), что $f(y) = N(\mu, \sigma^2)$ по критерию Колмогорова.

Таблица 3.4

Интервал	Наблюд. частоты	$F(x)$	$F_0(x)$
$-\infty; 0,5$	1	0,0089	0,141
0,5;1,0	9	0,089	0,204
1,0;1,5	23	$\frac{1+23+9}{112} = 0,295$	0,281
1,5;2,0	17	0,446	0,371
2,0;2,5	13	0,563	0,468
2,5;3,0	12	0,67	0,567
3,0;3,5	10	0,759	0,662
3,5;4,0	9	0,839	0,747
4,0;4,5	9	0,92	0,82
4,5;5,0	3	0,946	0,878
5,0;+ ∞	6	1	1

Применим вышеприведенный алгоритм:

1) находим экспериментальную функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{n} = \frac{1}{112} = 0,0089,$$

$x \in (-\infty; 0,5)$

где n – общее количество экспериментов $n=1+9+23+..+6=112$;

$$F(x) = \frac{1}{112} + \frac{9}{112} = 0,089.$$

И т.д., значения приведены в табл. 3.4;

2) находим гипотетическое распределение $F_0(x)$.

Для случайной величины, подчиняющейся нормальному распределению, вероятность попасть в интервал от $-\infty$ до x :

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Значения функции $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ можно взять из таблиц или посчитать численными методами, но сначала нужны оценки математического ожидания и дисперсии.

Оценка математического ожидания может быть вычислена так:

$$\begin{aligned} E\{x\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} xv(x)dx = \\ &= \frac{1}{112} \left[\int_{-\infty}^{0,5} x \cdot 1 dx + \int_{0,5}^{1,0} x \cdot 9 dx + \frac{23x^2}{2} \Big|_{1,0}^{1,5} + \frac{17x^2}{2} \Big|_{1,5}^{2,0} + \frac{13}{2} x^2 \Big|_{2,0}^{2,5} + \right. \\ &\left. + \frac{12}{2} x^2 \Big|_{2,5}^{3,0} + \frac{10}{2} x^2 \Big|_{3,0}^{3,5} + \frac{9}{2} x^2 \Big|_{3,5}^{4,0} + \frac{9}{2} x^2 \Big|_{4,0}^{4,5} + \frac{3}{2} x^2 \Big|_{4,5}^{5} + \frac{6}{2} x^2 \Big|_{5,0}^{+\infty} \right] = 2,663. \end{aligned}$$

Таким же образом вычислим оценку дисперсии и получим:

$$\tilde{\mu} = \bar{x} = 2,663 \text{ и } \tilde{\sigma} = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot v}{n-1}} = 2,01.$$

3) находим $D = \max|F_0(x) - F(x)|$.

Из табл. 3.4 видно, что D , т.е. максимальная разница между гипотетической и экспериментальную функцией распределения, получается на первом интервале: $D = 0,141 - 0,0089 = 0,132$.

Определяем λ :

$$\lambda = D\sqrt{n} = 0,132\sqrt{112} = 1,39 ;$$

4) Выберем уровень значимости $\alpha = 0,05$.

По табл. П.6 находим критическое значение $\lambda_{\text{крит.}}$ для соответствующего уровня значимости:

$$\lambda_{\text{крит.}} = 1,36/\sqrt{n} = 0,12.$$

Такое критическое значение показывает, каким большим может быть значение λ за счет статистической природы данных при заданном уровне значимости.

Сравниваем полученное в расчете и табличное (критическое) значение λ :

$$\lambda_{\text{крит.}} \leq \lambda_{\text{расч.}} \quad (0,12 \leq 1,39)$$

Вывод: такое большое расхождение между гипотетической и экспериментальной функцией распределения не может быть обусловлено статистической природой данных при заданном уровне значимости. Проверка по критерию Колмогорова не подтвердила гипотезу о том, что рассматриваемое распределение – нормальное.

3.2.3. Критерий согласия ω^2 (Критерий Мизеса)

Так же как и прежде, обозначим $F(x)$ – экспериментальное распределение; $F_0(x)$ – гипотетическое распределение.

В качестве меры расхождения $F_0(x)$ и $F(x)$ определяют средний квадрат отклонения по всем возможным значениям аргумента:

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x).$$

Вся область интегрирования в определении ω^2 разбивается на интервалы: $(-\infty; x_1)(x_1, x_2) \dots (x_{n-1}, x_n)(x_n; +\infty)$.

Определение ω^2 , учитывая знания о виде экспериментальной функции распределения, можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \int_{-\infty}^{x_1} F_0^2(x) dF_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{k}{n} - F_0(x) \right]^2 dF_0(x) + \\ &+ \int_{x_n}^{\infty} [1 - F_0(x)]^2 dF_0(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{12n} + \sum_{k=1}^n F_0(x_k) - \frac{2k-1}{n} \right]^2. \end{aligned}$$

Это выражение используют для вычисления ω^2 по данным выборки, которые предварительно записываются в виде вариационного ряда.

Математическое ожидание $E\{\omega^2\}$ и дисперсия $D\{\omega^2\}$ равны:

$$E\{\omega^2\} = 1/\sigma_n \text{ и } D\{\omega^2\} = \frac{4n-3}{180n^3}.$$

Существуют таблицы критических значений $n\omega^2_{\text{крит.}}$ для различных уровней значимости.

Приведем одно критическое значение для наиболее употребляемого уровня значимости:

уровень значимости	$n\omega^2_{\text{крит.}}$
0,05	0,4614

Этими данными можно пользоваться при $n > 40$. Критерий ω^2 полнее использует информацию, содержащуюся в выборке, чем критерий согласия Колмогорова.

3.3. Анализ грубых ошибок

Часто в экспериментальных результатах присутствуют выбросы, т.е. такие результаты, которые на первый взгляд кажутся экспериментатору или значительно большими всей выборки или значительно меньшими. Такие выбросы нужно анализировать, т.е. пытаться ответить на вопрос: действительно ли это значение является исключением, обусловленным, например, сбоем в работе аппаратуры, не отслеженным изменением напряжения или еще чем-нибудь подобным, или этот выброс на самом деле является частью ряда экспериментальных значений, и существенное отклонение полученного результата обусловлено статистической (вероятностной) природой изучаемого объекта.

Наиболее полно изучены погрешности для нормального распределения. Поэтому анализ грубых ошибок произведем для нормального распределенных величин.

Полагаем, что результаты наблюдений распределены по нормальному закону $N(x, \mu, \sigma^2)$. Выборка имеет объем n и подозрительный выброс x_{max} . Гипотеза H_0 состоит в том, что значение x_{max} принадлежит той же генеральной совокупности, что и другие $n-1$

измерения, т.е. значение x_{\max} – не выброс. Альтернативная сложная гипотеза H_1 что значение x_{\max} – выброс, т.е. грубая ошибка.

По общему подходу к проверке гипотез, гипотеза H_0 отклоняется, если при сравнении значения x_{\max} с некоторым критическим значением x_c , x_{\max} попадает в критическую область с заданным уровнем значимости. Если ожидание μ и дисперсия σ известны, то можно написать закон распределения x_{\max} в выборке объема n . Событие $x_{\max} < x$ равносильно тому, что все n результатов измерений меньше x .

В силу независимости измерений вероятность такого положения при n измерениях из нормальной совокупности $N(x, \mu, \sigma^2)$ равна N^n . Полагая $x = \mu + t\sigma$, можно получить, что:

$$P(x_{\max} < x) = [N(\mu; \sigma^2)]^n = \left[N\left(\frac{x - \mu}{\sigma}; 0, 1\right) \right]^n = [N(t; 0, 1)]^n.$$

Выберем уровень значимости и определим t :

$$P(x_{\max} < x) = P(x_{\max} < \mu + t\sigma) = N^n(t; 0, 1) = 1 - \alpha.$$

$$P(x_{\max} \geq x) = P(x_{\max} \geq \mu + t\sigma) = \alpha.$$

Верхнюю допустимую границу обозначим $u_{\alpha, n} = \mu + t\sigma$.

Однако реально экспериментатор не знает истинных значений μ и σ . И поэтому все проверки гипотез основываются только на знании оценок этих параметров. В этом случае вместо μ используют среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, а вместо дисперсии –

выборочную дисперсию S_n , $S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Граничное условие при неизвестных μ и σ , т.е. значение с которым будем сравнивать выброс, может быть представлено следующим образом:

$$u_{\alpha, n} = \bar{x} + q_{\alpha, n} S_n.$$

Для минимального значения результата измерений:

$$x_{\min} < \bar{x} - q_{\alpha, n} S_n.$$

Значения $q_{\alpha,n}$ для уровней значимости $\alpha = 0,1$ $\alpha = 0,05$ даются в статистических таблицах.

Эти данные получены при исследовании вероятности

$$P\left(\frac{x_{\max} - \bar{x}}{S} < q_{\alpha,n}\right),$$

где \bar{x} , x_{\max} и S_n определены из выборки объема n .

При больших объемах выборки можно использовать следующую приближенную формулу для $q_{\alpha,n}$:

$$q_{\alpha,n} = \left(1 + \frac{3}{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) u_{\alpha},$$

где n – объем выборки, u_{α} – квантиль нормального распределения уровня α .

В эксперименте, в принципе, может наблюдаться несколько сомнительных точек. Тогда их анализ проводится путем последовательного отбора. Сначала анализируют усеченную выборку, в которую включены точки, не вызывающие сомнения, и точку, имеющую наименьшее отклонение от оценки математического ожидания.

Если проверка, базирующаяся на этой ограниченной выборке, позволяет забраковать сомнительный результат, то естественно отбрасываются и другие большие отклонения. Напротив, в случае благоприятного исхода анализ продолжается, выборка расширяется за счет включения в нее вызывавшей сомнение точки, и проводится анализ следующего по величине выброса.

Задача 3.6 (на анализ грубых ошибок)

В серии 9 измерений:

7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 25 имп/мин.

Является ли результат измерения 25 имп/мин выбросом ?

Полагаем уровень значимости $\alpha = 0,025$ и вся выборка произведена из нормальной генеральной совокупности.

Находим среднее $\bar{x} = 13,8$ имп/мин. Среднее квадратичное отклонение $S = 5,1$ имп/мин. Из таблицы квантиль $q_{0,025;9} = 2,349$.

Тогда $u_{\alpha,n} = 13,8 + 5,1 \cdot 2,349 = 25,8$ имп/мин.

Ответ: с уровнем значимости $\alpha = 2,5\%$ в ряду экспериментальных значений $x_{\max} = 25 < 25,8$ не может быть отнесен к грубым ошибкам.

Вопросы к главе 3

1. Чем отличается статистическая гипотеза от других гипотез? Что такое статистический критерий?
2. Объясните понятие ошибки первого и второго рода. Что такое мощность критерия?
3. Что такое критерий Неймана – Пирсона и чем он отличается от других критериев?
4. Какие гипотезы и каким образом проверяет критерий согласия Пирсона?
5. Чем отличается критерий Колмогорова от критерия согласия Пирсона?
6. Как построить функцию распределения по экспериментальным данным?
7. Приведите последовательность действий при проверке гипотезы по критерию Мизеса.

4. Планирование эксперимента

Вопросы планирования эксперимента стали актуальными в связи с трудностью интерпретации невоспроизводимых результатов.

Основные принципы планирования эксперимента:

1. Повторяемость. Нельзя делать выводы по одному эксперименту, проведенному одним экспериментатором на одной установке. Результат такого эксперимента не признается научным сообществом. Эксперимент должен быть повторен другим экспериментатором.

2. Сбалансированность (о сравнительных экспериментах, чтобы не возникало смещения). Необходимо задуматься о возможных смещениях, т.е. систематических ошибках, вызванных каким-то постоянно действующим фактором. Необходимо проводить сравнительные эксперименты.

3. Высокая чувствительность. Нужно отметить некий минимум, когда эксперимент нечувствителен к исследуемому параметру или выборка мала. Потом чувствительность возрастает и эксперимент должен проводиться только в области, где чувствительность будет высока.

4. Однородность – одинаковые условия могут не соблюдаться при возрастании объема выборки.

5. Рандомизация. Рандомизировать – сделать случайным.

Часто в экспериментах встречаются систематически действующие факторы, которые трудно поддаются анализу и контролю. Традиционный способ разделения на систематические и случайные ошибки здесь затруднен.

Применяют следующий подход: следуют особой программе наблюдений, чтобы случайным образом перетасовывать отдельные этапы исследований и, значит, рандомизировать подобные трудно контролируемые систематические воздействия. Результаты такого рандомизированного эксперимента можно обрабатывать с помощью статистических методов.

План рандомизации составляется с учетом особенностей эксперимента, в зависимости от которых он может иметь ту или иную степень сложности.

Пример: Испытание приборов на стенде.

Цель исследований – установить надежность.

Приборы из разных партий могут быть надежными при разных значениях температуры.

Наблюдения рандомизируют во времени и в пространстве. Можно с помощью таблицы случайных чисел определять номер партии, из которой берем прибор.

Можно рандомизировать блоками: когда объекты исследований подразделяются на отдельные группы – блоки. В каждой из групп объекты располагаются различными (не повторяющимися) способами, а последовательность испытаний групп выбирается случайным образом.

Грамотно планировать эксперимент – значит получить с наименьшими затратами ресурсов наиболее хорошие результаты. С точки зрения статистического анализа наилучший результат эксперимента достигается в случае, если значения исследуемых величин оцениваются с максимальной достоверностью. Именно такой подход и применяется в дальнейших методах. При прочих равных условиях достоверность результата тем выше, чем меньше дисперсия исследуемых значений. Поэтому с точки зрения статистического подхода эксперимент спланирован оптимально, если дисперсии достигают минимальных значений.

4.1. Оптимизация распределения времени наблюдений

Допустим, исследуется величина Y , значения которой определяются в результате косвенных наблюдений с помощью n вспомогательных величин y_1, y_2, \dots, y_n , имеющих случайный характер, т.е. $Y = Y(y_1, \dots, y_n)$.

Представление об истинном значении величины Y (полученное каким-либо методом оценивания) и значении ее дисперсии можно записать:

$$\bar{Y} = Y(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n),$$

$$D(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2(\bar{y}_i),$$

где \bar{y}_i – среднее значение вспомогательных величин, $\sigma^2(\bar{y}_i)$ – их дисперсии.

При этом дисперсия рассчитывается по правилу переноса ошибок. С точки зрения оптимизации эксперимента надо получить $\min D(Y)$. Если \bar{y}_i определяется как выборочное среднее дискретных измерений y_i , т.е.: $\bar{y}_i = \frac{1}{r_i} \sum_{\lambda=1}^{r_i} y_{i\lambda}$, то их дисперсия $\sigma^2(\bar{y}_i)$ будет

представлена следующим соотношением:

$$\sigma^2(\bar{y}_i) = \frac{\sigma^2(y_{i\lambda})}{r_i} \sim \frac{\sigma^2(y_{i\lambda})}{t_i} \xrightarrow{t_i \rightarrow \infty} 0,$$

где t_i – полное время, затраченное на измерение i -й величины, оно пропорционально r_i .

Для непрерывных измерений: $y_i = N_i/t_i$ и дисперсия

$$\sigma^2(\bar{y}_i) = \frac{\sigma^2(N_i)}{t_i^2} = \frac{N_i}{t_i^2} = \frac{y_i}{t_i} \xrightarrow{t_i \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, дисперсию величин y_i можно представить как

$$\sigma^2(\bar{y}_i) = \frac{h_i^2}{t_i}.$$

Здесь h_i – некоторая величина (h_i^2 совпадает с $\sigma^2(y_i)$ при $t = 1$):

h_i называется функцией трудности измерений в отдельных точках.

Если величины $\sigma^2(y_i)|_{t_i=1}$ неизвестны, то функция трудности измерения составляется по их оценкам. Очевидно, что при бесконечном времени наблюдений $\sigma^2(\bar{y}_i) \rightarrow 0$, так же $D(Y) \rightarrow 0$.

Однако реально время на измерение T , определяемой величины Y , ограничено и равно некоторому конечному значению. Его необходимо распределить между отдельными операциями t_i так, чтобы:

$$D(Y) \rightarrow \min \text{ при } T = \sum_{i=1}^n t_i = \text{const} .$$

Если бы слагаемые $\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i}\right)^2 \sigma^2(\bar{y}_i)$ в формуле для $D(\bar{Y})$ оказались равными между собой (при $t_i = 1$), полное время можно было бы распределить равномерно между всеми измерениями. Тогда дисперсия $D(Y)$ минимизировалась бы только за счет увеличения суммарного времени.

Но величины $\left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i}\right)^2 \sigma^2(\bar{y}_i)$ не равны между собой. Задача нахождения времен при таких условиях является задачей на условный экстремум.

По методу Лагранжа находят условный экстремум – оптимальное распределение времени наблюдений:

$$t_i = T \frac{\left| \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right| h_i}{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right| h_i} .$$

При полученном значении времени окончательная минимальная дисперсия будет равна:

$$D_{\min}(Y) = T \left| \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right| h_i \right|^2 .$$

А среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_{\min}(Y) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right| h_i .$$

С целью оценки эффективности полученной методики сравним результаты измерения Y по двум методикам: оптимального и равномерного распределения времени.

Для простоты полагаем, что первое слагаемое $\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_1} \sigma^2(\bar{y}_1)$

значительно больше последующих $\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \sigma^2(\bar{y}_i)$, т.е.

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}_1} \sigma^2(\bar{y}_1) \gg \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}_i} \sigma^2(\bar{y}_i),$$

и тогда оценка для минимальной дисперсии при оптимальном распределении времени наблюдений равна:

$$\sigma_{\min}(\bar{Y}) \approx \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{y}_1} \right| h_1.$$

При равномерном распределении времени наблюдений имеем:

$$t_i = T/n \rightarrow t_1 = T/n.$$

Выражение для дисперсии в этом случае будет таким:

$$\sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right)^2 \frac{h_i}{t_i}} \approx \sqrt{\frac{n}{T}} \left| \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_1} \right| h_1 = \sqrt{n} \sigma_{\min}(Y),$$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right)^2 \sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_i} \right)^2 \frac{h_i^2}{t_i}} \approx \\ &\approx \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_1} h_1 \sqrt{\frac{1}{t_1}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}_1} h_1 \sqrt{\frac{n}{T}} = \sigma_{\min} \sqrt{n}, \text{ где } \sigma_i^2 = \frac{h_i^2}{t_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия при равномерном распределении времени в n раз больше дисперсии при оптимальном распределении времени наблюдения.

Пример 1. Определение оптимального распределения времени наблюдений интенсивности событий.

Оценить время, необходимое для определения интенсивности событий с требуемой точностью $\delta(y)=3\%$.

Пусть $v_1=100$ соб/мин – предварительная оценка основного источника событий, $v_2=25$ соб/мин – оценка фоновых событий.

Оценка полезных событий $Y = v_1 - v_2$. $h_1^2 = v_1$, $h_2^2 = v_2$.

Пусть T – общее время, тогда

$$t_1 = T \frac{v_1}{v_1 + v_2}; \quad t_2 = T \frac{v_2}{v_1 + v_2};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i = \frac{1}{\sqrt{T}} (\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2});$$

$$\delta(y) = \frac{\sigma(Y)}{y} = \frac{\frac{1}{\sqrt{T}} (\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2})}{(v_1 - v_2)} = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\delta^2(Y)} \frac{\delta^2(Y)}{(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})^2} = 45 \text{ мин};$$

$$t_1 = 45 \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{100} + \sqrt{25}} = 30 \text{ мин};$$

$$t_2 = 45 \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100} + \sqrt{25}} = 15 \text{ мин.}$$

Пример 2. Оценим время, необходимое для определения отношения интенсивностей двух источников ионизирующего излучения с точностью $=5\%$

Пусть $v_1=400$ соб/мин; и $v_2=100$ соб/мин – скорость счета от 1 и 2 источника соответственно:

$$Y = \frac{v_1}{v_2}; \quad h_{1,2}^2 = v_{1,2};$$

$$t_1 = T \frac{\left| \frac{\partial Y}{\partial y_1} \right| h_1}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i} = \frac{T}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i} \frac{1}{v_2} h_1 = \frac{T}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i} \frac{1}{v_2} \sqrt{v_1};$$

$$t_2 = \frac{T}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i} \frac{v_1}{v_2^2} \sqrt{v_2};$$

$$\delta(y) = \frac{\sigma(Y)}{y} = \frac{1/\sqrt{T} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i}{\frac{v_1}{v_2}}.$$

$$T = \frac{\left(\frac{\sqrt{v_1}}{v_2} + \frac{v_1}{v_2^2} \sqrt{v_2} \right)^2}{\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \delta^2(y)} = \left(\frac{\sqrt{v_1}}{v_2} + \frac{v_1}{v_2^2} \sqrt{v_2} \right) \left(\frac{v_2}{v_1} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{v_1}}{v_1} + \frac{v_1 \sqrt{v_2}}{v_1 v_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} + \frac{1}{\sqrt{v_2}} \right)^2 / \delta^2(y) = 9 \text{ мин.}$$

Измерение интенсивности событий

Рассмотрим эксперимент, в котором регистрируют поток событий. Среди всех событий есть “истинные” и “ложные”(фон).

Если уровень помех остается постоянным и не зависит от интенсивности суммарного потока событий, то фон можно выделить с помощью дополнительных измерений.

В течение времени t_1 наблюдаются события, вызванные совместным действием источника и фона – зарегистрировано N_1 собы-

тий. При наблюдении фона в течение t_2 отмечено N_2 событий. Оценками измеренных интенсивностей событий являются:

$$\tilde{v}_1 = \frac{N_1}{t_1}; \quad \tilde{v}_2 = \frac{N_2}{t_2},$$

поэтому оценка интенсивности истинных событий:

$$\tilde{v} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2.$$

При $N_1, N_2 \gg 1$ величина $(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)$ распределена нормально с дисперсией:

$$\begin{aligned} \sigma^2(v) &= N_1/t_1 + N_2/t_2; \\ \sigma^2(v_1) &= N_1/t_1; \quad \sigma^2(v_2) = N_2/t_2; \\ h_1^2 &= \sigma_1^2 = N_1 / t_1; \quad h_2^2 = \sigma_2^2 = N_2 / t_2. \end{aligned}$$

Распределение времени между двумя измерениями возможно, если есть предварительная оценка функции трудности измерений h_i , тогда

$$t_1 = T \frac{\left| \frac{\partial v}{\partial v_1} \right| h_1}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial v}{\partial v_i} \right| h_i} = T \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{N_1}{t_1}}}{\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial v}{\partial v_i} \right| h_i}.$$

Тогда $t_1 : t_2 = \sqrt{v_1} : \sqrt{v_2}$. Полученное соотношение и есть основное правило распределения времени между измерениями фона и событий плюс фон.

Если $N_1 \gg 1$, а N_2 – невелико, но $v_1 \gg v_2$, полученные соотношения остаются в силе, поскольку неточность в определении малого компонента слабо влияет на погрешность оценки конечного результата.

Задача 4.1 (на оптимальное планирование времени измерений)

Требуется провести в течение 1 часа измерения скорости счета импульсов от регистрации излучения, испускаемого образцом, с учетом фона. Каким должно быть оптимальное соотношение времен измерения этого излучения и фона для получения в течение заданного времени максимальной точности?

Приближенные значения полной скорости счета импульсов и фоновых импульсов равны 1000 и 20 имп/мин соответственно.

Соотношение измеряемых времен можно получить из формул:

$$t_i = T \frac{\left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i}{\sum_i \left| \frac{\partial Y}{\partial y_i} \right| h_i};$$

$$t_\phi = T \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1000} + \sqrt{20}} = 0,13T;$$

$$Y_{\text{и}} = Y_{\phi+\text{и}} - Y_\phi$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_\phi} = -1; \quad \frac{\partial Y}{\partial y_{\phi+\text{и}}} = 1;$$

$$h_i = \sqrt{N_i}; \quad T = 60 \text{ мин};$$

$$t_{\phi+\text{и}} = \frac{T\sqrt{1000}}{\sqrt{1020}} = 0,99T$$

$$t_\phi = 7 \text{ мин}; \quad t_{\phi+\text{и}} = 53 \text{ мин}.$$

Найдем ошибку результата измерения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(Y) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_i \left(\frac{\partial Y}{\partial y_i} \right) h_i = \frac{1}{\sqrt{60}} (\sqrt{N_\phi} + \sqrt{N_{\phi+\text{и}}}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{60}} (\sqrt{1000} + \sqrt{20}) = 4,6. \end{aligned}$$

В этом случае относительная ошибка составит:

$$\frac{\sigma(Y)}{Y} = \frac{4,6}{980} \approx 4,6\%.$$

4.2. Выбор точек наблюдений

Если прямые наблюдения малоэффективны, то трудности можно обойти, анализируя характер поведения исследуемых величин в «труднодоступных» точках путем экстраполяции данных, полученных в смежных областях.

Для такой экстраполяции в область с повышенной трудностью нужно быть уверенным в том, что с помощью измерений в других точках удалось «уловить» общий характер поведения функции, описывающей исследуемое явление. Таким образом, возникает проблема наиболее удачной расстановки точек во всем интервале изменения аргумента.

Проанализируем проблему *оптимального* выбора условия наблюдений, подразумевая под последними область независимого аргумента x , в которой имеются участки разной трудности.

Под исследуемой функцией понимаем зависимость вида:

$$y_i = y(x_i).$$

Эту зависимость описывают с помощью ортогональных функций:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k L_k(x).$$

Функции $L_k(x)$ удовлетворяют условию ортогональности:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i L_k(x_i) L_{k'}(x_i) = N_k \sigma_{kk'},$$

где

$$N_k = \sum_{k=1}^n \omega_i L_k^2(x_i); \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Тогда дисперсия Y в точке x оценивается из соотношения

$$\sigma^2(y) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{m-1} L_k^2(x) / N_k.$$

Проблема минимизации дисперсии $\sigma^2(y)$ сводится к оптимальному выбору числа точек x_i и их положения.

Условимся относительно выбора числа точек измерения x . Нам надо описать эмпирический материал по измерениям в n точках. В

процессе этого анализа подбирается m_{\max} функцией L_k . При этом предельное значение $m_{\max} \leq n$.

С другой стороны, если заранее твердо установлен набор функций $L_k(x)$ с известным m_{\max} , то минимальное число точек наблюдения будет равно: $n_{\min} = m_{\max}$.

Если точки расставлены так, чтобы обеспечить минимум дисперсии, то введение еще одной точки может только ухудшить точность оценки.

В качестве $L_k(x)$ можно выбрать полиномы Ньютона:

$$L_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{l_k(x)}{\sqrt{\omega_k}}.$$

Все $l_k(x)$ являются полиномами степени $n-1$, различаясь между собой коэффициентами при x :

$$N_k = \sum_i \omega_i L_k = 1.$$

Соотношение для дисперсии

$$\sigma^2(y(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2}{\omega_k} l_k^2(x) = \sum_{k=1}^n l_k^2(x) \sigma^2(y_k).$$

Учитывая соотношение для времени наблюдения в точках с разной трудностью

$$\sigma(y(x)) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=1}^n \left| \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_k)}{(x_k - x_i)} \right| h(x_k),$$

варьируя $\sigma(y(x))$ по x , можно найти систему уравнений по x .

Пример: простой случай с двумя точками $n = 2$.

Требуется определить коэффициенты прямой линии

$$y = \alpha_0 + \alpha_1(x - \bar{x})$$

Выясним оптимальные условия для измерения коэффициента α_1 . При $n = 2$ стандартное отклонение оценки α_1 :

$$\sigma(\tilde{\alpha}_1) = \frac{\sqrt{\sigma^2(y_1) + \sigma^2(y_2)}}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{h_1 + h_2}{\sqrt{T}(x_2 - x_1)}.$$

Если времена выбрать как $t_1/t_2 = h_1/h_2$, где $h_{1,2} = h(x_{1,2})$ – значения функции трудности измерений $\sigma^2(y_i) = h_i^2/t_i$, $T = t_1 + t_2$, то точки должны расставляться так, чтобы $(h_1 + h_2)/(x_2 - x_1)$ было максимальным.

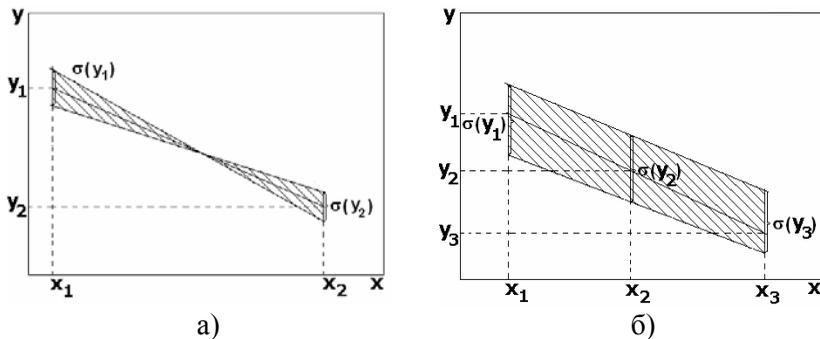


Рис. 4.1. График построения прямой по двум экспериментальным точкам (а) и по трем – (б)

Значение дисперсии коэффициента угла наклона прямой линии описывается углом наклона α_i в пучке прямых, проведенных в пределах коридора ошибок. На рис.4.1,а измерялись значения только в двух точках - x_1 и x_2 . Соответственно, дисперсии в этих точках невелики и нарисованный разброс также невелик. Тот же эксперимент по определению такой же прямой линии проведен в трех точках и его результаты представлены на рис.4.1,б. Так как время измерений было распределено между тремя точками, то дисперсия измерений в каждой из этих точек была больше, чем дисперсия измерения точек в предыдущем варианте. Таким образом, коридор возможных значений наклона исследуемой прямой линии α_i заметно увеличился, что хорошо видно из результатов эксперимента.

Вопросы к главе 4

1. Какой эксперимент можно назвать оптимальным ?
2. Что такое рандомизация?
3. Как оптимально распределять имеющееся время в экспериментах по измерению активности от источника излучения в присутствии фонового излучения?
4. Как правильно выбрать положение точек измерения при необходимости проводить измерения в нескольких точках?
5. Как выбрать положение точек измерения при восстановлении линейной зависимости?

5. Обработка линейчатых спектров

Экспериментатор, работающий в области прикладной ядерной физики, достаточно часто сталкивается с задачей обработки результатов ядерно-физического эксперимента, представленных в виде их спектрального распределения.

Спектром называется зависимость количества частиц или отсчетов от энергии, массы и других характеристик частиц. Под линейчатым спектром подразумевают спектр, в котором эти характеристики (энергия, масса, номер канала) принимают дискретные значения.

Каждая конкретная физическая система (например, ядро) имеет свой набор энергетических состояний, и следовательно, переходы между этими состояниями сопровождаются излучением с линейчатым спектром. Исследуя спектры образцов по характерным линиям, можно распознать наличие ядер данного типа в образце, а по интенсивности этих линий (числу частиц с этой энергией) можно судить о концентрации соответствующих ядер. На таком принципе работает метод активационного анализа.

Таким образом, в сферу обработки результатов ядерно-физического эксперимента входит также обработка спектров.

Несмотря на простоту поставленной задачи, а именно: определение положения (энергии) линии и ее интенсивности, могут встретиться следующие трудности:

- все аппаратные устройства (спектрометры) имеют конечное разрешение. В результате δ -функция (линия) преобразуется в колоколообразную кривую (пик), и если пиков много, то такие пики налагаются друг на друга, затрудняя анализ;

- шумы и фон существенно затрудняют анализ;

- спектр есть результат измерения большого количества частиц. Но само количество этих частиц конечно и случайно, что тоже затрудняет анализ.

5.1. Основные задачи анализа спектра

Задача 5.1. Идентификация пиков. Необходимо отсекают области спектра, где есть пики, т.е. указать границы области и оценить положение максимума и площади пика.

Сначала дается приближенное значение этих характеристик, а потом в задаче 5.3 уточнение производится методом наименьших квадратов.

Задача 5.2. Анализ мультиплетности (множественности) пиков. Необходимо знать количество пиков.

Задача 5.3. Точное определение площади пиков и положения максимума.

Задача 5.4. Переход от вычисленных значений в площади пика и положения максимума, определенных в терминах числа отсчетов и каналов соответственно, к величинам, выраженным в единицах активности и энергии.

Для этого используются калибровочные зависимости «канал-энергия» и «энергия-эффективность». Эти зависимости получают в измерениях с хорошо известными изотопами. Условия калибровочных измерений и экспериментов с образцами неизвестного состава должны быть идентичны.

Но прежде, чем перейти к описанным задачам часто обработка начинается с задачи 5.0 – «сглаживание спектра» – для уменьшения статистических выбросов в аппаратурном спектре. Сглаживание – это замена отсчета в данном канале средневзвешенным значением отсчета в каналах, прилегающих к нему (включая рассматриваемый канал).

Введем обозначение N_i – отсчет в i -м канале – несглаженный, W_j – вес, выбираемый так, что W_j падает с увеличением j и $W_j = W_{-j}$, тогда сглаженный отсчет в канале i :

$$N_{\text{сглаж}}(i) = \frac{\sum_{j=-k}^k W_j N_{i+j}}{\sum_{j=-k}^k W_j}.$$

Сглаживание можно производить либо с помощью метода наименьших квадратов, либо с помощью преобразования Фурье.

Поиск пиков

Основные трудности при определении пиков:

- пики бывают слабые настолько, что их интенсивность не превышает в три раза среднеквадратичную флуктуацию фоновых отсчетов;
- края спектров комптоновских электронов, соответствующих мощным линиям идентифицируются как пики. Но положение их известно, и эту ситуацию можно отдельно исключать;
- при большом количестве близко расположенных пиков, они могут перекрываться друг с другом.

Основные методы поиска пиков

Метод максимума

Число отсчетов в каждом канале сравнивается с числом отсчетов в соседних каналах. Считается, что в i -м канале есть пик, если число отсчетов $N(i)$ удовлетворяет одновременно двум условиям:

$$\begin{cases} N(i) > N(i - p) + k\sqrt{N(i)}, \\ N(i) > N(i + p) + k\sqrt{N(i)}. \end{cases}$$

Параметры k и p подбираются эмпирически.

В этом методе возможен пропуск пиков, сгруппированных в мультиплеты, так как каналы $(i - p)$ и $(i + p)$ могут принадлежать соседним пикам, поэтому критерий не будет выполняться даже при наличии пиков. Поэтому поиск пиков по этому методу повторяют несколько раз при разных p . Величину k можно взять $2 \div 3$ для несглаженного спектра, а для сглаженного она меньше и при-

мерно $(2 \div 3) \frac{\sum_i W_i^2}{(\sum_i W_i)^2}$, где W_i – веса, используемые при сглаживании.

Метод плавающего отрезка

В этом методе сравнивается число отсчетов над некоторым отрезком, соединяющим две точки спектра, отстоящие на заданное расстояние. Это расстояние равно основанию стандартного пика.

Пусть S_1 – число отсчетов над отрезком, S_2 – сумма отсчетов в пределах отрезка, q – некоторый параметр отсева ($q=2 \div 4$). Тогда будем считать, что есть пик в области спектра, где выполняется условие $S_1 > qS_2$. Метод плавающего отрезка хорош для спектров с небольшой статистикой.

Метод первой производной

Спектр представляется как функция, и по поведению ее первой производной можно определить пик. В области пика производная сначала становится большой положительной величиной, а затем меняет знак и становится большой отрицательной величиной. Такую последовательность можно использовать для идентификации пиков.

Пусть есть два положительных числа k_1 и k_2 (они подбираются экспериментально), $y(i)$ – число отсчетов в i -м канале, и $y'(i)$ – величина производной в i -м канале. В качестве производной используют ее конечно-разностный аналог. Считается, что в области i -го канала есть пик, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} y'(i-p) > k_1, \\ y'(i) \cong 0, \\ y'(i+p) < -k_2. \end{cases}$$

Метод второй производной

Этот метод базируется на анализе второй производной функции спектра. Вторая производная практически везде равна 0, но около пика она испытывает резкие изменения. Так как функция спектра – это набор значений, вместо второй производной используют ее численную аппроксимацию: вторую конечную разность.

Если $N(i)$ – число отсчетов в i -м канале, то вторая конечная разность:

$$y_2(i) = N(i+1) - 2N(i) + N(i-1).$$

В области i -го канала имеется пик, если выполняются условия:

$$\begin{cases} y_2(i-p) > k_1, \\ y_2(i) < -k_2, \\ y_2(i+p) > k_3. \end{cases}$$

Положительные параметры k_1 , k_2 и k_3 определяются эмпирически.

Этот метод применяют только для сглаженных спектров.

Метод сглаживания

Сглаживание совсем не действует на фон (он и так гладкий), но размывает пик. Вычитая сглаженный спектр из исходного, получаем характерный спектр, всюду близкий к 0, кроме областей пиков, где имеется положительный выброс, наличие которого и идентифицируется как пик.

Недостатком метода является сложность анализа мультиплета.

Анализ мультиплетов

При анализе мультиплетов необходимо понять следующее: является ли идентифицируемый пик синглетным (т.е. одиночным) или является результатом сложения нескольких различных пиков. При таком анализе часто используется заранее известная ширина пика на половине высоты. Но при использовании такого критерия может быть пропущен мультиплет, представляющий собой сумму двух пиков с очень разными интенсивностями. Поэтому применяют тесты относительно степени асимметрии или сравнивают ширину на высоте, равной одной десятой от всех высот с шириной на той же высоте для заведомо синглетного пика.

Оценивают параметры мультиплетов исходя из следующих соображений.

Пусть есть истинный спектр $A(E)$, но он «размывается» аппаратной функцией спектрометра $K(N, E)$, и поэтому в результате эксперимента мы имеем некий непрерывный спектр:

$$C(N) = \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} K(N, E) A(E) dE.$$

Это уравнение типа свертки относительно $A(E)$. Его возможно решить методом регуляризации.

Можно получить $A(E)$ и с помощью преобразования Фурье.

Определение положения максимума и площади пиков

Простейший метод численного анализа для определения площади и положения максимума состоит в следующем.

Пусть $N(i)$ – оценка значения счета фона в канале i . В качестве оценки фона можно взять значение ординаты прямой, проведенной с помощью МНК по двум группам экспериментальных точек, взятых слева и справа от обрабатываемого пика за его пределами.

Параметры пика вычисляются по формулам:

1. Площадь пика

$$A = \sum_{i=1} (N(i) - B(i)).$$

2. Погрешность площади пика:

$$\sigma(A) = \sqrt{\sum_i (N(i) - B(i))}.$$

3. Положение центра пика:

$$\bar{i} = \frac{\sum_i (N(i) - B(i))i}{A}.$$

4. Погрешность положения центра пика:

$$\sigma(\bar{i}) = \frac{\sqrt{\sum_i (N(i) + B(i))(i - \bar{i})^2}}{A}.$$

5. Полная ширина пика на половине высоты (ПШПВ) (для гауссовской формы пика):

$$W = 2,35 \sqrt{\frac{\sum_i (N(i) - B(i))(i - \bar{i})^2}{A}}.$$

6. Погрешность определения ПШПВ:

$$\sigma(W) = \frac{2,35}{2WA} \sqrt{\sum_i \left[(i - \bar{i})^2 \left(1 - 2 \frac{N(i) - B(i)}{A} - W^2 \right) \right] (N(i) + B(i))}.$$

Формулы погрешности основаны на предположении, что $\sigma(B(i)) = \sqrt{B(i)}$.

Но необходимо знать вид функции, аппроксимирующей пик полного поглощения. На основании большого количества экспериментальных данных было проведено исследование поведения такой функции и подгон ее по критерию χ^2 . Функции пика полного поглощения имеет следующий вид: центральная часть описывается распределением Гаусса, асимметрия наблюдается только в хвостах и при низких скоростях счета заметна только слева. Асимметрию записать можно с помощью двух функций, условно называемых функцией «ступеньки» и функцией «хвоста».

Полную функцию распределения сигналов вблизи максимума можно представить следующим образом :

$$F(i) = G(i) + S(i) + D(i) + B(i),$$

где i – номер канала, $B(i)$ – линейный фон; $G(i) = H_G \exp(-\frac{i-\bar{i}}{2\sigma^2})$

– гауссиан; $S(i) = \frac{1}{2} H_S (1 - \frac{\text{erf}(\frac{\bar{i}-i}{\sigma\sqrt{2}})}{\sigma\sqrt{2}})$ – функция «ступеньки»;

$$D(i) = \begin{cases} H_D \exp[(i-c)/B], & i \leq i_1 \\ H_D \exp[-(i-c)/2\delta^2], & i > i_1 \end{cases} \quad \text{– функция «хвоста»;$$

i_1 – точка сшивки двух частей $D(i)$; $i_1 = c - 2\delta^2/B$.

Для полного описания формы пика вводится восемь варьируемых при подгонке параметров. Конечно, это очень подробная параметризация, ее надо использовать только тогда, когда отклонение от гауссовского спектра значительно.

5.2. Аппроксимация линейчатого спектра аналитической кривой

Параметры функции $F(i)$ или в простом случае гауссиана $G(i)$ находят минимизацией взвешенной суммы квадратов (т.е. методом МНК) (рис. 5.1):

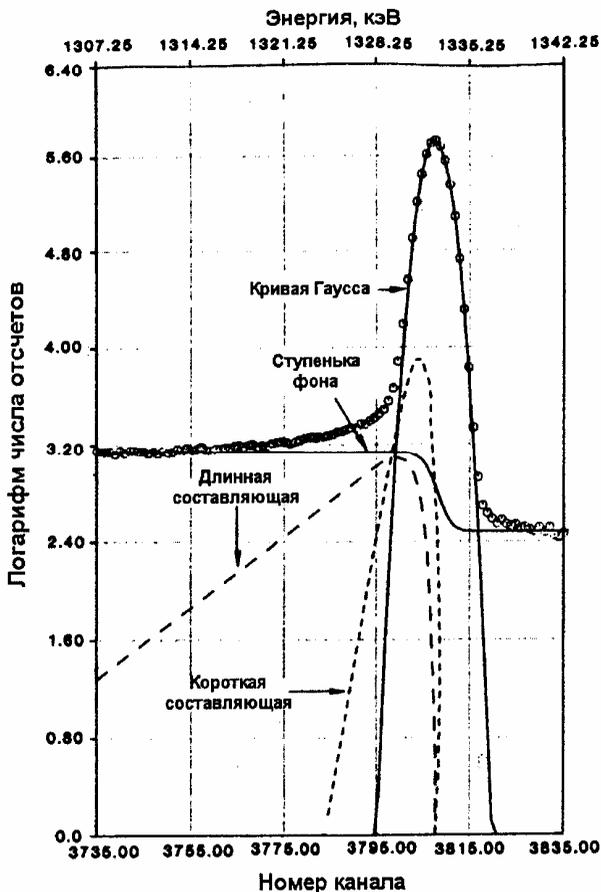


Рис. 5.1. Фотопик гамма-излучения, зарегистрированный с помощью детектора Ge(Li), показывает составные части формы спектрального пика: кривую Гаусса, короткую составляющую хвоста, длинную составляющую хвоста и пьедестал фона

$$H(i) = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \frac{(Y(i) - F(i, \vec{\alpha}))^2}{N(i)},$$

где $Y(i)$ – отсчет в i -м канале, $\vec{\alpha}$ – вектор неизвестных параметров, i_{\max} , i_{\min} – номера каналов, ограничивающих область пика, $N(i)$ – веса.

Определение интенсивностей и значений энергии пиков

Итак, на предыдущем этапе получены значения положения максимумов и площадей пиков. Но эти значения получены только в терминах «номер канала» и «число отсчетов». Последняя стадия обработки заключается в переходе от номера канала к значению энергии, и от числа отсчетов к количеству регистрируемых частиц интенсивности. Такая операция перехода осуществляется с помощью калибровочных зависимостей кривых «канал-энергия» и «энергия-эффективность регистрации».

Калибровочные зависимости получают в экспериментах с излучениями радионуклидов изотопами, характеристики которых хорошо известны. В прецизионной спектрометрии обычно используется не сама зависимость «канал-энергия», а функция, характеризующая ее отклонение от прямой. Задача сводится к аппроксимации набора точек, измеренных с определенной погрешностью аналитической функцией.

Для такой аппроксимации используется метод наименьших квадратов. Калибровочные точки аппроксимируются полиномом. Метод хорошо работает, если калибровочная кривая аппроксимируется полиномом небольшого второго или третьего порядков.

При больших порядках полинома могут наблюдаться физические неоправданные осцилляции в аппроксимирующей функции.

Поэтому применяют метод сплайн-наименьших квадратов. В этом методе аппроксимацию проводят на небольших участках калибровочной кривой из 4 ÷ 5 точек.

На выбранном этом участке несложно подобрать полином, хорошо согласующийся с экспериментальными результатами. Затем на такие отдельные функции накладывают условия «сшивки», объединяющие все полиномиальные участки в единую гладкую функцию.

Пусть есть две функции f_1 и f_2 , подобранные для двух участков калибровочной кривой, т.е. подобранных из условий минимума квадратичных форм, например:

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^k [y(i) - f_1(i, \vec{\alpha}_1)]^2}{\sigma(i)^2},$$

$$S_2 = \frac{\sum_{i=k}^n (y(i) - f_2(i, \vec{\alpha}_2))^2}{\sigma(i)^2},$$

где $\sigma(i)$ – среднеквадратичная погрешность измерения $y(i)$.

Добавим к этим условиям еще условие сшивки $\psi_j = 0$. Функция ψ_j выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_1 = f_1(k) - f_2(k), \\ \psi_2 = f_1'(k) - f_2'(k), \\ \psi_3 = f_1''(k) - f_2''(k). \end{cases}$$

Задача на нахождение параметров для функций f_1 и f_2 превратится в задачу минимизировать выражение:

$$\varphi = S_1 + S_2 + \sum_j \lambda_j \psi_j,$$

где λ_j – так называемые неопределенные множители Лагранжа.

Минимизируя функцию φ , можно получить функцию, которая наилучшим образом будет описывать калибровочную кривую. По этой калибровочной кривой перейдем от значений «номер канала» и «число отсчетов» к энергии и количеству регистрируемых частиц и, таким образом, завершим обработку линейчатого спектра.

Вопросы к главе 5

1. Какой спектр называется линейчатым?
2. Какие основные задачи возникают при обработке линейчатых спектров?

3. Какие основные трудности возникают при определении положения пиков?
4. Какие методы применяются при поиске пиков?
5. Как аппроксимируется линейчатый спектр аналитической кривой?
6. Как определяется интенсивность и значение энергии пика?

Список литературы

1. Гришин В.К., Живописцев Ф.А., Иванов В.А. Математическая обработка и интерпретация физического эксперимента, М.: Изд-во МГУ, 1988.¹
2. Лавренчик В.Н. Постановка физического эксперимента и статистическая обработка его результатов. М.: Энергоатомиздат, 1986.
3. Статистические методы в экспериментальной физике. Под ред. А.А. Тяпкина, М. Атомиздат, 1976.
4. Худсон Д. Статистика для физиков, М.: Мир, 1970.
5. Кретов М.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Калининград, Янтарный сказ, 2004.
6. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002.
7. Справочник по прикладной статистике, Т.Т. 1-2. М.: Финансы и статистика, 1990.
8. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986.
9. Елисеева И.И., Князевский В.С., Ниворожкина Л.И. Морозова З.А. Теория статистики с основами теории вероятности. М.: Юнити, 2001.
10. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятности и математической статистики. Санкт-Петербург, «Лань», 2002.
11. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математической статистики. М.: Высшая школа, 2004.
12. Теория вероятности и математической статистики. Под ред. А.И. Кибзуна. М.: Физматлит, 2002.
13. Статистическая обработка результатов экспериментов, Л.: Энергоатомиздат, 1991.
14. Волков Н.Г., Пятков Ю.В. Математические методы обработки спектров. М.: МИФИ, 1984.
15. Кунце Х.-И. Методы физических измерений. М.: Мир, 1989.

¹ Жирным шрифтом выделены рекомендуемые источники.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1. Нормальное распределение

В таблице приводятся значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy$ для аргументов $x \in [0; 3,99]$.

Значение функции $\Phi_0(x)$ находится на пересечении строки, дающей целую часть и десятые доли аргумента x , и столбца, дающего сотые доли аргумента x .

Если $\eta \sim N(0,1)$ — случайная величина со стандартным нормальным распределением, то $P(a < \eta < b) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$. Функция $\Phi_0(x)$ отличается от функции распределения η на константу $\frac{1}{2}$, т.е. $P(\eta < x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$.

Функция $\Phi_0(x)$ является нечетной, т.е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. В практических расчетах значения $\Phi_0(x)$ при $x \geq 4$ можно считать равными $\frac{1}{2}$.

X	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	X
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586	0,0
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535	0,1
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409	0,2
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173	0,3
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793	0,4
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240	0,5
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490	0,6
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524	0,7
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327	0,8
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891	0,9
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214	1,0
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298	1,1
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147	1,2
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774	1,3
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189	1,4
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408	1,5
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449	1,6
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327	1,7
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062	1,8
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670	1,9

20	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169	20
21	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574	21
22	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899	22
23	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158	23
24	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361	24
25	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520	25
26	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643	26
27	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736	27
28	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807	28
29	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861	29
30	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900	30
31	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929	31
32	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950	32
33	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965	33
34	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976	34
35	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983	35
36	0,49994	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989	36
37	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992	37
38	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995	38
39	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997	39
X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	X

Таблица П.2. Квантили нормального распределения $\Omega(P)=u_P$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_P} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

P	Тысячные доли P									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	$-\infty$	-3,091	-2,879	-2,748	-2,652	-2,576	-2,513	-2,458	-2,409	-2,366
0.01	-2,327	-2,291	-2,258	-2,227	-2,198	-2,171	-2,145	-2,121	-2,097	-2,075
0.02	-2,054	-2,034	-2,015	-1,996	-1,978	-1,960	-1,944	-1,927	-1,911	-1,896
0.03	-1,881	-1,867	-1,853	-1,839	-1,825	-1,812	-1,800	-1,787	-1,775	-1,763
0.04	-1,751	-1,740	-1,728	-1,717	-1,706	-1,696	-1,685	-1,675	-1,665	-1,655
0.05	-1,645	-1,636	-1,626	-1,617	-1,608	-1,599	-1,590	-1,581	-1,572	-1,564
0.06	-1,555	-1,547	-1,539	-1,530	-1,522	-1,514	-1,507	-1,499	-1,491	-1,484
0.07	-1,476	-1,469	-1,466	-1,454	-1,447	-1,440	-1,433	-1,426	-1,419	-1,412
0.08	-1,405	-1,399	-1,392	-1,385	-1,379	-1,372	-1,366	-1,360	-1,353	-1,347
0.09	-1,341	-1,335	-1,329	-1,323	-1,317	-1,311	-1,305	-1,299	-1,293	-1,287
0.10	-1,282	-1,276	-1,270	-1,265	-1,259	-1,254	-1,248	-1,243	-1,237	-1,232
0.11	-1,227	-1,221	-1,216	-1,211	-1,206	-1,200	-1,195	-1,190	-1,185	-1,180
0.12	-1,175	-1,170	-1,165	-1,160	-1,155	-1,150	-1,146	-1,141	-1,136	-1,131
0.13	-1,126	-1,122	-1,117	-1,112	-1,108	-1,103	-1,099	-1,094	-1,089	-1,085
0.14	-1,080	-1,076	-1,071	-1,067	-1,063	-1,058	-1,054	-1,049	-1,045	-1,041
0.15	-1,036	-1,032	-1,028	-1,024	-1,019	-1,015	-1,011	-1,007	-1,003	-0,999
0.16	-0,994	-0,990	-0,986	-0,982	-0,978	-0,974	-0,970	-0,966	-0,962	-0,958
0.17	-0,954	-0,950	-0,946	-0,942	-0,938	-0,935	-0,931	-0,927	-0,923	-0,919
0.18	-0,915	-0,911	-0,908	-0,904	-0,900	-0,896	-0,893	-0,889	-0,885	-0,881

Продолжение табл. П.2

Р	Тысячные доли Р									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.19	-0.878	-0.874	-0.870	-0.867	-0.863	-0.859	-0.856	-0.852	-0.849	-0.845
0.20	-0.841	-0.838	-0.834	-0.831	-0.827	-0.824	-0.820	-0.817	-0.813	-0.810
0.21	-0.806	-0.803	-0.799	-0.796	-0.792	-0.789	-0.786	-0.782	-0.779	-0.775
0.22	-0.772	-0.769	-0.765	-0.762	-0.759	-0.755	-0.752	-0.749	-0.745	-0.742
0.23	-0.739	-0.735	-0.732	-0.729	-0.725	-0.722	-0.719	-0.716	-0.712	-0.709
0.24	-0.706	-0.703	-0.700	-0.696	-0.693	-0.690	-0.687	-0.684	-0.681	-0.677
0.25	-0.674	-0.671	-0.668	-0.665	-0.662	-0.659	-0.655	-0.652	-0.649	-0.646
0.26	-0.643	-0.640	-0.637	-0.634	-0.631	-0.628	-0.625	-0.622	-0.619	-0.615
0.27	-0.612	-0.609	-0.606	-0.603	-0.600	-0.597	-0.594	-0.591	-0.588	-0.585
0.28	-0.582	-0.580	-0.577	-0.574	-0.571	-0.568	-0.565	-0.562	-0.559	-0.556
0.29	-0.553	-0.550	-0.547	-0.544	-0.541	-0.538	-0.536	-0.533	-0.530	-0.527
0.30	-0.524	-0.521	-0.518	-0.515	-0.513	-0.510	-0.507	-0.504	-0.501	-0.498
0.31	-0.495	-0.493	-0.490	-0.487	-0.484	-0.481	-0.478	-0.476	-0.473	-0.470
0.32	-0.467	-0.464	-0.462	-0.459	-0.456	-0.453	-0.451	-0.448	-0.445	-0.442
0.33	-0.439	-0.437	-0.434	-0.431	-0.428	-0.426	-0.423	-0.420	-0.417	-0.415
0.34	-0.412	-0.409	-0.407	-0.404	-0.401	-0.398	-0.396	-0.393	-0.390	-0.388
0.35	-0.385	-0.382	-0.379	-0.377	-0.374	-0.371	-0.369	-0.366	-0.363	-0.361
0.36	-0.358	-0.355	-0.353	-0.350	-0.347	-0.345	-0.342	-0.339	-0.337	-0.334
0.37	-0.331	-0.329	-0.326	-0.323	-0.321	-0.318	-0.316	-0.313	-0.310	-0.308
0.38	-0.305	-0.302	-0.300	-0.297	-0.295	-0.292	-0.289	-0.287	-0.284	-0.281
0.39	-0.279	-0.276	-0.274	-0.271	-0.268	-0.266	-0.263	-0.261	-0.258	-0.256
0.40	-0.253	-0.250	-0.248	-0.245	-0.243	-0.240	-0.237	-0.235	-0.232	-0.230
0.41	-0.227	-0.225	-0.222	-0.219	-0.217	-0.214	-0.212	-0.209	-0.207	-0.204
0.42	-0.202	-0.199	-0.196	-0.194	-0.191	-0.189	-0.186	-0.184	-0.181	-0.179
0.43	-0.176	-0.173	-0.171	-0.168	-0.166	-0.163	-0.161	-0.158	-0.156	-0.153
0.44	-0.151	-0.148	-0.146	-0.143	-0.141	-0.138	-0.135	-0.133	-0.130	-0.128
0.45	-0.125	-0.123	-0.120	-0.118	-0.115	-0.113	-0.110	-0.108	-0.105	-0.103
0.46	-0.100	-0.098	-0.095	-0.093	-0.090	-0.088	-0.085	-0.083	-0.080	-0.078
0.47	-0.075	-0.073	-0.070	-0.068	-0.065	-0.063	-0.060	-0.058	-0.055	-0.053
0.48	-0.050	-0.048	-0.045	-0.043	-0.040	-0.038	-0.035	-0.033	-0.030	-0.028
0.49	-0.025	-0.022	-0.020	-0.017	-0.015	-0.012	-0.010	-0.007	-0.005	-0.002

Продолжение табл. П.2

Р	Тысячные доли Р									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	0.000	0.002	0.005	0.007	0.010	0.012	0.015	0.017	0.020	0.022
0.51	0.025	0.027	0.030	0.033	0.035	0.038	0.040	0.043	0.045	0.048
0.52	0.050	0.052	0.055	0.058	0.060	0.063	0.065	0.068	0.070	0.073
0.53	0.075	0.078	0.080	0.083	0.085	0.088	0.090	0.093	0.095	0.098
0.54	0.100	0.103	0.105	0.108	0.110	0.113	0.115	0.118	0.120	0.123
0.55	0.125	0.128	0.130	0.133	0.135	0.138	0.141	0.143	0.146	0.148
0.56	0.151	0.153	0.156	0.158	0.161	0.163	0.166	0.168	0.171	0.173
0.57	0.176	0.179	0.181	0.184	0.186	0.189	0.191	0.194	0.196	0.199
0.58	0.202	0.204	0.207	0.209	0.212	0.214	0.217	0.219	0.222	0.225
0.59	0.227	0.230	0.232	0.235	0.237	0.240	0.243	0.245	0.248	0.250
0.60	0.253	0.256	0.258	0.261	0.263	0.266	0.268	0.271	0.274	0.276
0.61	0.279	0.281	0.284	0.287	0.289	0.292	0.295	0.297	0.300	0.302
0.62	0.305	0.308	0.310	0.313	0.316	0.318	0.321	0.323	0.326	0.329
0.63	0.331	0.334	0.337	0.339	0.342	0.345	0.347	0.350	0.353	0.355
0.64	0.358	0.361	0.363	0.366	0.369	0.371	0.374	0.377	0.379	0.382
0.65	0.385	0.388	0.390	0.393	0.396	0.398	0.401	0.404	0.407	0.409
0.66	0.412	0.415	0.417	0.420	0.423	0.426	0.428	0.431	0.434	0.437
0.67	0.439	0.442	0.445	0.448	0.451	0.453	0.456	0.459	0.462	0.464
0.68	0.467	0.470	0.473	0.476	0.478	0.481	0.484	0.487	0.490	0.493
0.69	0.495	0.498	0.501	0.504	0.507	0.510	0.513	0.515	0.518	0.521
0.70	0.524	0.527	0.530	0.533	0.536	0.538	0.541	0.544	0.547	0.550
0.71	0.553	0.556	0.559	0.562	0.565	0.568	0.571	0.574	0.577	0.580
0.72	0.582	0.585	0.588	0.591	0.594	0.597	0.600	0.603	0.606	0.609
0.73	0.612	0.615	0.619	0.622	0.625	0.628	0.631	0.634	0.637	0.640
0.74	0.643	0.646	0.649	0.652	0.655	0.659	0.662	0.665	0.668	0.671
0.75	0.674	0.677	0.680	0.684	0.687	0.690	0.693	0.696	0.700	0.703
0.76	0.706	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722	0.725	0.729	0.732	0.735
0.77	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755	0.759	0.762	0.765	0.769
0.78	0.772	0.775	0.779	0.782	0.786	0.789	0.792	0.796	0.799	0.803
0.79	0.806	0.810	0.813	0.817	0.820	0.824	0.827	0.831	0.834	0.838
0.80	0.841	0.845	0.849	0.852	0.856	0.859	0.863	0.867	0.870	0.874

Продолжение табл. П.2

Р	Тысячные доли Р									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,81	0,878	0,881	0,885	0,889	0,893	0,896	0,900	0,904	0,908	0,911
0,82	0,915	0,919	0,923	0,927	0,931	0,935	0,938	0,942	0,946	0,950
0,83	0,954	0,958	0,962	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982	0,986	0,990
0,84	0,994	0,999	1,003	1,007	1,011	1,015	1,019	1,024	1,028	1,032
0,85	1,036	1,041	1,045	1,049	1,054	1,058	1,063	1,067	1,071	1,076
0,86	1,080	1,085	1,089	1,094	1,099	1,103	1,108	1,112	1,117	1,122
0,87	1,126	1,131	1,136	1,141	1,146	1,150	1,155	1,160	1,165	1,170
0,88	1,175	1,180	1,185	1,190	1,195	1,200	1,206	1,211	1,216	1,221
0,89	1,227	1,232	1,237	1,243	1,248	1,254	1,259	1,265	1,270	1,276
0,90	1,282	1,287	1,293	1,299	1,305	1,311	1,317	1,323	1,329	1,335
0,91	1,341	1,347	1,353	1,360	1,366	1,372	1,379	1,385	1,392	1,399
0,92	1,405	1,412	1,419	1,426	1,433	1,440	1,447	1,454	1,461	1,469
0,93	1,476	1,484	1,491	1,499	1,507	1,514	1,522	1,530	1,539	1,547
0,94	1,555	1,564	1,572	1,581	1,590	1,599	1,608	1,617	1,626	1,636
0,95	1,645	1,655	1,665	1,675	1,685	1,696	1,706	1,717	1,728	1,740
0,96	1,751	1,763	1,775	1,787	1,800	1,812	1,825	1,839	1,853	1,867
0,97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,944	1,960	1,978	1,996	2,015	2,034
0,98	2,054	2,075	2,097	2,121	2,145	2,171	2,198	2,227	2,258	2,291
0,99	2,327	2,366	2,409	2,458	2,513	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Таблица П.3. Процентные точки χ -квадрат распределения

Величины $\chi_{n,P}^2$ таковы, что $P = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\chi_{n,P}^2} x^{n/2-1} \exp \frac{x}{2} dx$

n	P						
	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500
1	0,00004	0,00016	0,00098	0,00393	0,01579	0,1015	0,4549
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,5754	1,386
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,213	2,366
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,064	1,923	3,357
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,145	1,610	2,675	4,351
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,635	2,204	3,455	5,348
7	0,9893	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,34
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,34
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,34
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,17	13,34
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,04	14,34
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,91	15,34
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,79	16,34
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,86	13,68	17,34
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	14,56	18,34
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	15,45	19,34
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	16,34	20,34
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	17,24	21,34
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	22,34
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	23,34
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	24,34
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	25,34
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	26,34
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	27,34
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	28,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	29,34
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	39,34
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	49,33
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	59,33
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	69,33
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	79,33
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	89,33
100	67,33	70,06	74,22	77,36	82,36	90,13	99,33

Продолжение табл. П.3

n	P						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,83
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60	13,82
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,34	12,84	16,27
4	5,385	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86	18,47
5	6,626	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	7,841	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	9,037	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96	26,12
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27	39,25
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16	42,31
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58	43,82
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40	45,80
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29	54,05
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
40	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49	86,66
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95	99,61
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2	112,3
80	88,13	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3	124,8
90	98,65	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3	137,2
100	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2	149,4

Таблица П.4. Процентные точки t -распределения Стьюдента

Величины $t_{n,P}$ таковы, что
$$P = \int_{-\infty}^{t_{n,P}} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$

n	P							
	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	1.003	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,935	9,925	22,323	31,593
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,511	5,841	10,213	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица П.5. Квантили распределения величины

$$v = (x_{\max} - \bar{x}) / s \text{ или } v_1 = (\bar{x} - x_{\min}) / s$$

n	α				n	α			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	15	2,326	2,493	2,638	2,800
4	1,645	1,689	1,710	1,723	16	2,354	2,523	2,670	2,837
5	1,791	1,869	1,917	1,955	17	2,380	2,551	2,701	2,871
6	1,894	1,996	2,067	2,130	18	2,404	2,577	2,728	2,903
7	1,974	2,093	2,182	2,265	19	2,426	2,600	2,754	2,932
8	2,041	2,172	2,273	2,374	20	2,447	2,623	2,778	2,959
9	2,097	2,237	2,349	2,464	21	2,467	2,644	2,801	2,984
10	2,146	2,294	2,414	2,540	22	2,486	2,664	2,823	3,008
11	2,190	2,343	2,470	2,606	23	2,504	2,683	2,843	3,030
12	2,229	2,387	2,519	2,663	24	2,520	2,701	2,862	3,051
13	2,264	2,426	2,562	2,714	25	2,537	2,717	2,880	3,071
14	2,297	2,461	2,602	2,759					

Таблица П.6. Критические значения для критерия

Колмогорова – Смирнова $D_{1-\alpha} = \lambda_{1-\alpha} / \sqrt{n}$

Объем выборки, n	Уровень значимости, α				
	0.20	.15	.10	.05	.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.829
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.734
5	0.446	0.474	0.510	0.563	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.409	0.486
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.415
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.391
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.380
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.370
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.361
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.352
25	0.21	0.22	0.24	0.264	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.242	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
40				0.21	0.25
50				0.19	0.23
60				0.17	0.21
70				0.16	0.19
80				0.15	0.18
90				0.14	
100				0.14	
$n > 100$	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Григорий Леонидович Деденко
Владимир Валериевич Кадилин
Елена Васильевна Рябева
Валерий Трофимович Самосадный

**МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЯДЕРНО-
ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Учебное пособие

Редактор Н.В. Шумакова

Оригинал-макет изготовлен В.В. Кадилиным

Подписано в печать 03.12.2008. Формат 60x84 1/16

Печ. л. 9,75. Уч.-изд.л. 9,75. Тираж 150 экз.

Изд. №4/106. Заказ №

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет),
115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.
Типография издательства "ТРОВАНТ",
г. Троицк Московской области