

В.Н.Гордеев

Законы физики ищите...  
в математике кватернионов!  
А.П. Ефремов

# **КВАТЕРНИОНЫ И ТРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Киев – 2012

## Оглавление

Предисловие .....	3
Введение .....	4
1. Математика кватернионов .....	5
1.1. Основные понятия .....	5
1.2. Кватернионные операции.....	6
1.3. Представление кватерниона с явным указанием направления векторной части .....	10
1.4. Аналитические функции кватерниона .....	10
1.5. Примеры аналитических функций .....	12
1.6. Дифференцирование аналитических функций кватерниона .....	12
1.7. Зависимости (1.65) для некоторых аналитических функций .....	14
1.8. Разложение кватерниона по заданному направлению .....	15
1.9. Производная Гато .....	15
1.10. Связь между компонентами дифференциалов аргумента и функции .....	15
1.11. Производная по скалярному аргументу.....	16
1.12. Производные скалярных функций кватерниона .....	16
1.13. Представление кватернионов матрицами.....	17
2. Ориентация твердого тела в трехмерном пространстве.....	18
2.1. Кватернион истинного поворота и половинный экспоненциальный кватернион.....	18
2.2. Привязка кватернионов к системе координат .....	19
2.3. Переход от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот .....	19
2.4. Сложение поворотов.....	20
2.5. Элементарные повороты .....	21
2.6. Применение других известных методов.....	26
3. Сферическая геометрия .....	30
3.1. Системы координат.....	30
3.2. Формулы перехода от одной системы координат к другой.....	32
3.3. Расстояния между точками на сфере .....	32
3.4. Углы между большими окружностями на сфере .....	33
3.5. Контурные на сфере.....	35
3.6. Длина контура и площадь поверхности сферы, ограниченная контуром .....	37
3.7. Круговые контуры .....	39
3.8. Полигоны на сфере .....	42
3.9. Замыкание полигона на сфере .....	44
3.10. Правильный многоугольник на сфере .....	48
3.11. Соотношение углов в сферическом треугольнике .....	52
3.12. Разгонка невязок .....	55
Заключение .....	58
Литература.....	60

## Предисловие

Я – инженер-строитель. Всю жизнь занимаюсь расчетами и исследованиями строительных металлических конструкций. В 2006 году мне удалось побывать на строительстве Олимпийского стадиона в г. Пекине. Как видно из приведенного ниже рисунка, несущие конструкции этого стадиона представляют собой хитросплетение криволинейных металлических стержней коробчатого поперечного сечения. Эти стержни были изготовлены по кускам на заводе, а потом были привезены на стройку и состыкованы. Все сошлось с миллиметровой точностью. Лишь в одном месте я заметил короткую вставку, компенсирующую, по-видимому, заводской брак при изготовлении одного из элементов.



Олимпийский стадион в Пекине

Я задумался над тем, какой математический аппарат надо применять, чтобы описывать геометрию подобных сооружений, рассчитывать их, создавать чертежи, изготавливать и монтировать. Я пришел к выводу, что лучше всего для этой цели подходит математический аппарат кватернионов.

В технических вузах кватернионы не изучают. Для меня стоило большого труда разобраться в этих четырехкомпонентных объектах, которые в литературе повсеместно представлены как гиперкомплексные числа с одной действительной и тремя специфическими мнимыми единицами. По своему опыту знаю, что инженеру более близки объекты линейной алгебры, и поэтому мне показалось, что будет более понятным для меня и моих коллег всюду представлять кватернион как четырехмерный вектор с действительными компонентами, отревшившись от кватернионных мнимостей. Я решил составить для себя справочное пособие по математике кватернионов, где кватернионы – это исключительно четырехмерные векторы и в котором нет даже упоминания о гиперкомплексных числах. Это справочное пособие я представляю читателю.

## Введение

Кватернионы были введены в математику Уильямом Роуэном Гамильтоном (William Rowan Hamilton). Они являются хорошим инструментом для решения многих задач, связанных с трехмерным пространством, и учитывают его особенности, не наблюдающиеся в произвольных  $n$ -мерных пространствах.



Уильям Роуэн Гамильтон

История о том, как Гамильтон изобрел кватернионы, приведена здесь по материалам книги [4].

В 1835 году, в возрасте 30 лет, Гамильтон научился работать с комплексными числами как с парами действительных. Вдохновленный связью между комплексными числами и двумерной геометрией, он в течение многих лет пытался изобрести похожую алгебру, которая играла бы аналогичную роль в трехмерной геометрии. То, что он искал, на современном языке называлось бы трехмерной нормированной алгеброй с делением. Причина его затруднений состояла в том, что трехмерной нормированной алгебры с делением не существует.

Но его многолетние мучения были вознаграждены. 16 октября 1843 года, прогуливаясь с женой вдоль Королевского канала по дороге на заседание

Королевской ирландской академии в Дублине, он совершил эпохальное открытие. Позже он вспоминал: «Можно сказать, я здесь и сейчас почувствовал, как электрическая цепь мысли замкнулась, а засверкавшие искры оказались фундаментальными соотношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

представленными именно в том виде, в каком я их с тех пор использовал». Тогда же Гамильтон совершил знаменитый акт математического вандализма – он вырезал эти соотношения на каменных перилах моста Брум, что иллюстрируется следующим рисунком.

Here as he walked by on the 16-th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

& cut it on a stone of this bridge.



Здесь во время прогулки 16 октября 1843 года, в гениальном озарении Сэр Уильям Роуэн Гамильтон открыл фундаментальную формулу перемножения кватернионов

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

и высек ее на камне этого моста.

Памятная табличка на мосту Брум Бридж в Дублине

Одна из причин, по которой эта история столь хорошо известна, состоит в том, что с этого момента и до конца своей жизни Гамильтон был одержим идеей исследования кватернионов и применения их в геометрии. В течение некоторого времени кватернионы действительно были в моде. В Дублине они в обязательном порядке входили в программу экзаменов, а в некоторых американских университетах кватернионы были единственным изучавшимся разделом высшей математики. Многие из того, что мы сейчас делаем со скалярами и векторами трехмерного пространства, делалось тогда с помощью вещественных и мнимых кватернионов. Возникла целая школа «кватернионщиков», которую после смерти Гамильтона возглавляли Питер Тэйт из Эдинбурга и Бенджамин Пирс из Гарварда. Тэйт написал о кватернионах восемь книг, в которых особое внимание

уделялось приложениям к физике. Когда Гиббс изобрел современные обозначения для скалярного и векторного произведений, Тэйт обозвал их «уродцами-гермафродитами». Развернулась горячая полемика, в ходе которой такие знаменитости, как Кельвин и Хевисайд, разражались убийственными высказываниями в адрес кватернионов. В конце концов кватернионы были побеждены и приобрели несколько дурную репутацию, от которой они в полной мере так и не избавились.

Добавим, что хотя Гамильтон действительно был первым, кто построил кватернионы как алгебру, у кватернионов есть и более ранняя история, начинающаяся с открытия Эйлером в 1748 году тождества четырех квадратов. Кроме того, О. Родригес в своих исследованиях параметризовал общий поворот с помощью четырех чисел, являющихся фактически координатами соответствующего кватерниона. Это позволяет рассматривать его как предвестника идей Гамильтона, поскольку приводимое им правило умножения совпадает с формулой Гамильтона для произведения двух кватернионов.

## 1. Математика кватернионов

### 1.1. Основные понятия

Кватернион – это упорядоченная четверка действительных чисел:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3], \quad (1.1)$$

содержащая в себе информацию о скаляре и трехмерном векторе. Кватернион условимся обозначать жирными прямыми символами, а его компоненты (числа из четверки) теми же, но тощими наклонными символами с нижним индексом. Кватернион в компонентах будем изображать в виде строки или столбца (в зависимости от удобства написания) в квадратных скобках.

В кватернионе различают скалярную часть (scalar-part):

$$\text{scal } \mathbf{q} = q_0; \quad (1.2)$$

представляющую собой скаляр, и векторную часть (vector-part):

$$\text{vect } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \quad (1.3)$$

представляющую собой трехмерный вектор.

Кватернион, имеющий только скалярную часть,

$$\mathbf{q} = [q_0, 0, 0, 0]; \quad (1.4)$$

называется чисто скалярным (scalar quaternion).

Кватернион, имеющий только векторную часть,

$$\mathbf{q} = [0, q_1, q_2, q_3]; \quad (1.5)$$

называется чисто векторным (right quaternion).

Для кватерниона определено несколько скалярных характеристик.

1. Норма (norm):

$$\|\mathbf{q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \quad (1.6)$$

2. Модуль (modulus):

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}; \quad (1.7)$$

3. Модуль векторной части:

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}; \quad (1.8)$$

для обозначения которого будем использовать идентификатор кватерниона в угловых скобках.

4. Аргумент (argument, phase) – угловая величина, равная аргументу комплексного числа с действительной частью  $q_0$  и мнимой частью  $\langle \mathbf{q} \rangle$  (рис. 1.1), принимающая значения из замкнутого интервала  $[0, \pi]$ .

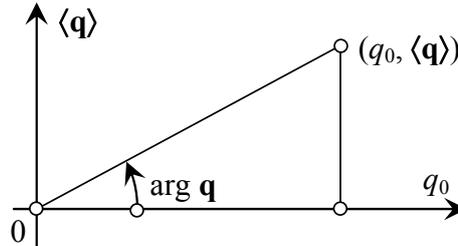


Рис. 1.1. К вопросу определения аргумента

Аргумент кватерниона обычно определяют формулой:

$$\arg \mathbf{q} = \arccos \frac{q_0}{|\mathbf{q}|}. \quad (1.9)$$

Однако эта формула плохо обусловлена вблизи краев интервала. Для вычислений лучше использовать встроенные функции  $\arg(x + i \cdot y)$  (комплексного числа) или  $\text{atan2}(x, y)$ , имеющиеся во многих математических программах и использующие не только скалярную часть кватерниона и его модуль, но и модуль векторной его части:

$$\arg \mathbf{q} = \arg[q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle] = \text{atan2}[q_0; \langle \mathbf{q} \rangle]. \quad (1.10)$$

Как следует из формул (1.6) и (1.7), норма и модуль кватерниона равны нулю только для нулевого кватерниона, обозначаемого:

$$\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0]. \quad (1.11)$$

Аргумент нулевого кватерниона не определен.

5. Кватернион является нормированным (normed), если его норма равна единице. Верзором (versor) или знаком (sign) кватерниона будем называть нормированный кватернион, полученный на его основе:

$$\text{vers } \mathbf{q} = \text{sgn } \mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}. \quad (1.12)$$

## 1.2. Кватернионные операции

1. Кватернионное сопряжение (conjugating), обозначаемое чертой над идентификатором, определяется следующим образом:

$$\bar{\mathbf{q}} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] \quad (1.13)$$

В результате кватернионного сопряжения получается кватернион.

2. Кватернионное сложение (addition), обозначаемое знаком +, определяется формулой:

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 + p_0 \\ q_1 + p_1 \\ q_2 + p_2 \\ q_3 + p_3 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Кватернионы складываются покомпонентно. В результате кватернионного сложения получается кватернион. Сложение кватернионов коммутативно.

Аналогично определяется и кватернионное вычитание (subtraction):

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 - p_0 \\ q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overline{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{q}}; \quad \overline{\mathbf{p} - \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{q}}. \quad (1.16)$$

3. Умножение числа на кватернион или кватерниона на число, обозначаемое знаком  $\cdot$ , определяется формулой:

$$a \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot a = \begin{bmatrix} a \cdot q_0 \\ a \cdot q_1 \\ a \cdot q_2 \\ a \cdot q_3 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

В результате умножения числа на кватернион или кватерниона на число получается кватернион. Операция коммутативна.

4. Кватернионное умножение (quaternion multiplication, Grassmann multiplication), обозначаемое знаком  $\circ$ , определяется формулой:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 \cdot p_0 - q_1 \cdot p_1 - q_2 \cdot p_2 - q_3 \cdot p_3 \\ q_0 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_0 + q_2 \cdot p_3 - q_3 \cdot p_2 \\ q_0 \cdot p_2 - q_1 \cdot p_3 + q_2 \cdot p_0 + q_3 \cdot p_1 \\ q_0 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 + q_3 \cdot p_0 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

В результате кватернионного умножения получается кватернион.

Кватернионное умножение некоммутативно (noncommutative), т. е. его результат в общем случае зависит от порядка сомножителей.

Рассмотрим некоторые свойства кватернионного умножения.

Умножение кватернионов ассоциативно:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{r} = (\mathbf{q} \circ \mathbf{p}) \circ \mathbf{r} = \mathbf{q} \circ (\mathbf{p} \circ \mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Умножение кватернионов дистрибутивно по отношению к суммированию:

$$\mathbf{q} \circ (\mathbf{p} + \mathbf{r}) = \mathbf{q} \circ \mathbf{p} + \mathbf{q} \circ \mathbf{r}; \quad (\mathbf{p} + \mathbf{r}) \circ \mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \mathbf{q} + \mathbf{r} \circ \mathbf{q}. \quad (1.20)$$

Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей:

$$\text{scal}(\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r}) = \text{scal}(\mathbf{r} \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{q}) = \text{scal}(\mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{p}). \quad (1.21)$$

В частности, скалярная часть произведения двух кватернионов не зависит от порядка сомножителей:

$$\text{scal}(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}) = \text{scal}(\mathbf{q} \circ \mathbf{p}). \quad (1.22)$$

Сопряженное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых в обратном порядке:

$$\overline{\mathbf{p} \circ \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \circ \bar{\mathbf{p}}. \quad (1.23)$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\overline{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{s}} = \bar{\mathbf{s}} \circ \bar{\mathbf{r}} \circ \bar{\mathbf{q}} \circ \bar{\mathbf{p}}. \quad (1.24)$$

Норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей:

$$\|\mathbf{p} \circ \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\|. \quad (1.25)$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$\|\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{s}\| = \|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\| \cdot \|\mathbf{r}\| \cdot \|\mathbf{s}\|. \quad (1.26)$$

Единичным по умножению является тождественный (identical) кватернион:

$$\mathbf{I} = [1, 0, 0, 0]. \quad \mathbf{I} \circ \mathbf{q} = \mathbf{q} \circ \mathbf{I} = \mathbf{q}. \quad (1.27)$$

Умножение произвольного кватерниона на тождественный хоть справа, хоть слева не изменяет исходный кватернион.

Произведение (product) кватерниона на сопряженный ему выражается формулой:

$$\mathbf{q} \circ \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{q} = [\|\mathbf{q}\|, 0, 0, 0] = \|\mathbf{q}\| \cdot \mathbf{I}. \quad (1.28)$$

5. Представляют интерес еще две операции над кватернионами. Первая из них называется скалярным произведением (scalar product) и выражается формулой:

$$\mathbf{s} = \frac{\bar{\mathbf{p}} \circ \mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

В результате этой операции получается чисто скалярный кватернион, скалярная часть которого равна скалярному произведению кватернионов-сомножителей, если их рассматривать как четырехмерные векторы, а векторная часть равна нулю.

Вторая операция называется векторным произведением (vector cross product). Она выражается формулой:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

В результате этой операции получается чисто векторный кватернион, скалярная часть которого равна нулю, а векторная часть равна векторному произведению векторных частей кватернионов-сомножителей. Формулу (1.30) можно по-иному записать так:

$$\text{vect} \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \text{vect} \mathbf{p} \times \text{vect} \mathbf{q}. \quad (1.31)$$

Два кватерниона  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  называются коллинеарными, если коллинеарны их векторные части, то есть когда векторное произведение этих кватернионов равно нулевому кватерниону:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} \circ \mathbf{q} - \mathbf{q} \circ \mathbf{p}}{2} = \mathbf{0}. \quad (1.32)$$

Из этой формулы следует, что коллинеарные кватернионы коммутируют при умножении.

6. Интересен результат умножения чисто векторных кватернионов:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3 \\ p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ p_3 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_3 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

В результате этой операции получается кватернион общего вида, скалярная часть которого равна скалярному произведению векторных частей сомножителей, взятому с обратным знаком, а векторная часть равна векторному произведению векторных частей сомножителей.

7. Интересен результат умножения кватернионов с двумя нулевыми векторными компонентами:

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \cdot q_0 - p_1 \cdot q_1 \\ p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Из этой формулы вытекает, что кватернионы такого вида перемножаются как комплексные числа. В скалярной части кватерниона находится действительная часть, а в векторной части – мнимая часть комплексного числа. Так, если обозначить:

$$P = p_0 + i \cdot p_1; \quad Q = q_0 + i \cdot q_1; \quad R = r_0 + i \cdot r_1; \quad (1.35)$$

то будет справедлива следующая формула:

$$P \cdot Q = R; \quad (1.36)$$

8. Обращение (inversion) кватерниона, обозначаемое степенью минус единица, определяется формулой:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|}. \quad (1.37)$$

В результате умножения кватерниона на обратный (reciprocal) ему и справа, и слева, получаем тождественный кватернион:

$$\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{q} = \mathbf{I}. \quad (1.38)$$

Нормы и модули взаимно-обратных кватернионов взаимно-обратны:

$$\|\mathbf{q}^{-1}\| = \|\mathbf{q}\|^{-1}; \quad |\mathbf{q}^{-1}| = |\mathbf{q}|. \quad (1.39)$$

Кватернион, обратный сопряженному, равен сопряженному от обратного кватерниона.

$$\bar{\mathbf{q}}^{-1} = \overline{\mathbf{q}^{-1}}; \quad (1.40)$$

то есть операции обращения и сопряжения перестановочны.

Обратное значение от произведения двух кватернионов равно произведению их обратных значений, взятых в обратном порядке:

$$(\mathbf{p} \circ \mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}. \quad (1.41)$$

По индукции это правило распространяется на любое число сомножителей:

$$(\mathbf{p} \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{r} \circ \mathbf{s})^{-1} = \mathbf{s}^{-1} \circ \mathbf{r}^{-1} \circ \mathbf{q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}. \quad (1.42)$$

### 1.3. Представление кватерниона с явным указанием направления векторной части

В кватернионном анализе распространенными являются операции с коллинеарными кватернионами. При работе с множеством коллинеарных кватернионов удобно зафиксировать направление векторной части этого множества, которое будет константой при всех преобразованиях, а переменными оставить два числа – скалярную часть  $q_0$  и величину векторной части кватерниона  $v$ . Для задания направления векторной части условимся использовать направляющие косинусы  $k_1, k_2, k_3$ , удовлетворяющие соотношению:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1. \quad (1.43)$$

С учетом этого кватернион  $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$  можно представить пятью числами:  $k_1, k_2, k_3, q_0, v$ , притом двумя различными способами:

$$k_1 = \pm \frac{q_1}{\langle \mathbf{q} \rangle}; k_2 = \pm \frac{q_2}{\langle \mathbf{q} \rangle}; k_3 = \pm \frac{q_3}{\langle \mathbf{q} \rangle}; \quad v = \pm \langle \mathbf{q} \rangle. \quad (1.44)$$

Знаки в формуле (1.44) можно выбрать произвольно: либо все верхние, либо все нижние. Важно, чтобы компоненты векторной части кватерниона выражались по формулам:

$$q_1 = k_1 \cdot v; \quad q_2 = k_2 \cdot v; \quad q_3 = k_3 \cdot v. \quad (1.45)$$

Использование привязки к направлению векторной части кватерниона в ряде случаев позволяет получить более простые формулы и избежать дополнительных оговорок в части знаков компонентов. Это объясняется тем, что в формулах с привязкой к направлению векторной части вместо неотрицательной величины  $\langle \mathbf{q} \rangle$  используется величина векторной части  $v$ , которая может быть как положительной, так и отрицательной. При этом формулы оказываются верными при любом знаке  $v$ .

Варьируя  $q_0$  и  $v$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  при фиксированных  $k_1, k_2, k_3$ , получим исчерпывающее множество кватернионов, коллинеарных направлению  $k_1, k_2, k_3$  и, естественно, коллинеарных между собой. Это множество кватернионов содержит в себе сонаправленные ( $v > 0$ ), противоположенные ( $v < 0$ ) и чисто скалярный кватернион ( $v = 0$ ), который можно считать коллинеарным любому направлению.

### 1.4. Аналитические функции кватерниона

Рассмотрим функцию, аргументом которой является кватернион и значением которой является тоже кватернион. Будем полагать, что эта функция задана, если заданы функциональные зависимости, выражающие компоненты кватерниона-функции через компоненты кватерниона-аргумента. Если  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  – кватернион-функция, а  $\mathbf{q}$  – кватернион-аргумент, то функциональная зависимость между этими кватернионами может быть задана четырьмя функциями от четырех переменных:

$$F_0 = f_0(q_0, q_1, q_2, q_3); F_1 = f_1(q_0, q_1, q_2, q_3); F_2 = f_2(q_0, q_1, q_2, q_3); F_3 = f_3(q_0, q_1, q_2, q_3). \quad (1.46)$$

Аргументами и функциями в зависимостях (1.46) являются действительные числа.

Аналитической называют функцию, которую можно представить суммой степенного ряда (ряда Тейлора) в окрестности любой точки ее определения. При вычислении суммы

степенного ряда используются только операции сложения и умножения. Такие операции определены и для кватернионов. Это дает принципиальную возможность построения аналитических кватернионных функций.

Заметим, что сумма коллинеарных кватернионов коллинеарна слагаемым; произведение коллинеарных кватернионов – коллинеарно сомножителям. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Отсюда вытекает, что сумма степенного ряда от одного кватерниона коллинеарна этому кватерниону. Следовательно, аналитическая функция кватерниона, если она существует, коллинеарна кватерниону-аргументу.

Пусть мы имеем два коллинеарных кватерниона, заданные с явным указанием одного и того же направления векторной части:  $\mathbf{q1} = [q1_0, k_1 \cdot v1, k_2 \cdot v1, k_3 \cdot v1]$ , и  $\mathbf{q2} = [q2_0, k_1 \cdot v2, k_2 \cdot v2, k_3 \cdot v2]$ . Рассмотрим сумму  $\mathbf{qs} = [qs_0, k_1 \cdot vs, k_2 \cdot vs, k_3 \cdot vs]$ , и произведение  $\mathbf{qp} = [qp_0, k_1 \cdot vp, k_2 \cdot vp, k_3 \cdot vp]$  этих кватернионов. Выполняя операции над кватернионами по формальным правилам, получаем:

$$qs_0 = q1_0 + q2_0; \quad vs = v1 + v2; \quad qp_0 = q1_0 \cdot q2_0 - v1 \cdot v2; \quad vp = q1_0 \cdot v2 + q2_0 \cdot v1. \quad (1.47)$$

Нетрудно заметить, что величины скалярных частей кватернионов ведут себя как действительные части комплексного числа, а величины векторных частей кватернионов ведут себя как мнимые части комплексного числа. Действительно,

$$\begin{aligned} (q1_0 + i \cdot v1) + (q2_0 + i \cdot v2) &= (q1_0 + q2_0) + i \cdot (v1 + v2) = qs_0 + i \cdot vs; \\ (q1_0 + i \cdot v1) \cdot (q2_0 + i \cdot v2) &= (q1_0 \cdot q2_0 - v1 \cdot v2) + i \cdot (q1_0 \cdot v2 + q2_0 \cdot v1) = qp_0 + i \cdot vp. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Из этого можно сделать вывод о том, что аналитические функции кватерниона можно строить как комплексные аналитические функции. По известной комплексной аналитической функции  $F$  можно построить аналитическую кватернионную функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ . Если положить  $\mathbf{q} = [q_0, k_1 \cdot vq, k_2 \cdot vq, k_3 \cdot vq]$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = [F_0, k_1 \cdot vF, k_2 \cdot vF, k_3 \cdot vF]$ , то для построения аналитической кватернионной функции можно воспользоваться зависимостями:

$$F_0 + i \cdot vF = F(q_0 + i \cdot vq); \quad (1.49)$$

или

$$F_0 = \text{Re } F(q_0 + i \cdot vq); \quad vF = \text{Im } F(q_0 + i \cdot vq). \quad (1.50)$$

В формулах (1.48) – (1.50)  $i$  – мнимая единица;  $\text{Re}$  – действительная часть комплексного числа;  $\text{Im}$  – мнимая часть комплексного числа.

Как следует из формулы (1.44), кватернион  $\mathbf{q}$  можно представить при помощи пяти чисел двумя способами – и как  $q_0, k_1, k_2, k_3, vq$ , и как  $q_0, -k_1, -k_2, -k_3, -vq$ . Естественно потребовать, чтобы независимо от формы представления, одному и тому же аргументу соответствовала бы одна и та же функция. Для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$F_0 - i \cdot vF = F(q_0 - i \cdot vq); \quad (1.51)$$

Как следует из работы [9], для соблюдения условий (1.51) функция  $F$  как функция комплексной переменной должна принимать на действительной оси действительные значения или, что то же самое, быть аналитическим продолжением на комплексную плоскость аналитической функции действительной переменной, заданной на действительной оси. При этом формулы (1.50) можно представить в следующем виде:

$$F_0 = \frac{F(q_0 + i \cdot vq) + F(q_0 - i \cdot vq)}{2}; \quad vF = \frac{F(q_0 + i \cdot vq) - F(q_0 - i \cdot vq)}{2 \cdot i} \quad (1.52)$$

Таким образом, аналитическая функция действительной переменной порождает

аналитическую кватернионную функцию. Естественно кватернионную функцию, полученную таким образом, назвать именем породившей ее аналитической функции действительной переменной.

### 1.5. Примеры аналитических функций

Вот некоторые примеры аналитических функций от кватерниона.

1. Экспонента и натуральный логарифм:

$$\exp \mathbf{q} = \exp q_0 \cdot \begin{bmatrix} \cos vq \\ k_1 \cdot \sin vq \\ k_2 \cdot \sin vq \\ k_3 \cdot \sin vq \end{bmatrix}; \quad \ln \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \ln |\mathbf{q}| \\ k_1 \cdot \theta \\ k_2 \cdot \theta \\ k_3 \cdot \theta \end{bmatrix}; \quad (1.53)$$

$$\theta = \arg(q_0 + i \cdot vq) + 2 \cdot \pi \cdot n = \operatorname{atan} 2(q_0, vq) + 2 \cdot \pi \cdot n; \quad (1.54)$$

где  $n$  – произвольное целое число.

Таким образом, логарифм кватерниона – многозначная функция.

2. Синус и косинус:

$$\sin \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \sin q_0 \cdot \operatorname{ch} vq \\ k_1 \cdot \cos q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \\ k_2 \cdot \cos q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \\ k_3 \cdot \cos q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \end{bmatrix}; \quad \cos \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos q_0 \cdot \operatorname{ch} vq \\ -k_1 \cdot \sin q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \\ -k_2 \cdot \sin q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \\ -k_3 \cdot \sin q_0 \cdot \operatorname{sh} vq \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

3. Гиперболический синус и гиперболический косинус:

$$\operatorname{sh} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \operatorname{sh} q_0 \cdot \cos vq \\ k_1 \cdot \operatorname{ch} q_0 \cdot \sin vq \\ k_2 \cdot \operatorname{ch} q_0 \cdot \sin vq \\ k_3 \cdot \operatorname{ch} q_0 \cdot \sin vq \end{bmatrix}; \quad \operatorname{ch} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} q_0 \cdot \cos vq \\ k_1 \cdot \operatorname{sh} q_0 \cdot \sin vq \\ k_2 \cdot \operatorname{sh} q_0 \cdot \sin vq \\ k_3 \cdot \operatorname{sh} q_0 \cdot \sin vq \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

4. Корень квадратный:

$$\sqrt{\mathbf{q}} = \pm \left[ \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2}}; k_1 \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}}; k_2 \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}}; k_3 \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}} \right]. \quad (1.57)$$

Корень квадратный от кватерниона – функция двузначная.

Поскольку аналитические функции одного и того же кватерниона коллинеарны кватерниону-аргументу и между собой, они перестановочны при умножении.

### 1.6. Дифференцирование аналитических функций кватерниона

Пусть имеем кватернион  $\mathbf{q}$  и дифференциал этого кватерниона  $d\mathbf{q}$  с компонентами:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]; \quad d\mathbf{q} = [dq_0, dq_1, dq_2, dq_3]. \quad (1.58)$$

Пусть задана функция этого кватерниона  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ , то есть, заданы функциональные зависимости, выражающие компоненты кватерниона-функции через компоненты кватерниона-аргумента. Таким образом, речь идет о четырех скалярных функциях от четырех скалярных аргументов:

$$F_i(q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (1.59)$$

Требуется выразить дифференциал кватерниона-функции  $\mathbf{dF}$  через дифференциал кватерниона-аргумента  $\mathbf{dq}$ . В покомпонентной записи результат записывается так:

$$dF_i = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \cdot dq_j \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (1.60)$$

Рассмотрим аналитическую функцию кватерниона, которая, как известно, коллинеарна своему аргументу. Если кватернион-аргумент представить в виде:

$$\mathbf{q} = [q_0, k_1 \cdot \nu q, k_2 \cdot \nu q, k_3 \cdot \nu q]; \quad (1.61)$$

то кватернион-функцию можно будет представить в виде

$$\mathbf{F} = [F_0, k_1 \cdot \nu F, k_2 \cdot \nu F, k_3 \cdot \nu F]; \quad (1.62)$$

а кватернион-производную от этой функции – в виде:

$$\mathbf{D} = [D_0, k_1 \cdot \nu D, k_2 \cdot \nu D, k_3 \cdot \nu D]; \quad (1.63)$$

где:

$$F_0 = \frac{F(\lambda) + F(\bar{\lambda})}{2}; \nu F = \frac{F(\lambda) - F(\bar{\lambda})}{2 \cdot i}; D_0 = \frac{F'(\lambda) + F'(\bar{\lambda})}{2}; \nu D = \frac{F'(\lambda) - F'(\bar{\lambda})}{2 \cdot i}; \quad (1.64)$$

$$\lambda = q_0 + i \cdot \nu q; \quad \bar{\lambda} = q_0 - i \cdot \nu q;$$

$i$  – мнимая единица.

Функция  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  является аналитической функцией-производной от изучаемой функции  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$ . Например, если  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2$ , то  $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = 2 \cdot \mathbf{q}$ , если  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \sin(\mathbf{q})$ , то  $\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{q})$ .

В этом случае соотношения (1.60) в матрично-векторной форме будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} dF_0 \\ dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 & -k_1 \cdot \nu D & -k_2 \cdot \nu D & -k_3 \cdot \nu D \\ k_1 \cdot \nu D & T - k_1^2 \cdot (T - D_0) & -k_1 \cdot k_2 \cdot (T - D_0) & -k_1 \cdot k_3 \cdot (T - D_0) \\ k_2 \cdot \nu D & -k_2 \cdot k_1 \cdot (T - D_0) & T - k_2^2 \cdot (T - D_0) & -k_2 \cdot k_3 \cdot (T - D_0) \\ k_3 \cdot \nu D & -k_3 \cdot k_1 \cdot (T - D_0) & -k_3 \cdot k_2 \cdot (T - D_0) & T - k_3^2 \cdot (T - D_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix}; \quad (1.65)$$

где

$$T = \frac{\nu F}{\nu q}. \quad (1.66)$$

Зависимости, обратные (1.65), имеют вид:

$$\begin{bmatrix} dq_0 \\ dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} & k_1 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} & k_2 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} & k_3 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} \\ -k_1 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} & \frac{1}{T} - k_1^2 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & -k_1 \cdot k_2 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & -k_1 \cdot k_3 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) \\ -k_2 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} & -k_2 \cdot k_1 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & \frac{1}{T} - k_2^2 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & -k_2 \cdot k_3 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) \\ -k_3 \cdot \frac{\nu D}{\|\mathbf{D}\|} & -k_3 \cdot k_1 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & -k_3 \cdot k_2 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) & \frac{1}{T} - k_3^2 \cdot \left( \frac{1}{T} - \frac{D_0}{\|\mathbf{D}\|} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dF_0 \\ dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{bmatrix}; \quad (1.67)$$

куда входит норма кватерниона  $\mathbf{D}$ :

$$\|\mathbf{D}\| = D_0^2 + \nu D^2. \quad (1.68)$$

### 1.7. Зависимости (1.65) для некоторых аналитических функций

Зависимость (1.65) будет полностью определена, если известны выражения для  $D_0$ ,  $\nu D$  и  $T$ . Представим соответствующие выражения для различных видов аналитических функций.

*Тождественная функция.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}; \quad D_0 = 1; \quad \nu D = 0; \quad T = 1. \quad (1.69)$$

*Обратная функция.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1}; \quad D_0 = -\frac{q_0^2 - \nu q^2}{(q_0^2 + \nu q^2)^2}; \quad \nu D = \frac{2 \cdot q_0 \cdot \nu q}{(q_0^2 + \nu q^2)^2}; \quad T = -\frac{1}{q_0^2 + \nu q^2}. \quad (1.70)$$

*Квадрат.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2; \quad D_0 = 2 \cdot q_0; \quad \nu D = 2 \cdot \nu q; \quad T = 2 \cdot q_0. \quad (1.71)$$

*Корень квадратный.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \sqrt{\mathbf{q}}; \quad D_0 = \pm \frac{1}{2 \cdot |\mathbf{q}|} \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| + q_0}{2}}; \quad \nu D = \mp \frac{1}{2 \cdot |\mathbf{q}|} \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}}; \quad T = \pm \frac{1}{\nu q} \cdot \sqrt{\frac{|\mathbf{q}| - q_0}{2}}. \quad (1.72)$$

*Экспонента.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \exp(\mathbf{q}); \quad D_0 = \exp(q_0) \cdot \cos \nu q; \quad \nu D = \exp(q_0) \cdot \sin \nu q; \quad T = \exp(q_0) \cdot \frac{\sin \nu q}{\nu q}. \quad (1.73)$$

*Логарифм натуральный.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \ln \mathbf{q}; \quad D_0 = \frac{q_0}{q_0^2 + \nu q^2}; \quad \nu D = -\frac{\nu q}{q_0^2 + \nu q^2}; \quad T = \frac{\arg(q_0 + i \cdot \nu q) + 2 \cdot \pi \cdot n}{\nu q}; \quad (1.74)$$

где  $n$  – любое целое число.

*Синус.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \sin \mathbf{q}; \quad D_0 = \cos q_0 \cdot \operatorname{ch} \nu q; \quad \nu D = -\sin q_0 \cdot \operatorname{sh} \nu q; \quad T = \cos q_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu q}{\nu q}. \quad (1.75)$$

*Косинус.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \cos \mathbf{q}; \quad D_0 = -\sin q_0 \cdot \operatorname{ch} \nu q; \quad \nu D = -\cos q_0 \cdot \operatorname{sh} \nu q; \quad T = -\sin q_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} \nu q}{\nu q}. \quad (1.76)$$

*Синус гиперболический.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \operatorname{sh} \mathbf{q}; \quad D_0 = \operatorname{ch} q_0 \cdot \cos \nu q; \quad \nu D = \operatorname{sh} q_0 \cdot \sin \nu q; \quad T = \operatorname{ch} q_0 \cdot \frac{\sin \nu q}{\nu q}. \quad (1.77)$$

*Косинус гиперболический.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \operatorname{ch} \mathbf{q}; \quad D_0 = \operatorname{sh} q_0 \cdot \cos \nu q; \quad \nu D = \operatorname{ch} q_0 \cdot \sin \nu q; \quad T = \operatorname{sh} q_0 \cdot \frac{\sin \nu q}{\nu q}. \quad (1.78)$$

Для некоторых функций зависимость дифференциала функции от дифференциала аргумента выражаются простыми формулами. Ниже приведены примеры.

Для функции  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2$ :

$$dF = \mathbf{q} \circ d\mathbf{q} + d\mathbf{q} \circ \mathbf{q}. \quad (1.79)$$

Для функции  $F(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^3$ :

$$dF = \mathbf{q}^2 \circ d\mathbf{q} + \mathbf{q} \circ d\mathbf{q} \circ \mathbf{q} + d\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^2. \quad (1.80)$$

Для функции  $F(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^{-1}$ :

$$dF = -\mathbf{q}^{-1} \circ d\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^{-1}. \quad (1.81)$$

### 1.8. Разложение кватерниона по заданному направлению

Рассмотрим произвольный кватернион  $\mathbf{a}$  и произвольное направление в трехмерном пространстве, заданное направляющими косинусами  $k_1, k_2, k_3$ .

Кватернион  $\mathbf{a}$  можно представить в виде суммы двух кватернионов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{ac} + \mathbf{an}; \quad (1.82)$$

первый из которых коллинеарен заданному направлению и выражается формулой

$$\mathbf{ac} = [a_0, k_1 \cdot vac, k_2 \cdot vac, k_3 \cdot vac]; \quad (1.83)$$

где

$$vac = k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2 + k_3 \cdot a_3; \quad (1.84)$$

а второй (чисто векторный) нормален ему:

$$\mathbf{an} = \mathbf{a} - \mathbf{ac}. \quad (1.85)$$

### 1.9. Производная Гато

Производная Гато кватернионной функции определяется согласно формуле:

$$\partial F(\mathbf{q})(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{q} + t \cdot \mathbf{a}) - F(\mathbf{q})}{t}; \quad (1.86)$$

где  $\mathbf{q}$  – кватернион-аргумент,  $F(\mathbf{q})$  – кватернион-функция,  $\partial F(\mathbf{q})(\mathbf{a})$  – кватернион-производная,  $\mathbf{a}$  – заданный постоянный кватернион,  $t$  – действительная переменная.

Если в соответствии с правилами раздела 0 кватернион  $\mathbf{a}$  представить в виде суммы двух кватернионов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{ac} + \mathbf{an}; \quad (1.87)$$

первый из которых коллинеарен кватерниону-аргументу  $\mathbf{q}$ , а второй нормален ему, то с их помощью формула (1.86) может быть записана следующим образом:

$$\partial F(\mathbf{q})(\mathbf{a}) = D(\mathbf{q}) \circ \mathbf{ac} + T \cdot \mathbf{an}. \quad (1.88)$$

### 1.10. Связь между компонентами дифференциалов аргумента и функции

Формула (1.65) выражает зависимость между компонентами дифференциала аргумента  $d\mathbf{q}$  и дифференциала аналитической функции  $dF$ . Представим эти дифференциалы разложенными на два слагаемых в соответствии с направлением, связанным с аргументом  $\mathbf{q}$  и имеющим направляющие косинусы  $k_1, k_2, k_3$ :

$$d\mathbf{q} = d\mathbf{qc} + d\mathbf{qn}; \quad dF = dF_c + dF_n; \quad (1.89)$$

причем

$$d\mathbf{qc} = [dq_0, k_1 \cdot vdqc, k_2 \cdot vdqc, k_3 \cdot vdqc]; \quad dF_c = [dF_0, k_1 \cdot vdFc, k_2 \cdot vdFc, k_3 \cdot vdFc]; \quad (1.90)$$

где

$$vdqc = k_1 \cdot dq_1 + k_2 \cdot dq_2 + k_3 \cdot dq_3; \quad vdFc = k_1 \cdot dF_1 + k_2 \cdot dF_2 + k_3 \cdot dF_3. \quad (1.91)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливы зависимости:

$$dFc = D \circ dqc; \quad dFn = T \cdot dqn; \quad (1.92)$$

эквивалентные зависимостям (1.65). Обозначения такие же, как в разделе 1.6.

Справедливы и обратные зависимости

$$dqc = D^{-1} \circ dFc; \quad dqn = T^{-1} \cdot dFn; \quad (1.93)$$

эквивалентные векторно-матричной формуле (1.67).

Таким образом, вместо использования формул (1.65), можно разложить дифференциал аргумента  $d\mathbf{q}$  на составляющие  $d\mathbf{q}c$  и  $d\mathbf{q}n$  и воспользоваться кватернионными формулами (1.92) для получения двух составляющих дифференциала функции  $d\mathbf{F}c$  и  $d\mathbf{F}n$ . Такой подход может оказаться удобным при выполнении аналитических преобразований.

### 1.11. Производная по скалярному аргументу

Рассмотрим случай, когда кватернион-аргумент  $\mathbf{q}$  является функцией скалярной переменной  $t$ . При этом кватернион-функция  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  тоже будет функцией  $t$ . Требуется выразить производную по  $t$  кватерниона-функции  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  через производную по  $t$  кватерниона-аргумента  $\mathbf{q}$ .

Производную кватерниона  $\mathbf{q}(t)$  по скалярной переменной  $t$  следует понимать так:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{q}(t)}{\Delta t} \right] = \left[ \frac{dq_0(t)}{dt}, \frac{dq_1(t)}{dt}, \frac{dq_2(t)}{dt}, \frac{dq_3(t)}{dt} \right]. \quad (1.94)$$

Выполняя дифференцирование зависимостей (1.59) и сопоставляя результаты с формулами (1.86) – (1.88), приходим к выводу о том, что:

$$\frac{d\mathbf{F}[\mathbf{q}(t)]}{dt} = \partial\mathbf{F}[\mathbf{q}(t)] \left( \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \right). \quad (1.95)$$

### 1.12. Производные скалярных функций кватерниона

Будем рассматривать следующие скалярные функции кватернионного аргумента  $\mathbf{q}$ :

- $\text{scal}(\mathbf{q})$  – скалярная часть кватерниона;
- $\|\mathbf{q}\|$  – норма кватерниона;
- $|\mathbf{q}|$  – модуль кватерниона;
- $\langle \mathbf{q} \rangle$  – модуль векторной части кватерниона;
- $\text{arg}(\mathbf{q})$  – аргумент кватерниона,

определенные в разделе 1.1.

Во многих задачах возникает необходимость дифференцировать скалярную функцию кватернионного аргумента по кватерниону (точнее, по компонентам кватерниона). Результат такого дифференцирования может быть представлен в форме кватерниона. Если

$$f(\mathbf{q}) = f(q_0; q_1; q_2; q_3) \quad (1.96)$$

– скалярная функция кватернионного аргумента  $\mathbf{q}$ , то производную от этой функции по аргументу  $\mathbf{q}$  будем полагать кватернионом со следующими компонентами:

$$\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_0}, \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_1}, \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_2}, \frac{\partial f(q_0; q_1; q_2; q_3)}{\partial q_3} \right]. \quad (1.97)$$

При таком представлении полный дифференциал скалярной функции кватерниона можно

вычислять по формуле:

$$df(\mathbf{q}) = \text{scal} \left( \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \circ d\mathbf{q} \right); \quad (1.98)$$

где  $d\mathbf{q}$  – дифференциал кватерниона, определенный в формуле (1.58).

Приведем формулы для производных скалярных функций кватерниона.

1.12.1. Производная от скалярной части кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \text{scal}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}; \quad (1.99)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный кватернион.

1.12.2. Производная от нормы кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \|\mathbf{q}\| = 2 \cdot \mathbf{q}. \quad (1.100)$$

1.12.3. Производная от модуля кватерниона

$$\frac{\partial |\mathbf{q}|}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}. \quad (1.101)$$

1.12.4. Производная от модуля векторной части

$$\frac{\partial \langle \mathbf{q} \rangle}{\partial \mathbf{q}} = \left[ 0; \frac{q_1}{\langle \mathbf{q} \rangle}; \frac{q_2}{\langle \mathbf{q} \rangle}; \frac{q_3}{\langle \mathbf{q} \rangle} \right] = \frac{\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}}{2 \cdot \langle \mathbf{q} \rangle}. \quad (1.102)$$

1.12.5. Производная от аргумента кватерниона

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \arg(\mathbf{q}) = \left[ -\frac{\langle \mathbf{q} \rangle}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_1}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_2}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|}; \frac{q_3}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \frac{q_0}{\|\mathbf{q}\|} \right]. \quad (1.103)$$

### 1.13. Представление кватернионов матрицами

Известно, что существует изоморфизм между кватернионами  $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$  и квадратными матрицами четвертого порядка специального вида

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (1.104)$$

в отношении кватернионных и матричных операций. Так кватерниону  $\mathbf{q}$  соответствует матрица  $\mathbf{Q}$  вида (1.104), единичному кватерниону – единичная матрица, нулевому кватерниону – нулевая матрица, сопряженному кватерниону – транспонированная матрица, обратному кватерниону – обратная матрица; сложению кватернионов соответствует сложение матриц, умножению кватернионов – умножение матриц, умножению кватерниона на число – умножение матрицы на число; функции кватерниона – одноименная функция матрицы. Этот изоморфизм позволяет перенести закономерности, имеющие место для матриц, на кватернионы, и наоборот.

Рассмотрим некоторые свойства матриц вида (1.104).

Детерминант этой матрицы выражается формулой:

$$\det \mathbf{Q} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2 = |\mathbf{q}|^4; \quad (1.105)$$

где  $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$  – модуль кватерниона.

Обратная матрица выражается формулой:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\mathbf{Q}^T}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \frac{\mathbf{Q}^T}{|\mathbf{q}|^2}. \quad (1.106)$$

Собственные числа этой матрицы комплексно-сопряженные, двукратные:

$$q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle; \quad q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle; \quad (1.107)$$

где  $\langle \mathbf{q} \rangle = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$  – модуль векторной части кватерниона.

Собственным вектором матрицы  $\mathbf{Q}$ , соответствующим собственному значению  $q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle$ , является любая из столбцов следующей матрицы:

$$\mathbf{V}^+ = \begin{bmatrix} -i \cdot \langle q \rangle & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & -i \cdot \langle q \rangle & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & -i \cdot \langle q \rangle & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & -i \cdot \langle q \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.108)$$

В этом можно убедиться, вычисляя произведение матриц и проверяя равенство:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}^+ = [q_0 + i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle] \cdot \mathbf{V}^+; \quad (1.109)$$

Собственным вектором матрицы  $\mathbf{Q}$ , соответствующим собственному значению  $q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle$ , является любая из столбцов следующей матрицы:

$$\mathbf{V}^- = \begin{bmatrix} i \cdot \langle q \rangle & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & i \cdot \langle q \rangle & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & i \cdot \langle q \rangle & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & i \cdot \langle q \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.110)$$

В этом можно убедиться, вычисляя произведение матриц и проверяя равенство:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V}^- = [q_0 - i \cdot \langle \mathbf{q} \rangle] \cdot \mathbf{V}^-; \quad (1.111)$$

Столбцы матриц  $\mathbf{V}^+$  и  $\mathbf{V}^-$  не являются линейно независимыми, поскольку ранг этих матриц равен 2.

## 2. Ориентация твердого тела в трехмерном пространстве

### 2.1. Кватернион истинного поворота и половинный экспоненциальный кватернион

При изучении поворотов твердого тела в пространстве используют два вида кватернионов. Наиболее удобным для определений и формулировок условий задач является кватернион, построенный на базе вектора истинного Эйлера поворота:

$$\boldsymbol{\varphi} = (0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \quad (2.1)$$

Будем называть его кватернионом истинного поворота. Этот кватернион определяет такую пространственную ориентацию тела, которая получается из исходной путем одного поворота. При этом  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – компоненты вектора, вокруг которого надо повернуть тело.

Угол, на который надо повернуть тело, равен модулю этого вектора:

$$\langle \Phi \rangle = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}; \quad (2.2)$$

а знак угла определяется по правилу буравчика.

Второй вид кватерниона, который также однозначно определяет поворот твердого тела, но более удобен для преобразований, является экспонентой половины кватерниона истинного поворота и определяется формулой:

$$\mathbf{q} = \exp \frac{\Phi}{2} = \exp \frac{\varphi_0}{2} \cdot \left[ \cos \frac{\langle \Phi \rangle}{2}; \frac{\varphi_1}{\langle \Phi \rangle} \cdot \sin \frac{\langle \Phi \rangle}{2}; \frac{\varphi_2}{\langle \Phi \rangle} \cdot \sin \frac{\langle \Phi \rangle}{2}; \frac{\varphi_3}{\langle \Phi \rangle} \cdot \sin \frac{\langle \Phi \rangle}{2} \right]. \quad (2.3)$$

Будем называть этот кватернион половинным экспоненциальным. Из формулы (2.3) видно, что при чисто векторном кватернионе  $\Phi$  половинный экспоненциальный кватернион  $\mathbf{q}$  будет нормированным.

Обратный переход от кватерниона  $\mathbf{q}$  к кватерниону  $\Phi$  можно выполнить по формуле:

$$\Phi = 2 \cdot \ln \mathbf{q} = 2 \cdot \left[ \ln |\mathbf{q}|; \frac{q_1}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \theta; \frac{q_2}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \theta; \frac{q_3}{\langle \mathbf{q} \rangle} \cdot \theta \right]. \quad (2.4)$$

где  $\theta = \arg \mathbf{q} + 2 \cdot \pi \cdot n$ ;  
 $n$  – произвольное целое число.

Обратный переход от кватерниона  $\mathbf{q}$  к кватерниону  $\Phi$  является неоднозначным, поскольку функция  $\theta$  принимает бесконечное число значений. Объяснением этого факта служит то, что при повороте твердого тела вокруг любой оси на угол, кратный  $2 \cdot \pi$ , ориентация тела в пространстве не меняется. Выбор конкретного значения  $n$  при решении задач выполняется на основании дополнительных соображений.

## 2.2. Привязка кватернионов к системе координат

Кватернионные формулы справедливы для любой декартовой системы координат. Важно лишь, чтобы все кватернионы, участвующие в формуле, были представлены в одной и той же координатной системе. Численные же значения компонентов кватерниона зависят от координатной системы, в которой представлен кватернион. Для вычислительных целей часто бывает удобным использовать в одной и той же формуле компоненты кватернионов в разных системах координат. Во избежание путаницы договоримся в этом случае явно указывать координатную систему, в которой записаны компоненты кватерниона, используя для этого левые нижние индексы. Например, кватернион  $\mathbf{p}$ , компоненты которого представлены в неподвижной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , будем обозначать  ${}_x\mathbf{p}$ . Тот же кватернион, компоненты которого представлены в подвижной системе координат  $y_1, y_2, y_3$ , связанной с телом, будем обозначать  ${}_y\mathbf{p}$ .

## 2.3. Переход от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот

С помощью половинного экспоненциального кватерниона  $\mathbf{q}$ , определяемого формулой (2.3), можно выполнять преобразование компонентов кватернионов при переходе от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот.

Если, например, известны компоненты некоторого кватерниона  ${}_y\mathbf{p}$  в подвижной системе координат  $y_1, y_2, y_3$ , связанной с телом, то компоненты этого же кватерниона  ${}_x\mathbf{p}$  в неподвижной системе координат  $x_1, x_2, x_3$  можно определить по формуле:

$${}_x\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ {}_y\mathbf{p} \circ \mathbf{q}^{-1}. \quad (2.5)$$

С использованием формулы (2.3) формулу (2.40) можно записать так:

$${}_x\mathbf{p} = \exp\left(\frac{\Phi}{2}\right) \circ {}_y\mathbf{p} \circ \exp\left(-\frac{\Phi}{2}\right). \quad (2.6)$$

Обратное преобразование имеет такой вид:

$${}_y\mathbf{p} = \mathbf{q}^{-1} \circ {}_x\mathbf{p} \circ \mathbf{q}; \quad (2.7)$$

или такой:

$${}_y\mathbf{p} = \exp\left(-\frac{\Phi}{2}\right) \circ {}_x\mathbf{p} \circ \exp\left(\frac{\Phi}{2}\right). \quad (2.8)$$

Заметим, что компоненты  $\mathbf{q}$  и  $\Phi$  в неподвижной и подвижной системах координат совпадают. В связи с этим левые нижние индексы при этих кватернионах можно опускать. Скалярная часть любого кватерниона при переходе от одной координатной системы к другой не меняется.

#### 2.4. Сложение поворотов

Чаще всего не удается сразу написать кватернион, соответствующий повороту тела, соответствующему физическому смыслу задачи. Проще это сделать, выполнив последовательно несколько элементарных поворотов и просуммировав их.

За начальное положение подвижного тела принимается такое, при котором неподвижная и подвижная системы координат совпадают. Пусть вначале был выполнен поворот тела, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом  ${}_x\mathbf{p1}$ , а затем поворот, определяемый половинным экспоненциальным кватернионом  ${}_x\mathbf{p2}$ , представленными в неподвижной системе координат. Половинный экспоненциальный кватернион результирующего поворота в неподвижной системе координат определяется формулой:

$${}_x\mathbf{p} = {}_x\mathbf{p2} \circ {}_x\mathbf{p1}; \quad (2.9)$$

которая называется формулой сложения поворотов. Она по индукции распространяется на любое число последовательно выполненных поворотов.

$${}_x\mathbf{p} = {}_x\mathbf{pn} \circ \dots \circ {}_x\mathbf{p2} \circ {}_x\mathbf{p1}; \quad (2.10)$$

Заметим, что сомножители в этой формуле следуют в порядке справа налево. Это нужно строго соблюдать, поскольку операция умножения кватернионов некоммутативна.

Иногда бывает удобно представлять кватернионы элементарных поворотов в подвижной системе координат. В этом случае вместо формулы (2.10) следует пользоваться следующей формулой:

$${}_x\mathbf{p} = {}_y\mathbf{p1} \circ {}_y\mathbf{p2} \circ \dots \circ {}_y\mathbf{pn}; \quad (2.11)$$

Можно чередовать повороты, представленные то в неподвижной, то в подвижной системе координат. В этом случае, составление выражения для суммарного поворота надо делать, приписывая каждый последующий кватернион слева от уже составленного выражения, если он представлен в неподвижной системе координат, и справа от выражения, если он представлен в подвижной системе координат. Например, если последовательно выполняются повороты  ${}_y\mathbf{p1}$ ,  ${}_y\mathbf{p2}$ ,  ${}_x\mathbf{p3}$ ,  ${}_y\mathbf{p4}$ ,  ${}_x\mathbf{p5}$ ,  ${}_x\mathbf{p6}$ , правильным будет выражение:

$${}_x\mathbf{p} = {}_x\mathbf{p6} \circ {}_x\mathbf{p5} \circ {}_x\mathbf{p3} \circ {}_y\mathbf{p1} \circ {}_y\mathbf{p2} \circ {}_y\mathbf{p4}; \quad (2.12)$$

Если результат должен быть представлен в подвижной системе координат, кватернионы элементарных поворотов располагаются в обратном порядке.

$${}_y\mathbf{p} = {}_x\mathbf{p1} \circ {}_x\mathbf{p2} \circ \dots \circ {}_x\mathbf{pn}; \quad (2.13)$$

$${}_y\mathbf{p} = {}_y\mathbf{p}n \circ \dots \circ {}_y\mathbf{p}2 \circ {}_y\mathbf{p}1; \quad (2.14)$$

## 2.5. Элементарные повороты

Рассмотрим наиболее применяемые элементарные повороты. Изложение будем иллюстрировать рисунками, на которых объектом поворотов является твердое тело, имеющее форму коротыша из неравнополочного уголка. Исходное положение этого тела показано пунктирными линиями, а повернутое – сплошными линиями. На рисунках показана неподвижная система координат  $x_1, x_2, x_3$ , подвижная система координат  $y_1, y_2, y_3$  а также направленный отрезок оси, вокруг которой выполняется поворот. Подвижная система координат для наглядности смещена относительно неподвижной точки вращения и привязана к повернутому твердому телу.

Каждый элементарный поворот снабжен формулами, по которым определяются компоненты нормированного кватерниона. Для преобразований годятся и ненормированные кватернионы, которые получаются из нормированных умножением на произвольное число. В примерах с целью компактности представления чаще всего приводятся соответствующие ненормированные кватернионы.

2.5.1. *Поворот вокруг вектора с направляющими косинусами  $k_1, k_2, k_3$  на угол  $\alpha$  по правилу буравчика.*

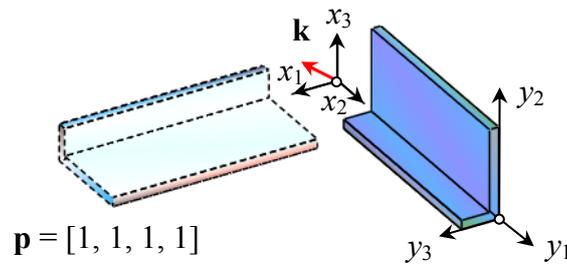


Рис. 2.1. Поворот вокруг вектора  $\mathbf{k}$  на угол  $\alpha$

Этот поворот представляется кватернионом:

$$\mathbf{p} = \left[ \cos \frac{\alpha}{2}, k_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, k_2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, k_3 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right]. \quad (2.15)$$

На рис. 2.1 показан поворот на угол  $2 \cdot \pi/3$  или  $120^\circ$  вокруг направления равнонаклоненного к осям  $x_1, x_2, x_3$ . Для этого примера

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2.16)$$

Искомый кватернион имеет вид:

$$\mathbf{p} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (2.17)$$

Для преобразования координат по формуле (2.5) можно использовать также удвоенное значение этого кватерниона:

$$2 \cdot \mathbf{p} = [1, 1, 1, 1]. \quad (2.18)$$

В частном случае, при повороте на прямой угол формула (2.15) имеет вид:

$$\mathbf{p} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot [1, k_1, k_2, k_3]; \quad (2.19)$$

а при повороте на угол  $\pm \pi$  выглядит так:

$$\mathbf{p} = [0, k_1, k_2, k_3]. \quad (2.20)$$

На рис. 2.2 показан поворот на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $x_3$ , реализуемый кватернионом

$$\mathbf{p} = [1, 0, 0, 1]; \quad (2.21)$$

и поворот на угол  $\pm \pi$  вокруг оси  $x_3$ , реализуемый кватернионом

$$\mathbf{p} = [0, 0, 0, 1]. \quad (2.22)$$

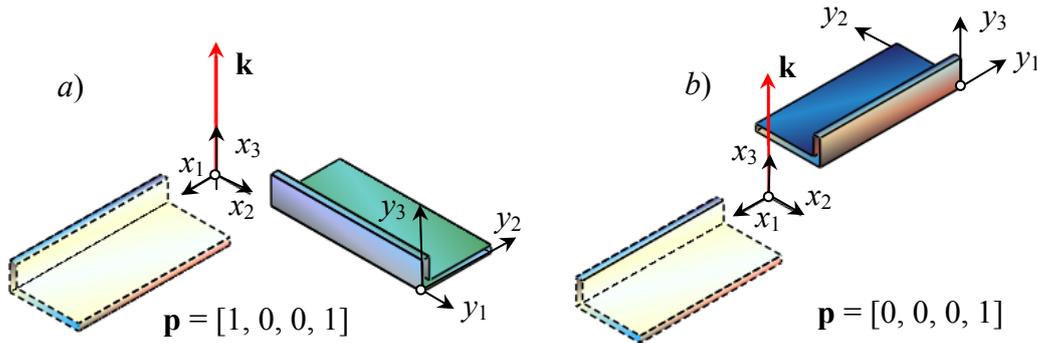


Рис. 2.2. Поворот вокруг оси  $x_3$  на угол: а)  $\pi/2$ ; б)  $\pm \pi$

2.5.2. *Поворот вокруг вектора с направляющими косинусами  $k_1, k_2, k_3$  на некоторый угол  $\alpha$  ( $-\pi < \alpha \leq \pi$ ), если известны косинус  $C$  и синус  $S$  этого угла.*

В этом случае рациональнее всего определить угол  $\alpha$  по формуле

$$\alpha = \text{atan2}(C, S); \quad (2.23)$$

а затем перейти к формуле (2.15). Можно воспользоваться также формулой:

$$\mathbf{p} = \left[ \sqrt{\frac{1+C}{2}}, k_1 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}}, k_2 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}}, k_3 \cdot \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{\frac{1-C}{2}} \right]. \quad (2.24)$$

Однако, эта формула не достаточно хорошо обусловлена при углах  $\alpha$ , близких к нулю. Для вычислений она использует лишь значение  $C$ , а из информации, содержащейся в значении  $S$ , использует только знак.

2.5.3. *Поворот вокруг координатных осей с номерами 1, 2, 3 на углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  соответственно:*

$$\mathbf{p1} = \left[ \cos \frac{\alpha_1}{2}, \sin \frac{\alpha_1}{2}, 0, 0 \right]; \quad \mathbf{p2} = \left[ \cos \frac{\alpha_2}{2}, 0, \sin \frac{\alpha_2}{2}, 0 \right]; \quad \mathbf{p3} = \left[ \cos \frac{\alpha_3}{2}, 0, 0, \sin \frac{\alpha_3}{2} \right]. \quad (2.25)$$

В частном случае, при повороте на прямой угол:

$$\mathbf{p1} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right]; \quad \mathbf{p2} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]; \quad \mathbf{p3} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \quad (2.26)$$

В частном случае, при повороте на угол  $\pm \pi$ :

$$\mathbf{p1} = [0, 1, 0, 0]; \quad \mathbf{p2} = [0, 0, 1, 0]; \quad \mathbf{p3} = [0, 0, 0, 1]. \quad (2.27)$$

На рис. 2.3 показаны повороты твердого тела вокруг осей  $x_1$ , и  $x_2$ , на углы  $\pi/2$  и  $\pm \pi$ .

Половинные экспоненциальные кватернионы преобразования приведены в поле рисунка.

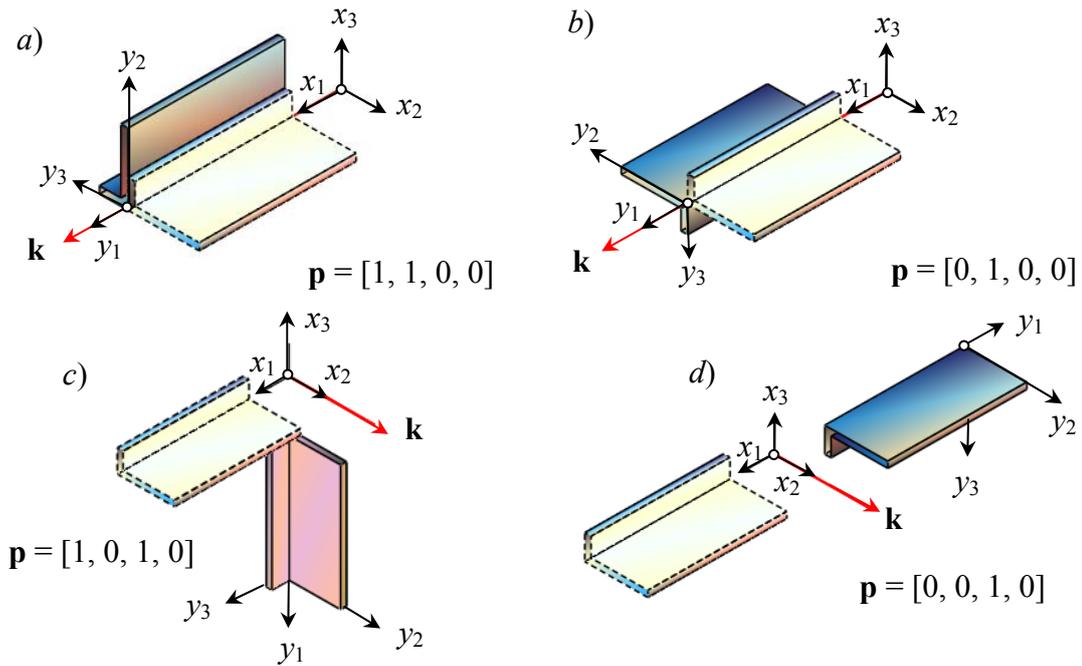


Рис. 2.3. Повороты: а) вокруг оси  $x_1$  на угол  $\pi/2$ ; б) вокруг оси  $x_1$  на угол:  $\pm\pi$ ; в) вокруг оси  $x_2$  на угол  $\pi/2$ ; д) вокруг оси  $x_2$  на угол:  $\pm\pi$

2.5.4. *Поворот до совмещения оси 1 с заданным направлением.* Дана неподвижная система координат  $x_1, x_2, x_3$  и направление, заданное направляющими косинусами  $c_1, c_2, c_3$  в этой системе координат. Тело со связанной с ним системой координат  $y_1, y_2, y_3$  было расположено вначале так, что неподвижная и связанная системы совпадали. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось  $y_1$  совпала с направлением  $c_1, c_2, c_3$ . Требуется найти кватернион  $\mathbf{p}$ , соответствующий этому повороту.

Выполнив необходимые преобразования, приходим к кватерниону со следующими компонентами:

$$\mathbf{p} = \left[ \sqrt{\frac{1+c_1}{2}}, 0, -\frac{c_3}{\sqrt{c_2^2+c_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c_1}{2}}, \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2+c_3^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-c_1}{2}} \right]; \quad (2.28)$$

Описанный поворот проиллюстрирован на рис. 2.4 для направления  $c_1 = 0; c_2 = 0,8; c_3 = 0,6$ .

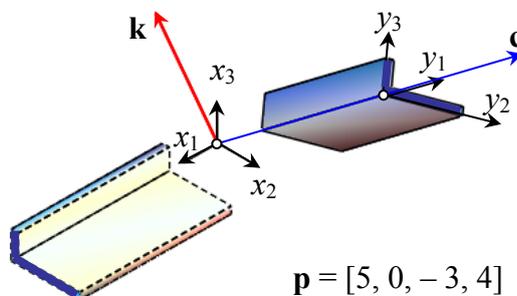


Рис. 2.4. Поворот до совмещения оси 1 с направлением  $\mathbf{c}$

Вычисления по формуле (2.28) приводят к следующему результату:

$$\mathbf{p} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -0,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right]. \quad (2.29)$$

В поле рисунка показан кватернион, пропорциональный этому.

2.5.5. *Поворот до совмещения направления  $a$  с направлением  $b$ .* Тело расположено так, что ось  $y_1$  связанной с ним системы координат сонаправлена вектору с компонентами  $a_1, a_2, a_3$  в неподвижной системе координат. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось  $y_1$  стала сонаправленной вектору с компонентами  $b_1, b_2, b_3$  в неподвижной системе координат. Требуется найти кватернион  $\mathbf{p}$ , соответствующий этому повороту.

Решение задачи дается следующей формулой:

$$\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{v}}; \quad (2.30)$$

где:

$$\mathbf{a} = [0, a_1, a_2, a_3]; \quad \mathbf{b} = [0, b_1, b_2, b_3]; \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \circ \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}. \quad (2.31)$$

Формула (2.30) в развернутом виде приведена ниже:

$$\mathbf{p} = \left[ \sqrt{\frac{1+v_0}{2}}, \frac{v_1}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}}, \frac{v_2}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}}, \frac{v_3}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-v_0}{2}} \right]. \quad (2.32)$$

На рис. 2.5 показан пример такого поворота, где  $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1; b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$ ,

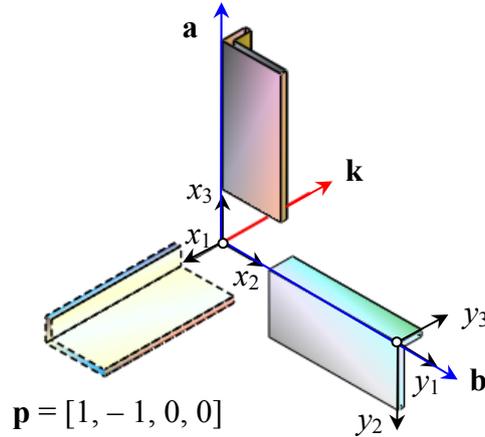


Рис. 2.5. Поворот до совмещения направления  $\mathbf{a}$  с направлением  $\mathbf{b}$

Кватернион  $\mathbf{v} = [0, -1, 0, 0]$ , а, вычисленный по формуле (2.32) кватернион  $\mathbf{p}$  имеет вид:

$$\mathbf{p} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right]. \quad (2.33)$$

В поле рисунка показан кватернион, пропорциональный этому.

2.5.6. *Поворот направления  $a$  до направления  $b$ , нормального заданной плоскости.* Тело расположено так, что ось  $y_1$  связанной с ним системы координат сонаправлена вектору с компонентами  $a_1, a_2, a_3$  в неподвижной системе координат. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось  $y_1$  стала нормальной к плоскости, заданной уравнением:

$$b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 = 0 \quad (2.34)$$

и сонаправленной вектору с компонентами  $b_1, b_2, b_3$  в неподвижной системе координат.

Требуется найти кватернион  $\mathbf{p}$ , соответствующий этому повороту.

Эта задача эквивалентна предыдущей, и ее решение дается формулой (2.30).

На рис. 2.6 показан пример такой задачи, причем направления заданы числами:  $a_1 = 0$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = 0$ ;  $b_1 = -0,6$ ;  $b_2 = 0$ ;  $b_3 = 1$ . Кватернион  $\mathbf{v} = [0; 0,857; 0; 0,514]$ , а, вычисленный по формуле (2.32) кватернион  $\mathbf{p}$  имеет вид:

$$\mathbf{p} = [0,707; 0,606; 0; 0,364]. \quad (2.35)$$

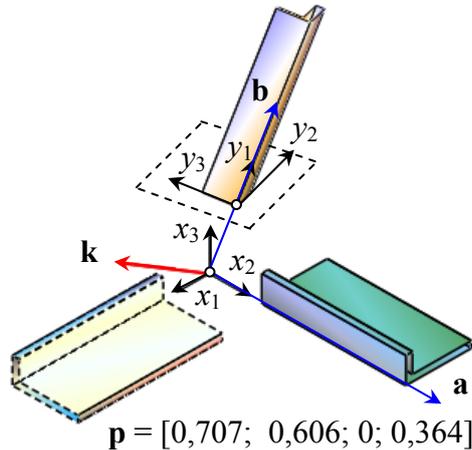


Рис. 2.6. Поворот до совмещения направления  $\mathbf{a}$  с нормалью к заданной плоскости  $\mathbf{b}$

2.5.7. *Поворот направления  $\mathbf{a}$  до направления, параллельного плоскости, заданной своей нормалью  $\mathbf{b}$ .* Тело расположено так, что ось  $y_1$  связанной с ним системы координат сонаправлена вектору с компонентами  $a_1, a_2, a_3$  в неподвижной системе координат. Затем тело повернули по кратчайшему пути так, что ось  $y_1$  стала параллельной к плоскости, заданной уравнением:

$$b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 = 0. \quad (2.36)$$

Требуется найти кватернион  $\mathbf{p}$ , соответствующий этому повороту.

Решение задачи дается следующей формулой:

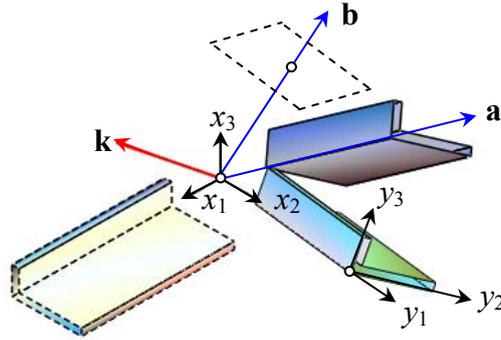
$$\mathbf{p} = \left[ \sqrt{\frac{1+\langle \mathbf{v} \rangle}{2}}, -\frac{v_1}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \frac{v_0}{|v_0|} \cdot \sqrt{\frac{1-\langle \mathbf{v} \rangle}{2}}, -\frac{v_2}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \frac{v_0}{|v_0|} \cdot \sqrt{\frac{1-\langle \mathbf{v} \rangle}{2}}, -\frac{v_3}{\langle \mathbf{v} \rangle} \cdot \frac{v_0}{|v_0|} \cdot \sqrt{\frac{1-\langle \mathbf{v} \rangle}{2}} \right]. \quad (2.37)$$

где:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \circ \frac{\bar{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}; \quad \mathbf{a} = [0, a_1, a_2, a_3]; \quad \mathbf{b} = [0, b_1, b_2, b_3]. \quad (2.38)$$

На рис. 2.7 показан пример такой задачи, причем направления заданы числами:  $a_1 = 0$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = 0,7$ ;  $b_1 = -0,7$ ;  $b_2 = 0$ ;  $b_3 = 1$ . Кватернион  $\mathbf{v} = [0,47; 0,671; -0,329; 0,47]$ , а, вычисленный по формуле (2.37) кватернион  $\mathbf{p}$  имеет вид:

$$\mathbf{p} = [0,97; -0,184; 0,09; -0,129]. \quad (2.39)$$



$$\mathbf{p} = [0,97; -0,184; 0,09; -0,129]$$

Рис. 2.7. Поворот направления  $\mathbf{a}$  до положения, параллельного плоскости с нормалью  $\mathbf{b}$

Каждый элементарный поворот можно осуществлять как в неподвижной, так и в подвижной системах координат и складывать по правилам, изложенным в разделе 2.4.

Формулы этого раздела написаны так, что результирующий кватернион оказывается нормированным. Однако все будет верно и в том случае, если пользоваться ненормированными кватернионами, поскольку умножение кватернионов  $\mathbf{p}$  на число никак не изменит результата преобразования координат:

$${}_x\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ {}_y\mathbf{q} \circ \mathbf{p}^{-1}. \quad (2.40)$$

или обратного преобразования.

## 2.6. Применение других известных методов

### 2.6.1. Непосредственное использование матрицы преобразования координат

Стандартным методом преобразования декартовых координат при поворотах твердого тела вокруг неподвижной точки является использование матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad (2.41)$$

которая связывает координаты точки подвижного тела  $y_1, y_2, y_3$ , заданные в подвижной системе координат, с координатами этой же точки  $x_1, x_2, x_3$  в неподвижной системе координат при помощи формул:

$$x_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \cdot y_k; \quad y_k = \sum_{j=1}^3 x_j \cdot a_{jk}. \quad (2.42)$$

Элементы матрицы преобразования координат  $\mathbf{A}$  выражаются через компоненты кватерниона истинного поворота  $\Phi = [\phi_0; \phi_1; \phi_2; \phi_3]$  по следующим формулам:

$$\mathbf{A} = \cos\langle\Phi\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos\langle\Phi\rangle) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot c_3 \\ c_2 \cdot c_1 & c_2 \cdot c_2 & c_2 \cdot c_3 \\ c_3 \cdot c_1 & c_3 \cdot c_2 & c_3 \cdot c_3 \end{pmatrix} + \sin\langle\Phi\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.43)$$

где

$$\langle\Phi\rangle = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}; \quad c_j = \frac{\phi_j}{\langle\Phi\rangle} \quad (j=1,2,3). \quad (2.44)$$

Заметим, элементы матрицы преобразования координат  $\mathbf{A}$  не зависят от компонента  $\varphi_0$ .

Известно, что

$$\cos\langle\Phi\rangle = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}; \quad \sin\langle\Phi\rangle = \frac{\sqrt{(a_{32} - a_{23})^2 + (a_{13} - a_{31})^2 + (a_{21} - a_{12})^2}}{2}. \quad (2.45)$$

Отсюда можно найти угол  $\langle\Phi\rangle$  по одной из формул (1.9) или (1.10):

$$\langle\Phi\rangle = \arccos \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} = \arg(\cos\langle\Phi\rangle + i \cdot \sin\langle\Phi\rangle) = \operatorname{atan} 2(\cos\langle\Phi\rangle, \sin\langle\Phi\rangle). \quad (2.46)$$

При этом угол будет находиться в пределах  $[0, \pi]$ .

Зная значение угла  $\langle\Phi\rangle$ , можно записать выражения для компонентов кватерниона истинного поворота:

$$\Phi = \frac{[0; (a_{32} - a_{23}) \cdot \langle\Phi\rangle; (a_{13} - a_{31}) \cdot \langle\Phi\rangle; (a_{21} - a_{12}) \cdot \langle\Phi\rangle]}{\sqrt{(a_{32} - a_{23})^2 + (a_{13} - a_{31})^2 + (a_{21} - a_{12})^2}}. \quad (2.47)$$

Половинный экспоненциальный кватернион может быть определен как функция кватерниона  $\Phi$ , однако, формулы для определения его компонентов можно получить также непосредственно, избегая тригонометрических операций.

Запишем известные формулы, выражающие элементы матрицы преобразования  $\mathbf{A}$  через элементы нормированного половинного экспоненциального кватерниона:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot q_2 \cdot q_1 - 2 \cdot q_3 \cdot q_0 & 2 \cdot q_3 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 \cdot q_0 \\ 2 \cdot q_2 \cdot q_1 + 2 \cdot q_3 \cdot q_0 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2 \cdot q_2 \cdot q_3 - 2 \cdot q_1 \cdot q_0 \\ 2 \cdot q_3 \cdot q_1 - 2 \cdot q_2 \cdot q_0 & 2 \cdot q_2 \cdot q_3 + 2 \cdot q_1 \cdot q_0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Из этих формул вытекают следующие:

$$\begin{aligned} 4 \cdot q_0^2 &= 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}; & 4 \cdot q_0 \cdot q_1 &= a_{32} - a_{23}; & 4 \cdot q_0 \cdot q_2 &= a_{13} - a_{31}; & 4 \cdot q_0 \cdot q_3 &= a_{21} - a_{12}; \\ 4 \cdot q_1^2 &= 1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}; & 4 \cdot q_1 \cdot q_2 &= a_{12} + a_{21}; & 4 \cdot q_1 \cdot q_3 &= a_{13} + a_{31}; \\ 4 \cdot q_2^2 &= 1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}; & 4 \cdot q_2 \cdot q_3 &= a_{23} + a_{32}; \\ 4 \cdot q_3^2 &= 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33} & a_{32} - a_{23} & a_{13} - a_{31} & a_{21} - a_{12} \\ a_{32} - a_{23} & 1 + a_{11} - a_{22} - a_{33} & a_{12} + a_{21} & a_{13} + a_{31} \\ a_{13} - a_{31} & a_{12} + a_{21} & 1 - a_{11} + a_{22} - a_{33} & a_{23} + a_{32} \\ a_{21} - a_{12} & a_{13} + a_{31} & a_{23} + a_{32} & 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.50)$$

то будет справедливы зависимости:

$$4 \cdot q_j \cdot q_k = B_{jk} \quad (j, k = 0, 1, 2, 3). \quad (2.51)$$

Из этих зависимостей можно получить четыре варианта формул для определения компонентов половинного экспоненциального кватерниона [13], [14].

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{a_{32}-a_{23}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{a_{13}-a_{31}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{a_{32}-a_{23}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2\cdot\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}}} \end{bmatrix}; \quad (2.52)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{a_{13}-a_{31}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \\ \frac{a_{23}+a_{32}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{a_{21}-a_{12}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{a_{23}+a_{32}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \\ \frac{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}{2\cdot\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}}} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

При пользовании формулами (2.52), (2.53) возможен случай, когда формула для определения компонентов кватерниона содержит неопределенность типа 0/0. В этом случае надо отказаться от этой формулы, а из приведенных четырех формул выбрать ту, в которой знаменатель отличен от нуля.

Можно воспользоваться также формулой:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}} \\ \pm\sqrt{1+a_{11}-a_{22}-a_{33}} \\ \pm\sqrt{1-a_{11}+a_{22}-a_{33}} \\ \pm\sqrt{1-a_{11}-a_{22}+a_{33}} \end{bmatrix}; \quad (2.54)$$

где знаки компонентов выбираются в соответствии таким правилом: знаки ненулевых компонентов  $q_j$  и  $q_k$  одинаковы, если в формуле (2.50)  $b_{jk} > 0$  и противоположные, если в формуле (2.50)  $b_{jk} < 0$ . Знак одного из компонентов кватерниона  $\mathbf{q}$  можно принять произвольным. Если  $q_0 \neq 0$ , удобно принять его положительным.

### 2.6.2. Углы Эйлера

Наиболее распространенным методом определения ориентации твердого тела в трехмерном пространстве является метод углов Эйлера, обычно обозначаемых  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Как и ранее, рассматривается неподвижная система координат  $x_1, x_2, x_3$ , связанная с "землей" и подвижная система координат  $y_1, y_2, y_3$ , связанная с телом, начала которых совпадают.

В начальном положении тело расположено так, что соответствующие оси  $y$  и  $x$  совпадают. В этом положении все углы Эйлера равны нулю. Чтобы определить положение тела, соответствующее заданным углам Эйлера, выполним следующее. Сначала тело повернем на угол  $\psi$  вокруг оси  $y_3$ . При этом оси  $y_1$  и  $y_2$  отойдут от осей  $x_1$  и  $x_2$  на угол  $\psi$ . Затем тело повернем вокруг оси  $y_1$  на угол  $\theta$ . Ось  $y_3$  отойдет от оси  $x_3$  на угол  $\theta$ . Наконец, тело

повернем вокруг нового положения оси  $y_3$  на угол  $\varphi$ . Это положение тела и будет соответствовать углам Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ .

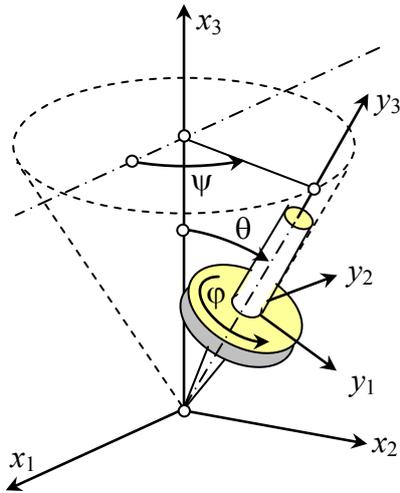


Рис. 2.8. Волчок и углы Эйлера

Угол  $\psi$  называется углом прецессии (precession), угол  $\theta$  – углом нутации (nutation), угол  $\varphi$  – углом собственного вращения. Эти названия углов пришли из теории гироскопов. Разобраться в углах Эйлера удобнее всего на примере вращающегося волчка (рис. 2.8). Ось волчка  $y_3$  описывает конус вокруг неподвижной оси  $x_3$ . Это вращение определяется углом  $\psi$  (говорят, волчок совершает прецессию). Отклонение оси волчка от вертикали – угол нутации  $\theta$ . Вращение волчка вокруг своей оси  $y_3$ , определяемое углом  $\varphi$  – собственное вращение.

Таким образом, Эйлер предложил произвольный поворот тела разложить на три элементарных поворота, выполняемых вокруг осей подвижной системы координат. Запишем для них кватернионы истинных поворотов:

$$\mathbf{u1} = [0; 0; 0; \psi]; \quad \mathbf{u2} = [0; \theta; 0; 0]; \quad \mathbf{u3} = [0; 0; 0; \varphi]. \quad (2.55)$$

На основании этих формул запишем половинные экспоненциальные кватернионы:

$$\mathbf{p1} = [\cos \frac{\psi}{2}; 0; 0; \sin \frac{\psi}{2}]; \quad \mathbf{p2} = [\cos \frac{\theta}{2}; \sin \frac{\theta}{2}; 0; 0]; \quad \mathbf{p3} = [\cos \frac{\varphi}{2}; 0; 0; \sin \frac{\varphi}{2}]. \quad (2.56)$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота на основании формулы (2.11) будет выражаться так:

$$\mathbf{qe} = \mathbf{p1} \circ \mathbf{p2} \circ \mathbf{p3}. \quad (2.57)$$

Перемножая кватернионы-сомножители, получим:

$$\mathbf{qe} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Обращение этих зависимостей приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \psi &= \text{atan2}(q_{e_0} \cdot q_{e_1} - q_{e_2} \cdot q_{e_3}; \quad q_{e_0} \cdot q_{e_2} + q_{e_3} \cdot q_{e_1}); \\ \theta &= \arccos(q_{k_0}^2 - q_{k_1}^2 - q_{k_2}^2 + q_{k_3}^2); \\ \varphi &= \text{atan2}(q_{e_0} \cdot q_{e_1} + q_{e_2} \cdot q_{e_3}; \quad q_{e_0} \cdot q_{e_2} - q_{e_3} \cdot q_{e_1}). \end{aligned} \quad (2.59)$$

### 2.6.3. Углы Крылова

Другой метод для описания ориентации твердого тела в трехмерном пространстве предложен академиком А.Н.Крыловым. Он основан на самолетной системе координат.

Твердое тело будем представлять в виде самолета. При этом в качестве подвижной

системы координат  $y_1, y_2, y_3$  выбирается стандартная самолетная координатная система. Ее оси показаны на рис. 2.9. Ось  $y_1(t)$  называется осью крена (roll), ось  $y_2(t)$  – осью тангажа (pitch) и ось  $y_3(t)$  – осью скольжения (yaw).

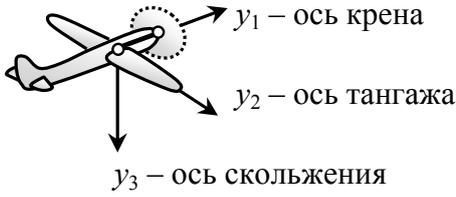


Рис. 2.9. Самолетные оси

В соответствии с предложением А.Н.Крылова ориентация твердого тела в трехмерном пространстве определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Для того, чтобы установить, какое положение тела определяют эти углы, рассмотрим начальное положение этого тела в котором подвижная система координат  $y_1, y_2, y_3$  совпадает с неподвижной системой координат  $x_1, x_2, x_3$ . В этом положении все три угла равны нулю.

После этого выполняется поворот тела вокруг оси крена  $y_1$ , на угол  $\alpha$ . Далее выполняется поворот тела вокруг нового положения оси тангажа  $y_2$ , на угол  $\beta$ , а затем вокруг нового положения оси скольжения  $y_3$  на угол  $\gamma$ . После этих трех поворотов тело приходит в окончательное положение, определяемое углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Запишем для них кватернионы истинных поворотов в подвижной системе координат:

$$\mathbf{u1} = [0; \alpha; 0; 0]; \quad \mathbf{u2} = [0; 0; \beta; 0]; \quad \mathbf{u3} = [0; 0; 0; \gamma]. \quad (2.60)$$

На основании этих формул запишем половинные экспоненциальные кватернионы:

$$\mathbf{p1} = [\cos \frac{\alpha}{2}; \sin \frac{\alpha}{2}; 0; 0]; \quad \mathbf{p2} = [\cos \frac{\beta}{2}; 0; \sin \frac{\beta}{2}; 0]; \quad \mathbf{p3} = [\cos \frac{\gamma}{2}; 0; 0; \sin \frac{\gamma}{2}]. \quad (2.61)$$

Поскольку все повороты выполнялись вокруг осей подвижной системы координат, половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота будет выражен так:

$$\mathbf{qk} = \mathbf{p1} \circ \mathbf{p2} \circ \mathbf{p3}. \quad (2.62)$$

Перемножая кватернионы-сомножители, получим:

$$\mathbf{qk} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Обращение этих зависимостей приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(qk_0^2 - qk_1^2 - qk_2^2 + qk_3^2; \quad 2 \cdot qk_0 \cdot qk_1 - 2 \cdot qk_3 \cdot qk_2); \\ \beta &= \arcsin(2 \cdot qk_0 \cdot qk_2 - 2 \cdot qk_1 \cdot qk_3); \\ \gamma &= \text{atan2}(qk_0^2 + qk_1^2 - qk_2^2 - qk_3^2; \quad 2 \cdot qk_0 \cdot qk_3 - 2 \cdot qk_2 \cdot qk_1). \end{aligned} \quad (2.64)$$

### 3. Сферическая геометрия

#### 3.1. Системы координат

При помощи кватернионов легко формулируются и решаются задачи сферической геометрии и тригонометрии. Рассмотрим системы координат, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Для определения положения точек на сфере будем пользоваться географической

системой, состоящей из двух угловых координат. Первая из них – долгота, обозначаемая греческой буквой  $\gamma$ . Она изменяется в пределах  $-\pi < \gamma \leq \pi$ . Положительной считается восточная долгота. Вторая координата – широта, обозначаемая греческой буквой  $\theta$ . Она изменяется в пределах  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Положительной считается северная широта. На проекции Меркатора (рис. 3.1) эти координаты образуют привычную плоскую координатную систему.

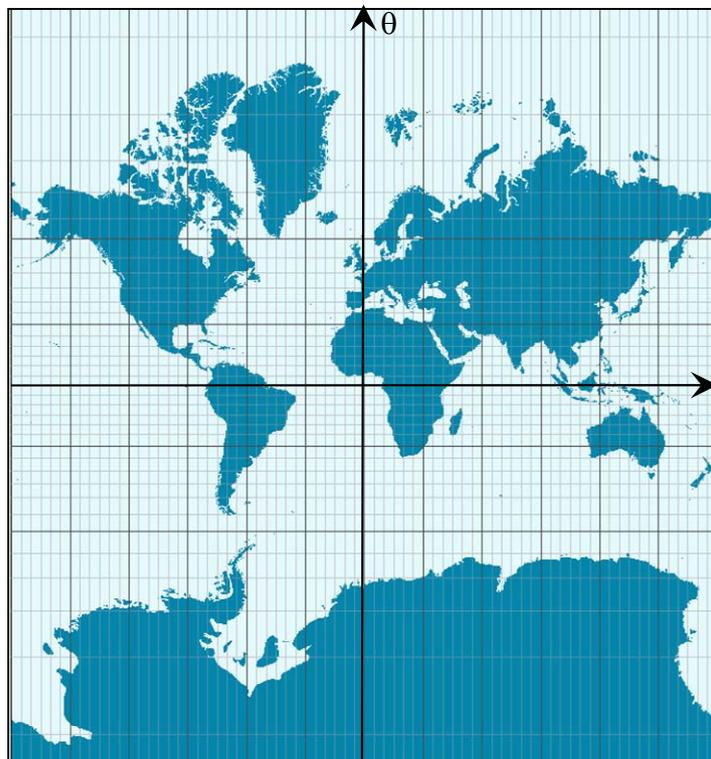


Рис. 3.1. Проекция Меркатора

В качестве неподвижной будем использовать декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , начало которой находится в центре сферы. Ось  $x_3$  проходит через начало географической системы координат ( $\gamma = 0; \theta = 0$ ), ось  $x_2$  – через северный полюс, ось  $x_1$  направлена перпендикулярно к этим осям и проходит через точку с географическими координатами  $\gamma = \pi/2; \theta = 0$  (рис. 3.2).

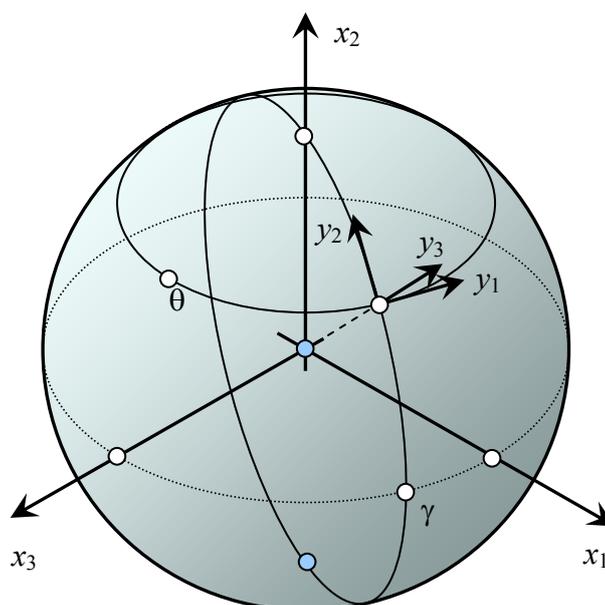


Рис. 3.2. Системы координат

В качестве подвижной системы координат, связанной с конкретной точкой поверхности сферы, выберем декартову систему координат, начало которой находится в точке с географическими координатами  $\gamma; \theta$ , ось  $y_3$  является внешней нормалью к сфере в этой точке, ось  $y_2$  – направлена на север, а ось  $y_1$  – на восток. Такая система определена для каждой точки сферы, кроме полюсов. Обратное, ориентация в пространстве декартовой системы координат однозначно определяет точку сферы.

### 3.2. Формулы перехода от одной системы координат к другой

Рассмотрим, как повернута подвижная система координат  $y_1, y_2, y_3$ , относительно неподвижной системы координат  $x_1, x_2, x_3$ .

Совместим вначале подвижную систему координат (по ориентации) с неподвижной. Затем повернем подвижную систему относительно оси  $x_1$  на угол  $-\theta$ , а затем относительно оси  $x_3$  на угол  $\gamma$  (рис. 3.2). После этого подвижная система займет положение, соответствующее точке с географическими координатами  $\gamma; \theta$ .

Первый поворот соответствует кватерниону истинного поворота  $\theta = [0, -\theta, 0, 0]$ , а второй поворот – кватерниону истинного поворота  $\gamma = [0, 0, \gamma, 0]$ . Перейдем к экспонентам половинных поворотов:

$$\exp \frac{\theta}{2} = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right]; \quad \exp \frac{\gamma}{2} = \left[ \cos \frac{\gamma}{2}, 0, \sin \frac{\gamma}{2}, 0 \right]. \quad (3.1)$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{q} = \exp \frac{\gamma}{2} \circ \exp \frac{\theta}{2} = \left[ \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.2)$$

Зная кватернион  $\mathbf{q}$ , можно любой кватернион  ${}_y\mathbf{p}$ , представленный в подвижной системе координат, представить в неподвижной системе координат и наоборот по формулам:

$${}_x\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ {}_y\mathbf{p} \circ \mathbf{q}^{-1}; \quad {}_y\mathbf{p} = \mathbf{q}^{-1} \circ {}_x\mathbf{p} \circ \mathbf{q}. \quad (3.3)$$

Так единичный вектор, направленный в сторону наружной нормали сферы в точке с географическими координатами  $\gamma; \theta$ , в неподвижной системе координат имеет такие компоненты:

$${}_x\mathbf{p} = \mathbf{q} \circ [0, 0, 0, 1] \circ \mathbf{q}^{-1} = [0, \sin \gamma \cdot \cos \theta, \sin \theta, \cos \gamma \cdot \cos \theta]. \quad (3.4)$$

Пусть в неподвижной системе координат при помощи направляющих косинусов  $c_1, c_2, c_3$  задано некоторое направление. Надо определить географические координаты точки, в которой это направление протыкает сферу.

Из формулы (3.4) следует, что:

$$c_1 = \sin \gamma \cdot \cos \theta; \quad c_2 = \sin \theta; \quad c_3 = \cos \gamma \cdot \cos \theta. \quad (3.5)$$

откуда:

$$\theta = \arcsin c_2; \quad \gamma = \arg(c_3 + i \cdot c_1); \quad (3.6)$$

где  $i$  – мнимая единица.

### 3.3. Расстояния между точками на сфере

Пусть требуется найти на поверхности сферы кратчайшее расстояние между двумя точками с координатами  $\gamma_1; \theta_1$  и  $\gamma_2; \theta_2$ .

В неподвижной системе координат, в соответствии с формулой (3.4), направления на эти точки могут быть представлены нормированными кватернионами-векторами:

$${}_x\mathbf{C1} = [0, \sin \gamma_1 \cdot \cos \theta_1, \sin \theta_1, \cos \gamma_1 \cdot \cos \theta_1]; \quad {}_x\mathbf{C2} = [0, \sin \gamma_2 \cdot \cos \theta_2, \sin \theta_2, \cos \gamma_2 \cdot \cos \theta_2]. \quad (3.7)$$

Известно, что половинный экспоненциальный кватернион, осуществляющий поворот подвижного тела по кратчайшему пути так, чтобы направление  ${}_x\mathbf{C1}$  совпало с направлением  ${}_x\mathbf{C2}$ , имеет следующий вид:

$$\mathbf{p} = \left[ \sqrt{\frac{1+C_0}{2}}, \frac{C_1}{\langle \mathbf{C} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-C_0}{2}}, \frac{C_2}{\langle \mathbf{C} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-C_0}{2}}, \frac{C_3}{\langle \mathbf{C} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-C_0}{2}} \right]; \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{C} = {}_x\mathbf{C1} \circ {}_x\overline{\mathbf{C2}} = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ -\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Кратчайшее расстояние между заданными точками может быть вычислено через половинный угол поворота по формуле:

$$L = 2 \cdot R \cdot \arg[p_0 + i \cdot \langle \mathbf{p} \rangle]; \quad (3.10)$$

где  $R$  – радиус сферы;  $i$  – мнимая единица.

Из структуры формулы ( 3.8 ) следует, что

$$p_0 = \sqrt{\frac{1+C_0}{2}}; \quad \langle \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\frac{1-C_0}{2}}. \quad (3.11)$$

а из формулы (3.9) видно:

$$C_0 = \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1). \quad (3.12)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что:

$$C_0 = 1 - 2 \cdot \left( \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \right). \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в ( 3.11 ), получим:

$$p_0 = \sqrt{\cos^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}; \quad (3.14)$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}}. \quad (3.15)$$

Формула для определения расстояния между точками на сфере, наиболее часто встречающаяся в литературе:

$$L = R \cdot \arccos[\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos(\gamma_2 - \gamma_1)]; \quad (3.16)$$

плохо обусловлена при определении расстояний между близлежащими точками и между антиподами, а поэтому приводит к погрешностям. Формулы (3.10), (3.14) и (3.15) свободны от этого недостатка и рекомендуются к применению.

### 3.4. Углы между большими окружностями на сфере

Большую окружность на сфере и ее ориентацию удобно задавать направляющими косинусами вектора, нормального плоскости этой окружности. При этом задается и положительное направление обхода этой окружности, которое должно соответствовать

правилу буравчика. На рис. 3.3 показаны две большие окружности и единичные векторы  $\mathbf{ca}$  и  $\mathbf{cb}$ , нормальные плоскостям этих окружностей. Положительное направление обхода окружностей показано стрелками, расположенными на окружностях. Как видно из рисунка, угол  $\alpha$  между положительными направлениями обхода окружностей равен углу между векторами, нормальными плоскостям этих окружностей.

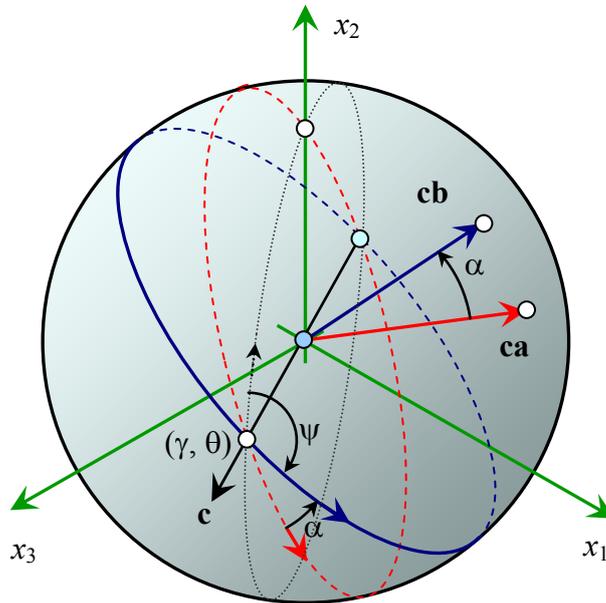


Рис. 3.3. Большие окружности на сфере

Для определения угла между положительными направлениями обхода больших окружностей введем в рассмотрение чисто векторные кватернионы:

$$\mathbf{ca} = [0; ca_1, ca_2; ca_3]; \quad \mathbf{cb} = [0; cb_1, cb_2; cb_3]. \quad (3.17)$$

В соответствии с формулой (1.33) при умножении чисто векторных кватернионов получаем кватернион, скалярная часть которого равна скалярному произведению кватернионов-сомножителей с обратным знаком, а векторная часть – векторному произведению этих кватернионов. Нетрудно сообразить, что кватернион

$$\mathbf{c} = -\mathbf{cb} \circ \mathbf{ca} \quad (3.18)$$

будет содержать в своей скалярной части скалярное произведение кватернионов-сомножителей со знаком  $+$ , а в векторной части – векторное произведение этих кватернионов:  $\mathbf{ca} \times \mathbf{cb}$ . Компоненты этого кватерниона могут быть представлены в следующем виде:

$$\mathbf{c} = \left[ \cos \alpha; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \alpha; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \alpha; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \alpha \right]. \quad (3.19)$$

Угол между положительными направлениями обхода больших окружностей можно определить по формуле:

$$\alpha = \arg(c_0 + i \cdot \langle \mathbf{c} \rangle) = \text{atan2}(c_0; \langle \mathbf{c} \rangle). \quad (3.20)$$

Кватернион  $\mathbf{c}$  полезен и в другом отношении. Векторная часть этого кватерниона при ее продолжении проходит сквозь сферу в точке пересечения рассматриваемых окружностей (см. рис. 3.3), а сам кватернион является экспонентой кватерниона истинного поворота  $\alpha$ , переводящего окружность, определяемую ортом  $\mathbf{ca}$ , в окружность, определяемую ортом  $\mathbf{cb}$ :

$$\mathbf{c} = \exp(\boldsymbol{\alpha}); \quad \boldsymbol{\alpha} = \left[ 0; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \alpha; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \alpha; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \alpha \right] \quad (3.21)$$

Половинный экспоненциальный кватернион от  $\boldsymbol{\alpha}$ , обозначенный здесь  $\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha}$ , выражается одной из формул:

$$\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{\mathbf{c}} = \left[ \sqrt{\frac{1+c_0}{2}}; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}}; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}}; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1-c_0}{2}} \right]; \quad (3.22)$$

$$\mathbf{q}\boldsymbol{\alpha} = \exp \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2} = \left[ \cos \frac{\alpha}{2}; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right].$$

Рассмотрим теперь, как определить направляющие косинусы вектора, нормального к плоскости окружности, проходящей через точку с географическими координатами  $(\gamma; \theta)$  причем положительное направление ее обхода имеет географический азимут  $\psi$ . Географический азимут – это угол, отсчитываемый по часовой стрелке от северного направления до заданного направления и принимающий значения от 0 до  $2\cdot\pi$ .

В данном случае большую окружность, содержащую меридиан, проходящий через точку с координатами  $(\gamma; \theta)$  будем ассоциировать с кватернионом  $\mathbf{c}\mathbf{a}$ . Легко видеть, что этот кватернион имеет компоненты:

$$\mathbf{c}\mathbf{a} = [0; -\cos \gamma; 0; \sin \gamma] \quad (3.23)$$

Окружность, для которой мы ищем направляющие косинусы, будем ассоциировать с кватернионом  $\mathbf{c}\mathbf{b}$ . Результирующий кватернион  $\mathbf{c}$  имеет компоненты вида:

$$\mathbf{c} = \left[ \cos \psi; \frac{c_1}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi; \frac{c_2}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi; \frac{c_3}{\langle \mathbf{c} \rangle} \cdot \sin \psi \right]. \quad (3.24)$$

а направляющие косинусы  $c_1, c_2, c_3$  определяются из условия, что векторная часть  $\mathbf{c}$  протыкает сферу в точке с географическими координатами  $(\gamma; \theta)$ . Воспользовавшись формулами (3.4), получим:

$$\mathbf{c} = [\cos \psi, \sin \gamma \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi, \sin \theta \cdot \sin \psi, \cos \gamma \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi]. \quad (3.25)$$

На основании формулы (3.18)

$$\mathbf{c}\mathbf{b} = \mathbf{c} \circ \mathbf{c}\mathbf{a}. \quad (3.26)$$

Выполняя умножение кватернионов, получим:

$$\mathbf{c}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ cb_1 \\ cb_2 \\ cb_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \psi - \cos \gamma \cdot \cos \psi \\ -\cos \theta \cdot \sin \psi \\ \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \psi + \sin \gamma \cdot \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Таким образом, если большие окружности заданы направляющими косинусами нормалей к их плоскостям следует пользоваться формулами (3.20), (3.22). Если же они заданы в географических координатах и азимутах, надо предварительно перейти к направляющим косинусам при помощи формулы (3.27).

### 3.5. Контуры на сфере

Рассмотрим гладкий контур на сфере, который имеет начальную точку  $O$  и направление обхода – против часовой стрелки (рис. 3.4). Точки контура определяются параметром  $t$ ,

монотонно возрастающим при обходе контура в положительном направлении. Каждой точке контура припишем подвижный декартов репер  $y_1, y_2, y_3$ , являющийся функцией параметра  $t$ . Первый орт этого репера направлен по касательной к линии контура в направлении его обхода. Третий орт направлен по внешней нормали к сфере. Второй орт направлен по касательной к сфере и образует с двумя другими ортами правую тройку.

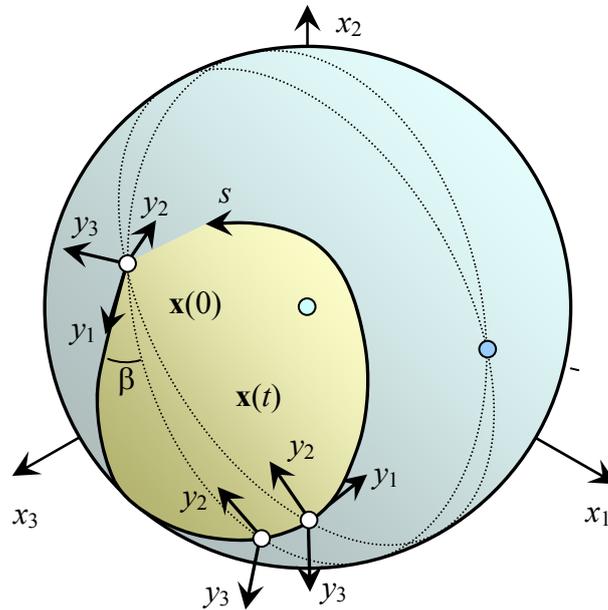


Рис. 3.4. Гладкий контур на сфере

Для каждой точки контура определим два кватерниона. Первый из них –  $\mathbf{x}(t)$ , компоненты которого имеют размерность длины, причем  $x_0(t)$  – длина контура от начальной точки до текущей, а  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  – координаты текущей точки в неподвижной системе координат. Второй кватернион –  $\mathbf{\varphi}(t)$ , определяющий ориентацию подвижного репера по отношению к неподвижному. При этом  $\varphi_0(t)$  – интегральный угол геодезического поворота контура при перемещении по контуру из исходной его точки в текущую, то-есть, сумма бесконечно малых поворотов вокруг оси 3 подвижного репера,  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$  – компоненты вектора, вокруг которого и на величину которого надо повернуть неподвижный репер, чтобы он совпал по ориентации с текущим положением подвижного репера. Для преобразования координат будем пользоваться экспонентой половины этого кватерниона:

$$\mathbf{q}(t) = \exp \frac{\mathbf{\varphi}(t)}{2}. \quad (3.28)$$

Для кватернионов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$  справедливы кинематические дифференциальные уравнения:

$$\frac{d_{\mathbf{x}} \mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{q}(t) \circ_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t); \quad (3.29)$$

где  ${}_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(t) = [v(t), v(t), 0, 0]$ ;

$v(t)$  – скорость изменения дуговой координаты контура  $s$  по параметру  $t$ .

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(t) \circ_{\mathbf{y}} \mathbf{\omega}(t); \quad (3.30)$$

где  ${}_{\mathbf{y}} \mathbf{\omega}(t) = [\omega(t), 0, v(t)/R, \omega(t)]$ ;

$\omega(t)$  – скорость поворота подвижного репера вокруг орта 3 подвижной системы координат по отношению к параметру  $t$ .

*Автомобильная аналогия.* Представим себе, что по поверхности сферы вдоль линии

контур движется автомобиль. С автомобилем связан подвижный репер. Орт 1 этого репера направлен вперед, орт 2 в левую сторону, орт 3 направлен вверх. Параметр  $t$  – время. Скорость автомобиля –  $v(t)$ . Угловая скорость его поворота относительно вертикальной оси –  $\omega(t)$ , положительное направление – влево. Если руль автомобиля держать прямо, автомобиль будет передвигаться по геодезической линии, то есть по большому кругу сферы. Если руль автомобиля повернуть, то автомобиль будет передвигаться по кривой линии, причем ее геодезическая кривизна будет:

$$\kappa(t) = \frac{\omega(t)}{v(t)}. \quad (3.31)$$

Эта аналогия позволяет наглядно представить рассматриваемые процессы.

### 3.6. Длина контура и площадь поверхности сферы, ограниченная контуром

Кинематические уравнения (3.29), (3.30) позволяют по  $v(t)$  – скорости движения подвижного репера в направлении оси 1, по  $\omega(t)$  – скорости поворота подвижного репера вокруг орта 3 и по начальным значениям кватернионов  $\mathbf{x}(0)$  и  $\mathbf{q}(0)$  вычислить значения кватернионов  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$  в функции от времени и тем самым определить контур на поверхности сферы. Компоненты  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  кватерниона  $\mathbf{x}(t)$  определяют координаты точки контура, соответствующие моменту времени  $t$ , а компоненты кватерниона  $\mathbf{q}(t)$  ориентацию подвижного репера, соответствующую этому моменту, относительно неподвижной системы координат.

Компонент  $x_0(t)$  по определению представляет собой дуговую координату контура:

$$x_0(t) = s(t) = \int_0^t v(t) \cdot dt; \quad (3.32)$$

а компонент  $\varphi_0(t)$  – угловую координату или интегральный угол геодезического поворота контура:

$$\varphi_0(t) = \psi(t) = \int_0^t \omega(t) \cdot dt. \quad (3.33)$$

Поскольку между кватернионами  $\mathbf{\varphi}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$  существует функциональная связь, определяемая формулой (3.28), то эта координата может быть вычислена по формуле:

$$\psi(t) = 2 \cdot \ln |\mathbf{q}(t)| = \ln \|\mathbf{q}(t)\|. \quad (3.34)$$

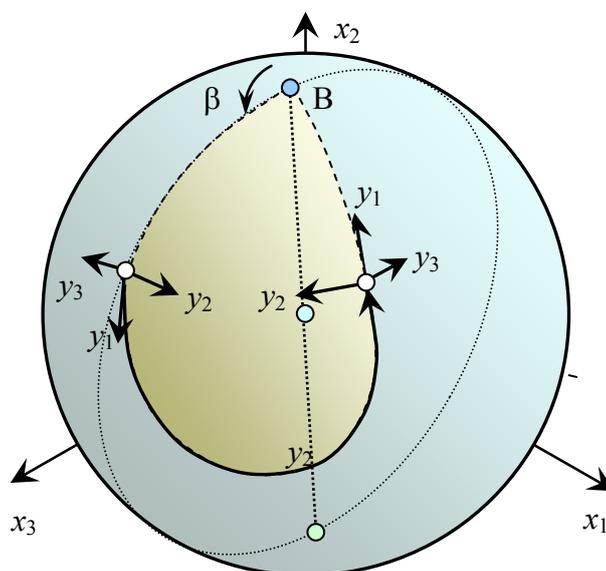


Рис. 3.5. К определению площади контура

Угловая координата контура на сфере имеет непосредственную связь с площадью сферической поверхности, ограниченной контуром. Известно, что площадь сферической поверхности, находящейся слева по ходу контура, при замкнутом гладком контуре, пробегаемом за время  $T$ , может быть вычислена по формуле:

$$F = R^2 \cdot [2 \cdot \pi - \psi(T)]. \quad (3.35)$$

Если контур не замкнут, дополним его до замыкания двумя отрезками больших окружностей. Первая из них гладко входит в контур в начальной точке при  $t = 0$ , вторая гладко выходит из него в конечной точке при  $t = T$ . Рассматриваемые большие окружности пересекаются в точке  $B$ , которая является началом первого отрезка и концом второго. В общем случае в точке  $B$  происходит излом теперь уже замкнутого контура.

Пусть  $\beta$  есть угол этого излома. Тогда угловая координата или интегральный угол геодезического поворота достроенного контура увеличится скачкообразно на угол  $\beta$ . Дополнительные участки больших окружностей угловую координату не изменят, поскольку их геодезическая кривизна равна нулю. Следовательно, для определения площади замкнутого дополненного контура  $Fd$  будет справедливой формула:

$$Fd = R^2 \cdot [2 \cdot \pi - \psi(T) - \beta]. \quad (3.36)$$

Угол  $\beta$  можно определить через кватернионы  $\mathbf{q}(0)$  и  $\mathbf{q}(t)$ . При этом можно исходить из того, что орт 2 подвижного репера в точке  $t = 0$  перпендикулярен плоскости большой окружности, примыкающей гладко к началу контура, а орт 2 подвижного репера в точке  $t = T$ , перпендикулярен плоскости большой окружности, примыкающей гладко к концу контура. Угол между этими ортами как раз и будет  $\beta$ .

Перенесем орт 2 подвижного репера в точке  $t = T$  в систему координат подвижного репера в точке  $t = 0$ .

$${}_{y(0)}y_2(T) = \mathbf{q}^{-1}(0) \circ \mathbf{q}(T) \circ {}_{y(T)}y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(T) \circ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(0T) \circ {}_{y(T)}y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(0T); \quad (3.37)$$

где обозначено:

$$\mathbf{q}(0T) = \mathbf{q}^{-1}(0) \circ \mathbf{q}(T). \quad (3.38)$$

Известно, что кватернионное произведение двух чисто векторных кватернионов имеет следующий геометрический смысл. Скалярная часть этого произведения равна скалярному произведению сомножителей, взятому с обратным знаком, а векторная часть произведения – векторному произведению сомножителей. Вычислим кватернионное произведение ортов  $y_2(0)$  и  $y_2(T)$  в подвижной системе координат при  $t = 0$ .

$$\mathbf{p} = {}_{y(0)}y_2(0) \circ \mathbf{q}(0T) \circ {}_{y(T)}y_2(T) \circ \mathbf{q}^{-1}(0T) = [0, 0, 1, 0] \circ \mathbf{q}(0T) \circ [0, 0, 1, 0] \circ \mathbf{q}^{-1}(0T). \quad (3.39)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что:

$$[0, 0, 1, 0] \circ \mathbf{q}(0T) \circ [0, 0, 1, 0] = [-q_0(0T), q_0(0T), -q_0(0T), q_0(0T)]. \quad (3.40)$$

С учетом этого получим:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\|\mathbf{q}(0T)\|} \cdot \begin{bmatrix} -q_0^2(0T) + q_1^2(0T) - q_2^2(0T) + q_3^2(0T) \\ 2 \cdot [q_0(0T) \cdot q_1(0T) + q_2(0T) \cdot q_3(0T)] \\ 0 \\ 2 \cdot [q_0(0T) \cdot q_3(0T) - q_1(0T) \cdot q_2(0T)] \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Отсюда

$$p_0 = B^2 - A^2; \quad \langle \mathbf{p} \rangle = 2 \cdot A \cdot B. \quad (3.42)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{q_0^2(0T) + q_2^2(0T)}}{|\mathbf{q}(0T)|}; \quad B = \frac{\sqrt{q_1^2(0T) + q_3^2(0T)}}{|\mathbf{q}(0T)|} \quad (3.43)$$

Искомый угол найдем по формуле:

$$\beta = \arg[-p_0 + i \cdot \langle \mathbf{p} \rangle] = \arg(A^2 - B^2 + 2 \cdot i \cdot A \cdot B) = \arg(A + B \cdot i)^2 = 2 \cdot \arg(A + B \cdot i) \quad (3.44)$$

Функции этого угла:

$$\cos \frac{\beta}{2} = A; \quad \sin \frac{\beta}{2} = B; \quad \cos \beta = A^2 - B^2; \quad \sin \beta = 2 \cdot A \cdot B. \quad (3.45)$$

### 3.7. Круговые контуры

Круговой контур получается, если задать  $v(t) = \text{const}$ ;  $\omega(t) = \text{const}$ . При этом должны удовлетворяться кинематические уравнения (3.29), (3.30). Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что решение этих дифференциальных уравнений таково:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}\mathbf{c} \circ \exp \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot t}{2}; \quad {}_x \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\mathbf{c} + \mathbf{q}(t) \circ {}_y \mathbf{x}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t); \quad (3.46)$$

где  $\mathbf{q}\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x}\mathbf{c}$  – произвольные постоянные кватернионы;

$\boldsymbol{\omega} = [\omega, 0, v/R, \omega]$  – кватернион угловых скоростей;

$$\langle \boldsymbol{\omega} \rangle = \sqrt{\frac{v^2}{R^2} + \omega^2}; \quad (3.47)$$

$R$  – радиус сферы;

$v$  – скорость изменения дуговой координаты контура;

$\omega$  – скорость геодезического поворота (т.е. скорость поворота подвижного репера вокруг орта 3 подвижной системы координат).

${}_y \mathbf{x}(t) = [v \cdot t, 0, 0, R]$  – координаты текущей точки контура относительно неподвижной системы координат по рис. 3.2 в подвижной системе координат;

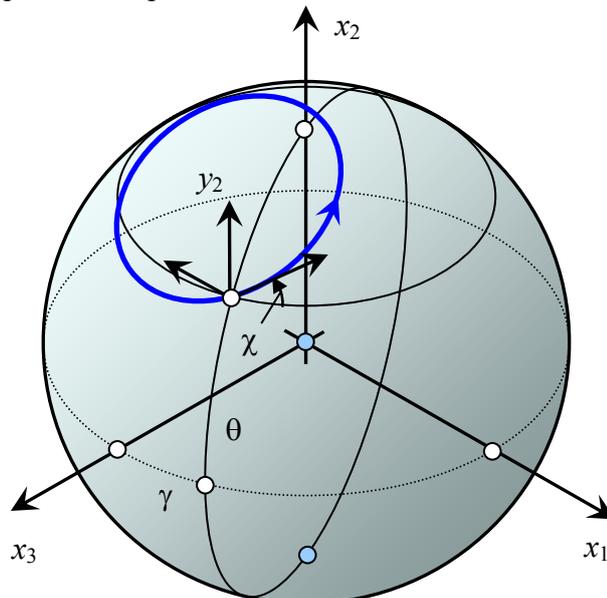


Рис. 3.6. К назначению постоянных кватернионов

Рассмотрим, как назначаются произвольные постоянные кватернионы  $\mathbf{qc}$  и  $\mathbf{xc}$  в общих решениях дифференциальных уравнений (3.46). Пусть требуется провести круговой контур, начинающийся в точке с географическими координатами  $\gamma, \theta$  в направлении, отклоненном от параллели на угол  $\chi$  против часовой стрелки (рис. 3.6).

Кватернион  $\mathbf{qc}$  определяет ориентацию подвижного репера в начальной точке контура. Орт с номером 3 этого репера должен представлять внешнюю нормаль к сфере в точке с географическими координатами  $\gamma, \theta$ , орт с номером 1 должен быть повернут относительно восточного направления параллели на угол  $\chi$  против часовой стрелки, а орт с номером 2 должен образовывать в совокупности с ортами 1 и 3 правую тройку.

Приведение неподвижного репера в описанное выше положение можно выполнить при помощи трех простых поворотов. Первый поворот соответствует кватерниону истинного поворота  $\boldsymbol{\theta} = [0, -\theta, 0, 0]$  в неподвижной системе координат, второй поворот – кватерниону истинного поворота  $\boldsymbol{\gamma} = [0, 0, \gamma, 0]$  в неподвижной системе координат, а третий поворот – кватерниону истинного поворота  $\boldsymbol{\chi} = [0, 0, 0, \chi]$  в подвижной системе координат. Нулевые компоненты этих кватернионов приняты равными нулю, чтобы суммарный геодезический поворот отсчитывался от нуля.

Перейдем к экспонентам половинных поворотов:

$$\exp \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right]; \exp \frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} = \left[ \cos \frac{\gamma}{2}, 0, \sin \frac{\gamma}{2}, 0 \right]; \exp \frac{\boldsymbol{\chi}}{2} = \left[ \cos \frac{\chi}{2}, 0, 0, \sin \frac{\chi}{2} \right]. \quad (3.48)$$

Половинный экспоненциальный кватернион суммарного поворота может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{qc} = \exp \frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} \circ \exp \frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \circ \exp \frac{\boldsymbol{\chi}}{2} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\chi}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\chi}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \\ \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\chi}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Перейдем к определению постоянного кватерниона  $\mathbf{xc}$ . Из формулы (3.46) следует:

$$\mathbf{xc} = {}_x \mathbf{x}(0) - \mathbf{q}(0) \circ {}_y \mathbf{x}(0) \circ \mathbf{q}^{-1}(0). \quad (3.50)$$

Точка с географическими координатами  $\gamma, \theta$  в неподвижной системе координат в соответствии с формулой (3.4) имеет декартовы координаты

$$x_1 = R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta; x_2 = R \cdot \sin \theta; x_3 = R \cdot \cos \gamma \cdot \cos \theta; \quad (3.51)$$

поэтому:

$${}_x \mathbf{x}(0) = [0, R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta, R \cdot \sin \theta, R \cdot \cos \gamma \cdot \cos \theta]. \quad (3.52)$$

Вычисления показывают, что

$$\mathbf{q}(0) \circ {}_y \mathbf{x}(0) \circ \mathbf{q}^{-1}(0) = [0, R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta, R \cdot \sin \theta, R \cdot \cos \gamma \cdot \cos \theta]. \quad (3.53)$$

Таким образом,  $\mathbf{xc} = [0, 0, 0, 0] = \mathbf{O}$ . Следовательно, решение кинематических уравнений для данного случая будет иметь вид:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{qc} \circ \exp \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot t}{2}; \quad {}_x \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}(t) \circ {}_y \mathbf{x}(t) \circ \mathbf{q}^{-1}(t); \quad (3.54)$$

Контур будет замкнут, когда параметр достигнет значения

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\langle \omega \rangle}; \quad (3.55)$$

Длина этого контура:

$$S = v \cdot T = \frac{2 \cdot \pi \cdot v}{\langle \omega \rangle}. \quad (3.56)$$

Суммарный геодезический поворот:

$$\psi(T) = \ln \|\mathbf{q}(T)\| = \ln [\exp(T \cdot \omega)] = T \cdot \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\omega}{\langle \omega \rangle}. \quad (3.57)$$

Площадь поверхности сферы, ограниченная контуром:

$$F = R^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{\omega}{\langle \omega \rangle}\right). \quad (3.58)$$

Рассмотрим несколько примеров (рис. 3.7). Сфера радиуса  $R = 5$  см. Начало контура в точке  $\gamma = 0; \theta = 0$ . Направление в сторону возрастания координаты  $\gamma$ , то есть  $\chi = 0$ .

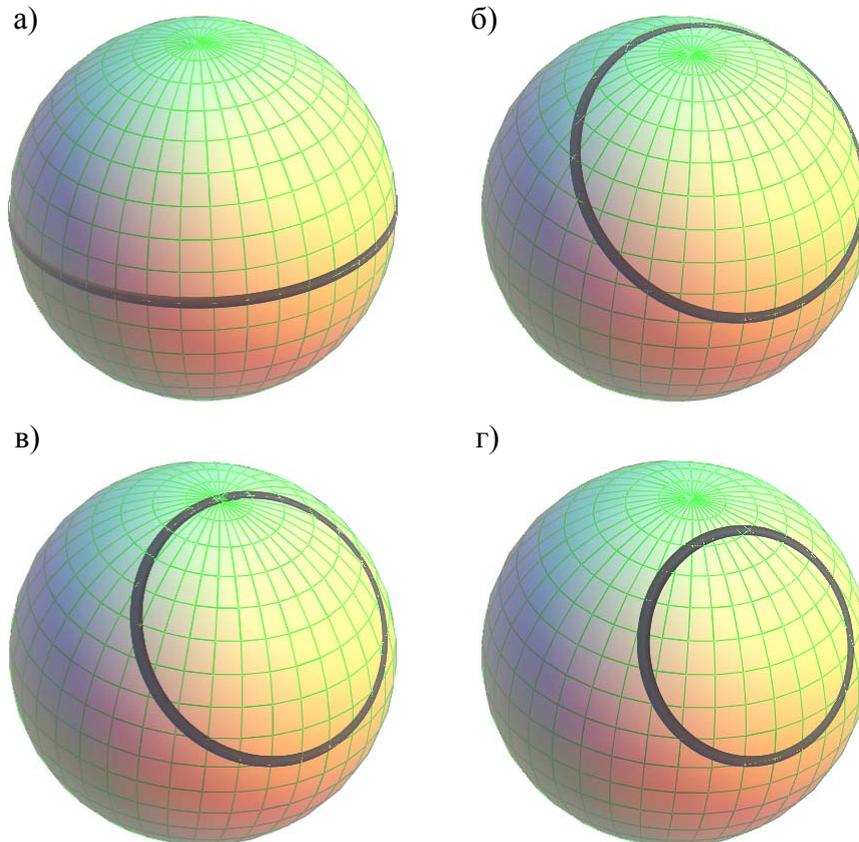


Рис. 3.7. Контур постоянной кривизны на сфере  $R = 5$  см:  
а)  $\omega = 0$ ; б)  $\omega = 0.15$ ; в)  $\omega = 0.2$ ; г)  $\omega = 4/15 \approx 0,267$ .

Постоянный кватернион  $\mathbf{qc}$  в данном случае таков:

$$\mathbf{qc} = [1, 0, 0, 0]. \quad (3.59)$$

Принимаем  $v = 1$ . В этом случае геодезическая кривизна контура численно равна  $\omega$ . Результаты расчетов приведены в таблице. В ней обозначено:

$\omega$  – геодезическая кривизна контура;  
 $\langle \omega \rangle$  – полная кривизна контура;  
 $r$  – истинный радиус контура;  
 $\psi$  – суммарный геодезический поворот;  
 $S$  – длина контура;  
 $F$  – площадь сферической поверхности, охваченной контуром.

**Таблица результатов расчета**

Вариант	$\omega$	$\langle \omega \rangle$	$r$	$\psi$	$S$	$F$
а)	0,000	0,200	5,000	0,000	31,416	157,080
б)	0,150	0,250	4,000	3,770	25,133	62,832
в)	0,200	0,283	3,536	4,443	22,214	46,008
г)	0,267	0,333	3,000	5,027	18,850	31,416

### 3.8. Полигоны на сфере

Представим себе, что на сфере радиуса  $R$  обозначены и последовательно пронумерованы числами  $0, 1, 2, \dots, n, n + 1$  точек, являющихся вершинами  $n + 1$ -стороннего замкнутого полигона (рис. 3.8). Стороны полигона последовательно соединяют вершины по дугам больших кругов. Стороны ориентированы так, что они составляют замкнутую цепочку с направлением обхода поверхности полигона против часовой стрелки и последовательно пронумерованы числами  $0, 1, 2, \dots, n$ . Длины сторон полигона измерены и составляют  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ . Углы поворота полигона или внешние углы полигона (то есть углы между касательной в начале данной стороны полигона и касательной в конце предыдущей стороны полигона) тоже измерены и составляют  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Требуется установить зависимости между углами поворота полигона и длинами его сторон.

В зависимости от длин сторон полигона и от величин его внешних углов существует много разновидностей полигонов на сфере. Вариабельность этой проблемы даже для случая треугольников весьма велика [17]. Мы же ограничимся рассмотрением выпуклых полигонов, то-есть таких, которые полностью находятся слева от большой окружности, являющейся продолжением стороны полигона. Эта закономерность должна соблюдаться для каждой из его сторон.

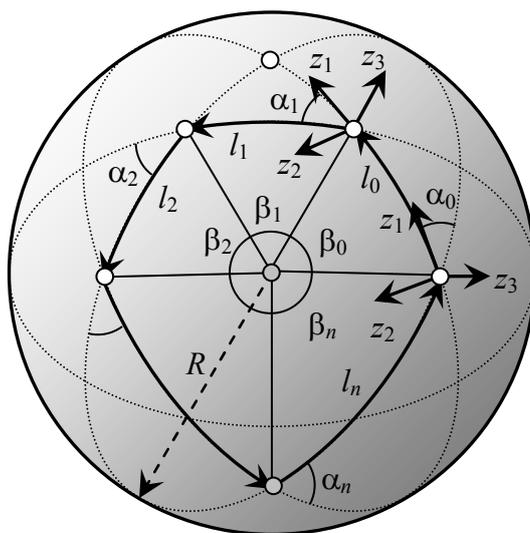


Рис. 3.8. Полигон на сфере

Расположим в начале и конце каждой стороны полигона декартовы реперы так, чтобы орт номер 1 совпадал с касательной к стороне полигона, орт номер 3 представлял внешнюю

нормаль к сфере, а орт номер 2 образовывал бы с предыдущими двумя ортами правую тройку. Таким образом, введены в рассмотрение  $2 \cdot (n + 1)$  декартовых реперов, каждому из которых можно поставить в соответствие нормированный половинный экспоненциальный кватернион. Введем для этих кватернионов, представленных в неподвижной системе координат, следующие обозначения:  ${}_x\mathbf{qb}(0), {}_x\mathbf{qb}(1), {}_x\mathbf{qb}(2), \dots, {}_x\mathbf{qb}(n)$  – для кватернионов, соответствующим реперам, находящимся в начале сторон полигона;  ${}_x\mathbf{qe}(0), {}_x\mathbf{qe}(1), {}_x\mathbf{qe}(2), \dots, {}_x\mathbf{qe}(n)$  – для кватернионов, соответствующим реперам, находящимся в конце сторон полигона.

Введем в рассмотрение нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота полигона в его вершинах, заданные в подвижной системе координат:

$${}_y\mathbf{qa}(k) = \left[ \cos \frac{\alpha_k}{2}; 0; 0; \sin \frac{\alpha_k}{2} \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (3.60)$$

и половинные экспоненциальные кватернионы искривления сторон полигона:

$${}_y\mathbf{qb}(k) = \left[ \cos \frac{\beta_k}{2}; 0; \sin \frac{\beta_k}{2}; 0 \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad (3.61)$$

где

$$\beta_k = \frac{l_k}{R} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (3.62)$$

Заметим, что в случае выпуклых полигонов углы  $\alpha$  и  $\beta$  меняются в пределах от 0 до  $\pi$ .

При помощи кватернионов (3.60) и (3.61) устанавливается связь между кватернионами  ${}_x\mathbf{qb}$  и  ${}_x\mathbf{qe}$ :

$$\begin{aligned} {}_x\mathbf{qe}(k) &= {}_x\mathbf{qb}(k) \circ {}_y\mathbf{qb}(k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \\ {}_x\mathbf{qb}(k) &= {}_x\mathbf{qe}(k-1) \circ {}_y\mathbf{qa}(k) \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad {}_x\mathbf{qb}(0) = {}_x\mathbf{qe}(n) \circ {}_y\mathbf{qa}(0). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Пусть известен кватернион  ${}_x\mathbf{qb}(0)$ . Тогда кватернион  ${}_x\mathbf{qb}(1)$  может быть вычислен по формуле:

$${}_x\mathbf{qb}(1) = {}_x\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1); \quad (3.64)$$

кватернион  ${}_x\mathbf{qb}(2)$  – по формуле:

$${}_x\mathbf{qb}(2) = {}_x\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1) \circ {}_y\mathbf{qb}(1) \circ {}_y\mathbf{qa}(2); \quad (3.65)$$

кватернион  ${}_x\mathbf{qb}(k)$  – по формуле:

$${}_x\mathbf{qb}(k) = {}_x\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1) \circ {}_y\mathbf{qb}(1) \circ {}_y\mathbf{qa}(2) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qb}(k-1) \circ {}_y\mathbf{qa}(k). \quad (3.66)$$

Продолжая это построение, получим:

$${}_x\mathbf{qb}(0) = {}_x\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1) \circ {}_y\mathbf{qb}(1) \circ {}_y\mathbf{qa}(2) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qb}(n) \circ {}_y\mathbf{qa}(0). \quad (3.67)$$

Из этой формулы следует:

$${}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1) \circ {}_y\mathbf{qb}(1) \circ {}_y\mathbf{qa}(2) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qb}(n) \circ {}_y\mathbf{qa}(0) = -\mathbf{I}. \quad (3.68)$$

Умножая левую и правую часть равенства (3.68) слева на  ${}_y\mathbf{qa}(0)$ , а справа на  ${}_y\mathbf{qa}(0)^{-1}$ , получим более совершенную запись:

$${}_y\mathbf{qa}(0) \circ {}_y\mathbf{qb}(0) \circ {}_y\mathbf{qa}(1) \circ {}_y\mathbf{qb}(1) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qa}(n) \circ {}_y\mathbf{qb}(n) = -\mathbf{I}. \quad (3.69)$$

Этот прием показывает, что в левой части равенства можно выполнять циклическую перестановку сомножителей. Формула (3.69) соответствует нескольким зависимостям,

которые должны соблюдаться между углами  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  и  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Формально мы видим четыре зависимости – по одной для каждого компонента кватерниона. На самом деле среди них только три независимых, поскольку формулы выписаны для нормированных кватернионов. Это – основные зависимости, которые связывают углы и стороны замкнутого полигона на сфере. Они могут быть использованы в геодезии для контроля измеренных величин, для последующей разгонки невязок измерений и для других целей.

### 3.9. Замыкание полигона на сфере

В частности эти зависимости могут быть использованы для замыкания разомкнутых полигонов на сфере (рис. 3.9). Поскольку кватернионная зависимость (3.69) содержит в себе три независимых скалярных зависимости, из нее можно определить три независимые величины. В частности, можно определить информацию, содержащуюся в любых трех стоящих подряд сомножителях зависимости (3.69). Каждый сомножитель определяет либо угол  $\alpha$  поворота полигона в вершине, либо угол  $\beta$ , под которым видна сторона полигона из центра сферы.

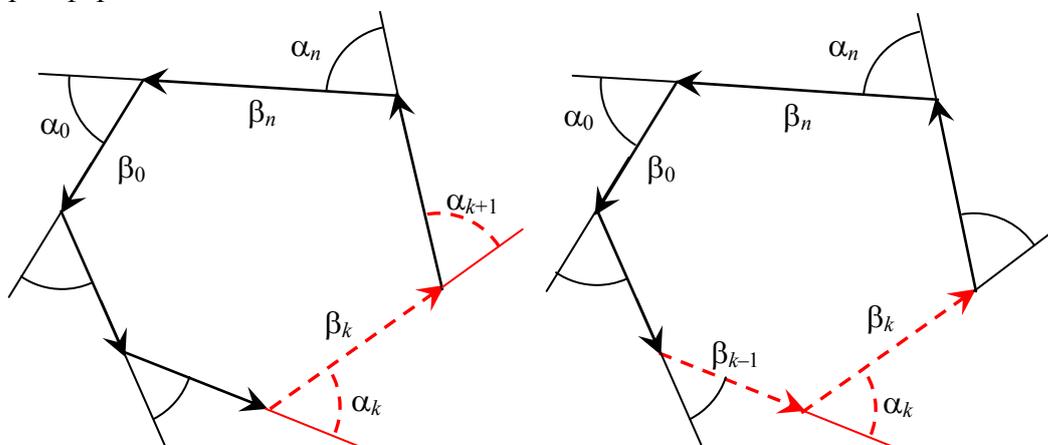


Рис. 3.9. Два вида замыкания полигона на сфере:

а) – определение стороны и прилегающих углов; б) – определение угла и прилегающих сторон.

Возможны два варианта выбора кватернионов-сомножителей.

*Первый вариант:*

$$\mathbf{q}\alpha(k) \circ \mathbf{q}\beta(k) \circ \mathbf{q}\alpha(k+1) = \mathbf{V}(k); \quad (3.70)$$

можно трактовать как определение стороны и прилегающих к ней углов. Здесь введен кватернион  $\mathbf{V}(k)$  для обозначения произведения трех указанных выше кватернионов.

При известном  $\mathbf{V}(k)$  равенство (3.70) можно разрешить относительно тригонометрических функций углов  $\alpha(k); \beta(k); \alpha(k+1)$ , а затем определить углы. Подставляя в равенство (3.70) выражения для сомножителей в соответствии с формулами (3.60) и (3.61) и пользуясь правилом умножения кватернионов, запишем:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\beta_k}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{2} \\ \sin \frac{\beta_k}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2} \\ \sin \frac{\beta_k}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{2} \\ \cos \frac{\beta_k}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_{k+1} + \alpha_k}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{V}(k). \quad (3.71)$$

Складывая попарно квадраты компонентов кватерниона, получим формулы для квадратов синуса и косинуса половинного угла  $\beta_k$ :

$$\cos^2 \frac{\beta_k}{2} = B_0^2(k) + B_3^2(k); \quad \sin^2 \frac{\beta_k}{2} = B_1^2(k) + B_2^2(k). \quad (3.72)$$

Из этих равенств следует:

$$\cos \beta_k = B_0^2(k) - B_1^2(k) - B_2^2(k) + B_3^2(k). \quad (3.73)$$

$$\sin \beta_k = 2 \cdot \sqrt{[B_0^2(k) + B_3^2(k)] \cdot [B_1^2(k) + B_2^2(k)]}. \quad (3.74)$$

В формуле (3.74) корень квадратный взят со знаком плюс, поскольку обход полигона выполняется против часовой стрелки, то есть угол  $\beta$  положительный, а угловая мера стороны выпуклого полигона не должна превышать  $\pi$ , то есть и синус этого угла тоже положительный.

Комбинируя попарные произведения компонентов кватерниона  $\mathbf{B}(k)$ , получаем формулы для тригонометрических функций углов, связанных со сторонами полигона:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_k &= \frac{B_0(k) \cdot B_2(k) + B_1(k) \cdot B_3(k)}{\sqrt{[B_0^2(k) + B_3^2(k)] \cdot [B_1^2(k) + B_2^2(k)]}}; \\ \sin \alpha_k &= \frac{B_2(k) \cdot B_3(k) - B_0(k) \cdot B_1(k)}{\sqrt{[B_0^2(k) + B_3^2(k)] \cdot [B_1^2(k) + B_2^2(k)]}}; \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{k+1} &= \frac{B_0(k) \cdot B_2(k) - B_1(k) \cdot B_3(k)}{\sqrt{[B_0^2(k) + B_2^2(k)] \cdot [B_1^2(k) + B_3^2(k)]}}; \\ \sin \alpha_{k+1} &= \frac{B_0(k) \cdot B_1(k) + B_2(k) \cdot B_3(k)}{\sqrt{[B_0^2(k) + B_2^2(k)] \cdot [B_1^2(k) + B_3^2(k)]}}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Величины углов можно узнать через их косинусы и синусы при помощи функции atan2:

$$\alpha = \text{atan2}(\cos \alpha; \sin \alpha). \quad (3.77)$$

Для определения кватерниона  $\mathbf{B}(k)$  возвратимся к зависимости (3.69). Путем циклической перестановки сомножителей в левой части зависимости можно привести ее к виду:

$$\mathbf{B}(k) \circ \mathbf{Qb}(k) = -\mathbf{I}. \quad (3.78)$$

где обозначено:

$$\mathbf{Qb}(k) = {}_y \mathbf{q}\beta(k+1) \circ \dots \circ {}_y \mathbf{q}\alpha(n) \circ {}_y \mathbf{q}\beta(n) \circ {}_y \mathbf{q}\alpha(0) \circ {}_y \mathbf{q}\beta(0) \circ \dots \circ {}_y \mathbf{q}\beta(k-1). \quad (3.79)$$

Из формулы (3.78) находим:

$$\mathbf{B}(k) = -\mathbf{Qb}^{-1}(k). \quad (3.80)$$

Заметим, что  $\mathbf{Qb}(k)$  – нормированный кватернион как произведение нормированных кватернионов, а значит, обращение при его вычислении можно заменить на сопряжение, и в итоге равенство (3.80) представить покомпонентно следующим образом:

$$B_0(k) = -Qb_0(k); \quad B_1(k) = Qb_1(k); \quad B_2(k) = Qb_2(k); \quad B_3(k) = Qb_3(k). \quad (3.81)$$

Второй вариант:

$$\mathbf{q}\beta(k-1) \circ_y \mathbf{q}\alpha(k) \circ_y \mathbf{q}\beta(k) = \mathbf{A}(k) \quad (3.82)$$

можно трактовать как определение угла и прилегающих к нему сторон.

Здесь, как и в первом варианте введен кватернион  $\mathbf{A}(k)$  для обозначения произведения трех кватернионов из формулы (3.82).

При известном  $\mathbf{A}(k)$  равенство (3.82) можно разрешить относительно тригонометрических функций углов  $\beta(k-1)$ ;  $\alpha(k)$ ;  $\beta(k)$  и, при необходимости, относительно самих углов. Как и в первом варианте, подставляя в равенство (3.82) выражения для сомножителей в соответствии с формулами (3.60) и (3.61) и пользуясь правилом умножения кватернионов, запишем:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha_k}{2} \cdot \cos \frac{\beta_k + \beta_{k-1}}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_k}{2} \cdot \sin \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{2} \\ \cos \frac{\alpha_k}{2} \cdot \sin \frac{\beta_k + \beta_{k-1}}{2} \\ \sin \frac{\alpha_k}{2} \cdot \cos \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(k). \quad (3.83)$$

Складывая попарно квадраты компонентов кватерниона, получим формулы для квадратов синуса и косинуса половинного угла  $\alpha_k$ :

$$\cos^2 \frac{\alpha_k}{2} = A_0^2(k) + A_2^2(k); \quad \sin^2 \frac{\alpha_k}{2} = A_1^2(k) + A_3^2(k). \quad (3.84)$$

Из этих равенств следует:

$$\cos \alpha_k = \cos^2 \frac{\alpha_k}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_k}{2} = A_0^2(k) - A_1^2(k) + A_2^2(k) - A_3^2(k). \quad (3.85)$$

$$\sin \alpha_k = 2 \cdot \sqrt{[A_0^2(k) + A_2^2(k)] \cdot [A_1^2(k) + A_3^2(k)]}. \quad (3.86)$$

Знак перед квадратным корнем взят положительным, поскольку для выпуклых полигонов угол  $\alpha_k$ , меняется от нуля до  $\pi$ , а, значит, синус его положителен.

Комбинируя попарные произведения компонентов кватерниона  $\mathbf{A}(k)$ , получаем формулы для тригонометрических функций углов, связанных со сторонами полигона:

$$\begin{aligned} \cos \beta_k &= \frac{A_2(k) \cdot A_1(k) + A_0(k) \cdot A_3(k)}{\sqrt{[A_0^2(k) + A_2^2(k)] \cdot [A_1^2(k) + A_3^2(k)]}}; \\ \sin \beta_k &= \frac{A_2(k) \cdot A_3(k) - A_0(k) \cdot A_1(k)}{\sqrt{[A_0^2(k) + A_2^2(k)] \cdot [A_1^2(k) + A_3^2(k)]}}; \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_{k-1} &= \frac{A_0(k) \cdot A_3(k) - A_2(k) \cdot A_1(k)}{\sqrt{[A_0^2(k) + A_2^2(k)] \cdot [A_1^2(k) + A_3^2(k)]}}; \\ \sin \beta_{k-1} &= \frac{A_0(k) \cdot A_1(k) + A_2(k) \cdot A_3(k)}{\sqrt{[A_0^2(k) + A_2^2(k)] \cdot [A_1^2(k) + A_3^2(k)]}}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Величины углов можно определить через их косинусы и синусы по формуле (3.77).

Для определения кватерниона  $\mathbf{A}(k)$  рассмотрим зависимость (3.69). Путем циклической перестановки сомножителей в левой части зависимости можно получить:

$$\mathbf{A}(k) \circ \mathbf{Qa}(k) = -\mathbf{I}. \quad (3.89)$$

где обозначено:

$$\mathbf{Qa}(k) = {}_y\mathbf{qa}(k+1) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qa}(n) \circ {}_y\mathbf{q\beta}(n) \circ {}_y\mathbf{qa}(0) \circ {}_y\mathbf{q\beta}(0) \circ \dots \circ {}_y\mathbf{qa}(k-1). \quad (3.90)$$

Из формулы (3.89) находим:

$$\mathbf{A}(k) = -\mathbf{Qa}^{-1}(k). \quad (3.91)$$

Заметим, что  $\mathbf{Qa}(k)$  – нормированный кватернион как произведение нормированных кватернионов, а значит, обращение при его вычислении можно заменить на сопряжение, и в итоге равенство (3.91) представить покомпонентно следующим образом:

$$A_0(k) = -Qa_0(k); \quad A_1(k) = Qa_1(k); \quad A_2(k) = Qa_2(k); \quad A_3(k) = Qa_3(k). \quad (3.92)$$

Заметим, что, введя новое обозначение  $\mathbf{q}(k)$ , на основании формул (3.60) и (3.61) получим:

$${}_y\mathbf{q}(k) = {}_y\mathbf{qa}(k) \circ {}_y\mathbf{q\beta}(k) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha_k}{2} \cdot \cos \frac{\beta_k}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_k}{2} \cdot \sin \frac{\beta_k}{2} \\ \cos \frac{\alpha_k}{2} \cdot \sin \frac{\beta_k}{2} \\ \sin \frac{\alpha_k}{2} \cdot \cos \frac{\beta_k}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \\ \cos \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \\ \sin \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \\ \sin \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} \\ -\cos \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} \\ \sin \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

В этих обозначениях формула (3.69) имеет вид:

$$\mathbf{q}(0) \circ \mathbf{q}(1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n) = \mathbf{q}(0) \circ \mathbf{Q}(0) = -\mathbf{I}; \quad (3.94)$$

где

$$\mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}(1) \circ \mathbf{q}(2) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n). \quad (3.95)$$

Из равенств (3.93) следует:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_k &= q_0^2(k) - q_1^2(k) + q_2^2(k) - q_3^2(k); & \cos \beta_k &= q_0^2(k) - q_1^2(k) - q_2^2(k) + q_3^2(k); \\ \sin \alpha_k &= 2 \cdot [q_0(k) \cdot q_3(k) - q_1(k) \cdot q_2(k)]; & \sin \beta_k &= 2 \cdot [q_0(k) \cdot q_2(k) - q_1(k) \cdot q_3(k)]; \end{aligned} \quad (3.96)$$

а также:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} &= q_0(k) + q_1(k); & \cos \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} &= q_0(k) - q_1(k); \\ \sin \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} &= q_3(k) + q_2(k); & \sin \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} &= q_3(k) - q_2(k); \end{aligned} \quad (3.97)$$

откуда легко определяются:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha_k}{2} &= \sqrt{q_0^2(k) + q_2^2(k)}; & \cos \frac{\beta_k}{2} &= \sqrt{q_0^2(k) + q_3^2(k)}; \\ \sin \frac{\alpha_k}{2} &= \pm \sqrt{q_1^2(k) + q_3^2(k)}; & \sin \frac{\beta_k}{2} &= \sqrt{q_1^2(k) + q_2^2(k)}.\end{aligned}\quad (3.98)$$

Здесь использована зависимость

$$q_0^2(k) + q_1^2(k) + q_2^2(k) + q_3^2(k) = 1. \quad (3.99)$$

Тангенсы половинных углов определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} = \pm \sqrt{\frac{q_1^2(k) + q_3^2(k)}{q_0^2(k) + q_2^2(k)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_k}{2} = \sqrt{\frac{q_1^2(k) + q_2^2(k)}{q_0^2(k) + q_3^2(k)}}. \quad (3.100)$$

Тангенсы полусуммы и полуразности углов определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_k + \beta_k}{2} = \frac{q_3(k) + q_2(k)}{q_0(k) + q_1(k)}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} = \frac{q_3(k) - q_2(k)}{q_0(k) - q_1(k)}. \quad (3.101)$$

Следует, однако, помнить, что компоненты кватерниона  $\mathbf{q}(k)$  не являются независимыми. Знаки  $\pm$  в формулах (3.98) и (3.100)

Из формулы (3.94) следует:

$$\mathbf{q}(0) = -\mathbf{Q}^{-1}(0). \quad (3.102)$$

Базируясь на формуле (3.102), определим функции углов, связанные с нулевой стороной многоугольника:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_0 &= Q_0^2 - Q_1^2 + Q_2^2 - Q_3^2; & \cos \beta_0 &= Q_0^2 - Q_1^2 - Q_2^2 + Q_3^2; \\ \sin \alpha_0 &= -2 \cdot [Q_0 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_2]; & \sin \beta_0 &= -2 \cdot [Q_0 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_3];\end{aligned}\quad (3.103)$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} &= Q_0 - Q_1; & \cos \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} &= Q_0 + Q_1; \\ \sin \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} &= -Q_2 - Q_3; & \sin \frac{\alpha_k - \beta_k}{2} &= Q_2 - Q_3;\end{aligned}\quad (3.104)$$

$$\cos \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{Q_0^2 + Q_2^2}; \quad \cos \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{Q_0^2 + Q_3^2}; \quad (3.105)$$

$$\sin \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{Q_1^2 + Q_3^2}; \quad \sin \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{Q_1^2 + Q_3^2}{Q_0^2 + Q_2^2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_0^2 + Q_3^2}}; \quad (3.106)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} = -\frac{Q_2 + Q_3}{Q_0 - Q_1}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2} = \frac{Q_2 - Q_3}{Q_0 + Q_1}. \quad (3.107)$$

### 3.10. Правильный многоугольник на сфере

В качестве примера рассмотрим правильный  $n + 1$  -угольник на сфере, т.е. замкнутый полигон с  $n + 1$  равными между собой углами поворота полигона и  $n + 1$  равными между собой сторонами (рис. 3.10). Для его конкретизации и привязки к географической и неподвижной системам координат будем полагать, что все его вершины лежат на параллели, соответствующей широте  $\theta$ , вершина полигона с номером 0 находится на

нулевом меридиане в точке с географическими координатами  $(0, \theta)$ , сторона полигона с номером 0 берет свое начало в вершине полигона с номером 0, а заканчивается в угле полигона с номером 1, который находится в точке с географическими координатами  $\left(\frac{2 \cdot \pi}{n+1}; \theta\right)$ . Продолжая построение далее, получим полигон, в котором сторона с номером  $n$  замыкает его, заканчиваясь в вершине с номером 0. Обход полигона выполняется против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса. Полигон охватывает участок поверхности сферы, содержащий северный полюс.

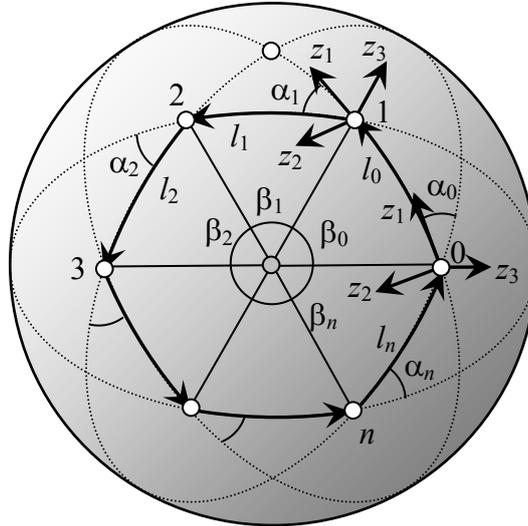


Рис. 3.10. Правильный  $n + 1$  -угольник на сфере

Как следует из вышесказанного, на сфере радиуса  $R$  можно построить целое семейство различных правильных  $n + 1$  - угольников, являющихся функциями одной действительной переменной. В данном случае в качестве этой действительной переменной выбрана широта  $\theta$ , на которой расположены вершины правильного многоугольника. Диапазон, в котором может изменяться широта, таков:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (3.108)$$

При значении  $\theta$ , близком к верхней грани диапазона, имеем многоугольник малой площади, охватывающий северный полюс. При значении  $\theta = 0$  имеем многоугольник, периметр которого совпадает с экватором, а площадь – равна площади полусферы. При значении  $\theta$ , близком к нижней грани диапазона, имеем многоугольник, покрывающий почти всю сферу за исключением окрестности южного полюса.

Координаты вершины с номером  $k$  рассматриваемого полигона в неподвижной системе, определенной в разделе 3.1, таковы:

$$\mathbf{x}(k) = [\cos \theta \cdot \sin(2 \cdot k \cdot \lambda); \sin \theta; \cos \theta \cdot \cos(2 \cdot k \cdot \lambda)] \cdot R \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad (3.109)$$

где  $\lambda = \frac{\pi}{n+1}$ .

Каждая сторона полигона является дугой большой окружности. Косинус и синус половины угла, под которым видна сторона полигона из центра сферы даются формулами:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}; \quad \sin \frac{\beta}{2} = \cos \theta \cdot \sin \lambda; \quad (3.110)$$

а сам угол может быть вычислен так:

$$\beta = 2 \cdot \arcsin(\cos \theta \cdot \sin \lambda); \quad (3.111)$$

Как было сказано в разделе 3.4, каждая большая окружность на сфере может быть определена направляющими косинусами нормали к плоскости, в которой лежит эта окружность. Косинусы углов между нормалью к окружности, определяющей сторону с номером  $k$ , и осями неподвижной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  даются формулами:

$$\begin{aligned} c_1(k) &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \cdot \sin[(2 \cdot k + 1) \cdot \lambda]; \\ c_2(k) &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \cdot \cos \lambda; \quad (k = 0, 1, \dots, n). \\ c_3(k) &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \cdot \cos[(2 \cdot k + 1) \cdot \lambda]; \end{aligned} \quad (3.112)$$

Что касается углов поворота полигона в его вершинах, то формулы для определения косинусов и синусов половинных углов таковы:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \theta \cdot \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}}; \quad (3.113)$$

а сам угол может быть вычислен по формуле:

$$\alpha = 2 \cdot \arg(\cos \lambda + i \cdot \cos \theta \cdot \sin \lambda) = 2 \cdot \operatorname{atan2}(\cos \lambda; \cos \theta \cdot \sin \lambda); \quad (3.114)$$

Для этого полигона нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота полигона в его вершинах, заданные в подвижной системе координат не зависят от номера вершины и имеют вид:

$${}_y \mathbf{q} \boldsymbol{\alpha} = \left[ \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}}; 0; 0; \frac{\sin \theta \cdot \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \right] \quad (3.115)$$

и нормированные половинные экспоненциальные кватернионы искривления сторон полигона в подвижной системе координат тоже не зависят от номера стороны и вычисляются по формулам:

$${}_y \mathbf{q} \boldsymbol{\beta} = \left[ \sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}; 0; \cos \theta \cdot \sin \lambda; 0 \right]; \quad (3.116)$$

Кватернион  $\mathbf{q}$ , определяемый формулой (3.93), в подвижной системе координат имеет вид:

$${}_y \mathbf{q} = \left[ \cos \lambda; -\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}}; \frac{\cos \theta \cdot \cos \lambda \cdot \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}}; \sin \theta \cdot \sin \lambda \right] \quad (3.117)$$

Эти же кватернионы в неподвижной системе координат имеют вид:

$${}_x \mathbf{q} \boldsymbol{\beta}(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin[(2 \cdot k + 1) \cdot \lambda] \cdot \sin \lambda \\ \cos^2 \theta \cdot \cos \lambda \cdot \sin \lambda \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos[(2 \cdot k + 1) \cdot \lambda] \cdot \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad (3.118)$$

$${}_x \mathbf{q}\alpha(k) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \lambda}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin[2 \cdot k \cdot \lambda] \cdot \sin \lambda \\ \sin^2 \theta \cdot \sin \lambda \\ \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos[2 \cdot k \cdot \lambda] \cdot \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad (3.119)$$

$${}_x \mathbf{q} = [\cos \lambda; 0; \sin \lambda; 0]. \quad (3.120)$$

Кватернион  $\mathbf{q}$ , определяемый формулой (3.120), не зависит от номера стороны многоугольника и имеет очень простой вид. Векторная часть этого кватерниона совпадает с осью сферы и направлена в сторону северного полюса.

*Частный случай. Равносторонний прямоугольный треугольник.* В данном случае  $n = 2$ ;

$$\lambda = \frac{\pi}{3}; \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}; \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}; \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}; \theta \approx 0,615.$$

Координаты вершин рассматриваемого треугольника в неподвижной системе координат таковы:

$$\mathbf{x}(0) = \left[ 0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3} \right] \cdot R; \mathbf{x}(1) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right] \cdot R; \mathbf{x}(2) = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right] \cdot R; \quad (3.121)$$

Косинусы углов  $\mathbf{c}(k)$  между нормалью к окружности, определяющей сторону с номером  $k$ , и осями неподвижной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  таковы:

$$\mathbf{c}(0) = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3} \right]; \mathbf{c}(1) = \left[ 0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right]; \mathbf{c}(2) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6} \right]; \quad (3.122)$$

Нормированные половинные экспоненциальные кватернионы углов поворота треугольника в его вершинах таковы:

$${}_y \mathbf{q}\alpha = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \quad (3.123)$$

Нормированные половинные экспоненциальные кватернионы искривления сторон полигона в подвижной системе координат таковы:

$${}_y \mathbf{q}\beta = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right]; \quad (3.124)$$

Кватернион  $\mathbf{q}$ , определяемый формулой (3.93), в подвижной системе координат имеет вид:

$${}_y \mathbf{q} = \left[ \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \quad (3.125)$$

Эти же кватернионы в неподвижной системе координат имеют вид:

$${}_x \mathbf{q}\beta(0) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{6} \right]; {}_x \mathbf{q}\beta(1) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right]; {}_x \mathbf{q}\beta(2) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{6} \right]; \quad (3.126)$$

$${}_x \mathbf{q}\alpha(0) = \left[ \frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right]; {}_x \mathbf{q}\alpha(1) = \left[ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{12} \right]; {}_x \mathbf{q}\alpha(2) = \left[ \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{6}}{12} \right]; \quad (3.127)$$

$${}_x \mathbf{q} = \left[ \frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right]. \quad (3.128)$$

### 3.11. Соотношение углов в сферическом треугольнике

В классической сферической тригонометрии используют внутренние углы треугольника, обозначаемые греческими буквами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , и углы, под которыми видны противоположные стороны треугольника из центра сферы, обозначаемые латинскими буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . В данной работе вместо внутренних углов использованы внешние углы или углы поворота полигона (в данном случае треугольника), обозначаемые  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и углы, под которыми видны стороны треугольника из центра сферы, обозначаемые  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  (рис. 3.11).

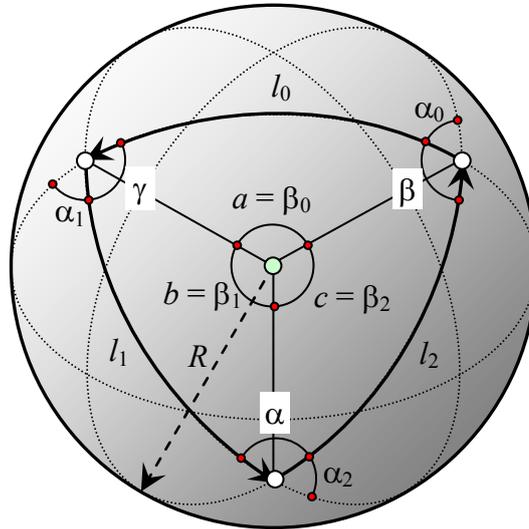


Рис. 3.11. Сферический треугольник

Описанные выше величины связаны между собой формулами:

$$a = \beta_0; b = \beta_1; c = \beta_2; \alpha = \pi - \alpha_2; \beta = \pi - \alpha_0; \gamma = \pi - \alpha_1. \quad (3.129)$$

Запишем основное кватернионное равенство (3.68) для случая треугольника:

$${}_y \mathbf{q}\beta(0) \circ {}_y \mathbf{q}\alpha(1) \circ {}_y \mathbf{q}\beta(1) \circ {}_y \mathbf{q}\alpha(2) \circ {}_y \mathbf{q}\beta(2) \circ {}_y \mathbf{q}\alpha(0) = -\mathbf{I}. \quad (3.130)$$

Используя обозначения раздела 3.9, эту формулу можно переписать так:

$$\mathbf{A}(1) \circ \mathbf{B}(2) = -\mathbf{I}. \quad (3.131)$$

Подставляя в эту формулу выражения кватернионов  $\mathbf{q}\beta$  и  $\mathbf{q}\alpha$  в соответствии с формулами (3.60) и (3.61), и пользуясь покомпонентными зависимостями, подобными (3.92):

$$A_0(1) = -B_0(2); \quad A_1(1) = B_1(2); \quad A_2(1) = B_2(2); \quad A_3(1) = B_3(2). \quad (3.132)$$

получим фундаментальную систему зависимостей между углами и сторонами сферического треугольника:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\beta_1 + \beta_0}{2} &= -\cos \frac{\beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}; \\ -\sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} &= \sin \frac{\beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2}; \\ \cos \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_0}{2} &= \sin \frac{\beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2}; \\ \sin \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} &= \cos \frac{\beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Производя циклическую замену индексов углов  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , можно получить еще два набора подобных зависимостей. Эти зависимости называются *формулами Деламбра*

(Гаусса). Из них вытекают все остальные формулы сферической тригонометрии. Проще всего получаются так называемые *аналогии Непера*:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2} &= -\operatorname{tg} \frac{\beta_1 + \beta_0}{2} \cdot \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2} &= -\operatorname{tg} \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot \cos \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} &= -\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2} \cdot \cos \frac{\beta_1 + \beta_0}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} &= -\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\beta_1 + \beta_0}{2}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Они вытекают из попарных отношений формул Деламбра (Гаусса). В новых обозначениях они выглядят более изящно, поскольку не содержат котангенсов. Циклическая замена индексов позволяет получить еще два набора подобных зависимостей.

Возводя в квадрат равенства (3.133), а затем, складывая и вычитая их в разных комбинациях, получим теорему косинусов углов:

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_0 - \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cos \beta_2 \quad (3.135)$$

и теорему косинусов сторон:

$$\cos \beta_2 = \cos \beta_0 \cdot \cos \beta_1 - \sin \beta_0 \cdot \sin \beta_1 \cdot \cos \alpha_1. \quad (3.136)$$

Благодаря тому, что мы пользуемся внешними углами треугольника, формулы (3.135) и (3.136) выглядят идентично. При помощи циклической замены индексов можно получить другие представления теорем косинусов.

Выражение (3.135) можно переписать следующим образом:

$$\cos \beta_2 = \frac{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_0}. \quad (3.137)$$

Возводя левую и правую части этого равенства в квадрат и выполняя несложные преобразования, получим:

$$\sin^2 \beta_2 = \frac{\Delta^2}{\sin^2 \alpha_2 \cdot \sin^2 \alpha_0}. \quad (3.138)$$

где

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_1 + 2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha_1. \quad (3.139)$$

Разделив левую и правую часть равенства (3.138) на  $\sin^2 \alpha_1$ , получим:

$$\frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{\Delta^2}{\sin^2 \alpha_2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \cdot \sin^2 \alpha_1}. \quad (3.140)$$

Выполняя циклическую замену индексов, приходим к выводу о том, что:

$$\frac{\sin^2 \beta_0}{\sin^2 \alpha_2} = \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \alpha_0} = \frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \alpha_1}; \quad (3.141)$$

поскольку циклическая замена индексов не изменяет правой части формулы (3.138). После извлечения квадратного корня из каждой составной части равенства (3.141), придем к теореме синусов:

$$\frac{\sin \beta_0}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_1}. \quad (3.142)$$

Выполняя подобные преобразования с выражением (3.136), получаем:

$$\sin^2 \alpha_1 = \frac{D^2}{\sin^2 \beta_0 \cdot \sin^2 \beta_1}. \quad (3.143)$$

где

$$D^2 = 1 - \cos^2 \beta_0 - \cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2 + 2 \cdot \cos \beta_0 \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2. \quad (3.144)$$

Подставляя (3.143) в правую часть формулы (3.140), приходим к формуле:

$$\frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{\sin^2 \beta_0 \cdot \sin^2 \beta_1 \cdot \Delta^2}{\sin^2 \alpha_2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \cdot D^2}. \quad (3.145)$$

Учитывая равенства (3.141), получаем:

$$\frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{D^2}{\Delta^2}. \quad (3.146)$$

Таким образом, мы установили, чему равно отношение синусов в теореме синусов.

$$\frac{\sin \beta_0}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_0} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_1} = \frac{D}{\Delta}. \quad (3.147)$$

Величины  $D$  и  $\Delta$  определяются формулами (3.139) и (3.144). Эти величины можно выразить и более изящными формулами. Для этого введем в рассмотрение углы, предложенные в свое время Стюди [17]:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sigma &= 2 \cdot \pi - \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2; & 2 \cdot s &= 2 \cdot \pi - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2; \\ 2 \cdot \sigma_0 &= -\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2; & 2 \cdot s_0 &= -\beta_0 + \beta_1 + \beta_2; \\ 2 \cdot \sigma_1 &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2; & 2 \cdot s_1 &= \beta_0 - \beta_1 + \beta_2; \\ 2 \cdot \sigma_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2; & 2 \cdot s_2 &= \beta_0 + \beta_1 - \beta_2. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что справедливы формулы:

$$D^2 = 4 \cdot \sin s \cdot \sin s_0 \cdot \sin s_1 \cdot \sin s_2; \quad \Delta^2 = 4 \cdot \sin \sigma \cdot \sin \sigma_0 \cdot \sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2. \quad (3.149)$$

Теоремы половинного угла в обозначениях (3.149) выглядят так:

$$\sin \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin s_0}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2}}; \quad \cos \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_1 \cdot \sin s_2}{\sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin s_0}{\sin s_1 \cdot \sin s_2}}. \quad (3.150)$$

а теоремы половинной стороны – следующим образом:

$$\sin \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin \sigma \cdot \sin \sigma_0}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}}; \quad \cos \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2}{\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} = \sqrt{\frac{\sin \sigma \cdot \sin \sigma_0}{\sin \sigma_1 \cdot \sin \sigma_2}}. \quad (3.151)$$

Путем циклической замены индексов можно получить синусы, косинусы и тангенсы всех половинных углов.

Приведем еще некоторые полезные формулы, в частности, для определения радиусов вписанных окружностей (рис. 3.12). Для радиуса вписанной окружности  $r$ :

$$\operatorname{tgr} = \frac{D}{2 \cdot \sin s}. \quad (3.152)$$

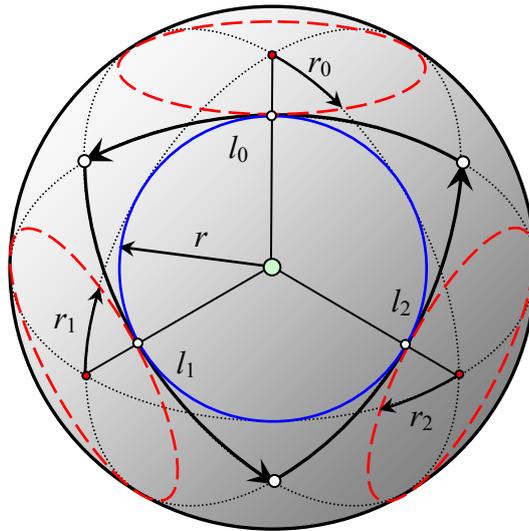


Рис. 3.12. Вписанная окружность с радиусом  $r$  и вписанные окружности извне треугольника с радиусами  $r_0, r_1, r_2$

Для радиусов окружностей, вписанных извне треугольника и касающихся сторон треугольника с номерами 0, 1, 2:

$$\operatorname{tgr}_0 = \frac{D}{2 \cdot \sin s_0}; \quad \operatorname{tgr}_1 = \frac{D}{2 \cdot \sin s_1}; \quad \operatorname{tgr}_2 = \frac{D}{2 \cdot \sin s_2}. \quad (3.153)$$

Для радиуса описанной окружности:

$$\operatorname{ctg} \bar{R} = \sqrt{\frac{\cos s_0 \cdot \cos s_1 \cdot \cos s_2}{\cos s}}. \quad (3.154)$$

Площадь сферического треугольника определяется формулой:

$$S = \varepsilon \cdot R^2; \quad (3.155)$$

где  $\varepsilon$  – сферический избыток, который можно определить по формуле:

$$\varepsilon = 2 \cdot \sigma \quad (3.156)$$

или при помощи формулы Уильера:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{s_2}{2}}. \quad (3.157)$$

На этом закончим рассмотрение сферических треугольников.

### 3.12. Разгонка невязок

Равенство (3.94) соблюдается, если углы поворота полигона и длины его сторон измерены точно. В действительности измерения имеют погрешности и точного соблюдения равенства (3.94) достичь не удается.

В качестве угломерных инструментов, как правило, используются теодолиты. Теодолиты имеют среднеквадратичную погрешность измерения углов от 1 угловой секунды ( $\Delta\alpha \approx 5 \cdot 10^{-6}$  радиана) до 1 угловой минуты ( $\Delta\alpha \approx 3 \cdot 10^{-4}$  радиана). Погрешность измерения углов является абсолютной и не зависит от величины угла.

Расстояния измеряются мерными лентами, мерными проволоками (относительная погрешность  $\Delta\beta \approx 2 \cdot 10^{-6}$ ), электрооптическими или лазерными дальномерами

(относительная погрешность  $\Delta\beta \approx 3 \cdot 10^{-6}$ ). Погрешность измерения расстояний, как правило, относительная, то есть, пропорциональная измеряемому расстоянию.

Пусть результаты замеров для углов поворота полигона –  $^*\alpha_0, ^*\alpha_1, ^*\alpha_2, \dots, ^*\alpha_n$ , а для относительных (по отношению к радиусу сферы  $R$ ) длин сторон –  $^*\beta_0, ^*\beta_1, ^*\beta_2, \dots, ^*\beta_n$ . Эти данные можно откорректировать, воспользовавшись равенством (3.94).

Откорректированные данные будем получать по формулам:

$$\alpha_j = ^*\alpha_j + \Delta\alpha \cdot k\alpha_j; \quad \beta_j = ^*\beta_j \cdot (1 + \Delta\beta \cdot k\beta_j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.158)$$

Нужно только знать значения  $k\alpha_j, k\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ).

Логично потребовать, чтобы сумма квадратов этих величин была минимальной. Кроме того, надо добиться, чтобы

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}(0) \circ \mathbf{q}(1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n) = -\mathbf{I}; \quad (3.159)$$

Кватернион  $\mathbf{Q}$  является функцией углов  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки  $^*\alpha_j, ^*\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ), ограничившись первым членом ряда:

$$\mathbf{Q} = ^*\mathbf{Q} + \sum_{j=0}^n \frac{\partial ^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \cdot \Delta\alpha_j + \sum_{j=0}^n \frac{\partial ^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \cdot \Delta\beta_j; \quad (3.160)$$

где  $^*\mathbf{Q}$  – значение кватерниона  $\mathbf{Q}$ , при значениях углов  $^*\alpha_j, ^*\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ );

$\frac{\partial ^*\mathbf{Q}}{\partial \alpha_j}; \frac{\partial ^*\mathbf{Q}}{\partial \beta_j}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) – частные производные кватерниона  $\mathbf{Q}$  при

значениях углов  $^*\alpha_j, ^*\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ );

$\Delta\alpha_j, \Delta\beta_j$  – приращения углов, выражаемые через искомые коэффициенты  $k\alpha_j, k\beta_j$  по формулам:

$$\Delta\alpha_j = \Delta\alpha \cdot k\alpha_j; \quad \Delta\beta_j = \Delta\beta \cdot k\beta_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.161)$$

Частные производные кватерниона  $\mathbf{Q}$  по углу  $\alpha_j$  или  $\beta_j$  можно вычислить как произведение кватернионов  $\mathbf{q}(j)$  из формулы (3.159), если в ней кватернион  $\mathbf{q}(j)$  заменить соответствующей производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} &= \mathbf{q}(0) \circ \dots \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \frac{\partial \mathbf{q}(j-1)}{\partial \alpha_j} \circ \mathbf{q}(j+1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n); \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} &= \mathbf{q}(0) \circ \dots \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \frac{\partial \mathbf{q}(j-1)}{\partial \beta_j} \circ \mathbf{q}(j+1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n); \end{aligned} \quad (3.162)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{q}(j)}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos \frac{\beta_j}{2} \\ -\cos \frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin \frac{\beta_j}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin \frac{\beta_j}{2} \\ \cos \frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos \frac{\beta_j}{2} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{q}(j)}{\partial \beta_j} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\cos \frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin \frac{\beta_j}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos \frac{\beta_j}{2} \\ \cos \frac{\alpha_j}{2} \cdot \cos \frac{\beta_j}{2} \\ -\sin \frac{\alpha_j}{2} \cdot \sin \frac{\beta_j}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.163)$$

Вот другое представление производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(0) \circ \dots \circ \mathbf{q}(j-1) \circ [0, 0, 0, 1] \circ \mathbf{q}(j) \circ \mathbf{q}(j+1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n); \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{q}(0) \circ \dots \circ \mathbf{q}(j-1) \circ \mathbf{q}(j) \circ [0, 0, 1, 0] \circ \mathbf{q}(j+1) \circ \dots \circ \mathbf{q}(n);\end{aligned}\tag{3.164}$$

Потребуем, чтобы кватернион  $\mathbf{Q}$ , определяемый формулой (3.160), после подстановки выражений из (3.161) был равен единичному. Из этого условия вытекает кватернионная зависимость, линейная относительно  $k\alpha_j, k\beta_j$ :

$$\mathbf{I} - * \mathbf{Q} = \Delta \alpha \cdot \sum_{j=0}^n \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \cdot k\alpha_j + \Delta \beta \cdot \sum_{j=0}^n \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j;\tag{3.165}$$

то есть четыре скалярные зависимости. На самом деле для практических нужд достаточно удовлетворить двум зависимостям, соответствующим второму и третьему компоненту кватерниона.

С учетом этого можно сформулировать оптимизационную задачу для определения  $k\alpha_j, k\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ):

Минимизировать полусумму квадратов коэффициентов:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^n k\alpha_j^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^n k\beta_j^2\tag{3.166}$$

при соблюдении условий:

$$\begin{aligned}*Q_2 &= \Delta \alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j + \Delta \beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j; \\ *Q_3 &= \Delta \alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j + \Delta \beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j.\end{aligned}\tag{3.167}$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^n k\alpha_j^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^n k\beta_j^2 + \\ & + \left[ *Q_2 - \Delta \alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j - \Delta \beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j \right] \cdot \lambda_2 + \\ & + \left[ *Q_3 - \Delta \alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j - \Delta \beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j \right] \cdot \lambda_3.\end{aligned}\tag{3.168}$$

Она содержит  $2 \cdot (n + 2)$  неизвестных, среди которых  $2 \cdot (n + 1)$  неизвестных  $k\alpha_j, k\beta_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) и два множителя Лагранжа  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Дифференцируя ее по каждому из неизвестных и приравнявая результат нулю, получаем систему из  $2 \cdot (n + 2)$  линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}k\alpha_j - \lambda_2 \cdot \Delta \alpha \cdot \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 - \lambda_3 \cdot \Delta \alpha \cdot \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 &= 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n); \\ k\beta_j - \lambda_2 \cdot \Delta \beta \cdot * \beta_j \cdot \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 - \lambda_3 \cdot \Delta \beta \cdot * \beta_j \cdot \left( \frac{\partial * \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 &= 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n);\end{aligned}\tag{3.169}$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j &= *Q_2; \\ \Delta\alpha \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot k\alpha_j + \Delta\beta \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot * \beta_j \cdot k\beta_j &= *Q_3. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Из уравнений (3.169) можно выразить коэффициенты  $k\alpha_j, k\beta_j (j = 0, 1, 2, \dots, n)$  через  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ :

$$\begin{aligned} k\alpha_j &= \lambda_2 \cdot \Delta\alpha \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 + \lambda_3 \cdot \Delta\alpha \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n); \\ k\beta_j &= \lambda_2 \cdot \Delta\beta \cdot * \beta_j \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 + \lambda_3 \cdot \Delta\beta \cdot * \beta_j \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \quad (3.171)$$

Подставляя выражения для этих коэффициентов в уравнения (3.170), получим два уравнения для определения  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ :

$$\begin{aligned} A_{22} \cdot \lambda_2 + A_{23} \cdot \lambda_3 &= *Q_2; \\ A_{32} \cdot \lambda_2 + A_{33} \cdot \lambda_3 &= *Q_3; \end{aligned} \quad (3.172)$$

где:

$$\begin{aligned} A_{22} &= \Delta\alpha^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 + \Delta\beta^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot * \beta_j^2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2; \\ A_{23} &= \Delta\alpha^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 + \Delta\beta^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2 \cdot * \beta_j^2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3; \\ A_{32} &= \Delta\alpha^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_2 + \Delta\beta^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot * \beta_j^2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_2; \\ A_{33} &= \Delta\alpha^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \alpha_j} \right)_3 + \Delta\beta^2 \cdot \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3 \cdot * \beta_j^2 \cdot \left( \frac{\partial^* \mathbf{Q}}{\partial \beta_j} \right)_3. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Решение системы уравнений (3.172) дается формулами:

$$\lambda_2 = D^{-1} \cdot (A_{33} \cdot *Q_2 - A_{23} \cdot *Q_3); \quad \lambda_3 = D^{-1} \cdot (A_{22} \cdot *Q_3 - A_{32} \cdot *Q_2); \quad (3.174)$$

где

$$D = A_{22} \cdot A_{33} - A_{23} \cdot A_{32}. \quad (3.175)$$

Определив  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  по формулам (3.174), можно определить искомые коэффициенты по формулам (3.171), а затем и откорректированные углы по формулам (3.158).

## Заключение

В этой работе приведены далеко не полные сведения о математике и геометрии кватернионов. Выбор этих сведений был ориентирован на решение ряда задач из области формообразования и расчета стержневых и оболочечных конструкций со сложной пространственной геометрией.

Следует отметить, что применение кватернионов особенно эффективно в тех случаях, когда кватернион используется не только для установления ориентации объекта в трехмерном пространстве, но и для определения некоторой дополнительной скалярной

величины. Одной из задач такого типа является расчет технических устройств в виде гибких стержней с подвижным сердечником, предназначенных для передачи на расстояние под разными углами продольной силы или продольного перемещения (гибкие тяги), крутящего момента или угла поворота (гибкие валы). Примерами таких устройств могут служить гибкие тяги для рычагов управления автомобилем, гибкий вал для автомобильного спидометра, вал для глубинного вибратора бетона, бурильное устройство с обсадной трубой и т.п.

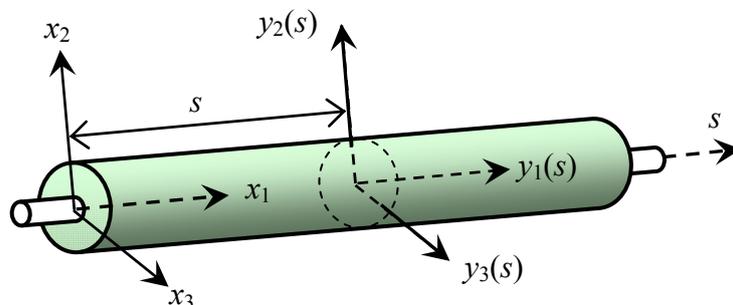


Схема гибкой тяги или гибкого вала

В данном случае для описания деформированного состояния гибкого вала можно ввести в рассмотрение две кватернионные функции независимой переменной  $s$ , например,  $\mathbf{x}(s)$  и  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ , первая из которых определяет положение в пространстве сечения гибкого вала с дуговой координатой  $s$ , а вторая – ориентацию этого сечения. Нулевой компонент функции  $\mathbf{x}(s)$  может определять взаимное смещение сердечника и обоймы в этом сечении, а нулевой компонент функции  $\boldsymbol{\varphi}(s)$  – их взаимный поворот. Если речь идет о механическом расчете гибкого вала, надо дополнительно ввести в рассмотрение кватернионы усилий и моментов. Нулевыми компонентами этих кватернионов логично будет придать смысл усилий взаимодействия сердечника и обоймы гибкого вала, таких как силы и моменты трения между сердечником и обоймой.

Интересна задача о формообразовании стержней с криволинейной пространственной осью. Различные формы криволинейных стержней показаны на рисунке.



Различные формы криволинейных стержней

В этой задаче также могут быть использованы кватернионные функции  $\mathbf{x}(s)$  и  $\boldsymbol{\varphi}(s)$ . Нулевому компоненту функции  $\boldsymbol{\varphi}(s)$  можно в данном случае придать смысл угла поворота сечения стержня относительно касательного орта сопровождающего трехгранника оси стержня. Это позволит просто и наглядно конструировать произвольно закрученные стержни.

Кватернионы можно использовать и для решения задач, связанных с оболочками. В этом случае кватернионы нужно считать функциями двух независимых переменных.

Решение подобных задач является темой дальнейших исследований.

## Литература

1. Гамильтон У.Р. О кватернионах, или о новой системе мнимых величин в алгебре // Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. М. "Наука" 1994 сс. 345 - 391.
2. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. Москва - Ленинград, Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.
3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М. «Физматлит», 2010. 336 с.
4. Конвей Дж. Х, Смит Д. А. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. Москва, МЦНМО, 2009.– 184 с.
5. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела (кватернионное изложение). М., 2000.
6. Каратаев Е.А. Кватернионы и 3-х мерные повороты. Практический подход. М., 2000.
7. Норель М. Вращения и кватернионы. Сборник рецептов.
8. Байрак Л.Г. Интегральная формула Коши для кватернионов. 2010. <http://scholium.narod.ru/Math/Scholium001.htm>
9. A. Sudbery. Quaternionic Analyses. Dep. of Math. University of York, Heslington. Aug. 1977. (Перевод: Энтони Садбери. Кватернионный анализ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 2, 2004.)
10. Fueter R. Uber die analytische Darstellung der regularen Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comment. Math. Helv. 8 (1936), 371-378.
11. Sweetser D.B. Doing Physics with Quaternions. 2005, 157 p.
12. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. //345 - Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 1, 2004. с. 111 - 127.
13. Salamin E. Application of quaternions to computation with rotations, Technical report, Stanford Univ., Stanford, CA, 1974.
14. Lee, Byung-Uk. Stereo Matching of Skull Landmarks, Ph.D. Thesis, Stanford Univ., Stanford, CA, 1991.
15. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике. Минск, БГУ, 2010. – 216 с.
16. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики. Киев, «Факт», 2004.– 464 с.
17. Вебер Г., Якобсталь В. Энциклопедия элементарной математики. Том II. Энциклопедия элементарной геометрии. Книги II и III. Тригонометрия, аналитическая геометрия, стереометрия. "Матезис" Одесса, 1910. 334 с.
18. Zwillinger, D. (Ed.). Spherical Geometry and Trigonometry. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 468-471, 1995.
19. Smart W. M. Text-Book on Spherical Astronomy, 6th ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1960.