Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

В.Н. Горбузов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей

Гродно 2006

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.61
Г67

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор *М.А.Маталыцкий*;
кандидат физико-математических наук, доцент *А.А.Денисковец*.

Рекомендовано Советом Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Горбузов, В.Н.

Математический анализ : интегралы, зависящие от параметров :
Г67 учеб. пособие / В.Н.Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 496 с.

ISBN 985-417-806-4

Излагается дифференциальное и интегральное исчисление функций, заданных определённым и несобственным интегралами, которые зависят от параметров.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по математическим и физическим специальностям, а также для студентов технических специальностей с расширенной программой по математике.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.61

ISBN 985-417-806-4

Введение

Один из способов задания функций основан на использовании интегралов, содержащих параметры. Этот способ широко распространён в теории специальных функций. Зачастую специальные функции появлялись при решении прикладных задач, по этой причине они выделялись и впоследствии изучались как самостоятельные объекты наравне с основными элементарными функциями. Читателю, должно быть, уже известны гиперболические функции, которые относятся к специальным элементарным функциям. В этом разделе математического анализа познакомимся со специальными неэлементарными функциями. Нами не ставится цель системного изучения специальных функций во всём их разнообразии. В пособии будут изложены основы одного из подходов к заданию функции — математический анализ интегралов (определённых и несобственных), которые зависят от параметров. Естественно, будет указан ряд специальных функций, определяемых или представляемых посредством интегралов, зависящих от параметров, и проведено исследование отдельных их свойств. Наиболее подробно рассматриваются простейшие специальные неэлементарные функции — бета-функция и гамма-функция.

Изучение функций, заданных интегралами, зависящими от параметров, средствами анализа бесконечно малых осуществляется в такой последовательности: вычисление пределов, непрерывность в точке и на множестве, дифференцирование и интегрирование. При этом теоретические основы излагаются для интегралов, которые зависят лишь от одного параметра.

Предполагается, что читатель владеет дифференциальным исчислением функций одной переменной, знает теории неопределённых, определённых и несобственных интегралов Римана от функции одной переменной.

Основное содержание книги составляют материалы лекций, семинарских занятий и методические разработки по университетскому курсу математического анализа, читаемому автором.

Для ссылок на формулы (теоремы, леммы и т.д.) будем использовать записи $(k.l)$, $(k.l.m)$ и $(k.l.m.n)$, в которых k — номер формулы, l — номер пункта, m — номер параграфа, n — номер главы.

Глава 1

СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Поточечная и равномерная сходимости функции двух переменных

1. Поточечная сходимость

Сходимость функции двух переменных в точке. Предел функции двух переменных в точке. Сходимость функции двух переменных на множестве. Предельная функция. Критерий Гейне сходимости функции двух переменных к предельной функции.

Пусть f — отображение множества G точек арифметической вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Множества G_x и G_y из поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ — естественные проекции множества G соответственно на координатные оси Ox и Oy правой прямоугольной декартовой системы координат Oxy.

Для функции двух переменных

$$f\colon (x,y) \to f(x,y)$$

с множеством определения $\mathrm{D}f = G$ примем соглашение, что переменная $x \in G_x$, а переменная $y \in G_y$.

Если зафиксируем переменную x приданием ей произвольным образом выбранного в множестве G_x значения x_1, то получим функцию одной переменной

$$\widehat{f}\colon y \to f(x_1, y)$$

с множеством определения $\mathrm{D}\widehat{f} = G_{y|_{x=x_1}}$. При этом множество определения $G_{y|_{x=x_1}}$ состоит из всех тех чисел y множества G_y, при которых выражение $f(x_1, y)$ имеет смысл.

Аналогично, функция одной переменной

$$\widetilde{f}\colon x \to f(x, y_1),$$

где $y_1 \in G_y$, определена на множестве $\mathrm{D}\widetilde{f} = G_x\big|_{y=y_1}$ таком, что $G_x\big|_{y=y_1} \subset G_x$ и множество $G_x\big|_{y=y_1}$ состоит из всех тех x, при которых выражение $f(x, y_1)$ имеет смысл.

Заметим, что множество G является подмножеством множества $G_x \times G_y$, где символ $\times$ означает прямое произведение.

Определение 1. *Функция* $f\colon (x, y) \to f(x, y)$ *с* $\mathrm{D}f = G$ ***сходится в точке*** $x = x_1$ *из множества* G_x *при* $y \to y_0$, *если функция одной переменной* $\widehat{f}\colon y \to f(x_1, y)$, $\forall y \in G_y\big|_{x=x_1}$, *сходится при* $y \to y_0$. *А предел*

$$A_1 = \lim_{y \to y_0} f(x_1, y) \tag{1}$$

назовём ***пределом функции*** $\boldsymbol{f}$ ***в точке*** $x = x_1$ *при* $y \to y_0$.

В этом определении y_0 — вещественное число, причём y_0 есть внутренняя точка замыкания $\overline{G}_y\big|_{x=x_1}$ множества определения $G_y\big|_{x=x_1}$ функции $\widehat{f}$.

Подобным образом вводим определения *односторонних сходимостей* функции $f\colon (x, y) \to f(x, y)$, $\forall (x, y) \in G$, в точке $x_1 \in G_x$ как при $y \to y_0 - 0$, так и при $y \to y_0 + 0$.

При этом соответственно будем вести речь о *левостороннем пределе функции* f *в точке* $x = x_1$ *при* $y \to y_0 - 0$:

$$f(x_1, y_0 - 0) = \lim_{y \to y_0 - 0} f(x_1, y)$$

и о *правостороннем пределе функции* f *в точке* $x = x_1$ *при* $y \to y_0 + 0$:

$$f(x_1, y_0 + 0) = \lim_{y \to y_0 + 0} f(x_1, y).$$

Аналогично определяем сходимости функции двух переменных $f\colon (x, y) \to f(x, y)$, $\forall (x, y) \in G$, в точке $x_1 \in G_x$, когда

$y \to -\infty,\ y \to +\infty,\ y \to \infty,$ на основании сходимостей функции одной переменной $\widehat{f}\colon y \to f(x_1, y),\ \forall y \in G_y\big|_{x=x_1},$ соответственно при $y \to -\infty,\ y \to +\infty,\ y \to \infty$:

$$\lim_{y \to -\infty} f(x_1, y), \quad \lim_{y \to +\infty} f(x_1, y), \quad \lim_{y \to \infty} f(x_1, y).$$

Пример 1. Пределом в точке $x = 2$ при $y \to -1$ функции

$$f\colon (x, y) \to x + y^2,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

является число 3, так как одинарный предел

$$\lim_{y \to -1} (2 + y^2) = 3.$$

Пример 2. Пределом в точке $y = 1$ при $x \to 2$ функции

$$f\colon (x, y) \to x^2 + y^2,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

является число 5, так как

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5.$$

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f\colon (x, y) \to \frac{\sin(1 - x)}{x - y} \tag{4}$$

с множеством определения $\mathrm{D}f = \{(x, y)\colon y \neq x\}$.

Если $x = 1,$ то функция (4) такова, что

$$f(1, y) = 0,\ \forall y \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty),$$

и пределы

$$\lim_{y \to 1} f(1, y) = \lim_{y \to \pm\infty} f(1, y) = 0.$$

Значит, функция (4) в точке $x = 1$ при $y \to 1,\ y \to -\infty,\ y \to +\infty$ и $y \to \infty$ сходится к числу нуль.

Если $y = 1,$ то функция (4) будет иметь вид

$$\widetilde{f}\colon x \to \frac{\sin(1 - x)}{x - 1},\ \forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Пределы

$$\lim_{x\to 1} f(x,1) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{x-1} = -1,$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x,1) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin(1-x)}{x-1} = 0.$$

Поэтому функция (4) в точке $y = 1$ при $x \to 1$ сходится к числу $-1,$ а при $x \to -\infty,$ $x \to +\infty$ и $x \to \infty$ сходится к числу нуль.

Пример 4. Функция

$$f\colon (x,y) \to \sqrt{x^2 - y^2} \qquad (5)$$

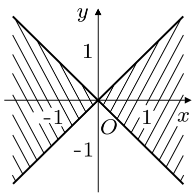

Рис. 1

определена на множестве

$$\mathrm{D}f = \{(x,y)\colon |x| \geqslant |y|\},$$

изображённом на рисунке 1 штриховкой.

Если $x = \pm 1,$ то функция (5) имеет вид

$$\widehat{f}\colon y \to \sqrt{1-y^2}\,,\ \forall y \in [-1;1],$$

и односторонние пределы

$$f(\pm 1, -1+0) = \widehat{f}(-1+0) = 0,\ \ f(\pm 1, 1-0) = \widehat{f}(1-0) = 0.$$

Если $y = \pm 1,$ то функция (5) будет функцией одной переменной

$$\widetilde{f}\colon x \to \sqrt{x^2-1}\,,\ \forall x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty),$$

и односторонние пределы

$$f(-1-0, \pm 1) = \widetilde{f}(-1-0) = 0 \quad \text{и} \quad f(1+0, \pm 1) = \widetilde{f}(1+0) = 0.$$

Поэтому можем утверждать:

а) в точке $x = -1$ функция (5) при стремлении переменной y к 1 слева и при стремлении переменной y к -1 справа сходится к нулю;

б) в точке $x = 1$ функция (5) при стремлении переменной y к 1 слева и при стремлении переменной y к -1 справа сходится к нулю;

в) в каждой точке $y = -1$ и $y = 1$ функция (5) при стремлении переменной x к 1 справа и при стремлении переменной x к -1 слева сходится к нулю.

Определение 2. *Сужение функции* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *с* $\mathrm{D}f = G$ ***сходится*** *на множестве* X, $X \subset G_x$, *к функции одной переменной* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in X$, *при* $y \to y_0$, *если при каждом фиксированном* x *из множества* X *существует предел*

$$\lim_{y \to y_0} f(x,y) = A(x). \qquad (6)$$

При этом множество X *будем называть* ***множеством сходимости*** *сужения функции* f *при* $y \to y_0$, *а функцию* A *—* ***предельной функцией*** *функции* f *при* $y \to y_0$.

Для сходимости функции f к функции A на множестве X при $y \to y_0$, наряду с записью (6), будем использовать и записи:

$$f(x,y) \to A(x),\ \forall x \in X, \quad \text{при} \quad y \to y_0;$$

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{} A(x),\ \forall x \in X.$$

Пример 5 (продолжение примера 1). Предел

$$\lim_{y \to -1} (x + y^2) = x + 1$$

существует при любом вещественном x.

Поэтому функция (2) поточечно сходится к функции

$$A\colon x \to x + 1$$

на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ при $y \to -1$.

Пример 6 (продолжение примера 2). Функция (3) при $y \to 2$ на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ сходится к функции $A\colon x \to x^2 + 4$:

$$\lim_{y \to 2} (x^2 + y^2) = x^2 + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 7 (продолжение примера 3). С учётом вычислений, выполненных в примере 3, относительно функции (4) имеем:

$$\frac{\sin(1-x)}{x-y} \xrightarrow[y \to 1]{} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin(1-x)}{x-1},\ \forall x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty), \\ 0 \ \text{ при } \ x = 1; \end{array}\right.$$

$$\frac{\sin(1-x)}{x-y} \xrightarrow[x\to 1]{} \left[\begin{array}{l} 0,\ \forall y\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty), \\ -1 \ \text{ при } \ y=1; \end{array}\right.$$

$$\frac{\sin(1-x)}{x-y} \xrightarrow[y\to \pm\infty]{} 0,\ \forall x\in\mathbb{R};$$

$$\frac{\sin(1-x)}{x-y} \xrightarrow[x\to \pm\infty]{} 0,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Пример 8 (продолжение примера 4). Для функции (5) укажем предельные функции

$$A\colon x\to\sqrt{x^2-1}\,,\ \forall x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty), \quad \text{при } \ y\to\ \pm 1$$

и

$$B\colon y\to\sqrt{1-y^2}\,,\ \forall y\in[-1;1], \quad \text{при } \ x\to\ \pm 1.$$

Если использовать определения предела функции одной переменной как на языке бесконечно малых, так и на языке последовательностей (по Гейне), то на соответствующих языках можно сформулировать определения 1 и 2.

Остановимся на определении 2 сходимости на множестве функции двух переменных.

Пусть y_0 — вещественное число, которое либо принадлежит множеству G_y, либо не принадлежит множеству G_y, но всегда у точки $y=y_0$ существует проколотая окрестность или одна из проколотых полуокрестностей, которые содержатся в G_y.

Исходя из определений предела функции в точке, правостороннего предела, левостороннего предела, определение 2 (сходимости функции двух переменных на множестве) на языке «$\varepsilon-\delta$» может быть сформулировано следующим образом.

Определение 3. *Сужение функции* $f\colon(x,y)\to f(x,y)$ *с* $\mathrm{D}f=G$ *сходится на множестве* X, $X\subset G_x$, *к функции* $A\colon x\to A(x), \forall x\in X$, *при:*

$$а)\ y\to y_0; \quad б)\ y\to y_0+0; \quad в)\ y\to y_0-0,$$

если для любого положительного числа ε *и для каждого* x *из множества* X *существует такое положительное число*

δ, зависящее от ε и x, что при всех y из множества G_y, для которых:

$$а)\ 0<|y-y_0|<\delta;\quad б)\ 0<y-y_0<\delta;\quad в)\ 0<y_0-y<\delta,$$

выполняется неравенство $|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon$.

С помощью символов эти определения запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y)\xrightarrow[y\to y_0]{} A(x),\ \forall x\in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \forall x\in X,\\ \exists\delta_{\varepsilon x}>0,\ \forall y\in G_y,\ 0<|y-y_0|<\delta_{\varepsilon x}:|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon;\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y)\xrightarrow[y\to y_0+0]{} A(x),\ \forall x\in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \forall x\in X,\\ \exists\delta_{\varepsilon x}>0,\ \forall y\in G_y,\ 0<y-y_0<\delta_{\varepsilon x}\colon|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon;\end{gathered}\tag{8}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y)\xrightarrow[y\to y_0-0]{} A(x),\ \forall x\in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \forall x\in X,\\ \exists\delta_{\varepsilon x}>0,\ \forall y\in G_y,\ 0<y_0-y<\delta_{\varepsilon x}\colon|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon.\end{gathered}\tag{9}$$

Пусть y_0 — одна из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

В каждом из этих случаев G_y должно иметь структуру с характерным свойством: существует такое положительное число δ, что при $y_0=+\infty$ числовой луч $(\delta;+\infty)\subset G_y$, при $y_0=-\infty$ числовой луч $(-\infty;-\delta)\subset G_y$, а при $y_0=\infty$ числовое множество $(-\infty;-\delta)\cup(\delta;+\infty)\subset G_y$.

Исходя из определений предела функции при стремлении независимой переменной к $+\infty$, $-\infty$ и ∞, определение 2 (сходимости на множестве функции двух переменных при стремлении одной переменной к бесконечности) на языке бесконечно малых может быть сформулировано следующим образом.

Определение 4. *Сужение функции* $f\colon(x,y)\to f(x,y)$ *с* $\mathrm{D}f=G$ *сходится на множестве* X, $X\subset G_x$, *к функции* $A\colon x\to A(x)$, $\forall x\in X$, *при:*

$$а)\ y\to+\infty;\quad б)\ y\to-\infty;\quad в)\ y\to\infty,$$

если для любого положительного числа ε *и для каждого* x *из множества* X *существует такое положительное число* δ, *зависящее от* ε *и* x, *что при всех* y *из множества* G_y *таких, что*:

$$а)\ y > \delta; \quad б)\ y < -\delta; \quad в)\ |y| > \delta,$$

выполняется неравенство $|f(x,y) - A(x)| < \varepsilon$.

Запишем эти определения в символах:

$$\textbf{def}\colon f(x,y) \xrightarrow[x\to+\infty]{} A(x),\ \forall x \in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,$$
$$\exists \delta_{\varepsilon x} > 0,\ \forall y \in G_y,\ y > \delta_{\varepsilon x}\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon; \tag{10}$$

$$\textbf{def}\colon f(x,y) \xrightarrow[x\to-\infty]{} A(x),\ \forall x \in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,$$
$$\exists \delta_{\varepsilon x} > 0,\ \forall y \in G_y,\ y < -\delta_{\varepsilon x}\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon; \tag{11}$$

$$\textbf{def}\colon f(x,y) \xrightarrow[x\to\infty]{} A(x),\ \forall x \in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,$$
$$\exists \delta_{\varepsilon x} > 0,\ \forall y \in G_y,\ |y| > \delta_{\varepsilon x}\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Если использовать критерий Гейне существования предела функции, то на основании определения 2 получим *критерий Гейне поточечной сходимости функции двух переменных.*

Теорема 1. *Сужение функции* $f\colon (x,y) \to f(x,y), \mathrm{D}f = G$, *сходится на множестве* $X, X \subset G_x$, *к функции одной переменной* $A\colon x \to A(x), \forall x \in X$, *при* $y \to y_0$, *если и только если для любой числовой последовательности* $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *составленной из элементов* y_n *множества* G_y *и сходящейся к* y_0, *соответствующая функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, *где* $f_n(x) = f(x,y_n), \forall x \in X, n = 1,2,\ldots$, *поточечно сходится к функции* A *на множестве* X.

В символах:

$$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} A(x),\ \forall x\in X,\ \Longleftrightarrow\ \forall \{y_n\}_{n=1}^{+\infty},\ y_n\in G_y,$$
$$n\in\mathbb{N},\ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y_0\colon\ f(x,y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A(x),\ \forall x\in X. \tag{13}$$

Аналогично устанавливаются критерии Гейне при $y_n\to y_0-0$, $y_n\to y_0+0$, $y_n\to-\infty$, $y_n\to+\infty$ и $y_n\to\infty$, когда $n\to+\infty$.

С помощью критерия Гейне сходимость на множестве функциональной последовательности обобщается на случай функции двух переменных, а свойства сходимости на множестве функциональной последовательности распространяются на сходимость на множестве функции двух переменных.

2. Равномерная сходимость

Равномерная сходимость функции двух переменных к предельной функции. Соотношения между сходимостью на множестве и равномерной сходимостью. Признак неравномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции.

Определение 1. *Сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y)\to f(x,y)$, $\mathrm{D}f=G$, ***равномерно сходится*** *на множестве* $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}\subset G_x$, *к функции* $A\colon x\to A(x)$, $\forall x\in\widetilde{X}$, *при* $y\to y_0$, *если для любого положительного числа* ε *существует такое положительное число* δ, *зависящее от* ε, *что при всех* y *из множества* G_y, *для которых* $0<|y-y_0|<\delta$, *выполняется неравенство* $|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon$ *для всех* x *из множества* $\widetilde{X}$.

В этом определении предполагается, что y_0 — вещественное число, а у точки y_0 существует проколотая окрестность, которая содержится в множестве G_y.

Равномерную сходимость сужения функции f к функции A на множестве $\widetilde{X}$ при $y\to y_0$ будем записывать в виде

$$f(x,y) \rightrightarrows A(x)\ \text{ на }\ \widetilde{X}\ \text{ при }\ y\to y_0$$

или

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X}.$$

Тогда определение 1 в символах будет следующим:

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\\ \forall y\in G_y,\ 0<|y-y_0|<\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X}.\end{gathered}\tag{1}$$

Определение 2. *Сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y)\to f(x,y),\ \forall (x,y)\in G$, ***равномерно сходится*** *на множестве* $\widetilde{X},\ \widetilde{X}\subset G_x$, *к функции* $A\colon x\to A(x),\ \forall x\in\widetilde{X}$, *при:*

$$а)\ y\to y_0+0;\qquad б)\ y\to y_0-0,$$

если для любого положительного числа ε *существует такое положительное число* δ, *зависящее от* ε, *что при всех* y *из множества* G_y, *для которых*:

$$а)\ 0<y-y_0<\delta;\qquad б)\ 0<y_0-y<\delta,$$

выполняется неравенство $|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon$ *для всех* $x\in\widetilde{X}$.

В символах:

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to y_0+0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\\ \forall y\in G_y,\ 0<y-y_0<\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X};\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to y_0-0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\\ \forall y\in G_y,\ 0<y_0-y<\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X}.\end{gathered}\tag{3}$$

В определении (2) предполагается, что у точки $y=y_0$ существует проколотая правая полуокрестность, которая содержится в множестве G_y, а в определении (3) — у точки $y=y_0$ существует проколотая левая полуокрестность, которая содержится в G_y.

Если $y_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$, $y_0 = \infty$ и существует такое $\delta > 0$, что соответственно

$$(\delta;+\infty) \subset G_y,\ (-\infty;-\delta) \subset G_y,\ (-\infty;-\delta) \cup (\delta;+\infty) \subset G_y,$$

то введём

Определение 3. *Сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$, ***равномерно сходится*** *на множестве* $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \subset G_x$, *к функции* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, *при:*

$$\text{а) } y \to +\infty; \quad \text{б) } y \to -\infty; \quad \text{в) } y \to \infty,$$

если для любого положительного числа ε *существует такое положительное число* δ, *зависящее от* ε, *что при всех* y *из множества* G_y *таких, что*:

$$\text{а) } y > \delta; \quad \text{б) } y < -\delta; \quad \text{в) } |y| > \delta,$$

выполняется неравенство $|f(x,y) - A(x)| < \varepsilon$ *для всех* $x \in \widetilde{X}$.

В символах:

$$\begin{aligned} &\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to+\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\\ &\qquad \forall y \in G_y,\ y > \delta_\varepsilon\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to-\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\\ &\qquad \forall y \in G_y,\ y < -\delta_\varepsilon\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{def}\colon f(x,y) \underset{y\to\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\\ &\qquad \forall y \in G_y,\ |y| > \delta_\varepsilon\colon |f(x,y) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}. \end{aligned} \tag{6}$$

Внешне определения равномерной сходимости функции двух переменных похожи на определения поточечной сходимости функции двух переменных. Однако имеется существенное различие (сопоставьте определения (7.1) с (1), (8.1) с (2), (9.1) с (3), (10.1) с (4), (11.1) с (5) и (12.1) с (6)).

Во-первых, равномерная сходимость функции двух переменных является глобальным свойством, в то время как поточечная сходимость наблюдается лишь в отдельно взятых точках подмножества X, а не на всём подмножестве сразу.

Во-вторых, положительное число δ, участвующее в определении поточечной сходимости, зависит не только от ε, но и от выбора точки x (разным точкам x, вообще говоря, соответствуют разные δ). Если же функция двух переменных равномерно сходится на множестве $\widetilde{X}$, то положительное число δ зависит только от заданного ε и не зависит от x.

Ясно, что *если функция двух переменных равномерно сходится к некоторой функции, то она и поточечно сходится к этой же функции.* А вот обратное не всегда имеет место, то есть, при сходимости на множестве не обязательна равномерная сходимость на этом множестве.

Множество сходимости X и множество равномерной сходимости $\widetilde{X}$ связаны соотношением $\widetilde{X} \subset X \subset G_x$.

Пример 1 (продолжение примеров 1.1 и 5.1). Исходя из определения 1 (равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции), докажем, что функция (2.1) равномерно сходится к предельной функции

$$A\colon x \to x + 1$$

на поле вещественных чисел при $y \to -1$ (сходимость на $\mathbb{R}$ установлена в примере 5.1). То есть, покажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что при всех $y \in \mathbb{R}$ и $0 < |y + 1| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y) - A(x)| = |x + y^2 - (x + 1)| = |y^2 - 1| < \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поскольку

$$|y^2 - 1| = |y + 1| \cdot |y - 1| = |y + 1| \cdot |(y + 1) - 2| \leqslant$$

$$\leqslant |y + 1| \cdot (|y + 1| + 2) < \delta(\delta + 2) = \varepsilon,$$

а равенство $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$ имеет место при положительном δ, равном $\delta = -1 + \sqrt{1 + \varepsilon}\,$, то для функции (2.1) справедливо утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon} > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |y+1| < \delta\colon$$

$$|x + y^2 - (x+1)| < \varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Это соответствует определению (1), а значит,

$$x + y^2 \rightrightarrows x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{при} \quad y \to -1.$$

Пример 2. Отображение

$$f\colon (x,y) \to \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) \tag{7}$$

сначала рассмотрим на множестве

$$D_1 = \{(x,y)\colon 0 < x \leqslant 1,\ y \neq 0\}. \tag{8}$$

При $y \to 0$ пределом функции (7) с множеством определения (8) является нуль, то есть, предельная функция

$$A_1\colon x \to \lim_{y\to 0} \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) = 0,\ \forall x \in (0;1]. \tag{9}$$

Покажем, что функция (7) с множеством определения (8) равномерно сходится к предельной функции (9) на $(0;1]$ при $y \to 0$.

Для этого в соответствии с определением 1 докажем,что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число δ, зависящее от ε и большее нуля, что если только $0 < |y - 0| = |y| < \delta$, то справедливо неравенство

$$|f(x,y) - A_1(x)| = \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) < \varepsilon,\ \forall x \in (0;1].$$

Действительно, для всех x из отрезка $[\omega;1]$ при любом $\omega \in (0;1)$ справедлива оценка

$$\exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) \leqslant \exp\Big(-\frac{\omega}{|y|}\Big).$$

Если $|y| < \delta$, то

$$\exp\Big(-\frac{\omega}{|y|}\Big) < \exp\Big(-\frac{\omega}{\delta}\Big),$$

а неравенство

$$\exp\Big(-\frac{\omega}{\delta}\Big) < \varepsilon$$

имеет место, если $-\dfrac{\omega}{\delta} < \ln\varepsilon$.

Неравенство $-\dfrac{\omega}{\delta} < \ln\varepsilon$ при любом $\varepsilon \geqslant 1$ автоматически выполняется при всяком $\delta > 0$ (ибо в этом случае $\omega\delta > 0,\ \ln\varepsilon \geqslant 0$), а при $0 < \varepsilon < 1$ следует из неравенства $\delta < -\dfrac{\omega}{\ln\varepsilon}$.

Итак, для любого $\varepsilon \in (0;1)$ существует $\delta \in \Big(0;\, -\dfrac{\omega}{\ln\varepsilon}\Big)$ такое, что для всех значений переменной y из $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, удовлетворяющих неравенству $|y| < \delta$, выполняется неравенство $\exp\Big(-\dfrac{x}{|y|}\Big) < \varepsilon$ для всех x из отрезка $[\omega;1]$, где ω — любое число из интервала $(0;1)$.

А для любого $\varepsilon \geqslant 1$ неравенство $\exp\Big(-\dfrac{x}{|y|}\Big) < \varepsilon$ выполняется на всём множестве определения (8) функции (7).

Всё это согласно определению (1) означает, что

$$\exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) \underset{y\to 0}{\rightrightarrows} 0,\ \forall x \in (0;1].$$

Из определений (1) – (5) следует

Предложение 1. *Сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y) \to f(x,y),\ \forall (x,y) \in G$, *неравномерно сходится на подмножестве* X *множества* G_x *к предельной функции* $A\colon x \to A(x),\ \forall x \in X$, *при*:

$$\text{а) } y \to y_0;\quad \text{б) } y \to y_0+0;\quad \text{в) } y \to y_0-0;$$
$$\text{г) } y \to +\infty;\quad \text{д) } y \to -\infty;\quad \text{е) } y \to \infty,$$

если существует такое положительное число ε_0, *что для любого положительного числа* δ *существует такое значение* y_δ *переменной* y *из множества* G_y, *что*:

$$\text{а) } 0 < |y_0 - y_\delta| < \delta;\quad \text{б) } 0 < y_\delta - y_0 < \delta;\quad \text{в) } 0 < y_0 - y_\delta < \delta;$$
$$\text{г) } y_\delta > \delta;\quad \text{д) } y_\delta < -\delta;\quad \text{е) } |y_\delta| > \delta,$$

и существует значение $\widetilde{x}$ *переменной* x *из множества* X, *при которых* $|f(\widetilde{x}, y_\delta) - A(\widetilde{x})| \geqslant \varepsilon_0$.

В символах (случай а):

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists y_\delta \in G_y,\ 0 < |y_0 - y_\delta| < \delta,\ \exists \widetilde{x} \in X: \\ |f(\widetilde{x}, y_\delta) - A(\widetilde{x})| \geqslant \varepsilon_0. \tag{10}$$

Пример 3 (продолжение примера 2). Рассмотрим функцию, заданную формулой (7), с множеством определения

$$D_2 = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \neq 0\}. \tag{11}$$

При $y \to 0$ для функции (7) с множеством определения (11) предельной функцией на отрезке $[0; 1]$ является функция

$$A_2\colon x \to \left[\begin{array}{l} 0,\ \forall x \in (0; 1], \\ 1,\ \text{ если } x = 0, \end{array}\right. \tag{12}$$

так как

$$\lim_{y \to 0} \exp\Bigl(-\frac{x}{|y|}\Bigr) = \left[\begin{array}{l} 0,\ \forall x \in (0; 1], \\ 1,\ \text{ если } x = 0. \end{array}\right.$$

Докажем неравномерную сходимость функции (7) с множеством определения (11) к функции (12) на отрезке $[0; 1]$ при $y \to 0$.

Для этого достаточно показать, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого положительного числа δ существует значение y_δ переменной y, принадлежащее множеству $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, такое, что $|y_\delta - y_0| = |y_\delta| < \delta$, и найдётся значение $\widetilde{x}$ переменной x из отрезка $[0; 1]$, что будет выполняться неравенство

$$\left|\exp\Bigl(-\frac{\widetilde{x}}{|y_\delta|}\Bigr) - A_2(\widetilde{x})\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Возьмём число ε_0 такое, что $0 < \varepsilon_0 < 1$.

При любом y из множества $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ предел

$$\lim_{x \to 0} \exp\Bigl(-\frac{x}{|y|}\Bigr) = 1.$$

Следовательно, при $\varepsilon_0 \in (0;1)$ и $\overset{*}{y} \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ существует $\widetilde{x}\in(0;1]$ такое, что $\exp\Bigl(-\dfrac{\widetilde{x}}{|\overset{*}{y}|}\Bigr)\geqslant \varepsilon_0$.

Поскольку на полуинтервале $(0;1]$ предельной функцией является нуль, то доказано следующее утверждение:

$$\exists\varepsilon_0\in(0;1),\ \forall\delta>0,\ \exists y_\delta\in\mathbb{R},\ 0\ne|y_\delta|<\delta,\ \exists\widetilde{x}\in(0;1]:$$

$$\left|\exp\Bigl(-\frac{\widetilde{x}}{|y_\delta|}\Bigr)-A_2(\widetilde{x})\right|=\exp\Bigl(-\frac{\widetilde{x}}{|y_\delta|}\Bigr)\geqslant\varepsilon_0,$$

которое соответствует (10).

3. Ещё одно определение равномерной сходимости

Определение равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции на основании предела точной верхней грани модуля разности сходящейся и предельной функций.

Определение 1. *Сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y)\to f(x,y)$, $\mathrm{D}f=G$, ***равномерно сходится*** *на множестве* $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}\subset G_x$, *к функции* $A\colon x\to A(x)$, $\forall x\in\widetilde{X}$, *при* $y\to y_0$, *если*

$$\lim_{y\to y_0}\sup_{x\in\widetilde{X}}|f(x,y)-A(x)|=0. \tag{1}$$

Доказательство равносильности определений 1.2 и 1. *Прямое утверждение*:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall y\in G_y,\ 0<|y-y_0|<\delta_\varepsilon:$$

$$|f(x,y)-A(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longrightarrow \tag{2}$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{y\to y_0}\sup_{x\in\widetilde{X}}|f(x,y)-A(x)|=0.$$

На языке бесконечно малых заключение импликации (2) состоит в следующем:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall y \in G_y,\ 0 < |y - y_0| < \delta_\varepsilon\colon \\ \sup_{x\in\widetilde{X}} |f(x, y) - A(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

При выполнении условия импликации (2) допустим противное:

$$\exists\varepsilon_0 > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists y_\delta \in G_y,\ 0 < |y_\delta - y_0| < \delta\colon \\ \sup_{x\in\widetilde{X}} |f(x, y_\delta) - A(x)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда в соответствии с определением точной верхней грани существует положительное число ε_1 и непустое подмножество $\overset{*}{X}$ множества $\widetilde{X}$ такие, что

$$|f(x, y_\delta) - A(x)| \geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon_1,\ \forall x \in \overset{*}{X}.$$

Поэтому

$$\exists\varepsilon_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists y_\delta \in G_y,\ 0 < |y_\delta - y_0| < \delta\colon \\ |f(x, y_\delta) - A(x)| \geqslant \varepsilon_0,\ \forall x \in \overset{*}{X},\ \overset{*}{X} \subset \widetilde{X},\ \overset{*}{X} \neq \varnothing.$$

Это противоречит определению (1.2) равномерной сходимости сужения функции f к предельной функции A на множестве $\widetilde{X}$ при $y \to y_0,$ то есть, — условию импликации (2).

Значит, импликация (2) имеет место.

Обратное утверждение:

$$\lim_{y\to y_0} \sup_{x\in\widetilde{X}} |f(x, y) - A(x)| = 0 \implies \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0, \\ \forall y \in G_y,\ 0 < |y - y_0| < \delta_\varepsilon\colon |f(x, y) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}. \tag{4}$$

Предел (1) на языке «$\varepsilon - \delta$» записывается соотношением (3).

Если учесть определение точной верхней грани, то из утверждения (3) непосредственно следует утверждение (1.2). И импликация (4) доказана.

Из взаимно обратных импликаций (2) и (4) следует равносильность определений 1.2 и 1. ■

Доказательство равносильности с соответствующим случаем определения 1 каждого из определений (2.2) − (6.2) аналогично приведённому.

Пример 1 (продолжение примеров 1.1, 5.1 и 1.2). С помощью определения 1 сравнительно легко доказывается, что функция (2.1) равномерно сходится к предельной функции

$$A\colon x \to x + 1$$

на поле вещественных чисел при $y \to -1$.

Действительно, предел

$$\lim_{y\to -1} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x + y^2 - (x+1)| = \lim_{y\to -1} |y^2 - 1| = 0,$$

что гораздо проще доказательства, приведённого в примере 1.2.

Пример 2 (продолжение примеров 2.2 и 3.2). Как и в примерах 2.2 и 3.2, рассмотрим функции, заданные формулой (7.2), с множествами определения (8.2) и (11.2).

На множестве D_1 находим:

$$\lim_{y\to 0} \sup_{0<x\leqslant 1} \left| \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) - A_1(x) \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \sup_{0<x\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) = \lim_{y\to 0} \exp\Big(-\frac{\omega}{|y|}\Big) = 0,$$

где ω — любое фиксированное число из полуинтервала $(0;1]$.

Условие (1) выполняется, и функция (7.2) с множеством определения (8.2) равномерно сходится к нулю на $(0;1]$ при $y \to 0$.

На множестве D_2

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left| \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) - A_2(x) \right| \geqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \exp\Big(-\frac{x}{|y|}\Big) = 1,$$

условие (1) не выполняется.

По определению 1, функция (7.2) с множеством определения (11.2) неравномерно сходится к предельной функции (12.2) на отрезке $[0;1]$ при $y \to 0$.

4. Критерий Гейне равномерной сходимости

Критерий равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции на основании равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 1. *Для того чтобы сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\mathrm{D}f = G$, *равномерно сходилось на множестве* $\widetilde{X} \subset G_x$ *к функции* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, *при* $y \to y_0$, *необходимо и достаточно, чтобы для любой числовой последовательности* $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *состоящей из элементов* y_n *множества* G_y *и сходящейся к* y_0, *соответствующая функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ *с членами* $f_n(x) = f(x, y_n)$, $\forall x \in X$, $n = 1, 2, \dots$, *равномерно сходилась к функции* A *на множестве* $\widetilde{X}$.

В символах:

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X}, \iff \forall \{y_n\}_{n=1}^{+\infty},\ y_n \in G_y,$$
$$n \in \mathbb{N},\ y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y_0\colon f(x, y_n) \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X}. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Дано: сужение функции f равномерно сходится к функции A на множестве $\widetilde{X}$ при $y \to y_0$, то есть, имеет место утверждение[1] (1.2).

Возьмём произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такую, что $y_n \in G_y$, $n = 1, 2, \dots$, а

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = y_0.$$

На основании этой числовой последовательности составим функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ определённую на множестве $\widetilde{X}$, с членами $f_n(x) = f(x, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

[1] Случаи (2.2) – (6.2) рассматриваются аналогично.

То, что $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$, на языке бесконечно малых означает:

$$\forall \delta > 0,\ \exists N_\delta \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\delta \colon 0 < |y_n - y_0| < \delta. \tag{2}$$

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ получена на основании функции f при фиксированных значениях переменной y из множества G_y. Поэтому для неё имеет место утверждение (1.2), в соответствии с которым

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall y_n \in G_y,\ 0 < |y_n - y_0| < \delta_\varepsilon \colon \\ |f(x, y_n) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}.\end{gathered} \tag{3}$$

С учетом (2) соотношение (3) запишем в виде:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon \colon |f(x, y_n) - A(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}.$$

Это означает равномерную сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ к функции A на $\widetilde{X} \subset G_x$.

В силу произвольности выбора числовой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ в части необходимости теорема доказана.

Достаточность. Пусть для любой числовой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такой, что $y_n \in G_y,\ n = 1, 2, \ldots$, и $y_n \to y_0$ при $n \to +\infty$, соответствующая функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, где $f_n(x) = f(x, y_n),\ \forall x \in \widetilde{X},\ n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к функции A на множестве $\widetilde{X} \subset G_x$.

Покажем, что сужение функции f равномерно сходится к функции A на множестве $\widetilde{X}$ при $y \to y_0$.

Если это не так, то имеет место утверждение (10.2).

Составим числовую последовательность $\{\delta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такую, что

$$\delta_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad \delta_n \to 0 \ \text{ при } n \to +\infty.$$

Тогда для соответствующих числовых последовательностей

$$\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{y_{\delta_n}\}_{n=1}^{+\infty} \quad \text{и} \quad \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{x_{\delta_n}\}_{n=1}^{+\infty}$$

будем иметь:

$$0 < |y_n - y_0| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и, в то же время,

$$|f(x_n, y_n) - A(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$

т.е. функциональная последовательность $\{f(x, y_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ не сходится равномерно к функции A на множестве $\widetilde{X}$.

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы в части достаточности. ■

Критерий Гейне, сформулированный в теореме 1, позволяет перенести свойства функциональных последовательностей по равномерной сходимости на равномерную сходимость функции двух переменных.

5. M-критерий равномерной сходимости

M-критерий равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции.

На основании теоремы 1.4 M-критерий равномерной сходимости функциональной последовательности перенесём на равномерную сходимость функции двух переменных.

Теорема 1 (*M-критерий равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции*). *Для того чтобы сужение функции $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$, равномерно сходилось на множестве $\widetilde{X} \subset G_x$ к функции $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало такое положительное число δ, зависящее от ε, что при всех y из множества G_y, для которых $0 < |y - y_0| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x,y) - A(x)| < M\varepsilon$ для всех x из множества $\widetilde{X}$, где положительное число M не зависит ни от x, ни от y, ни от ε.*

В символах:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall y\in G_y,$$

$$0<|y-y_0|<\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X}, \qquad (1)$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε.

Аналогичные M-критерии имеют место в случаях $y\to y_0+0$, $y\to y_0-0$, $y\to\ +\infty$, $y\to\ -\infty$ и $y\to\infty$.

Запишем их в символах:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0+0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,$$

$$\forall y\in G_y,\ 0<y-y_0<\delta_\varepsilon\colon |f(x\ ,\ y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε;

$$f(x,y) \underset{y\to y_0-0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,$$

$$\forall y\in G_y,\ 0<y_0-y<\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε;

$$f(x,y) \underset{y\to+\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,$$

$$\forall y\in G_y,\ y>\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε;

$$f(x,y) \underset{y\to-\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in\widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,$$

$$\forall y\in G_y,\ y<\ -\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε;

$$f(x,y) \underset{y\to\infty}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x\in \widetilde{X},\ \Longleftrightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,$$

$$\forall y\in G_y,\ |y|>\delta_\varepsilon\colon |f(x,y)-A(x)|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* y, *ни от* ε.

6. Критерий Коши равномерной сходимости

Критерий Коши равномерной сходимости функции двух переменных. M-критерий Коши равномерной сходимости функции двух переменных.

На основании теоремы 1.4 критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности перенесём на равномерную сходимость функции двух переменных.

Теорема 1 (*критерий Коши равномерной сходимости функции двух переменных*). *Для того чтобы сужение функции двух переменных* $f\colon (x,y)\to f(x,y),\ \forall(x,y)\in G$, *имело предельную функцию при* $y\to y_0$ *и сходилось к ней равномерно на множестве* $\widetilde{X},\ \widetilde{X}\subset G_x$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое положительное число* δ, *зависящее от* ε, *что при любых* $\overset{*}{y}$ *и* $\overset{**}{y}$ *из множества* G_y *таких, что* $0<|\overset{*}{y}-y_0|<\delta,\ 0<|\overset{**}{y}-y_0|<\delta$, *выполнялось неравенство* $|f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<\varepsilon$ *для всех* x *из* $\widetilde{X}$.

В символах:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\overset{*}{y}\in G_y,\ 0<|\overset{*}{y}-y_0|<\delta_\varepsilon,\ \forall\overset{**}{y}\in G_y,\\ 0<|\overset{**}{y}-y_0|<\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X}.\end{gathered}\tag{1}$$

Аналогичные критерии Коши имеют место при $y\to y_0+0$, $y\to y_0-0$, $y\to +\infty$, $y\to -\infty$, $y\to\infty$.

Запишем их в символах:

а) при $y\to y_0+0$

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\overset{*}{y}\in G_y,\ 0<\overset{*}{y}-y_0<\delta_\varepsilon,\ \forall\overset{**}{y}\in G_y,\\ 0<\overset{**}{y}-y_0<\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X};\end{gathered}$$

б) при $y \to y_0 - 0$

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ 0 < y_0 - \overset{*}{y} < \delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,\\ 0 < y_0 - \overset{**}{y} < \delta_\varepsilon\colon |f(x, \overset{*}{y}) - f(x, \overset{**}{y})| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X};\end{gathered} \tag{2}$$

в) при $y \to +\infty$

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ \overset{*}{y} > \delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,\\ \overset{**}{y} > \delta_\varepsilon\colon |f(x, \overset{*}{y}) - f(x, \overset{**}{y})| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X};\end{gathered} \tag{3}$$

г) при $y \to -\infty$

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ \overset{*}{y} < -\delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,\\ \overset{**}{y} < -\delta_\varepsilon\colon |f(x, \overset{*}{y}) - f(x, \overset{**}{y})| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X};\end{gathered}$$

д) при $y \to \infty$

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ |\overset{*}{y}| > \delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,\\ |\overset{**}{y}| > \delta_\varepsilon\colon |f(x, \overset{*}{y}) - f(x, \overset{**}{y})| < \varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X}.\end{gathered}$$

На основании теоремы 1.4 M-критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности перенесём на равномерную сходимость функции двух переменных.

Теорема 2 (*M-критерий Коши равномерной сходимости функции двух переменных*). *Для того чтобы сужение функции двух переменных $f\colon (x,y) \to f(x,y), \forall (x,y) \in G$, имело предельную функцию при $y \to y_0$ и сходилось к ней равномерно на множестве $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \subset G_x$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое положительное число δ, зависящее от ε, что при любых $\overset{*}{y}$ и $\overset{**}{y}$ из множества G_y таких, что $0 < |\overset{*}{y} - y_0| < \delta, 0 < |\overset{**}{y} - y_0| < \delta$, вы-*

полнялось неравенство $|f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<M\varepsilon$ *для всех* x *из множества* $\widetilde{X}$, *где положительное число* M *не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε.

В символах:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta_\varepsilon>0,\ \forall\,\overset{*}{y}\in G_y,\ 0<|\overset{*}{y}-y_0|<\delta_\varepsilon,\ \forall\,\overset{**}{y}\in G_y,$$

$$0<|\overset{**}{y}-y_0|<\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε.

Аналогичные M-критерии Коши имеют место при $y\to y_0+0$, $y\to y_0-0$, $y\to\ +\infty$, $y\to\ -\infty$, $y\to\infty$.

Запишем их в символах:

а) при $y\to y_0+0$

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\overset{*}{y}\in G_y,\ 0<\overset{*}{y}-y_0<\delta_\varepsilon,\ \forall\,\overset{**}{y}\in G_y,$$

$$0<\overset{**}{y}-y_0<\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε;

б) при $y\to y_0-0$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\,\overset{*}{y}\in G_y,\ 0<y_0-\overset{*}{y}<\delta_\varepsilon,\ \forall\,\overset{**}{y}\in G_y,$$

$$0<y_0-\overset{**}{y}<\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε;

в) при $y\to\ +\infty$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\,\overset{*}{y}\in G_y,\ \overset{*}{y}>\delta_\varepsilon,\ \forall\,\overset{**}{y}\in G_y,$$

$$\overset{**}{y}>\delta_\varepsilon\colon |f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})|<M\varepsilon,\ \forall x\in\widetilde{X},$$

где $M>0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε;

г) при $y \to -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ \overset{*}{y} < -\delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,$$

$$\overset{**}{y} < -\delta_\varepsilon \colon |f(x,\overset{*}{y}) - f(x,\overset{**}{y})| < M\varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X},$$

где $M > 0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε;

д) при $y \to \infty$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall \overset{*}{y} \in G_y,\ |\overset{*}{y}| > \delta_\varepsilon,\ \forall \overset{**}{y} \in G_y,$$

$$|\overset{**}{y}| > \delta_\varepsilon \colon |f(x,\overset{*}{y}) - f(x,\overset{**}{y})| < M\varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X},$$

где $M > 0$ *и не зависит ни от* x, *ни от* $\overset{*}{y}$, *ни от* $\overset{**}{y}$, *ни от* ε.

7. Свойство линейности равномерной сходимости

Свойство линейности равномерной сходимости функции двух переменных. Равномерная сходимость произведения равномерно сходящейся функции двух переменных и ограниченной функции одной переменной.

Свойство 1 (*линейности равномерной сходимости функции двух переменных*). *Пусть сужения функций* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *и* $g\colon (x,y) \to g(x,y)$ *с* $\mathrm{D}f = \mathrm{D}g = G$ *равномерно сходятся на множестве* $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \in G_x$, *соответственно к функциям* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, *и* $B\colon x \to B(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, *при*[1] $y \to y_0$. *Тогда при любых вещественных числах* α *и* β *сужение линейной комбинации*

$$\alpha f + \beta g\colon (x,y) \to \alpha f(x,y) + \beta g(x,y),\ \forall (x,y) \in G,$$

данных функций равномерно сходится на множестве $\widetilde{X}$ *при* $y \to y_0$ *к функции*

$$\alpha A + \beta B\colon x \to \alpha A(x) + \beta B(x),\ \forall x \in \widetilde{X}.$$

[1]Аналогичное свойство имеет место при $y \to y_0 + 0$ и при $y \to y_0 - 0$, а также, когда $y_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$, $y_0 = \infty$.

В символах:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \ \&\ g(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} B(x),$$

$$\forall x \in \widetilde{X},\ \Longrightarrow\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R}\colon \tag{1}$$

$$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} \alpha A(x) + \beta B(x),\ \forall x \in \widetilde{X}.$$

Это свойство следует из свойства линейности равномерной сходимости функциональной последовательности и критерия Гейне, сформулированного в теореме 1.4.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции* $f\colon (x,y) \to f(x,y),\ \forall (x,y) \in G$, *равномерно сходится на подмножестве* $\widetilde{X}$ *множества* G_x *к функции* $A\colon x \to A(x),\ \forall x \in \widetilde{X}$, *при* $y \to y_0$;

2) *функция* $g\colon x \to g(x),\ \forall x \in \widetilde{X}$, *ограничена.*

Тогда функция-произведение

$$gf\colon (x,y) \to g(x)f(x,y),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \forall y \in G_{y\,|\,x\in\widetilde{X}}\,,$$

при $y \to y_0$ *равномерно сходится на* $\widetilde{X}$ *к функции*

$$gA\colon x \to g(x)A(x),\ \forall x \in \widetilde{X}.$$

Доказательство. Ограниченность функции g означает:

$$\exists M > 0\colon |g(x)| \leqslant M,\ \forall x \in \widetilde{X}. \tag{2}$$

По определению (1.2), с учётом того, что

$$|g(x)f(x,y) - g(x)A(x)| = |g(x)| \cdot |f(x,y) - A(x)|,$$

$$\forall x \in \widetilde{X},\ \forall y \in G_{y\,|\,x\in\widetilde{X}}\,,$$

на основании соотношения (2) можем утверждать:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall y \in G_y,\ 0 < |y - y_0| < \delta_\varepsilon :$$

$$|g(x)f(x,y) - g(x)A(x)| < M\varepsilon,\ \forall x \in \widetilde{X},$$

где число $M > 0$ не зависит ни от ε, ни от x, ни от y.

Это в соответствии с M-критерием (теорема 1.5) означает равномерную сходимость функции

$$gf\colon (x,y) \to g(x)f(x,y),\ \forall x \in \widetilde{X},\ \forall y \in G_y\big|_{x \in \widetilde{X}},$$

к функции $gA\colon x \to g(x)A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},$ на $\widetilde{X}$ при $y \to y_0$. ■

В символах:

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} A(x),\ \forall x \in \widetilde{X},$$

$$\exists M > 0\colon |g(x)| \leqslant M,\ \forall x \in \widetilde{X},\ \Longrightarrow \tag{3}$$

$$\Longrightarrow\ g(x)f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)A(x),\ \forall x \in \widetilde{X}.$$

Пример 1. Функция

$$f\colon (x,y) \to \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{|y|}\right)\right) \arcsin\sqrt{1-x} \tag{4}$$

с множеством определения (8.2) равномерно сходится к функции

$$A\colon x \to \arcsin\sqrt{1-x},\ \forall x \in (0;1], \tag{5}$$

на полуинтервале $(0;1]$ при $y \to 0$.

В самом деле, в примерах 2.2 и 2.3 доказано, что функция (7.2) с множеством определения (8.2) равномерно сходится к функции (9.2) на полуинтервале $(0;1]$ при $y \to 0$.

По свойству 1 (линейности равномерной сходимости функции двух переменных), функция

$$\widetilde{f}\colon (x,y) \to 1 - \exp\left(-\frac{x}{|y|}\right),\ \forall (x,y) \in \{(x,y)\colon 0 < x \leqslant 1,\ y \neq 0\},$$

равномерно стремится к единице на полуинтервале $(0;1]$ при $y \to 0$.

Поскольку

$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{1-x} < \frac{\pi}{2}\,,\ \forall x \in (0;1],$$

то функция-сомножитель (5) ограничена на полуинтервале $(0;1]$.

Стало быть, по теореме 1, функция (4) с множеством определения (8.2) равномерно сходится к предельной функции (5) на полуинтервале $(0;1]$ при $y \to 0$.

8. Непрерывность предельной функции

Признак непрерывности предельной функции. Признак непрерывности предельной функции на отрезке. Признак равномерной сходимости функции двух переменных, непрерывной на прямоугольнике. Признаки Дини равномерной сходимости функции двух переменных и непрерывности предельной функции.

Известно, что если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ непрерывных функций $f_n\colon G_x \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ равномерно сходится к функции A на множестве $\widetilde{X}$, $\widetilde{X} \subset G_x$, то предельная функция A непрерывна на множестве $\widetilde{X}$.

Отсюда, по критерию Гейне (теорема 1.4), получаем следующую закономерность.

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *с множеством определения* G *удовлетворяет условиям*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *функция* f *является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно на подмножестве* $\widetilde{X}$ *множества* G_x;

2) *сужение функции* f *равномерно сходится к функции* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in \widetilde{X}$, *на множестве* $\widetilde{X}$ *при*[1] $y \to y_0$.

Тогда предельная функция A *будет непрерывной на множестве* $\widetilde{X}$.

Укажем ещё один *признак непрерывности предельной функции*, к которой сходится функция двух переменных, одновременно это *признак равномерной сходимости функции двух переменных.*

[1]Аналогично при $y \to y_0 + 0$, $y \to y_0 - 0$, $y \to +\infty$, $y \to -\infty$ и $y \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f\colon \Pi \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in \Pi$, *непрерывна на прямоугольнике*

$$\Pi = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Тогда функция f *на отрезке* $[a;b]$ *при* $y \to y_0$, $y_0 \in [c;d]$, *равномерно сходится к функции* $\widehat{f}\colon x \to f(x,y_0)$, $\forall x \in [a;b]$, *а предельная функция* $\widehat{f}$ *непрерывна на* $[a;b]$.

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на прямоугольнике Π, являющемся компактом, то, по теореме Кантора, она является равномерно непрерывной на нём.

В соответствии с определением равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число δ, зависящее от ε, что для любых точек (x_1,y_1), (x_2,y_2) из прямоугольника Π таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$.

Полагая $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y$ и $y_2 = y_0$, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall y \in [c;d],\ |y - y_0| < \delta\colon$$

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a;b].$$

Это означает (определения 1.2 и 2.2) равномерное стремление функции f к функции $\widehat{f}\colon x \to f(x,y_0)$, $\forall x \in [a;b]$, на отрезке $[a;b]$ при $y \to y_0$, где $y_0 \in [c;d]$.

Отсюда, учитывая теорему 1, получаем, что предельная функция $\widehat{f}$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. ■

Теорема 3 (*признак Дини*). *Пусть относительно функции двух переменных* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *с множеством определения* G *выполняются следующие условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *функция* f *представляет собой функцию одной переменной, непрерывную на отрезке* $[a;b]$ *из множества* G_x;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из отрезка* $[a;b]$ *функция* f *является функцией одной переменной, которая, монотонно убывая* (*или монотонно*

возрастая), сходится к значению $A(x)$ *предельной функции* A *при*[1] $y \to y_0$.

Тогда, для того чтобы предельная функция A *была непрерывной на отрезке* $[a; b]$, *необходимо и достаточно равномерного стремления функции* f *к функции* A *на отрезке* $[a; b]$ *при* $y \to y_0$.

Доказательство непосредственно следует из аналогичного признака Дини для функциональной последовательности и критерия Гейне, сформулированного в теореме 1.4.

Теорема 3 по структуре является критерием и содержит в себе два признака: *признак Дини равномерной сходимости функции двух переменных* и *признак Дини непрерывности предельной функции.*

9. Дифференцируемость предельной функции

Дифференцируемость предельной функции, к которой сходится функция двух переменных. Изменение порядка операций дифференцирования и вычисление предела функции двух переменных.

Теорема 1. *Пусть относительно функции двух переменных* $f\colon (x, y) \to f(x, y)$ *с множеством определения* G *выполняются следующие условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *функция* f *является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно на отрезке* $[a; b]$ *из множества* G_x;

2) *сужение функции* f *сходится к функции* $A\colon x \to A(x)$, $\forall x \in [a; b]$, *на отрезке* $[a; b]$ *при*[1] $y \to y_0$;

3) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из* G_y *функция* f *является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно дифференцируемо на* $[a; b]$;

4) *функция* $\partial_x f$ *равномерно сходится на отрезке* $[a; b]$ *при* $y \to y_0$ *к функции* $B\colon x \to B(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

Тогда предельная функция A *дифференцируема на отрезке* $[a; b]$, *и её производная*

$$\mathsf{D}A(x) = B(x),\ \forall x \in [a; b]. \tag{1}$$

[1] Аналогично при $y \to y_0 - 0$, $y \to y_0 + 0$, $y \to +\infty$, $y \to -\infty$, $y \to \infty$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы о дифференцируемости функции, к которой сходится функциональная последовательность, и критериев Гейне поточечной и равномерной (теоремы 1.1 и 1.4) сходимостей функции двух переменных.

То, что в равенстве (1) функция A дифференцируема на концах отрезка $[a;b]$, следует понимать как существование правой и левой производных $\mathsf{D}_+ A(x)\big|_{x=a}$ и $\mathsf{D}_- A(x)\big|_{x=b}$.

Если учесть, что

$$A(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y), \quad B(x) = \lim_{y\to y_0} \partial_x f(x,y), \ \forall x \in [a;b],$$

то равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$\mathsf{D} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \partial_x f(x,y), \ \forall x \in [a;b]. \tag{2}$$

Формула (2) означает, что при выполнении условий теоремы 1 можно изменить порядок выполнения операций дифференцирования по переменной x и вычисления предела при $y \to y_0$.

10. Интегрирование предельной функции

Интегрирование предельной функции. Формула предельного перехода в определённом интеграле.

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *с множеством определения* G *удовлетворяет условиям*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *функция* f *является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно на отрезке* $[a;b]$ *из множества* G_x;

2) *сужение функции* f *равномерно сходится к функции* $A\colon x \to A(x), \forall x \in [a;b]$, *на отрезке* $[a;b]$ *при* $y \to y_0$.

Тогда предельная функция A *интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$, *а интеграл*

$$\int\limits_a^b A(x)\,dx = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы об интегрировании функции, к которой равномерно сходится функциональная последовательность, и критерия Гейне (теорема 1.4) равномерной сходимости функции двух переменных.

Если учесть, что

$$A(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y), \ \forall x \in [a;b],$$

то равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx. \tag{2}$$

Равенство (2) носит название *формулы предельного перехода в определённом интеграле*.

11. Равномерная дифференцируемость

Равномерное дифференцирование функции одной переменной.

В качестве одного из приложений равномерной сходимости функции двух переменных рассмотрим равномерную дифференцируемость функции одной переменной.

Пусть функция $f\colon x \to f(x,y), \forall x \in X,$ дифференцируема на множестве X из поля вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Составим функцию двух переменных

$$F\colon (x,h) \to \frac{f(x+h)}{h}, \ \forall (x,h) \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Omega = \{(x,h)\colon x \in X, \ h \neq 0, \ x+h \in X\}$.

Производная функции f является предельной функцией функции F при $h \to 0,$ то есть,

$$F(x,h) \xrightarrow[h \to 0]{} \mathsf{D}f(x), \ \forall x \in X. \tag{2}$$

В случае, когда сходимость (2) является равномерной, представляется возможность говорить о специальном виде дифференцирования функции f.

Определение 1. *Функция* $f\colon x \to f(x), \forall x \in X$, ***равномерно дифференцируема на множестве*** X, $X \subset \mathbb{R}$, *если функция двух переменных* (1) *равномерно сходится на* X *при* $h \to 0$.

Множество X, будучи множеством дифференцируемости функции, не содержит изолированных точек. Вместе с тем множество X может быть числовым промежутком, содержащим точки, которые не являются внутренними для этого множества. В таких точках подразумеваем правую или левую производную и соответствующим образом составляем функцию F.

Пример 1. Функция

$$f\colon x \to \frac{1}{x}\,,\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

дифференцируема на множестве определения и имеет производную

$$\mathsf{D}f\colon x \to -\frac{1}{x^2}\,,\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty). \tag{3}$$

Это соответствует тому, что функция двух переменных

$$F\colon (x, h) \to \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}\,,\ \forall (x, h) \in G, \tag{4}$$

где $G = \{(x, h)\colon |x| > 0,\ h \neq -x\}$, поточечно сходится к функции (3) на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ при $h \to 0$.

Сужение функции (4) на полуоткрытом числовом луче $[a; +\infty)$ изменения переменной x таком, что $a > 0$, при достаточно малых $|h|$, скажем, $|h| < a$, обладает свойством:

$$\sup_{x \in [a; +\infty)} \left| -\frac{1}{x(x+h)} + \frac{1}{x^2} \right| = \sup_{x \in [a; +\infty)} \frac{|h|}{x^2(x+h)} = \frac{|h|}{a^2(a+h)}\,.$$

Поэтому при $a > 0$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in [a; +\infty)} \left| -\frac{1}{x(x+h)} - \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \right| = 0.$$

В соответствии с определением 1.3 сужение функции (4) равномерно сходится к сужению предельной функции на любом полуоткрытом числовом луче $[a;\,+\infty),\ a>0,$ при $h\to 0.$

Значит, по определению 1, функция

$$\widetilde{f}\colon x\to \frac{1}{x}\,,\ \forall x\in[a;\,+\infty),\ a>0,$$

равномерно дифференцируема на любом числовом луче $[a;+\infty),\ a>0.$

Учитывая нечётность функции $f,$ заключаем, что её сужение равномерно дифференцируемо на любом числовом луче $(-\infty;b],\ b<0.$

Рассмотрим дифференцирование сужения функции f на числовом промежутке $(0;a),\ 0<a\leqslant +\infty\,.$

При всяком $h\ne 0$ предел

$$\lim_{x\to+0}\left|\frac{h}{x^2(x+h)}\right| = +\infty.$$

Следовательно, существует такое $\varepsilon_0>0,$ что для любого положительного числа δ найдётся число h_δ такое, что $0<|h_\delta|<\delta,$ и число $\widetilde{x}\in(0;a),$ что имеет место нестрогое неравенство

$$\left|\frac{h_\delta}{\widetilde{x}^{\,2}(\widetilde{x}+h_\delta)}\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

В соответствии с предложением (10.2) сужение функции (4) неравномерно сходится к сужению предельной функции (3) на числовом промежутке $(0;a),\ 0<a\leqslant +\infty,$ при $h\to 0.$

Это означает, что на числовом промежутке $(0;a),\ 0<a\leqslant+\infty,$ сужение функции f неравномерно дифференцируемо.

С учётом нечётности заключаем, что сужение функции f неравномерно дифференцируемо на числовом промежутке $(b;0),\ -\infty\leqslant b<0.$

§ 2. Повторный предел

1. Вычисление повторного предела функции двух переменных

Повторные пределы функции двух переменных. Внутренний и внешний одинарные пределы повторного предела. Повторные пределы как частные случаи двойного предела. Зависимость повторного предела от порядка вычисления составляющих его одинарных пределов.

Рассматривая переменную x как постоянную (параметр), в первом параграфе мы установили понятие предела функции двух переменных $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$, при[1] $y \to y_0$:

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

и выделили случаи поточечной и равномерной сходимостей.

Ещё ранее было введено понятие кратного (двойного) предела функции двух переменных $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$, при $x \to x_0$ и $y \to y_0$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y). \tag{1}$$

Рассмотрим ещё один вид предела функции двух переменных.

Определение 1. *Пусть функция $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ с множеством определения G сходится к функции $\varphi\colon x \to \varphi(x)$ на множестве X, $X \subset G_x$, при $y \to y_0$. Тогда предел*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\Bigl(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Bigr)$$

назовём ***повторным пределом*** *функции f при $y \to y_0$, $x \to x_0$* и запишем

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{2}$$

---

[1] Возможно $y \to y_0 + 0$, $y \to y_0 - 0$, $y \to +\infty$, $y \to -\infty$, $y \to \infty$.

Функция $f\colon (x,y) \to f(x,y)$, $\forall (x,y) \in G$, может иметь повторный предел с иным порядком вычисления пределов: сначала $\lim\limits_{y\to y_0}$, затем $\lim\limits_{x\to x_0}$.

Определение 2. *Пусть функция* $f\colon (x,y) \to f(x,y)$ *с множеством определения* G *сходится к функции* $\psi\colon y \to \psi(y)$ *на множестве* Y, $Y \subset G_y$, *при* $x \to x_0$. *Тогда предел*

$$\lim_{y\to y_0} \psi(y) = \lim_{y\to y_0} \Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y) \Big)$$

назовём ***повторным пределом*** *функции* f *при* $x \to x_0$, $y \to y_0$ и запишем

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y). \tag{3}$$

Различный порядок одинарных пределов в повторном пределе может быть зафиксирован терминологически.

Так, в повторном пределе (2) одинарный предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ назовём ***внутренним***, а одинарный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ — ***внешним***. Одинарный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ будет *внутренним* повторного предела (3), а *внешним пределом* повторного предела (3) является одинарный предел $\lim\limits_{y\to y_0} \psi(x)$.

В двойном пределе (1) стремление к точке (x_0, y_0) осуществляется произвольным образом. В этом случае будем говорить, что *двойной предел не зависит от пути стремления к предельной точке* (x_0, y_0). Что касается повторных пределов (2) и (3), то стремление к точке (x_0, y_0) осуществляется по достаточно конкретному пути. Это обстоятельство позволяет сделать весьма важный вывод: *повторные пределы* (2) *и* (3) *являются частными случаями двойного предела* (1).

Поставим следующие вопросы.

Зависит ли величина повторного предела от порядка вычисления составляющих его одинарных пределов?

В каких случаях двойной предел может быть вычислен посредством повторного?

Предварительно рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим рациональную функцию

$$f\colon (x,y) \to \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y} \tag{4}$$

с множеством определения $\mathrm{D}f = \{(x,y)\colon x+2y \neq 0\}$.

Считая x постоянной, находим предел

$$\lim_{y\to 0} \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y} = 1+x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Предел функции $\varphi\colon x \to 1+x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, при $x \to 0$ равен

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1.$$

Поэтому повторный предел

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y} = 1. \tag{5}$$

При каждом фиксированном значении переменной $y,\ y \neq 0$, функция двух переменных (4) при $x \to 0$ имеет предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y} = \frac{1-y}{2}\,,\ \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Для функции $\psi\colon y \to \dfrac{1}{2}\,(1-y),\ \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, предел

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-y}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Поэтому повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y} = \frac{1}{2}\,. \tag{6}$$

Итак, у функции (4) существуют оба повторных предела (5) и (6), но они не равны друг другу.

Пример 2. Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$f\colon (x,y) \to \frac{x+y}{x-y} \tag{7}$$

с множеством определения $\mathrm{D}f = \{(x,y)\colon x \neq y\}$.

Повторный предел

$$\lim_{x\to 2}\lim_{y\to -\infty} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 2}(-1) = -1 \tag{8}$$

и повторный предел (с измененным порядком одинарных пределов)

$$\lim_{y\to -\infty}\lim_{x\to 2} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to -\infty} \frac{2+y}{2-y} = -1. \tag{9}$$

Значит, у функции (7) существуют оба повторных предела (8) и (9), и они равны.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f\colon (x,y) \to \frac{y^2 + (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{x+y-1} \tag{10}$$

с множеством определения $\mathrm{D}f = \{(x,y)\colon x \neq 1,\ x+y-1 \neq 0\}$.

Повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} \frac{y^2 + (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{x+y-1} = \lim_{y\to 0} y = 0. \tag{11}$$

Считая x постоянной, находим предел

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2 + (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{x+y-1} = \sin\frac{1}{x-1}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Одинарный предел $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ не существует, поэтому не существует и повторный предел

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\frac{y^2+(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{x+y-1}\,. \tag{12}$$

Итак, у функции (10) существует повторный предел (11), а повторный предел (12) не существует.

Из приведённых примеров можем заключить, что порядок вычисления одинарных пределов, вообще говоря, влияет на величину повторного предела (примеры 1 и 2).

Более того, может случиться, что один из повторных пределов существует, а другой — нет (пример 3).

Все это говорит о том, что для изменения порядка вычисления одинарных пределов в повторном пределе требуются основания.

2. Изменение порядка вычисления одинарных пределов в повторном пределе

Признак совпадения повторного предела с двойным пределом. Признак совпадения повторного и двойного пределов при существовании и при стремлении к бесконечности двойного предела. Признак совпадения двойного предела с повторным пределом при равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции.

Лемма 1. *Пусть функция* $f\colon (x,y)\to f(x,y)$ *с множеством определения* G *такова, что*:

1) *двойной предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

где A *— вещественное число или бесконечность*;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *существует одинарный предел*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y).$$

Тогда повторный предел[1]

[1]Аналогично при $x\to x_0+0,\ x\to x_0-0,\ x\to +\infty,\ x\to -\infty,\ x\to\infty,$ $y\to y_0+0,\ y\to y_0-0,\ y\to +\infty,\ y\to -\infty,\ y\to\infty.$

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y). \tag{1}$$

Доказательство. То, что двойной предел функции двух переменных $f\colon (x, y) \to f(x, y)$, $\forall (x, y) \in G$, при $x \to x_0$, $y \to y_0$ равен A, где A — вещественное число или бесконечность, на языке бесконечно малых можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \overset{*}{\delta}_\varepsilon > 0,\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{*}{\delta}_\varepsilon; x_0), \\ \forall y \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{*}{\delta}_\varepsilon; y_0)\colon f(x, y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(\rho; a)$ — проколотая ρ-окрестность точки a.

Условие 2) леммы в принятых обозначениях можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in G_y,\ \exists \overset{**}{\delta}_{\varepsilon y} > 0,\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{**}{\delta}_{\varepsilon y}; x_0)\colon \\ |f(x, y) - \psi(y)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall y \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon; y_0)\colon \psi(y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A),$$

то есть, предел $\lim\limits_{y \to y_0} \psi(y) = A$, где $-\infty \leqslant A \leqslant +\infty$. ■

Одну из возможностей изменения порядка вычисления одинарных пределов в повторном пределе выражает

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon (x, y) \to f(x, y)$ *с множеством определения* G *такова, что*:

1) *двойной предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A,$$

где A *— вещественное число или бесконечность*;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *существует одинарный предел*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y);$$

3) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из множества* G_x *существует одинарный предел*

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x).$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \\ = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \ -\infty \leqslant A \leqslant \infty. \tag{4}$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 1. Действительно, первое и второе условия теоремы совпадают с первым и вторым условиями леммы. Поэтому имеет место равенство (1).

Из первого и третьего условий теоремы 1 на основании леммы 1 следует, что

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y). \tag{5}$$

Остается лишь воспользоваться свойством транзитивности по отношению к равенствам (1) и (5). ■

Пример 1 (продолжение примера 2.1). Двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -\infty}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -\infty}} \frac{\dfrac{x}{y}+1}{\dfrac{x}{y}-1} = -1. \tag{6}$$

Также существуют одинарные пределы

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+y}{x-y} = \frac{2+y}{2-y}, \ \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \quad \text{и} \quad \lim_{y\to -\infty} \frac{x+y}{x-y} = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому существуют оба повторных предела (8.1) и (9.1), которые равны друг другу и равны двойному пределу (6).

В теореме 1 используется существование или равенство бесконечности двойного предела. Это условие не всегда удобно для установления возможности изменения порядка одинарных пределов в повторном пределе.

Используя понятие равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции, установим ещё одну возможность изменения порядка вычисления одинарных пределов в повторном пределе.

Теорема 2. *Пусть относительно функции двух переменных* $f\colon (x,y)\to f(x,y)$ *с множеством определения* G *выполняются следующие условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *существует одинарный предел*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y);$$

2) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из множества* G_x *существует одинарный предел*

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x);$$

3) *сходимость функции* f *хотя бы к одной из предельных функций* ψ *или* φ *происходит равномерно на соответствующем множестве* G_y *или* G_x.

Тогда имеет место соотношение (4).

Доказательство. Заметим, что формулировка теоремы относительно переменных x и y обладает симметрией. Это позволяет без нарушения общности считать, что функция f при $y\to y_0$ к предельной функции φ на множестве G_x сходится равномерно.

Тогда в соответствии с критерием Коши равномерной сходимости функции двух переменных (теорема 1.6.1) будем иметь:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall\overset{*}{y}\in\overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon;y_0),\\ \forall\overset{**}{y}\in\overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon;y_0)\colon\ \left|f(x,\overset{*}{y})-f(x,\overset{**}{y})\right|<\varepsilon,\ \forall x\in G_x.\end{gathered}\tag{7}$$

Зафиксируем $\overset{*}{y}$ и $\overset{**}{y}$ и на основании условия 1) теоремы 2 в неравенстве

$$\left|f(x,\overset{*}{y}) - f(x,\overset{**}{y})\right| < \varepsilon$$

осуществим предельный переход при $x \to x_0$.

В результате из (7) получим:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall\,\overset{*}{y} \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon; y_0),\\ \forall\,\overset{**}{y} \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon; y_0)\colon\ \left|\psi(\overset{*}{y}) - \psi(\overset{**}{y})\right| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{8}$$

Это означает, что для функции ψ выполняются условия критерия Коши сходимости при $y \to y_0$. Поэтому на основании (8) можем утверждать, что

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall y \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\delta_\varepsilon; y_0)\colon \psi(y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A), \tag{9}$$

где A — вещественное число или бесконечность.

Условие 1) теоремы 2 на языке бесконечно малых с учётом принятых условных обозначений означает:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \forall y \in G_y,\ \exists\overset{*}{\delta}_{\varepsilon y} > 0,\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{*}{\delta}_{\varepsilon y}; x_0)\colon\\ |f(x,y) - \psi(y)| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку истинна импликация

$$|f(x,y) - \psi(y)| < \varepsilon\ \&\ \psi(y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A) \implies f(x,y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A),$$

то из соотношений (9) и (10) следует, что

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\overset{*}{\delta}_\varepsilon > 0,\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{*}{\delta}_\varepsilon; x_0),\ \forall y \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\overset{*}{\delta}_\varepsilon; y_0)\colon\\ f(x,y) \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(\varepsilon; A).\end{gathered} \tag{11}$$

Значит, двойной предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Следовательно, выполняются условия теоремы 1, по которой имеет место соотношение (4). ■

3. Связь двойного предела с повторным

Признак несуществования и не стремления к бесконечности двойного предела.

Поскольку вычисление повторного предела, как правило, проще вычисления двойного предела, то связь между ними представляет значение.

Прежде всего, такая связь устанавливается теоремой 2.2.

Теорема 1.2 может быть использована для доказатальства того, что двойной предел не существует и не стремится в бесконечность.

Следствием теоремы 1.2 является

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon (x, y) \to f(x, y)$ *с множеством определения* G *такова, что*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* y *из множества* G_y *существует одинарный предел*

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y);$$

2) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из множества* G_x *существует одинарный предел*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x);$$

3) *хотя бы один из повторных пределов*

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \quad \textit{или} \quad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

не существует и не равен бесконечности, или

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Тогда двойной предел

$$\lim_{\substack{x\,\to\,x_0\\ y\,\to\,y_0}} f(x,y)$$

не существует и не равен бесконечности.

Метод доказательства этой теоремы составляют рассуждения, приведённые в следующем примере.

Пример 1 (продолжение примеров 1.1 и 3.1). Рассмотренные в примерах 1.1 и 3.1 соответственно функции (4.1) и (10.1) такие, что двойные пределы от них

$$\lim_{\substack{x\,\to\,0\\ y\,\to\,0}} \frac{x+y+xy-y^2+x^3}{x+2y}$$

и

$$\lim_{\substack{x\,\to\,1\\ y\,\to\,0}} \frac{y^2+(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}}{x+y-1}$$

не существуют и не стремятся в бесконечность.

Действительно, второе и третье условия теоремы 1.2 выполняются.

Поэтому, если допустить, что указанные двойные пределы существуют или стремятся в бесконечность, то для них будет выполняться и первое условие теоремы 1.2.

Тогда равны повторные пределы в каждом из примеров 1.1 и 3.1. Что противоречит результатам этих примеров.

Глава 2

ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

§ 1. Непрерывность функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра

1. Понятие определённого интеграла, зависящего от параметров

Определённый интеграл, зависящий от параметров. Определённый интеграл, зависящий от параметра, с постоянными пределами интегрирования. Определённый интеграл, подынтегральная функция и пределы интегрирования которого зависят от параметра.

Пусть функция $n+1$ переменных

$$f\colon (x, p_1, p_2, \ldots, p_n) \to f(x, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

с множеством определения

$$G = \{(x, p_1, \ldots, p_n)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ p_i \in P_i,\ i = \overline{1, n}\,\},$$

где a и b — вещественные числа, множества $P_i \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, такая, что при любых фиксированных значениях переменных p_i из соответствующих множеств P_i, $i = \overline{1, n}$, она является функцией одной переменной, интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x, p_1, \ldots, p_n)\, dx$ определяет функцию n переменных

$$I_1\colon (p_1, \ldots, p_n) \to \int\limits_a^b f(x, p_1, \ldots, p_n)\, dx,\ \forall p_i \in P_i,\ i = \overline{1, n}\,.$$

Переменные, от которых зависит подынтегральная функция f и которые при интегрировании рассматриваются как постоянные, будем называть *параметрами*, а сам интеграл $\int\limits_a^b f(x, p_1, \ldots, p_n)\, dx$ — *определённым интегралом, зависящим от параметров*.

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_0^1 2(p^2x + q^2x + 1)\, dx = \Big[p^2x^2 + q^2x^2 + 2x\Big]_{x=0}^{x=1} = p^2 + q^2 + 2$$

зависит от параметров p, q и определяет функцию

$$I\colon (p,q) \to p^2 + q^2 + 2,\ \forall (p,q) \in \mathbb{R}^2.$$

То, что интеграл определённый, устанавливаем из того, что при любых фиксированных вещественных p и q подынтегральная функция является функцией одной переменной

$$f_{pq}\colon x \to 2\big((p^2+q^2)x+1\big),\ \forall x \in [0;1],$$

непрерывной на отрезке $[0;1]$, а значит, и интегрируемой по Риману на этом отрезке.

Пример 2. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+p^2}$$

зависит от параметра p. Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x+p^2}, & \forall x \in [0;1],\ \forall p \in (\infty;0) \cup (0;+\infty), \\ \dfrac{1}{x}, & \forall x \in (0;1] \ \text{при}\ p=0 \end{array}\right.$$

такова, что при любом фиксированном ненулевом значении переменной p она представляет собой функцию одной переменной, непрерывную на отрезке $[0;1]$, а при $p=0$ является функцией одной переменной, непрерывной на полуинтервале $(0;1]$ и неограниченно возрастающей при $x \to +0$.

Поэтому при любом фиксированном ненулевом значении параметра p интеграл является определённым и равен

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+p^2} = \bigl[\ln(x+p^2)\bigr]_{x=0}^{x=1} = \ln\frac{p^2+1}{p^2}\,,\ \forall p \in (\infty;0)\cup(0;\,+\infty).$$

Если $p=0$, то интеграл является несобственным второго рода на полуинтервале $(0;1]$ и расходится:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{w\to+0}\int\limits_w^1 \frac{dx}{x} = \lim_{w\to+0}\bigl[\ln x\bigr]_w^1 = -\lim_{w\to+0}\ln w = +\infty.$$

Стало быть, сужение интеграла определяет функцию

$$I\colon p \to \ln\frac{p^2+1}{p^2}\,,\ \forall p \in (\infty;0)\cup(0;\,+\infty).$$

С целью упростить рассуждения будем рассматривать определённый интеграл, зависящий от одного параметра,

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,\ P\subset\mathbb{R}, \tag{1}$$

где подынтегральная функция

$$f\colon (x,p)\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b],\ \forall p\in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p из множества P является функцией одной переменной, интегрируемой по Риману (в собственном смысле) на отрезке $[a;b]$.

Этот интеграл определяет функцию одной переменной

$$I\colon p\to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,\ P\subset\mathbb{R}. \tag{2}$$

Наряду с интегралом (1) будем рассматривать интеграл

$$J(p) = \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx, \ \forall p \in P, \ P \subset \mathbb{R}, \qquad (3)$$

который при каждом фиксированном значении параметра p из множества P является определённым.

Такой интеграл также будем называть *определённым* (*собственным*) *интегралом, зависящим от параметра*.

Он определяет функцию одной переменной

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx, \ \forall p \in P, \ P \subset \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Определённые интегралы, зависящие от параметра, (1) и (3) отличаются тем, что у одного из них от параметра зависит лишь подынтегральная функция, а у другого — ещё и пределы интегрирования зависят от параметра. Поэтому будем говорить, что *интеграл* (1) *является определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования, а интеграл* (3) *является определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.*

При этом вполне закономерно обратить внимание на *определённый интеграл, у которого подынтегральная функция от параметра не зависит, а зависят от параметра его пределы интегрирования*:

$$\overset{*}{J}(p) = \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x)\,dx, \ \forall p \in P, \ P \subset \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Интерал (5), будучи определённым при каждом фиксированном значении параметра p из множества P, определяет функцию одной переменной

$$\overset{*}{J}\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x)\,dx, \ \forall p \in P, \ P \subset \mathbb{R}. \qquad (6)$$

2. Предельный переход под знаком определённого интеграла

Формула предельного перехода под знаком определённого интеграла. Вычисление предела по параметру у определённого интеграла с непрерывной подынтегральной функцией. Признак Дини предельного перехода под знаком интеграла.

При изучении равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции была получена формула (2.10.1.1) предельного перехода в определённом интеграле, что в принятых обозначениях может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 (*о предельном переходе под знаком определённого интеграла*). *Пусть выполняются условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$f\colon (x,p)\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b],\ \forall p\in P,$$

является функцией одной переменной, интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$;

2) *функция* f *равномерно сходится к функции*

$$\varphi\colon x\to\varphi(x),\ \forall x\in[a;b],$$

на отрезке $[a;b]$ *при* $p\to p_0$.

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$I\colon p\to\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

сходится при $p\to p_0$ *и её предел*

$$\lim_{p\to p_0}\int\limits_a^b f(x,p)\,dx=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Вместе с тем формула (1) может быть записана в виде

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx, \tag{2}$$

что обосновывает название теоремы.

Из теоремы 1 с учётом теоремы 2.8.1.1 следует весьма удобная в приложениях

Теорема 2. *Если функция*[1]

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in \langle c;d\rangle,\ -\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty,$$

непрерывна на множестве $\Pi = [a;b] \times \langle c;d\rangle$, *то заданная определённым интегралом с параметром функция*

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in \langle c;d\rangle,$$

сходится при $p \to p_0$ *и её предел*

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b f(x,p_0)\,dx, \tag{3}$$

где p_0 *— вещественное число из промежутка* $\langle c;d\rangle$.

В соответствии с теоремой 1 на основании признака Дини равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции (теорема 3.8.1.1) получаем, что имеет место

Теорема 3 (*признак Дини предельного перехода под знаком определённого интеграла*). *Пусть выполняются условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in P,$$

[1]Знак $\langle$ означает как включение $[$, так и исключение $($; а знак $\rangle$ означает как включение $]$, так и исключение $)$.

является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[a;b]$;

2) *при* $p \to p_0$ *функция* f *на отрезке* $[a;b]$ *сходится (поточечно) к функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;b];$$

3) *при каждом фиксированном значении* x *из отрезка* $[a;b]$ *функция* f *является функцией одной переменной, которая, монотонно убывая (монотонно возрастая), сходится к значению* $\varphi(x)$ *предельной функции* φ *при* $p \to p_0$;

4) *предельная функция* φ *непрерывна.*

Тогда заданная определённым интегралом, содержащим параметр, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится при $p \to p_0$ *и её предел*

$$\lim_{p \to p_0} I(p) = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

то есть, имеет место формула предельного перехода под знаком определённого интеграла (2).

Замечание 1. Теоремы 1, 2 и 3 распространяются на случаи односторонних пределов $p \to p_0 - 0$, $p \to p_0 + 0$ и на случаи, когда $p \to -\infty$, $p \to +\infty$, $p \to \infty$.

Пример 1. У интегралов

$$I_1(p) = \int\limits_0^2 \frac{x+p}{p^2+1}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad I_2(p) = \int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+p^2}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R},$$

подынтегральные функции непрерывны соответственно на полосах

$$\Pi_1 = [0;2] \times \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = [-1;1] \times \mathbb{R},$$

а значит, каждый из них является определённым с параметром p.

По теореме 2, функции I_1 и I_2, заданные с помощью этих интегралов, сходятся при $p \to 0$, а пределы

$$\lim_{p\to 0} \int\limits_0^2 \frac{x+p}{p^2+1}\,dx = \int\limits_0^2 \frac{x+p}{p^2+1}\Big|_{p=0}\,dx = \int\limits_0^2 x\,dx = 2$$

и

$$\lim_{p\to 0} \int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+p^2}\,dx = \int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+p^2}\,\Big|_{p=0}\,dx = \int\limits_{-1}^1 |x|\,dx = 1.$$

Пример 2. Найдём предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Для этого используем теорему 1. При всяком фиксированном натуральном n подынтегральная функция является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[0;1]$. Предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{1+e^x}\,,\ \forall x \in [0;1].$$

Докажем, что в этом случае стремление к предельной функции на отрезке $[0;1]$ будет равномерным. Действительно,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1+e^x}\right| = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \frac{\left|e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right|}{\left(1+e^x\right)\left(1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| = e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Стало быть, по определению 1.3.1.1 (равномерной сходимости функции двух переменных), имеет место равномерная сходимость

$$\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+e^x},\ \forall x \in [0;1].$$

Условия теоремы 1 выполняются, поэтому, используя формулу (1), находим предел

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int\limits_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = 1 - \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1 =$$

$$= 1 - \ln\frac{1+e}{2} = \ln\frac{2e}{e+1}\,.$$

Пример 3. С целью вычисления предела

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_1^2 \frac{\ln(x+|p|)}{\ln(x^2+p^2)}\,dx$$

проверим выполнение условий теоремы 1.

Подынтегральная функция при любом фиксированном значении переменной p, скажем, таком, что $|p|>1$, является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[1;2]$. Предел

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\ln(x+|p|)}{\ln(x^2+p^2)} = \lim_{q\to+\infty} \frac{\ln(x+q)}{\ln(x^2+q^2)} =$$

$$= \lim_{q\to+\infty} \frac{x^2+q^2}{2q(x+q)} = \frac{1}{2}\,,\ \forall x \in [1;2].$$

Кроме того, для любого положительного числа ε модуль разности

$$\left|\frac{\ln(x+|p|)}{\ln(x^2+p^2)} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\ln\left(1+\dfrac{2|p|x}{x^2+p^2}\right)}{2\ln(x^2+p^2)} \leqslant \frac{\dfrac{2|p|x}{x^2+p^2}}{2\ln(x^2+p^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2p}{(1+p^2)\ln(1+p^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+p^2)} < \varepsilon$$

сразу для всех x из отрезка $[1;2]$, как только $|p| > \sqrt{\exp\frac{1}{\varepsilon} - 1}\,.$

Стало быть, по определению равномерной сходимости функции двух переменных (6.2.1.1), имеет место равномерная сходимость

$$\frac{\ln(x+|p|)}{\ln(x^2+p^2)} \underset{p\to\infty}{\rightrightarrows} \frac{1}{2}\,,\ \forall x \in [1;2].$$

Итак, условия теоремы 1 выполняются, и, по формуле (1), предел

$$\lim_{p\to\infty} \int\limits_1^2 \frac{\ln(x+|p|)}{\ln(x^2+p^2)}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

Пример 4. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin\xi}\,d\xi.$$

При любом фиксированном вещественном x подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной, которая непрерывна на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Поэтому надо вычислить предел при $x\to+\infty$ функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра,

$$I\colon x \to \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin\xi}\,d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

При любом фиксированном вещественном x подынтегральная функция является положительной на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ функцией одной переменной. Поэтому

$$I(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin\xi}\, d\xi > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

а значит, предел

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) \geqslant 0.$$

Функция

$$\zeta\colon \xi \to \sin\xi - \frac{2}{\pi}\,\xi,\ \forall \xi \in \Big[0;\frac{\pi}{2}\Big],$$

неотрицательна.

В самом деле, значения $\zeta(0) = \zeta\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0,$ сужение функции ζ на отрезке $\Big[0;\arccos\dfrac{2}{\pi}\Big]$ возрастает, а на отрезке $\Big[\arccos\dfrac{2}{\pi}\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ сужение функции ζ убывает, причём функция ζ непрерывна.

Промежутки монотонности функции ζ устанавливаем по промежуткам знакоопределённости её производной

$$\mathsf{D}\zeta\colon \xi \to \cos\xi - \frac{2}{\pi}\,,\ \forall \xi \in \Big[0;\frac{\pi}{2}\Big].$$

На полуинтервале $\Big[0;\arccos\dfrac{2}{\pi}\Big)$ сужение функции $\mathsf{D}\zeta$ положительно, а на полуинтервале $\Big(\arccos\dfrac{2}{\pi}\,;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ сужение функции $\mathsf{D}\zeta$ отрицательно.

Поскольку

$$\sin\xi \geqslant \frac{2}{\pi}\,\xi,\ \forall \xi \in \Big[0;\frac{\pi}{2}\Big],$$

то

$$\exp(\,-x\sin\xi) \leqslant \exp\Big(-\frac{\pi}{2}\,x\xi\Big),\ \forall \xi \in \Big[0;\frac{\pi}{2}\Big],\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

По свойству монотонности определённого интеграла устанавливаем, что интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-x\sin\xi)\,d\xi \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\Big(-\frac{2}{\pi}\,x\xi\Big)d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{2x}\,(1-e^{-x}),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Итак,

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin\xi}\,d\xi \leqslant \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x} = 0,$$

а значит,

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin\xi}\,d\xi = 0.$$

Пример 5. *Пусть функция*

$$f\colon t\to f(t),\ \forall t\in[a;b],$$

непрерывна. Докажем, что предел

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int\limits_{\zeta}^{\xi}\big(f(t+h)-f(t)\big)\,dt = f(\xi)-f(\zeta)\ \ (a<\zeta<\xi<b).$$

Доказательство. Для первообразной

$$F\colon t\to F(t),\ \forall t\in[a;b],$$

функции f, по формуле Ньютона — Лейбница, имеем, что

$$\int\limits_{\zeta}^{\xi}\big(\partial_t F(t+h)-\mathsf{D}F(t)\big)\,dt = \Big[F(t+h)-F(t)\Big]_{t=\zeta}^{t=\xi} = F(\xi+h)-F(\xi)-$$

$$-\big(F(\zeta+h)-F(\zeta)\big),\ \forall\xi\in[a;b],\ \forall(\xi+h)\in[a;b],\ \forall\zeta\in(a;\xi).$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{\zeta}^{\xi}\big(f(t+h)-f(t)\big)\,dt=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{\zeta}^{\xi}\big(\partial_t\,F(t+h)-\mathsf{D}F(t)\big)\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(\xi+h)-F(\xi)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(\zeta+h)-F(\zeta)}{h}=$$

$$=f(\xi)-f(\zeta),\ \forall\xi\in[a;b],\ \forall\zeta\in(a;\xi).\ \blacksquare$$

Пример 6. *Можно ли осуществить предельный переход под знаком интеграла в выражении*

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{p^2}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{p^2}\Big)\,dx\ ?$$

Сначала вычислим предел

$$\lim_{p\to 0}\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{p^2}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{p^2}\Big)dx=\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\int\limits_{0}^{1}\exp\Big(-\frac{x^2}{p^2}\Big)\,\frac{1}{p^2}\,dx^2=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\Big(1-\exp\Big(-\frac{1}{p^2}\Big)\Big)=0{,}5\,,$$

а затем вычислим интеграл

$$\int\limits_{0}^{1}\lim_{p\to 0}\Big(\frac{x}{p^2}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{p^2}\Big)\Big)dx=\int\limits_{0}^{1}0\,d\xi=0.$$

Поскольку $0{,}5\neq 0$, то предельный переход под знаком интеграла осуществить нельзя.

Пример 7. *Пусть выполняются условия*:

1) *функции*

$$\varphi_n\colon[-1;1]\to\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots,\tag{4}$$

интегрируемы по Риману на отрезке $[-1;1]$;

2) *функции* (4) *неотрицательны*:

$$\varphi_n(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [-1;1],\ n = 1, 2, \ldots\,; \tag{5}$$

3) *сужение функциональной последовательности*

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{+\infty},\ \forall x \in [-1;1], \tag{6}$$

на множестве

$$\Xi = [-1;\ -\varepsilon] \cup [\varepsilon; 1],\ 0 < \varepsilon < 1,$$

равномерно сходится к нулю:

$$\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0,\ \forall x \in \Xi; \tag{7}$$

4) *числовая последовательность* $\Big\{ \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx \Big\}_{n=1}^{+\infty}$ *сходится к единице*:

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1; \tag{8}$$

5) *функция* $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Докажите, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\ dx = f(0). \tag{9}$$

Доказательство. Так как функция f непрерывна, а функции (4) интегрируемы по Риману на отрезке $[-1;1]$, то функции-произведения $f\varphi_n\colon [-1;1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$ интегрируемы по Риману на отрезке $[-1;1]$.

Если

$$f(x) = 0,\ \forall x \in [-1;1],$$

то равенство (9) доказываем формальной подстановкой нуля вместо f.

Далее будем считать, что функция f не является тождественным нулём на отрезке $[-1;1]$.

Оценим

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0) \right| \leqslant \left| \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx \right| +$$
$$+ \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0) \right|, \ \ n = 1, 2, \ldots, \ \ (0 < \varepsilon < 1). \tag{10}$$

Поскольку функция f непрерывна на отрезке, то

$$|f(x)| \leqslant M, \ \forall x \in [-1; 1], \quad \text{где} \quad M = \max_{[-1;1]} |f(x)|, \tag{11}$$

причём $M > 0$, так как $f(x) \not\equiv 0$ на $[-1; 1]$.

Функции (4) интегрируемы по Риману на отрезке $[-1; 1]$, а значит, сужения функций (4) ограничены. В этой связи

$$\varphi_n(x) \leqslant L_n, \ \forall x \in \Xi, \quad \text{где} \quad L_n = \sup_{\Xi} \varphi_n(x), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

причём $L_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, в соответствии с оценками (5).

Учитывая оценки (5), (11) и (12), устанавливаем, что

$$\left| \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} |f(x)|\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} |f(x)|\varphi_n(x)\,dx \leqslant ML_n \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} dx \right) =$$

$$= 2(1-\varepsilon)ML_n \leqslant 2ML_n, \ \ n = 1, 2, \ldots, \ \ (0 < \varepsilon < 1).$$

Итак, при любом натуральном n и $0 < \varepsilon < 1$

$$\left| \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx \right| \leqslant 2ML_n. \tag{13}$$

В соответствии с первой теоремой о среднем значении определённого интеграла существуют такие $\xi_n \in [-\varepsilon; \varepsilon]$, что

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx = f(\xi_n)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx,\;\; n=1,2,\ldots\,.$$

Тогда (с учётом оценок (5), (11) и (12)) модули разностей

$$\Bigl|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\Bigr| = \Bigl|f(\xi_n)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx - f(0)\Bigr| =$$

$$= \Bigl|f(\xi_n)\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx - f(0)\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx - f(0) + f(0)\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx +$$

$$+ f(\xi_n)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx - f(\xi_n)\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\Bigr| \leqslant \bigl|f(\xi_n)-f(0)\bigr|\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx +$$

$$+ \bigl|f(0)\bigr|\,\Bigl|1-\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\Bigr| + \bigl|f(\xi_n)\bigr|\Biggl(\int\limits_{-1}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\varphi_n(x)\,dx\Biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \bigl|f(\xi_n)-f(0)\bigr|\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx + M\Bigl|1-\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\Bigr| + 2ML_n,$$

$$n=1,2,\ldots,\;\; (|\xi_n|<\varepsilon,\; 0<\varepsilon<1).$$

Итак,

$$\begin{gathered}\Bigl|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\Bigr| \leqslant \bigl|f(\xi_n)-f(0)\bigr|\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx + \\ + M\Bigl|1-\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\Bigr| + 2ML_n,\;\; n=1,2,\ldots,\;\; (|\xi_n|<\varepsilon,\; 0<\varepsilon<1).\end{gathered} \tag{14}$$

Функция $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, числа $\xi_n \in (-\varepsilon;\varepsilon)$ при $n=1,2,\ldots,\ 0<\varepsilon<1$. Поэтому

$$\begin{gathered}\forall\delta>0,\ \exists\varepsilon_\delta\in(0;1),\ \forall\xi_n\in(-\varepsilon_\delta;\varepsilon_\delta),\ (-\varepsilon_\delta;\varepsilon_\delta)\subset(-\varepsilon;\varepsilon)\colon\\ \bigl|f(\xi_n)-f(0)\bigr|<\frac{\delta}{1+\delta}\,M,\ \ n=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{15}$$

Равномерное стремление (7) означает, что

$$\forall\delta>0,\ \exists N_\delta\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ n\geqslant N_\delta\colon 0<L_n=\sup_{\Xi}\varphi_n(x)<\delta. \tag{16}$$

Сходимость (8) означает, что

$$\forall\delta>0,\ \exists N_\delta\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ n\geqslant N_\delta\colon \left|1-\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx\right|<\delta. \tag{17}$$

Отсюда следует и такое утверждение:

$$\forall\delta>0,\ \exists N_\delta\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ n\geqslant N_\delta\colon\ 0<\int\limits_{-1}^{1}\varphi_n(x)\ dx<1+\delta. \tag{18}$$

Теперь на основании оценок (10), (13) и (14) с учётом закономерностей (15) – (18) получаем:

$$\forall\delta>0,\ \exists N_\delta\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ n\geqslant N_\delta\colon$$

$$\left|\ \int\limits_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\,dx-f(0)\right|\leqslant 2M\delta+\frac{\delta}{1+\delta}\,M(1+\delta)+M\delta+2M\delta=6M\delta,$$

где M не зависит ни от δ, ни от n.

Отсюда, по M-критерию бесконечно малой, заключаем, что имеет место равенство (9). ■

3. Непрерывность функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра

Непрерывность функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра (с постоянными пределами интегрирования и в случае, когда подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра). Вычисление предела функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.

3.1. Непрерывность функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования

Пример 1. Пусть

$$I(p) = \int\limits_a^b x^p\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R},\ \ (0 < a < b). \tag{1}$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to x^p,\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывна на множестве $G = \{(x,p)\colon 0 < a \leqslant x \leqslant b,\ p \in \mathbb{R}\}$, а значит, интеграл (1) является определённым, зависящим от параметра.

Непосредственным интегрированием находим, что

$$\int\limits_a^b x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

при $p \neq -1$, а при $p = -1$

$$\int\limits_a^b x^{-1}\,dx = \bigl[\ln x\bigr]_a^b = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Стало быть, интегралом (1) задаётся функция

$$I\colon p \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}, \ \forall p \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty), \\[2ex] \ln\dfrac{b}{a} \quad \text{при } p = -1 \ \ (0 < a < b). \end{array}\right. \tag{2}$$

Поскольку

$$\lim_{p\to -1} I(p) = \lim_{p\to -1} \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} =$$

$$= \lim_{p\to -1}\bigl(b^{p+1}\ln b - a^{p+1}\,\ln a\bigr) = \ln\frac{b}{a} = I(-1),$$

то функция (2) непрерывна на поле $\mathbb{R}$.

В примере 1 показано, что определённый интеграл с параметром и постоянными пределами интегрирования (1) позволяет задать функцию (2), которая является непрерывной на поле $\mathbb{R}$.

В общем случае имеет место

Теорема 1 (*о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования*). *Пусть функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in \langle c;d\rangle,\ -\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty,$$

непрерывна на множестве $G = [a;b]\times\langle c;d\rangle$. *Тогда заданная определённым интегралом с параметром функция*

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in \langle c;d\rangle, \tag{3}$$

будет непрерывной.

Доказательство[1]. Отрезок $[\lambda;\nu]$ выберем произвольным образом так, чтобы он содержался в числовом промежутке $\langle c;d\rangle$.

[1] Эта теорема, по сути, соответствует теореме 2.2, ибо соотношение (2.2) для функции (3) означает, что предел $\lim\limits_{p\to p_0} I(p) = I(p_0),\ \forall p_0 \in \langle c;d\rangle$. Это означает непрерывность функции (3) на числовом промежутке $\langle c;d\rangle$.

Однако мы приведём ещё одно доказательство, которое является несложным, но не использует утверждение теоремы 2.8.1.1.

Сначала докажем, что сужение функции (3) непрерывно на отрезке $[\lambda;\nu]$.

Если использовать язык «$\varepsilon - \delta$», то надо доказать, что

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \forall p \in [\lambda;\nu],\ \exists\delta_{\varepsilon p} > 0,\ \forall(p+\Delta p) \in [\lambda;\nu],\\ |\Delta p| < \delta_{\varepsilon p}\colon\ \ |\Delta I(p)| = |I(p+\Delta p) - I(p)| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{4}$$

Сужение функции f непрерывно на компакте $\Pi = [a;b]\times[\lambda;\nu]$. Тогда, по теореме Кантора, сужение функции f равномерно непрерывно на Π, то есть,

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall(\overset{*}{x},\overset{*}{p}) \in \Pi,\ \forall(\overset{**}{x},\overset{**}{p}) \in \Pi, \bigl|\overset{*}{x} - \overset{**}{x}\bigr| < \delta_\varepsilon,\\ \bigl|\overset{*}{p} - \overset{**}{p}\bigr| < \delta_\varepsilon\colon \bigl|f(\overset{*}{x},\overset{*}{p}) - f(\overset{**}{x},\overset{**}{p})\bigr| < \varepsilon,\end{gathered}$$

или, положив

$$\overset{*}{x} = \overset{**}{x} = x,\ x \in [a;b],\ \ \overset{*}{p} = p + \Delta p,\ \overset{**}{p} = p,\ \ \overset{*}{p}, \overset{**}{p} \in [\lambda;\nu],$$

будем иметь:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall p \in [\lambda;\nu],\ \forall(p+\Delta p) \in [\lambda;\nu],\\ |\Delta p| < \delta_\varepsilon\colon \bigl|f(x,p+\Delta p) - f(x,p)\bigr| < \varepsilon,\ \forall x \in [a;b].\end{gathered} \tag{5}$$

Из того, что

$$\bigl|\Delta I(p)\bigr| = \bigl|I(p+\Delta p) - I(p)\bigr| = \Biggl|\int\limits_a^b f(x,p+\Delta p)\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b f(x,p)\,dx\Biggr| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,p+\Delta p) - f(x,p)|\,dx,$$

на основании (5) заключаем:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall p \in [\lambda;\nu],\ \forall(p+\Delta p) \in [\lambda;\nu],$$

$$|\Delta p| < \delta_\varepsilon\colon\ \bigl|\Delta I(p)\bigr| < (b-a)\varepsilon.$$

По M-критерию, полученное утверждение означает, что имеет место соотношение (4) и сужение функции (3) непрерывно на отрезке $[\lambda;\nu]$.

Ввиду произвольности выбора отрезка $[\lambda;\nu]$, содержащегося в числовом промежутке $\langle c;d\rangle$, функция (3) непрерывна. ■

Пример 2. Пусть функция $g\colon x \to g(x)$ с $\mathrm{D}g = [0;1]$ непрерывна и положительна. Исследуем на непрерывность функцию

$$I\colon p \to \int\limits_0^1 \frac{p\,g(x)}{x^2+p^2}\,dx,\ \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Подынтегральная функция

$$\Phi\colon (x,p) \to \frac{p\,g(x)}{x^2+p^2}\,,\ \forall x \in [0;1],\ \forall p \in \mathbb{R},$$

имеет непрерывные сужения на множествах

$$\Pi_+ = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p > 0\}$$

и

$$\Pi_- = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p < 0\}.$$

По теореме 1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), сужения функции I непрерывны на открытых числовых лучах $(0;+\infty)$ и $(-\infty;0)$.

Исследуем на непрерывность функцию I в точке $p=0$.

Значение этой функции $I(0)=0$. Функции $g\colon [0;1] \to \mathbb{R}$ и

$$f\colon x \to \left[\begin{array}{ll} \dfrac{p}{x^2+p^2}\,, & \forall x \in [0;1],\ \text{ при } p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\[2ex] \quad 0, & \forall x \in [0;1],\ \text{ при } p = 0 \end{array}\right.$$

непрерывны, причём $g(x) > 0,\ \forall x \in [0;1]$. Это позволяет использовать первую интегральную теорему о среднем значении определённого интеграла, по которой

$$I(p) = \int\limits_0^1 \frac{p}{x^2+p^2}\, g(x)\, dx = g\big(\zeta(p)\big) \int\limits_0^1 \frac{p}{x^2+p^2}\, dx = g\big(\zeta(p)\big) \operatorname{arctg} \frac{1}{p}\,,$$

где $0 < \zeta(p) < 1, \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда

$$\big|I(\varepsilon) - I(-\varepsilon)\big| = \left|\Big(g\big(\zeta(p)\big) - g\big(\zeta(-\varepsilon)\big)\Big) \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right| \geqslant$$

$$\geqslant 2 \min_{[0;1]} g(x) \left|\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right| \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} \pi \min_{[0;1]} g(x) > 0.$$

Значит, точка $p = 0$ является точкой разрыва функции I.

Пример 3. *Лемма Адамара. Если функция* $f\colon x \to f(x), \forall x \in X$, $X \subset \mathbb{R}$, *непрерывно дифференцируема в точке* x_0 *из множества* X, *то в окрестности* U *точки* x_0 *сужение этой функции можно представить в виде*

$$f\colon x \to f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0),\ \forall x \in U,$$

где функция $\varphi\colon x \to \varphi(x), \forall x \in \mathrm{U}$, *непрерывна в точке* x_0, *и её значение*

$$\varphi(x_0) = \mathsf{D} f(x)\big|_{x=x_0}.$$

Доказательство. Составим функцию

$$F\colon h \to \int\limits_0^1 \mathsf{D} f(x)\big|_{x=x_0+ht}\, dt,\ \forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon),\ \varepsilon > 0.$$

Поскольку функция f непрерывно дифференцируема в точке x_0, то существует столь малое положительное число ε, что подынтегральная функция

$$g\colon (t, h) \to \mathsf{D} f(x)\big|_{x=x_0+ht},\ \forall t \in [0; 1],\ \forall h \in (-\varepsilon; \varepsilon),$$

непрерывна на множестве $\Delta = [0; 1] \times (-\varepsilon; \varepsilon)$.

Тогда, по теореме 1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция F непрерывна на интервале $(-\varepsilon; \varepsilon)$.

Положим $h = x - x_0$. Тогда

$$F(x - x_0) = \int\limits_0^1 \mathsf{D} f(\xi)\big|_{\xi = x_0 + (x - x_0)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int\limits_0^1 \mathsf{D}_t f(x_0 + (x - x_0)t)\, d_t(x_0 + (x - x_0)t) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \Big[f(x_0 + (x - x_0)t)\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}},$$

где $\overset{\circ}{\mathrm{U}}$ — проколотая окрестность точки x_0. Следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0),\ \forall x \in \mathrm{U},$$

где функция

$$\varphi\colon x \to \left[\begin{array}{l} F(x - x_0),\ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0), \\ \mathsf{D} f(x)\big|_{x = x_0} \quad \text{при}\ x = x_0 \end{array}\right.$$

и является непрерывной в точке x_0.

3.2. Непрерывность функций, заданных определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon (x, p) \to f(x, p),\ \forall x \in [A; B],\ \forall p \in \langle c; d\rangle,\ -\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty,$$

непрерывна на множестве $G = [A; B] \times \langle c; d\rangle$;

2) *функции* $a\colon p \to a(p)$ *и* $b\colon p \to b(p)$, $\mathrm{D}a = \mathrm{D}b = \langle c; d\rangle$, *с множествами значений* $\mathrm{E}a$ *и* $\mathrm{E}b$, *содержащимися в отрезке* $[A; B]$, *непрерывны*.

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in \langle c;d\rangle, \tag{6}$$

будет непрерывной.

Доказательство. Отрезок $[\lambda;\nu]$ выберем произвольным образом так, чтобы он содержался в числовом промежутке $\langle c;d\rangle$.

Сначала докажем, что сужение функции (6) непрерывно на отрезке $[\lambda;\nu]$.

Пусть p_0 — произвольная точка отрезка $[\lambda;\nu]$. Согласно свойству аддитивности определённого интеграла

$$J(p) = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p)dx + \int\limits_{b(p_0)}^{b(p)} f(x,p)dx - \int\limits_{a(p_0)}^{a(p)} f(x,p)dx, \forall p \in [\lambda;\nu].$$

Сужение функции f непрерывно на прямоугольнике $\Pi_0 = \{(x,p)\colon \min\{a(p_0),b(p_0)\} \leqslant x \leqslant \max\{a(p_0),b(p_0)\}, \lambda \leqslant p \leqslant \nu\}$, поэтому функция

$$I_0\colon p \to \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [\lambda;\nu],$$

заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования, по теореме 1, непрерывна. А значит, предел[1]

$$\lim_{p\to p_0} I_0(p) = I_0(p_0).$$

[1]Предел при $p \to p_0$ находится в точках $p_0 \in (\lambda;\nu)$.

Если $p_0 = \lambda$, то находится правосторонний предел при $p \to p_0 + 0$. Если $p_0 = \nu$, то находится левосторонний предел при $p \to p_0 - 0$.

При каждом фиксированном значении переменной p из отрезка $[\lambda;\nu]$ функция f является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно на отрезке

$$\big[\min\{b(p_0), b(p)\};\ \max\{b(p_0), b(p)\}\big].$$

Тогда, по первой интегральной теореме о среднем значении для определённого интеграла,

$$J_b(p) = \int\limits_{b(p_0)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = f(\xi,p)\big(b(p) - b(p_0)\big),$$

где $\xi = b(p_0) + \theta(b(p) - b(p_0))$, $0 < \theta < 1$.

Если $p \to p_0$, то $b(p) - b(p_0) \to 0$ и $f(\xi,p) \to f(b(p_0),p_0)$, а значит, предел

$$\lim_{p\to p_0} J_b(p) = \lim_{p\to p_0} \int\limits_{b(p_0)}^{b(p)} f(x,p)dx = \lim_{p\to p_0}\Big(f(\xi,p)\big(b(p)-b(p_0)\big)\Big) = 0.$$

Аналогично доказываем, что предел

$$\lim_{p\to p_0} J_a(p) = \lim_{p\to p_0} \int\limits_{a(p_0)}^{a(p)} f(x,p)\,dx = 0.$$

Тогда предел

$$\lim_{p\to p_0} J(p) = \lim_{p\to p_0}\big(I_0(p) + J_b(p) - J_a(p)\big) = I_0(p_0),$$

но

$$I_0(p_0) = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p_0)\,dx = J(p_0),$$

поэтому

$$\lim_{p\to p_0} J(p) = J(p_0),$$

и функция J непрерывна в точке p_0.

Точка p_0 выбрана из отрезка $[\lambda;\nu]$ произвольно, следовательно, сужение функции (6) непрерывно на отрезке $[\lambda;\nu]$. Отрезок $[\lambda;\nu]$ также выбран произвольно и $[\lambda;\nu]\subset\langle c;d\rangle$.

Стало быть, функция (6) непрерывна. ■

Пример 4. При каждом вещественном p интеграл

$$J(p) = \int\limits_{\sin^3 p}^{\sin 3p} \cos\bigl(p+\sqrt{1-x^2}\,\bigr)\,dx$$

является определённым, а заданная на его основании функция J будет непрерывной на числовой прямой $(-\infty;+\infty)$.

Действительно, подынтегральная функция

$$f\colon (x,p)\to \cos\bigl(p+\sqrt{1-x^2}\,\bigr),\ \forall x\in[-1;1],\ \forall p\in\mathbb{R},$$

непрерывна на полосе $\Pi = [-1;1]\times\mathbb{R}$.

Пределами интегрирования являются непрерывные функции

$$a\colon p\to\sin^3 p,\ \forall p\in\mathbb{R},\quad \text{и}\quad b\colon p\to\sin 3p,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

с множествами значений $\mathrm{E}a=\mathrm{E}b=[-1;1]$.

Тем самым, все условия теоремы 2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра) выполняются. Поэтому функция J непрерывна на поле $\mathbb{R}$.

Пример 5. При каждом вещественном p и каждом вещественном q интеграл $\int\limits_{p-q}^{p+q}\exp(x^2+p^2+q^2)\,dx$ является определённым. Докажем непрерывность функции

$$J\colon (p,q)\to\int\limits_{p-q}^{p+q}\exp(x^2+p^2+q^2)\,dx,\ \forall (p,q)\in\mathbb{R}^2.$$

Функции

$$a\colon (p,q)\to p-q,\ \forall p\in[c_1;d_1],\ \forall q\in[c_2;d_2],$$

и

$$b\colon (p,q)\to p+q,\ \forall p\in[c_1;d_1],\ \forall q\in[c_2;d_2],$$

непрерывны на прямоугольнике $\Pi=[c_1;d_1]\times[c_2;d_2]$. Функция

$$f\colon (x,p,q)\to \exp(x^2+p^2+q^2),\ \forall x\in[A;B],\ \forall p\in[c_1;d_1],\ \forall q\in[c_2;d_2],$$

непрерывна на прямоугольном параллелепипеде

$$S=[A;B]\times[c_1;d_1]\times[c_2;d_2],$$

где

$$A=\min_{\substack{c_1\leqslant p\leqslant d_1\\ c_2\leqslant q\leqslant d_2}}\{p-q,p+q\}=\min\{c_1-d_2,c_1+c_2\},$$

$$B=\max_{\substack{c_1\leqslant p\leqslant d_1\\ c_2\leqslant q\leqslant d_2}}\{p-q,p+q\}=\max\{d_1-c_2,d_1+d_2\}.$$

Множества значений

$$\mathrm{E}a=\big[\min_{\Pi}(p-q);\max_{\Pi}(p-q)\big]=[c_1-d_2;d_1-c_2]$$

и

$$\mathrm{E}b=\big[\min_{\Pi}(p+q);\max_{\Pi}(p+q)\big]=[c_1+c_2;d_1+d_2]$$

содержатся в отрезке $[A;B]$.

Все условия теоремы 2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которой подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра) выполнены. Поэтому сужение функции J непрерывно на прямоугольнике Π.

Прямоугольник Π выбран произвольно. Значит, функция J непрерывна на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*:

1) *функции* $a\colon p\to a(p)$ *и* $b\colon p\to b(p)$ *с* $\mathrm{D}a=\mathrm{D}b=[c;d]$ *непрерывны;*

2) $a(p)\leqslant b(p),\ \forall p\in[c;d]$;

3) *функция* $f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall (x,p) \in K,$ *непрерывна на компакте* $K = \{(x,p)\colon a(p) \leqslant x \leqslant b(p),\ c \leqslant p \leqslant d\}.$

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d], \tag{7}$$

будет непрерывной.

Доказательство. Интеграл (7) при каждом фиксированном значении параметра $p \in [c;d]$ является определённым интегралом с непрерывной подынтегральной функцией на отрезке $[a(p);b(p)]$.

С помощью замены переменной x на ζ по формуле

$$x = a(p) + \big(b(p) - a(p)\big)\zeta,\ \forall \zeta \in [0;1],$$

интеграл (7) преобразовываем к виду

$$I(p) = \int\limits_0^1 g(\zeta,p)\,d\zeta,\ \forall p \in [c;d], \tag{8}$$

с подынтегральной функцией

$$g\colon (\zeta,p) \to f\big(a(p) + (b(p) - a(p))\zeta, p\big)\big(b(p) - a(p)\big),\ \mathrm{D}g = \Pi,$$

где $\Pi = [0;1] \times [c;d]$.

Функция g непрерывна как суперпозиция непрерывных функций a, b и f.

Тогда, по теореме 1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция I, заданная интегралом (8), является непрерывной. ■

Теорему 3, так же, как и теорему 2, будем называть *теоремами о непрерывности функций, заданных определёнными интегралами, у которых подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.*

Пример 6. При каждом фиксированном вещественном p интеграл

$$J(p) = \int\limits_{p}^{p^2+1} e^{px}\,dx$$

является определённым.

Пределы интегрирования суть непрерывные функции

$$a\colon p \to p,\ \forall p \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad b\colon p \to p^2+1,\ \forall p \in \mathbb{R},$$

причём $p < p^2 + 1,\ \forall p \in \mathbb{R}$.

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to e^{px},\ \forall (x,p) \in \mathbb{R}^2,$$

непрерывна.

Возьмём произвольный отрезок $[c;d]$, на котором для сужения функции

$$J\colon p \to \int\limits_{p}^{p^2+1} e^{px}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R},$$

выполняются условия теоремы 3. Тогда сужение функции J непрерывно на отрезке $[c;d]$. Учитывая произвольность выбора отрезка $[c;d]$, заключаем о непрерывности функции J на прямой $(-\infty;+\infty)$.

Убедимся в этом на основании вычислений. Интеграл

$$J(p) = \int\limits_{p}^{p^2+1} e^{px}\,dx = \left[\begin{array}{l} \big[x\big]_0^1 = 1 \ \text{ при } \ p = 0, \\[2ex] \left[\dfrac{1}{p}\, e^{px}\right]_{x=p}^{x=p^2+1} = \dfrac{1}{p}\left(e^{p^3+p} - e^{p^2}\right), \forall p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\lim_{p\to 0} J(p) = \lim_{p\to 0} \frac{e^{p^3+p} - e^{p^2}}{p} = \lim_{p\to 0}\left((3p^2+1)\, e^{p^3+p} - 2p\, e^{p^2}\right) = 1 = J(0)$$

и функция J непрерывна на поле $\mathbb{R}$.

Пример 7. При каждом фиксированном неотрицательном p интеграл $\int\limits_0^p \operatorname{arctg}\sqrt{p-x}\,dx$ является определённым. Функция

$$J\colon p \to \int\limits_0^p \operatorname{arctg}\sqrt{p-x}\,dx,\ \forall p \in [0;\,+\infty),$$

непрерывна.

Действительно, при любом неотрицательном η функции

$$a\colon p \to 0,\ \forall p \in [0;\eta], \quad \text{и} \quad b\colon p \to p,\ \forall p \in [0;\eta],$$

непрерывны.

Сужение подынтегральной функции

$$f\colon (x,p) \to \operatorname{arctg}\sqrt{p-x}\,,\ \forall (x,p) \in G,\ G = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant p,\ p \geqslant 0\},$$

непрерывно на компакте

$$K = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant p,\ 0 \leqslant p \leqslant \eta\}.$$

Стало быть, в соответствии с теоремой 3 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра) сужение функции J непрерывно на отрезке $[0;\eta]$.

Отрезок $[0;\eta]$ выбран произвольно, следовательно, функция J непрерывна на неотрицательном числовом луче.

Пример 8. Если функция g непрерывна на $[0;+\infty)$, то при любых неотрицательных вещественных x и натуральных m интеграл

$$J_m(x) = \int\limits_0^x (x-\xi)^m\, g(\xi)\,d\xi$$

будет определённым.

Докажем, что функция

$$J_m\colon x \to \int\limits_0^x (x-\xi)^m\, g(\xi)\,d\xi,\ \forall x \in [0;\,+\infty),\ \ (m \in \mathbb{N})$$

является непрерывной.

Действительно, сужение подынтегральной функции

$$f_m\colon (\xi, x) \to (x-\xi)^m\, g(\xi),\ \forall (\xi, x) \in G,$$

$G = \{(\xi, x)\colon 0 \leqslant \xi \leqslant x,\ x \geqslant 0\}$, $(m \in \mathbb{N})$ непрерывно на компакте

$$K = \{(\xi, x)\colon 0 \leqslant \xi \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant \eta\}$$

при любом $\eta \geqslant 0$. Также непрерывны функции

$$a\colon x \to 0,\ \forall x \in [0;\eta], \quad \text{и} \quad b\colon x \to x,\ \forall x \in [0;\eta].$$

Тогда, по теореме 3 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), сужение функции J_m непрерывно на отрезке $[0;\eta]$. Это верно для любого отрезка $[0;\eta]$. Поэтому функция J_m непрерывна на числовом луче $[0;+\infty)$.

3.3. Предельный переход в определённом интеграле, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра

Непосредственным следствием теорем 2 и 3 является следующая *теорема о предельном переходе в определённом интеграле, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *или теоремы* 3. *Тогда предел*

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p_0)\,dx$$

и имеет место формула предельного перехода

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{\lim\limits_{p\to p_0} a(p)}^{\lim\limits_{p\to p_0} b(p)} \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx.$$

Если выполняются условия теоремы 3 *или выполняются условия теоремы* 2, *когда* $c \in \langle c; d\rangle$, *то предел*

$$\lim_{p\to c+0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(c)}^{b(c)} f(x,c)\,dx$$

или

$$\lim_{p\to c+0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(c+0)}^{b(c+0)} \lim_{p\to c+0} f(x,p)\,dx.$$

Если выполняются условия теоремы 3 *или выполняются условия теоремы* 2, *когда* $d \in \langle c; d\rangle$, *то предел*

$$\lim_{p\to d-0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(d)}^{b(d)} f(x,d)\,dx$$

или

$$\lim_{p\to d-0} \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(d-0)}^{b(d-0)} \lim_{p\to d-0} f(x,p)\,dx.$$

Пример 9. *Вычислим предел*

$$\lim_{p\to 0} \int\limits_{p}^{p+1} \frac{dx}{x^2+p^2+1}\,.$$

Для этого достаточно рассмотреть функцию

$$J\colon p \to \int\limits_{p}^{p+1} \frac{dx}{x^2+p^2+1}\,,\ \forall p \in [\,-c; c],\ \ (c>0),$$

заданную определённым интегралом, зависящим от параметра, на некотором отрезке $[-c; c]$, содержащим нуль внутренней точкой.

Пределы интегрирования

$$a\colon p \to p,\ \forall p \in [-c; c], \quad \text{и} \quad b\colon p \to p+1,\ \forall p \in [-c; c],$$

непрерывны, выполняется неравенство $p < p+1,\ \forall p \in [-c; c]$, а подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to \frac{1}{x^2+p^2+1}\,,\ \forall (x,p) \in K,$$

непрерывна на компакте

$$K = \{(x,p)\colon p \leqslant x \leqslant p+1,\ -c \leqslant p \leqslant c\}.$$

Тем самым выполняются условия теоремы 3, и по теореме 4 можно вычислить предел функции J, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра, следующим образом:

$$\lim_{p\to 0} \int\limits_{p}^{p+1} \frac{dx}{x^2+p^2+1} = \int\limits_{\lim\limits_{p\to 0} p}^{\lim\limits_{p\to 0}(p+1)} \lim_{p\to 0} \frac{1}{x^2+p^2+1}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \bigl[\operatorname{arctg} x\bigr]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Теоремы 1, 2, 3 и 4 не являются критериями. Они содержат лишь достаточные условия, при которых имеют место описанные закономерности относительно функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра. Убедимся в этом на следующем примере, когда определённый интеграл от неявляющейся непрерывной функции задаёт непрерывную функцию.

Пример 10. Функция

$$f\colon (x,p) \to \operatorname{sgn}(x-p),\ \forall x \in [0;1],\ \forall p \in \mathbb{R},$$

не является непрерывной на полосе $\Pi = [0;1] \times \mathbb{R}$. Действительно,

$$\operatorname{sgn}(x-p)=1 \ \text{ при } \ 0\leqslant x\leqslant 1,\ p<0;$$

$$\operatorname{sgn}(x-p)=-1 \ \text{ при } \ 0\leqslant x<p,\ 0\leqslant p\leqslant 1;$$

$$\operatorname{sgn}(x-p)=0 \ \text{ при } \ x=p,\ 0\leqslant p\leqslant 1;$$

$$\operatorname{sgn}(x-p)=1 \ \text{ при } \ p<x\leqslant 1,\ 0\leqslant p\leqslant 1;$$

$$\operatorname{sgn}(x-p)=-1 \ \text{ при } \ 0\leqslant x\leqslant 1,\ p>1.$$

Интеграл

$$I(p)=\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-p)\,dx,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

является определённым, ибо при каждом фиксированном значении параметра p функция f является функцией одной переменной, которая либо непрерывна на отрезке $[0;1]$ (при $p<0$ и при $p>1$), либо кусочно-непрерывна на отрезке $[0;1]$ (при $0\leqslant p\leqslant 1$).

Непосредственным вычислением интеграла находим:

$$I(p)=\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-p)\,dx=1,\ \forall p\in(-\infty;0);$$

$$I(p)=\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-p)\,dx=-\int\limits_0^p dx+\int\limits_p^1 dx=1-2p,\ \forall p\in[0;1];$$

$$I(p)=\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}(x-p)\,dx=-1,\ \forall p\in(1;+\infty).$$

Итак,

$$I\colon p\to\left[\begin{array}{cl} 1, & \forall p\in(-\infty;0),\\ 1-2p, & \forall p\in[0;1],\\ -1, & \forall p\in(1;+\infty).\end{array}\right.$$

Поскольку $I(-0)=I(0)=1,\ I(1)=I(1+0)=-1,$ то функция $I\colon p\to I(p),\ \forall p\in\mathbb{R},$ непрерывна.

§ 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметров

1. Дифференцирование функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра

Дифференцирование под знаком определённого интеграла по параметру (правило Лейбница). Дифференцирование функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра. Обобщённая теорема Барроу о дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит. Приложение теории дифференцирования определённых интегралов, зависящих от параметров, при вычислении интегралов.

1.1. Дифференцирование функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования

Вычисление производной функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, установил Лейбниц, и формулу, по которой вычисляется такая производная, принято называть *правилом Лейбница.*

Достаточные условия применения правила Лейбница даёт следующая *теорема о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования.*

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *при* $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$ *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in \langle c;d\rangle,$$

непрерывна на множестве $G = [a;b] \times \langle c;d\rangle$;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из отрезка* $[a;b]$ *функция* f *представляет собой функцию*

одной переменной, дифференцируемую на числовом промежутке $\langle c; d\rangle$;

3) *функция*

$$\partial_p f\colon (x, p) \to \partial_p f(x, p),\ \forall (x, p) \in G,$$

является непрерывной.

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x, p)\, dx,\ \forall p \in \langle c; d\rangle, \tag{1}$$

непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}I\colon p \to \int\limits_a^b \partial_p f(x, p)\, dx,\ \forall p \in \langle c; d\rangle. \tag{2}$$

Доказательство. Отрезок $[\lambda; \nu]$ выберем произвольным образом так, чтобы он содержался в числовом промежутке $\langle c; d\rangle$.

Сначала докажем, что сужение функции (1) непрерывно дифференцируемо на отрезке $[\lambda; \nu]$ и что на отрезке $[\lambda; \nu]$ имеет место формула (2).

Пусть p_0 — произвольная фиксированная точка из отрезка $[\lambda; \nu]$. Теорема на отрезке $[\lambda; \nu]$ будет доказана, если установим справедливость правила Лейбница (2) в точке p_0, то есть, что

$$\mathsf{D}I(p_0) = \int\limits_a^b \partial_p f(x, p_0)\, dx, \tag{3}$$

причём в точке $p_0 = \lambda$ имеется в виду правая производная, а в точке $p_0 = \nu$ — левая производная.

Придадим точке p_0 из интервала $(\lambda; \nu)$ приращение Δp такое, что $p + \Delta p \in (\lambda; \nu)$. Тогда

$$I(p_0) = \int_a^b f(x, p_0)\, dx, \quad I(p_0 + \Delta p) = \int_a^b f(x, p_0 + \Delta p)\, dx.$$

Исходя из определений обыкновенной и частной производных, в точке p_0 из $(\lambda; \nu)$ относительно сужения функции (1) имеем:

$$\mathsf{D}I(p_0) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{I(p_0 + \Delta p) - I(p_0)}{\Delta p} =$$

$$= \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{1}{\Delta p} \left(\int_a^b f(x, p_0 + \Delta p)\, dx - \int_a^b f(x, p_0)\, dx \right) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta p \to 0} \int_a^b \frac{f(x, p_0 + \Delta p) - f(x, p_0)}{\Delta p}\, dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(x, p_0 + \Delta p) - f(x, p_0)}{\Delta p}\, dx = \int_a^b \partial_p f(x, p_0).$$

Итак, доказана формула (3) при $p = p_0$, когда $p_0 \in (\lambda; \nu)$, если только обоснуем предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{\Delta p \to 0} \int_a^b F(x, \Delta p)\, dx = \int_a^b \lim_{\Delta p \to 0} F(x, \Delta p)\, dx, \tag{4}$$

где

$$F\colon (x, \Delta p) \to \frac{f(x, p_0 + \Delta p) - f(x, p_0)}{\Delta p},$$
$$\forall x \in [a; b],\ \forall \Delta p \in [\lambda - p_0; 0) \cup (0; \nu - p_0]. \tag{5}$$

Для этого проверим выполнение условий теоремы 1.2.1 (о предельном переходе под знаком определённого интеграла).

Условие 1) теоремы 1.2.1 выполняется, ибо при каждом фиксированном значении переменной Δp из $[\lambda - p_0; 0) \cup (0; \nu - p_0]$ подынтегральная функция F является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[a;b]$ как линейная комбинация (5) непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций

$$f\big|_{p=p_0+\Delta p} : x \to f(x, p_0 + \Delta p), \ \forall x \in [a;b],$$

и

$$f\big|_{p=p_0} : x \to f(x, p_0), \ \forall x \in [a;b].$$

А непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману (в собственном смысле) на нём.

Условие 2) теоремы 1.2.1 предполагает равномерную сходимость функции (5) к предельной функции

$$\partial_p f\big|_{p=p_0} : x \to \partial_p f(x, p_0), \ \forall x \in [a;b],$$

на отрезке $[a;b]$ при $\Delta p \to 0$. Это на языке бесконечно малых означает, что

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0, \ \forall \Delta p \in [\lambda - p_0; 0) \cup (0; \nu - p_0], \ |\Delta p| < \delta_\varepsilon : \\ \left| \frac{f(x, p_0 + \Delta p) - f(x, p_0)}{\Delta p} - \partial_p f(x, p_0) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in [a;b].\end{gathered} \tag{6}$$

Если использовать формулу конечных приращений, то соотношение (6) будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0, \ \forall \Delta p \in [\lambda - p_0; 0) \cup (0; \nu - p_0], \ |\Delta p| < \delta_\varepsilon : \\ |\partial_p f(x, p_0 + \theta \Delta p) - \partial_p f(x, p_0)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a;b], \ (0 < \theta < 1).\end{gathered} \tag{7}$$

Итак, надо доказать утверждение (7).

На компакте $\Pi = [a;b] \times [\lambda;\nu]$ сужение функции $\partial_p f$ непрерывно. Следовательно, по теореме Кантора, оно равномерно непрерывно на Π, то есть,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall (\overset{*}{x}, \overset{*}{p}) \in \Pi,\ \forall (\overset{**}{x}, \overset{**}{p}) \in \Pi,\ \big|\overset{*}{x} - \overset{**}{x}\big| < \delta_\varepsilon,$$
$$\big|\overset{*}{p} - \overset{**}{p}\big| < \delta_\varepsilon \colon \big|\partial_p f(\overset{*}{x}, \overset{*}{p}) - \partial_p f(\overset{**}{x}, \overset{**}{p})\big| < \varepsilon. \qquad (8)$$

Из соотношения (8) при

$$\overset{*}{x} = \overset{**}{x} = x,\ x \in [a;b],\ \overset{*}{p} = p_0 + \theta \Delta p,\ \overset{**}{p} = p_0,$$
$$p_0 \in (\lambda;\nu),\ \theta \in (0;1),\ \Delta p \in [\lambda - p_0; 0) \cup (0; \nu - p_0],\ |\Delta p| < \delta_\varepsilon,$$

получаем утверждение (7).

Стало быть, правило Лейбница (3) при любом p_0 из интервала $(\lambda;\nu)$ доказано.

В случаях $p_0 = \lambda$ и $p_0 = \nu$ доказательства аналогичны с корректировкой на односторонность производных.

Значит, формула (2) имеет место на отрезке $[\lambda;\nu]$.

Учитывая произвольность выбора отрезка $[\lambda;\nu]$ из числового промежутка $\langle c;d\rangle$, заключаем о справедливости формулы (2) на числовом промежутке $\langle c;d\rangle$.

Непрерывность функции (2) устанавливаем по теореме 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования). Выполнение условия теоремы 1.3.1 обеспечивается условием 3) доказанной теоремы. ■

Формулу (2) перепишем в виде

$$\mathsf{D} \int\limits_a^b f(x,p)\, dx = \int\limits_a^b \partial_p f(x,p)\, dx,\ \forall p \in \langle c;d\rangle. \qquad (9)$$

Формула (9) выражает правило Лейбница дифференцирования под знаком определённого интеграла. В этой связи теорему 1 ещё называют *теоремой о дифференцировании под знаком определённого интеграла по параметру.*

Пример 1. Функция

$$I\colon p \to \int\limits_0^1 \ln(x^2+p^2)\,dx,\ \forall p \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty),$$

задана определённым интегралом, зависящим от параметра, у которого сужения подынтегральной функции непрерывны на множествах

$$\Pi_- = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p<0\} \quad \text{и} \quad \Pi_+ = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ p>0\}.$$

У частной производной подынтегральной функции

$$\partial_p f\colon (x,p) \to \frac{2p}{x^2+p^2}\,,\ \forall x \in [0;1],\ \forall p \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty),$$

сужения непрерывны на множествах Π_- и Π_+.

Поэтому в соответствии с теоремой 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра) сужения функции I непрерывно дифференцируемы на числовых лучах $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, а производная

$$\mathsf{D}I(p) = \mathsf{D}\int\limits_0^1 \ln(x^2+p^2)\,dx = \int\limits_0^1 \partial_p \ln(x^2+p^2)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2p}{x^2+p^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\,,\ \forall p \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

К такому же результату приходим через непосредственное вычисление данного интеграла, зависящего от параметра, с последующим дифференцированием полученного результата.

В самом деле, интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+p^2)\,dx = \Big[x\ln(x^2+p^2)\Big]_{x=0}^{x=1} -$$

$$-\,2\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^2+p^2}\,dx = \ln(1+p^2) - 2\big[x\big]_0^1 + 2p^2\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+p^2} =$$

$$= \ln(1+p^2) - 2 + 2p \operatorname{arctg}\frac{1}{p}\,,\ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Производная

$$\mathsf{D}I(p) = \mathsf{D}\Big(\ln(1+p^2) - 2 + 2p \operatorname{arctg}\frac{1}{p}\Big) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\,,\ \forall p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Пример 2. *Докажем, что функция*

$$y\colon x \to \int\limits_0^{\pi} e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (\mu \in \mathbb{R})$$

является решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$x\,\mathsf{D}^2 y + \mathsf{D}y - \mu^2 xy = 0.$$

Доказательство. Подынтегральная функция

$$f\colon (\xi, x) \to e^{\mu x\cos\xi},\ \forall \xi \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (\mu \in \mathbb{R})$$

и её частные производные

$$\partial_x f\colon (\xi, x) \to \mu\cos\xi\, e^{\mu x\cos\xi},\ \forall \xi \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (\mu \in \mathbb{R}),$$

$$\partial_{xx} f\colon (\xi, x) \to \mu^2\cos^2\xi\, e^{\mu x\cos\xi},\ \forall \xi \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (\mu \in \mathbb{R})$$

непрерывны на полосе $\Pi = [0;\pi] \times \mathbb{R}$.

Следуя теореме 1 (о дифференцировании функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра), дважды используем правило Лейбница и получим:

$$\mathsf{D}y(x) = \mathsf{D}_x \int\limits_0^{\pi} e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{\pi} \partial_x e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi = \mu \int\limits_0^{\pi} \cos\xi\, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi;$$

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \mathsf{D}(\mathsf{D}y(x)) = \mu\mathsf{D}_x \int\limits_0^{\pi} \cos\xi\, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi =$$

$$= \mu \int\limits_0^\pi \partial_x \big(\cos\xi \, e^{\mu x \cos\xi}\big)\, d\xi = \mu^2 \int\limits_0^\pi \cos^2\xi \, e^{\mu x \cos\xi}\, d\xi$$

при любых действительных x и μ.

Тогда

$$x\, \mathsf{D}^2 y(x) + \mathsf{D}y(x) - \mu^2 x\, y(x) =$$

$$= x\mu^2 \int\limits_0^\pi \cos^2\xi \, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi + \mu \int\limits_0^\pi \cos\xi \, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi - \mu^2 x \int\limits_0^\pi e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi =$$

$$= \mu \int\limits_0^\pi e^{\mu x\cos\xi}\, d\sin\xi - \mu^2 x \int\limits_0^\pi (1-\cos^2\xi)\, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi =$$

$$= \mu \Big[\sin\xi \, e^{\mu x\cos\xi}\Big]_{\xi=0}^{\xi=\pi} + \mu^2 x \int\limits_0^\pi \sin^2\xi \, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi -$$

$$- \mu^2 x \int\limits_0^\pi \sin^2\xi \, e^{\mu x\cos\xi}\, d\xi = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (\mu \in \mathbb{R}). \blacksquare$$

Пример 3. *Сужение квадратичной функции* $y\colon x \to x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, *на отрезке* $[1;3]$ *приближённо заменим сужением линейной функции* $y\colon x \to ax+b, \forall x \in \mathbb{R}$, *так, чтобы функция*

$$I\colon (a,b) \to \int\limits_1^3 (b+ax-x^2)^2\, dx, \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

достигала минимума.

Функция

$$\Phi\colon (x,a,b) \to (b+ax-x^2)^2, \ \forall (x,a,b) \in [1;3]\times\mathbb{R}^2,$$

и её частные производные

$$\partial_a \Phi\colon (x,a,b) \to 2x(b+ax-x^2), \ \forall (x,a,b) \in [1;3]\times\mathbb{R}^2,$$

$$\partial_b\Phi\colon (x,a,b)\to 2(b+ax-x^2),\ \forall (x,a,b)\in[1;3]\times\mathbb{R}^2,$$

непрерывны.

Тогда в соответствии с теоремой 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра) находим частные производные

$$\partial_a I(a,b)=\int\limits_1^3 \partial_a(b+ax-x^2)^2\,dx=2\int\limits_1^3 x(b+ax-x^2)\,dx=$$

$$=2\Big[\frac{b}{2}\,x^2+\frac{a}{3}\,x^3-\frac{1}{4}\,x^4\Big]_{x=1}^{x=3}=2\Big(4b+\frac{26}{3}\,a-20\Big),\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\partial_b I(a,b)=\int\limits_1^3 \partial_b(b+ax-x^2)^2\,dx=2\int\limits_1^3 (b+ax-x^2)\,dx=$$

$$=2\Big[bx+\frac{a}{2}\,x^2-\frac{1}{3}\,x^3\Big]_{x=1}^{x=3}=2\Big(2b+4a-\frac{26}{3}\Big),\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Отсюда

$$\partial_{aa}I(a,b)=\partial_a\Big(2\Big(4b+\frac{26}{3}\,a-20\Big)\Big)=\frac{52}{3}\,,\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\partial_{ab}I(a,b)=\partial_{ba}I(a,b)=8,\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\partial_{bb}I(a,b)=\partial_b\Big(2\Big(2b+4a-\frac{26}{3}\Big)\Big)=4,\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Система

$$\begin{cases}\partial_a I(a,b)=0,\\ \partial_b I(a,b)=0\end{cases}\iff\begin{cases}4b+\dfrac{26}{3}\,a-20=0,\\ 2b+4a-\dfrac{26}{3}=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=4,\\ b=-\dfrac{11}{3}\,.\end{cases}$$

Поскольку

$$d^2I\Big(4,\,-\frac{11}{3}\Big)=\frac{52}{3}\,da^2+16\,dadb+4\,db^2=4(2\,da+db)^2+\frac{4}{3}\,da^2>0$$

при $da^2 + db^2 \neq 0$, то в точке $\left(4, \, -\dfrac{11}{3}\right)$ функция I имеет минимум.

Следовательно, функция

$$y\colon x \to 4x - \frac{11}{3}, \ \forall x \in [1; 3],$$

удовлетворяет поставленному требованию.

1.2. Дифференцирование функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p), \ \forall x \in [A;B], \ \forall p \in \langle c; d\rangle, \ -\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty,$$

непрерывна на множестве $G = [A;B] \times \langle c; d\rangle$;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* x *из отрезка* $[A;B]$ *функция* f *представляет собой функцию одной переменной, дифференцируемую на числовом промежутке* $\langle c; d\rangle$;

3) *частная производная* $\partial_p f$ *непрерывна на* G;

4) *функции*

$$a\colon p \to a(p), \ \forall p \in \langle c; d\rangle, \quad \text{и} \quad b\colon p \to b(p), \ \forall p \in \langle c; d\rangle,$$

с множествами значений $\mathrm{E}a$ *и* $\mathrm{E}b$ *из отрезка* $[A;B]$ *дифференцируемы* (*непрерывно дифференцируемы*).

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\, dx, \ \forall p \in \langle c; d\rangle, \tag{10}$$

дифференцируема (*непрерывно дифференцируема*) *и её производная функция*

$$\mathsf{D}J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} \partial_p f(x,p)\,dx + f(b(p),p)\,\mathsf{D}b(p) - \\ - f(a(p),p)\,\mathsf{D}a(p),\ \forall p \in \langle c;d\rangle. \tag{11}$$

Доказательство. Отрезок $[\lambda;\nu]$ выберем произвольным образом так, чтобы он содержался в числовом промежутке $\langle c;d\rangle$.

Сначала докажем, что сужение функции (10) дифференцируемо (непрерывно дифференцируемо) на отрезке $[\lambda;\nu]$ и на отрезке $[\lambda;\nu]$ имеет место формула (11).

Пусть p_0 — произвольная фиксированная точка из отрезка $[\lambda;\nu]$. Тогда на этом отрезке, по свойству аддитивности определённого интеграла,

$$J(p) = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p)\,dx + \int\limits_{a(p)}^{a(p_0)} f(x,p)\,dx + \int\limits_{b(p_0)}^{b(p)} f(x,p)\,dx. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию

$$J_0\colon p \to \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} f(x,p)\,dx,\ \forall x \in [\lambda;\nu],$$

которая задана определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования.

Сужение функции f непрерывно на прямоугольнике

$$\Pi = \bigl[\min\{a(p_0), b(p_0)\}; \max\{a(p_0), b(p_0)\}\bigr] \times [\lambda;\nu],\ \Pi \subset G.$$

При каждом фиксированном значении переменной x из отрезка $\bigl[\min\{a(p_0), b(p_0)\}; \max\{a(p_0), b(p_0)\}\bigr]$ функция f представляет собой функцию одной переменной, дифференцируемую на отрезке $[\lambda;\nu]$.

У функции $\partial_p f$ сужение непрерывно на прямоугольнике Π.

Значит, выполняются условия теоремы 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), по которой функция J_0 непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda;\nu]$ и её производная находится по правилу Лейбница

$$\mathsf{D}J_0\colon p \to \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall p\in[\lambda;\nu].$$

Тогда в точке x_0 из отрезка $[\lambda;\nu]$ производная

$$\mathsf{D}J_0(p_0) = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} \partial_p f(x,p_0)\,dx. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$J_a\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{a(p_0)} f(x,p)\,dx,\ \forall p\in[\lambda;\nu].$$

При каждом фиксированном p из отрезка $[\lambda;\nu]$ функция f является функций одной переменной, сужение которой непрерывно на отрезке $\bigl[\min\{a(p_0),b(p_0)\};\max\{a(p_0),b(p_0)\}\bigr]$.

Тогда, по следствию из первой интегральной теоремы о среднем значении для определённого интеграла, существует такая точка ξ, расположенная между $a(p)$ и $a(p_0)$, что

$$J_a(p) = \int\limits_{a(p)}^{a(p_0)} f(x,p)\,dx = f(\xi,p)\bigl(a(p_0)-a(p)\bigr),\ \forall p\in[\lambda;\nu].$$

При этом ввиду непрерывности функций f и a предел

$$\lim_{p\to p_0} f(\xi,p) = f(a(p_0),p_0).$$

Заметим, что

$$J_a(p_0) = \int\limits_{a(p_0)}^{a(p_0)} f(x, p_0)\, dx = 0.$$

Тогда с учётом дифференцируемости функции a предел

$$\lim_{p\to p_0} \frac{J_a(p) - J_a(p_0)}{p - p_0} = \lim_{p\to p_0} \frac{J_a(p)}{p - p_0} = \lim_{p\to p_0} \frac{f(\xi, p)\big(a(p_0) - a(p)\big)}{p - p_0} =$$

$$= -f(a(p_0), p_0) \lim_{p\to p_0} \frac{a(p) - a(p_0)}{p - p_0} = -f(a(p_0), p_0)\, \mathsf{D}a(p_0).$$

Следовательно, функция J_a дифференцируема в точке p_0 и её производная

$$\mathsf{D}J_a(p_0) = -f(a(p_0), p_0)\, \mathsf{D}a(p_0). \tag{14}$$

Аналогично доказываем дифференцируемость функции

$$J_b \colon p \to \int\limits_{b(p_0)}^{b(p)} f(x, p)\, dx, \ \forall p \in [\lambda; \nu],$$

в точке p_0 из отрезка $[\lambda; \nu]$ и то, что производная

$$\mathsf{D}J_b(p_0) = f(b(p_0), p_0)\, \mathsf{D}b(p_0). \tag{15}$$

Стало быть, функция

$$J \colon p \to J_0(p) + J_a(p) + J_b(p), \ \forall p \in [\lambda; \nu],$$

заданная формулой (12), дифференцируема в точке p_0 из отрезка $[\lambda; \nu]$ как сумма дифференцируемых в этой точке функций J_0, J_a и J_b. А с учётом равенств (13) – (15) устанавливаем, что в точке p_0 производная

$$\mathsf{D}J(p_0) = \int\limits_{a(p_0)}^{b(p_0)} \partial_p f(x, p_0)\, dx + $$
$$+ f(b(p_0), p_0)\, \mathsf{D}b(p_0) - f(a(p_0), p_0)\, \mathsf{D}a(p_0). \tag{16}$$

Если $p_0 = \lambda$ или $p_0 = \nu$, то в формуле (16) следует сделать корректировку на соответствующие односторонние производные.

В силу произвольности выбора p_0 из отрезка $[\lambda; \nu]$ и произвольности выбора отрезка $[\lambda; \nu]$ на числовом промежутке $\langle c; d\rangle$ из равенства (16) следует формула (11).

Уже было доказано, что функция J_0 непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda; \nu]$. Если функции a и b являются непрерывно дифференцируемыми на числовом промежутке $\langle c; d\rangle$, то из формул (14) и (15) следует непрерывная дифференцируемость функций J_a и J_b на отрезке $[\lambda; \nu]$. Поэтому на основании представления (12) заключаем о непрерывной дифференцируемости сужения функции (10) на произвольно взятом отрезке $[\lambda; \nu]$ таком, что $[\lambda; \nu] \subset \langle c; d\rangle$.

Стало быть, функция (10) будет непрерывно дифференцируемой на $\langle c; d\rangle$, если только на этом числовом промежутке являются непрерывно дифференцируемыми функции a и b. ■

Теорема 2 относится к классу теорем *о дифференцировании определённых интегралов по параметру* ввиду того, что формула (11) выражает следующую закономерность

$$\mathsf{D}\int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x, p)\, dx = \int\limits_{a(p)}^{b(p)} \partial_p f(x, p)\, dx + $$
$$+ f(b(p), p)\, \mathsf{D}b(p) - f(a(p), p)\, \mathsf{D}a(p), \ \forall p \in \langle c; d\rangle. \tag{17}$$

Пример 4. *Вычислим производную функции*

$$J\colon p \to \int\limits_{\sin p}^{\cos p} \exp\bigl(p\sqrt{1 - x^2}\,\bigr)\, dx, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to \exp\bigl(p\sqrt{1-x^2}\,\bigr),\ \forall x \in [\,-1;1],\ \forall p \in \mathbb{R},$$

и её частная производная

$$\partial_p f\colon (x,p) \to \sqrt{1-x^2}\,\exp\bigl(p\sqrt{1-x^2}\,\bigr),\ \forall x \in [\,-1;1],\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывны на множестве $G = [\,-1;1] \times \mathbb{R}$.

Тригонометрические функции

$$a\colon p \to \sin p,\ \forall p \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad b\colon p \to \cos p,\ \forall p \in \mathbb{R},$$

имеют общее множество значений $\mathrm{E}\sin = \mathrm{E}\cos = [\,-1;1]$ и являются непрерывно дифференцируемыми на поле $\mathbb{R}$.

Тогда, по теореме 2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), функция J непрерывно дифференцируема на поле $\mathbb{R}$.

Её производную найдём по формуле (11):

$$\mathsf{D}J(p) = \int\limits_{\sin p}^{\cos p} \sqrt{1-x^2}\,\exp\bigl(p\sqrt{1-x^2}\,\bigr)\,dx + \exp\bigl(p\sqrt{1-\cos^2 p}\,\bigr)\,\mathsf{D}\cos p \,-$$

$$-\exp\bigl(p\sqrt{1-\sin^2 p}\,\bigr)\,\mathsf{D}\sin p = \int\limits_{\sin p}^{\cos p} \sqrt{1-x^2}\,\exp\bigl(p\sqrt{1-x^2}\,\bigr)\,dx \,-$$

$$-\sin p\,\exp(p|\sin p|) - \cos p\,\exp(p|\cos p|),\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Пример 5. *Для функции*

$$g_n\colon x \to \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\,d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N}),$$

где функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, докажем, что

$$\mathsf{D}^n g_n(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При $n = 1$ функция

$$g_1 \colon x \to \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

заданная определённым интегралом с переменным верхним пределом и непрерывной подынтегральной функцией, является непрерывно дифференцируемой на поле $\mathbb{R}$ и её производная

$$\mathsf{D} g_1(x) = \mathsf{D} \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Функция

$$F_n \colon (\xi, x) \to (x - \xi)^{n-1} f(\xi), \ \forall \xi \in [\alpha; \beta], \ \forall x \in [\lambda; \nu], \ (n \in \mathbb{N})$$

и её частная производная

$$\partial_x F_n \colon (\xi, x) \to (n-1)\,(x - \xi)^{n-2} f(\xi), \ \forall \xi \in [\alpha; \beta], \ \forall x \in [\lambda; \nu],$$

непрерывны на прямоугольнике $\Pi = [\alpha; \beta] \times [\lambda; \nu]$, где

$$\alpha = \min\{\lambda, 0\}, \ \ \beta = \max\{\nu, 0\}.$$

Функции

$$a \colon x \to 0, \ \forall x \in [\lambda; \nu], \quad \text{и} \quad b \colon x \to x, \ \forall x \in [\lambda; \nu],$$

непрерывно дифференцируемы.

Тогда, по теореме 2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), сужение функции g_n непрерывно дифференцируемо на отрезке $[\lambda; \nu]$ и его производная

$$\mathsf{D} g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x (n-1)(x - \xi)^{n-2} f(\xi)\, d\xi + (x - x)^{n-1} f(x)\, \mathsf{D} x =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_0^x (x - \xi)^{n-2} f(\xi)\, d\xi, \ \forall x \in [\lambda; \nu], \ (n \in \mathbb{N}).$$

Применяя метод математической индукции, заключаем, что

$$\mathsf{D}^n\, g_n(x) = f(x),\ \forall x \in [\lambda; \nu],\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Отрезок $[\lambda; \nu]$ выбран произвольно, поэтому

$$\mathsf{D}^n\, g_n(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Пример 6. *Вычислим производную функции*

$$J\colon p \to \int\limits_0^{p^2} dq \int\limits_{q-p}^{q+p} \sin(x^2 + q^2 - p^2)\, dx,\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Функция

$$f\colon (q,p) \to \int\limits_{q-p}^{q+p} \sin(x^2 + q^2 - p^2)\, dx,\ \forall (q,p) \in \Pi,$$

в соответствии с теоремой 2.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметров) является непрерывной на $\Pi = \{(q,p)\colon 0 \leqslant q \leqslant B,\ \lambda \leqslant p \leqslant \nu\}$, где $B = \max\{\lambda^2, \nu^2\}$.

Действительно, функции

$$a\colon (q,p) \to q - p,\ \forall (q,p) \in \Pi, \quad \text{и} \quad b\colon (q,p) \to q + p,\ \forall (q,p) \in \Pi,$$

являющиеся пределами интегрирования, непрерывны, а подынтегральная функция

$$F\colon (x,q,p) \to \sin(x^2 + q^2 - p^2),\ \forall (x,q,p) \in \mathrm{T},$$

непрерывна на прямоугольном параллелепипеде

$$\mathrm{T} = \{(x,q,p)\colon \alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ 0 \leqslant q \leqslant B,\ \lambda \leqslant p \leqslant \nu\},$$

где

$$\alpha = \min_{\substack{0 \leqslant q \leqslant B \\ \lambda \leqslant p \leqslant \nu}} \{q-p, q+p\} = \min\{\lambda, -\nu\},\ \beta = \max_{\substack{0 \leqslant q \leqslant B \\ \lambda \leqslant p \leqslant \nu}} \{q-p, q+p\} =$$

$$= \max_{0 \leqslant q \leqslant B} \{q - \lambda, q + \nu\} = \max\{\lambda^2 - \lambda, \lambda^2 + \nu, \nu^2 - \lambda, \nu^2 + \nu\}.$$

При любом фиксированном $q \in [0; B]$ функции

$$\overset{*}{a}\colon p \to q - p,\ \forall p \in [\lambda; \nu], \quad \text{и} \quad \overset{*}{b}\colon p \to q + p,\ \forall p \in [\lambda; \nu],$$

дифференцируемы на отрезке $[\lambda; \nu]$, а функция

$$g\colon (x, p) \to \sin(x^2 + q^2 - p^2),\ \forall (x, p) \in G_q,$$

и её частная производная

$$\partial_p g\colon (x, p) \to\ -2p\cos(x^2 + q^2 - p^2),\ \forall (x, p) \in G_q,$$

непрерывны на прямоугольнике $G_q = \{(x, p)\colon \alpha_q \leqslant x \leqslant \beta_q,\ \lambda \leqslant p \leqslant \nu\}$, где $\alpha_q = \min\{q + \lambda, q - \nu\}$, $\beta_q = \max\{q + \nu, q - \lambda\}$.

Следовательно, по теореме 2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), при всяком фиксированном q из отрезка $[0; B]$ на прямоугольнике G_q производная

$$\partial_p f(q, p) =$$

$$= \ -2p \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx + \sin(x^2 + q^2 - p^2)\big|_{x=q+p}\, \partial_p(q + p) -$$

$$- \sin(x^2 + q^2 - p^2)\big|_{x=q-p}\, \partial_p(q - p) = \ -2p \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx +$$

$$+ \sin\bigl((q + p)^2 + q^2 - p^2\bigr) + \sin\bigl((q - p)^2 + q^2 - p^2\bigr) =$$

$$= \ -2p \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx + 2\sin 2q^2\, \cos 2qp,\ \forall p \in [\lambda; \nu].$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi\colon (q, p) \to \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx,\ \forall (q, p) \in \Pi.$$

Функции

$$a\colon (q,p) \to q - p,\ \forall (q,p) \in \Pi, \quad \text{и} \quad b\colon (q,p) \to q + p,\ \forall (q,p) \in \Pi,$$

являющиеся пределами интегрирования, и подынтегральная функция

$$\Phi\colon (x,q,p) \to \cos(x^2 + q^2 - p^2),\ \forall (x,q,p) \in \mathrm{T},$$

непрерывны. Поэтому в соответствии с теоремой 2.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметров) функция φ будет непрерывной.

Отсюда следует непрерывность функции

$$\partial_p f\colon (q,p) \to -2p \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx + 2\sin 2q^2 \cos 2qp,\ \forall (q,p) \in \Pi.$$

Итак, сужение функции J на отрезок $[\lambda;\nu]$

$$\overset{*}{J}\colon p \to \int\limits_{0}^{p^2} f(q,p)\, dq,\ \forall p \in [\lambda;\nu],$$

таково, что подынтегральная функция f и её частная производная $\partial_p f$ непрерывны на прямоугольнике Π.

Учитывая дифференцируемость сужения квадратичной функции $\widetilde{b}\colon p \to p^2,\ \forall p \in \mathbb{R}$, на отрезке $[\lambda;\nu]$, по теореме 2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра) находим производную

$$\mathsf{D}\overset{*}{J}(p) = \int\limits_{0}^{p^2} \partial_p f(q,p)\, dq + f(p^2,p)\, \mathsf{D}p^2 =$$

$$= -2p \int\limits_{0}^{p^2} dq \int\limits_{q-p}^{q+p} \cos(x^2 + q^2 - p^2)\, dx +$$

$$+\,2\int\limits_{0}^{p^2}\sin 2q^2\,\cos 2qp\,dq+2p\int\limits_{p^2-p}^{p^2+p}\sin(x^2+p^4-p^2)\,dx,\ \forall p\in[\lambda;\nu].$$

В силу произвольности выбора отрезка $[\lambda;\nu]$ заключаем, что

$$\mathrm{D}J\colon p\to\,-2p\int\limits_{0}^{p^2}dq\int\limits_{q-p}^{q+p}\cos(x^2+q^2-p^2)\,dx+2\int\limits_{0}^{p^2}\sin 2q^2\,\cos 2qp\,dq+$$

$$+\,2p\int\limits_{p^2-p}^{p^2+p}\sin(x^2+p^4-p^2)\,dx,\ \forall p\in\mathbb{R}.$$

Пример 7. *Найдём производную функции*

$$J\colon x\to\int\limits_{0}^{x}f(\xi+x,\xi-x)\,d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

при условии, что функция f *непрерывно дифференцируема на плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Производная

$$\partial_x f(\xi+x,\xi-x)=$$

$$=\partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}\ \partial_x(\xi+x)+\partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}\ \partial_x(\xi-x)=$$

$$=\partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}\ -\ \partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}\ ,\ \forall(\xi,x)\in\mathbb{R}^2,$$

является непрерывной функцией ввиду непрерывной дифференцируемости функции f на $\mathbb{R}^2$.

Сложная функция одной переменной

$$\Phi\colon \xi\to f(\xi+x,\xi-x),\ \forall\xi\in\mathbb{R},\ (x\in\mathbb{R})$$

дифференцируема, и её производная

$$\mathsf{D}\Phi(\xi) = \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} \mathsf{D}_\xi(\xi+x) + \partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} \mathsf{D}_\xi(\xi-x) =$$

$$= \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} + \partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}, \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ (x \in \mathbb{R}).$$

Поскольку

$$\partial_x f(\xi+x, \xi-x) = \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} - \partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}, \ \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2,$$

а при любом вещественном x

$$\mathsf{D}\Phi(\xi) = \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} + \partial_v f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}}, \ \forall \xi \in \mathbb{R},$$

то

$$\partial_x f(\xi+x, \xi-x) = 2\partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} - \mathsf{D}\,\Phi(\xi), \ \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Значит,

$$\int\limits_0^x \partial_x f(\xi+x, \xi-x)\, d\xi = 2\int\limits_0^x \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} d\xi - \int\limits_0^x \mathsf{D}\Phi(\xi)\, d\xi =$$

$$= 2\int\limits_0^x \partial_u f(u,v)\Big|_{\substack{u=\xi+x\\ v=\xi-x}} d\xi - f(2x, 0) + f(x, -x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

ибо

$$\int\limits_0^x \mathsf{D}\Phi(\xi)\, d\xi = \Big[\Phi(\xi)\Big]_0^x = \Big[f(\xi+x, \xi-x)\Big]_{\xi=0}^{\xi=x} =$$

$$= f(2x, 0) - f(x, -x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда, по теореме 2 о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция на

$$\Pi = \{(\xi, x)\colon \alpha \leqslant \xi \leqslant \beta,\ \lambda \leqslant x \leqslant \nu\},\ \alpha = \min\{\lambda, 0\},\ \beta = \max\{\nu, 0\},$$

и пределы интегрирования на отрезке $[\lambda; \nu]$ зависят от параметра, производная

$$\mathsf{D}J(x) = \int\limits_0^x \partial_x f(\xi + x, \xi - x)\, d\xi + f(\xi + x, \xi - x)\big|_{\xi = x} \mathsf{D}x =$$

$$= 2\int\limits_0^x \partial_u f(u, v)\Big|_{\substack{u = \xi + x \\ v = \xi - x}}\, d\xi - f(2x, 0) + f(x, -x) + f(2x, 0) =$$

$$= f(x, -x) + 2\int\limits_0^x \partial_u f(u, v)\Big|_{\substack{u = \xi + x \\ v = \xi - x}}\, d\xi,\ \forall x \in [\lambda; \nu].$$

Ввиду того, что отрезок $[\lambda; \nu]$ выбран произвольно, производная

$$\mathsf{D}J\colon x \to f(x, -x) + 2\int\limits_0^x \partial_u f(u, v)\Big|_{\substack{u = \xi + x \\ v = \xi - x}}\, d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Частным случаем теоремы 2 является следующая *теорема о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит.*

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon x \to f(x),\ \forall x \in \langle A; B\rangle,\ -\infty \leqslant A < B \leqslant +\infty,$$

является непрерывной;

2) *при* $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$ *функции*

$$a\colon p \to a(p),\ \forall p \in \langle c; d\rangle, \quad \textit{и} \quad b\colon p \to b(p),\ \forall p \in \langle c; d\rangle,$$

с множествами значений $\mathrm{E}a$ *и* $\mathrm{E}b$, *содержащимися в числовом промежутке* $\langle A; B\rangle$, *дифференцируемы* (*непрерывно дифференцируемы*).

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x)\,dx,\ \forall p \in \langle c; d\rangle,$$

дифференцируема (*непрерывно дифференцируема*) *и её производная*

$$\mathsf{D}J\colon p \to f(b(p))\,\mathsf{D}b(p) - f(a(p))\,\mathsf{D}a(p),\ \forall p \in \langle c; d\rangle. \qquad (18)$$

Теорема 3 устанавливает формулу вычисления производной определённого интеграла по параметру

$$\mathsf{D}\int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x)\,dx = f(b(p))\,\mathsf{D}b(p) - f(a(p))\,\mathsf{D}a(p),\ \forall p \in \langle c; d\rangle, \quad (19)$$

из которой следует формула дифференцирования определённого интеграла по переменному верхнему пределу

$$\mathsf{D}_p\int\limits_{a}^{p} f(x)\,dx = f(p),\ \forall p \in \langle c; d\rangle,\ (a \in \langle c; d\rangle), \qquad (20)$$

если функция f является непрерывной на числовом промежутке $\langle c; d\rangle$, $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.

Таким образом, частным случаем теоремы 3 является вторая теорема Барроу о непрерывной дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования и непрерывной подынтегральной функцией, по формуле (20).

С этой точки зрения, теорема 3 является *обобщённой теоремой Барроу*, а формула (19) — *обобщённой формулой Барроу* вычисления производной функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит.

Пример 8. *Вычислим вторую производную функции*

$$I\colon p\to \int\limits_a^b |x-p|\, f(x)\, dx,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

где функция f *непрерывна на отрезке* $[a;b]$.

Представим функцию I в виде

$$I\colon p\to \left[\begin{array}{l} -p\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\, dx+\int\limits_a^b x\, f(x)\, dx,\ \forall p\in(-\infty;a], \\ \displaystyle\int\limits_a^p (p-x)\, f(x)\, dx-\int\limits_p^b (p-x)\, f(x)\, dx,\ \forall p\in(a;b), \\ p\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\, dx-\int\limits_a^b x\, f(x)\, dx,\ \forall p\in[b;+\infty). \end{array}\right.$$

Сужения функции I на $(-\infty;a]$ и $[b;+\infty)$ являются сужениями линейных функций и по этой причине дифференцируемы.

На интервале $(a;b)$ сужение

$$I\colon p\to p\left(\int\limits_a^p f(x)\, dx+\int\limits_b^p f(x)\, dx\right)-\int\limits_a^p x\, f(x)\, dx-\int\limits_b^p x\, f(x)\, dx$$

в соответствии со второй теоремой Барроу (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования) непрерывно дифференцируемо и его производная

$$\mathsf{D}I(p)=\int\limits_a^p f(x)\, dx+\int\limits_b^p f(x)\, dx,\ \forall p\in(a;b).$$

Следовательно,

$$\mathsf{D}I\colon p \to \left[\begin{array}{l} -\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ \forall p \in (-\infty; a], \\ \int\limits_a^p f(x)\,dx + \int\limits_b^p f(x)\,dx,\ \forall p \in (a; b), \\ \int\limits_a^b f(x)\,dx,\ \forall p \in [b; +\infty), \end{array}\right.$$

при этом функция $\mathsf{D}I$ непрерывна на поле $\mathbb{R}$.

На числовых лучах $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$ сужения функции $\mathsf{D}I$ принимают постоянные значения. Поэтому

$$\mathsf{D}^2 I(p) = 0,\ \forall p \in (-\infty; a], \quad \text{и} \quad \mathsf{D}^2 I(p) = 0,\ \forall p \in [b; +\infty).$$

На интервале $(a; b)$, по второй теореме Барроу,

$$\mathsf{D}^2 I(p) = 2\,f(p),\ \forall p \in (a; b).$$

Итак, вторая производная

$$\mathsf{D}^2 I\colon p \to \left[\begin{array}{l} 0,\ \forall p \in (-\infty; a], \\ 2\,f(p),\ \forall p \in (a; b), \\ 0,\ \forall p \in [b; +\infty). \end{array}\right.$$

В точке $p = a$ левая производная

$$\mathsf{D}_-(\mathsf{D}I(p))\big|_{p=a} = 0,$$

правая производная

$$\mathsf{D}_+(\mathsf{D}I(p))\big|_{p=a} = 2\,f(a).$$

Если $f(a) = 0$, то $\mathsf{D}^2 I(a) = 0$.

В точке $p = b$ левая производная

$$\mathsf{D}_-(\mathsf{D}I(p))\big|_{p=b} = 2\,f(b),$$

правая производная

$$\mathsf{D}_+(\mathsf{D}I(p))\big|_{p=b} = 0.$$

Если $f(b)=0$, то $\mathsf{D}^2 I(b)=0$.

Пример 9. *Пусть*

$$f\colon x \to \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\,, \ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ 1 \ \ \textit{при} \ \ x = 0. \end{cases}$$

Докажем, что

$$\mathsf{D}^n f(x) = g_n(x), \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (n \in \mathbb{N}),$$

где

$$g_n\colon x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int\limits_0^x \xi^n \cos\Big(\xi + \dfrac{\pi n}{2}\Big)\, d\xi, \ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \\ \dfrac{\cos \dfrac{\pi n}{2}}{n+1} \ \ \textit{при} \ \ x = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

и что имеет место оценка

$$|\mathsf{D}^n f(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}\,, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (n \in \mathbb{N}).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $x \neq 0$. Доказательство проведём методом математической индукции.

Пусть $n=1$. У сужения функции f производная

$$\mathsf{D}f(x) = \mathsf{D}\,\frac{\sin x}{x} = \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}\,, \ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

У функции g_1 сужение

$$g_1(x) = \frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi \cos\Big(\xi + \frac{\pi}{2}\Big)\, d\xi = -\frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi \sin \xi \; d\xi = \frac{1}{x^2} \int\limits_0^x \xi \, d\cos \xi =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\Big[\xi\,\cos\xi\Big]_0^x - \int\limits_0^x \cos\xi\, d\xi\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Следовательно, при $n = 1$ имеет место формула

$$\mathsf{D} f(x) = g_1(x),\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Предположим, что при $n = k$ имеет место формула

$$\mathsf{D}^k f(x) = g_k(x),\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

и докажем, что

$$\mathsf{D}^{k+1} f(x) = g_{k+1}(x),\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Действительно, используя формулу (20), предусматриваемую второй теоремой Барроу, находим, что

$$\mathsf{D}^{k+1} f(x) = \mathsf{D}(\mathsf{D}^k f(x)) = \mathsf{D} g_k(x) =$$

$$= \mathsf{D}\left(\frac{1}{x^{k+1}}\int\limits_0^x \xi^k \cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi\right) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x \xi^k \cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{x^{k+1}}\,\mathsf{D}\int\limits_0^x \xi^k \cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi = \frac{1}{x}\,\cos\Big(x + \frac{\pi k}{2}\Big) -$$

$$- \frac{k+1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x \xi^k \cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi = \frac{1}{x}\,\cos\Big(x + \frac{\pi k}{2}\Big) -$$

$$- \frac{1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x \cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi^{k+1} = \frac{1}{x}\,\cos\Big(x + \frac{\pi k}{2}\Big) -$$

$$- \frac{1}{x^{k+2}}\left(\Big[\xi^{k+1}\cos\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\Big]_0^x + \int\limits_0^x \xi^{k+1}\sin\Big(\xi + \frac{\pi k}{2}\Big)\, d\xi\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^{k+2}} \int\limits_0^x \xi^{k+1} \sin\Bigl(\xi + \frac{\pi k}{2}\Bigr)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{x^{k+2}} \int\limits_0^x \xi^{k+1} \cos\Bigl(\xi + \frac{\pi(k+1)}{2}\Bigr)\, d\xi =$$

$$= g_{k+1}(x),\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Итак, имеет место формула

$$\mathsf{D}^n f(x) = g_n(x),\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Перейдём к случаю $x = 0$. Используя разложение функции синус в ряд Маклорена

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

устанавливаем, что частное

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,,\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\Big|_{x=0} = 1,$$

то получаем представление функции f степенным рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда n-я производная при нечётном n и любом x из $\mathbb{R}$

$$\mathsf{D}^{2l-1} f(x) = \sum_{k=l}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k\,(2k-1)\cdot \ldots \cdot \bigl(2k-(2l-2)\bigr)}{(2k+1)!}\, x^{2k-(2l-1)},$$

а при чётном n

$$\mathsf{D}^{2l} f(x) = \sum_{k=l}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{2k\,(2k-1)\cdot \ldots \cdot \big(2k-(2l-1)\big)}{(2k+1)!}\, x^{2k-2l},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому

$$\mathsf{D}^{2l-1} f(x)\big|_{x=0} = 0, \quad \text{а} \quad \mathsf{D}^{2l} f(x)\big|_{x=0} = \frac{(-1)^l}{2l+1}\,,\ l = 1, 2, \ldots .$$

Тогда можно считать, что

$$\mathsf{D}^{n} f(x)\big|_{x=0} = \frac{1}{n+1}\,\cos\frac{\pi n}{2}\,,\ n = 1, 2, \ldots,$$

доказав тем самым равенство

$$\mathsf{D}^{n} f(x)\big|_{x=0} = g_n(0),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Итак,

$$\mathsf{D}^{n} f(x) = g_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Для доказательства оценки рассмотрим в отдельности случаи, когда $x \neq 0$ и когда $x = 0$.

Если $x \neq 0$, то

$$\left| \frac{1}{x^{n+1}} \int\limits_0^x \xi^n \cos\Big(\xi + \frac{\pi n}{2}\Big)\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}} \int\limits_0^{|x|} \xi^n \Big|\cos\Big(\xi + \frac{\pi n}{2}\Big)\Big|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}} \int\limits_0^{|x|} \xi^n\, d\xi = \frac{1}{|x|^{n+1}}\, \Big[\xi^{n+1}\Big]_0^{|x|} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,,$$

$$\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Если $x = 0$, то

$$\big|\mathsf{D}^{n} f(0)\big| = \frac{1}{n+1}\,\Big|\cos\frac{\pi n}{2}\Big| \leqslant \frac{1}{n+1}\,,\ n = 1, 2, \ldots . \blacksquare$$

Пример 10. *Пусть функция* $f\colon x \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *дважды дифференцируема, а функция* $g\colon x \to g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *дифференцируема. Докажем, что функция*

$$u\colon (x,t) \to \frac{1}{2}\big(f(x-at)+f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi,$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ (a>0)$$

является решением уравнения колебания струны

$$\partial_{tt}u - a^2\partial_{xx}u = 0$$

с начальными условиями:

$$u(x,0)=f(x),\ \ \partial_t u(x,t)_{|t=0}=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Непрерывность функции g на поле $\mathbb{R}$ позволяет при дифференцировании определённого интеграла, у которого пределы интегрирования зависят от параметров, использовать обобщённую формулу Барроу (19).

Тогда для всех (x,t) из $\mathbb{R}^2$

$$\partial_x u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\partial_x f(x-at)+\partial_x f(x+at)\big)+\frac{1}{2a}\big(g(x+at)-g(x-at)\big),$$

$$\partial_t u(x,t)=\frac{a}{2}\big(\partial_t f(x+at)-\partial_t f(x-at)\big)+\frac{1}{2}\big(g(x+at)+g(x-at)\big),$$

$$\partial_{xx}u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\partial_{xx}f(x-at)+\partial_{xx}f(x+at)\big)+$$

$$+\frac{1}{2a}\big(\partial_x g(x+at)-\partial_x g(x-at)\big),$$

$$\partial_{tt}u(x,t)=\frac{a^2}{2}\big(\partial_{tt}f(x+at)+\partial_{tt}f(x-at)\big)+$$

$$+\frac{a}{2}\big(\partial_t g(x+at)-\partial_t g(x-at)\big).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что u удовлетворяет уравнению колебания струны, а также начальным условиям. ■

Пример 11. *Вычислим вторую производную функции*

$$y\colon x \to \int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(\xi+\zeta+x)\,d\zeta,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (h \in \mathbb{R}),$$

если функция $f\colon x \to f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$ *непрерывна.*

Поскольку функция f непрерывна, то согласно теореме о замене переменной в определённом интеграле получаем формулу

$$\int\limits_a^b f(t+c)\,dt = \int\limits_{a+c}^{b+c} f(t)\,dt \quad (a, b, c \in \mathbb{R}),$$

которую будем неоднократно использовать без специальных оговорок.

Данную функцию представим в виде

$$y\colon x \to \int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\zeta)\,d\zeta,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (h \in \mathbb{R}).$$

Функция

$$g\colon x \to \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\zeta)\,d\zeta,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (h, \xi \in \mathbb{R}),$$

по теореме 3 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит), ввиду непрерывности функции f и непрерывной дифференцируемости функций

$$a\colon x \to x+\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad b\colon x \to x+\xi+h,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (h, \xi \in \mathbb{R})$$

является непрерывно дифференцируемой, и её производная

$$\mathsf{D}g(x) = \mathsf{D}_x \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= f(x+\xi+h)\,\mathsf{D}_x(x+\xi+h) - f(x+\xi)\,\mathsf{D}_x(x+\xi) =$$

$$= f(x+\xi+h) - f(x+\xi),\ \forall x\in\mathbb{R},\ (h,\xi\in\mathbb{R}).$$

Отсюда следует, что функция

$$r\colon (\xi,x)\to \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\zeta)\,d\zeta,\ \forall \xi\in[\alpha;\beta],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

и её частная производная

$$\partial_x r\colon (\xi,x)\to f(\xi+x+h) - f(\xi+x),\ \forall \xi\in[\alpha;\beta],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

где $\alpha=0,\ \beta=h$ при $h\geqslant 0$ и $\alpha=h,\ \beta=0$ при $h<0$, непрерывны на полосе $\Pi=[\alpha;\beta]\times\mathbb{R}$.

По теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция

$$y\colon x\to \int\limits_0^h r(\xi,x)\,d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (h\in\mathbb{R})$$

непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}y\colon x\to \int\limits_0^h \big(f(\xi+x+h) - f(\xi+x)\big)\,d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (h\in\mathbb{R}).$$

Используя формулу Барроу (20), находим вторую производную

$$\mathsf{D}^2 y(x) = \mathsf{D}_x \int\limits_0^h \big(f(\xi+x+h) - f(\xi+x)\big)\,d\xi =$$

$$= \mathsf{D}_x \int\limits_0^h f(\xi+x+h)\,d\xi - \mathsf{D}_x \int\limits_0^h f(\xi+x)\,d\xi =$$

$$= \mathsf{D}_x \int\limits_{x+h}^{x+2h} f(\xi)\, d\xi - \mathsf{D}_x \int\limits_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \big(f(x+2h)\,\mathsf{D}_x(x+2h) - f(x+h)\,\mathsf{D}_x(x+h)\big) -$$

$$- \big(f(x+h)\,\mathsf{D}_x(x+h) - f(x)\,\mathsf{D}x\big) =$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ (h \in \mathbb{R}).$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*:

1) *функции*

$$a\colon p \to a(p),\ \forall p \in [c;d], \ \ и \ \ b\colon p \to b(p),\ \forall p \in [c;d],$$

непрерывны (*непрерывно дифференцируемы*);

2) $a(p) \leqslant b(p),\ \forall p \in [c;d]$;

3) *функция* $f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall (x,p) \in K$, *и её частная производная* $\partial_p f\colon (x,p) \to \partial_p f(x,p),\ \forall (x,p) \in K$, *непрерывны на компакте* $K = \{(x,p)\colon a(p) \leqslant x \leqslant b(p),\ c \leqslant p \leqslant d\}$.

Тогда заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция

$$J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\, dx,\ \forall p \in [c;d], \tag{21}$$

дифференцируема (*непрерывно дифференцируема*) *и*

$$\begin{gathered}\mathsf{D}J\colon p \to \int\limits_{a(p)}^{b(p)} \partial_p f(x,p)\, dx + f(b(p),p)\,\mathsf{D}b(p) - \\ - f(a(p),p)\,\mathsf{D}a(p),\ \forall p \in [c;d],\end{gathered} \tag{22}$$

то есть, имеет место формула дифференцирования определённого интеграла по параметру

$$\mathsf{D}\int\limits_{a(p)}^{b(p)} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a(p)}^{b(p)} \partial_p f(x,p)\,dx + f(b(p),p)\,\mathsf{D}b(p) - \\ - f(a(p),p)\,\mathsf{D}a(p),\ \forall p\in[c;d]. \tag{23}$$

Доказательство проведём в случае, когда функции a, b и f являются непрерывно дифференцируемыми.

Как и в случае теоремы 3.3.1, выполним замену переменной x на переменную ζ по формуле

$$x = a(p) + \big(b(p) - a(p)\big)\zeta,\ \forall \zeta\in[0;1],$$

при которой функция (21) получит задание

$$J\colon p \to \int\limits_0^1 g(\zeta,p)\,d\zeta,\ \forall p\in[c;d], \tag{24}$$

где при любом $\zeta\in[0;1]$ и любом $p\in[c;d]$

$$g(\zeta,p) = f\big(a(p) + \big(b(p)-a(p)\big)\zeta,\ p\big)\big(b(p)-a(p)\big).$$

При выполнении условий теоремы функция g и её частная производная

$$\partial_p g(\zeta,p) =$$

$$= \partial_x f(x,v)\Big|_{\substack{x=x(\zeta,p)\\ v=p}} \big(\mathsf{D}a(p) + \zeta\,\mathsf{D}\big(b(p)-a(p)\big)\big)\big(b(p)-a(p)\big) +$$

$$+ \partial_v f(x,v)\Big|_{\substack{x=x(\zeta,p)\\ v=p}} \big(b(p)-a(p)\big) + f(x(\zeta,p),p)\,\mathsf{D}\big(b(p)-a(p)\big),$$

где

$$x(\zeta,p) = a(p) + \big(b(p)-a(p)\big)\zeta,\ \forall\zeta\in[0;1],\ \forall p\in[c;d],$$

непрерывны на прямоугольнике $\Pi = [0;1]\times[c;d]$.

Тогда, по теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция (24) непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}J(p) = \int\limits_0^1 \partial_p g(\zeta, p)\, d\zeta = \int\limits_0^1 \partial_v f(x, v)\Big|_{\substack{x = x(\zeta, p) \\ v = p}} \big(b(p) - a(p)\big)\, d\zeta +$$

$$+ \mathsf{D}a(p) \int\limits_0^1 \partial_x f(x, v)\Big|_{\substack{x = x(\zeta, p) \\ v = p}} \big(b(p) - a(p)\big)\, d\zeta +$$

$$+ \mathsf{D}\big(b(p) - a(p)\big)\Bigg(\int\limits_0^1 f(x(\zeta, p), p)\, d\zeta +$$

$$+ \big(b(p) - a(p)\big) \int\limits_0^1 \zeta\, \partial_x f(x, v)\Big|_{\substack{x = x(\zeta, p) \\ v = p}} d\zeta \Bigg) =$$

$$= \int\limits_0^1 \partial_v f(x(\zeta, p), v)\big|_{v = p}\; dx(\zeta, p) +$$

$$+ \mathsf{D}a(p) \int\limits_0^1 \partial_x f(x, v)\Big|_{\substack{x = x(\zeta, p) \\ v = p}} dx(\zeta, p)\; +$$

$$+ \mathsf{D}\big(b(p) - a(p)\big)\Bigg(\Big[\zeta f(x(\zeta, p), p)\Big]_{\zeta = 0}^{\zeta = 1} -$$

$$- \int\limits_0^1 \zeta\, \partial_x f(x, v)\Big|_{\substack{x = x(\zeta, p) \\ v = p}} \partial_\zeta x(\zeta, p)\, d\zeta +$$

$$+\big(b(p)-a(p)\big)\int\limits_0^1 \zeta\,\partial_x f(x,v)\Big|_{\substack{x=x(\zeta,p)\\ v=p}}\,d\zeta\Bigg)=$$

$$=\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\partial_p f(x,p)\,dx+\mathsf{D}a(p)\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\partial_x f(x,p)\,dx+$$

$$+\mathsf{D}\big(b(p)-a(p)\big)f(b(p),p)=\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\partial_p f(x,p)\,dx\ +$$

$$+\mathsf{D}a(p)\Big[f(x,p)\Big]_{x=a(p)}^{x=b(p)}+\mathsf{D}\big(b(p)-a(p)\big)f(b(p),p)=$$

$$=\int\limits_{a(p)}^{b(p)}\partial_p f(x,p)\,dx+f(b(p),p)\,\mathsf{D}b(p)-f(a(p),p))\,\mathsf{D}a(p)$$

при любом p из отрезка $[c;d]$. ■

Пример 12. *Пусть дана функция*

$$J\colon x\to\int\limits_0^x\frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta,$$

где функция φ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[0;a]$. *Докажем, что*

$$\mathsf{D}\int\limits_0^x\frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}}+\int\limits_0^x\frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta,\ \forall x\in(0;a).$$

Интеграл

$$K(x,\delta)=\int\limits_0^{x-\delta}\frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta$$

ввиду непрерывности функции φ на отрезке $[0;a]$ при любом фиксированном δ из полуинтервала $(0;x]$ и любом фиксированном x из полуинтервала $(0;a]$ является определённым.

Поэтому при каждом фиксированном x из $(0;a]$ интеграл

$$J(x)=\int\limits_0^{x}\frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta$$

является несобственным второго рода на полуинтервале $[0;x)$.

Поскольку

$$\frac{|\varphi(\zeta)|}{\sqrt{x-\zeta}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x-\zeta}}\right)\ \text{ при }\ \zeta\to x-0,$$

то, по предельному признаку сравнения, несобственный интеграл второго рода интеграл J на полуинтервале $[0;x)$ абсолютно сходится при любом фиксированном x из полуинтервала $(0;a]$.

Поэтому

$$K(x,0)=J(x),\ \forall x\in(0;a),$$

и надо доказать, что

$$\partial_x K(x,0)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}}+\int\limits_0^{x}\frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta,\ \forall x\in(0;a).$$

Сначала вычислим частную производную $\partial_x K$ функции

$$K\colon (x,\delta)\to K(x,\delta),\ \forall (x,\delta)\in S,\ \ S=\{(x,\delta)\colon 0<\delta\leqslant x\leqslant a\}.$$

С помощью замены переменной ζ на переменную t по формуле

$$\zeta=\,-t+x,\ \forall t\in[\delta;x],$$

функцию K представим в виде

$$K\colon (x,\delta)\to \int\limits_{\delta}^{x} \frac{\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,dt,\ \forall (x,\delta)\in S.$$

Подынтегральная функция

$$F\colon (x,t)\to \frac{\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,,\ \forall x\in[\delta,a],\ \forall t\in[\delta;x],\ (\delta>0)$$

и её частная производная

$$\partial_x F\colon (x,t)\to \frac{\partial_x\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,,\ \forall x\in[\delta,a],\ \forall t\in[\delta;x],\ (\delta>0)$$

ввиду непрерывной дифференцируемости функции φ на отрезке $[0;a]$ являются непрерывными на треугольнике

$$T=\{(x,t)\colon 0<\delta\leqslant x\leqslant a,\ 0<\delta\leqslant t\leqslant x\}.$$

Пределами интегрирования являются непрерывно дифференцируемые функции

$$a\colon x\to\delta,\ \forall x\in[\delta;a],\quad \text{и}\quad b\colon x\to x,\ \forall x\in[\delta;a].$$

Стало быть, по теореме 4 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), производная

$$\partial_x K(x,\delta)=\int\limits_{\delta}^{x}\frac{\partial_x\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,dt+\frac{\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\Big|_{x=t}\mathsf{D}x=$$

$$=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}}+\int\limits_{\delta}^{x}\frac{\partial_x\varphi(x-t)}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}}+\int\limits_{0}^{x-\delta}\frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta,\ \forall (x,\delta)\in S.$$

Интеграл

$$\Lambda(x,\delta)=\int\limits_{0}^{x-\delta}\frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\,d\zeta$$

ввиду непрерывности функции $\mathsf{D}\varphi$ на отрезке $[0;a]$ при любом фиксированном δ из полуинтервала $(0;x]$ и любом фиксированном x из полуинтервала $(0;a]$ является определённым.

Поэтому при каждом фиксированном x из $(0;a]$ интеграл

$$L(x) = \int\limits_0^x \frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\, d\zeta$$

является несобственным второго рода на полуинтервале $[0;x)$.

Поскольку

$$\frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x-\zeta}}\right) \ \text{ при } \ \zeta \to x-0,$$

то, по предельному признаку сравнения, несобственный интеграл второго рода L на полуинтервале $[0;x)$ абсолютно сходится при любом фиксированном x из полуинтервала $(0;a]$.

Поэтому

$$\Lambda(x,0) = L(x), \ \forall x \in (0;a).$$

Следовательно, из того, что

$$\partial_x K(x,\delta) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{x}} + \int\limits_0^{x-\delta} \frac{\mathsf{D}\varphi(\zeta)}{\sqrt{x-\zeta}}\, d\zeta, \ \forall (x,\delta) \in S,$$

получаем доказываемую формулу. ■

1.3. Применение теории дифференцирования определённых интегралов, зависящих от параметров, при вычислении интегралов

Иногда можно получить точное значение определённого интеграла, используя теорию дифференцирования интегралов I и J, зависящих от параметров.

Особое значение этот метод преобретает в случаях, когда подынтегральная функция не имеет первообразной, выраженной через элементарные функции, то есть, когда непосредственное использование формулы Ньютона — Лейбница не представляется возможным.

Рассмотрим этот подход на примерах.

Пример 13. *Вычислим интеграл*

$$I(p)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\bigl(p^2-\sin^2 x\bigr)\,dx \quad \textit{при} \quad p>1.$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p)\to \ln\bigl(p^2-\sin^2 x\bigr),\ \forall x\in\Bigl[0;\frac{\pi}{2}\Bigr],\ \forall p\in(1;\,+\infty),$$

и её частная производная

$$\partial_p f\colon (x,p)\to \frac{2p}{p^2-\sin^2 x}\,,\ \forall x\in\Bigl[0;\frac{\pi}{2}\Bigr],\ \forall p\in(1;\,+\infty),$$

непрерывны.

По теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования) находим производную

$$\mathsf{D}I(p)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p}{p^2-\sin^2 x}\,dx,\ \forall p\in(1;\,+\infty).$$

Подстановкой

$$\operatorname{tg} x=t,\ \forall t\in[0;\,+\infty),$$

при которой

$$dx=\frac{dt}{t^2+1}\,,\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{t^2+1}\,,\quad \frac{1}{p^2-\sin^2 x}=\frac{t^2+1}{p^2+(p^2-1)t^2}\,,$$

преобразовываем интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p}{p^2-\sin^2 x}\,dx=2p\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{p^2+(p^2-1)\,t^2}=\frac{2p}{p^2-1}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\dfrac{p^2}{p^2-1}+t^2}=$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p^2-1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\, t \right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}}\,,\ \forall p \in (1;\, +\infty).$$

Стало быть, производная

$$\mathsf{D}I\colon p \to \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}}\,,\ \forall p \in (1;\, +\infty).$$

Отсюда интегрированием по p получаем, что

$$I(p) = \int \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}}\, dp = \pi \ln\bigl(p + \sqrt{p^2-1}\,\bigr) + C,\ \forall p \in (1;\, +\infty).$$

где C — некоторая постоянная, которую надо найти.

Интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\biggl(p^2\Bigl(1 - \frac{\sin^2 x}{p^2}\Bigr)\biggr)\, dx = \pi \ln p + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Bigl(1 - \frac{\sin^2 x}{p^2}\Bigr)\, dx,$$
$$\forall p \in (1;\, +\infty).$$

Тогда

$$C = I(p) - \pi \ln\bigl(p + \sqrt{p^2-1}\,\bigr) = \pi \ln p -$$
$$- \pi \ln\bigl(p + \sqrt{p^2-1}\,\bigr) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Bigl(1 - \frac{1}{p^2}\sin^2 x\Bigr)\, dx,\ \forall p \in (1;\, +\infty).$$

Рассмотрим определённый интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Bigl(1 - \frac{1}{p^2}\sin^2 x\Bigr)\, dx,\ \forall p \in (1;\, +\infty),$$

у которого подынтегральная функция при $p \to +\infty$ равномерно сходится на отрезке $\Bigl[0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr]$.

Действительно (в соответствии с определением 1.3.1.1),

$$\sup_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left|\ln\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\,\sin^2 x\Bigr)\right| = \left|\ln\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\Bigr)\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Тогда, по теореме 1.2.1 (о предельном переходе под знаком определённого интеграла), предел

$$\lim_{p\to+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\,\sin^2 x\Bigr)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{p\to+\infty}\ln\Bigl(1-\frac{1}{p^2}\,\sin^2 x\Bigr)\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$C = \lim_{p\to+\infty}\Bigl(\pi\ln p - \pi\ln\bigl(p+\sqrt{p^2-1}\,\bigr)\Bigr) =$$

$$= -\pi\lim_{p\to+\infty}\ln\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{p} = -\pi\ln 2.$$

В итоге получаем, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(p^2-\sin^2 x)\,dx = \pi\ln\bigl(p+\sqrt{p^2-1}\bigr) - \pi\ln 2 =$$

$$= \pi\ln\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{2}\,,\ \forall p\in(1;\,+\infty).$$

Пример 14. *Вычислим интеграл*

$$I(p) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\bigl(p^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x\bigr)\,dx \quad \textit{при} \quad pq\neq 0.$$

Пусть $p>0,\ q>0.$ Рассмотрим функцию

$$I\colon \zeta\to\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\bigl(\zeta^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x\bigr)\,dx,\ \forall\zeta\in(0;\,+\infty),\ (q>0),$$

которая задана определённым интегралом , зависящим от параметра.

При $q > 0$ подынтегральная функция

$$f\colon (x,\zeta) \to \ln\bigl(\zeta^2 \sin^2 x + q^2 \cos^2 x\bigr)\, dx,\ \forall x \in \Bigl[0;\, \frac{\pi}{2}\Bigr],\ \forall \zeta \in (0;\, +\infty),$$

и её частная производная

$$\partial_\zeta f\colon (x,\zeta) \to \frac{2\zeta \sin^2 x}{\zeta^2 \sin^2 x + q^2 \cos^2 x}\,,\ \forall x \in \Bigl[0;\, \frac{\pi}{2}\Bigr],\ \forall \zeta \in (0;\, +\infty),$$

непрерывны.

Тогда, по теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция I непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}I\colon \zeta \to \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\zeta \sin^2 x}{\zeta^2 \sin^2 x + q^2 \cos^2 x}\, dx,\ \forall \zeta \in (0;\, +\infty),\ (q > 0).$$

Для вычисления определённого интеграла

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\zeta^2 \sin^2 x + q^2 \cos^2 x}\, dx \quad (\zeta > 0, q > 0, \zeta \neq q)$$

выполним подстановку

$$\operatorname{ctg} x = t,\ \forall t \in [0;\, +\infty),$$

при которой

$$dt = -\,\frac{dx}{\sin^2 x}\,, \quad \frac{\sin^2 x}{\zeta^2 \sin^2 x + q^2 \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(\zeta^2 + q^2 \operatorname{ctg}^2 x)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{(\zeta^2 + q^2 \operatorname{ctg}^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{(\zeta^2 + q^2 t^2)(1 + t^2)}\,,\ \forall x \in \Bigl(0;\, \frac{\pi}{2}\Bigr],\ \forall t \in [0;\, +\infty),$$

переменная $t=0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$, а при $x\to 0$ переменная $t\to +\infty$.

Тогда при $\zeta>0,\ q>0,\ \zeta\ne q$ интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\zeta^2\sin^2 x+q^2\cos^2 x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(\zeta^2+q^2t^2)(1+t^2)}\,.$$

Неопределённый интеграл от рациональной функции

$$\int\frac{dt}{(\zeta^2+q^2t^2)(1+t^2)}\,dx=\frac{q^2}{q^2-\zeta^2}\int\frac{dt}{\zeta^2+q^2t^2}-\frac{1}{q^2-\zeta^2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{q}{\zeta(q^2-\zeta^2)}\ \operatorname{arctg}\frac{qt}{\zeta}-\frac{1}{q^2-\zeta^2}\ \operatorname{arctg} t+C,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Предел

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{q}{\zeta(q^2-\zeta^2)}\ \operatorname{arctg}\frac{qt}{\zeta}-\frac{1}{q^2-\zeta^2}\ \operatorname{arctg} t\right)=$$

$$=\frac{\pi\, q}{2\zeta(q^2-\zeta^2)}-\frac{\pi}{2(q^2-\zeta^2)}=$$

$$=\frac{\pi}{2(q^2-\zeta^2)}\left(\frac{q}{\zeta}-1\right)=\frac{\pi}{2\zeta(q+\zeta)}\,.$$

Поэтому несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(\zeta^2+q^2t^2)(1+t^2)}=\frac{\pi}{2\zeta(q+\zeta)}\quad (q>0,\ \zeta>0,\ \zeta\ne q),$$

а значит, производная

$$\mathsf{D}I\colon \zeta\to\frac{\pi}{q+\zeta}\,,\ \forall\zeta\in(0;q)\cup(q;\,+\infty).$$

Если $\zeta=q$, то

$$\mathsf{D}I(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2q\sin^2 x}{q^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}\, dx = \frac{2}{q}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \frac{2}{q}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2q} \quad (q > 0).$$

Поэтому производная

$$\mathsf{D}I\colon \zeta \to \frac{\pi}{q+\zeta}\,,\ \forall \zeta \in (0;\,+\infty),\ (q>0).$$

Отсюда интегрированием по ζ находим, что

$$I(\zeta) = \int \frac{\pi}{q+\zeta}\, d\zeta = \pi\ln(\zeta+q) + C,\ \forall\zeta\in(0;\,+\infty),\ (q>0),$$

где C — некоторая постоянная, которую надо найти.
Из задания функции I находим её значение при $\zeta = q$

$$I(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(q^2\sin^2 x + q^2\cos^2 x)\, dx = \pi\ln q \ \ (q>0).$$

Значит, постоянная C должна быть такой, что

$$\big(\pi\ln(\zeta+q)+C\big)_{|\zeta=q} = \pi\ln q,$$

то есть, $C = -\pi\ln 2$.
Следовательно, при $q > 0$

$$I(\zeta) = \pi\ln(\zeta+q) - \pi\ln 2,\ \forall\zeta\in(0;\,+\infty).$$

А значит,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(p^2\sin^2 x + q^2\cos^2 x)\, dx = \pi\ln\frac{|p|+|q|}{2} \quad (pq\neq 0).$$

Пример 15. *Вычислим интеграл*

$$I(p) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + p\cos x}{1 - p\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (- 1 < p < 1).$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (x, p) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\cos x}\, \ln \dfrac{1 + p\cos x}{1 - p\cos x}\,, \ \forall x \in \Bigl[0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr), \ \forall p \in (- 1; 1), \\[2ex] 2p, \ \forall p \in (- 1; 1) \ \text{при} \ x = \dfrac{\pi}{2}\,, \end{array}\right.$$

если учесть, что

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \Bigl(\frac{1}{\cos x}\, \ln \frac{1 + p\cos x}{1 - p\cos x}\Bigr) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{(1 - p\cos x)\bigl(p\sin x(1 - p\cos x) + p\sin x(1 + p\cos x)\bigr)}{\sin x(1 + p\cos x)(1 - p\cos x)^2} =$$

$$= 2p \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{1}{1 - p\cos x} = 2p \quad (- 1 < p < 1),$$

и её частная производная

$$\partial_p f\colon (x, p) \to \frac{2}{1 - p^2\cos^2 x}\,, \ \forall x \in \Bigl[0; \frac{\pi}{2}\Bigr], \ \forall p \in (- 1; 1),$$

непрерывны.

Тогда, по теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), производная

$$\mathsf{D}I(p) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - p^2\cos^2 x}\,, \ \forall p \in (- 1; 1).$$

Подстановкой

$$\operatorname{tg} x = t,\ \forall t \in [0;\,+\infty),$$

при которой

$$dx = \frac{dt}{t^2+1}\,,\quad \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}\,,\quad \frac{1}{1-p^2\cos^2 x} = \frac{t^2+1}{(1-p^2)+t^2}\,,$$

преобразовываем интеграл

$$\mathsf{D}I(p) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-p^2)+t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1-p^2}}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}}\,,\ \forall p \in (\,-1;1).$$

Интегрируя по переменной p, получаем, что

$$I(p) = \pi\int \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \pi\arcsin p + C,\ \forall p \in (\,-1;1),$$

где C — некоторая постоянная, которую надо найти.

Из задания находим, что $I(0)=0.$

Следовательно, $\pi\arcsin 0 + C = 0,$ то есть, $C=0.$

Значит, интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+p\,\cos x}{1-p\,\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x} = \pi\arcsin p \quad (\,-1<p<1).$$

Пример 16. *Вычислим интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx \quad (a\in\mathbb{R}).$$

Пусть $a>0.$ Тогда функция

$$f\colon (x,a) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,,\ \forall x \in \Bigl(0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr),\ \forall a \in (0;\,+\infty), \\ a,\ \forall a \in (0;\,+\infty),\ \text{ при } x = 0, \\ 0,\ \forall a \in (0;\,+\infty),\ \text{ при } x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

и её частная производная

$$\partial_a f\colon (x,a) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}\,,\ \forall x \in \Bigl[0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr),\ \forall a \in (0;\,+\infty), \\ 0,\ \forall a \in (0;\,+\infty),\ \text{ при } x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

непрерывны. Тогда, по теореме 1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), производная

$$\mathsf{D}I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}\,,\ \forall a \in (0;\,+\infty).$$

Используя подстановку

$$\operatorname{tg} x = t,\ \forall t \in [0;\,+\infty),$$

при которой $dx = \dfrac{dt}{t^2+1}$, получаем, что

$$\mathsf{D}I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{1}{1-a^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{a^2-1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+a^2t^2} = \frac{1}{1-a^2} \Bigl[\operatorname{arctg} t\Bigr]_0^{+\infty} + \frac{a}{a^2-1} \Bigl[\operatorname{arctg} at\Bigr]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2(1-a^2)} + \frac{\pi a}{2(a^2-1)} = \frac{\pi}{2(a+1)}\,,\ \forall a \in (0;1) \cup (1;\,+\infty).$$

Если $a=1$, то

$$\mathsf{D}I(1)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\Big[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Стало быть, производная

$$\mathsf{D}I\colon a\to\frac{\pi}{2(a+1)}\,,\ \forall a\in(0;\,+\infty).$$

Интегрируя по переменной a, получаем, что

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{da}{a+1}=\frac{\pi}{2}\,\ln(a+1)+C,\ \forall a\in(0;\,+\infty),$$

где C — некоторая постоянная, которую надо найти.

У функции

$$f\colon (x,a)\to f(x,a),\ \forall (x,a)\in P,\ P=\Big[0;\frac{\pi}{2}\Big]\times(0;\,+\infty),$$

на множестве $\widehat{P}=\Big[0;\frac{\pi}{2}\Big]\times[0;\,+\infty)$ непрерывное продолжение

$$\widehat{f}\colon (x,a)\to\left[\begin{array}{l} f(x,a),\ \forall (x,a)\in P,\\[2mm] 0,\ \forall x\in\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big],\ \text{при}\ a=0.\end{array}\right.$$

Поэтому сужение функции $I\colon a\to I(a),\ \forall a\in\mathbb{R}$, на неотрицательный числовой луч $[0;\,+\infty)$ есть непрерывная функция

$$\widehat{I}\colon a\to I(a),\ \forall a\in[0;\,+\infty).$$

Это устанавливается по теореме 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования).

Следовательно, правосторонний предел

$$\lim_{a\to+0} I(a)=I(0),$$

то есть,

$$\lim_{a\to+0}\left(\frac{\pi}{2}\,\ln(a+1)+C\right)=I(0).$$

Значит, $C=I(0)$. Но $I(0)=0$, поэтому $C=0$.
Итак,

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\,\ln(a+1),\ \forall a\in[0;\,+\infty).$$

Учитывая, что

$$I(a)=\operatorname{sgn}a\,I(|a|),\ \forall a\in\mathbb{R},$$

получаем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\,\ln(|a|+1).$$

Пример 17. *Вычислим интеграл*

$$I(a)=\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx\quad(a\in\mathbb{R}).$$

Подынтегральная функция определена при

$$1-2a\cos x+a^2>0\iff(a-\cos x)^2+\sin^2x>0.$$

При $0\leqslant x\leqslant\pi$ равенства $\sin x=0$ и $\cos x=a$ одновременно выполняются в двух случаях, когда $x=0$ при $a=1$ и когда $x=\pi$ при $a=-1$.

Поэтому при $a=-1$ интеграл I является несобственным второго рода на полуинтервале $[0;\pi)$, при $a=1$ интеграл I является несобственным второго рода на полуинтервале $(0;\pi]$, а при любом a из множества $(-\infty;\,-1)\cup(-1;1)\cup(1;\,+\infty)$ интеграл I является определённым.

Несобственные интегралы второго рода

$$I(1)=\int\limits_0^{\pi}\ln\bigl(2(1-\cos x)\bigr)\,dx=\int\limits_0^{\pi}\ln\Bigl(4\,\frac{1-\cos x}{2}\Bigr)\,dx=$$

$$= 2\pi \ln 2 + \int\limits_0^{\pi} \ln \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = 2\pi \ln 2 + 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt,$$

$$I(-1) = \int\limits_0^{\pi} \ln\bigl(2(1+\cos x)\bigr)\, dx = \int\limits_0^{\pi} \ln\Bigl(4\,\frac{1+\cos x}{2}\Bigr)\, dx =$$

$$= 2\pi \ln 2 + \int\limits_0^{\pi} \ln \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = 2\pi \ln 2 + 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t\, dt.$$

Если учесть, что интегралы Эйлера

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t\, dt = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2,$$

то получим: $I(-1) = I(1) = 0$.

Перейдём к вычислению определённых интегралов с параметром

$$I_i(a) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx,\ \forall x \in J_i,\ i = \overline{1,3}\,,$$

где $J_1 = (-\infty;\ -1),\ J_2 = (-1; 1),\ J_3 = (1;\ +\infty)$.

Подынтегральные функции

$$f_i\colon (x,a) \to \ln(1 - 2a\cos x + a^2),\ \forall x \in [0;\pi],\ \forall a \in J_i,\ i = \overline{1,3}\,,$$

и их частные производные

$$\partial_a f_i\colon (x,a) \to \frac{2(a - \cos x)}{1 - 2a\cos x + a^2}\,,\ \forall x \in [0;\pi],\ \forall a \in J_i,\ i = \overline{1,3}\,,$$

непрерывны на множествах $P_i = [0;\pi] \times J_i,\ i = \overline{1,3}$.

Тогда, по теореме 1 (о дифференцировании функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра, с постоянными пределами интегрирования), производные

$$\mathsf{D}I_i\colon a \to 2\int\limits_0^{\pi} \frac{a-\cos x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx,\ \forall a \in J_i,\ i=\overline{1,3}\,.$$

Универсальной подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \zeta,\ \forall \zeta \in [0;\,+\infty),$$

при которой

$$dx = \frac{2}{1+\zeta^2}\,d\zeta, \quad \cos x = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\,,$$

$$\frac{a-\cos x}{1-2a\cos x + a^2} = \frac{(a-1)+(a+1)\zeta^2}{(a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2}\,,$$

преобразовываем интегралы

$$\mathsf{D}I_i(a) = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{a-\cos x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx =$$

$$= 4\int\limits_0^{+\infty} \frac{(a-1)+(a+1)\zeta^2}{(1+\zeta^2)\big((a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2\big)}\,d\zeta,\ \forall a \in J_i,\ i=\overline{1,3}\,.$$

При $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$ подынтегральную правильную рациональную дробь разложим на сумму элементарных рациональных дробей

$$\frac{(a-1)+(a+1)\zeta^2}{(1+\zeta^2)\big((a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2\big)} =$$

$$= \frac{A\zeta + B}{1+\zeta^2} + \frac{C\zeta + D}{(a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2}\,,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}.$$

Приведя к общему знаменателю обе части тождества, а затем отбросив этот общий знаменатель, получим тождество

$$(a-1)+(a+1)\zeta^2 = \big(A(a+1)^2 + C\big)\zeta^3 + \big(B(a+1)^2 + D\big)\zeta^2 +$$

$$+ \big(A(a-1)^2 + C\big)\zeta + B(a-1)^2 + D,\ \forall \zeta \in \mathbb{R},\ (a \neq 0,\ a \neq \pm 1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ζ в левой и правой частях этого тождества. В результате получим систему линейных уравнений, решениями которой будут

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{2a}\,, \quad D = \frac{a^2-1}{2a}\,.$$

Поэтому

$$\mathsf{D}I_i(a) = 4\int\limits_0^{+\infty} \frac{(a-1)+(a+1)\zeta^2}{(1+\zeta^2)\big((a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2\big)}\,d\zeta = \frac{2}{a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\zeta}{1+\zeta^2} +$$

$$+\,2\,\frac{a^2-1}{a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\zeta}{(a-1)^2+(a+1)^2\zeta^2} = \frac{2}{a}\Big[\operatorname{arctg}\zeta\Big]_0^{+\infty} +$$

$$+\,\frac{2}{a}\Big[\operatorname{arctg}\Big(\frac{a+1}{a-1}\,\zeta\Big)\Big]_{\zeta=0}^{\zeta\to+\infty} = \frac{\pi}{a} + \frac{2}{a}\lim_{\zeta\to+\infty}\operatorname{arctg}\Big(\frac{a+1}{a-1}\,\zeta\Big) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{2\pi}{a}\,,\ \forall a\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\,+\infty), \\[2mm] 0,\ \forall a\in(-1;0)\cup(0;1). \end{array}\right.$$

Поскольку

$$\mathsf{D}I_2(0) = -2\int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx = 0,$$

то

$$\mathsf{D}I_1\colon a\to\frac{2\pi}{a}\,,\ \forall a\in(-\infty;\,-1), \quad \mathsf{D}I_2\colon a\to 0,\ \forall a\in(-1;1),$$

$$\mathsf{D}I_3\colon a\to\frac{2\pi}{a}\,,\ \forall a\in(1;\,+\infty).$$

Отсюда интегрированием по переменной a находим:

$$I_1(a) = 2\pi\ln|a| + C_1,\ \forall a\in(-\infty;\,-1);$$

$$I_2(a) = C_2,\ \forall a \in (\,-1;1);$$

$$I_3(a) = 2\pi \ln a + C_3,\ \forall a \in (1;\,+\infty),$$

где $C_1,\, C_2$ и C_3 — некоторые постоянные, которые надо найти.

Потребовав

$$I_1(\,-1-0) = I(\,-1) = I_2(\,-1+0),$$

получаем, что $C_1 = C_2 = 0,$ а потребовав

$$I_2(1-0) = I(1) = I_3(1+0),$$

получаем, что $C_2 = C_3 = 0.$

Следовательно, интеграл

$$I(a) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 2\pi \ln |a|,\ \forall a \in (\,-\infty;\,-1) \cup (1;\,+\infty), \\ 0,\ \forall a \in [\,-1;1], \end{array}\right.$$

причём функция I непрерывна.

Пример 18. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx.$$

Введём вспомогательный параметр p и рассмотрим интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^p \frac{\ln(1+px)}{1+x^2}\, dx,\ \forall p \in [0;1].$$

При этом

$$I(1) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx, \quad \text{а} \quad I(0) = 0.$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to \frac{\ln(1+px)}{1+x^2}\,,\ \forall (x,p) \in T,$$

и её частная производная

$$\partial_p f\colon (x,p) \to \frac{x}{(1+x^2)(1+px)}\,,\ \forall (x,p) \in T,$$

непрерывны на треугольнике $T = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x \leqslant p,\ 0 \leqslant p \leqslant 1\}$.

Функции

$$a\colon p \to 0,\ \forall p \in [0;1], \quad \text{и} \quad b\colon p \to p,\ \forall p \in [0;1],$$

непрерывно дифференцируемы.

Тогда, по теореме 4 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), функция I непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}I\colon p \to \int\limits_0^p \frac{x}{(1+x^2)(1+px)}\,dx + \frac{\ln(1+p^2)}{1+p^2}\,,\ \forall p \in [0;1].$$

Используя разложение сужения правильной рациональной дроби на сумму элементарных рациональных дробей

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+px)} = \frac{1}{1+p^2}\left(\frac{x+p}{1+x^2} - \frac{p}{1+px}\right),\ \forall x \in [0;p],\ \forall p \in [0;1],$$

устанавливаем, что

$$\int\limits_0^p \frac{x\,dx}{(1+x^2)(1+px)} = \frac{1}{1+p^2}\int\limits_0^p \frac{x+p}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{1+p^2}\int\limits_0^p \frac{p\,dx}{1+px} =$$

$$= \frac{1}{2(1+p^2)}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^p + \frac{p}{1+p^2}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^p - \frac{1}{1+p^2}\Big[\ln(1+px)\Big]_{x=0}^{x=p} =$$

$$= \frac{1}{2(1+p^2)}\,\ln(1+p^2) + \frac{p}{1+p^2}\,\operatorname{arctg} p - \frac{1}{1+p^2}\,\ln(1+p^2) =$$

$$= \frac{p}{1+p^2}\ \operatorname{arctg} p - \frac{1}{2(1+p^2)}\ \ln(1+p^2),\ \forall p \in [0;1].$$

Итак, производная

$$\mathsf{D}I\colon p \to \frac{p}{1+p^2}\ \operatorname{arctg} p + \frac{\ln(1+p^2)}{2(1+p^2)}\,,\ \forall p \in [0;1].$$

Отсюда, учитывая, что $I(0)=0$, получим формулу для нахождения функции

$$I\colon p \to \int\limits_0^p \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^p \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx,\ \forall p \in [0;1].$$

Методом интегрирования по частям получаем, что

$$\int\limits_0^p \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^p \operatorname{arctg} x\, d\ln(1+x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)\Big]_0^p - \frac{1}{2}\int\limits_0^p \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} p\ \ln(1+p^2) - \frac{1}{2}\int\limits_0^p \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx,\ \forall p \in [0;1].$$

Тогда

$$I(p) = \frac{1}{2}\ \operatorname{arctg} p\ \ln(1+p^2),\ \forall p \in [0;1].$$

Отсюда, полагая $p=1$, находим, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = I(1) = \frac{\pi}{8}\ \ln 2.$$

2. Интегрирование функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра

Интегрирование функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра, с постоянными пределами интегрирования и с почти всюду непрерывной подынтегральной функцией. Определённый повторный интеграл. Внутренний и внешний одинарные определённые интегралы повторного интеграла. Изменение порядка вычисления одинарных определённых интегралов в повторном интеграле.

Теорема 1 (*об интегрировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования*). *Если функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b],\ \forall p \in [c;d],$$

непрерывна на прямоугольнике $\Pi = [a;b] \times [c;d]$, *то заданная определённым интегралом, зависящим от параметра, функция*

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d], \tag{1}$$

интегрируема по Риману на отрезке $[c;d]$. *При этом имеет место формула*

$$\int\limits_c^d I(p)\,dp = \int\limits_a^b \biggl(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\biggr)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Если выполняются условия данной теоремы, то, по теореме 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция (1) непрерывна. Поэтому функция (1) интегрируема по Риману на отрезке $[c;d]$, то есть, существует определёный интеграл

$$\int\limits_c^d I(p)\,dp = \int\limits_c^d \biggl(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\biggr)\,dp. \tag{3}$$

Осталось доказать равенство

$$\int\limits_c^d \biggl(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\biggr)\,dp = \int\limits_a^b \biggl(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\biggr)\,dx, \tag{4}$$

которое равносильно равенству (2) с учётом представления (3).

Введём в рассмотрение две функции

$$I_1\colon t \to \int\limits_c^t \biggl(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\biggr)\,dp,\ \forall t \in [c;d],$$

и

$$I_2\colon t \to \int\limits_a^b \biggl(\int\limits_c^t f(x,p)\,dp\biggr)\,dx,\ \forall t \in [c;d],$$

совпадение значений при $t = d$ которых

$$I_1(d) = I_2(d), \tag{5}$$

соответствует равенству (4).

Следовательно, доказательство теоремы сведено к доказательству равенства (5).

В самом начале доказательства было установлено, что функция (1) непрерывна. Это означает, что в интеграле с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int\limits_c^t \biggl(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\biggr)\,dp = \int\limits_c^t I(p)\,dp,\ \forall t \in [c;d],$$

подынтегральная функция I непрерывна на отрезке $[c;d]$.

Тогда, по второй теореме Барроу (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования), функция I_1 непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}I_1(t) = \mathsf{D}\int\limits_c^t I(p)\,dp = I(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx,\ \forall t \in [c;d].$$

Итак,

$$\mathsf{D}I_1(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx,\ \forall t \in [c;d]. \tag{6}$$

Продифференцируем функцию I_2. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi\colon (x,t) \to \int\limits_c^t f(x,p)\,dp,\ \forall x \in [a;b],\ \forall t \in [c;d].$$

На прямоугольнике Π функция Φ непрерывна.

Действительно, при каждом фиксированном t из отрезка $[c;d]$ сужение функции f непрерывно на прямоугольнике

$$\overset{*}{\Pi} = \{(x,p)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant p \leqslant t\}.$$

Тогда, по теореме 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), при любом фиксированном t из отрезка $[c;d]$ функция Φ является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[a;b]$.

При любом фиксированном значении переменной x из отрезка $[a;b]$ функция f является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[c;d]$, и, следовательно, интегрируемой на отрезке $[c;d]$, а функция Φ представляет собой функцию одной переменной, заданную определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования.

Тогда, по первой теореме Барроу (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования), при любом фиксированном значении переменной x из отрезка $[a;b]$ функция Φ является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[c;d]$.

При любом фиксированном x из отрезка $[a;b]$ у интеграла с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int\limits_c^t f(x,p)\,dp,\ \forall t\in[c;d],$$

подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[c;d]$.

Тогда, по второй теореме Барроу (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования), при любом фиксированном значении переменной x из отрезка $[a;b]$ функция Φ представляет собой функцию одной переменной, непрерывно дифференцируемую на отрезке $[c;d]$, и частная производная

$$\partial_t\Phi(x,t)=\partial_t\int\limits_c^t f(x,p)\,dp=f(x,t),\ \forall x\in[a;b],\ \forall t\in[c;d].$$

Отсюда следует, что $\partial_t\Phi$ непрерывна на Π.

Итак, функция Φ и её частная производная $\partial_t\Phi$ непрерывны на прямоугольнике Π.

Следовательно, в соответствии с теоремой 1.1 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования) функция

$$I_2\colon t\to\int\limits_a^b \Phi(x,t)\,dx,\ \forall t\in[c;d],$$

непрерывно дифференцируема и её производная

$$\mathsf{D}I_2(t) = \mathsf{D}\int\limits_a^b \Phi(x,t)\,dx = \int\limits_a^b \partial_t\Phi(x,t)\,dx = \int\limits_a^b f(x,t), \forall t \in [c;d].$$

Итак,

$$\mathsf{D}I_2(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx,\ \forall t \in [c;d].$$

Отсюда и из представления (6) следует, что

$$\mathsf{D}I_1(t) = \mathsf{D}I_2(t),\ \forall t \in [c;d].$$

Поэтому

$$I_1(t) - I_2(t) = C,\ \forall t \in [c;d],$$

где C − некоторая постоянная, которую надо найти.

Из заданий функций I_1 и I_2 при $t = c$ получаем, что

$$I_1(c) = \int\limits_c^c \Bigl(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\Bigr)dp = 0,\ \ I_2(c) = \int\limits_a^b \Bigl(\int\limits_c^c f(x,p)\,dp\Bigr)dx = 0,$$

то есть,

$$I_1(c) = I_2(c) = 0.$$

Поэтому постоянная

$$C = \bigl(I_1(t) - I_2(t)\bigr)_{|t=c} = 0.$$

Следовательно,

$$I_1(t) = I_2(t),\ \forall t \in [c;d],$$

в том числе и при $t = d$.

Это соответствует равенству (5). ■

Интегралы $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\right)dp$ и $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right)dx$ назовём *определёнными повторными интегралами*. Для их записи примем условные обозначения:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\right)dp = \int\limits_c^d dp\int\limits_a^b f(x,p)\,dx \qquad (7)$$

и

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,p)\,dp. \qquad (8)$$

С целью отразить порядок вычисления определённых одинарных интегралов в определённом повторном интеграле введём специальную терминологию. Так, в повторном интеграле (7) одинарный интеграл $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$ будем называть *внутренним*, а одинарный интеграл $\int\limits_c^d I(p)\,dp$ — *внешним*. Для повторного интеграла (8) одинарный интеграл $\int\limits_c^d f(x,p)\,dp$ является внутренним, а одинарный интеграл $\int\limits_a^b \Psi(x)\,dx$, где $\Psi(x) = \int\limits_c^d f(x,p)\,dp$, будет внешним.

В обозначениях (7) и (8) равенство (2) (и равносильное ему равенство (4)) будет иметь вид

$$\int\limits_c^d dp\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,p)\,dp. \qquad (9)$$

Формула (9) выражает изменение порядка вычисления одинарных интегралов в определённом повторном интеграле.

При этом теорема 1 указывает достаточные условия, при выполнении которых возможно изменение порядка вычисления одинарных интегралов в повторном интеграле. Поэтому теорему 1 ещё называют теоремой об *изменении порядка вычисления определённых одинарных интегралов в определённом повторном интеграле* или теоремой о *перестановке определённых одинарных интегралов в определённом повторном интеграле.*

Пример 1. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (a > 0,\, b > 0).$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x\to1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to1-0}(bx^b - ax^a) = b - a,$$

то данный интеграл является определённым.

Заметим, что определённый интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_a^b x^p\, dp = \left[\frac{x^p}{\ln x}\right]_{p=a}^{p=b} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,,\ \forall x \in (0;\, +\infty),\ (a > 0,\, b > 0).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^p\, dp \quad (a > 0,\, b > 0).$$

Функция

$$f\colon (p, x) \to x^p,\ \forall p \in [\alpha;\beta],\ \forall x \in [0;1],$$

непрерывна на прямоугольнике

$$\Pi = [\alpha;\beta] \times [0;1],\ \ \alpha = \min\{a, b\},\ \beta = \max\{a, b\},\ a > 0,\ b > 0.$$

Тогда, по теореме 1 (об изменении порядка вычисления одинарных интегралов в определённом повторном интеграле),

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^p\, dp = \int\limits_a^b dp \int\limits_0^1 x^p\, dx = \int\limits_a^b \Big[\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big]_{x=0}^{x=1}\, dp =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{dp}{p+1} = \Big[\ln(p+1)\Big]_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1} \quad (a>0,\ b>0).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \ln\frac{b+1}{a+1} \quad (a>0,\ b>0).$$

Пример 2. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to 1-0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} = +\infty,$$

то данный интеграл является несобственным второго рода на $[0;1)$ и

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Заметим, что определённый интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+p^2x^2} = \frac{1}{p}\Big[\operatorname{arctg}(px)\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\operatorname{arctg} p}{p}\,,\ \forall p \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

Тогда

$$\int\limits_0^{1-\delta} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^1 \frac{dp}{1+x^2p^2} =$$

$$= \int\limits_0^{1-\delta} dx \int\limits_0^1 \frac{dp}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (0<\delta<1).$$

Функция

$$f\colon (p,x) \to \frac{1}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall p\in[0;1],\ \forall x\in[0;1-\delta],$$

непрерывна на прямоугольнике $\Pi = [0;1]\times[0;1-\delta]$, $0<\delta<1$.

Тогда, по теореме 1 (об изменении порядка вычисления одинарных интегралов в определённом повторном интеграле),

$$\int\limits_0^{1-\delta} dx \int\limits_0^1 \frac{dp}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^1 dp \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (0<\delta<1).$$

Вычислим определённый интеграл

$$\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (0<\delta<1,\ 0\leqslant p\leqslant 1).$$

Для этого выполним подстановку

$$\arcsin x = t,\ \forall t\in[0;\arcsin(1-\delta)],$$

при которой

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad \frac{1}{1+x^2p^2} = \frac{1}{1+p^2\sin^2 t}\,,$$

$$\forall x\in[0;1-\delta],\ \forall t\in[0;\arcsin(1-\delta)],$$

переменная $t=0$ при $x=0$ и $t=\arcsin(1-\delta)$ при $x=1-\delta$.

Тогда

$$\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{(1+x^2p^2)\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\arcsin(1-\delta)} \frac{dt}{1+p^2\sin^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{\arcsin(1-\delta)} \frac{dt}{\cos^2 t + (1+p^2)\,\sin^2 t} = \int\limits_0^{\arcsin(1-\delta)} \frac{d\,\mathrm{tg}\, t}{1+(1+p^2)\,\mathrm{tg}^2\, t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,\Big[\mathrm{arctg}\Big(\sqrt{1+p^2}\ \mathrm{tg}\, t\Big)\Big]_{t=0}^{t=\arcsin(1-\delta)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\ \mathrm{arctg}\Big(\sqrt{1+p^2}\ \mathrm{tg}\arcsin(1-\delta)\Big)\ \ (0<\delta<1,\ 0\leqslant p\leqslant 1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\big(\sqrt{1+p^2}\ \mathrm{tg}\arcsin(1-\delta)\big)}{\sqrt{1+p^2}}\, dp.$$

Подынтегральная функция

$$g\colon (p,\delta) \to \frac{\mathrm{arctg}\big(\sqrt{1+p^2}\ \mathrm{tg}\arcsin(1-\delta)\big)}{\sqrt{1+p^2}}\,,\ \forall p,\delta\in[0;1],$$

непрерывна на квадрате $K = [0;1]\times[0;1]$. Поэтому в соответствии с теоремой 2.3.1 возможен предельный переход под знаком определённого интеграла

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\big(\sqrt{1+p^2}\ \mathrm{tg}\arcsin(1-\delta)\big)}{\sqrt{1+p^2}}\, dp =$$

$$= \int\limits_0^1 \lim_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{arctg}\big(\sqrt{1+p^2}\ \operatorname{tg}\arcsin(1-\delta)\big)}{\sqrt{1+p^2}}\, dp =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\pi}{2} \Big[\ln\Big(p + \sqrt{1+p^2}\Big)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}\ \ln\big(1+\sqrt{2}\,\big).$$

Итак,

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\ \ln\big(1+\sqrt{2}\,\big).$$

Теорема 1 не является критерием. Она указывает лишь достаточные условия, при выполнении которых возможно интегрирование (в собственном смысле) функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра.

Например, имеет место следующий признак.

Теорема 2. *Пусть функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x\in[a;b],\ \forall p\in[c;d],$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) *ограничена на прямоугольнике* $\Pi = [a;b]\times[c;d]$;

2) *непрерывна в* Π *всюду, за исключением, быть может, конечного числа прямых, параллельных осям координат.*

Тогда заданные определёными интегралами, зависящими от параметров, функции

$$I_1\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\, dx,\ \forall p\in[c;d],$$

и

$$I_2\colon x \to \int\limits_c^d f(x,p)\, dp,\ \forall p\in[a;b],$$

интегрируемы по Риману на отрезках $[c;d]$ *и* $[a;b]$ *соответственно, а также имеет место формула изменения порядка вычисления одинарных интегралов в определённом повторном интеграле* (9):

$$\int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp.$$

Доказательство. Прежде всего из условий теоремы следует:

1) при любом фиксированном значении переменной x из отрезка $[a;b]$ функция f является функцией одной переменной, кусочно-непрерывной на отрезке $[c;d]$;

2) при любом фиксированном значении переменной p из отрезка $[c;d]$ функция f является функцией одной переменной, кусочно-непрерывной на отрезке $[a;b]$.

Поэтому функции I_2 и I_1 заданы определёнными интегралами, которые содержат параметр.

Дальнейшее доказательство с учётом этих обстоятельств разобьём на несколько случаев.

Случай 1. Если функция f непрерывна на прямоугольнике Π, то в соответствии с теоремой 1 будет иметь место теорема 2.

Случай 2. Пусть функция f непрерывна на незамкнутом прямоугольнике

$$P_1 = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b,\ c \leqslant p \leqslant d\}.$$

Для любого b_1 из полуинтервала $[a;b)$ сужение функции f непрерывно на прямоугольнике

$$\Pi_1 = \{(x,p)\colon a \leqslant x \leqslant b_1,\ c \leqslant p \leqslant d\},\ a < b_1 < b,$$

и, по теореме 1, имеем, что

$$\int\limits_a^{b_1} dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp = \int\limits_c^d dp \int\limits_a^{b_1} f(x,p)\,dx. \qquad (10)$$

Ввиду ограниченности функции f на прямоугольнике П функция I_2 ограничена на отрезке $[a;b]$. Сужение функции I_2 на полуинтервал $[a;b)$ задаётся определённым интегралом

$$\widehat{I_2}\colon x \to \int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x \in [a;b),$$

с непрерывной подынтегральной функцией на множестве P_1.

Тогда, по теореме 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), сужение функции I_2 непрерывно на полуинтервале $[a;b)$.

Следовательно, функция I_2 интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, а интеграл с переменным верхним пределом интегрирования

$$\int\limits_a^{b_1} I_2(x)\,dx,\ \forall b_1 \in [a;b],$$

задаёт функцию, которая, по первой теореме Барроу (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом с переменным пределом интегрирования), будет непрерывной. Поэтому

$$\lim_{b_1\to b-0}\int\limits_a^{b_1} I_2(x)\,dx = \int\limits_a^{b} I_2(x)\,dx,$$

то есть,

$$\lim_{b_1\to b-0}\int\limits_a^{b_1} dx\int\limits_c^{d} f(x,p)\,dp = \int\limits_a^{b} dx\int\limits_c^{d} f(x,p)\,dp. \qquad (11)$$

Рассмотрим правую часть равенства (10).

По свойству аддитивности, определённый интеграл

$$\int\limits_a^{b_1} f(x,p)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx - \int\limits_{b_1}^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall b_1 \in [a;b).$$

Отсюда при любом b_1 из отрезка $[a;b]$

$$\int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b_1} f(x,p)\,dx = \int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx - \int\limits_c^{d} dp \int\limits_{b_1}^{b} f(x,p)\,dx.$$

Так как функция f ограничена на прямоугольнике Π, то существует такое положительное число M, что

$$|f(x,p)| < M,\ \forall (x,p) \in \Pi.$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b_1} f(x,p)\,dx - \int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_c^{d} dp \int\limits_b^{b_1} |f(x,p)|\,dx < M\,(b-b_1)(d-c) \xrightarrow[b_1\to b-0]{} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{b_1\to b-0} \int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b_1} f(x,p)\,dx = \int\limits_c^{d} dp \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx. \qquad (12)$$

Переходя в равенстве (10) к пределу при $b_1 \to b-0$, с учётом соотношений (11) и (12) получаем формулу (9).

Аналогично доказывается формула (9), когда функция f непрерывна на незамкнутом прямоугольнике

$$P_2 = \{(x,p)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant p < d\}.$$

Случай 3. Пусть функция f непрерывна на незамкнутом прямоугольнике

$$P_3 = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b,\ c \leqslant p < d\}.$$

Тогда при любом d_1 из полуинтервала $[c;d)$ на основании второго случая имеем, что

$$\int\limits_c^{d_1} dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^{d_1} f(x,p)\,dp.$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные приведённым во втором случае. И получаем формулу (9).

Подобным образом доказывается формула (9), когда функция f непрерывна на незамкнутых прямоугольниках

$$P_4 = \{(x,p)\colon a < x \leqslant b,\ c < p \leqslant d\},$$

$$P_5 = \{(x,p)\colon a < x \leqslant b,\ c \leqslant p < d\},$$

$$P_6 = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b,\ c < p \leqslant d\}.$$

Случай 4. Пусть функция f непрерывна на открытом прямоугольнике

$$P_0 = \{(x,p)\colon a < x < b,\ c < p < d\}.$$

Разобьём прямоугольник P_0 на четыре незамкнутых прямоугольника видов P_3, P_4, P_5, P_6 прямыми, параллельными осям координат.

Следовательно, формула (9) имеет место и в этом случае, ибо на каждом из полученных незамкнутых прямоугольников в повторном интеграле можно поменять порядок вычисления одинарных интегралов.

Случай 5. В общем случае прямоугольник Π разобьём на конечное число прямоугольников видов $P_i,\ i = \overline{0,6}$, то есть, таких незамкнутых прямоугольников, лишь на границах которых функция f может не быть непрерывной.

Тогда, применяя к каждому из таких прямоугольников теорему, доказанную в четырёх предыдущих случаях, получаем формулу (9) в общем случае. ■

Пример 3. *Вычислим интеграл*

$$I(a,b)=\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\sin\ln\frac{1}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

В примере 1 доказана формула

$$\int\limits_a^b x^p\,dp=\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,,\ \forall x\in(0;\,+\infty),\ \ (a>0,\ b>0),$$

в соответствии с которой интеграл

$$I(a,b)=\int\limits_0^1 dx\int\limits_a^b x^p\,\sin\ln\frac{1}{x}\,dp \quad (a>0,\ b>0).$$

Пусть $\alpha=\min\{a,b\}$, $\beta=\max\{a,b\}$. Функция

$$f\colon x\to x^p\,\sin\ln\frac{1}{x}\ \forall x\in(0;1],\ \forall p\in[\alpha;\beta],$$

непрерывна на $\Pi=\{(x,p)\colon 0<x\leqslant 1,\ \alpha\leqslant p\leqslant\beta\}$, а

$$\lim_{x\to+0} x^p\,\sin\ln\frac{1}{x}=0 \quad \text{при} \quad p>0.$$

Поэтому продолжение функции f на замыкание $\overline{\Pi}$ незамкнутого прямоугольника Π

$$\widehat{f}\colon (x,p)\to\left[\begin{array}{l} x^p\,\sin\ln\dfrac{1}{x}\,,\ \forall(x,p)\in\Pi,\\[2ex] 0,\ \forall(x,p)\in\{(x,p)\colon x=0,\ \alpha\leqslant p\leqslant\beta\},\end{array}\right.$$

непрерывно.

Тогда в соответствии с теоремой 2 можно изменить порядок вычисления одинарных интегралов в определённом повторном интеграле:

$$I(a,b) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^p \sin\ln\frac{1}{x}\, dp = \int\limits_a^b dp \int\limits_0^1 x^p \sin\ln\frac{1}{x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Используя замену

$$x = e^{-t},\ \forall t \in [0;\, +\infty),$$

получаем, что

$$I_1(p) = \int\limits_0^1 x^p \sin\ln\frac{1}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt,\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Методом интегрирования по частям находим:

$$I_1(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\, d\cos t =$$

$$= -\Big[e^{-(p+1)t} \cos t\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \cos t\, d_t\, e^{-(p+1)t} =$$

$$= 1 - (p+1)\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \cos t\, dt = 1 - (p+1)\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}\, d\sin t =$$

$$= 1 - (p+1)\Big[e^{-(p+1)t} \sin t\Big]_{t=0}^{t=+\infty} + (p+1)\int\limits_0^{+\infty} \sin t\, d_t\, e^{-(p+1)t} =$$

$$= 1 - (p+1)^2\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\, dt = 1 - (p+1)^2 I_1(p),\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Следовательно,

$$I_1(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

а значит, интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_a^b \frac{dp}{(p+1)^2+1} = \Big[\operatorname{arctg}(p+1)\Big]_a^b =$$

$$= \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1),\ \forall a, b \in (0;\,+\infty).$$

Учитывая тригонометрическую формулу разности арктангенсов

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad \text{при} \quad xy > -1,$$

получаем, что интеграл

$$I(a,b) = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\,,\ \forall a, b \in (0;\,+\infty).$$

Итак,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, \sin\ln\frac{1}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

§ 3. Специальные функции, заданные определёнными интегралами, зависящими от параметра

Полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов. Формулы Лагранжа. Дифференциальные и интегральные связи между полными эллиптическими интегралами разных родов. Бесселевы функции. Порядок бесселевых функций. Функции Бесселя – Ангера. Интегральное представление функции Бесселя целого порядка. Функция Струве натурального порядка. Функция Вебера (*функция Ломмеля – Вебера*). *Интеграл Дюамеля. Формула Дюамеля. Решение задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с помощью интеграла Дюамеля.*

1. Полные эллиптические интегралы

Интегралы

$$K(k)=\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0<k<1), \tag{1}$$

$$E(k)=\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\; dt \quad (0<k<1), \tag{2}$$

$$D(k)=\int\limits_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\, dt \quad (0<k<1) \tag{3}$$

назовём соответственно *полными эллиптическими интегралами первого, второго, третьего родов*. Число $k,\ 0<k<1$, назовём *модулем* этих интегралов.

Заменой

$$t=\sin\psi,\ \forall\psi\in\Big[0;\frac{\pi}{2}\Big],$$

интегралы K, E, D приводим к *форме Лежандра*

$$K(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\quad (0<k<1), \tag{4}$$

$$E(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\;d\psi\quad (0<k<1), \tag{5}$$

$$D(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi\quad (0<k<1). \tag{6}$$

Рассмотрим полный эллиптический интеграл второго рода E в форме Лежандра (5).

Подынтегральная функция

$$f\colon (\psi,k)\to\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,,\ \forall(\psi,k)\in\Omega,$$

и её частная производная

$$\partial_k f\colon (\psi,k)\to\ -\frac{k\,\sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,,\ \forall(\psi,k)\in\Omega,$$

непрерывны на незамкнутом прямоугольнике

$$\Omega=\Big\{(\psi,k)\colon 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\,,\ 0<k<1\Big\}.$$

Поэтому интеграл (5) является определённым[1] интегралом, зависящим от параметра, и к нему применима формула Лейбница (2.1.2), по которой

[1]Заметим, что эллиптические интегралы (1) − (3) несобственные, а в форме Лежандра (4) − (6) они являются определёнными.

$$\mathsf{D}E(k) = -k \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}\, d\psi,\ \forall k \in (0;1). \tag{7}$$

Отсюда и из задания (6) получаем две формулы-связи для эллиптических интегралов второго и третьего родов.

Формула 1. *Полные эллиптические интегралы второго и третьего родов связаны дифференциальным равенством*

$$\mathsf{D}E(k) = -kD(k),\ \forall k \in (0;1). \tag{8}$$

Формула 2. *Полные эллиптические интегралы второго и третьего родов связаны интегральным равенством*

$$\int kD(k)\, dk = -E(k) + C,\ \forall k \in (0;1). \tag{9}$$

Если учесть, что

$$\frac{-k \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} -$$

$$-\frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},\ \forall (\psi, k) \in \Omega,$$

то из представления (7) с учётом заданий (4) и (5) следует

Формула 3. *Производная*

$$\mathsf{D}E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k},\ \forall k \in (0;1). \tag{10}$$

Рассмотрим эллиптический интеграл первого рода K в форме Лежандра (4).

Подынтегральная функция

$$\widetilde{f}\colon (\psi, k) \to \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},\ \forall (\psi, k) \in \Omega,$$

и её частная производная

$$\partial_k \widetilde{f}\colon (\psi, k) \to \frac{k\,\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,,\ \forall (\psi, k) \in \Omega,$$

непрерывны. Поэтому интеграл (4) является определённым интегралом, зависящим от параметра, и к нему применима формула Лейбница (2.1.2), по которой

$$\mathsf{D}K(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,d\psi,\ \forall k\in(0;1). \tag{11}$$

Заметим, что

$$\mathsf{D}\big(k\,K(k)\big) = K(k) + k\,\mathsf{D}K(k) =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,d\psi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,,\ \forall k\in(0;1).$$

Отсюда и из (11) находим разность

$$\mathsf{D}K(k) - k\,\mathsf{D}\big(k\,K(k)\big) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,d\psi -$$

$$- k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,,\ \forall k\in(0;1).$$

Методом интегрирования по частям устанавливаем, что

$$\mathsf{D}E(k) = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\, d\cos\psi =$$

$$= k\left[\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\right]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} - k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} =$$

$$= -k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\, d\psi = k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\, d\psi -$$

$$- k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)^3}}\,,\ \forall k\in(0;1).$$

Из последних двух представлений получаем равенство

$$\mathsf{D}E(k) = \mathsf{D}K(k) - k\,\mathsf{D}\bigl(k\,K(k)\bigr),\ \forall k\in(0;1). \qquad (12)$$

С учётом формулы (10) это равенство преобразуем к виду

$$E(k) - K(k) = k\,\mathsf{D}K(k) - k^2\,K(k) - k^3\mathsf{D}K(k),\ \forall k\in(0;1).$$

Отсюда следует
Формула 4. *Производная*

$$\mathsf{D}K(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}\,,\ \forall k\in(0;1). \qquad (13)$$

С учётом формулы (8) равенство (12) преобразуем к виду

$$-\,k\,D(k) = \mathsf{D}K(k) - k\,K(k) - k^2\mathsf{D}K(k),\ \forall k\in(0;1).$$

Отсюда следует ещё одна

Формула 5. *Производная*

$$\mathsf{D}K(k) = \frac{k}{1-k^2}\big(K(k) - D(k)\big),\ \forall k \in (0;1). \tag{14}$$

Формулы (10) и (13) указывают возможности вычисления производных полных эллиптических интегралов первого и второго родов посредством алгебраических комбинаций полных эллиптических интегралов первого и второго родов (при этом к непосредственному дифференцированию не прибегаем).

Формулы (8) и (14) указывают возможности вычисления производных полных эллиптических интегралов первого и второго родов с использованием полного эллиптического интеграла третьего рода (в этом случае к непосредственному дифференцированию также не прибегаем).

По формуле (9), которая является непосредственным следствием формулы (8), осуществляется интегрирование функции, составленной на основании полного эллиптического интеграла третьего рода.

Аналогично, основываясь на формулах (10), (13) и (14), находятся первообразные функций, которые составлены из полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего родов.

Формула 6. *Неопределённый интеграл*

$$\int \frac{E(k) - K(k)}{k}\,dk = E(k) + C,\ \forall k \in (0;1). \tag{15}$$

Формула 7. *Неопределённый интеграл*

$$\int \frac{E(k) - (1-k^2)K(k)}{k(1-k^2)}\,dk = K(k) + C,\ \forall k \in (0;1). \tag{16}$$

Формула 8. *Неопределённый интеграл*

$$\int \frac{k\big(K(k) - D(k)\big)}{1-k^2}\,dk = K(k) + C,\ \forall k \in (0;1). \tag{17}$$

Равенство (14) запишем в виде

$$(1-k^2)\,\mathsf{D}K(k) = k\,K(k) - k\,D(k),\ \forall k \in (0;1).$$

Тогда

$$2k\,K(k) - (1-k^2)\,\mathsf{D}K(k) = k\,K(k) + k\,D(k),\ \forall k \in (0;1),$$

и, следовательно,

$$\mathsf{D}\big(-(1-k^2)K(k)\big) = k\big(K(k) + D(k)\big),\ \forall k \in (0;1).$$

Отсюда получаем ещё одну возможность интегрирования.

Формула 9. *Неопределённый интеграл*

$$\int k\big(K(k) + D(k)\big)\,dk = -(1-k^2)\,K(k) + C,\ \forall k \in (0;1).$$

2. Функции Бесселя (интегральные представления)

Обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2\,\mathsf{D}^2 y + x\,\mathsf{D}y + (x^2-\nu^2)y = 0,$$

где ν — некоторая постоянная, назовём *уравнением Бесселя*, число ν при этом будем называть *порядком*.

Функции-решения уравнения Бесселя с порядком ν будем называть *бесселевыми функциями* ν*-го порядка*. Рассмотрим интегральные представления бесселевых функций.

Предложение 1. *Функция Бесселя — Ангера*

$$\mathrm{J}_\nu\colon x \to \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\nu t - x\sin t)\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\nu \in \mathbb{R})$$

является решением неоднородного уравнения Бесселя

$$x^2\,\mathsf{D}^2 y + x\,\mathsf{D}y + (x^2-\nu^2)y = \frac{1}{\pi}\,(x-\nu)\sin\nu\pi.$$

Доказательство. Функция

$$f_\nu\colon (t,x) \to \cos(\nu t - x\sin t),\ \forall t\in[0;\pi],\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R})$$

и её частная производная

$$\partial_x f_\nu\colon (t,x) \to \sin t\,\sin(\nu t - x\sin t),\ \forall t\in[0;\pi],\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R})$$

непрерывны на полосе $\Pi = [0;\pi]\times\mathbb{R}$. Тогда, по теореме 1.1.2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), функция Бесселя — Ангера J_ν непрерывно дифференцируема на поле $\mathbb{R}$ и её производная

$$\mathsf{D}\mathrm{J}_\nu\colon x \to \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\,\sin(\nu t - x\,\sin t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R}).$$

Функция $\partial_x f_\nu$ и её частная производная

$$\partial_{xx} f_\nu\colon (t,x) \to -\sin^2 t\,\cos(\nu t - x\sin t),\ \forall t\in[0;\pi],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

при $\nu\in\mathbb{R}$ непрерывна на полосе Π. Тогда (по теореме 1.1.2)

$$\mathsf{D}^2\mathrm{J}_\nu\colon x \to -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^2 t\,\cos(\nu t - x\sin t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R}),$$

причём функция J_ν дважды непрерывно дифференцируема.

Стало быть, при любых x и ν из $\mathbb{R}$

$$x^2\,\mathsf{D}^2\mathrm{J}_\nu(x) + x\,\mathsf{D}\mathrm{J}_\nu(x) + (x^2-\nu^2)\mathrm{J}_\nu(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(-x^2\sin^2 t\,\cos(\nu t - x\sin t) + x\sin t\,\sin(\nu t - x\sin t) +$$

$$+ (x^2-\nu^2)\cos(\nu t - x\sin t)\big)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(x\sin t\,\sin(\nu t - x\sin t) +$$

$$+\left(x^2\cos^2 t-\nu^2\right)\cos\left(\nu t-x\sin t\right)\Big)\,dt=$$

$$=\,-\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\partial_t\Big(\left(x\cos t+\nu\right)\sin\left(\nu t-x\sin t\right)\Big)\,dt=$$

$$=\,-\,\frac{1}{\pi}\Big[\left(x\cos t+\nu\right)\sin\left(\nu t-x\sin t\right)\Big]_{t=0}^{t=\pi}=$$

$$=\,-\,\frac{1}{\pi}\left(x-\nu\right)\sin\pi\nu.\ \blacksquare$$

Следствие 1. *Функция Бесселя — Ангера* J_n *является бесселевой функцией целого порядка* n.

Доказательство вполне очевидно и следует из предложения 1 ввиду того, что $\sin\pi n=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$ $\blacksquare$

Функцию Бесселя — Ангера J_ν целого неотрицательного индекса $\nu=n$ будем называть *функцией Бесселя* целого неотрицательного порядка n и обозначать $J_n,$ то есть,

$$J_n\colon x\to\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(nt-x\sin t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (n\in\mathbb{N}\cup\{0\}),$$

и функция Бесселя — Ангера даёт интегральное представление функции Бесселя целого неотрицательного порядка.

Предложение 2. *Функция*[1] *Струве натурального порядка*

$$H_n\colon z\to\frac{2}{\pi(2n-1)!!}\,z^n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(z\cos t\right)\sin^{2n}t\,dt,\ \forall z\in\mathbb{R},\ (n\in\mathbb{N})$$

является бесселевой функцией натурального порядка n.

[1]Функцию Струве натурального порядка также задают с помощью определённого интеграла, зависящего от параметра, в виде

$$H_n\colon z\to\frac{2}{\pi(2n-1)!!}\,z^n\int\limits_0^{1}\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,\sin(zt)\,dt,\ \forall z\in\mathbb{R},\ (n\in\mathbb{N}).$$

Доказательство. Подынтегральная функция

$$f\colon (t,x) \to \cos(x\cos t)\sin^{2n} t,\ \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N})$$

и её частная производная

$$\partial_x f\colon (t,x) \to -\sin\,(x\cos t)\cos t\,\sin^{2n} t,\ \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N})$$

непрерывны на полосе $\Pi = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}.$ Поэтому с учётом правила Лейбница (2.1.2) находим производную

$$\mathsf{D}H_n\colon x \to knx^{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,(x\cos t)\sin^{2n} t\,dt -$$

$$-\,kx^n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\,(x\cos t)\cos t\,\sin^{2n} t\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N}),$$

где $k = \dfrac{2}{\pi(2n-1)!!}$. При этом функция Струве натурального порядка H_n будет непрерывно дифференцируемой (в соответствии с теоремой 1.1.2 о непрерывной дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования).

Поскольку функции $f,\, \partial_x f$ и

$$\partial_{xx} f\colon (t,x) \to\ -\cos\,(x\cos t)\cos^2 t\,\sin^{2n} t,\ \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

где $n \in \mathbb{N},$ непрерывны на полосе $\Pi,$ то при дифференцировании функции $\mathsf{D}H_n$ можно использовать формулу Лейбница (2.1.2).

Вторая производная функции Струве натурального порядка

$$\mathsf{D}^2 H_n(x) = k\biggl(n(n-1)x^{n-2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\sin^{2n}t\,dt -$$

$$-nx^{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos t)\cos t\,\sin^{2n}t\,dt\biggr) -$$

$$-2kn\,x^{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos t)\cos t\,\sin^{2n}t\,dt -$$

$$-kx^{n+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\cos^2 t\,\sin^{2n}t\,dt\ +$$

$$+kn\,x^{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\sin^{2n}t\,dt -$$

$$-kx^{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\cos t)\cos t\sin^{2n}t\,dt\ +$$

$$+kx^{n+2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\sin^{2n}t\,dt -$$

$$- kn^2x^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\sin^{2n} t\, dt =$$

$$= kx^{n+1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(x\cos(x\cos t)\sin^{2n+2} t -$$

$$- (2n+1)\sin(x\cos t)\cos t\, \sin^{2n}\Big)\, dt =$$

$$= k\Bigg(nx^{n-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos t)\cos t\, \sin^{2n} t\, dt +$$

$$+ x^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\cos^2 t\, \sin^{2n} t\, dt\Bigg) =$$

$$= kn(n-1)x^{n-2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\sin^{2n} t\, dt -$$

$$- 2kn\, x^{n-1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos t)\cos t\, \sin^{2n} t\, dt\ -$$

$$- kx^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\cos^2 t\, \sin^{2n} t\, dt,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что функция Струве натурального порядка H_n дважды непрерывно дифференцируема.

Тогда

$$x^2\,\mathsf{D}^2 H_n(x) + x\,\mathsf{D} H_n(x) + (x^2 - n^2) H_n(x) =$$

$$= kn(n-1)x^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\sin^{2n} t\,dt =$$

$$= kx^{n+1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \partial_t\big(-\sin^{2n+1} t\,\sin(x\cos t)\big)\,dt =$$

$$= -kx^{n+1}\Big[\sin^{2n+1} t\,\sin(x\cos t)\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n \in \mathbb{N}). \blacksquare$$

Предложение 3. *Функция*[1] *Вебера*

$$\mathrm{E}_\nu\colon x \to \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin(\nu t - x\sin t)\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\nu \in \mathbb{N})$$

является решением неоднородного уравнения Бесселя

$$x^2\,\mathsf{D}^2 y + x\,\mathsf{D} y + (x^2 - \nu^2) y = -\frac{1}{\pi}\big((x+\nu) + (x-\nu)\cos\nu\pi\big).$$

Доказательство. Функция

$$f_\nu\colon (t,x) \to \sin(\nu t - x\sin t),\ \forall t \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\nu \in \mathbb{R})$$

и её частные производные при $\nu \in \mathbb{R}$

$$\partial_x f_\nu\colon (t,x) \to -\sin t\,\cos(\nu t - x\sin t),\ \forall t \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\partial_{xx} f_\nu\colon (t,x) \to -\sin^2 t\,\sin(\nu t - x\sin t),\ \forall t \in [0;\pi],\ \forall x \in \mathbb{R},$$

[1] Функцию $\Omega_\nu\colon x \to -\mathrm{E}_\nu(x), \forall x \in \mathbb{R}$, называют функцией Ломмеля – Вебера.

непрерывны на полосе $\Pi = [0;\pi] \times \mathbb{R}$. Поэтому в соответствии с теоремой 1.1.2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования) функция Вебера E_ν дважды непрерывно дифференцируема на поле $\mathbb{R}$ и её производные

$$\mathsf{D}\mathrm{E}_\nu\colon x \to -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(\nu t - x\sin t)\sin t\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R})$$

и

$$\mathsf{D}^2\mathrm{E}_\nu\colon x \to -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(\nu t - x\sin t)\sin^2 t\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R}).$$

Тогда

$$x^2\,\mathsf{D}^2\mathrm{E}_\nu(x) + x\,\mathsf{D}\mathrm{E}_\nu(x) + (x^2-\nu^2)\mathrm{E}_\nu(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big(-x^2\sin(\nu t - x\sin t)\sin^2 t -$$

$$- x\cos(\nu t - x\sin t)\sin t + (x^2-\nu^2)\sin(\nu t - x\sin t)\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big((x^2\cos^2 t - \nu^2)\sin(\nu t - x\sin t) -$$

$$- x\sin t\,\cos(\nu t - x\sin t)\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \partial_t\Big((x\cos t + \nu)\cos(\nu t - x\sin t)\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[(x\cos t + \nu)\cos(\nu t - x\sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\big((x+\nu)+(x-\nu)\cos\nu\pi\big),\ \forall x\in\mathbb{R},\ (\nu\in\mathbb{R}).\ \blacksquare$$

Пример 1. *Докажем формулу*

$$\int\limits_0^x \xi\, J_0(\xi)\, d\xi = xJ_1(x),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

для функций Бесселя нулевого и первого порядков

$$J_0\colon x\to\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

и

$$J_1\colon x\to\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(t-x\sin t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Дифференциальное уравнение Бесселя нулевого порядка приводим к виду

$$x\,\mathsf{D}^2y+\mathsf{D}y+xy=0.$$

Поскольку функция Бесселя нулевого порядка J_0 является решением этого дифференциального уравнения (по следствию 1), то

$$\mathsf{D}\big(\mathsf{D}J_0(x)\big)+xJ_0(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Заметим, что интеграл

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin t)\cos t\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\cos t\,dt+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x\sin t)\cos t\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\cos t\,dt-$$

$$-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\bigl(x\sin(\pi-\zeta)\bigr)\cos(\pi-\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\cos t\,dt-$$

$$-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\zeta)\cos\zeta\,d\zeta=0.$$

Тогда

$$\mathsf{D}J_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(x\sin t)\sin t\,dt=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(x\sin t)\sin t\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x\sin t)\cos t\,dt=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(t-x\sin t)\,dt=-J_1(x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Стало быть,

$$\mathsf{D}\bigl(-xJ_1(x)\bigr)+xJ_0(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{0}^{x}\mathsf{D}\bigl(\xi J_1(\xi)\bigr)\,d\xi=\int\limits_{0}^{x}\xi J_0(\xi)\,d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

или

$$xJ_1(x)=\int\limits_{0}^{x}\xi J_0(\xi)\,d\xi,\ \forall x\in\mathbb{R}.\ \blacksquare$$

3. Интеграл Дюамеля

Пусть у функций $f\colon[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ и $g\colon[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ сужения интегрируемы по Риману (в собственном смысле) на любом отрезке $[\lambda;\nu]$ из числового луча $[0;+\infty)$.

Тогда определённый интеграл, содержащий параметр,

$$D(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi,\ \forall x \in [0;\, +\infty),$$

назовём *интегралом Дюамеля*.

3.1. Формула Дюамеля

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция* $f\colon x \to f(x),\ \forall x \in [0;\, +\infty),$ *непрерывна*;

2) *функция* $g\colon x \to g(x),\ \forall x \in [0;\, +\infty),$ *непрерывно дифференцируема*.

Тогда заданная интегралом Дюамеля функция

$$D\colon x \to \int\limits_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi,\ \forall x \in [0;\, +\infty),$$

непрерывно дифференцируема и имеет место формула Дюамеля

$$\mathsf{D}\int\limits_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi = g(0)\, f(x) + \int\limits_0^x f(\xi)\, \partial_x g(x-\xi)\, d\xi,\quad \forall x \in [0;\, +\infty). \tag{1}$$

Доказательство. При любом положительном ν функция

$$F\colon (\xi, x) \to f(\xi)\, g(x-\xi),\ \forall (\xi, x) \in T,$$

и её частная производная

$$\partial_x F\colon (\xi, x) \to f(\xi)\, \partial_x g(x-\xi),\ \forall (\xi, x) \in T,$$

непрерывны на треугольнике $T = \{(\xi, x)\colon 0 \leqslant \xi \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant \nu\}$. Тогда, по теореме 4.1.2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра), производная

$$\mathsf{D}\int\limits_0^x f(\xi)\,g(x-\xi)\,d\xi = g(0)\,f(x) + \int\limits_0^x f(\xi)\,\partial_x g(x-\xi)\,d\xi$$

непрерывна на отрезке $[0;\nu]$.

Отсюда следует формула Дюамеля (1), а также непрерывная дифференцируемость функции D на числовом луче $[0;\,+\infty)$. ■

3.2. Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Теорема 2. *Пусть функция* $g\colon x\to g(x),\ \forall x\in[0;+\infty)$, *является решением на числовом луче* $[0;+\infty)$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения* n*-го порядка*

$$\mathsf{D}^n y + a_1\,\mathsf{D}^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}\,\mathsf{D}y + a_n\,y = 1 \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами $a_i,\ i=\overline{1,n}$, *удовлетворяющим начальным условиям*

$$g(0) = \mathsf{D}g(0) = \ldots = \mathsf{D}^{n-1}g(0) = 0. \tag{3}$$

Тогда заданная интегралом Дюамеля функция

$$y\colon x\to\int\limits_0^x f(\xi)\,\partial_x g(x-\xi)\,d\xi,\ \forall x\in[0;\,+\infty), \tag{4}$$

является решением на $[0;\,+\infty)$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения* n*-го порядка*

$$\mathsf{D}^n y + a_1\,\mathsf{D}^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}\,\mathsf{D}y + a_n\,y = f(x), \tag{5}$$

где функция f *непрерывна на числовом луче* $[0;\,+\infty)$, *удовлетворяющим начальным условиям*

$$y(0) = \mathsf{D}y(0) = \ldots = \mathsf{D}^{n-1}y(0) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Функция g, будучи решением линейного дифференциального уравнения (2), является голоморфной на числовом луче $[0;+\infty)$. Тогда, по формуле Дюамеля (1), с учётом условий (3) находим производные функции (4)

$$\mathsf{D}^k y\colon x\to \int\limits_0^x f(\xi)\,\partial_x^{k+1} g(x-\xi)\,d\xi,\ \forall x\in[0;\,+\infty),\ k=\overline{1,n}. \quad (7)$$

Поэтому

$$\mathsf{D}^n y(x)+a_1\,\mathsf{D}^{n-1}y(x)+\ldots+a_{n-1}\,\mathsf{D}y(x)+a_n\,y(x)=$$

$$=\int\limits_0^x f(\xi)\big(\partial_x^{n+1}g(x-\xi)+a_1\,\partial_x^{n+1}g(x-\xi)+\ldots+$$

$$+\,a_{n-1}\,\partial_{xx}g(x-\xi)+a_n\,\partial_x g(x-\xi)\big)\,d\xi=$$

$$=\mathsf{D}\int\limits_0^x f(\xi)\big(\partial_x^{n}g(x-\xi)+a_1\,\partial_x^{n-1}g(x-\xi)+\ldots+$$

$$+\,a_{n-1}\,\partial_x g(x-\xi)+\ldots+a_n\,g(x-\xi)\big)\,d\xi,\ \forall x\in[0;\,+\infty).$$

Отсюда, учитывая, что функция g является решением на числовом луче $[0;+\infty)$ дифференциального уравнения (2), получаем тождество

$$\mathsf{D}^n y(x)+a_1\,\mathsf{D}^{n-1}y(x)+\ldots+a_{n-1}\,\mathsf{D}y(x)+a_n\,y(x)=$$

$$=\mathsf{D}\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi,\ \forall x\in[0;\,+\infty).$$

Функция f непрерывна на числовом луче $[0;\,+\infty)$, а значит, по второй теореме Барроу (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования), производная

$$\mathsf{D}\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi = f(x),\ \forall x\in[0;\,+\infty).$$

Итак, при любом $x\in[0;\,+\infty)$

$$\mathsf{D}^n y(x)+a_1\,\mathsf{D}^{n-1}y(x)+\ldots+a_{n-1}\,\mathsf{D}y(x)+a_n\,y(x)=f(x),$$

то есть, функция (4) является решением дифференциального уравнения (5) на числовом луче $[0;\,+\infty)$.

В том, что решение (4) удовлетворяет начальным данным (6), убеждаемся непосредственным вычислением значений $y(0)$ и $\mathsf{D}^k y(0),\ k=\overline{1,n}$, функций (7). ■

Пример 1. *С помощью интеграла Дюамеля найдём решение на числовом луче* $[0;\,+\infty)$ *задачи Коши с начальными условиями* $y(0)=\mathsf{D}y(0)=0$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка*

$$\mathsf{D}^2 y+\omega^2 y=f(x), \tag{8}$$

где ω *— ненулевое вещественное число, а функция* f *непрерывна на числовом луче* $[0;\,+\infty)$.

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathsf{D}^2 y+\omega^2 y=0 \tag{9}$$

характеристическое уравнение $\lambda^2+\omega^2=0$ имеет корни $\lambda_1=-\omega i$ и $\lambda_2=\omega i$. Поэтому семейство функций

$$y\colon x\to C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные постоянные, являются общим решением дифференциального уравнения (9).

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\mathsf{D}^2 y+\omega^2 y=1 \tag{10}$$

имеет частное решение $y\colon x\to\omega^{-2},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Поэтому общим решением дифференциального уравнения (10) будет семейство функций

$$y\colon x \to \frac{1}{\omega^2} + C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Найдём производную

$$\mathsf{D}y\colon x \to \omega C_1 \cos \omega x - \omega C_2 \sin \omega x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Функции (11) и (12) удовлетворяют условиям

$$y(0) = \mathsf{D}y(0) = 0 \quad \text{при} \quad C_1 = 0,\ C_2 = \, -\omega^{-2}.$$

Поэтому решением на числовой прямой $\mathbb{R}$ задачи Коши с начальными условиями $y(0) = \mathsf{D}y(0) = 0$ дифференциального уравнения (10) будет функция

$$y\colon x \to \frac{1}{\omega^2}\,(1 - \cos \omega x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Интеграл Дюамеля

$$\int\limits_0^x f(\xi)\,\partial_x\Big(\frac{1}{\omega^2}\,(1 - \cos \omega(x - \xi))\Big)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int\limits_0^x f(\xi) \sin \omega(x - \xi)\,d\xi,\ \forall x \in [0;\, +\infty).$$

В соответствии с теоремой 1 функция

$$y\colon x \to \frac{1}{\omega} \int\limits_0^x f(\xi) \sin \omega(x - \xi)\,d\xi,\ \forall x \in [0;\, +\infty),$$

является решением на числовом луче $[0;\, +\infty)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (8), удовлетворяющим начальным условиям $y(0) = \mathsf{D}y(0) = 0$.

Требование (6) о том, чтобы начальные условия были нулевыми, можно ослабить, так как простой заменой искомой функции задача Коши с ненулевыми начальными условиями сводится к задаче Коши с нулевыми начальными условиями. Покажем это на примере линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$\mathsf{D}^2 y + a_1\,\mathsf{D}y + a_2\,y = f(x), \tag{13}$$

где функция f непрерывна на числовом луче $[0;\,+\infty)$, с начальными условиями

$$y(0) = y_0,\ \mathsf{D}y(0) = y_1. \tag{14}$$

Заменой

$$z(x) = y(x) - y_0 - y_1 x,\ \forall x \in [0;\,+\infty), \tag{15}$$

при которой

$$\mathsf{D}z(x) = \mathsf{D}y(x) - y_1,\ \ \mathsf{D}^2 z(x) = \mathsf{D}^2 y(x),\ \forall x \in [0;\,+\infty),$$

дифференциальное уравнение (13) приводим к линейному дифференциальному уравнению

$$\mathsf{D}^2 z + a_1\,\mathsf{D}z + a_2 z = f_1(x), \tag{16}$$

где

$$f_1(x) = f(x) - a_1 y_1 - a_2 y_0 - a_2 y_1 x,\ \forall x \in [0;\,+\infty).$$

Начальные условия (14) в силу (15) будут иметь вид

$$z(0) = y(0) - y_0 = 0,\ \ \mathsf{D}z(0) = \mathsf{D}y(0) - y_1 = 0.$$

Таким образом, задача Коши с ненулевыми начальными условиями (14) для линейного дифференциального уравнения (13) есть задача Коши с нулевыми начальными условиями для линейного дифференциального уравнения (16).

Пример 2. *С помощью интеграла Дюамеля найдём решение на числовом луче* $[0;\,+\infty)$ *задачи Коши с начальными условиями*

$$y(0) = -2,\ \ \mathsf{D}y(0) = 1$$

линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathsf{D}^2 y + 2\,\mathsf{D}y + y = \frac{1}{e^x(1+x)^2} + x\,. \tag{17}$$

Заменой

$$z(x) = y(x) + 2 - x, \ \forall x \in [0; +\infty),$$

дифференциальное уравнение (17) приводим к виду

$$\mathsf{D}^2 z + 2\,\mathsf{D} z + z = \frac{1}{e^x(1+x)^2}\,. \tag{18}$$

Найдём для него решение на числовом луче $[0; +\infty)$ задачи Коши с нулевыми начальными условиями $z(0) = \mathsf{D}z(0) = 0$ посредством интеграла Дюамеля.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

имеет двукратный корень $\lambda_1 = -1$.

Значит, семейство функций

$$z\colon t \to (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathsf{D}^2 z + 2\,\mathsf{D} z + z = 0.$$

Функция

$$z_1\colon x \to 1, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

есть частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\mathsf{D}^2 z + 2\,\mathsf{D} z + z = 1. \tag{19}$$

Поэтому семейство функций

$$z\colon x \to 1 + (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

будет общим решением дифференциального уравнения (19).

Производная

$$\mathsf{D}z\colon x \to (C_2 - C_1 - C_2\,x)e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из того, что $z(0) = \mathsf{D}z(0) = 0$, находим $C_1 = C_2 = -1$.

Поэтому функция

$$z\colon x \to 1-(1+x)e^{-x},\ \forall x\in\mathbb{R},$$

будет решением дифференциального уравнения (19), которое удовлетворяет условиям $z(0)=\mathrm{D}z(0)=0$.

Вычислим интеграл Дюамеля

$$\int\limits_0^x \frac{1}{e^{\xi}(1+\xi)^2}\,\partial_x\big(1-\big(1+(x-\xi)\big)e^{-(x-\xi)}\big)\,d\xi =$$

$$=\int\limits_0^x \frac{(x-\xi)}{(1+\xi)^2}\,e^{-x}\,d\xi = e^{-x}\Bigg((x+1)\int\limits_0^x \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}-\int\limits_0^x\frac{d\xi}{1+\xi}\Bigg)=$$

$$=\,-\,e^{-x}\Bigg((x+1)\Big[\frac{1}{1+\xi}\Big]_0^x-\Big[\ln(1+\xi)\Big]_0^x\Bigg)=$$

$$=\big(x-\ln(x+1)\big)e^{-x},\ \forall x\in[0;\,+\infty).$$

В соответствии с теоремой 1 функция

$$z\colon x\to\big(x-\ln(x+1)\big)e^{-x},\ \forall x\in[0;\,+\infty),$$

является решением на числовом луче $[0;+\infty)$ задачи Коши с нулевыми начальными условиям для дифференциального уравнения (18).

Учитывая выполненную замену, при которой

$$y(x)=z(x)+x-2,\ \forall x\in[0;\,+\infty),$$

получаем функцию

$$y\colon x\to x-2+\big(x-\ln(x+1)\big)e^{-x},\ \forall x\in[0;\,+\infty),$$

которая и будет решением на числовом луче $[0;\,+\infty)$ задачи Коши с ненулевыми начальными условиями $y(0)=\,-\,2,\ \mathrm{D}y(0)=1$ дифференциального уравнения (17).

Глава 3

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

§ 1. Сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметров

1. Поточечная и равномерная сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров

1.1. Понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра

Определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 1. Несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\frac{x}{p}\,dx \tag{1}$$

задан при всяком ненулевом вещественном p. В соответствии с определением несобственного интеграла первого рода

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\frac{x}{p}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_0^{\omega} \exp\frac{x}{p}\,dx = p\lim_{\omega\to+\infty}\Big[\exp\frac{x}{p}\Big]_{x=0}^{x=\omega} =$$

$$= p\lim_{\omega\to+\infty}\Big(\exp\frac{\omega}{p}-1\Big) = \left[\begin{array}{l} -p \quad \text{при} \quad p<0, \\ +\infty \quad \text{при} \quad p>0. \end{array}\right.$$

Поэтому при $p<0$ несобственный интеграл (1) равен $-p$, а при $p>0$ несобственный интеграл (1) расходится.

В процессе интегрирования p выступает в роли постоянной, то есть, p является *параметром*. И мы говорим, что *несобственный интеграл* (1) *зависит от параметра* p.

Интеграл

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ p \in P,\ P \subset \mathbb{R},\ -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty, \quad (2)$$

в случае, когда хотя бы при одном значении параметра p он является несобственным, назовём ***несобственным интегралом, зависящим от параметра****.*

Например, интеграл

$$\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-p}} \quad (3)$$

является несобственным при любом значении параметра p из отрезка $[0;5]$, а интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+p^2} \quad (4)$$

является несобственным при одном значении параметра $p=0$.

В дальнейшем будем считать:

1) a — вещественное число, b — вещественное число или $+\infty$ $(b \leqslant +\infty)$, то есть, несобственность первого рода может наблюдаться в верхнем пределе интегрирования, когда $b = +\infty$;

2) при любом фиксированном p из множества P, $P \subset \mathbb{R}$, функция

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману (в собственном смысле) на любом отрезке $[a;\eta]$, содержащемся в числовом промежутке $[a;b)$.

Тем самым допускается возможность наличия несобственности второго рода, но лишь в верхнем пределе интегрирования.

Заметим, что в соответствии с теорией несобственных интегралов эти условия не сужают класс возможных несобственных интегралов, зависящих от параметров.

Принятые соглашения позволяют несобственный интеграл, зависящий от параметра, задать посредством предела

$$\textbf{def}:\ \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P. \qquad (5)$$

Естественно, несобственный интеграл может содержать не один, а несколько параметров. Теорию же будем строить в случае зависимости от одного параметра.

Пример 2. Интеграл (3)

$$\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-p}} = \frac{3}{2}\,\Big[\sqrt[3]{(x-p)^2}\,\Big]_{x=0}^{x=5} = \frac{3}{2}\,\big(\sqrt[3]{(5-p)^2} - \sqrt[3]{p^2}\,\big),\ \forall p\in\mathbb{R}.$$

Поэтому при $p\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$ интеграл (3) является определённым, зависящим от параметра, а при $p\in[0;5]$ интеграл (3) является сходящимся несобственным интегралом, зависящим от параметра.

Пример 3. Интеграл (4)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+p^2} = \frac{1}{p}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{p}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{p}\,,\ \forall p\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

При $p=0$ интеграл (4) расходится.

Пример 4. Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{q^2x^2+p^2}\,, \qquad (6)$$

зависящий от параметров p и q, не имеет смысла при $p=q=0$.

Если $p=0,\ q\neq 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{q^2x^2} = \frac{1}{q^2}\lim_{\substack{\eta\to+\infty\\ \delta\to+0}}\int\limits_{\delta}^{\eta}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{q^2}\lim_{\substack{\eta\to+\infty\\ \delta\to+0}}\Big(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\eta}\Big) = +\infty.$$

Если $p \neq 0,\, q = 0,$ то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{p^2} = \frac{1}{p^2} \lim_{\omega \to +\infty} \omega = +\infty.$$

Если $pq \neq 0,$ то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{q^2x^2 + p^2} = \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_0^{\eta} \frac{dx}{q^2x^2 + p^2} = \lim_{\eta \to +\infty} \Big[\frac{1}{pq} \operatorname{arctg} \frac{qx}{p}\Big]_{x=0}^{x=\eta} =$$

$$= \frac{1}{pq} \lim_{\eta \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{q\eta}{p} = \frac{1}{pq} \operatorname{sgn}(pq)\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2|pq|}\,.$$

Итак, интеграл (6) при $p = q = 0$ не имеет смысла, при $pq = 0,$ $|p| + |q| \neq 0$ расходится, а при $pq \neq 0$ сходится и равен $\dfrac{\pi}{2|pq|}\,.$

1.2. Сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Сходимость в точке. Расходимость в точке. Сходимость на множестве. Необходимый признак сходимости на множестве. Абсолютная сходимость на множестве. Сходимость на множестве абсолютно сходящегося на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра. Условная сходимость на множестве.

При допустимом фиксированном значении параметра $p = p_0$ из множества P несобственный интеграл с параметром

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,\ P \subset \mathbb{R}, \tag{7}$$

является просто несобственным интегралом

$$I(p_0) = \int\limits_a^b f(x,p_0)\,dx. \tag{8}$$

Определение 1. *Если несобственный интеграл* (8) *сходится, то будем говорить, что несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) ***сходится в точке*** $p = p_0$. *Если же несобственный интеграл* (8) *расходится, то будем говорить, что несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) ***расходится в точке*** $p = p_0$.

Определение 2. *Если несобственный интеграл, содержащий параметр,* (7) *сходится в каждой точке* p *множества* $P \subset \mathbb{R}$, *то будем говорить, что несобственный интеграл, содержащий параметр,* (7) ***сходится на множестве*** P.

Например, интеграл (1) сходится на отрицательном числовом луче $(-\infty; 0)$, интеграл (3) сходится на поле $\mathbb{R}$, интеграл (4) сходится на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, а интеграл (6) сходится на множестве

$$P = \{(p, q)\colon |p| > 0,\ |q| > 0\}.$$

С учётом соглашений, принятых в первом подпункте, сходимость на множестве P несобственного интеграла, зависящего от параметра, (7) означает, что

$$\textbf{def}\colon \lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^{\eta} f(x, p)\, dx = \int\limits_a^{b} f(x, p)\, dx,\ \forall p \in P. \tag{9}$$

Теорема 1 (*необходимый признак сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Если несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *сходится на множестве* P, *то при каждом фиксированном значении параметра* p *из множества* P *предел*

$$\lim_{\eta \to b-0} \int\limits_{\eta}^{b} f(x, p)\, dx = 0,\ \forall p \in P. \tag{10}$$

Доказательство. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, (7) сходится на множестве P, поэтому при каждом фиксированном p из множества P, по свойству аддитивности сходящегося несобственного интеграла, будем иметь, что

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx + \int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,\ \forall \eta \in [a;b).$$

Отсюда

$$\int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx - \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,\ \forall \eta \in [a;b).$$

Переходя к пределу при $\eta \to b-0$, с учётом сходимости (9) при каждом p из множества P получаем:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx - \lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx = 0. \blacksquare$$

На языке бесконечно малых этот признак может быть записан следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in P,\ \exists \eta_{\varepsilon p} \in [a;b),\ \forall \eta \in (\eta_{\varepsilon p};b):\\ \left|\int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{11}$$

Определение 3. *Если несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *такой, что построенный на его основании несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$\int\limits_a^b |f(x,p)|\,dx,\ \forall p \in P, \tag{12}$$

сходится на множестве P, *то будем говорить, что несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) ***абсолютно сходится на множестве*** P.

Из определений 2 и 3, а также теоремы о сходимости абсолютно сходящегося несобственного интеграла следует *теорема о сходимости на множестве абсолютно сходящегося на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 2. *Если несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *абсолютно сходится на множестве* P, *то интеграл* (7) *сходится на множестве* P.

Если интеграл (7) на множестве P сходится, а интеграл (12) в каждой точке p множества P расходится, то будем говорить, что несобственный интеграл, зависящий от параметра, (7) ***условно сходится на множестве*** P.

1.3. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Равномерная сходимость. Равномерная абсолютная сходимость. Равномерная сходимость равномерно абсолютно сходящегося несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Определение 4. *Сходящийся на множестве* P *несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *назовём* ***равномерно сходящимся на множестве*** P, *если для любого положительного числа* ε *на числовом промежутке* $[a;b)$ *содержится такое число* $\overset{*}{\eta}$, *зависящее от* ε, *что для любого числа* η *из открытого числового промежутка* $(\overset{*}{\eta};b)$ *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon$ *для всех значений параметра* p *из множества* P.

В символах:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}\in[a;b),\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};b)\colon \\ \left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall p\in P. \tag{13}$$

Используя M-критерий бесконечно малой, на основании соотношения (13) получаем M*-критерий равномерной сходимости* *несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 3. *Сходящийся на множестве* P *несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *тогда и только тогда равномерно сходится на множестве* P, *когда для любого положительного числа* ε *на числовом промежутке* $[a;b)$ *содержится такое число* $\overset{*}{\eta}$, *зависящее от* ε, *что для любого числа* η *из открытого числового промежутка* $(\overset{*}{\eta};b)$ *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon$ *для всех значений параметра* p *из множества* P, *а положительное число* M *не зависит ни от* ε, *ни от* p, *ни от* η.

В символах:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overset{*}{\eta}_{\varepsilon} \in [a;b),\ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};b)\colon \left|\int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon,\ \forall p \in P,$$

где $M > 0$ *и не зависит ни от* ε, *ни от* p, *ни от* η.

Используя M-критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, докажем *свойство линейности равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Свойство 1. *Если несобственные интегралы, зависящие от параметра,*

$$I_i(p) = \int\limits_{a}^{b} f_i(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,\ i=1,\ i=2,$$

равномерно сходятся на множестве P, *то несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_{a}^{b} \bigl(\lambda_1 f_1(x,p) + \lambda_2 f_2(x,p)\bigr)\,dx,\ \forall p \in P,$$

где λ_1 *и* λ_2 *— числа из поля* $\mathbb{R}$, *равномерно сходится на* P.

Доказательство. По свойству линейности сходимости несобственного интеграла, интеграл I сходится на P и

$$I(p) = \lambda_1 I_1(p) + \lambda_2 I_2(p),\ \forall p \in P.$$

Докажем, что сходимость будет равномерной на P.

Интегралы I_1 и I_2 равномерно сходятся на множестве P, что в соответствии с определением (13) означает:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overset{**}{\eta}_\varepsilon \in [a;b),\ \forall \eta \in (\overset{**}{\eta}_\varepsilon; b)\colon \ \left| \int\limits_\eta^b f_1(x,p)\,dx \right| < \varepsilon,\ \forall p \in P;$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \widetilde{\eta}_\varepsilon \in [a;b),\ \forall \eta \in (\widetilde{\eta}_\varepsilon; b)\colon \ \left| \int\limits_\eta^b f_2(x,p)\,dx \right| < \varepsilon,\ \forall p \in P.$$

Имеет место оценка

$$\left| \int\limits_\eta^b \bigl(\lambda_1 f_1(x,p) + \lambda_2 f_2(x,p)\bigr)\,dx \right| =$$

$$= \left| \lambda_1 \int\limits_\eta^b f_1(x,p)\,dx + \lambda_2 \int\limits_\eta^b f_2(x,p)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_1| \left| \int\limits_\eta^b f_1(x,p)\,dx \right| + |\lambda_2| \left| \int\limits_\eta^b f_2(x,p)\,dx \right|,\ \forall p \in P,$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные числа, а η — любое из $[a;b)$.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overset{*}{\eta}_\varepsilon = \max\bigl\{\overset{**}{\eta}_\varepsilon, \widetilde{\eta}_\varepsilon\bigr\},\ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_\varepsilon; b)\colon$$

$$\left| \int\limits_{\eta}^{b} \big(\lambda_1 f_1(x,p) + \lambda_2 f_2(x,p)\big)\, dx \right| \leqslant (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\varepsilon, \ \forall p \in P,$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные числа, которые не зависят ни от ε, ни от p, ни от η.

В соответствии с теоремой 3 интеграл I равномерно сходится на множестве P. ■

Определение 5. *Если несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *такой, что построенный на его основании несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (12) *равномерно сходится на множестве* P, *то будем говорить, что несобственный интеграл с параметром* (7) ***равномерно абсолютно сходится на множестве*** P.

Теорема 4. *Равномерно абсолютно сходящийся на множестве несобственный интеграл, зависящий от параметра, равномерно сходится на этом множестве.*

Доказательство. Равномерная сходимость на множестве P несобственного интеграла, зависящего от параметра, (12) на языке бесконечно малых означает:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \overset{*}{\eta}_{\varepsilon} \in [a;b), \ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}; b): \\ \int\limits_{\eta}^{b} |f(x,p)|\, dx < \varepsilon, \ \forall p \in P. \end{gathered} \tag{14}$$

По свойству модуля несобственного интеграла,

$$\left| \int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\, dx \right| \leqslant \int\limits_{\eta}^{b} |f(x,p)|\, dx$$

при любом фиксированном p из P, когда $\eta \in [a,b)$.

Тогда из соотношения (14) получаем утверждение (13). ■

Пример 5. *Докажем равномерную абсолютную сходимость на интервале* $(0;1)$ *несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_{1}^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{1}{p^2}\Bigl(x-\frac{1}{p}\Bigr)^2\biggr)\,dx\,,\ \forall p\in(0;1).$$

Выполнив подстановку

$$\frac{1}{p}\Bigl(x-\frac{1}{p}\Bigr)=t,\ \ \forall t\in\Bigl[\frac{1}{p}\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr);\ +\infty\Bigr),\ 0<p<1,$$

получим

$$I(p)=p\int\limits_{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,\ \forall p\in(0;1).$$

Интеграл

$$\int\limits_{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\int\limits_{\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}^{0} e^{-t^2}\,dt+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\quad(0<p<1),$$

где первое интеграл-слагаемое суть определённый интеграл, а второе интеграл-слагаемое суть сходящийся интеграл Эйлера — Пуассона

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Поэтому интеграл I сходится на интервале $(0;1)$, причём абсолютно, как имеющий положительную подынтегральную функцию.

В соответствии с определением 5 (равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра) осталось доказать, что

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}\in[1,+\infty),\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};+\infty):$$

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{1}{p^2}\Bigl(x-\frac{1}{p}\Bigr)^2\biggr)\,dx<\varepsilon\,,\ \forall p\in(0;1).$$

Выполнив подстановку

$$\frac{1}{p}\Big(x-\frac{1}{p}\Big)=t,\ \ \forall t\in\Big[\frac{1}{p}\Big(\eta-\frac{1}{p}\Big);\ +\infty\Big),\ 0<p<1,\ \eta>\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}\geqslant 1,$$

получим

$$\Phi(\eta,p)=\int\limits_{\eta}^{+\infty}\exp\bigg(-\frac{1}{p^2}\Big(x-\frac{1}{p}\Big)^2\bigg)\,dx=$$

$$=p\int\limits_{\frac{1}{p}\left(\eta-\frac{1}{p}\right)}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt,\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};\,+\infty),\ \forall p\in(0;1).$$

Поскольку интеграл Эйлера — Пуассона сходится, то

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\theta_\varepsilon\in[0;\,+\infty),\ \forall\theta\in(\theta_\varepsilon;\,+\infty):\ \int\limits_{\theta}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt<\varepsilon.$$

Число $\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}\geqslant 1$ выберем так, что

$$\overset{*}{\eta}_{\varepsilon}\geqslant\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}+\theta,\ \forall\varepsilon\in(0;\,+\infty).$$

Тогда

$$\Phi(\eta,p)=p\int\limits_{\frac{1}{p}\left(\eta-\frac{1}{p}\right)}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt<$$

$$<\left[\begin{array}{l} p\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\,p<\varepsilon,\ \text{если}\ 0<p<\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\,,\\[2ex] \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{p}\left(\eta-\frac{1}{p}\right)}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt<\int\limits_{\eta-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt<\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt<\varepsilon,\ \ \text{если}\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant p<1,\end{array}\right.$$

что соответствует равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, I на интервале $(0; 1)$.

Пусть несобственный интеграл, зависящий от параметра, (7) сходится на множестве P, а равномерно на множестве P не сходится, то есть, интеграл (7) ***неравномерно сходится на множестве*** P.

Тогда, основываясь на определениях 2 и 4 и руководствуясь правилом де Моргана по отношению к утверждению (13), получаем следующий критерий *неравномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.*

Теорема 5. *Для того чтобы несобственный интеграл, зависящий от параметра,* (7) *неравномерно сходился на множестве* P, *необходимо и достаточно, чтобы он сходился на множестве* P (*то есть, чтобы выполнялись условия* (11)) *и выполнялось условие*

$$\forall \overset{*}{\eta} \in [a; b),\ \exists \varepsilon \in (0; +\infty),\ \exists p \in P,\ \exists \eta \in (\overset{*}{\eta}; b): \quad \left| \int\limits_{\eta}^{b} f(x, p)\, dx \right| \geqslant \varepsilon. \tag{15}$$

Заметим, что условие (15) иногда удобно рассматривать в следующем варианте

$$\forall \overset{*}{\eta} \in [a; b),\ \exists \varepsilon_0 \in (0; +\infty),\ \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0),$$

$$\exists p \in P,\ \exists \eta \in (\overset{*}{\eta}; b): \ \left| \int\limits_{\eta}^{b} f(x, p)\, dx \right| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 6. *Докажем неравномерную сходимость на открытом числовом луче* $(1; +\infty)$ *несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,,\ \forall p \in (1; +\infty).$$

Интеграл

$$I(p) = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{1}{p-1}\,,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

а поэтому сходится на открытом числовом луче $(1;\,+\infty)$.

Докажем, что сходимость неравномерная (следуя теореме 5):

$$\forall \overset{*}{\eta} \in [1;\,+\infty),\ \exists \varepsilon \in (0;\,+\infty),\ \exists \eta \in \big(\overset{*}{\eta};\,+\infty\big),$$

$$\exists p \in (1;\,+\infty)\colon\ \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \geqslant \varepsilon.$$

Действительно, интеграл

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_{x=\eta}^{x=+\infty} = \frac{\eta^{1-p}}{p-1}\,,\ \forall \eta, p \in (1;\,+\infty),$$

а предел

$$\lim_{p\to 1+0} \frac{\eta^{1-p}}{p-1} = +\infty,\ \forall \eta \in (1;\,+\infty).$$

Следовательно,

$$\forall \eta \in (1;\,+\infty),\ \exists \varepsilon \in (0;\,+\infty),\ \exists p \in (1;\,+\infty)\colon\ \frac{\eta^{1-p}}{p-1} \geqslant \varepsilon.$$

Пример 7. *Докажем неравномерную сходимость на полуоткрытом числовом луче* $[0;\,+\infty)$ *несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-p)^2+1}\,,\ \forall p \in [0;\,+\infty).$$

Интеграл

$$I(p) = \Big[\operatorname{arctg}(x-p)\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} p\,,\ \forall p \in [0;\,+\infty),$$

а поэтому сходится на полуоткрытом числовом луче $[0;\,+\infty)$.

Докажем, что сходимость неравномерная (следуя теореме 5):

$$\forall\, \overset{*}{\eta} \in [0;\,+\infty),\ \exists \varepsilon_0 \in (0;\,+\infty),\ \forall \varepsilon \in (0;\varepsilon_0),$$

$$\exists p \in [0;\,+\infty),\ \exists \eta \in (\overset{*}{\eta};\,+\infty)\colon\ \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{(x-p)^2+1} \geqslant \varepsilon.$$

В самом деле, интеграл

$$\Phi(\eta,p) = \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{(x-p)^2+1} = \Big[\operatorname{arctg}(x-p)\Big]_{x=\eta}^{x=+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\eta-p),\ \forall \eta,\, p \in [0;\,+\infty).$$

При $p=\eta$ значение

$$\Phi(\eta,\eta) = \frac{\pi}{2}\,,\ \forall \eta \in [0;\,+\infty).$$

Поэтому

$$\forall \eta \in [0;\,+\infty),\ \forall \varepsilon \in \Big(0;\frac{\pi}{2}\Big),\ \exists p=\eta\colon\ \Phi(\eta,p) = \frac{\pi}{2} > \varepsilon.$$

Пример 8. *Докажем, что* ***интеграл Дирихле***

$$D(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx,\ \forall p \in [a;b],$$

неравномерно сходится на отрезке $[a;b]$, *содержащем нуль.*

При $p>0$ подстановкой

$$px = u,\ \forall u \in (0;\,+\infty),$$

получаем:

$$D(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du, \ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$$

установим по признаку Дирихле:

1) модуль интеграла

$$\left| \int\limits_0^{\eta} \sin u\, du \right| = |\cos\eta - 1| \leqslant 2, \ \forall \eta \in [0;\, +\infty);$$

2) функция $u \to \dfrac{1}{u}$, $\forall u \in (0;\, +\infty)$, монотонно стремится к нулю при $u \to +\infty$.

Значит, интеграл Дирихле D сходится на $(0;\, +\infty)$.

При $p = 0$ интеграл $D(p) = 0$.

При $p < 0$ интеграл D сходится, так как

$$D(-p) = -D(p), \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Итак, интеграл Дирихле D сходится на отрезке $[a;b]$ вне зависимости от того, принадлежит или нет нуль этому отрезку.

Докажем неравномерную сходимость интеграла D на $[a;b]$, когда $0 \in [a;b]$, т.е. докажем выполнение условий (15) для этого интеграла:

$$\forall \overset{*}{\eta} \in (0;\, +\infty), \ \exists \varepsilon \in (0;\, +\infty), \ \exists p \in [a;b], \ 0 \in [a;b],$$

$$\exists \eta \in \bigl(\overset{*}{\eta};\, +\infty\bigr): \ \left| \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\, dx \right| > \varepsilon.$$

Пусть $p > 0$. Тогда, положив

$$px = t, \ \forall t \in [p\eta;\, +\infty),$$

получим, что

$$\int_{\eta}^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx = \int_{\eta p}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt,\ \forall p \in [a;b],\ p > 0,\ \forall \eta \in (0;\,+\infty).$$

Возьмём

$$\varepsilon_0 = \left| \int_{0{,}1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \right|.$$

Тогда

$$\forall \eta \in (0;\,+\infty),\ \forall \varepsilon \in (0;\varepsilon_0),\ \forall p \in [a;b],\ p \leqslant \frac{0{,}1}{\eta}:$$

$$\left| \int_{\eta p}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| > \left| \int_{0{,}1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| = \varepsilon_0 > \varepsilon.$$

При $p < 0$ применим подстановку

$$-\,px = t,\ \forall t \in [\,-\,p\eta;\,+\infty),$$

и, проведя аналогичные рассуждения, придём к такому же выводу. Тем и докажем неравномерную сходимость интеграла Дирихле в указанном случае.

1.4. Связь между сходимостью несобственного интеграла, зависящего от параметра, и сходимостью функции двух переменных

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, как одинарный предел функции двух переменных. Функция, заданная несобственным интегралом, зависящим от параметра. Критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, на основании равномерной сходимости функции двух переменных к предельной функции.

В определении (5) определённый интеграл

$$\int_{a}^{\eta} f(x,p)\,dx \tag{16}$$

имеет переменный верхний предел интегрирования $\eta \in [a; b)$ и переменный параметр $p \in P$. Поэтому определённым интегралом (16) задаётся функция двух переменных

$$\Phi\colon (\eta, p) \to \int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx,\ \forall \eta \in [a;b),\ \forall p \in P. \tag{17}$$

С учётом интерпретации (17) определение (5) запишем в следующем виде

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \lim_{\eta \to b-0} \Phi(\eta, p),\ \forall p \in P. \tag{18}$$

Это позволяет трактовать несобственный интеграл, зависящий от параметра, следующим образом.

Предложение 1. *Несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

есть предел функции двух переменных (17) *при* $\eta \to b-0$.

Предел в равенстве (18), если он существует, является функцией одной переменной

$$\lim_{\eta \to b-0} \Phi(\eta, p) = I(p),\ \forall p \in P. \tag{19}$$

Существование предела (19) есть стремление функции двух переменных (17) к предельной функции I на множестве P при $\eta \to b-0$.

Сопоставляя равенства (18) и (19), получаем

Предложение 2. *Сходящийся на множестве* P *несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$

при любом p из множества P является функцией одной переменной

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P. \tag{20}$$

Стремление функции двух переменных

$$\Phi\colon (\eta, p) \to \Phi(\eta, p),\ \forall \eta \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

к предельной функции

$$I\colon p \to I(p),\ \forall p \in P,$$

на множестве P при $\eta \to b-0$ может происходить как поточечно, так и равномерно.

В случае равномерной сходимости на языке «$\varepsilon{-}\delta$» имеем:

$$\mathbf{def}\colon \Phi(\eta,p) \underset{\eta\to b-0}{\overset{}{\rightrightarrows}} I(p),\ \forall p \in P,\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \overset{*}{\eta}_\varepsilon \in [a;b),\ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_\varepsilon; b)\colon \tag{21}$$

$$|\Phi(\eta,p) - I(p)| < \varepsilon,\ \forall p \in P.$$

Теорема 6. *Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

на множестве P равносильна равномерной сходимости функции двух переменных (17) *к предельной функции* (19) *на множестве P при $\eta \to b-0$.*

Доказательство. Функции (17) и (20) таковы, что модуль их разности

$$|\Phi(\eta, p) - I(p)| = \left| \int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx - \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx \right| =$$
$$= \left| \int\limits_{\eta}^{a} f(x,p)\,dx + \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx \right| = \left| \int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right|, \tag{22}$$

при любом $\eta \in [a; b)$ и при любом $p \in P$.

Здесь свойство аддитивности использовано на том основании, что интеграл

$$\int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx$$

является определённым.

Равенством (22) устанавливается равносильность определений (13) и (21). ■

Критерий, содержащийся в теореме 5, позволяет сформулировать равномерную сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра,

$$I(p) = \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

как равномерную сходимость определённого интеграла, зависящего от параметра, (16) с переменным верхним пределом интегрирования $\eta \in [a; b)$ при $\eta \to b - 0$ к интегралу I:

$$\int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx \underset{\eta \to b-0}{\rightrightarrows} \int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P. \tag{23}$$

1.5. Связь между сходимостями несобственного интеграла, зависящего от параметра, и функциональных рядов

Построение сходящегося (равномерно сходящегося) на множестве функционального ряда по сходяшемуся (равномерно сходящемуся) на множестве несобственному интегралу, зависяшему от параметра. Признаки сходимости (равномерной сходимости) на множестве несобственного интеграла, зависяшего от параметра, на основании сходимости функциональных рядов.

Пусть $\{\eta_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — некоторая числовая последовательность такая, что выполняются условия:

$$1)\ \eta_1 = a; \quad 2)\ \eta_i \in [a;b),\ i = 1, 2, \dots ; \quad 3)\ \lim_{i\to+\infty} \eta_i = b.$$

Составим функциональный ряд

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P. \tag{24}$$

Частичная сумма ряда (24)

$$S_{n-1}(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} f(x,p)\,dx = \int\limits_{a}^{\eta_n} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P. \tag{25}$$

Сопоставляя определение 2 (сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра) и определение сходимости на множестве функционального ряда, а также сопоставляя критерий-определение (23) (равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра) и определение равномерной сходимости функционального ряда, получаем

Теорема 7. *Если несобственный интеграл с параметром*

$$I(p) = \int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится (*равномерно сходится*) *на множестве* P, *то на множестве* P *сходится* (*равномерно сходится*) *и функциональный ряд* (24), *причём*

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P. \tag{26}$$

В самом деле, с учётом (25) при любом p из множества P

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx \iff \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^{\eta_n} f(x,p)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(p) = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx. \ \blacksquare$$

Если использовать критерий-определение Гейне существования предела, а также критерий-определение Гейне равномерной сходимости функции двух переменных (теоремы 1.1.1.1 и 1.4.1.1), то получим, что имеет место

Теорема 8. *Если для всякой числовой последовательности* $\{\eta_i\}_{i=1}^{+\infty}$, *удовлетворяющей условиям*:

$$1)\ \eta_1 = a; \quad 2)\ \eta_i \in [a;b),\ i=1,2,\ldots\,; \quad 3)\ \lim_{i\to+\infty} \eta_i = b,$$

функциональные ряды (24) *сходятся* (*равномерно сходятся*) *на множестве* P, *то на множестве* P *сходится* (*равномерно сходится*) *и несобственный интеграл с параметром*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

причём выполняется равенство (26).

1.6. Ещё одно определение равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметров, через предел точной верхней грани несобственного интеграла, зависящего от параметра, с переменным нижним пределом интегрирования.

Наряду с определением 4 равномерную сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра, можно определить через равномерную сходимость функции двух переменных (теорема 6) и через равномерную сходимость функциональных рядов (теорема 8).

В практических целях часто удобно использовать

Определение 6. *Сходящийся на множестве P несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

назовём ***равномерно сходящимся на множестве*** P, *если*

$$\lim_{\eta\to b-0}\ \sup_{p\in P}\left|\ \int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx\right| = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Прямое утверждение. По определению 4,

$$\left|\ \int\limits_\eta^b f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon, \tag{28}$$

что имеет место сразу при всех p лишь бы они только принадлежали множеству P.

Это означает ограниченность на множестве P функции

$$p \to \left| \int_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right|, \ \forall p \in P. \tag{29}$$

Ограниченность гарантирует существование точной верхней грани у функции (29) на множестве P, при этом имеет место оценка

$$\sup_{p \in P} \left| \int_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Если теперь основываться на определении 4, то от соотношения (13) можем перейти к утверждению

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \overset{*}{\eta}_{\varepsilon} \in [a;b), \ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};b) \colon \ \sup_{p \in P} \left| \int_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что имеет место равенство (27).

Итак, из определения 4 следует определение 6.

Обратное утверждение. Равенство (27) на языке бесконечно малых означает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \overset{*}{\eta}_{\varepsilon} \in [a;b), \ \forall \eta \in (\overset{*}{\eta}_{\varepsilon};b) \colon \ \sup_{p \in P} \left| \int_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{30}$$

Ограниченность точной верхней грани

$$\sup_{p \in P} \left| \int_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon$$

влечёт за собой ограниченность функции (29) на множестве P, то есть, что

$$\left| \int\limits_{\eta}^{b} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon,\ \forall p \in P.$$

Поэтому из соотношения (30) следует утверждение (13).
Итак, из определения 6 получили определение 4. ■

1.7. Критерии Коши сходимости на множестве и равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Критерий Коши сходимости (равномерной сходимости) на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра. М-критерий Коши сходимости (равномерной сходимости) на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Определение 2 позволяет перенести критерий Коши сходимости несобственного интеграла на случай, когда несобственный интеграл зависит от параметра.

Теорема 9 (*критерий Коши сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε и для любого p из множества P на числовом промежутке $[a;b)$ содержится такое число $\widetilde{\eta}$, зависящее от ε и от x, что для любых чисел $\overset{*}{\eta}$ и $\overset{**}{\eta}$ из открытого числового промежутка $(\widetilde{\eta};b)$ выполняется неравенство

$$\left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx \right| < \varepsilon.$$

В символах:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in P,\ \exists \widetilde{\eta}_{\varepsilon p} \in [a;b),\ \forall \overset{*}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};b),$$
$$\forall \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};b)\colon \left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{31}$$

Теорема 10 (*критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P$, *равномерно сходится на множестве* P *тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *на числовом промежутке* $[a;b)$ *содержится такое число* $\widetilde{\eta}$, *зависящее от* ε, *что для любых чисел* $\overset{*}{\eta}$ *и* $\overset{**}{\eta}$ *из открытого числового промежутка* $(\widetilde{\eta};b)$ *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon$ *для всех значений параметра* p *из* P.

В символах:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \widetilde{\eta}_{\varepsilon} \in [a;b),\ \forall \overset{*}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon};b),$$
$$\forall \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon};b)\colon \left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < \varepsilon,\ \forall p \in P. \tag{32}$$

Доказательство. В соответствии с утверждениями (2.6.1.1) и (3.6.1.1) критерий Коши равномерной сходимости функции двух переменных

$$\Phi\colon (\eta,p) \to \Phi(\eta,p),\ \forall \eta \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

на множестве P при $\eta \to b-0$ запишем следующим образом:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\ \exists\widetilde{\eta}_\varepsilon\in[a;b),\ \forall\overset{*}{\eta}\in(\widetilde{\eta}_\varepsilon;b),\\ \forall\overset{**}{\eta}\in(\widetilde{\eta}_\varepsilon;b)\colon\ \bigl|\Phi(\overset{*}{\eta},p)-\Phi(\overset{**}{\eta},p)\bigr|<\varepsilon,\ \forall p\in P.\end{gathered}\tag{33}$$

В случае, когда функция Φ задана определённым интегралом, зависящим от параметров, (16) по формуле (17), модуль разности

$$\begin{gathered}\bigl|\Phi(\overset{**}{\eta},p)-\Phi(\overset{**}{\eta},p)\bigr|=\left|\int\limits_a^{\overset{**}{\eta}}f(x,p)\,dx-\int\limits_a^{\overset{*}{\eta}}f(x,p)\,dx\right|=\\ =\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{a}f(x,p)\,dx+\int\limits_a^{\overset{**}{\eta}}f(x,p)\,dx\right|=\\ =\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}}f(x,p)\,dx\right|,\ \forall p\in P,\ \ \forall\overset{*}{\eta},\overset{**}{\eta}\in[a;b).\end{gathered}\tag{34}$$

Соотношение (33) с учётом равенства (34) имеет вид (32).

Значит, функция (17) при $\eta\to b-0$ на множестве P равномерно сходится тогда и только тогда, когда выполняется утверждение (32).

Отсюда с учётом теоремы 6 приходим к утверждению доказываемой теоремы. ■

Обратим внимание на то, что критерии Коши (30) и (31) не указывают функцию, к которой на множестве P сходится несобственный интеграл, зависящий от параметра. Критерии Коши (30) и (31) лишь дают ответ на вопрос о наличии сходимости на множестве и равномерной сходимости у несобственного интеграла, зависящего от параметра. Поэтому критерии Коши относятся к теоремам существования. В данном случае существования сходимости на множестве и равномерной сходимости у несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Используя M-критерий бесконечно малой, по критериям Коши (31) и (32), получаем следующие M-критерии сходимостей несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 11 (*M-критерий Коши сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *сходится на множестве* P *тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *и для любого* p *из множества* P *на числовом промежутке* $[a;b)$ *содержится такое число* $\widetilde{\eta}$, *зависящее от* ε *и от* x, *что для любых чисел* $\overset{*}{\eta}$ *и* $\overset{**}{\eta}$ *из открытого числового промежутка* $(\widetilde{\eta};b)$ *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon$, *где положительное число* M *не зависит ни от* ε, *ни от* p, *ни от* $\overset{*}{\eta}$, *ни от* $\overset{**}{\eta}$.

В символах:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in P,\ \exists \widetilde{\eta}_{\varepsilon p} \in [a;b),\ \forall \overset{*}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};b),\ \forall \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};b):$$

$$\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon, \quad \text{где} \quad M > 0$$

и не зависит ни от ε, *ни от* p, *ни от* $\overset{*}{\eta}$, *ни от* $\overset{**}{\eta}$.

Теорема 12 (*M-критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *равномерно сходится на множестве* P *тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *на числовом промежутке* $[a;b)$ *содержится такое число* $\widetilde{\eta}$, *зависящее от* ε, *что для любых чисел* $\overset{*}{\eta}$ *и* $\overset{**}{\eta}$ *из открыто-*

го числового промежутка $(\widetilde{\eta}; b)$ *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon$ *для всех значений параметра* p *из множества* P, *а положительное число* M *не зависит ни от* ε, *ни от* p, *ни от* $\overset{*}{\eta}$, *ни от* $\overset{**}{\eta}$.

В символах:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\widetilde{\eta}_\varepsilon \in [a;b),\ \forall\overset{*}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_\varepsilon; b),\ \forall\overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_\varepsilon; b):$$

$$\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} f(x,p)\,dx\right| < M\varepsilon,\ \forall p \in P,\ \ \textit{где}\ \ M > 0$$

и не зависит ни от ε, *ни от* p, *ни от* $\overset{*}{\eta}$, *ни от* $\overset{**}{\eta}$.

2. Исследование на сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра: сравнения; предельный признак сравнения и следствия из него. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признак Харди сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.

Если вести речь о сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметров, то прежде всего следует помнить, что сходимость может быть установлена непосредственным вычислением этих интегралов. Так мы поступили в подпункте 2 пункта 1, когда оговаривали сходимость интегралов (1.1), (3.1), (4.1) и (6.1) на основании вычислений, проведённых в примерах 1.1, 2.1, 3.1 и 4.1.

Определения 1.1 и 2.1 позволяют распространить признаки сходимости несобственных интегралов на те случаи, когда несобственные интегралы содержат один или несколько параметров.

Доказательство каждого такого признака однотипно и состоит в том, что условия соответствующего признака для несобственного интеграла должны выполняться при каждом фиксированном значении параметра.

Пример 1. Интеграл, зависящий от двух параметров,

$$I(p,q)=\int\limits_0^1 |x^{q-1}-x^{p-1}|\,dx,\ \forall p,q\in(0;\,+\infty),$$

при $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$ является определённым, а если хотя бы один из положительных параметров p и q меньше единицы, то интеграл — несобственный второго рода на полуинтервале $(0;1]$.

Пусть $q\geqslant p>0$. Тогда

$$x^{q-1}\leqslant x^{p-1},\ \forall x\in(0;1],$$

и интеграл

$$I(p,q)=\int\limits_0^1 |x^{q-1}-x^{p-1}|\,dx=\int\limits_0^1 (x^{p-1}-x^{q-1})\,dx=$$

$$=\Big[\frac{1}{p}\,x^p-\frac{1}{q}\,x^q\Big]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{q-p}{pq}\,.$$

Здесь в зависимости от параметров p и q в точке $x=0$ двойная подстановка предполагает вычисление то значения функции (если $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$), то правостороннего предела (если $0<p<1$ или $0<q<1$), которые совпадают ввиду положительности параметров p и q.

Пусть $p>q>0$. Тогда

$$x^{p-1}\leqslant x^{q-1},\ \forall x\in(0;1],$$

и аналогично предыдущему случаю находим:

$$I(p,q)=\int\limits_0^1 |x^{q-1}-x^{p-1}|\,dx=\int\limits_0^1 (x^{q-1}-x^{p-1})\,dx=$$

$$=\Big[\frac{1}{q}\,x^q-\frac{1}{p}\,x^p\Big]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=\frac{p-q}{pq}\,.$$

Итак, интеграл I сходится на $P = (0;\, +\infty) \times (0;\, +\infty)$ и равен

$$I(p,q) = \frac{|p-q|}{pq}\,,\ \forall (p,q) \in P.$$

2.1. Признак сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признак сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла состоит в следующем.

Предложение 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *функции* $f\colon [a;b) \to \mathbb{R}$ *и* $g\colon [a;b) \to \mathbb{R}$ *неотрицательны при* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *сужения функций* f *и* g *интегрируемы по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$ *из числового промежутка* $[a;b)$;

3) *функция* f *ограничена по сравнению с функцией* g *при* $x \to b-0$.

Тогда имеют место утверждения:

а) *из сходимости интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

б) *из расходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

В соответствии с определениями 1.1 и 2.1 этот признак на случай, когда несобственный интеграл содержит параметр, распространяется следующим образом.

Теорема 1 (*признак сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функции*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

и

$$g\colon (x,p) \to g(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *являются функциями одной переменной*

$$f_p\colon x \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b), \quad \textit{и} \quad g_p\colon x \to g(x,p),\ \forall x \in [a;b),$$

сужения которых интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$, *где* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функции* f_p *и* g_p *неотрицательны на числовом промежутке* $[a;b)$:

$$\forall p \in P\colon f_p(x) \geqslant 0 \ \ \&\ \ g_p(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a;b);$$

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция* f_p *ограничена по сравнению с функцией* g_p *при* $x \to b-0$:

$$\forall p \in P\colon f_p(x) = O(g_p(x)) \quad \textit{при} \quad x \to b-0.$$

Тогда имеют место утверждения:

а) *из сходимости на множестве* P *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx,\ \forall p \in P$, *следует сходимость на множестве* P *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P$;

б) *из расходимости в точке* p *из* P *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P$, *следует расходимость в точке* p *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx,\ \forall p \in P$.

Пример 2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \Big(2 + \sin\frac{x}{p}\Big) \exp\frac{x}{p}\, dx,\ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

таков, что для его подынтегральной функции справедливы оценки

$$0 < \exp\frac{x}{p} \leqslant \Big(2 + \sin\frac{x}{p}\Big) \exp\frac{x}{p} \leqslant 3\exp\frac{x}{p}\,,$$

$$\forall x \in [0; +\infty),\ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

В примере 1.1 доказано, что несобственный интеграл, зависящий от параметра, (1.1)

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\frac{x}{p}\, dx,\ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

сходится на отрицательном числовом луче $(-\infty; 0)$, а при каждом положительном значении параметра p расходится.

Поэтому в соответствии с признаком сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1) интеграл I сходится (абсолютно и поточечно) на числовом луче $(-\infty; 0)$, а при $p > 0$ интеграл I расходится.

Пример 3. *Докажем, что несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + 1}\,,\ \forall p \in (1; +\infty),$$

неравномерно сходится на открытом числовом луче $(1; +\infty)$.

Поскольку

$$0 < \frac{1}{x^p + 1} < \frac{1}{x^p}\,,\ \forall x, p \in (1; +\infty),$$

а несобственный интеграл первого рода, содержащий параметр,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

сходится на числовом луче $(1;\,+\infty)$, то, по признаку сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл, содержащий параметр,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+1}\,,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

сходится на числовом луче $(1;\,+\infty)$.

Интеграл

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p+1}\,,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

является определённым, зависящим от параметра.

Поэтому интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p+1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+1}\,,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

абсолютно сходится на числовом луче $(1;\,+\infty)$.

Для доказательства неравномерной сходимости интеграла I сначала укажем оценку:

$$\int\limits_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^p+1} > \frac{1}{2}\int\limits_\eta^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{2(1-p)}\left[\frac{1}{x^{p-1}}\right]_{x=\eta}^{x=+\infty} =$$

$$= \frac{\eta^{1-p}}{2(p-1)}\,,\ \forall p,\eta \in (1;\,+\infty).$$

Так как

$$\lim_{p\to 1+0} \frac{\eta^{1-p}}{2(p-1)} = +\infty,\ \forall \eta \in (1;\,+\infty),$$

то имеем:

$$\forall \eta \in (1; +\infty),\ \exists \varepsilon \in (0;\ +\infty),\ \exists p \in (1;\ +\infty)\colon\ \frac{\eta^{1-p}}{2(p-1)} \geqslant \varepsilon.$$

Стало быть,

$$\forall \overset{*}{\eta} \in (0;\ +\infty),\ \exists \varepsilon \in (0;\ +\infty),\ \exists \eta \in (\overset{*}{\eta};\ +\infty),$$

$$\exists p \in (1;\ +\infty)\colon\ \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^p+1} > \varepsilon.$$

По теореме 5.1, интеграл I сходится неравномерно на $(1;\ +\infty)$.

2.2. Предельный признак сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственных интегралов, зависящих от параметра

Предельный признак сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла состоит в следующем.

Предложение 2. *Пусть функции*

$$f\colon [a;b) \to \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad g\colon [a;b) \to \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b \leqslant +\infty,$$

обладают следующими свойствами:

1) *функция f неотрицательна;*

2) *функция g положительна;*

3) *сужения функций f и g интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, содержащемся в промежутке $[a;b)$*;

4) *предел*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

где k — неотрицательное вещественное число или $+\infty$.

Тогда имеют место утверждения:

a) *если $0 \leqslant k < +\infty$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;*

б) если $0 < k \leqslant +\infty$, *то из расходимости интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

На основании этого признака и следствий из него в соответствии с определениями 1.1 и 2.1 получаем следующие признаки сходимости на множестве несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 2 (*предельный признак сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функции*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

и

$$g\colon (x,p) \to g(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *являются функциями одной переменной*

$$f_p\colon x \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b), \quad \text{и} \quad g_p\colon x \to g(x,p),\ \forall x \in [a;b),$$

сужения которых интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *при каждом* p *из множества* P *функция* f_p *неотрицательна на числовом промежутке* $[a;b)$:

$$\forall p \in P\colon\ f_p(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a;b);$$

3) *при каждом* p *из множества* P *функция* g_p *положительна на числовом промежутке* $[a;b)$:

$$\forall p \in P\colon g_p(x) > 0,\ \forall x \in [a;b);$$

4) *при каждом* p *из множества* P *предел*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x,p)}{g(x,p)} = k_p\,,\ \ 0 \leqslant k_p \leqslant +\infty.$$

Тогда имеют место утверждения:

а) если при любом p *из множества* P *предел* k_p *такой, что* $0 \leqslant k_p < +\infty$, *то из сходимости на множестве* P *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *следует сходимость на множестве* P *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$;

б) если при фиксированном p *из* P *предел* k_p *такой, что* $0 < k_p \leqslant +\infty$, *то из расходимости в точке* p *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *следует расходимость в точке* p *несобственного интеграла, зависящего от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$.

Пример 4. Несобственный интеграл

$$I(p,q) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

рассмотрим в предположении, что полином-числитель P имеет степень $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $P(x) \not\equiv 0$, а полином-знаменатель Q степени $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что на полуоткрытом числовом луче $[a; +\infty)$ у него нет нулей. Этим обеспечиваем, что интеграл I, зависящий от параметров p и q, является несобственным первого рода.

Пусть положительное число ρ больше всех нулей полинома P и больше числа a.

Тогда интеграл

$$I(p,q) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int\limits_a^{\rho} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx + \int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Интеграл-слагаемое

$$I_1(p,q) = \int\limits_a^{\rho} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

является определённым при любых целых неотрицательных p и q. Поэтому несобственный интеграл, зависящий от параметров, I сходится при тех и только тех значениях параметров p и q, при которых сходится интеграл-слагаемое

$$I_2(p,q) = \int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

У интеграла I_2 подынтегральная функция при любых целых неотрицательных p и q является функцией одной переменной, непрерывной и знакоопределённой на числовом луче $[\rho;\,+\infty)$. Поэтому для исследования интеграла I_2 на сходимость можем использовать предельный признак сравнения (теорема 2), считая, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,\ \forall x \in [\rho;\,+\infty)$$

(в противном случае рассматриваем интеграл $-I_2$).

В качестве функций сравнения возьмём функции

$$g_\lambda\colon x \to x^\lambda,\ \forall x \in [\rho;\,+\infty),\ \lambda = 1,\ \lambda = 2.$$

Пределы отношений

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{P(x)}{Q(x)}\colon \frac{1}{x^\lambda}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\lambda P(x)}{Q(x)} = A_\lambda$$

таковы, что $0 < A_1 \leqslant +\infty$ при $q-p \leqslant 1$, $0 \leqslant A_2 < +\infty$ при $q-p > 1$.

Несобственный интеграл

$$\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

расходится, а несобственный интеграл

$$\int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится $(\rho > 0)$.

Значит, по теореме 2, интеграл I_2, а вместе с ним и интеграл I, сходятся при $q-p>1$ и расходятся при $q-p \leqslant 1$. Причём сходимость является абсолютной.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия* 1), 2) *и* 3) *теоремы* 2, *а также при каждом* p *из множества* P *функции* f_p *и* g_p *эквивалентны при* $x \to b-0$:

$$f_p(x) \sim g_p(x) \quad \textit{при} \quad x \to b-0, \ \forall p \in P.$$

Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *сходится на множестве* P, *если и только если на множестве* P *сходится несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$.

Пример 5. Интеграл, зависящий от двух параметров,

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a + x^b}\,, \ \forall a,b \in \mathbb{R},$$

при $a=b=0$ является несобственным первого рода на полуоткрытом числовом луче $[0;\,+\infty)$, а при $|a|+|b| \neq 0$ является несобственным на открытом числовом луче $(0;+\infty)$, причём подынтегральная функция положительная.

Если $b=a$, то несобственный интеграл I расходится в каждой точке (a,a) из $\mathbb{R}^2$, ибо при любом вещественном a интегралы $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x^a}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^a}$ не сходятся одновременно.

Пусть $a<b$. Представим интеграл I в виде суммы интегралов

$$I(a,b) = I_1(a,b) + I_2(a,b),\ \forall (a,b) \in G,$$

где

$$I_1(a,b) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^a + x^b}\,,\ \forall (a,b) \in G,$$

$$I_2(a,b) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a + x^b}\,,\ \forall (a,b) \in G,\ G = \{(a,b)\colon a < b\}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{1}{x^a(1 + x^{b-a})} \sim \frac{1}{x^a} \quad \text{при} \quad x \to +0,\ \forall (a,b) \in G,$$

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{1}{x^b(1 + x^{a-b})} \sim \frac{1}{x^b} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,\ \forall (a,b) \in G,$$

то, по следствию 1, заключаем, что интеграл I_1 сходится на множестве

$$G_1 = \{(a,b)\colon a < 1,\ b > a\},$$

а в каждой точке (a,b) множества

$$G_2 = \{(a,b)\colon b > a \geqslant 1\}$$

интеграл I_1 расходится; на множестве

$$G_3 = \{(a,b)\colon a < b,\ b > 1\}$$

интеграл I_2 сходится, а в каждой точке (a,b) множества

$$G_4 = \{(a,b)\colon a < b \leqslant 1\}$$

интеграл I_2 расходится.

Следовательно, на множестве

$$G_5 = G_1 \cap G_3 = \{(a,b)\colon a < 1,\ b > 1\}$$

интеграл I сходится, а в каждой точке (a,b) множества $G \backslash G_5$ интеграл I расходится.

Учитывая цикличность вхождения параметров a и b в задание несобственного интеграла, содержащего параметры, I, делаем вывод о том, что интеграл I сходится на множестве

$$D_1 = \{(a,b)\colon a > 1,\ b < 1\},$$

а в каждой точке множества $D_2 = D \backslash D_1$, где

$$D = \{(a,b)\colon a > b\},$$

интеграл I расходится.

Эти случаи объединим и получим, что интеграл I сходится на множестве

$$J = \{(a,b)\colon \min\{a,b\} < 1,\ \max\{a,b\} > 1\},$$

а в каждой точке (a,b) из множества $\mathbb{R}^2 \backslash J$ расходится.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* 1), 2) *и* 3) *теоремы* 2, *а также при каждом* p *из множества* P *функция* f_p *является бесконечно малой по сравнению с функцией* g_p *при* $x \to b-0$:

$$f_p(x) = o(g_p(x)) \quad \textit{при} \quad x \to b-0,\ \forall p \in P.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) если несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$ *сходится на множестве* P, *то на множестве* P *сходится и несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P;$

б) если при фиксированном p *из* P *несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$ *расходится, то в точке* p *расходится и несобственный интеграл, зависящий от параметра,* $\int\limits_a^b g(x,p)\,dx,\ \forall p \in P.$

Пример 6. Интеграл, зависящий от двух параметров,

$$I(p,q)=\int\limits_0^1 \frac{x^{q-1}-x^{p-1}}{\ln x}\,dx,\ \forall p,q\in(0;\,+\infty),$$

при $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$ является определённым, а если хотя бы один из положительных параметров p и q меньше единицы, то интеграл — несобственный второго рода на полуинтервале $(0;1]$.

Это следует из того, что при любых фиксированных положительных p и q подынтегральная функция является функцией одной переменной, сужение которой непрерывно на $(0;1)$, а пределы

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^{q-1}-x^{p-1}}{\ln x}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\partial_x(x^{q-1}-x^{p-1})}{\mathsf{D}\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\big((q-1)x^{q-1}-(p-1)x^{p-1}\big)=q-p,\ \forall p,q\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^{\gamma-1}}{\ln x}=0,\ \forall\gamma\in[1;\,+\infty),$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^{\gamma-1}}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\partial_x x^{\gamma-1}}{\mathsf{D}\ \ln x}=(\gamma-1)\lim_{x\to+0}x^{\gamma-1}=\,-\infty,\ \forall\gamma\in(0;1).$$

Пусть параметр $p\in(0;1)$ или параметр $q\in(0;1)$.

Тогда предел отношения

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{|x^{q-1}-x^{p-1}|}{|\ln x|}:|x^{q-1}-x^{p-1}|\right)=\,-\lim_{x\to+0}\frac{1}{\ln x}=0,$$

то есть,

$$\frac{|x^{q-1}-x^{p-1}|}{|\ln x|}=o\big(|x^{q-1}-x^{p-1}|\big)\quad\text{при}\quad x\to\,+0.$$

В примере 1 непосредственным вычислением доказано, что несобственный интеграл, зависящий от параметров,

$$\int\limits_0^1 |x^{q-1} - x^{p-1}|\, dx,\ \forall p, q \in (0;\, +\infty),$$

сходится на множестве $P = (0;\, +\infty) \times (0;\, +\infty)$.

Поэтому в соответствии со следствием 2 на множестве P сходится и несобственный интеграл, зависящий от параметров,

$$\int\limits_0^1 \frac{|x^{q-1} - x^{p-1}|}{|\ln x|}\, dx,\ \forall p, q \in (0;\, +\infty).$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл, зависящий от параметров, I абсолютно сходится на множестве P.

Пример 7. У интеграла, зависящего от параметра,

$$I(p) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin^2 x - p^2|\, dx,\ \forall p \in [-1; 1],$$

при каждом фиксированном p из отрезка $[-1; 1]$ подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной, сужения которой непрерывны на полуинтервалах $[0; |\arcsin p|)$ и $\Bigl(|\arcsin p|; \dfrac{\pi}{2}\Bigr]$, а пределы

$$\lim\limits_{x \to |\arcsin p| \pm 0} \ln|\sin^2 x - p^2| = -\infty.$$

Поэтому I — несобственный интеграл, зависящий от параметра, с подвижной особой точкой

$$x = |\arcsin p|,\ \forall p \in [-1; 1].$$

С помощью замены параметра

$$|p| = \sin\varphi,\ \forall \varphi \in \Bigl[0; \frac{\pi}{2}\Bigr],$$

интеграл I приводим к несобственному интегралу, зависящему от параметра,

$$\overset{*}{I}(\varphi) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin^2 x - \sin^2 \varphi|\, dx,\ \forall \varphi \in \Bigl[0; \frac{\pi}{2}\Bigr],$$

с подвижной особой точкой $x = \varphi,\ \forall \varphi \in \Bigl[0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr]$.

При каждом фиксированном значении параметра φ из отрезка $\Bigl[0; \dfrac{\pi}{2}\Bigr]$ у интеграла $\overset{*}{I}$ подынтегральная функция является функцией одной переменной, сужения которой непрерывны и неположительны на полуинтервалах $[0;\varphi)$ и $\Bigl(\varphi; \dfrac{\pi}{2}\Bigr]$, а пределы

$$\lim_{x\to\varphi\pm 0} |\sin^2 x - \sin^2 \varphi| = -\infty.$$

При $0 < \lambda < 1$ пределы отношения

$$\lim_{x\to\varphi\pm 0}\biggl(\bigl(\ln|\sin^2 x - \sin^2\varphi|\bigr) : \frac{1}{|x-\varphi|^\lambda}\biggr) =$$

$$= \lim_{x\to\varphi\pm 0}\biggl(\Bigl|\frac{x-\varphi}{\sin x - \sin\varphi}\Bigr|^\lambda |\sin x - \sin\varphi|^\lambda (\ln|\sin x - \sin\varphi| +$$

$$+ \ln|\sin x + \sin\varphi|)\biggr) = \lim_{x\to\varphi\pm 0}(|\sin x - \sin\varphi|^\lambda \ln|\sin x - \sin\varphi|) +$$

$$+ \lim_{x\to\varphi\pm 0}(|\sin x - \sin\varphi|^\lambda \ln|\sin x + \sin\varphi|) = 0,\ \forall\varphi\in\Bigl[0; \frac{\pi}{2}\Bigr],$$

то есть, при $0 < \lambda < 1$

$$\ln|\sin^2 x - \sin^2\varphi| = o\left(\frac{1}{|x-\varphi|^\lambda}\right) \quad \text{при} \quad x \to \varphi \pm 0,\ \forall\varphi\in\Bigl[0; \frac{\pi}{2}\Bigr].$$

Учитывая сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|x-\varphi|^{\lambda}}\,,\ \forall \varphi \in \Big[0; \frac{\pi}{2}\Big],$$

при $0<\lambda<1$ на отрезке $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, по следствию 2, заключаем об абсолютной сходимости на отрезке $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$ интеграла $\overset{*}{I}$.

Отсюда следует абсолютная сходимость несобственного интеграла I на отрезке $[-1;1]$.

Пример 8. *Докажем, что несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx,\ \forall p \in [0;\, +\infty),$$

неравномерно абсолютно сходится на неотрицательном числовом луче.

При любом положительном p предел

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt{p}\, e^{-px^2} : \frac{1}{x^2}\Big) = \sqrt{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{px^2}} = 0,$$

а несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится.

По следствию 2 (предельный признак сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра), интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx$$

абсолютно сходится на положительном числовом луче.

Интеграл

$$\int\limits_0^1 \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx,\ \forall p \in [0;\, +\infty),$$

является определённым, зависящим от параметра.

При $p = 0$ интеграл $I(0) = 0$, то есть, интеграл I абсолютно сходится в точке $p = 0$.

Поэтому интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^1 \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx,\ \forall p \in [0;\, +\infty),$$

абсолютно сходится на числовом луче $[0;\, +\infty)$.

То, что абсолютная сходимость на числовом луче $[0;\, +\infty)$ неравномерная, заключаем по теореме 5.1, исходя из того, что

$$\forall \eta \in (0; +\infty),\ \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt,\ \forall p = \frac{1}{\eta^2}:$$

$$\int\limits_\eta^{+\infty} \sqrt{p}\, e^{-px^2}\, dx = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \varepsilon_0 > \varepsilon.$$

Число ε_0 определяется однозначно, ибо оценивается с помощью интеграла Эйлера — Пуассона

$$0 < \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Следствие 3 (*предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра*). *Пусть функция*

$$f\colon (x, p) \to f(x, p),\ \forall x \in [a;\, +\infty),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной*

$$f_p\colon x \to f(x,p),\ \forall x \in [a;\,+\infty),$$

которая обладает следующими свойствами:

1) *сужение интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом луче* $[a;\,+\infty)$;

2) *неотрицательна*:

$$\forall p \in P\colon\ f_p(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a;\,+\infty);$$

3) *является бесконечно малой порядка* λ_p *при* $x \to +\infty$:

$$\forall p \in P\colon\ f_p(x) = o\Big(\frac{1}{x^{\lambda_p}}\Big) \quad \textit{при} \quad x \to +\infty.$$

Тогда несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$ *при* $0 < \lambda_p \leqslant 1$ *расходится в каждой точке* p *множества* P, *а при* $\lambda_p > 1$ *сходится на множестве* P.

Пример 9. Интеграл, зависящий от четырёх параметров,

$$I(a,\alpha,\beta,\nu) = \int\limits_0^{+\infty} x^\nu\, e^{-ax} \operatorname{arctg}^\beta \alpha x\, dx,\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a,\beta,\nu \in (0;\,+\infty),$$

является несобственным первого рода.

При $\lambda > 0$ предел отношения

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(x^\nu e^{-ax}\colon x^{\frac{1}{\lambda}}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\lambda+\nu}}{e^{ax}} = 0,\ \forall \nu, a \in (0;\,+\infty),$$

то есть,

$$x^\nu e^{-ax} = o\Big(\frac{1}{x^\lambda}\Big) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,\ \forall \nu, a \in (0;\,+\infty).$$

В соответствии с предельным признаком сравнения Коши для несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра, — следствие 3 — интеграл

$$S(a,\nu)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\nu}e^{-ax}\,dx,\ \forall a,\nu\in(0;+\infty),$$

сходится на множестве $D=\{(a,\nu)\colon a>0,\ \nu>0\}$.

Если теперь учесть, что имеет место оценка

$$|x^{\nu}e^{-ax}\operatorname{arctg}^{\beta}\alpha x|=O(x^{\nu}e^{-ax})\quad\text{при}\quad x\to+\infty,$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall a,\beta,\nu\in(0;+\infty),$$

то на основании признака сравнения (теорема 1) заключаем об абсолютной сходимости интеграла I на множестве

$$G=\{(a,\alpha,\beta,\nu)\colon a>0,\ \beta>0,\ \nu>0,\ \alpha\in\mathbb{R}\}.$$

Пример 10. Интеграл, зависящий от двух параметров,

$$I(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{p^2}{x^2}\Big)-\exp\Big(-\frac{q^2}{x^2}\Big)\Big)\,dx,\ \forall p,q\in\mathbb{R},$$

является несобственным первого рода, потому что предел

$$\lim_{x\to+0}\Big(\exp\Big(-\frac{p^2}{x^2}\Big)-\exp\Big(-\frac{q^2}{x^2}\Big)\Big)=0,\ \forall p,q\in\mathbb{R}.$$

Действительно, если $|p|\leqslant|q|$, то

$$\lim_{x\to+0}\Big(\exp\Big(-\frac{p^2}{x^2}\Big)-\exp\Big(-\frac{q^2}{x^2}\Big)\Big)=$$

$$=\lim_{x\to+0}\Big(\exp\Big(-\frac{p^2}{x^2}\Big)\Big(1-\exp\frac{p^2-q^2}{x^2}\Big)\Big)=0,$$

а если $|p|\geqslant|q|$, то

$$\lim_{x\to+0}\left(\exp\left(-\frac{p^2}{x^2}\right)-\exp\left(-\frac{q^2}{x^2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\exp\left(-\frac{q^2}{x^2}\right)\left(1-\exp\frac{q^2-p^2}{x^2}\right)\right)=0.$$

Используя разложение экспоненты в степенной ряд

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\,,\ \forall z\in\mathbb{R},$$

получаем, что при любых вещественных p и q, $|p|\neq|q|$,

$$\exp\left(-\frac{p^2}{x^2}\right)-\exp\left(-\frac{q^2}{x^2}\right)=\frac{q^2-p^2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad\text{при}\quad x\to+\infty.$$

Значит, при любых фиксированных значениях p и q таких, что $|p|\neq|q|$, подынтегральная функция является функцией одной переменной, которая, будучи непрерывной[1] и знакопостоянной на числовом луче $[0;+\infty)$, является бесконечно малой второго порядка при $x\to+\infty$.

Тогда, по следствию 3 (предельный признак сравнения Коши абсолютной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметров), интеграл I абсолютно сходится на множестве $P=\{(p,q)\colon |p|\neq|q|\}$.

Если $|p|=|q|$, то $I(p,q)=0$.

Поэтому интеграл I абсолютно сходится на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Следствие 4 (*предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра*). *Пусть функция*

$$f\colon (x,p)\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b),\ \forall p\in P,\ -\infty<a<b<+\infty,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной*

$$f_p\colon x\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b),$$

которая обладает следующими свойствами:

[1] В точке $x=0$ доопределяем нулевым значением.

1) *сужение интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в полуинтервале* $[a;b)$;

2) *неотрицательна*:

$$\forall p \in P\colon\ f_p(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a;b);$$

3) *является бесконечно большой порядка* λ_p *при* $x \to b-0$:

$$\forall p \in P\colon\ f_p(x) = o\Big(\frac{1}{(b-x)^{\lambda_p}}\Big) \quad \textit{при} \quad x \to b-0.$$

Тогда несобственный интеграл второго рода, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b f(x,p)\,dx$, $\forall p \in P$, *при* $0 < \lambda_p < 1$ *сходится на множества* P, *а при* $\lambda_p \geqslant 1$ *расходится в каждой точке* p *множества* P.

Пример 11. Интеграл

$$I(p) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\Big)^p\,dx$$

таков, что сужение подынтегральной функции

$$f\colon (x,p) \to \Big(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\Big)^p,\ \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\Big),\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывно и положительно на множестве $G = \Big(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\Big) \times \mathbb{R}$, ибо

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - x\Big)}{\sin\Big(\dfrac{\pi}{4} + x\Big)} > 0,\ \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\Big).$$

Поэтому при $p < 0$ интеграл I является несобственным второго рода на полуинтервале $\Big[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\Big)$, а при $p > 0$ интеграл I является несобственным второго рода на полуинтервале $\left(-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

При $p=0$ интеграл I определённый.

Поскольку

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}\sim\frac{1}{\dfrac{\pi}{4}-x}\quad \text{при}\quad x\to\frac{\pi}{4}-0,$$

$$\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}\sim\frac{1}{\dfrac{\pi}{4}+x}\quad \text{при}\quad x\to\,-\frac{\pi}{4}+0,$$

то подынтегральная функция f при любом фиксированном отрицательном p является бесконечно большой порядка $\lambda_p=|p|$ при $x\to\dfrac{\pi}{4}-0$, а при любом фиксированном положительном p является бесконечно большой порядка $\lambda_p=p$ при $x\to\,-\dfrac{\pi}{4}+0$.

Поэтому в соответствии с предельным признаком сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода с параметром (следствие 4) интеграл I абсолютно сходится на интервале $(-1;1)$, а в каждой точке p из множества $(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty)$ интеграл I расходится.

Пример 12. У интеграла

$$I(p,q)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{p-1}x}{|1+q\cos x|^p}\,dx,\ \forall p,q\in\mathbb{R},$$

зависимость от параметров такова, что случай $q<0$ приводится к случаю $q>0$ заменой $x=\pi-y,\ \forall y\in[0;\pi]$.

Поэтому сначала будем считать, что $q\geqslant 0$.

На множестве

$$G_1=\{(p,q)\colon p\geqslant 1,\ 0\leqslant q<1\}$$

интеграл I является определённым.

В каждой точке (p,q) из множества

$$G_2=\{(p,q)\colon p<1,\ 0\leqslant q<1\}$$

интеграл I является несобственным на интервале $(0;\pi)$ с непрерывной положительной подынтегральной функцией.

В каждой точке (p,q) из множества

$$G_3 = \{(p,q)\colon p \geqslant 1,\ q \geqslant 1\}$$

подынтегральная функция является функцией одной переменной, сужения которой непрерывны и неотрицательны на полуинтервалах

$$\Bigl[0;\pi - \arccos\frac{1}{q}\Bigr) \quad \text{и} \quad \Bigl(\pi - \arccos\frac{1}{q}\,;\pi\Bigr].$$

Поэтому на множестве G_3 интеграл I является несобственным, зависящим от параметров, с подвижной особой точкой

$$x = \pi - \arccos\frac{1}{q}\,,\ \forall q \in [1;\,+\infty).$$

В каждой точке (p,q) из множества

$$G_4 = \{(p,q)\colon p < 1,\ q \geqslant 1\}$$

подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной, сужения которой непрерывны и положительны на интервалах

$$\Bigl(0;\pi - \arccos\frac{1}{q}\Bigr) \quad \text{и} \quad \Bigl(\pi - \arccos\frac{1}{q}\,;\pi\Bigr).$$

Поэтому на множестве G_4 интеграл I является несобственным, зависящим от параметров, с особыми точками

$$x = 0,\ x = \pi \quad \text{и} \quad x = \pi - \arccos\frac{1}{q}\,,\ \forall q \in [1;\,+\infty).$$

Пусть $p \leqslant 0$, а $\rho = -p$. Тогда $\rho \geqslant 0$ и предел отношения

$$\lim_{x\to+0}\Bigl(\frac{|1+q\cos x|^{\rho}}{\sin^{\rho+1}} : \frac{1}{x^{\rho+1}}\Bigr) =$$

$$= \lim_{x\to+0}\Bigl(|1+q\cos x|^{\rho}\,\frac{x^{\rho+1}}{\sin^{\rho+1}x}\Bigr) = (1+q)^{\rho},\ \forall q \in [0;\,+\infty).$$

Следовательно, в каждой точке (p, q) из множества

$$G_5 = \{(p, q)\colon p \leqslant 0,\ q \geqslant 0\}$$

подынтегральная функция является функцией одной переменной бесконечно большой порядка $\lambda = 1 - p \geqslant 1$ при $x \to +0$. И в соответствии с предельным признаком сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра, — следствие 4 — интеграл I в каждой точке (p, q) множества G_5 расходится.

В каждой точке множества

$$G_6 = \{(p, q)\colon 0 < p < 1,\ 0 \leqslant q < 1\},$$

являющегося подмножеством множества G_2, подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной бесконечно большую порядка $\lambda = 1 - p$, $\lambda \in (0; 1)$, при $x \to +0$ и при $x \to \pi - 0$:

$$\frac{\sin^{p-1} x}{|1 + q\cos x|^p} \sim \frac{1}{(1+q)^p}\ \sin^{p-1} \sim \frac{1}{(1+q)^p}\ x^{p-1} \quad \text{при} \ \ x \to +0,$$

$$\forall p \in (0; 1), \forall q \in [0; 1) \cup (1; +\infty),$$

и

$$\frac{\sin^{p-1} x}{|1 + q\cos x|^p} \sim \frac{\sin^{p-1}(\pi - x)}{|1 + q\cos x|^p} \sim$$

$$\sim \frac{1}{|1-q|^p}\ \sin^{p-1}(\pi - x) \sim \frac{1}{|1-q|^p}\ (\pi - x)^{p-1}$$

$$\text{при} \ \ x \to \pi - 0,\ \forall p \in (0; 1),\ \forall q \in [0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Стало быть, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра, — следствие 4 — интеграл I сходится (абсолютно) на множестве G_6.

Пусть $q = 1$. Тогда при любом положительном p подынтегральная функция является функцией одной переменной бесконечно большой порядка $\lambda > 1$ при $x \to \pi - 0$:

$$\lim_{x \to \pi - 0} \Big(\frac{\sin^{p-1} x}{|1 + \cos x|^p} : \frac{1}{\pi - x} \Big) =$$

$$= \lim_{x\to\pi-0}\Big(\frac{\sin^p x}{|1+\cos x|^p}\cdot\frac{\pi-x}{\sin(\pi-x)}\Big) = +\infty,\ \forall p\in(0;\,+\infty).$$

Поэтому в соответствии со следствием 4 интеграл I расходится в каждой точке (p,q) множества

$$G_7 = \{(p,q)\colon p>0,\ q=1\}.$$

Пусть $q>1$. Тогда в каждой точке (p,q) множества

$$G_8 = \{(p,q)\colon p>0,\ q>1\}$$

подынтегральная функция суть функция одной переменной бесконечно большая порядка $\lambda=p$ при $x\to\xi$, где $\xi=\pi-\arccos\dfrac{1}{q}$, $\forall q\in(1;+\infty)$:

$$\frac{\sin^{p-1}x}{|1+q\cos x|^p}\sim \sin^{p-1}\xi\cdot\frac{1}{|x-\xi|^p} = \left(\frac{\sqrt{q^2-1}}{q}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{|x-\xi|^p}$$

$$\text{при}\ \ x\to\xi,\ \forall p\in(0;\,+\infty).$$

На множестве

$$G_9 = \{(p,q)\colon p\geqslant 1,\ q>1\},$$

являющемся подмножеством множества G_3, интеграл I является несобственным с подвижной особой точкой $x=\xi$, $\forall q\in(1;\,+\infty)$, а в каждой точке (p,q) из множества G_9 подынтегральная функция представляет собой функцию одной переменной бесконечно большую порядка $\lambda=p\geqslant 1$ при $x\to\xi$.

Значит, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода с параметром (следствие 4), в каждой точке (p,q) множества G_9 интеграл I расходится.

На множестве

$$G_{10} = \{(p,q)\colon 0<p<1,\ q>1\},$$

являющемся подмножеством множества G_4, интеграл I имеет особые точки $x=0$, $x=\pi$ и $x=\xi$.

В соответствии с ранее проведёнными доказательствами в каждой точке (p,q) из множества G_{10} подынтегральная функция является функцией одной переменной бесконечно большой порядков $\lambda_0=1-p$ при $x\to+0$, $\lambda_\pi=1-p$ при $x\to\pi-0$, $\lambda_\xi=p$ при $x\to\xi$.

Поскольку $\lambda_0 \in (0;1)$, $\lambda_\pi \in (0;1)$, $\lambda_\xi \in (0;1)$ при $0 < p < 1$, то, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода с параметром (следствие 4), интеграл I на множестве G_{10} сходится (абсолютно).

Все возможные значения параметров p и q рассмотрены и итоговый вывод следующий: на множестве $G = G_{11} \cup G_{12}$, где

$$G_{11} = \{(p,q)\colon p > 0, \ -1 < q < 1\},$$

$$G_{12} = \{(p,q)\colon 0 < p < 1, \ |q| > 1\},$$

интеграл I абсолютно сходится, а в каждой точке (p,q) из множества $\mathbb{R}^2 \backslash G$ интеграл I расходится.

Пример 13. *Исследуем на абсолютную сходимость интеграл*

$$I(p) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}\,, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

У данного интеграла подынтегральная функция имеет бесконечное множество особых точек $x = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$I(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}\,, \ \forall p \in \mathbb{R},$$

где интегралы-слагаемые

$$I_n(p) = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}\,, \ \forall p \in \mathbb{R}, \ n = 1, 2, \ldots\,,$$

являются несобственными на промежутках интегрирования

$$\big(\pi n; \pi(n+1)\big), \ n = 1, 2, \ldots\,.$$

Стало быть, несобственный интеграл, зависящий от параметра, I сходится при тех и только тех значениях параметра p, при которых сходятся интегралы I_n и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n(p)$.

Пусть

$$x = \pi n + t,\ \forall t \in (0;\pi),\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

Тогда при любом вещественном p

$$I_n(p) = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{dx}{x^p\ \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(\pi n + t)^p\ \sqrt[3]{\sin^2 t}}\,,\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

Пределы

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{(\pi n + t)^p\ \sqrt[3]{\sin^2 t}} : \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\right) = \frac{1}{\pi^p\, n^p} \quad (p \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

и

$$\lim_{t\to\pi-0}\left(\frac{1}{(\pi n + t)^p\ \sqrt[3]{\sin^2 t}} : \frac{1}{\sqrt[3]{(\pi - t)^2}}\right) = \frac{1}{\pi^p\,(n+1)^p} \quad (p \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Значит, при любом вещественном p и любом натуральном n подынтегральная функция

$$f_{pn}\colon t \to \frac{1}{(\pi n + t)^p\ \sqrt[3]{\sin^2 t}}\,,\ \forall t \in (0;\pi),$$

является бесконечно большой порядка $\lambda_{pn} = \dfrac{2}{3} < 1$ как при $t \to +0$, так и при $t \to \pi - 0$.

Следовательно, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра, — следствие 4 — интеграл

$$\Phi(p,n) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(\pi n + t)^p\ \sqrt[3]{\sin^2 t}}\,,\ \forall p \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

абсолютно сходится при любых вещественном p и натуральном n.

Это означает, что каждый несобственный интеграл, зависящий от параметра, $I_n,\ n = 1, 2, \ldots\,,$ сходится на поле $\mathbb{R}$.

Исследуем на абсолютную сходимость функциональный ряд (одновременно и несобственный интеграл, зависящий от параметра, I)

$$I(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(\pi n + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}}\,, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Используя при $p > 0$ оценку

$$\frac{1}{\pi^p (n+1)^p} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(\pi n + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p n^p} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}}\,,$$

а при $p < 0$ оценку

$$\frac{1}{\pi^p n^p} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(\pi n + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p (n+1)^p} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}}\,,$$

на основании признака сравнения абсолютной сходимости функциональных рядов заключаем, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n(p)$ (а вместе с ним и интеграл I) сходится при тех и только тех p из поля $\mathbb{R}$, при которых сходится функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\,.$$

Стало быть, несобственный интеграл, зависящий от параметра, I абсолютно сходится на открытом числовом луче $(1; +\infty)$, а при каждом значении параметра p из полуоткрытого числового луча $(-\infty; 1]$ интеграл I расходится.

Пример 14. *Исследуем на абсолютную сходимость интеграл*

$$I(p) = \int\limits_0^{2} \frac{dx}{|\ln x|^p}\,, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Предел

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{|\ln x|^p}=\left[\begin{array}{l}0,\ \text{если}\ p>0,\\ 1,\ \text{если}\ p=0,\\ -\infty,\ \text{если}\ p<0.\end{array}\right.$$

Поэтому при $p<0$ интеграл I является несобственным второго рода на полуинтервале $(0;2]$, а при $p>0$ у несобственного интеграла I подынтегральная функция имеет одну особую точку $x=1$.

Заменой

$$x=\left[\begin{array}{l}e^{-t},\ \forall t\in[-\ln 2;\,+\infty),\ \text{при}\ p\leqslant 0,\\ e^{-t},\ \forall t\in[-\ln 2;0)\cup(0;\,+\infty),\ \text{при}\ p>0\end{array}\right.$$

интеграл I приводим к виду

$$I(p)=\int\limits_0^2\frac{dx}{|\ln x|^p}=\int\limits_{-\ln 2}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{|t|^p}\,dt=\int\limits_{-\ln 2}^{1}\frac{e^{-t}}{|t|^p}\,dt+\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^p}\,dt,\ \forall p\in\mathbb{R}.$$

Интеграл

$$I_1(p)=\int\limits_{-\ln 2}^{1}\frac{e^{-t}}{|t|^p}\,dt,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

при $p\leqslant 0$ является определённым с непрерывной подынтегральной функцией на отрезке интегрирования $[-\ln 2;1]$.

Если $p>0$, то интеграл I_1 — несобственный с одной особой точкой $t=0$.

На основании эквивалентности

$$\frac{e^{-t}}{|t|^p}\sim\frac{1}{|t|^p}\quad\text{при}\quad t\to 0$$

заключаем, что при $p>0$ подынтегральная функция у несобственного интеграла I_1 является бесконечно большой порядка p при $t\to 0$.

В соответствии с предельным признаком сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода с параметром (следствие 4) несобственный интеграл I_1 абсолютно сходится на интервале $(0;1)$, а в каждой точке p числового луча $[1;\,+\infty)$ интеграл I_1 расходится.

Итак, интеграл I_1 сходится абсолютно на числовом луче $(-\infty;1)$, а в каждой точке p числового луча $[1;\,+\infty)$ интеграл I_1 расходится.

При любом вещественном p предел

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\frac{e^{-t}}{t^p}:\frac{1}{t^2}\Big)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{2-p}}{e^t}=0,$$

то есть,

$$\frac{e^{-t}}{t^p}=o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\quad \text{при}\quad t\to\,+\infty,$$

а несобственный интеграл первого рода $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ сходится.

Следовательно, по предельному признаку сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (следствие 2), несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,

$$I_2(p)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^p}\,dt,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

абсолютно сходится на числовой прямой $(\,-\infty;\,+\infty)$.

Ввиду того, что

$$I(p)=I_1(p)+I_2(p),\ \forall p\in\mathbb{R},$$

на основании результатов исследований сходимости интегралов I_1 и I_2 заключаем, что интеграл, зависящий от параметра, I абсолютно сходится на открытом числовом луче $(\,-\infty;1)$, а в каждой точке p из полуоткрытого числового луча $[1;\,+\infty)$ интеграл I расходится.

2.3. Признак Дирихле сходимости (поточечной) несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла состоит в следующем.

Предложение 3. *Пусть функции*

$$\varphi\colon x\to\varphi(x),\ \forall x\in[a;b),\quad \text{и}\quad \psi\colon x\to\psi(x),\ \forall x\in[a;b),$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) *сужения функций* φ *и* ψ *интегрируемы по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$ *из* $[a;b)$, $-\infty<a<b\leqslant\,+\infty$;

2) *функция*

$$\Lambda\colon \eta \to \int\limits_a^\eta \varphi(x)\,dx,\ \forall \eta \in [a;b),$$

ограничена;

3) *функция* ψ *монотонно стремится к нулю при* $x \to b-0$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ *сходится.*

Определение 2.1 позволяет этот признак перенести на те случаи, когда несобственный интеграл зависит от параметра.

Теорема 3 (*признак Дирихле сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция*

$$\Lambda_p\colon \eta \to \int\limits_a^\eta \varphi(x,p)\,dx,\ \forall \eta \in [a;b),$$

при каждом фиксированном p *из* P *ограничена*:

$$\forall p \in P,\ \exists M_p > 0\colon |\Lambda_p(\eta)| \leqslant M_p,\ \forall \eta \in [a;b);$$

3) *при каждом фиксированном* p *из* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, монотонной на числовом промежутке $[a;b)$;

4) *при* $x \to b-0$ *функция* ψ *сходится к нулю на* P.

Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$ *сходится на множестве* P.

Следствие 5. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;b),$$

интегрируемо по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция*

$$\Lambda\colon \eta \to \int\limits_a^\eta \varphi(x)\,dx,\ \forall \eta \in [a;b),$$

ограничена:

$$\exists M > 0\colon |\Lambda(\eta)| \leqslant M,\ \forall \eta \in [a;b);$$

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, монотонной на числовом промежутке $[a;b)$;

4) *при* $x \to b-0$ *функция* ψ *сходится к нулю на* P.

Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x,p)\,dx,$ *сходится на множестве* P.

Пример 15. *Найдём множество сходимости несобственного интеграла, зависящего от двух параметров,*

$$I(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^q}\,dx,\ \forall p,q \in \mathbb{R}.$$

Сначала будем считать, что параметр $p > 0$.

Выполним замену переменной

$$x = \zeta^{\frac{1}{p}}, \ \forall \zeta \in (0;\ +\infty),$$

при которой

$$I(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^q}\, dx = \frac{1}{p} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta^s}\, d\zeta = \frac{1}{p} \int\limits_0^{a} \frac{\sin \zeta}{\zeta^s}\, d\zeta + \frac{1}{p} \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta^s}\, d\zeta,$$

$$\forall p \in (0;\ +\infty),\ \forall q \in \mathbb{R},\ s = \frac{p+q-1}{p},\ a > 0.$$

Поскольку

$$\frac{\sin \zeta}{\zeta^s} \sim \frac{1}{\zeta^{s-1}} \quad \text{при} \quad \zeta \to +0,$$

то, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго порядка с параметром (следствие 4), интеграл

$$I_1(p,q) = \int\limits_0^{a} \frac{\sin \zeta}{\zeta^s}\, d\zeta,\ \forall p \in (0;\ +\infty),\ \forall q \in \mathbb{R},$$

сходится при $s < 2$ и расходится при $s \geqslant 2$.

Интеграл

$$I_2(p,q) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta^s}\, d\zeta,\ \forall p \in (0;\ +\infty),\ \forall q \in \mathbb{R},\ (a > 0)$$

сходится при $s > 0$, что устанавливаем с помощью признака Дирихле сходимости (поточечной) несобственного интеграла, зависящего от параметра, — следствие 5.

Действительно, функция

$$\varphi\colon \zeta \to \sin \zeta,\ \forall \zeta \in [a;\ +\infty),$$

непрерывна.

С учётом того, что интеграл

$$\int\limits_a^{\eta} \sin\zeta\, d\zeta = \cos a - \cos\eta,$$

а

$$|\cos a - \cos\eta| < 2,\ \forall \eta \in [a;\, +\infty),$$

функция

$$\lambda\colon \eta \to \int\limits_a^{\eta} \sin\zeta\, d\zeta,\ \forall \eta \in (a;\, +\infty),$$

является ограниченной на числовом луче $[a;\, +\infty)$.

Функция

$$\psi\colon (\zeta, s) \to \frac{1}{\zeta^s}\,,\ \forall \zeta \in [a;\, +\infty),\ \forall s \in (0;\, +\infty),$$

при каждом фиксированном положительном s является функцией одной переменной, которая на числовом луче $[a;\, +\infty),\ a > 0,$ монотонно стремится к нулю при $\zeta \to\ +\infty$.

Докажем, что при $s \leqslant 0$ интеграл I_2 расходится.

Действительно, пусть интеграл I_2 при $s \leqslant 0$ сходится.

Тогда из представления его функциональным рядом

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin\zeta}{\zeta^s}\, d\zeta = \int\limits_a^{\pi} \frac{\sin\zeta}{\zeta^s}\, d\zeta + \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin\zeta}{\zeta^s}\, d\zeta,\ \forall s \in (-\infty; 0],$$

следует сходимость функционального ряда, расположенного в правой части равенства.

Функции

$$f_n\colon \zeta \to \frac{1}{\zeta^s}\,,\ \forall \zeta \in [\pi n; \pi(n+1)],\ n = 1, 2, \ldots\,,$$

непрерывны.

Сужения функции

$$\varphi\colon \zeta \to \sin\zeta,\ \forall \zeta \in [0;\ +\infty),$$

являются неотрицательными на отрезках $[\pi n; \pi(n+1)],\ n = 1, 2, \ldots$.

Тогда, по интегральной теореме о среднем значении, определённые интегралы

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin\zeta}{\zeta^s}\, d\zeta = \frac{1}{\theta_n^s} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin\zeta\, d\zeta = \frac{1}{\theta_n^s}\,(\cos\pi n - \cos\pi(n+1)) =$$

$$= 2\,\frac{(\,-1)^n}{\theta_n^s}\,,\ \theta_n \in (\pi n; \pi(n+1)),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin\zeta}{\zeta^s}\, d\zeta = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\,-1)^n}{\theta_n^s}\,,\ \theta_n \in (\pi n; \pi(n+1)),\ n = 1, 2, \ldots .$$

В соответствии с необходимым признаком сходимости ряда предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n^s} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{\theta_n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n^s} = 0.$$

Стало быть, $s > 0$ является необходимым условием сходимости этого функционального ряда, а значит, $s > 0$ — необходимое условие сходимости несобственного интеграла.

Поскольку интеграл I_1 сходится лишь при $s < 2$, а интеграл I_2 сходится лишь при $s > 0$, то интеграл

$$I(p,q) = \frac{1}{p}\, I_1(p,q) + \frac{1}{p}\, I_2(p,q)$$

при $p > 0$ сходится на множестве

$$\Pi_+ = \Big\{(p,q)\colon p > 0,\ 0 < \frac{q-1}{p} < 1\Big\}.$$

Пусть теперь $p < 0$. Обозначим $p_1 = \,-p$.

Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что при $p_1 > 0$ интеграл $I(p_1, q)$ сходится на множестве

$$\widetilde{\Pi} = \Big\{(p_1, q)\colon p_1 > 0,\ 0 < \frac{q-1}{p_1} < 1\Big\}.$$

Значит, интеграл $I(p,q)$ при $p<0$ сходится на множестве

$$\Pi_- = \Big\{(p, q)\colon p < 0,\ 0 < \frac{q-1}{-\,p} < 1\Big\}.$$

Если $p = 0$, то интеграл

$$I(0,q) = \sin 1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$$

и является расходящимся при любом значении параметра q.

Итак, интеграл I сходится (поточечно) на множестве

$$\Pi = \Big\{(p, q)\colon \Big|\frac{q-1}{p}\Big| < 1\Big\},$$

а в каждой точке (p,q), не принадлежащей множеству Π, интеграл I расходится.

2.4. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признак Абеля сходимости несобственного интеграла состоит в следующем.

Предложение 4. *Пусть функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;b), \quad \text{и} \quad \psi\colon x \to \psi(x),\ \forall x \in [a;b),$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) *сужения функций* φ *и* ψ *интегрируемы по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$ *из* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *несобственный интеграл* $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ *сходится*;

3) *функция* ψ *монотонна*;

4) *функция* ψ *ограничена*.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ *является сходящимся.*

Определение 2.1 позволяет этот признак перенести на те случаи, когда несобственный интеграл зависит от параметра.

Теорема 4 (*признак Абеля сходимости на множестве несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *интеграл, зависящий от параметра,*

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P;

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, монотонной на числовом промежутке $[a;b)$;

4) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция* ψ *является функцией одной переменной, которая является ограниченной на числовом промежутке* $[a;b)$.

Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$ *сходится на множестве* P.

Следствие 6. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *интеграл, зависящий от параметра,*

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P;

3) *функция*

$$\psi\colon x \to \psi(x),\ \forall x \in [a;b),$$

монотонна;

4) *функция* ψ *ограничена.*

Тогда несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x)\,dx,\ \forall p \in P,$ *сходится на множестве* P.

Пример 16. *Исследуем на абсолютную сходимость несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x^2+p^2}}\,dx \quad (p>0).$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x^2+p^2}}\,dx$$

является сходящимся на числовом луче $(0;\,+\infty)$, что устанавливаем с помощью признака Абеля.

В самом деле, интеграл Эйлера

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$$

является сходящимся, при каждом фиксированном положительном p функция

$$g\colon x \to \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}\,,\ \forall x \in \Bigl(0;\,\frac{\pi}{2}\Bigr],$$

монотонно убывает и является ограниченной:

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi^2+4p^2}}\,,\ \forall x \in \Bigl(0;\,\frac{\pi}{2}\Bigr].$$

У данного несобственного интеграла подынтегральная функция неположительная, поэтому он абсолютно сходится на $(0;\,+\infty)$.

Пример 17. *Найдём множество сходимости несобственного интеграла, зависящего от двух параметров,*

$$I(p,q) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,dx,\ \forall p,q \in \mathbb{R}.$$

Ввиду цикличного вхождения параметров p и q в задание интеграла I рассуждения будем вести в предположении, что $p \geqslant q$.

Интеграл представим в виде

$$I(p,q) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1+x^{q-p}}\,,\ \forall p \in [q;\,+\infty),\ \forall q \in \mathbb{R}.$$

Функция

$$\varphi\colon x \to \cos x,\ \forall x \in [\pi;\,+\infty),$$

непрерывна.

С учётом того, что интеграл

$$\int\limits_{\pi}^{\eta} \cos x\,dx = \sin\eta, \quad \text{а} \quad |\sin\eta| \leqslant 1,\ \forall \eta \in [\pi;\,+\infty),$$

функция

$$\Lambda\colon \eta \to \int\limits_{\pi}^{\eta} \cos x\,dx,\ \forall \eta \in [\pi;\,+\infty),$$

является ограниченной.

Функция

$$\psi\colon (x,p) \to \frac{1}{x^{p-1}}\,,\ \forall x \in [\pi;\,+\infty),\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

при каждом фиксированном p из числового луча $(1;\,+\infty)$ является функцией одной переменной, которая при $x \to +\infty$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Стало быть, по признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла с параметром (следствие 5), интеграл

$$I_1(p) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}}\,dx,\ \forall p \in (1;\,+\infty),$$

сходится на числовом луче $(1;\,+\infty)$.

Функция

$$\zeta\colon (x,p,q) \to \frac{1}{1+x^{q-p}}\,,\ \forall (x,p,q) \in T,$$

где $T = \{(x,p,q)\colon x \geqslant \pi,\ p > 1,\ q \leqslant p\}$, при любых фиксированных p из $(1;\,+\infty)$ и q из $(-\infty;p]$ представляет собой функцию одной переменной, которая монотонно возрастает на числовом луче $[\pi;\,+\infty)$, а поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^{q-p}} = 1 \quad \text{при} \quad q \leqslant p,$$

то и является ограниченной на $[\pi;\,+\infty)$.

Тогда, по признаку Абеля сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 4), интеграл I сходится на множестве

$$P = \{(p, q) \colon p > 1,\ q \leqslant p\}.$$

Если не оговаривать, что $q \leqslant p$, то интеграл I сходится на

$$\Pi = \{(p, q) \colon \max\{p, q\} > 1\}.$$

Докажем, что условие $\max\{p, q\} > 1$ для сходимости интеграла I является не только достаточным, но и необходимым.

Пусть интеграл I сходится. Представим его рядом

$$I(p, q) = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\pi n}^{\frac{3\pi}{2}+\pi n} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx,$$

который является сходящимся.

Функции

$$f_n \colon x \to \frac{1}{x^{p-1} + x^{q-1}}\,,\ \forall x \in \Big[\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\Big],\ n = 1, 2, \ldots\,,$$

непрерывны на отрезках, являющихся множествами определения.

Сужения функции

$$\varphi \colon x \to \cos x,\ \forall x \in [\pi;\ +\infty),$$

на каждом из отрезков $\Big[\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{3\pi}{2} + \pi n\Big]$, $n = 1, 2, \ldots\,,$ являются знакопостоянными.

Тогда, по первой интегральной теореме о среднем значении, определённые интегралы

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}+\pi n}^{\frac{3\pi}{2}+\pi n} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}}\, dx = \frac{1}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\pi n}^{\frac{3\pi}{2}+\pi n} \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}} \Big(\sin\Big(\frac{3\pi}{2} + \pi n\Big) - \sin\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)\Big) =$$

$$= 2\frac{(-1)^{n+1}}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}}\,,\ \theta_n \in \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\Big),\ n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+\pi n}^{\frac{3\pi}{2}+\pi n} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}}\,,$$

$$\theta_n \in \Big(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\Big),\ n = 1, 2, \ldots .$$

В соответствии с необходимым признаком сходимости ряда предел его n-го члена

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{\theta_n\to+\infty} \frac{1}{\theta_n^{p-1} + \theta_n^{q-1}} = 0.$$

Следовательно, $\max\{p, q\} > 1$.

Итак, интеграл I сходится на множестве

$$\Pi = \{(p, q)\colon\ \max\{p, q\} > 1\},$$

а в каждой точке $(p, q) \notin \Pi$ интеграл I расходится.

2.5. Признак Харди сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра

Признак Харди сходимости несобственного интеграла первого рода состоит в следующем.

Предложение 5. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужения функций*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a; +\infty), \quad \textit{и} \quad \psi\colon x \to \psi(x),\ \forall x \in [a; +\infty),$$

интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a; \eta]$, *содержащемся в числовом луче* $[a; +\infty)$;

2) *для всех* x *из числового промежутка* $[a; +\infty)$ *имеет место равенство* $\varphi(x + T) = \varphi(x)$, *где* T *— некоторое положительное число*;

3) *при* $x \to +\infty$ *функция* ψ *монотонно стремится к нулю.*

Тогда имеют место утверждения:

а) *если определённый интеграл* $\int\limits_a^{a+T} \varphi(x)\,dx = 0$, *то несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ *сходится*;

б) *если определённый интеграл* $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = k$, $k \neq 0$, *то несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$.

Этот признак с помощью определений 1.1 и 2.1 распространим на случай, когда несобственный интеграл первого рода содержит параметр.

Теорема 5 (*признак Харди сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;\,+\infty),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом луче* $[a;\,+\infty)$;

2) *имеет место равенство*

$$\varphi(x+T,p) = \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;\,+\infty),\ \forall p \in P,$$

где T *— некоторое положительное число*;

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p),\ \forall x \in [a;\,+\infty),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, монотонной на числовом луче $[a;\,+\infty)$;

4) *при* $x\to+\infty$ *функция* ψ *сходится к нулю на* P.

Тогда имеют место утверждения:

а) если определённый интеграл, содержаший параметр,

$$\int\limits_a^{a+T}\varphi(x,p)\,dx=0,\ \forall p\in P,$$

то несобственный интеграл первого рода с параметром

$$I(p)=\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

сходится на множестве P;

б) если при произвольном фиксированном p *из множества* P *определённый интеграл*

$$\int\limits_a^{a+T}\varphi(x,p)\,dx=k_p,$$

причём $k_p\neq 0$, *то несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$I(p)=\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

сходится в точке p *тогда и только тогда, когда в точке* p *сходится несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$\widehat{I}(p)=\int\limits_a^{+\infty}\psi(x,p)\,dx,\ \forall p\in P.$$

Следствие 7. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;\, +\infty),$$

интегрируемо по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом луче* $[a;\, +\infty)$;

2) *для всех* x *из числового луча* $[a;\, +\infty)$ *имеет место равенство* $\varphi(x+T) = \varphi(x)$, *где* T — *некоторое положительное число*;

3) *выполняются условия* 3) *и* 4) *теоремы* 5.

Тогда имеют место утверждения:

а) *если определённый интеграл,*

$$\int\limits_a^{a+T} \varphi(x)\, dx = 0,$$

то несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,

$$I(p) = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\, \psi(x,p)\, dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P;

б) *если определённый интеграл*

$$\int\limits_a^{a+T} \varphi(x)\, dx = k, \quad \textit{причём} \quad k \neq 0,$$

а несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,

$$\widehat{I}(p) = \int\limits_a^{+\infty} \psi(x,p)\, dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P, *то несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится на множестве P;

в) если определённый интеграл

$$\int\limits_a^{a+T} \varphi(x)\,dx = k, \quad \textit{причём} \quad k \neq 0,$$

а в точке p *из множества* P *несобственный интеграл первого рода* $\widehat{I}$ *расходится, то в этой точке расходится и несобственный интеграл первого рода* I.

Пример 18 (продолжение примера 17). Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметров,

$$I(p,q) = \int\limits_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\,dx,\ \forall p, q \in \mathbb{R},$$

был исследован на сходимость в примере 17 с помощью признаков Дирихле и Абеля.

Сходимость можно установить и по признаку Харди.

Действительно, в силу непрерывности и 2π-периодичности тригонометрической функции косинус выполняются условия 1) и 2) следствия 7 относительно функции

$$\varphi\colon x \to \cos x,\ \forall x \in [\pi;\,+\infty).$$

Выполнение условий 3) и 4) теоремы 5 относительно функции

$$\psi\colon (x,p,q) \to \frac{1}{x^{p-1} + x^{q-1}}\,,\ \forall x \in [\pi;\,+\infty),\ \forall (p,q) \in \Pi,$$

$$\Pi = \{(p,q)\colon\ \max\{p,q\} > 1\},$$

доказано в примере 17.

Определённый интеграл

$$\int\limits_{\pi}^{3\pi} \cos x\, dx = \left[\sin x\right]_{\pi}^{3\pi} = 0.$$

Тогда, по утверждению а) следствия 7, интеграл I сходится на множестве Π. Расходимость интеграла I в каждой точке (p,q) из множества $\mathbb{R}^2\backslash\Pi$ установлена в примере 17.

Перейдём к исследованию интеграла I на абсолютную и условную сходимости, используя признак Харди. Рассмотрим интеграл

$$\overset{*}{I}(p,q) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x\,|\cos x|}{x^p + x^q}\, dx, \ \forall (p,q) \in \Pi,$$

относительно которого выполняются условия следствия 7, где функция

$$\overset{*}{\varphi}\colon x \to |\cos x|, \ \forall x \in [\pi;\, +\infty),$$

и

$$\overset{*}{\varphi}(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |\cos x| = \overset{*}{\varphi}(x), \ \forall x \in [\pi;\, +\infty),$$

а выполнение условий 3) и 4) теоремы 5 относительно функции ψ уже проверены.

Определённый интеграл

$$\int\limits_{\pi}^{2\pi} \overset{*}{\varphi}(x)\, dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} |\cos x|\, dx = -\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx =$$

$$= -\Big[\sin x\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \Big[\sin x\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 2,$$

то есть, отличен от нуля.

Используя результаты примера 4, заключаем, что интеграл

$$\widehat{I}(p,q) = \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p-1} + x^{q-1}}\,, \ \forall (p,q) \in \Pi,$$

сходится на множестве

$$\Pi_1 = \{(p, q)\colon \ \max\{p, q\} > 2\},$$

а в каждой точке (p, q) множества

$$\Pi_2 = \{(p, q)\colon 1 < \max\{p, q\} \leqslant 2\}$$

расходится.

Следовательно, по утверждениям б) и в) следствия 7, интеграл $\overset{*}{I}$ сходится на множестве Π_1, а в каждой точке (p, q) из множества Π_2 интеграл $\overset{*}{I}$ расходится.

Таким образом, относительно интеграла I имеем: на множестве Π_1 абсолютно сходится; на множестве Π_2 условно сходится; на множестве

$$\Pi_3 = \{(p, q)\colon \ \max\{p, q\} \leqslant 1\}$$

расходится.

Пример 19. Несобственный интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}{x^p}\, dx, \ \forall p \in \mathbb{R},$$

с учётом тригонометрической формулы представления синуса суммы запишем в виде

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) + I_4(p), \ \forall p \in \mathbb{R},$$

где при любом вещественном p

$$I_1(p) = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x\, \cos \dfrac{1}{x}}{x^p}\, dx, \quad I_2(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\, \cos \dfrac{1}{x}}{x^p}\, dx,$$

$$I_3(p) = \int\limits_0^{1} \frac{\cos x\, \sin \dfrac{1}{x}}{x^p}\, dx, \quad I_4(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x\, \sin \dfrac{1}{x}}{x^p}\, dx.$$

С помощью замены

$$x = \frac{1}{t}\,,\ \forall t \in [1;\,+\infty),$$

интегралы I_1 и I_3 приводим к видам

$$I_1(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t\,\sin\dfrac{1}{t}}{t^{2-p}}\,dt, \quad I_3(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t\,\sin\dfrac{1}{t}}{t^{2-p}}\,dt,\ \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Стало быть, интегралы I_1 с I_4 и I_2 с I_3 однотипны. Поэтому достаточно исследовать на сходимость интегралы I_2 и I_4 и результаты исследований перенести на интегралы I_1 и I_3.

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, I_2. Функция

$$\varphi_1\colon x \to \sin x,\ \forall x \in [1;\,+\infty),$$

непрерывна и имеет ограниченную первообразную

$$F_1\colon x \to\ -\cos x,\ \forall x \in [1;\,+\infty).$$

Функция

$$\psi_1\colon (x,p) \to \frac{1}{x^p}\,\cos\frac{1}{x}\,,\ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывна на множестве

$$\Pi_1 = \{(x,p)\colon x \geqslant 1,\ p \in \mathbb{R}\}.$$

При любом фиксированном положительном значении переменной p функция ψ_1 представляет собой функцию одной переменной, монотонно стремящуюся к нулю при $x \to\ +\infty$.

В самом деле, предел

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = 1,$$

поэтому существует такое число $\overset{*}{x} > 1,$ что для всех $x > \overset{*}{x}$ имеет место оценка $\dfrac{1}{2} < \cos\dfrac{1}{x} < 1.$

Отсюда

$$\frac{1}{2x^p} < \psi_1(x,p) < \frac{1}{x^p}\,,\ \forall x \in (\overset{*}{x};\, +\infty),\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

и при любом $p > 0$ функция ψ_1 есть функция одной переменной, сужение которой монотонно на числовом луче $(\overset{*}{x};\, +\infty)$ и сходится к нулю при $x \to +\infty$.

Тогда, по признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла с параметром (следствие 5), интеграл I_2 сходится на открытом числовом луче $(0;\, +\infty)$.

Докажем, что интеграл I_2 при каждом значении параметра p из числового луча $(-\infty; 0]$ расходится. Для этого воспользуемся критерием Коши сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — теорема 9.1 — и докажем, что

$$\forall p \in (-\infty; 0],\ \exists \varepsilon \in (0;\, +\infty),\ \forall \widetilde{\eta}_{\varepsilon p} \in (1;\, +\infty),$$

$$\exists \overset{*}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};\, +\infty),\ \exists \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon p};\, +\infty)\colon \left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} x^{-p}\, \sin x\, \cos \frac{1}{x}\, dx \right| > \varepsilon.$$

Возьмём произвольное число ε, удовлетворяющее двойному строгому неравенству $0 < \varepsilon < 1$. Положим $q = -p$, выберем натуральное число n так, чтобы

$$\cos \frac{1}{x} > \frac{1}{2}\,,\ \forall x \in [2\pi n;\, +\infty),$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{2\pi}^{\pi+2\pi n} x^q \sin x \cos \frac{1}{x}\, dx,\ \forall q \in [0;\, +\infty),$$

который является определённым.

Функции

$$f_1\colon x \to x^q \cos \frac{1}{x}\,,\ \forall x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n],\quad \text{при}\quad q > 0$$

и

$$g_1\colon x \to \sin x,\ \forall x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n],$$

непрерывны.

Тогда, по первой интегральной теореме о среднем значении, для определённого интеграла будем иметь, что

$$\int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} x^q \sin x\, \cos\frac{1}{x}\, dx = \theta_n^q \cos\frac{1}{\theta_n} \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x\, dx =$$

$$= 2\theta_n^q \cos\frac{1}{\theta_n} > \theta_n^q \geqslant 1, \quad \text{где} \quad \theta_n \in (2\pi n; \pi + 2\pi n),\ q \geqslant 0.$$

Итак,

$$\forall p \in (-\infty; 0],\ \forall \varepsilon \in (0; 1),\ \forall \eta \in (1; +\infty),\ \exists n \in \mathbb{N},\ 2\pi n > \eta\colon$$

$$\int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} x^{-p} \sin x\, \cos\frac{1}{x}\, dx > \varepsilon,$$

а значит, интеграл I_2 при любом $p \leqslant 0$ расходится.

Учитывая связь между интегралами I_2 и I_3, заключаем, что интеграл I_3 сходится на числовом луче $(-\infty; 2)$, а при каждом $p \geqslant 2$ интеграл I_3 расходится.

Стало быть, интегралы I_2 и I_3 одновременно сходятся на интервале $(0; 2)$, а при каждом p из множества $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ хотя бы один из интегралов I_2 или I_3 расходится.

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, I_4. Функция

$$\varphi_2\colon x \to \cos x,\ \forall x \in [1; +\infty),$$

непрерывна и имеет ограниченную первообразную

$$F_2\colon x \to \sin x,\ \forall x \in [1; +\infty).$$

Функция

$$\psi_2\colon (x, p) \to \frac{1}{x^p}\, \sin\frac{1}{x}\,,\ \forall x \in [1; +\infty),\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывна на множестве $\Pi_1 = [1; +\infty) \times \mathbb{R}$.

Имеет место оценка

$$0 < \frac{1}{x^p} \sin \frac{1}{x} < \frac{1}{x^{p+1}}\,, \ \forall x \in (1;\, +\infty),\ \forall p \in (\,-1;\, +\infty).$$

Поэтому при каждом p из $(-1; +\infty)$ функция ψ_2 является функцией одной переменной, монотонно сходящейся к нулю при $x \to\ +\infty$.

Тогда, по признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — следствие 5 — интеграл I_4 сходится на числовом луче $(\,-1;\, +\infty)$.

Учитывая связь между интегралами I_1 и I_4, заключаем о сходимости интеграла I_1 на числовом луче $(\,-\infty; 3)$.

На основании полученной информации относительно интегралов I_1, I_2, I_3 и I_4 приходим к заключению: несобственный интеграл, зависящий от параметра, I сходится на интервале $(0; 2)$ и расходится в каждой точке p из множества $(\,-\infty; 0] \cup [2;\, +\infty)$.

Исследуем интеграл I на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$I_5(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\, dx,\ \forall p \in (0; 2),$$

который представим в виде суммы

$$I_5(p) = I_6(p) + I_7(p),\ \forall p \in (0; 2),$$

интегралов

$$I_6(p) = \int\limits_0^{1} \frac{\left|\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\, dx,\ \forall p \in (0; 2),$$

и

$$I_7(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\, dx,\ \forall p \in (0; 2).$$

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра, I_7.

Из оценки

$$\frac{\sin^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^p} \leqslant \frac{\left|\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right|}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p}\,,\ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall p \in (0;2),$$

по признаку сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1), устанавливаем, что интеграл I_7 сходится на интервале $(1;2)$, а при каждом p из полуинтервала $(0;1]$ интеграл I_7 расходится.

Действительно, интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,,\ \forall p \in (0;2),$$

сходится на интервале $(1;2)$. Поэтому интеграл I_7 сходится на $(1;2)$.

Докажем, что при каждом p из полуинтервала $(0;1]$ интеграл

$$I_8(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^p}\,dx,\ \forall p \in (0;1],$$

расходится. Для этого выполним подстановку

$$x+\frac{1}{x} = z,\ \forall z \in (2;\,+\infty),$$

при которой

$$x = \frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-4}\right),\quad dx = \frac{z+\sqrt{z^2-4}}{\sqrt{z^2-4}}\,dz,\ \forall z \in (2;\,+\infty),$$

и интеграл

$$I_8(p) = 2^{p-1} I_9(p),\ \forall p \in (0;1],$$

где

$$I_9(p) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)^{p-1}\sqrt{z^2-4}}\,dz,\ \forall p \in (0;1].$$

Рассмотрим несобственный интеграл первого рода с параметром

$$I_{10}(p) = \int\limits_{2+0}^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)^{p-1}\sqrt{z^2-4}}\, dz, \ \forall p \in (0;1],$$

основываясь на признаке Харди сходимости несобственных интегралов первого рода с параметром (следствие 7).

Функция

$$\varphi_3 \colon z \to \sin^2 z, \ \forall z \in [2+0;\, +\infty),$$

непрерывна и

$$\varphi_3(z+\pi) = \sin^2(z+\pi) = \sin^2 z = \varphi_3(z), \ \forall z \in [2+0;\, +\infty).$$

Функция

$$\psi_3 \colon (z,p) \to \frac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-4}\right)^{p-1}\sqrt{z^2-4}}\,, \ \forall z \in (2+0;\, +\infty), \ \forall p \in (0;1],$$

непрерывна на множестве $\Pi_2 = [2+0;\, +\infty) \times (0;1]$, а при каждом p из полуинтервала $(0;1]$ монотонно стремится к нулю при $z \to +\infty$.

Интеграл

$$\int\limits_{2+0}^{2+\pi} \sin^2 x\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{2+0}^{2+\pi} = \frac{\pi}{2}$$

и отличен от нуля.

Поскольку имеет место эквивалентность

$$\psi_3(z,p) \sim \frac{2^{1-p}}{z^p} \quad \text{при} \quad z \to +\infty, \ \forall p \in (0;1],$$

то несобственный интеграл

$$I_{11}(p) = \int\limits_{2+0}^{+\infty} \psi_3(z,p)\, dz, \ \forall p \in (0;1],$$

при любом p из полуинтервала $(0;1]$ на основании следствия 3 (предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра) расходится.

Тогда, по утверждению в) следствия 7, при любом p из полуинтервала $(0;1]$ расходится интеграл I_{10}, а вместе с ним и интеграл I_9, а значит, и интеграл I_8.

Этим завершается доказательство того, что интеграл I_7 расходится в каждой точке полуинтервала $(0;1]$.

С помощью подстановки

$$\frac{1}{x} = t, \ \forall t \in [1;\, +\infty),$$

интеграл I_6 приводим к виду

$$I_6(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(\dfrac{1}{t} + t\right)\right|}{t^{2-p}}\, dt, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Однотипность этого интеграла с интегралом I_7 позволяет сделать вывод: интеграл I_6 сходится на числовом луче $(-\infty;1)$, а при каждом $p \geqslant 1$ интеграл I_6 расходится.

Множества сходимости

$$\{p\colon p>1\} \quad \text{и} \quad \{p\colon p<1\}$$

соответственно интегралов I_7 и I_6 дизъюнктивны, а значит, ни при каком значении параметра p интегралы I_6 и I_7 не могут одновременно сходиться.

Следовательно, интеграл I_5 при любом значении параметра p из поля $\mathbb{R}$ расходится.

Относительно интеграла I окончательно получаем, что на интервале $(0;2)$ он условно сходится, а при любом значении параметра p из множества $(-\infty;0] \cup [2;\,+\infty)$ интеграл I расходится.

3. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Признак Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

3.1. Признак Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 1 (*признак Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a; b),$$

интегрируемо по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция* φ *неотрицательна*;

3) *несобственный интеграл*

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$$

сходится;

4) *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$;

5) *имеет место оценка*

$$|f(x,p)| \leqslant \varphi(x),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P. \tag{1}$$

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

равномерно абсолютно сходится на множестве P.

Доказательство. Условия теоремы предоставляют возможность для несобственного интеграла, зависящего от параметра,

$$\overset{*}{I}(p) = \int\limits_a^b |f(x,p)|\,dx,\ \forall p\in P,$$

воспользоваться признаком сравнения абсолютной сходимости (теорема 1.2) и сделать вывод о его сходимости на множестве P.

Остаётся доказать равномерную сходимость интеграла $\overset{*}{I}$ на множестве P, то есть, что имеет место утверждение (14.1):

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overset{*}{\eta}_\varepsilon\in[a;b),\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_\varepsilon;b)\colon\ \int\limits_\eta^b |f(x,p)|\,dx<\varepsilon,\ \forall p\in P. \quad (2)$$

Условие 3) на языке «$\varepsilon-\delta$» означает, что

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overset{*}{\eta}_\varepsilon\in[a;b),\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_\varepsilon;b)\colon\ \int\limits_\eta^b \varphi(x)\,dx<\varepsilon. \quad (3)$$

Утверждение (3) не зависит от параметра p. Поэтому можем утверждать:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\overset{*}{\eta}_\varepsilon\in[a;b),\ \forall\eta\in(\overset{*}{\eta}_\varepsilon;b)\colon\ \int\limits_\eta^b \varphi(x)\,dx<\varepsilon,\ \forall p\in P. \quad (4)$$

Учитывая условия теоремы, из оценки (1) следует, что

$$\int\limits_{\eta}^{b} |f(x,p)|\,dx \leqslant \int\limits_{\eta}^{b} \varphi(x)\,dx,\ \forall \eta \in [a;b),\ \forall p \in P. \tag{5}$$

Соотношение (4) при учёте (5) означает, что выполняется утверждение (2). ■

Пример 1. Несобственный интеграл первого рода с параметром

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} px}{1+x^2}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R},$$

равномерно абсолютно сходится на поле вещественных чисел, что легко устанавливаем с помощью признака Вейерштрасса. Это обосновывается оценкой

$$\frac{|\operatorname{arctg} px|}{1+x^2} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,,\ \forall x \in [0;\,+\infty),\ \forall p \in \mathbb{R},$$

и тем, что интеграл от мажорирующей функции сходится:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Пример 2. *Исследуем на равномерную сходимость несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \forall p \in [0;\,+\infty).$$

Интеграл $I(p), \forall p \in [0;\,+\infty)$, является несобственным второго рода на полуинтервале $[0;1)$ при каждом фиксированном значении параметра p из полуоткрытого числового луча $[0;\,+\infty)$, причём подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall (x,p) \in G,\ G = \{(x,p)\colon 0 \leqslant x < 1,\ p > 0\},$$

является неотрицательной.

Используя оценку

$$0 \leqslant \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \ \ \forall (x,p) \in G,$$

и сходимость несобственного интеграла второго рода

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \bigl[\arcsin x\bigr]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,,$$

по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1), заключаем о равномерной абсолютной сходимости интеграл I на $[0;+\infty)$.

Пример 3. *Докажем равномерную абсолютную сходимость сужения несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,,\ \forall p \in (1;+\infty),$$

на числовом луче $[p_0;+\infty]$ *при* $p_0 > 1$.

Если число $p_0 > 1$, то

$$\frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^{p_0}}\,,\ \ \forall x \in [1;+\infty),\ \forall p \in [p_0;+\infty),$$

причём независящий от параметра несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{p_0}}$$

сходится.

По признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1), интеграл I равномерно абсолютно сходится на любом полуоткрытом числовом луче $[p_0;+\infty)$, когда $p_0 > 1$.

Заметим, что в примере 6.1 доказано, что на открытом числовом луче $(1;+\infty)$ интеграл I сходится неравномерно.

Пример 4. *Докажем, что интеграл*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на любом отрезке $P_+ = [a;b]$ *при* $a > 0$ *и неравномерно сходится на любом отрезке* $P_0 = [0;b]$.

У несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра,

$$I_+(p) = I(p),\ \forall p \in P_+,\ P_+ = [a;b],\ a > 0,$$

подынтегральная функция

$$f\colon (x,p) \to pe^{-px},\ \forall x \in [0;\ +\infty),\ \forall p \in P_+,$$

является положительной на множестве $\Pi_+ = [0;\ +\infty) \times [a;b]$, $a > 0$.

Имеет место оценка

$$pe^{-px} \leqslant be^{-ax},\ \forall (x,p) \in \Pi_+,$$

а интеграл от мажорирующей функции сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty} be^{-ax}\,dx = -\,\frac{b}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,d(\,-ax) =$$

$$= -\,\frac{b}{a}\Big[e^{-ax}\Big]_{x=0}^{x\to+\infty} = -\,\frac{a+b}{a}\quad (b > a > 0).$$

Тогда, по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — теорема 1 — интеграл I_+ равномерно абсолютно сходится на отрезке $P_+ = [a;b]$ при любых $b > a > 0$.

Неравномерную сходимость интеграла I_0 на отрезке $P_0 = [0;b]$ будем доказывать, следуя критерию неравномерной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 5.1).

Интеграл I_0 сходится

$$I_0(p) = \int\limits_0^{+\infty} pe^{-px}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,d(\,-px) =$$

$$= -\left[e^{-px}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = 1,\ \forall p\in[0;b].$$

Докажем, что имеет место утверждение (15.1), которое относительно интеграла I_0 будет таковым:

$$\forall \overset{*}{\eta}\geqslant 0,\ \forall\varepsilon\in(0;\varepsilon_0),\ \exists\eta>\overset{*}{\eta},\ \exists p\in[0;b]\colon\ \int\limits_{\eta}^{+\infty} pe^{-px}\,dx\geqslant\varepsilon.$$

При любом $p\in[0;b]$ и любом положительном η интеграл

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} pe^{-px}\,dx = -\left[e^{-px}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = e^{-p\eta}.$$

Неравенство

$$e^{-p\eta}\geqslant\varepsilon \iff p\leqslant\frac{1}{\eta}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\quad(p\geqslant 0,\ \eta>0,\ \varepsilon>0).$$

Поэтому

$$\forall \overset{*}{\eta}\geqslant 0,\ \forall\varepsilon\in(0;1),\ \exists\eta>\overset{*}{\eta},$$

$$\exists p\in[0;B],\ B=\min\Big\{b,\ \frac{1}{\eta}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big\}\colon\ \int\limits_{\eta}^{+\infty} pe^{-px}\,dx\geqslant\varepsilon.$$

Пример 5. *Исследуем на равномерную сходимость несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p)=\int\limits_0^2 \frac{x^p}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\,dx,\ \forall p\in(-0{,}5;0{,}5).$$

Интеграл I является несобственным с несколькими особыми точками: внутренней $x=1$, граничной $x=2$ промежутка интегрирования, а также граничной $x=0$, когда параметр $p\in(-0{,}5;0)$.

С целью использования признака Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1) введём в рассмотрение несобственный интеграл с параметром

$$\overset{*}{I}(p) = \int\limits_0^2 \frac{x^p}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}\,dx,\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5),$$

с неотрицательной подынтегральной функцией такой, что

$$0 \leqslant \frac{x^p}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}},\ \forall x \in (0;1),\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5), \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}},\ \forall x \in (1;2),\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5). \end{array}\right.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} : \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{|x-1|}} \quad \text{при} \quad x \to 1-0,$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \quad \text{при} \quad x \to 1+0,$$

$$\lim_{x\to2-0}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right) = \sqrt{2},$$

то в соответствии с предельным признаком сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла (предложение 2.2) будут сходиться несобственные интегралы

$$\overset{*}{I}_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \quad \text{и} \quad \overset{*}{I}_2 = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}.$$

Тогда, по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — теорема 1 — несобственные интегралы

$$I_1(p) = \int\limits_0^1 \frac{x^p}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\, dx,\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5),$$

и

$$I_2(p) = \int\limits_1^2 \frac{x^p}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\, dx,\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5),$$

равномерно абсолютно сходятся на интервале $(-0{,}5; 0{,}5)$.

А значит, и интеграл

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p),\ \forall p \in (-0{,}5; 0{,}5),$$

равномерно абсолютно сходится на интервале $(-0{,}5; 0{,}5)$.

Пример 6. *Подберём положительное число* a *так, чтобы*

$$0 < \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} < 10^{-6} \quad \textit{при} \quad 1{,}1 \leqslant p \leqslant 10.$$

Поскольку при положительных a

$$0 < \frac{1}{1+x^p} < \frac{1}{x^{1,1}}\,,\ \forall x \in (a;\, +\infty),\ \forall p \in [1{,}1; 10],$$

а интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}} = \left[\frac{x^{-0,1}}{-0{,}1}\right]_a^{+\infty} = \frac{10}{a^{0,1}}\,,$$

то, по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1), при каждом фиксированном положительном a равномерно абсолютно сходится на отрезке $[1{,}1; 10]$ интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}\,.$$

По свойству несобственного интегрирования неравенств,

$$0 < \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} < \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}} < \frac{10}{a^{0,1}}\,,\ \forall x \in (a;\, +\infty).$$

Поскольку

$$\frac{10}{a^{0,1}} < 10^{-6} \quad \text{при} \quad a > 10^{70},$$

то при $a > 10^{70}$ имеет место оценка, указанная в примере.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса) содержит достаточные условия равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. В следующем примере докажем, что условия теоремы 1 не являются необходимыми для равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 7 (продолжение примера 5.1). В примере 5.1 доказано, что несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,

$$I(p) = \int\limits_1^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{1}{p^2}\Bigl(x - \frac{1}{p}\Bigr)^2\biggr)\, dx,\ \forall p \in (0;1),$$

равномерно абсолютно сходится на интервале $(0;1)$.

В то же время для этого интеграла не существует мажоранты, которая не зависит от параметра.

Допустим противное:

$$f(x,p) = \exp\biggl(-\frac{1}{p^2}\Bigl(x - \frac{1}{p}\Bigr)^2\biggr) \leqslant \varphi(x),\ \forall x \in [1;\, +\infty],\ \forall p \in (0;1).$$

Тогда для любого x из $(1; +\infty)$ существует такое $p = \dfrac{1}{x}$, которое принадлежит интервалу $(0;1)$, что

$$f(x,p) = 1.$$

Поэтому

$$\varphi(x) \geqslant 1, \ \forall x \in (1;\,+\infty).$$

А значит, интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

расходится.

3.2. Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 2 (*признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p), \ \forall x \in [a;b), \ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция*

$$\Lambda\colon (\eta,p) \to \int\limits_{a}^{\eta} \varphi(x,p)\, dx, \ \forall \eta \in [a;b), \ \forall p \in P,$$

ограничена на множестве $G = \{(\eta,p)\colon a \leqslant \eta < b, \ p \in P\}$;

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p), \ \forall x \in [a;b), \ \forall p \in P,$$

есть функция одной переменной, монотонная на числовом промежутке $[a;b)$;

4) *при* $x \to b-0$ *функция* ψ *равномерно сходится к нулю на множестве* P.

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Доказательство. Условия теоремы гарантируют выполнение условий признака Дирихле сходимости на множестве несобственного интеграла с параметром (теорема 3.1), по которому интеграл I сходится на множестве P.

Остаётся доказать равномерность этой сходимости на множестве P.

Пусть $\overset{*}{\eta}$ и $\overset{**}{\eta}$ суть некоторые произвольные числа из полуоткрытого числового промежутка $[a;b)$.

Для определённости будем считать, что $\overset{*}{\eta} < \overset{**}{\eta}$.

Относительно интеграла

$$\overset{*}{I}(p) = \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P, \tag{6}$$

при каждом фиксированном значении p из множества P выполняются условия второй интегральной теоремы о среднем значении определённого интеграла.

Поэтому существует $\zeta \in \big[\overset{*}{\eta};\overset{**}{\eta}\big]$ такое, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx = \psi(\overset{*}{\eta},p)\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\zeta} \varphi(x,p)\,dx + \\ + \psi(\overset{**}{\eta},p)\int\limits_{\zeta}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P.\end{gathered} \tag{7}$$

Ограниченность функции

$$\Lambda\colon (\eta, p) \to \int\limits_a^{\eta} \varphi(x, p)\,dx,\ \forall (\eta, p) \in G,$$

означает:

$$\exists M > 0\colon |\Lambda(\eta, p)| < M,\ \forall \eta \in [a; b),\ \forall p \in P. \tag{8}$$

В силу выбора $\overset{*}{\eta}$, $\overset{**}{\eta}$ и ζ на основании (8) имеем:

$$\exists M > 0\colon \left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\zeta} \varphi(x, p)\,dx \right| < M,\ \left| \int\limits_{\zeta}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x, p)\,dx \right| < M,$$

$$\forall \overset{*}{\eta}, \overset{**}{\eta} \in [a; b),\ \forall \zeta \in [a; b),\ \forall p \in P. \tag{9}$$

В соответствии с условием 4) доказываемой теоремы на языке бесконечно малых можем утверждать о следующем:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \widetilde{\eta}_{\varepsilon} \in [a; b),\ \forall \overset{*}{\eta}, \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon}; b)\colon$$

$$\bigl|\psi(\overset{*}{\eta}; p)\bigr| < \varepsilon,\ \bigl|\psi(\overset{**}{\eta}; p)\bigr| < \varepsilon,\ \forall p \in P. \tag{10}$$

Используя свойство модуля определённого интеграла, на основании равенства (7) получим оценку

$$\left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x, p)\,\psi(x, p)\,dx \right| \leqslant \bigl|\psi(\overset{*}{\eta}, p)\bigr| \cdot \left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\zeta} \varphi(x, p)\,dx \right| +$$

$$+ \bigl|\psi(\overset{**}{\eta}, p)\bigr| \cdot \left| \int\limits_{\zeta}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x, p)\,dx \right|,\ \forall p \in P. \tag{11}$$

Поэтому с учётом соотношений (9) и (10) будем иметь, что

$$\exists M > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \widetilde{\eta}_{\varepsilon} \in [a; b),\ \forall \overset{*}{\eta}, \overset{**}{\eta} \in (\widetilde{\eta}_{\varepsilon}; b):$$

$$\left| \int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}} \varphi(x,p)\, \psi(x,p)\, dx \right| < 2M\varepsilon,\ \forall p \in P.$$

где M не зависит ни от ε, ни от p.

Отсюда, по M-критерию Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 11.1), заключаем о равномерной сходимости на множестве P несобственного интеграла, зависящего от параметра, I. ■

В приложениях используются и частные случаи признака Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции*

$$\varphi \colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a; b),$$

интегрируемо по Риману на любом отрезке $[a; \eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a; b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция*

$$\Lambda \colon \eta \to \int\limits_{a}^{\eta} \varphi(x)\, dx,\ \forall \eta \in [a; b),$$

ограничена;

3) *выполняются условия* 3) *и* 4) *теоремы* 2.

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\, \psi(x,p)\, dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Следствие 2. *Пусть*:
1) *выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 2;
2) *функция*

$$\psi\colon x \to \psi(x),\ \forall x \in [a;b),$$

монотонна;
3) *предел*

$$\lim_{x\to b-0} \psi(x) = 0.$$

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x)\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Пример 8. *Докажем, что* ***интеграл Дирихле***

$$D(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx,\ \forall p \in [a;b],$$

равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, *не содержащем нуль*.

Функция Λ ограничена:

$$|\Lambda(\eta,p)| = \left|\int\limits_0^{\eta} \sin px\,dx\right| = \frac{1}{|p|}\,\left|\big[\cos px\big]_{x=0}^{x=\eta}\right| = \frac{1}{|p|}\,|1-\cos p\eta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\min\{|a|,|b|\}}\,,\ \forall \eta \in [0;\,+\infty),\ \forall p \in [a;b],\ 0 \notin [a;b].$$

Функция

$$\varphi\colon x \to \frac{1}{x}\,,\ \forall x \in (0;\,+\infty),$$

монотонно стремится к нулю при $x \to\,+\infty$.

Итак, по признаку Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — следствие 2 — интеграл Дирихле D равномерно сходится на любом отрезке $[a;b]$ при условии, что $0 \notin [a;b]$.

3.3. Признак Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 3 (*признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$\varphi\colon (x,p) \to \varphi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

при каждом фиксированном значении переменной p *из множества* P *является функцией одной переменной, сужение которой интегрируемо по Риману на любом отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в* $[a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P;

3) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$\psi\colon (x,p) \to \psi(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, монотонной на числовом промежутке $[a;b)$;

4) *функция* ψ *ограничена на множестве*

$$G = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b,\ p \in P\}.$$

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$I(p)=\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Доказательство. При выполнении условий теоремы выполняются условия признака Абеля сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 4.3), по которому интеграл I сходится на множестве P.

Докажем, что эта сходимость равномерная.

Условия 1) и 3) теорем 2 и 3 одинаковы. Это обстоятельство позволяет такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 2, составить равенство (7).

Затем от равенства (7) перейти к неравенству (11).

Дальнейшие рассуждения таковы.

Ограниченность функции ψ на множестве G позволяет сделать следующее заключение:

$$\begin{gathered}\exists M>0\colon \left|\psi(\overset{*}{\eta},p)\right|<M,\ \left|\psi(\overset{**}{\eta},p)\right|<M,\\ \forall\,\overset{*}{\eta}\in[a;b),\ \forall\,\overset{**}{\eta}\in[a;b),\ \forall p\in P.\end{gathered}\qquad(12)$$

Поскольку несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$I_1(p)=\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

равномерно сходится на множестве P, то

$$\int\limits_\eta^\zeta \varphi(x,p)\,dx=\int\limits_\eta^b \varphi(x,p)\,dx+\int\limits_b^\zeta \varphi(x,p)\,dx,$$

$$\forall\zeta\in[a;b),\ \forall\eta\in[a;b),\ \forall p\in P.$$

Тогда имеем

$$\left|\int\limits_{\eta}^{\zeta}\varphi(x,p)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\eta}^{b}\varphi(x,p)\,dx\right| + \left|\int\limits_{b}^{\zeta}\varphi(x,p)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{\eta}^{b}\varphi(x,p)\,dx\right|, \ \forall\zeta\in[a;b), \ \forall\eta\in[a;b), \ \forall p\in P. \tag{13}$$

Равномерная сходимость на множестве P несобственного интеграла, зависящего от параметра, I_1 в соответствии с определением 4.1 означает, что при любом $p \in P$

$$\forall\varepsilon>0, \ \exists\widetilde{\eta}_\varepsilon\in[a;b), \ \forall\eta\in(\widetilde{\eta}_\varepsilon;b)\colon \left|\int\limits_{\eta}^{b}\varphi(x,p)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{14}$$

На основании (13) и (14) имеем:

$$\forall\varepsilon>0, \ \exists\widetilde{\eta}_\varepsilon\in[a;b), \ \forall\overset{*}{\eta},\overset{**}{\eta},\zeta\in(\widetilde{\eta}_\varepsilon;b)\colon$$

$$\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\zeta}\varphi(x,p)\,dx\right| < \varepsilon, \ \left|\int\limits_{\overset{**}{\eta}}^{\zeta}\varphi(x,p)\,dx\right| < \varepsilon, \ \forall p\in P. \tag{15}$$

Используя утверждения (12) и (15), на основании оценки (11) получаем:

$$\exists M>0, \ \forall\varepsilon>0, \ \exists\widetilde{\eta}_\varepsilon\in[a;b), \ \forall\overset{*}{\eta},\overset{**}{\eta}\in(\widetilde{\eta}_\varepsilon;b)\colon$$

$$\left|\int\limits_{\overset{*}{\eta}}^{\overset{**}{\eta}}\varphi(x,p)\,\psi(x,p)\,dx\right| < 2M\varepsilon, \ \forall p\in P,$$

где M не зависит ни от ε, ни от p.

Отсюда, по M-критерию Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 11.1), заключаем о равномерной сходимости на множестве P несобственного интеграла, зависящего от параметра, I. ■

В приложениях используются и частные случаи признака Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия*:

1) *сужение функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;b),$$

интегрируемо по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$; $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *интеграл*

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

сходится;

3) *выполняются условия* 3) *и* 4) *теоремы* 3.

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Пример 9. *Исследуем на равномерную сходимость несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-px}\,dx,\ \forall p \in [0;\,+\infty).$$

Исследование проведём на основании следствия 3 (признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра).

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Si} x = \frac{\pi}{2}$$

и является сходящимся.

При каждом фиксированном неотрицательном значении параметра p функция

$$\psi\colon (x,p) \to e^{-px},\ \forall x, p \in [0;\,+\infty),$$

является функцией одной переменной, монотонной на полуоткрытом числовом луче $[0;\,+\infty)$.

На множестве $G = [0;\,+\infty) \times [0;\,+\infty)$ функция ψ ограничена:

$$0 < e^{-px} \leqslant 1,\ \forall (x,p) \in G.$$

А значит, по признаку Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, интеграл I равномерно сходится на $[0;\,+\infty)$.

Замечание 1. Если не использовать функцию интегральный синус, то сходимость можно установить, используя результаты исследований, выполненных в примере 8.1, где доказана сходимость на поле $\mathbb{R}$ интеграла Дирихле

$$D(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Наряду с этим сходимость можно установить по признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла (предложение 3.2), основываясь на том, что

$$|\Lambda(\eta)| = \left|\int\limits_0^{\eta} \sin x\,dx\right| = |1-\cos\eta| \leqslant 2,\ \forall \eta \in [0;\,+\infty),$$

а функция

$$\psi\colon x \to \frac{1}{x}, \forall x \in (0;\,+\infty),$$

монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Пример 10. *Исследуем на равномерную сходимость несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\, dx, \ \forall p \in [0;\, +\infty).$$

Подстановкой $\sqrt{x} = t, \ \forall t \in [0;\, +\infty),$ преобразуем интеграл

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(1 + t^{\frac{p}{2}}\right)\sqrt{t}}\, dt, \ \forall p \in [0;\, +\infty).$$

Теперь используем признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, в том варианте, в котором он сформулирован в следствии 3.

Поскольку предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \to +0} \left(\frac{\sin t}{t}\, \sqrt{t}\right) = 0,$$

то интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

является несобственным первого рода. Его сходимость установим по признаку Дирихле (предложение 3.2):

$$|\Lambda(\eta)| = \left| \int\limits_0^{\eta} \sin t\, dt \right| = |1 - \cos \eta| \leqslant 2, \ \forall \eta \in [0;\, +\infty);$$

функция

$$\psi \colon t \to \frac{1}{\sqrt{t}}\,, \ \forall t \in (0;\, +\infty),$$

монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Функция

$$\psi\colon (t,p) \to \frac{1}{1+t^{\frac{p}{2}}}\,,\ \forall (t,p) \in G,\ G = \{(t,p)\colon t \geqslant 0,\ p \geqslant 0\},$$

при каждом фиксированном неотрицательном p является функцией одной переменной t, монотонной на числовом луче $[0;\ +\infty)$.

Кроме того функция ψ ограничена на множестве G:

$$0 < \frac{1}{1+t^{\frac{p}{2}}} < 1,\ \forall (t,p) \in G.$$

Таким образом, интеграл I равномерно сходится на неотрицательном числовом луче.

Следствие 4. *Пусть*:

1) *выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3;

2) *функция*

$$\psi\colon x \to \psi(x),\ \forall x \in [a; b),$$

монотонна;

3) *функция* ψ *ограничена.*

Тогда несобственный интеграл с параметром

$$\int\limits_a^b \varphi(x,p)\,\psi(x)\,dx,\ \forall p \in P,$$

равномерно сходится на множестве P.

Пример 11. *Докажем, что при каждом фиксированном положительном* q *несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметров,*

$$I_q(p) = \int\limits_1^{+\infty} e^{-px}\,\frac{\cos x}{x^q}\,dx,\ \forall p \in [0;\ +\infty),$$

равномерно сходится (*по параметру* p) *на полуоткрытом числовом луче* $[0;\ +\infty)$.

Доказательство проведём на основании признака Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, сформулированного в частном случае как следствие 4.

По признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла (предложение 3.2), устанавливаем, что при каждом фиксированном положительном q несобственный интеграл первого рода

$$I_q = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^q}\, dx$$

сходится:

$$|\Lambda(\eta)| = \left| \int\limits_1^{\eta} \cos x\, dx \right| = |\sin\eta - \sin 1| \leqslant 2, \ \forall \eta \in [1;\, +\infty);$$

при каждом фиксированном положительном q функция

$$\psi_q\colon x \to \frac{1}{x^q}\,, \ \forall x \in [1;\, +\infty),$$

монотонно стремится к нулю при $x \to\, +\infty$.

Функция

$$\psi\colon (x,p) \to e^{-px}, \ \forall (x,p) \in G, \ G = \{(x,p)\colon x \geqslant 1,\ p \geqslant 0\},$$

при каждом фиксированном неотрицательном p является функцией одной переменной, монотонной на числовом луче $[1;\, +\infty)$.

Кроме того, функция ψ ограничена на множестве G:

$$0 < e^{-px} < 1, \ \forall (x,p) \in G.$$

Итак, при каждом фиксированном положительном q интеграл $I_q(p)$, будучи несобственным интегралом, зависящим от параметра p, равномерно сходится на неотрицательном числовом луче.

§ 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций, заданных несобственными интегралами, зависящими от параметра

1. Предельный переход под знаком несобственного интеграла

Формула предельного перехода под знаком несобственного интеграла.

Теорема 1 (*о предельном переходе под знаком несобственного интеграла*). *Пусть выполняются условия*:

1) *при каждом фиксированном значении переменной* p *из множества* P *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in P,$$

является функцией одной переменной, непрерывной на числовом промежутке $[a;b),\ -\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) *сужение функции* f *на всяком отрезке* $[a;\eta]$, *содержащемся в числовом промежутке* $[a;b)$, *при* $p \to p_0$ *равномерно сходится к функции*

$$\varphi\colon x \to \varphi(x),\ \forall x \in [a;\eta];$$

3) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P.$$

равномерно сходится на множестве P.

Тогда заданная несобственным интегралом, зависящим от параметра, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in P,$$

сходится при $p \to p_0$ *и имеет место формула предельного перехода под знаком несобственного интеграла*

$$\lim_{p \to p_0} \int\limits_a^b f(x,p)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{p \to p_0} f(x,p)\, dx. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть η — некоторая переменная из полуоткрытого числового промежутка $[a; b)$.

Условие 3) позволяет использовать критерий (теорема 6.1.1) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, и левую часть равенства (1) записать в виде

$$\begin{gathered}\lim_{p \to p_0} \int\limits_a^b f(x,p)\, dx = \lim_{p \to p_0} \lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x,p)\, dx = \\ = \lim_{p \to p_0} \lim_{\eta \to b-0} \Phi(\eta, p),\end{gathered} \tag{2}$$

где функция

$$\Phi\colon (\eta, p) \to \int\limits_a^\eta f(x,p)\, dx, \ \forall \eta \in [a; b), \ \forall p \in P. \tag{3}$$

Предельная функция

$$\varphi\colon x \to \varphi(x), \ \forall x \in [a; \eta],$$

при равномерной сходимости

$$f(x,p) \underset{p \to p_0}{\rightrightarrows} \varphi(x), \ \forall x \in [a; \eta],$$

ввиду выполнения условий 1) и 2) является (в соответствии с теоремой 1.8.1.1) непрерывной на отрезке $[a; \eta]$.

Отрезок $[a; \eta]$ — произвольный из промежутка $[a; b)$.

Тогда в соответствии с определением несобственного интеграла на числовом промежутке $[a; b)$ интеграл

$$\int\limits_a^b \varphi(x) = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta \varphi(x)\,dx.$$

Поэтому правая часть равенства (1)

$$\int\limits_a^b \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx =$$
$$= \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta \varphi(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx. \tag{4}$$

Условие 1) позволяет использовать формулу предельного перехода под знаком определённого интеграла (теорема 1.2.1.2), по которой

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx = \int\limits_a^\eta \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx,\ \forall \eta\in[a;b). \tag{5}$$

На основании равенств (4) и (5) получаем, что

$$\int\limits_a^b \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx = \lim_{\eta\to b-0}\,\lim_{p\to p_0} \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx =$$
$$= \lim_{\eta\to b-0}\,\lim_{p\to p_0} \Phi(\eta,p). \tag{6}$$

С учётом формул (2) и (6) равенство (1) будет иметь вид

$$\lim_{p\to p_0}\,\lim_{\eta\to b-0} \Phi(\eta,x) = \lim_{\eta\to b-0}\,\lim_{p\to p_0} \Phi(\eta,x), \tag{7}$$

где функция Φ задаётся формулой (3).

Теперь надо доказать равенство (7). С этой целью будем использовать теорему о повторном пределе (теорема 2.2.2.1).

Предел

$$\lim_{\eta\to b-0}\Phi(\eta,p)=\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

существует в силу условия 3), причём стремление к предельной функции

$$I\colon p\to\int\limits_a^{b} f(x,p)\,dx,\ \forall p\in P,$$

является равномерным на множестве P.

Предел

$$\lim_{p\to p_0}\Phi(\eta,p)=\lim_{p\to p_0}\int\limits_a^{\eta} f(x,p)\,dx,\ \forall \eta\in[a;b),$$

существует, что уже было установлено при выводе равенства (5).

Значит, выполняются условия теоремы о повторном пределе, и, следовательно, имеет место формула (7). ■

В теореме 1 указаны лишь достаточные условия предельного перехода под знаком несобственного интеграла.

Рассмотрим пример на случай предельного перехода под знаком несобственного интеграла, когда не выполняются условия теоремы 1.

Пример 1. *Докажем, что*

$$\lim_{p\to+0}\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}f(x)\,dx=\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx,$$

когда функция f *интегрируема на числовом луче* $[0;+\infty)$.

Следуя определению правостороннего предела функции в точке, докажем, что

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon\in(0;+\infty),\ \forall p\in(0;\delta_\varepsilon)\colon\left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}f(x)\,dx-\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx, \ \forall p \in [0; +\infty),$$

равномерно сходится на числовом луче $[0; +\infty)$, что устанавливаем с помощью признака Абеля (следствие 3.3.1) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Как указано в условии задачи, сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Функция

$$\psi\colon (x,p) \to e^{-px}, \ \forall (x,p) \in \Pi, \ \Pi = [0; +\infty) \times [0; +\infty),$$

ограничена $(0 < e^{-px} \leqslant 1, \forall (x,p) \in \Pi)$, а при каждом фиксированном неотрицательном p является функцией одной переменной x, монотонной на $[0; +\infty)$.

По свойству 1.1.1 (линейности равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра), разность

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \bigl(e^{-px} - 1\bigr) f(x)\, dx, \ \forall p \in [0; +\infty),$$

является несобственным интегралом, зависящим от параметра, равномерно сходящимся на числовом луче $[0; +\infty)$.

Тогда в соответствии с M-критерием (теорема 3.1.1) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, имеем:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta_\varepsilon \in (0; +\infty), \ \forall \eta \in (\eta_\varepsilon; +\infty)\colon \\ \left| \int\limits_\eta^{+\infty} \bigl(e^{-px} - 1\bigr) f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \ \forall p \in [0; +\infty). \end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая, что

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_\eta^{+\infty} \bigl(e^{-px}-1\bigr) f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_0^{\eta} \bigl(e^{-px}-1\bigr) f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_\eta^{+\infty} \bigl(e^{-px}-1\bigr) f(x)\,dx\right|, \ \forall p,\eta\in(0;+\infty),$$

доказательство сводим к следующему:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon\in(0;+\infty),\ \forall p\in(0;\delta_\varepsilon)\colon \left|\int\limits_0^{\eta} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{9}$$

где η — любое положительное число, при котором выполняется утверждение (8).

Поскольку функция $f\colon [0;+\infty)\to\mathbb{R}$ интегрируема на числовом луче $[0;+\infty)$, то её сужение интегрируемо на отрезке $[0;\eta]$.

Необходимое условие интегрируемости функции по Риману на отрезке предполагает её ограниченность на этом отрезке. Поэтому

$$|f(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[0;\eta],$$

где $M=\sup\limits_{[0;\,\eta]}|f(x)|$.

Кроме этого,

$$|e^{-px}-1| = 1-e^{-px}\leqslant 1-e^{-\eta p},\ \forall p\in[0;+\infty),\ \forall x\in[0;\eta].$$

Тогда

$$\left|\int\limits_0^{\eta} \bigl(e^{-px}-1\bigr) f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_0^{\eta}\bigl(1-e^{-px}\bigr)|f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M\eta(1-e^{-\eta p}),\ \forall p\in[0;+\infty),$$

где η — положительное число.

При положительных ε,η,p и M неравенство

$$(1-e^{-\eta p})M\eta<\frac{\varepsilon}{2}\iff e^{-\eta p}>\frac{2M\eta-\varepsilon}{2M\eta}$$

и выполняется при любом неотрицательном p, если $\varepsilon > 2M\eta$, а при $p < \dfrac{1}{\eta} \ln \dfrac{2M\eta}{2M\eta - \varepsilon}$ выполняется, когда $0 < \varepsilon < 2M\eta$.

Поэтому

$$\forall \varepsilon \in (0; 2M\eta), \ \exists \delta_\varepsilon = \frac{1}{\eta} \ln \frac{2M\eta}{2M\eta - \varepsilon}, \ \forall p \in (0; \delta_\varepsilon):$$

$$\left| \int\limits_0^\eta \big(e^{-px} - 1\big) f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\forall \varepsilon \in [2M\eta; +\infty), \ \forall p \in [0; +\infty): \left| \int\limits_0^\eta \big(e^{-px} - 1\big) f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что соответствует утверждению (9).

Если $M = 0$, то

$$f(x) = 0, \ \forall x \in [0; +\infty),$$

и утверждение (9) вполне очевидно.

Пример 2. *Найдём*

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}.$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{1 + x^n} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} =$$

$$= 1 - \int\limits_0^{1} \frac{x^n}{1 + x^n}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$0 < \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx < \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$0 < \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-2}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\},$$

то

$$1 - \frac{1}{1+n} < \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 0.$$

Пример 3. *Докажем, что*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

если функция f *абсолютно интегрируема на* $[0;+\infty)$.

Поскольку функция f абсолютно интегрируема на $[0;\,+\infty)$, а

$$|f(x)\sin nx| \leqslant |f(x)|,\ \forall x \in [0;\,+\infty),\ n \in \mathbb{N},$$

то, по признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1), несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx$$

равномерно абсолютно сходится на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Тогда в соответствии с M-критерием (теорема 3.1.1) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, имеем

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon \in (0;\, +\infty),\ \forall \eta \in (\eta_\varepsilon;\, +\infty)\colon \quad \left| \int\limits_{\eta}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

То, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

на языке бесконечно малых означает:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > N_\varepsilon\colon \left| \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку при любом положительном η и любом натуральном n

$$\left| \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{0}^{\eta} f(x) \sin nx \, dx \right| + \left| \int\limits_{\eta}^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right|,$$

то надо доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > N_\varepsilon\colon \left| \int\limits_{0}^{\eta} f(x) \sin nx \, dx \right| < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{11}$$

где η — любое положительное число, при котором выполняется утверждение (10).

Выполним разбиение отрезка $[0; \eta]$ точками $x_\tau,\ \tau = \overline{0, k+1}$, так, что $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k+1} = \eta,$ и представим интеграл

$$\int\limits_{0}^{\eta} f(x) \sin nx \, dx = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin nx \, dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Функция f абсолютно интегрируема на $[0;\, +\infty)$. Следовательно, её сужение интегрируемо на любом отрезке, содержащемся в $[0;\, +\infty)$.

Необходимое условие интегрируемости функции по Риману предполагает её ограниченность на этом отрезке. Поэтому

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \ \forall x \in [x_i; x_{i+1}],$$

где $m_i = \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x), \ M_i = \sup\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x), \ i = \overline{0,k}$.

Тогда

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin nx \, dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(x) - m_i\big) \sin nx \, dx + m_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx \, dx,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ i = \overline{0,k},$$

и

$$\int\limits_{0}^{\eta} f(x) \sin nx \, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(x) - m_i\big) \sin nx \, dx + \sum_{i=0}^{k} m_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx \, dx, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку

$$f(x) - m_i \leqslant \omega_i, \ \ i = \overline{0,k}\,,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ — колебание функции f на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ длины $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, а

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \Big[\cos nx\Big]_{x = x_i}^{x = x_{i+1}} = \frac{1}{n} \big(\cos nx_i - \cos nx_{i+1}\big)$$

и

$$\left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx \, dx \right| \leqslant \frac{2}{n}\,, \ \ i = \overline{0,k},$$

то

$$\left|\int\limits_0^{\eta} f(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\big(f(x)-m_i\big)\sin nx\right|dx +$$

$$+\sum_{i=0}^{k}|m_i|\cdot\left|\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\sin nx\,dx\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k}|m_i|,\ \forall\eta\in(0;\,+\infty).$$

Ввиду интегрируемости по Риману на отрезке $[0;\eta]$ сужения функции f для любого положительного ε существует разбиение ρ отрезка $[0;\eta]$, для которого

$$\sum_{i=0}^{k}\omega_i\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Поэтому вместо утверждения (11) достаточно доказать, что

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n>N_\varepsilon\colon\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k}|m_i| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{12}$$

где число k определяется разбиением ρ отрезка $[0;\eta]$.

Неравенство

$$\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{k}|m_i| < \frac{\varepsilon}{3} \iff n > \frac{6}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{k}|m_i|,$$

а значит, за N_ε можно взять целую часть

$$N_\varepsilon = \left[\,\frac{6}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{k}|m_i|\right]$$

и тем самым докажем утверждение (12).

2. Непрерывность функций, заданных несобственным интегралом, зависящим от параметра

Теорема о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра.

Теорема 1 (*о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра*). *Пусть*:

1) *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in [c;d],\ (b \leqslant +\infty)$$

непрерывна;

2) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

равномерно сходится на отрезке $[c;d]$.

Тогда заданная несобственным интегралом, зявисящим от параметра, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

будет непрерывной.

Доказательство. Пусть p_0 — произвольная фиксированная точка из отрезка $[c;d]$. Тогда для непрерывности функции I достаточно доказать, что

$$\lim_{p\to p_0} I(p) = I(p_0),$$

то есть, что

$$\lim_{p\to p_0} \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b f(x,p_0)\,dx.$$

Поскольку функция f при каждом фиксированном значении переменной x из числового промежутка $[a;b)$ является функцией одной переменной, непрерывной на отрезке $[c;d]$, то

$$f(x,p_0)=\lim_{p\to p_0} f(x,p),\ \forall x\in[a;b).$$

А поэтому надо доказать, что

$$\lim_{p\to p_0}\int\limits_a^b f(x,p)\,dx=\int\limits_a^b \lim_{p\to p_0} f(x,p)\,dx.$$

Для этого проверим выполнение условий теоремы 1.1 о предельном переходе под знаком несобственного интеграла.

Условие 1) теоремы 1.1 есть частный случай условия 1) доказываемой теоремы.

Условие 2) теоремы 1.1 получаем из условия 1) доказываемой теоремы по теореме Кантора о том, что функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нём и

$$f(x,p)\underset{p\to p_0}{\rightrightarrows} f(x,p_0),\ \forall x\in[a;\eta],$$

где η — любое число из числового промежутка $[a;b)$.

Условие 3) теоремы 1.1 и условие 2) доказываемой теоремы совпадают. ■

Пример 1. *Докажем, что несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра,*

$$I(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2(1+x^2)}\sin p\,dx,\ \forall p\in\mathbb{R},$$

неравномерно сходится на поле $\mathbb{R}$.

При любом ненулевом вещественном p предел

$$\lim_{x\to+\infty}\bigl(e^{-p^2(1+x^2)}|\sin p|:x^{-2}\bigr)=|\sin p|\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{p^2(1+x^2)}}=0,$$

а несобственный интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится.

По предельному признаку сравнения абсолютной сходимости на множестве несобственного интеграла с параметром (следствие 2.2.1), интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p^2(1+x^2)} \sin p \, dx$$

абсолютно сходится на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} e^{-p^2(1+x^2)} \sin p \, dx, \ \forall p \in \mathbb{R},$$

является определённым, зависящим от параметра.

При $p = 0$ интеграл $I(0) = 0$, то есть, интеграл I абсолютно сходится в точке $p = 0$. Поэтому

$$I(p) = \int\limits_{0}^{1} e^{-p^2(1+x^2)} \sin p \, dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p^2(1+x^2)} \sin p \, dx, \ \forall p \in \mathbb{R},$$

абсолютно сходится на поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Используя то, что интеграл Эйлера — Пуассона

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, ,$$

находим значение данного интеграла при $p \neq 0$:

$$I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p^2(1+x^2)} \sin p \, dx = \frac{\sin p}{|p|} \, e^{-p^2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(|p|x)^2} \, d_x(|p|x) =$$

$$= \frac{\sin p}{|p|}\, e^{-p^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\sin p}{2|p|}\, e^{-p^2},\ \forall p \in (\,-\infty; 0) \cup (0;\,+\infty).$$

Пределы

$$\lim_{p\to+0} I(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{p\to+0}\Big(\frac{\sin p}{p}\, e^{-p^2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

$$\lim_{p\to-0} I(p) = -\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{p\to-0}\Big(\frac{\sin p}{p}\, e^{-p^2}\Big) = -\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

значение $I(0) = 0$.

Стало быть, заданная несобственным интегралом, зависящим от параметра, I функция

$$I\colon p \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{\pi}\sin p}{2|p|}\, e^{-p^2},\ \forall p \in (\,-\infty; 0) \cup (0;\,+\infty), \\[2ex] 0 \quad \text{при} \quad p = 0 \end{array}\right.$$

имеет разрыв (скачок) в точке $p = 0$.

Подынтегральная функция

$$f\colon (x, p) \to e^{-p^2(1+x^2)} \sin p,\ \forall x \in G,\ G = [0;\,+\infty) \times \mathbb{R},$$

непрерывна.

Если допустить, что интеграл I равномерно сходится на поле $\mathbb{R}$, то, по теореме 1 (о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра), сужение функции

$$I\colon p \to I(p),\ \forall p \in \mathbb{R},$$

непрерывно на любом отрезке, в том числе и на отрезке, которому принадлежит нуль.

Полученное противоречие и является доказательством неравномерной сходимости на поле $\mathbb{R}$ абсолютно сходящегося на $\mathbb{R}$ несобственного интеграла, зависящего от параметра, I.

3. Дифференцирование функций, заданных несобственным интегралом, зависящим от параметра

Теорема о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра. Формула дифференцирования под знаком несобственного интеграла по параметру.

Теорема 1 (*о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon (x,p)\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b),\ \forall p\in[c;d],\ (b\leqslant\ +\infty)$$

непрерывна;

2) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p)=\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p\in[c;d],$$

сходится на отрезке $[c;d]$;

3) *функция* f *при каждом фиксированном значении* x *из числового промежутка* $[a;b)$ *является функцией одной переменной, дифференцируемой на отрезке* $[c;d]$;

4) *функция*

$$\partial_p f\colon (x,p)\to\partial_p f(x,p),\ \forall x\in[a;b),\ \forall p\in[c;d],$$

непрерывна;

5) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p)=\int\limits_a^b \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall p\in[c;d],$$

равномерно сходится на отрезке $[c;d]$.

Тогда заданная несобственным интегралом, зависящим от параметра, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

непрерывно дифференцируема на отрезке $[c;d]$ *и имеет место формула дифференцирования под знаком несобственного интеграла*

$$\mathsf{D}\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall x \in [c;d]. \tag{1}$$

Доказательство проведём на основании связи несобственного интеграла, зависящего от параметра, с функциональными рядами (подпункт 5 пункта 1 из § 1):

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,p)\,dp,\ \forall p \in [c;d], \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b \partial_p f(x,p)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d], \tag{3}$$

где $\{\eta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — любая последовательность такая, что

$$\eta_1 = a,\ \eta_k \in [a;b),\ k = 1,2,\ldots,\ \eta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} b. \tag{4}$$

Поэтому надо доказать, что

$$\mathsf{D}\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,p)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d], \tag{5}$$

при условиях (4).

Интегралы, зависящие от параметра,

$$I_k(p) = \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],\ k = 1,2,\dots\ , \tag{6}$$

при условиях (4) имеют непрерывные подынтегральные функции, а поэтому являются определёнными.

Для каждого интеграла (6) условия доказываемой теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 1.1.2.2 (о дифференцировании функции, заданной определённым интегралом с параметром с постоянными пределами интегрирования), по которой

$$\mathsf{D} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,p)\,dx = \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \partial_p f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],\ k = 1,2,\dots\ . \tag{7}$$

Тождество (5) с учётом формул (6) и (7) будет иметь вид

$$\mathsf{D}\sum_{k=1}^{+\infty} I_k(p) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathsf{D}I_k(p),\ \forall p \in [c;d]. \tag{8}$$

Итак, доказательство сведено к доказательству тождества (8). Для этого достаточно проверить выполнение условий теоремы о дифференцировании функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} I_k(p)$, члены которого заданы по формулам (6).

Условие 1. *Функции*

$$I_k\colon p \to I_k(p),\ \forall p \in [c;d],\ k = 1,2,\dots\ ,$$

являются непрерывными.

Действительно, определённые интегралы, зависящие от параметра, (6), посредством которых заданы функции $I_k,\ k = 1,2,\dots$, имеют непрерывные подынтегральные функции.

По теореме 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), каждая функция I_k, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывна на отрезке $[c; d]$.

Условие 2. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} I_k(p)$, $\forall p \in [c; d]$, *сходится на отрезке* $[c; d]$.

Это следует из задания членов ряда I_k по формулам (6), связи (2), а также условия 2) доказываемой теоремы и теорем 7.1.1 и 8.1.1 об одновременной сходимости функциональных рядов и несобственного интеграла, зависящего от параметра, связанных соотношением (2) при условиях (4).

Условие 3. *Функции*

$$\mathsf{D}I_k \colon p \to \mathsf{D}I_k(p),\ \forall p \in [c; d],\ k = 1, 2, \ldots ,$$

непрерывны.

Из равенств (6) и (7) следует, что

$$\mathsf{D}I_k(p) = \mathsf{D} \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x, p)\, dx = \int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \partial_p f(x, p)\, dx, \qquad \forall p \in [c; d],\ k = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Из непрерывности сужений подынтегральной функции $\partial_p f$ на каждом из прямоугольников $[\eta_k; \eta_{k+1}] \times [c; d]$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что каждая из функций $\mathsf{D}I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывна на отрезке $[c; d]$ согласно теореме 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования).

Условие 4. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathsf{D}I_k(p)$, $\forall p \in [c; d]$, *равномерно сходится на отрезке* $[c; d]$.

Это следует из представления членов ряда $\mathsf{D}I_k$ по формулам (9), условия 5) доказываемой теоремы, а также теорем 7.1.1 и 8.1.1 об одновременной равномерной сходимости функциональных рядов и несобственного интеграла, зависящего от параметра, связанных соотношением (3) при условиях (4). ■

4. Интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра, в собственном смысле и определённых интегралов, зависящих от параметра, в несобственном смысле

Теорема об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в собственном смысле. Интегрирование функции, заданной определённым интегралом, содержащим параметр, в несобственном смысле. Повторные один раз собственные и один раз несобственные интегралы: несобственный интеграл от определённого интеграла, определённый интеграл от несобственного интеграла.

Теорема 1 (*об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в собственном смысле*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in [c;d],$$

непрерывна на множестве

$$\Pi = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b \leqslant +\infty,\ c \leqslant p \leqslant d\},$$

2) *несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

равномерно сходится на отрезке $[c;d]$.

Тогда заданная несобственным интегралом, зависящим от параметра, функция

$$I\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

интегрируема по Риману на отрезке $[c;d]$ *и имеет место равенство*

$$\int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp. \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что условия данной теоремы идентичны условиям теоремы 1.2 (о непрерывности функции, заданной несобственном интегралом, зависящим от параметра). Поэтому функция I непрерывна на отрезке $[c;d]$, а значит, и интегрируема на нём.

Стало быть, повторный интеграл в левой части равенства (1) существует.

Остаётся доказать справедливость самого равенства (1).

Пусть η есть зафиксированная переменная из полуоткрытого промежутка $[a;b)$. Тогда интегралы

$$\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx,\ \forall p\in[c;d], \quad \text{и} \quad \int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;\eta],$$

являются определёнными интегралами, зависящими от параметра, с непрерывной подынтегральной функцией на прямоугольнике

$$\widetilde{\Pi} = \{(x,p)\colon a\leqslant x\leqslant \eta,\ c\leqslant p\leqslant d\}, \quad \text{где} \quad a<\eta<b.$$

При этом для них выполняются условия теоремы 1.5.1.1 (об интегрировании функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра), в соответствии с которой

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx\right) dp = \int\limits_a^\eta \left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right) dx,\ \forall \eta\in[a;b). \tag{2}$$

Перейдём в равенстве (2) к пределу при $\eta\to b-0$.

Допустим (!), что

$$\lim_{\eta\to b-0} \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx\right) dp = \int\limits_c^d \left(\lim_{\eta\to b-0} \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx\right) dp. \tag{3}$$

По условию 2) доказываемой теоремы

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx=\int\limits_a^b f(x,p)\,dx. \tag{4}$$

Тогда предел функции, расположенной в левой части равенства (2), при $\eta\to b-0$, ввиду равенств (3) и (4) равен

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx\right)dp=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx\right)dp. \tag{5}$$

Вычислим предел при $\eta\to b-0$ функции, расположенной в правой части равенства (2),

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta\left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right)dx. \tag{6}$$

Поскольку функция f непрерывна на прямоугольнике $\widetilde{\Pi}$, то интеграл

$$\widetilde{I}(x)=\int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;\eta],$$

является определённым, зависящим от параметра.

По теореме 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования), этот интеграл определяет функцию

$$\widetilde{I}\colon x\to\int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;\eta],$$

которая является непрерывной.

Отрезок $[a;\eta]$ — произвольный из промежутка $[a;b)$.

Тогда при любом η из числового промежутка $[a;b)$ интеграл $\int\limits_a^\eta \widetilde{I}(x)\,dx$ является определённым и, по определению несобственного интеграла,

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta \widetilde{I}(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^b \widetilde{I}(x)\,dx.$$

Таким образом, предел (6) вычисляется так:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta\left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right)dx = \lim_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta \widetilde{I}(x)\,dx = \\ = \int\limits_a^b \widetilde{I}(x)\,dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp\right)dx. \tag{7}$$

Выполнение равенств (5) и (7) позволяет на основании равенства (2) построить равенство (1).

Тем самым теорема будет доказана, если только допущение (3) верное.

Для доказательства предельного перехода (3) введём условное обозначение

$$\Phi(\eta,p) = \int\limits_a^\eta f(x,p)\,dx,\ \forall\eta\in[a;b),\ \forall p\in[c;d], \tag{8}$$

и равенство (3) перепишем в виде

$$\lim_{\eta\to b-0}\int\limits_c^d \Phi(\eta,p)\,dp = \int\limits_c^d \lim_{\eta\to b-0}\Phi(\eta,p)\,dp. \tag{9}$$

Это равенство суть предельный переход при $\eta \to b-0$ в интеграле, зависящем от параметра,

$$\overset{*}{I}(\eta) = \int\limits_c^d \Phi(\eta, p)\, dp,\ \forall \eta \in [a; b).$$

Поэтому для доказательства равенства (9) надо проверить выполнение условий теоремы о предельном переходе в интеграле, зависящем от параметра. Но предварительно необходимо выяснить: интеграл $\overset{*}{I}$ определённый или несобственный.

При каждом фиксированном значении переменной η из числового промежутка $[a; b)$ функция Φ есть функция одной переменной, непрерывная на отрезке $[c; d]$. Это следует из задания (8) и теоремы 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования).

Действительно, при любом фиксированном η из числового промежутка $[a; b)$ функция

$$\Phi_\eta \colon p \to \int\limits_a^\eta f(x, p)\, dx,\ \forall p \in [c; d],$$

непрерывна, ибо подынтегральная функция f непрерывна на прямоугольнике $\widetilde{\Pi}$.

Следовательно, интеграл $\overset{*}{I}$ — определённый, зависящий от параметра η, и надо проверить выполнение условий теоремы 1.2.1.2 (о предельном переходе под знаком определённого интеграла). Для этого достаточно доказать равномерную сходимость

$$\Phi(\eta, p) \underset{\eta \to b-0}{\rightrightarrows} \varphi(p),\ \forall p \in [c; d],$$

или, в соответствии с принятым обозначением, что

$$\int\limits_a^\eta f(x, p)\, dx \underset{\eta \to b-0}{\rightrightarrows} \varphi(p),\ \forall p \in [c; d].$$

Такая равномерная сходимость предусмотрена условием 2) доказываемой теоремы, причём предельная функция

$$\varphi\colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d].$$

Значит, равенство (9) имеет место. ■

Обратим внимание на то, что теорема 1 выражает два вида интегрируемости:

1) интегрирование несобственного интеграла с параметром

$$\int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d],$$

в собственном смысле на отрезке $[c;d]$:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,p)\,dx \right) dp = \int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx;$$

2) интегрирование определённого интеграла с параметром

$$\int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x \in [a;b),$$

в несобственном смысле на числовом промежутке $[a;b)$:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,p)\,dp \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp.$$

В каждом из этих случаев формула (1) выражает изменение порядка интегрирования. Интегралы, расположенные в левой и правой частях равенства (1), суть *повторные один раз определённые и один раз несобственные интегралы.*

При этом интеграл $\int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx$ есть определённый интеграл от несобственного интеграла, а интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp$ есть несобственный интеграл от определённого интеграла.

5. Интегрирование несобственных интегралов, зависящих от параметра, в несобственном смысле

Теорема об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в несобственном смысле. Повторный дважды несобственный интеграл. Изменение порядка интегрирования в повторном дважды несобственном интеграле.

Теорема 1 (*об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в несобственном смысле*). *Пусть выполняются условия*:

1) *функция*

$$f\colon (x,p) \to f(x,p),\ \forall x \in [a;b),\ \forall p \in [c;d),$$

непрерывна на множестве

$$\Pi = \{(x,p)\colon a \leqslant x < b \leqslant +\infty,\ c \leqslant p < d \leqslant +\infty\};$$

2) *сужение несобственного интеграла, зависящего от параметра,*

$$I_1(p) = \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d),$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c;\theta]$ *из полуоткрытого числового промежутка* $[c;d)$;

3) *сужение несобственного интеграла, зависящего от параметра,*

$$I_2(p) = \int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x \in [a;b),$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a;\eta]$ *из полуоткрытого числового промежутка* $[a;b)$;

4) *существует хотя бы один из повторных интегралов*

$$\int\limits_c^d dp \int\limits_a^b |f(x,p)|\,dx \quad \textit{или} \quad \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp.$$

Тогда заданные несобственными интегралами, зависящими от параметра, функции I_1 *и* I_2 *интегрируемы по Риману* (*в несобственном смысле*) *соответственно на числовых промежутках* $[c;d)$ *и* $[a;b)$ *и имеет место формула*

$$\int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,p)\,dp. \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим, что формулировка теоремы относительно переменных x и p обладает симметрией. Это позволяет без нарушения общности считать, что существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp. \qquad (2)$$

С этой позиции построим доказательство теоремы.

В силу выбора θ имеет место формула

$$\int\limits_c^\theta dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp,\ \forall \theta \in [c;d), \qquad (3)$$

ибо условия доказываемой теоремы предполагают выполнение условий теоремы 1.4 (об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в собственном смысле) применительно к функции

$$I_1 \colon p \to \int\limits_a^b f(x,p)\,dx,\ \forall p \in [c;d),$$

с интегрированием на отрезке $[c;\theta]$, $[c;\theta] \subset [c;d)$.

Действительно:

1) сужение функции f непрерывно на множестве

$$\widetilde{\Pi} = \{(x,p) \colon a \leqslant x < b \leqslant +\infty,\ c \leqslant p \leqslant \theta < d \leqslant +\infty\};$$

2) сужение интеграла I_1 равномерно сходится на $[c;\theta]$.

Выполним предельный переход при $\theta \to d-0$ в равенстве (3).

Сначала вычислим предел левой части равенства (3):

$$\lim_{\theta \to d-0} \int\limits_c^\theta dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx = \lim_{\theta \to d-0} \int\limits_c^\theta I_1(p)\,dp. \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что сужение функции I_1 непрерывно на отрезке $[c;\theta]$, где θ — любое число из $[c;d)$.

Это следует из того, что для сужения интеграла I_1 на отрезке $[c;\theta]$ выполняются условия теоремы 1.4 (об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в собственном смысле), которые только что проверили и которые идентичны условиям теоремы 1.2 (о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра).

Итак, сужение функции I_1 непрерывно на любом отрезке $[c;\theta]$, содержащемся в числовом промежутке $[c;d)$.

Поэтому, по определению несобственного интеграла,

$$\lim_{\theta \to d-0} \int\limits_c^\theta I_1(p)\,dp = \int\limits_c^d I_1(p)\,dp = \int\limits_c^d dp \int\limits_a^b f(x,p)\,dx. \tag{5}$$

Сопоставляя равенства (4) и (5), получаем формулу вычисления предела левой части равенства (3):

$$\lim_{\theta\to d-0}\int\limits_c^\theta dp\int\limits_a^b f(x,p)\,dx=\int\limits_c^d dp\int\limits_a^b f(x,p)\,dx. \qquad (6)$$

Теперь вычислим предел при $\theta\to d-0$ правой части равенства (3). Допустим (!) возможность предельного перехода

$$\lim_{\theta\to d-0}\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp=\int\limits_a^b\Biggl(\lim_{\theta\to d-0}\int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp\Biggr)dx. \qquad (7)$$

Из сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, I_2 следует, что

$$\lim_{\theta\to d-0}\int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp=\int\limits_c^d f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;b).$$

Отсюда с учётом допущения (7) получаем формулу вычисления предела при $\theta\to d-0$ правой части равенства (3):

$$\lim_{\theta\to d-0}\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,p)\,dp. \qquad (8)$$

Таким образом, из равенства (3), вычислив пределы (6) и (8), получим необходимое равенство (1).

Доказательство теоремы будет завершено, если обоснуем правомочность предельного перехода (7).

Введём в рассмотрение функцию

$$\Phi\colon (x,\theta)\to\int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;b),\ \forall\theta\in[c;d). \qquad (9)$$

При этом соотношение (7) будет иметь вид

$$\lim_{\theta\to d-0}\int_a^b \Phi(x,\theta)\,dx = \int_a^b \lim_{\theta\to d-0}\Phi(x,\theta)\,dx. \tag{10}$$

Операция (10) суть предельный переход при $\theta \to d-0$ в несобственном интеграле, зависящем от параметра,

$$I_3(\theta) = \int_a^b \Phi(x,\theta)\,dx,\ \forall\theta\in[c;d],$$

Проверим по отношению к интегралу I_3 выполнение условий теоремы 1.1 (о предельном переходе под знаком несобственного интеграла).

Условие 1. *При каждом фиксированном значении θ из числового промежутка $[c;d)$ функция*

$$\Phi\colon (x,\theta)\to\Phi(x,\theta),\ \forall x\in[a;b),\ \forall\theta\in[c;d),$$

является функцией одной переменной, непрерывной на числовом промежутке $[a;b)$.

Функция f непрерывна на множестве $\Pi=[a;b)\times[c;d)$. Поэтому при любом θ из числового промежутка $[c;d)$ интеграл, зависящий от параметра,

$$I_4(x) = \int_c^\theta f(x,p)\,dp,\ \forall x\in[a;b),$$

является определённым.

Подынтегральная функция

$$f\colon (x,p)\to f(x,p),\ \forall x\in[a;b),\ \forall p\in[c;\theta],$$

непрерывна на множестве $\widetilde{\Pi}=[a;b)\times[c;\theta]$, и, по теореме 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, содержащим параметр, с постоянными пределами интегрирования), будет непрерывной функция

$$I_4 \colon x \to \int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp, \ \forall x \in [a;b).$$

Если учесть задание (9), то отсюда следует, что при любом θ из числового промежутка $[c;d)$ функция Φ является функцией одной переменной, непрерывной на числовом промежутке $[a;b)$.

Условие 2. *Сужение функции Φ на всяком отрезке $[a;\eta]$, содержащемся в числовом промежутке $[a;b)$, равномерно сходится к функции $\varphi \colon x \to \varphi(x), \ \forall x \in [a;\eta]$, при $\theta \to d-0$.*

Имея в виду задание (9), предельная функция φ при $\theta \to d-0$ будет следующей

$$\varphi(x) = \lim_{\theta \to d-0} \Phi(x,\theta) = \lim_{\theta \to d-0} \int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp, \ \forall x \in [a;\eta].$$

Отсюда, по условию 3) доказываемой теоремы, получаем, что

$$\varphi(x) = \int\limits_c^d f(x,p)\,dp = I_2(x), \ \forall x \in [a;\eta],$$

причём имеет место равномерная сходимость на любом отрезке $[a;\eta]$ из числового промежутка $[a;b)$.

Значит,

$$\Phi(x,\theta) \underset{\theta \to d-0}{\rightrightarrows} I_2(x), \ \forall x \in [a;\eta], \ \forall \eta \in [a;b).$$

Условие 3. *Несобственный интеграл с параметром*

$$I_5(\theta) = \int\limits_a^b \Phi(x,\theta)\,dx \ \forall \theta \in [c;d),$$

равномерно сходится на числовом промежутке $[c;d)$.

В соответствии с заданием (9), по свойству модуля, для определённого интеграла I_4 составляем оценку

$$|\Phi(x,\theta)| = \left| \int\limits_c^\theta f(x,p)\,dp \right| \leqslant \int\limits_c^\theta |f(x,p)|\,dp,$$
$$\forall x \in [a;b),\ \forall \theta \in [c;d). \tag{11}$$

Известно, что существует интеграл (2). Поэтому несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$\int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp,\ \forall x \in [a;b),$$

является сходящимся на числовом промежутке $[a;b)$.

Используя свойство монотонности несобственного интеграла с неотрицательной подынтегральной функцией, составляем неравенство

$$\int\limits_c^\theta |f(x,p)|\,dp \leqslant \int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp,\ \forall \theta \in [c;d),\ \forall x \in [a;b).$$

Если теперь учесть неравенство (11), то получим оценку

$$|\Phi(x,\theta)| \leqslant \int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp,\ \forall x \in [a;b),\ \forall \theta \in [c;d).$$

Проинтегрируем это неравенство по переменной x в пределах от a до b и, по свойству несобственного интегрирования неравенств, получим, что

$$\int\limits_a^b |\Phi(x,\theta)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x,p)|\,dp,\ \forall \theta \in [c;d). \tag{12}$$

Интеграл в правой части неравенства (12) есть повторный интеграл (2), который, как известно, существует. Тогда из оценки (12), по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1.3.1), следует, что интеграл I_5 равномерно абсолютно сходится на числовом промежутке $[c; d)$.

Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены. Поэтому существует предел $\lim\limits_{\theta \to d-0} \int\limits_a^b \Phi(x, \theta)\, dx$ и выполняется равенство (10).

Стало быть, интеграл $\int\limits_a^b \lim\limits_{\theta \to d-0} \Phi(x, \theta)\, dx$ сходится, то есть, существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, p)\, dp$, расположенный в правой части равенства (1).

Иначе говоря, функция I_2 интегрируема по Риману в несобственном смысле на числовом промежутке $[a; b)$.

Равенство (10) обосновывает предельный переход (7).

Значит, имеет место формула (1).

Из существования повторного интеграла в правой части равенства (1) следует существование и повторного интеграла в левой части этого равенства.

Последнее означает, что функция I_1 интегрируема по Риману в несобственном смысле на числовом промежутке $[c; d)$. ■

Формула (1) выражает изменение порядка интегрирования при интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра, в несобственном смысле.

Каждый из интегралов, расположенный в левой и правой частях равенства (1), есть *повторный несобственный интеграл*, или, точнее, *повторный дважды несобственный интеграл.* Также повторными несобственными интегралами являются интегралы

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d |f(x, p)|\, dp \quad \text{и} \quad \int\limits_c^d dp \int\limits_a^b |f(x, p)|\, dx,$$

оговоренные в условии 4) теоремы 1.

6. Задачи

Задача 1. *Найдите значения параметра* γ, *при которых сходится интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{(1-x^2)^{\frac{1}{\gamma}}}\,dx. \qquad (1)$$

Решение. Подстановкой $\dfrac{1}{1-x} = t$ получаем, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\dfrac{1}{1-x}}{(1-x^2)^{\frac{1}{\gamma}}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{\gamma}}\left(2-\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}\,dt.$$

Тогда интеграл сходится при $\gamma < 0$ и при $\gamma > \dfrac{1}{2}$, что устанавливаем с помощью признака Абеля сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 4.2.1).

Действительно, как при $\gamma < 0$, так и при $\gamma > \dfrac{1}{2}$, по признаку Дирихле сходимости несобственного интеграла с параметром (следствие 5.2.1), интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{\gamma}}}\,dt$$

сходится, а функция

$$f\colon t \to \frac{1}{\left(2-\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \ \forall t \in [1;\,+\infty),$$

монотонна и ограничена.

Пользуясь приёмом, применённым в примере 17.2.1, доказываем, что если интеграл (1) сходится, то параметр $\gamma < 0$ или $\gamma > \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\gamma < 0,\ \gamma > \dfrac{1}{2}$.

Задача 2. *Найдите множество сходимости интеграла*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx, \quad p > 0.$$

Решение. Разобьём интеграл на сумму двух интегралов

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx. \tag{2}$$

Так как

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x} \sim \frac{1}{x^{p-1} + 1} \quad \text{при} \ \ x \to +0,$$

то первый интеграл в правой части равенства (2) сходится при любом p (точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции f).

Поскольку

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\Big(\frac{1}{x^{2p}}\Big)$$

при $x \to +\infty$ и интегралы

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2p}}\, dx, \quad p > 0,$$

в силу признака Дирихле сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, — следствие 5.2.1 — сходятся, а интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}\, dx\,, \quad p > 0,$$

сходится, если и только если $p > 0{,}5$, то второй интеграл из правой части равенства (2) сходится лишь при $p > 0{,}5$.

Следовательно, исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда параметр $p > 0{,}5$.

Ответ: $(0{,}5;\,+\infty)$.

Задача 3. *Найдите множество сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^{\lambda}\sin^2 x}\,dx, \quad \lambda > 0,$$

путём сравнения его с рядом.

Решение. Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^{\lambda}\sin^2 x}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\ \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{x}{1 + x^{\lambda}\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\ \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi k + t}{1 + (\pi k + t)^{\lambda}\sin^2 t}\,dt,$$

то будем исследовать сходимость последнего ряда.

Заметим, что

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi k}{1 + \pi^{\lambda}(k+1)^{\lambda}\sin^2 t}\,dt < \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi k + 1}{1 + (\pi k + t)^{\lambda}\sin^2 t}\,dt <$$

$$< \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi(k+1)}{1 + \pi^{\lambda}k^{\lambda}\sin^2 t}\,dt = I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{\pi^2 k}{\sqrt{1 + \pi^2(k+1)^{\lambda}}}\,, \quad I_2 = \frac{\pi^2(k+1)}{\sqrt{1 + \pi^{\lambda}k^{\lambda}}}\,.$$

Так как

$$I_1 = O\left(\frac{1}{k^{\frac{\lambda}{2}-1}}\right), \quad I_2 = O\left(\frac{1}{k^{\frac{\lambda}{2}-1}}\right) \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

то, по признаку сравнения, ряд, а значит, и интеграл сходятся, если и только если $\lambda > 4$.

Ответ: $(4;\, +\infty)$.

Задача 4. *Исследуйте на равномерную сходимость интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}\,, \ \forall x, \alpha \in \mathbb{R},$$

а интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \big[\operatorname{arctg} x\big]_a^b = \pi,$$

т.е. сходится, то, по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1.3.1), данный интеграл сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$.

Ответ: равномерно на $\mathbb{R}$.

Задача 5. *Исследуйте на равномерную сходимость интеграл*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\, dx, \quad 0 \leqslant p \leqslant 10.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leqslant \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

при $x \geqslant e$, то согласно признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1.3.1) интеграл сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0; 10]$.

Ответ: равномерно на отрезке $[0; 10]$.

Задача 6. *Исследуйте на равномерную сходимость по параметру* p *интеграл*

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx, \tag{3}$$

если: *а*) $p \geqslant p_0 > 0$; *б*) $p > 0,\ q > -1$.

Решение. Заменой

$$x = e^{-t} \ \ (t > 0)$$

получаем, что

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} t^q\, e^{-pt}\, dt.$$

а). Поскольку при $p \geqslant p_0 > 0$

$$t^q\, e^{-pt} \leqslant t^q\, e^{-p_0 t},\ \forall t \in (0;\, +\infty),$$

интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} t^q\, e^{-p_0 t}\, dt,\ \ t > 0,$$

по признаку сравнения Коши (теорема 1.2.1), сходится, то согласно признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1.3.1) интеграл (3) сходится абсолютно и равномерно по параметру p.

б). В интеграле

$$I(B, p) = \int\limits_B^{+\infty} t^q\, e^{-pt}\, dt,\ \ B > 0,$$

положим $z = pt$. Тогда получим

$$I(B,p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\, dz.$$

Пусть числа $B > 0$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Тогда в силу того, что

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\, dz = +\infty,$$

всегда можно выбрать число $p > 0$ так, что

$$I(B,p) > \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл (3) сходится неравномерно.

Ответ: а) равномерно; б) неравномерно.

Задача 7. *Исследуйте на равномерную сходимость интеграл*

$$\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n}, \quad 0 < n < 2. \tag{4}$$

Решение. Положим

$$x = \frac{1}{t}, \ \ t > 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{t^{2-n}}\, dt.$$

Далее интегрированием по частям находим

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin x}{t^{2-n}}\, dt = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (n-2)\int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos x}{t^{3-n}}\, dt. \tag{5}$$

По признаку Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 2.3.1), интеграл в правой части равенства (5) равномерно сходится на интервале $(0;2)$.

Действительно, функция

$$\varphi\colon t \to \frac{1}{t^{3-n}} \leqslant \frac{1}{t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty,\ 0 < n < 2,$$

и монотонна.

Первообразная

$$\int\limits_a^x \cos t\, dt = \sin x - \sin a$$

ограничена числом 2.

Следовательно, при достаточно большом B справедлива оценка

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}}\, dt \right| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad 0 < n < 2,$$

где ε_1 — наперёд заданное положительное число.

Слагаемое $\dfrac{\cos B}{B^{2-n}}$ в правой части равенства (5) не может быть сделано как угодно малым при всех достаточно больших $b \geqslant B$ равномерно относительно параметра n.

В самом деле, пусть $B > 0$ задано. Пусть, кроме этого, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Тогда, выбирая число $b = 2\pi k > B,\ k \in \mathbb{N},$ значение параметра n из неравенства

$$0 < 2 - n < \frac{\ln \dfrac{1}{\varepsilon_2}}{\ln 2\pi k}\,,$$

получаем

$$\left| \frac{\cos b}{b^{2-n}} \right| = \frac{1}{(2\pi k)^{2-n}} > \varepsilon_2.$$

Следовательно, интеграл (4) сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость интеграла (4) следует из признака Дирихле сходимости несобственного интеграла с параметром (следствие 5.2.1).

Ответ: неравномерно сходится.

Задача 8. *Пусть* f *— непреравная и ограниченная на* $[0; +\infty)$ *функция. Докажите, что*

$$\lim_{y\to\pm 0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{y}{x^2+y^2}\, f(x)\, dx = \pm f(0).$$

Доказательство. Положим $x = ty$, $t > 0$, $y > 0$. Тогда

$$\lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{y}{x^2+y^2}\, f(x)\, dx = \lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}\, dt.$$

Так как

$$\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \leqslant \frac{M}{t^2+1}\,, \quad \text{где} \quad f(ty) \leqslant M = \mathrm{const},$$

интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{A\to+\infty} \bigl[\operatorname{arctg} t\bigr]_0^A = \frac{\pi}{2}$$

и сходится, а в силу непрерывности функции f дробь

$$\frac{f(ty)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1} \quad \text{при} \quad y \to +0 \ \text{на} \ (a; b),$$

где a и b — любые вещественные числа, $a < b$, то, по теореме о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, имеем:

$$\lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}\, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to+0} \frac{f(ty)}{t^2+1}\, dt = f(0). \tag{6}$$

В силу нечётности интеграла по переменной y и равенства (6) получаем, что

$$\lim_{y\to-0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{y}{x^2+y^2}\, f(x)\, dx = -f(0). \blacksquare$$

Задача 9. *Докажите, что функция*

$$F\colon a \to \int\limits_0^1 \frac{\sin \dfrac{a}{x}}{x^a}\, dx,\ \forall a \in (-\infty; 2),$$

является непрерывной.

Доказательство. Выполняя замену $x = \dfrac{1}{t}$, $t > 0$, получаем

$$F(a) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin at}{t^{2-a}}\, dt,\ \forall a \in (-\infty; 2).$$

Пусть $a \leqslant \dfrac{1}{2}$. Тогда в силу оценки

$$\frac{|\sin at|}{t^{2-a}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}},\ \forall t \in [1; +\infty),$$

и признака Вейерштрасса (теорема 1.3.1) интеграл $F(a)$ сходится равномерно на числовом луче $\Bigl(-\infty; \dfrac{1}{2}\Bigr]$.

Поскольку подынтегральная функция

$$f\colon (t, a) \to \frac{\sin at}{t^{2-a}},\ \forall t \in [1; +\infty),\ \forall a \in (-\infty; 2),$$

непрерывна на множестве $[1; +\infty) \times \Bigl(-\infty; \dfrac{1}{2}\Bigr]$, то на основании теоремы 1.2 (о непрерывности функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра) сужение функции F на числовой луч $\Bigl(-\infty; \dfrac{1}{2}\Bigr]$ непрерывно.

Пусть $\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \dfrac{3}{2}$. Тогда

$$\Biggl|\int\limits_1^{\xi} \sin at\, dt\Biggr| \leqslant \frac{2}{a} \leqslant 4,\ \forall \xi \in [1; +\infty),\ \forall a \in \Bigl[\frac{1}{2}; 2 - \varepsilon\Bigr].$$

Функция

$$\varphi\colon t \to \frac{1}{t^{2-a}}\,,\ \forall t \in [1;\, +\infty),$$

при каждом фиксированном $a \in \left[\dfrac{1}{2}\,; 2-\varepsilon\right]$ монотонно стремится к нулю при $t \to\ +\infty$. При этом в силу оценки

$$\frac{1}{t^{2-a}} \leqslant \frac{1}{t^{\varepsilon}}\,,\ \ \forall t \in [1;\, +\infty),\ \frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2-\varepsilon,$$

это стремление равномерно по a на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}\,; 2-\varepsilon\right],\ 0<\varepsilon<\dfrac{3}{2}\,.$

Поэтому в соответствии с признаком Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 2.3.1) интеграл $F(a)$ равномерно сходится на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}\,; 2-\varepsilon\right],\ 0<\varepsilon<\dfrac{3}{2}\,.$

Учитывая непрерывность подынтегральной функции f на множестве $[1;\,+\infty)\times\left[\dfrac{1}{2}\,; 2-\varepsilon\right],$ по теореме 1.2, устанавливаем, что функция F непрерывна на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}; 2-\varepsilon\right],\ 0<\varepsilon<\dfrac{3}{2}\,.$

Таким образом, функция F непрерывна на полуоткрытом числовом луче $(\,-\infty; 2-\varepsilon],\ 0<\varepsilon<\dfrac{3}{2}\,.$

Поскольку число $\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\dfrac{3}{2}\,,$ выбрано произвольно, то функция F будет непрерывной. ■

Задача 10. *Найдите точки разрыва функции*

$$F\colon p \to \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\bigl((1-p^2)x\bigr)}{x}\,dx,\ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Решение. Полагая $t=\bigl(1-p^2\bigr)x,\ |p| \ne 1,$ получаем

$$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \cdot \operatorname{sgn}(1-p^2) = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(1-p^2).$$

Это равенство имеет место и при $|p| = 1$.

Следовательно, точки $p = -1$ и $p = 1$ являются точками разрыва первого рода функции F.

Ответ: $p = -1$ и $p = 1$ − точки разрыва первого рода.

Задача 11. *Исследуйте на непрерывность функцию*

$$F\colon p \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{2 + x^p}\, dx,\ \forall p \in (2;\, +\infty).$$

Решение. Пусть $p \geqslant 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. При $x \geqslant 1$ имеем, что

$$\frac{x}{2 + x^p} \leqslant \frac{x}{2 + x^{2+\varepsilon}}\,.$$

Поскольку

$$\frac{x}{2 + x^{2+\varepsilon}} = O\Big(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\Big) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

то, по признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1), интеграл

$$\Phi(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{2 + x^p}\, dx,\ \forall p \in (2;\, +\infty),$$

сходится равномерно на $[2 + \varepsilon;\, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

С учётом непрерывности подынтегральной функции, по теореме 1.2 (о непрерывности функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра) сужение функции $\Phi\colon p \to \Phi(p)$, $\forall p \in (2; +\infty)$, непрерывно на $[2 + \varepsilon;\, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ функция Φ непрерывна.

По теореме 1.2, функция

$$\Psi\colon p \to \int\limits_0^{1} \frac{x}{2 + x^p}\, dx,\ \forall p \in (2;\, +\infty),$$

является непрерывной.

Следовательно, функция $F = \Phi + \Psi$ будет непрерывной.

Ответ: непрерывна.

Задача 12. *Исследуйте на непрерывность функцию*

$$F\colon p \to \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^p\,(\pi - x)^p}\,dx,\ \forall p \in (0;2).$$

Решение. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant p \leqslant 2 - \varepsilon < 2$. Тогда, разбивая данный интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию

$$f\colon (x,p) \to \frac{\sin x}{x^p\,(\pi - x)^p}\,dx,\ \forall x \in (0;\pi),\ \forall p \in (0;2),$$

получаем:

$$F(p) = \int\limits_0^{\pi} f(x,p)\,dx = \int\limits_0^{1} f(x,p)\,dx + \int\limits_1^{\pi-1} f(x,p)\,dx + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} f(x,p)\,dx <$$

$$< \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{p-1}\,(\pi - x)^p} + \int\limits_1^{\pi-1} \frac{dx}{x^p\,(\pi - x)^p} + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{x^p\,(\pi - x)^{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} + \pi - 2 + \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{(\pi - x)^{1-\varepsilon}}\,.$$

Поскольку последние интегралы в силу признака сравнения (теорема 1.2.1) сходятся, то, по признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1), интеграл $F(p)$ равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon; 2-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2$.

Учитывая непрерывность подынтегральной функции f на полуоткрытом прямоугольнике $(0;\pi) \times [\varepsilon; 2-\varepsilon]$, в соответствии с теоремой 1.2 (о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра) заключаем, что функция F непрерывна на каждом отрезке $[\varepsilon; 2-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 2$.

Следовательно, функция F непрерывна.

Ответ: непрерывна.

Задача 13. *Исследуйте на непрерывность функцию*

$$F\colon p \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x\,|\sin x|^p}\,,\ \forall p \in (0;1).$$

Решение. Представим функцию F в виде

$$F\colon p \to \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{e^x\,|\sin x|^p}\,,\ \forall p \in (0;1),$$

и выполним замену $x = \pi k + t,$ в результате которой получим

$$F\colon p \to \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{e^t \sin^p t}\,,\ \forall p \in (0;1).$$

Поскольку при $\varepsilon \leqslant p \leqslant 1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<0{,}5$

$$\frac{1}{e^t \sin^p t} \leqslant \left(\frac{\pi}{2t}\right)^p \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\,,\ \ \forall t \in (0;1],$$

то согласно признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1) интеграл

$$I_1(p) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{e^t \sin^p t}\,,\ \forall p \in (0;1),$$

равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon; 1-\varepsilon]$.

Аналогичным образом доказываем равномерную сходимость на отрезке $[\varepsilon; 1-\varepsilon]$ интеграла

$$I_2(p) = \int\limits_1^{\pi} \frac{dt}{e^t \sin^p t}\,,\ \forall p \in (0;1).$$

Следовательно, интеграл $I_1 + I_2$ равномерно сходится на $[\varepsilon; 1-\varepsilon]$.

Так как, кроме того, подынтегральная функция

$$f\colon (t,p) \to \frac{1}{e^t \sin^p t}\,,\ \ \forall t \in (0;\pi),\ \forall p \in (0;1),$$

непрерывна на полуоткрытом прямоугольнике $(0;\pi)\times[\varepsilon;1-\varepsilon],$ то, по теореме 1.2, функция F непрерывна на отрезке $[\varepsilon;1-\varepsilon],\ 0<\varepsilon<0{,}5.$

В силу произвольности выбора числа ε из интервала $(0;0{,}5)$ функция F является непрерывной.

Ответ: непрерывна.

Задача 14. *Используя формулу*

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\,,\ \forall n \in (0;\, +\infty), \tag{7}$$

вычислите интеграл

$$I(n,m) = \int\limits_0^1 x^{n-1} \ln^m x\,dx,\ m \in \mathbb{N}.$$

Решение. Формально дифференцируя m раз по параметру n обе части равенства (7), получаем

$$I(n,m) = \int\limits_0^1 x^{n-1} \ln^m x\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{(m)} = (-1)^m \cdot \frac{m!}{n^{m+1}}\,.$$

Покажем, что m-кратное дифференцирование под знаком интеграла из равенства (7) возможно. Для этого, полагая

$$x = \frac{1}{t},\ \forall t \in (0;\, +\infty),$$

преобразуем данные в условии интегралы к следующим:

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}\,, \qquad I(n,m) = (-1)^m \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\,dt.$$

Функции

$$f\colon (t,n) \to \frac{1}{t^{n+1}}\,,\ \forall (t,n) \in (0;\, +\infty) \times (0;\, +\infty),$$

$$f_n^{(m)}\colon (t,n) \to \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\,,\ \forall (t,n) \in (0;\, +\infty) \times (0;\, +\infty),$$

непрерывны на множестве

$$G = \{(t,n)\colon t \geqslant 1,\ n \geqslant \varepsilon > 0\}.$$

Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} = \int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx, \ \ n > 0,$$

сходится. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\,dt, \ \ m \in \mathbb{N},$$

равномерно сходится на $[\varepsilon;\, +\infty)$, $\varepsilon > 0$.

Действительно, так как при $t \geqslant 1$

$$\frac{|\ln^m t|}{t^{n+1}} \leqslant \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leqslant \Big(\frac{2m}{e^{\varepsilon}}\Big)^m \cdot \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}\,,$$

то в силу признака Вейерштрасса (теорема 1.3.1) интеграл I равномерно сходится на числовом луче $\{t\colon t \geqslant 1\}$.

Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, по теореме о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, дифференцирование по параметру $n, n \geqslant \varepsilon$, справедливо, т.е. справедливо при $n > 0$.

Ответ: $(-1)^m \cdot \dfrac{m!}{n^{m+1}}$.

Задача 15. *Используя формулу*

$$I_0 \equiv \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\,, \ \forall \alpha \in (0;\, +\infty),$$

вычислите интеграл

$$I_{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha)^{n+1}}\,, \ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Формально дифференцируя n раз по параметру α левую и правую части данной в условии формулы, имеем:

$$(-1)^n \cdot n! \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{\pi}{\alpha}\Big(\alpha^{-\frac{1}{2}}\Big)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!\,(2n-1)!!}{(2n)!!\,\alpha^n\,2\sqrt{\alpha}}\,.$$

Отсюда

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,\alpha^n\,2\sqrt{\alpha}}\,, \ \ \alpha > 0.$$

Докажем возможность n-кратного дифференцирования по параметру α интеграла I_0.

Функция

$$f\colon (x,\alpha) \to \frac{1}{x^2+\alpha}\,,\ \forall (x,\alpha) \in [0;\,+\infty) \times (0;\,+\infty),$$

и её производные

$$f^{(n)}_{\alpha}\colon (x,\alpha) \to \frac{1}{(x^2+\alpha)^{n+1}}\,,\ \forall (x,\alpha) \in [0;\,+\infty) \times (0;\,+\infty),$$

непрерывны на множестве $G = \{(x,\alpha)\colon x \geqslant 0,\ \alpha \geqslant \varepsilon > 0\}$.

При $\alpha > 0$ интеграл I_0 сходится. Интеграл I_{n+1} равномерно сходится, по признаку Вейерштрасса, на $[\varepsilon;\,+\infty)$, $\varepsilon > 0$, так как

$$\frac{1}{(x^2+\alpha)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0.$$

Поэтому согласно теореме о дифференцировании функций, заданных несобственными интегралами, зависящими от параметра, n-кратное дифференцирование по параметру α возможно на $[\varepsilon;\,+\infty)$, $\varepsilon > 0$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ такое дифференцирование возможно и на $(0,\,+\infty)$.

Ответ: $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,\alpha^n\,2\sqrt{\alpha}}\,.$

Задача 16. *Докажите, что интеграл Дирихле*

$$D(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx$$

имеет при $p \neq 0$ *производную, однако её нельзя найти с помощью правила Лейбница.*

Доказательство. Учитывая, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2},$$

с помощью замены $x = \dfrac{t}{p}$ получаем

$$D(p) = \operatorname{sgn} p \cdot \frac{\pi}{2}, \ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Тогда производная функция

$$D'(p) = 0, \ \forall p \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Если же формально продифференцировать по p под знаком интеграла, то получим расходящийся интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos px\, dx. \blacksquare$$

Задача 17. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx, \ \ a > 0, \ b > 0.$$

Решение. Пусть $a \geqslant \varepsilon > 0$ и $b \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функция

$$f\colon (x,a) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \ \forall a \in [\varepsilon; +\infty), \\ 0 \ \text{при} \ x = 0, \ \forall a \in [\varepsilon; +\infty), \end{array}\right.$$

и её производная

$$f'_a\colon (x,a) \to -xe^{-ax^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall a \in [\varepsilon; +\infty),$$

непрерывны.

Интеграл $I(a)$ сходится при любом $a \geqslant \varepsilon$, так как при $a \geqslant \varepsilon$, по признаку сравнения (теорема 1.2.1), сходится интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x, a)\, dx.$$

Интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-ax^2}\, dx$$

согласно признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1) равномерно сходится на $[\varepsilon;\, +\infty)$ (мажорантная функция $\varphi\colon x \to xe^{-\varepsilon x^2}$, $\forall x \in (0;\, +\infty)$).

Поэтому, по теореме 1.3, дифференцирование по параметру a под знаком интеграла для $I(a)$ при $a \geqslant \varepsilon > 0$ возможно.

Имеем:

$$I'(a) = -\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\,, \ \forall a \in [\varepsilon;\, +\infty).$$

Отсюда находим

$$I(a) = -\frac{1}{2}\,\ln a + \Phi(b),\ \forall a \in [\varepsilon;\, +\infty).$$

Так как $I(b) = 0$, то

$$\Phi(b) = \frac{1}{2}\,\ln b,\ \forall b \in [\varepsilon;\, +\infty).$$

Итак,

$$I(a) = -\frac{1}{2}\,\ln a + \frac{1}{2}\,\ln b = \frac{1}{2}\,\ln\frac{b}{a} \quad (a \geqslant \varepsilon > 0,\ b \geqslant \varepsilon > 0).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ интеграл

$$I(a) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{b}{a}\,,\ \forall a, b \in (0;\, +\infty).$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\,\ln\dfrac{b}{a}\,.$

Задача 18. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)^2 dx, \;\; a > 0, \; b > 0.$$

Решение. Как и в задаче 17, доказываем, что дифференцирование под знаком интеграла по параметру a возможно.

Тогда

$$I'(a) = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} \, dx, \; \forall a \in (0; +\infty).$$

Применяя формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}\,, \;\; a > 0, \; b > 0,$$

где f — непрерывная функция такая, что интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

сходится при любом $A > 0$, находим

$$I'(a) = 2 \ln \frac{2a}{a+b}\,, \;\; a > 0, \; b > 0.$$

Отсюда интегрированием по a получаем

$$I(a) = \, - 2(a+b)(\ln(a+b) - 1) + 2a(\ln 2a - 1) + \Phi(b)$$

при $a > 0, \, b > 0.$

Из условия $I(b) = 0$ следует, что

$$\Phi(b) = 2b(\ln 2b - 1), \; b > 0.$$

Следовательно, интеграл

$$I(a) = \ln \frac{(2a)^{2a}\,(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}\,,\ \ a>0,\ b>0.$$

Ответ: $\ln \dfrac{(2a)^{2a}\,(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}\,.$

Задача 19. *Вычислите интеграл*

$$I(m) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, \sin mx\, dx,\ \ \forall m \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0.$$

Решение. Дифференцируя по параметру m, получаем

$$I'(m) = \int\limits_0^{+\infty} \bigl(e^{-ax} - e^{-bx}\bigr) \cos mx\, dx,\ \ \forall m \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0. \tag{8}$$

Дифференцирование под знаком интеграла возможно (теорема 1.3), поскольку функции

$$f\colon (x,m) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, \sin mx,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \forall m \in \mathbb{R}, \\[2ex] 0 \ \text{ при } \ x = 0,\ \forall m \in \mathbb{R}, \end{array}\right.$$

и

$$f'_m\colon (x,m) \to \bigl(e^{-ax} - e^{-bx}\bigr) \cos mx,\ \ \forall x, m \in \mathbb{R},$$

непрерывны, интеграл (8) в силу признака Вейерштрасса (теорема 1.3.1) равномерно сходится на $\mathbb{R}$, а интеграл I сходится.

Выполняя интегрирование в равенстве (8), находим

$$I'(m) = \frac{a}{a^2+m^2} - \frac{b}{b^2+m^2}\,,\ \ \forall m \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0.$$

Отсюда

$$I(m) = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} - \operatorname{arctg} \frac{m}{b} + C,\ \ \forall m \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0.$$

Так как $I(0)=0$, то $C=0$.
Следовательно,

$$I(m)=\operatorname{arctg}\frac{m(b-a)}{ab+m^2}\,,\ \ \forall m\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{m(b-a)}{ab+m^2}\,.$

Задача 20. *Вычислите интеграл*

$$I(a)=\int\limits_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ |a|\leqslant 1.$$

Решение. Пусть $|a|\leqslant 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. Тогда при фиксированном ε функция

$$f\colon (x,a)\to\left[\begin{array}{l}\dfrac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall x\in(-1;0)\cup(0;1),\ \forall a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon],\\[2mm] -a^2\ \text{ при }\ x=0,\ \forall a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon],\end{array}\right.$$

и её производная

$$f'_a\colon (x,a)\to\frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,,\ \forall x\in(-1;1),\ \forall a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon],$$

непрерывны.

Интеграл $I(a)$, по признаку сравнения (теорема 1.2.1), сходится при любом $a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$. Интеграл

$$I'(a)=-2\int\limits_0^1\frac{a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \forall a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon],$$

равномерно сходится на $[-1+\varepsilon;1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1$, по признаку Вейерштрасса, так как при $x\in(-1;1)$, $a\in[-1+\varepsilon;1-\varepsilon]$ модуль

$$\left|f'_a(x,a)\right|\leqslant\frac{2}{(1-(1-\varepsilon)^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Следовательно, дифференцирование по параметру a под знаком интеграла в $I(a)$ возможно (теорема 1.3) при $|a| \leqslant 1 - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1.$

Полагая $x = \sin t,$ получаем

$$I'(a) = -2a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a^2 \sin^2 t} = -\frac{\pi a}{\sqrt{1 - a^2}}\,, \ \forall a \in [-1 + \varepsilon; 1 - \varepsilon].$$

Отсюда находим

$$I(a) = \pi \sqrt{1 - a^2} + C,\ \forall a \in [-1 + \varepsilon; 1 - \varepsilon].$$

Так как $I(0) = 0,$ то $C = -\pi.$

Стало быть,

$$I(a) = \pi\big(\sqrt{1 - a^2} - 1\big),\ \forall a \in (-1; 1),$$

так как $\varepsilon \in (0; 1)$ выбрано произвольно.

Функция f непрерывна на множестве $G = \{(x, a) \colon |x| < 1,\ |a| \leqslant 1\}.$

В силу признака Вейерштрасса (теорема 1.3.1) интеграл I сходится равномерно на отрезке $[-1; 1],$ так как

$$|f(x, a)| \leqslant \frac{|\ln(1 - x^2)|}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}\,, \ \forall x \in (-1; 1),\ \forall a \in [-1; 1].$$

Таким образом, функция $I \colon a \to I(a),\ \forall a \in [-1; 1],$ непрерывна.

Поэтому

$$I(\pm 1) = \lim\limits_{|a| \to 1 - 0} I(a),$$

то есть,

$$I(a) = \pi\big(\sqrt{1 - a^2} - 1\big),\ \forall a \in [-1; 1].$$

Ответ: $\pi\big(\sqrt{1 - a^2} - 1\big).$

Задача 21. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad |a| \leqslant 1.$$

Решение. Аналогично, как в задаче 20, получаем

$$I'(a) = -2a \int\limits_0^1 \frac{x^2}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{a}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right),\ \forall a \in (-1;0)\cup(0;1), \\ 0 \ \text{при} \ a = 0. \end{array}\right.$$

Отсюда находим

$$I(a) = -\pi \ln\bigl(1+\sqrt{1-a^2}\,\bigr) + C,\ \forall a \in (-1;1).$$

Поскольку $I(0)=0$, то $C = \pi \ln 2$.
Следовательно, при любом $a \in (-1;1)$

$$I(a) = -\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\,.$$

В силу непрерывности функции $I\colon a \to I(a)$ при $|a| \leqslant 1$ это выражение имеет место также при $|a| \leqslant 1$.

Ответ: $-\pi \ln \dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\,.$

Задача 22. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция

$$f\colon (x,a) \to \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall a \in \mathbb{R},$$

и её частная производная

$$f'_a\colon (x,a) \to \frac{1}{x(1+a^2x^2)\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in (1;+\infty),\ \forall a \in \mathbb{R},$$

непрерывны. Интегралы I и

$$\int\limits_1^{+\infty} f'_a(x,a)\,dx,$$

по признаку Вейерштрасса, равномерно сходятся на $\mathbb{R}$, так как

$$\frac{|\operatorname{arctg} ax|}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x\in(1;\,+\infty),\ \forall a\in\mathbb{R},$$

и

$$\frac{1}{x(1+a^2x^2)\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x\in(1;\,+\infty),\ \forall a\in\mathbb{R},$$

а соответствующие интегралы от мажорирующих функций сходятся.

Следовательно, дифференцирование по параметру под знаком интеграла возможно. Имеем

$$I'(a) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+a^2x^2)\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Полагая $x=\operatorname{ch} t$, получаем

$$I'(a) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}\right),\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Отсюда находим

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\left(a-\sqrt{1+a^2}\,\right)+C,\ \forall a\in[0;\,+\infty).$$

Поскольку $I(0)=0$, то $C=\dfrac{\pi}{2}$.
Таким образом,

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\left(1+a-\sqrt{1+a^2}\,\right),\ \forall a\in[0;\,+\infty).$$

Аналогично получаем

$$I(a) = -\frac{\pi}{2}\left(1-a-\sqrt{1+a^2}\,\right),\ \forall a\in(-\infty;0].$$

Окончательно имеем

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 + |a| - \sqrt{1 + a^2}\right)\operatorname{sgn} a, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\left(1 + |a| - \sqrt{1 + a^2}\right)\operatorname{sgn} a.$

Задача 23. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2}\, dx, \ \forall a \in \mathbb{R}, \ (b \in \mathbb{R}).$$

Решение. Пусть $b \neq 0$. Тогда функция

$$f\colon (x, a) \to \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2}\,, \ \forall x \in (0;\, +\infty), \ \forall a \in \mathbb{R},$$

и её частная производная

$$f'_a\colon (x, a) \to \frac{2a}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}\,, \ \forall x \in (0;\, +\infty), \ \forall a \in \mathbb{R},$$

непрерывны.

Интеграл I, по признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1), равномерно сходится на $\mathbb{R}$, так как

$$\frac{\left|\ln(a^2 + x^2)\right|}{b^2 + x^2} \leqslant \frac{\varphi(x)}{b^2 + x^2}\,, \ \forall x \in (0;\, +\infty), \ \forall a \in [\,-A; A],$$

где A — произвольное положительное число, а

$$\varphi(x) = \max\left\{\left|\ln(A^2 + x^2)\right|, \left|\ln x^2\right|\right\}.$$

Интеграл

$$I'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2a}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}\, dx, \ \forall a \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

также равномерно сходится, но только на отрезках $[\,-A;\,-\varepsilon]$ и $[\varepsilon; A]$, где ε — любое положительное число.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2a}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} \leqslant \frac{2A}{(\varepsilon^2+x^2)(b^2+x^2)} \equiv \psi(x),$$

$$\forall x \in (0;\,+\infty),\ \forall a \in [\,-A;\,-\varepsilon] \cup [\varepsilon; A],$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\,dx$ сходится.

Стало быть, функция $I\colon a \to I(a),\ \forall a \in \mathbb{R},$ непрерывна, а функция I', заданная интегралом (9), непрерывна на $(\,-\infty; 0) \cup (0;\,+\infty)$.

Выполняя интегрирование в (9), получаем

$$I'(a) = \frac{\pi a}{|ab|\,(|a|+|b|)}\,,\ \ ab \neq 0,$$

откуда

$$I(a) = \frac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|) + C,\ \forall a \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

Поскольку

$$I(0) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{b^2+x^2}\,dx = \frac{2}{|b|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln|b|}{1+t^2}\,dt + \frac{2}{|b|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2\ln|b|}{|b|}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi\,\frac{\ln|b|}{|b|}\,,$$

то $C = 0$.

Окончательно имеем

$$I(a) = \frac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|),\ \forall a \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

Заметим, что если $b = 0$, то интеграл $I(a)$ сходится только при $|a| = 1$. В этом случае интегрированием по частям устанавливаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx = \pi.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{|b|}\ln(|a|+|b|),\ \forall a\in\mathbb{R},\ b\neq 0;$ π при $b=0,\ a=\pm 1;$ расходится при $b=0,\ a\neq \pm 1.$

Задача 24. *Вычислите интеграл*

$$I(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax\cdot\operatorname{arctg} bx}{x^2}\,dx,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Решение. Интеграл

$$I(a,b)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,a,b)\,dx,\ \forall a,b\in\mathbb{R},$$

где при любых вещественных a и b

$$f(x,a,b)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{arctg} ax\cdot\operatorname{arctg} bx}{x^2}\quad \text{при } x\neq 0,\\ ab \ \text{ при } x=0.\end{array}\right.$$

Функция f непрерывна на множестве $G=\{(x,a,b)\colon x\geqslant 0\}$.

Интеграл I, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно по a и b на $\mathbb{R}$. При этом мажорантная функция φ строится следующим образом: при $0\leqslant x\leqslant 1$ имеем $|f(x,a,b)|\leqslant |ab|$, а при $x\geqslant 1$ —

$$|f(x,a,b)|\leqslant \frac{\pi^2}{4x^2}\,,$$

то есть,

$$\varphi\colon x\to |ab|,\ \forall x\in[0;1],\quad \text{и}\quad \varphi\colon x\to\frac{\pi^2}{4x^2}\,,\ \forall x\in[1;+\infty).$$

Стало быть, функция $I\colon (a,b)\to I(a,b),\ \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,$ непрерывна.

Пусть $0<\varepsilon\leqslant a\leqslant A,\ 0<\delta\leqslant b\leqslant B.$ Тогда

$$I'_a(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)}\,dx,\quad I''_{ab}(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\,.$$

Отсюда находим

$$I''_{ab}(a,b) = \frac{\pi}{2(a+b)}\,.$$

Интегрируя это равенство по b и a последовательно, получаем

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2}\,(a+b)\bigl(\ln(a+b)-1\bigr) + \varphi(a) + \psi(b), \tag{10}$$

где функции φ и ψ подлежат определению.

В силу произвольности выбора чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $A > 0$, $B > 0$ равенство (10) имеет место при любых $a > 0$ и $b > 0$.

Заметим, что (10) есть сужение функции I на множество положительных значений параметров a и b. Для нахождения её для всех $a, b \in \mathbb{R}$ нужно подобрать функции φ и ψ таким образом, чтобы функция I оказалась непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

Из соотношения непрерывности

$$\lim_{a\to+0} I(a,b) = \lim_{b\to+0} I(a,b) = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+0}} I(a,b) =$$

$$= I(0,b) = I(a,0) = I(0,0)$$

следует, что

$$\varphi(a) + \psi(b) = \frac{\pi}{2}\,\bigl(b(1-\ln b) + a(1-\ln a)\bigr). \tag{11}$$

Таким образом, учитывая тождество

$$I(a,b) = I(|a|,|b|)\operatorname{sgn}(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R},$$

и равенство (11), из (10) получаем

$$I(a,b) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(ab)\ln\dfrac{(|a|+|b|)^{|a|+|b|}}{|a|^{|a|}\,|b|^{|b|}} \ \text{ при } ab\neq 0,\\[2ex] 0 \ \text{ при } ab = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(ab)\ln\dfrac{(|a|+|b|)^{|a|+|b|}}{|a|^{|a|}\,|b|^{|b|}}$ при $ab\neq 0$; 0 при $ab = 0$.

Задача 25. *С помощью интеграла Эйлера — Пуассона*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (12)$$

вычислите интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ax^2 + 2bx + c)e^{-(px^2+2qx+r)}\,dx \ \ (a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R},\ p > 0).$$

Решение. Выделяя полный квадрат

$$px^2 + 2qx + r = \Big(\sqrt{p}\,x + \frac{q}{\sqrt{p}}\Big) + r - \frac{q^2}{p}\,,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

и полагая

$$\sqrt{p}\,x + \frac{q}{\sqrt{p}} = t,$$

получаем

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (At^2 + 2Bt + C)e^{-t^2}\,dt =$$

$$= A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt + 2B\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,dt + C\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt,$$

где коэффициенты

$$A = \frac{a}{p\,\sqrt{p}}\,\exp\frac{q^2 - pr}{p}\,,\quad B = \frac{bp - aq}{p^2}\,\exp\frac{q^2 - pr}{p}\,,$$

$$C = \frac{cp^2 - 2bpq + aq^2}{p^2\,\sqrt{p}}\,\exp\frac{q^2 - pr}{p}\,.$$

Методом интегрирования по частям с учётом чётности подынтегральной функции, используя интеграл Эйлера — Пуассона, находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = -\int\limits_{0}^{+\infty} t\,de^{-t^2} =$$

$$= -\Big[t\,e^{-t^2}\Big]_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Аналогично интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,,$$

а в силу нечётности подынтегральной функции сходящийся интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,dt = 0.$$

Следовательно,

$$I = A\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2B\cdot 0 + C\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^2\sqrt{p}}\,\big(a(p+2q^2) - 4bpq + 2cp^2\big).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p^2\sqrt{p}}\,\big(a(p+2q^2) - 4bpq + 2cp^2\big).$

Задача 26. *С помощью интеграла Эйлера — Пуассона* (12) *вычислите интеграл*

$$I(a,b) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{ch}\,bx\,dx \quad (a>0,\ b\in\mathbb{R}).$$

Решение. Согласно определению функции интегральный косинус получаем, что

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,dx.$$

С учётом задачи 25 находим интегралы-слагаемые:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+2\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)x\right)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{\frac{b^2}{4a}};$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+2\cdot\frac{b}{2}x\right)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Таким образом, интеграл

$$I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (a>0,\ b\in\mathbb{R}).$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\;e^{\frac{b^2}{4a}}$.

Задача 27. *С помощью интеграла Эйлера — Пуассона* (12) *вычислите интеграл*

$$I(|a|) = \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\biggl(-\Bigl(x^2+\frac{a^2}{x^2}\Bigr)\biggr)\,dx \quad (a\in\mathbb{R}).$$

Решение. Интеграл

$$I(|a|) = \int\limits_{0}^{1} \exp\biggl(-\Bigl(x^2+\frac{a^2}{x^2}\Bigr)\biggr)\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \exp\biggl(-\Bigl(x^2+\frac{a^2}{x^2}\Bigr)\biggr)\,dx.$$

Выполняя в первом интеграле-слагаемом замену $y=\dfrac{1}{x}$, получаем

$$I(|a|) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,\exp\biggl(-\Bigl(\frac{1}{y^2}+a^2y^2\Bigr)\biggr)\,dy + \int\limits_{1}^{+\infty} \exp\biggl(-\Bigl(y^2+\frac{a^2}{y^2}\Bigr)\biggr)\,dy \equiv$$

$$\equiv F(|a|)+G(|a|),\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Подынтегральные функции

$$f\colon (y,|a|)\to \frac{1}{y^2}\,\exp\biggl(-\Bigl(\frac{1}{y^2}+a^2y^2\Bigr)\biggr),\ \forall y\in[1;+\infty),\ \forall |a|\in[0;+\infty),$$

$$g\colon (y,|a|)\to \exp\biggl(-\Bigl(y^2+\frac{a^2}{y^2}\Bigr)\biggr),\ \forall y\in[1;+\infty),\ \forall |a|\in[0;+\infty),$$

непрерывны.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра, F и G, по признаку Вейерштрасса, равномерно сходятся при $a\in\mathbb{R}$, так как

$$\bigl|f(y,|a|)\bigr|\leqslant \frac{1}{y^2}\,,\quad \bigl|g(y,|a|)\bigr|\leqslant e^{-y^2},\ \forall y\in[1;+\infty),\ \forall a\in\mathbb{R},$$

и сходятся интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}\quad \text{и}\quad \int\limits_1^{+\infty}e^{-y^2}\,dy.$$

Следовательно, заданная несобственным интегралом с параметром функция $I\colon |a|\to I(|a|),\ \forall |a|\in[0;+\infty)$, непрерывна.

Пусть $|a|\geqslant\varepsilon>0$. Поскольку производные функции

$$f'_{|a|}\colon (y,|a|)\to\ -2|a|\exp\biggl(-\Bigl(\frac{1}{y^2}+a^2y^2\Bigr)\biggr),\ \forall (y,|a|)\in G_\varepsilon,$$

$$g'_{|a|}\colon (y,|a|)\to \frac{-2|a|}{y^2}\,\exp\biggl(-\Bigl(y^2+\frac{a^2}{y^2}\Bigr)\biggr),\ \forall (y,|a|)\in G_\varepsilon,$$

непрерывны на множестве $G_\varepsilon=\{(y,|a|)\colon y\geqslant 1,\ |a|\geqslant\varepsilon\}$, а интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} f'_{|a|}(|a|,y)\,dy\quad \text{и}\quad \int\limits_1^{+\infty} g'_{|a|}(|a|,y)\,dy,$$

по признаку Вейерштрасса, равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon;A]$, то в силу произвольности выбора чисел $\varepsilon>0$ и $A>\varepsilon$ функция I непрерывно дифференцируема при $|a|>0$ и имеет место равенство

$$I'(|a|) = \,-\,2|a| \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \exp\biggl(-\Bigl(x^2+\frac{a^2}{x^2}\Bigr)\biggr)\,dx \quad (|a|>0).$$

Выполняя в заданном интеграле I замену $y=\dfrac{|a|}{x}$, находим

$$I(|a|)=|a| \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, \exp\biggl(-\Bigl(y^2+\frac{a^2}{y^2}\Bigr)\biggr)\,dy.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$I'(|a|)+2I(|a|)=0,$$

из которого находим

$$I(|a|)=Ce^{-2|a|},\ \ |a|>0.$$

В силу непрерывности функции $I\colon |a|\to I(|a|),\ \forall |a|\in[0;\,+\infty)$,

$$I(0)=\lim_{|a|\to 0}\, Ce^{-2|a|}=C.$$

С учётом интеграла Эйлера — Пуассона $C=I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Итак, интеграл

$$I(|a|)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2|a|} \quad (a\in\mathbb{R}).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2|a|}$.

Задача 28. *С помощью интеграла Эйлера — Пуассона* (12) *вычислите интеграл*

$$I(b)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad (a>0,\ b\in\mathbb{R}).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$f\colon (x,b)\to e^{-ax^2}\cos bx,\ \forall x\in[0;\,+\infty),\ \forall b\in\mathbb{R},$$

и её частная производная

$$f'_b\colon (x,b) \to -x\,e^{-ax^2}\sin bx,\ \forall x\in[0;+\infty),\ \forall b\in\mathbb{R},$$

непрерывны.

Интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-ax^2}\sin bx\,dx$$

в силу признака Вейерштрасса равномерно сходятся на любом отрезке $[-B;B]$, $B>0$, относительно параметра b, так как

$$\left|e^{-ax^2}\cos bx\right| \leqslant e^{-ax^2} \quad \text{и} \quad \left|x\,e^{-ax^2}\sin bx\right| \leqslant x\,e^{-ax^2}$$

при любых $x\in[0;+\infty)$, $b\in\mathbb{R}$, $a\in(0;+\infty)$, и сходятся интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-ax^2}\,dx.$$

Следовательно, функция I непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ (в силу произвольности выбора числа $B>0$) и возможно дифференцирование под знаком интеграла:

$$I'(b) = -\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-ax^2}\sin bx\,dx = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{+\infty}\sin bx\,de^{-ax^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big[e^{-ax^2}\sin bx\Big]_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{b}{2a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}\,I(b).$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$I'(b) + \frac{b}{2a}\,I(b) = 0,$$

из которого находим $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Поскольку с учётом интеграла Эйлера — Пуассона

$$C = I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}\,x)^2}\, d(\sqrt{a}\,x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,\ \ a > 0,$$

то интеграл

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (a > 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Задача 29. *С помощью интеграла Эйлера — Пуассона* (12) *вычислите интеграл*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2} \cos 2px\, dx \quad (n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}).$$

Решение. Полагая в интеграле, вычисленном в задаче 28, $a = 1$, $b = 2p$ и дифференцируя этот интеграл $2n$ раз, получаем

$$\frac{d^{2n}}{dp^{2n}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2px\, dx =$$

$$= (\,-1)^n \cdot 2^{2n} \int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2} \cos 2px\, dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-p^2}\right)^{(2n)}.$$

Следовательно, интеграл

$$I(p) = (\,-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \left(e^{-p^2}\right)^{(2n)}, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $(\,-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \left(e^{-p^2}\right)^{(2n)}$.

Задача 30. *Используя интеграл Дирихле*

$$D(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} p \quad (p \in \mathbb{R}), \tag{13}$$

вычислите интеграл

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2}\,dx \quad (a \geqslant 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

Решение. При $0 < \varepsilon \leqslant a \leqslant A$, $0 < \varepsilon \leqslant |b| \leqslant B$ функция

$$f\colon (x,a,b) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2}\,,\ \forall x \in (0;\,+\infty), \\ \dfrac{b^2}{2} - a \ \text{ при } \ x = 0 \end{array}\right.$$

и её частные производные

$$f'_a\colon (x,a,b) \to \ -e^{-ax^2},\ \forall x \in [0;\,+\infty),$$

$$f'_b\colon (x,a,b) \to \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin bx}{x}\,,\ \forall x \in (0;\,+\infty), \\ b \ \text{ при } \ x = 0 \end{array}\right.$$

непрерывны на множествах

$$\{(x,a,b)\colon 0 \leqslant x < +\infty,\ \varepsilon \leqslant a \leqslant A,\ \varepsilon \leqslant b \leqslant B\}$$

и

$$\{(x,a,b)\colon 0 \leqslant x < +\infty,\ \varepsilon \leqslant a \leqslant A,\ -B \leqslant b \leqslant -\varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$, $A > \varepsilon$, $B > \varepsilon$ — произвольные фиксированные числа.

Согласно признаку Вейерштрасса интегралы $I(a,b)$ и

$$I'_a(a,b) = \int_0^{+\infty} f'_a(x,a,b)\,dx$$

равномерно сходятся при любых $a \in [\varepsilon; A]$, $b \in [\varepsilon; B]$, а также при любых $a \in [\varepsilon; A]$, $b \in [-B; -\varepsilon]$.

Интеграл

$$I_b'(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} f_b'(x,a,b)\,dx$$

равномерно сходится при любом $a \in [\varepsilon; A]$ и любом b из произвольного отрезка, не содержащего нуля (см. пример 8.3.1).

Следовательно, по теореме 1.2 (о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра), функции

$$I\colon (a,b) \to I(a,b),\ \ I_a'\colon (a,b) \to I_a'(a,b),\ \ I_b'\colon (a,b) \to I_b'(a,b)$$

непрерывны на множествах $G_1 = \{(a,b)\colon \varepsilon \leqslant a \leqslant A,\, \varepsilon \leqslant b \leqslant B\}$ и $G_2 = \{(a,b)\colon \varepsilon \leqslant a \leqslant A,\ -B \leqslant b \leqslant -\varepsilon\}$. А по теореме 1.3 (о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра), дифференциал

$$dI(a,b) = \left(-\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx\right)da + \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x}\,dx\right)db =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,da + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b\,db,\ \forall (a,b) \in G_1 \cup G_2,$$

где использованы интегралы Эйлера — Пуассона (12) и Дирихле (13).

Отсюда интегрированием находим

$$I(a,b) = -\sqrt{\pi a} + \frac{\pi}{2}\,|b| + C. \qquad (14)$$

В силу произвольности выбора чисел $\varepsilon > 0$, $A > \varepsilon$, $B > \varepsilon$ формула (14) имеет место при любых $a > 0$, $|b| > 0$.

Покажем, что эта формула имеет место при любых $a \geqslant 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^1 f(x,a,b)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x,a,b)\,dx.$$

Первый интеграл-слагаемое суть определённый интеграл, зависящий от параметров, с непрерывной на множестве $[0;1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ подынтегральной функцией. Поэтому, по теореме 1.3.1.2 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметров, с постоянными пределами интегрирования), этим интегралом задаётся непрерывная на $\mathbb{R}^2$ функция.

Второй интеграл-слагаемое, по признаку Вейерштрасса, равномерно сходится при любых $a \geqslant 0,\ b \in \mathbb{R},$ так как

$$\bigl|f(x,a,b)\bigr| \leqslant \frac{2}{x^2}\,,\ \ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall a \in [0;\,+\infty),\ \forall b \in \mathbb{R},$$

и интеграл от мажорирующей функции сходится. Кроме того, подынтегральная функция f непрерывна на $[1;\,+\infty) \times [0;\,+\infty) \times \mathbb{R},$ а значит, по теореме 1.2 (о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом с параметром), второй интеграл-слагаемое задаёт непрерывную на множестве $[0;\,+\infty) \times \mathbb{R}$ функцию переменных a и b.

Следовательно, функция I непрерывна на множестве $[0;\,+\infty)\times\mathbb{R}$ и из соотношения непрерывности

$$I(0,0) = \lim_{\substack{a\,\to\,+0\\ b\,\to\,+0}} \Bigl(-\sqrt{\pi a} + \frac{\pi}{2}\,|b| + C\Bigr) = 0$$

находим, что $C = 0.$

Таким образом, из (14) окончательно имеем, что

$$I(a,b) = -\sqrt{\pi a} + \frac{\pi}{2}\,|b|,\ \ \forall a \in [0;\,+\infty),\ \forall b \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $-\sqrt{\pi a} + \dfrac{\pi}{2}\,|b|.$

Задача 31. *Используя интеграл Дирихле* (13)*, вычислите несобственный интеграл, зависящий от параметров,*

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx \quad (a,b \in \mathbb{R}).$$

Решение. С помощью тригонометрической формулы преобразования произведения синуса на косинус в сумму получаем

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx.$$

Используя интеграл Дирихле (13), находим

$$I(a,b) = \frac{\pi}{4}\big(\operatorname{sgn}(a-b) + \operatorname{sgn}(a+b)\big), \ \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\big(\operatorname{sgn}(a-b) + \operatorname{sgn}(a+b)\big)$.

Задача 32. *Используя интеграл Дирихле* (13), *вычислите несобственный интеграл, зависящий от параметра,*

$$I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 px}{x}\, dx \quad (p \in \mathbb{R}).$$

Решение. Используя тождество

$$\sin^3 px = \frac{3}{4}\,\sin px - \frac{1}{4}\,\sin 3px, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ (p \in \mathbb{R})$$

и интеграл Дирихле (13), получаем

$$I(p) = \frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\, dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3px}{x}\, dx = \frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn} p - \frac{\pi}{8}\operatorname{sgn} 3p =$$

$$= \frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn} p - \frac{\pi}{8}\operatorname{sgn} p = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} p, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} p$.

Задача 33. *Используя формулу Фруллани*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a > 0, \ b > 0), \tag{15}$$

где f *— непрерывная функция такая, что интеграл* $\int\limits_A^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}\, dx$ *сходится при любом* $A > 0$, *вычислите интеграл*

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x}\, dx \quad (a,b \in \mathbb{R}).$$

Решение. Последовательно используя формулы синуса и косинуса половинного аргумента, получаем

$$\sin^4 ax - \sin^4 bx = \frac{1}{4}\left((1-\cos 2ax)^2 - (1-\cos 2bx)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 2bx - \cos^2 2bx + \cos^2 2ax - 2\cos 2ax\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 2bx - \frac{\cos 4bx}{2} - \left(2\cos 2ax - \frac{\cos 4ax}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(f(|b|x) - f(|a|x)\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a, b \in \mathbb{R}),$$

где функция

$$f\colon x \to 2\cos 2x - \frac{\cos 4x}{2}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда интеграл

$$I(a,b) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(|b|x) - f(|a|x)}{x}\,dx.$$

Функция f непрерывна, а интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty}\left(\frac{2\cos 2x}{x} - \frac{\cos 4x}{2x}\right)dx,$$

по признаку Дирихле, сходится при любом положительном A (см. пример 11.3.1).

Стало быть, согласно формуле Фруллани (15) будем иметь:

$$I(a,b) = \frac{3}{8}\,\ln\left|\frac{a}{b}\right| \quad (ab \neq 0).$$

Если $a = 0,\, b \neq 0$ или $b = 0,\, a \neq 0,$ то интеграл I расходится.

Если же $a = b = 0,$ то интеграл I равен нулю.

Таким образом, интеграл

$$I(a,b) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{8}\,\ln\left|\dfrac{a}{b}\right| \ \text{ при } \ ab \neq 0, \\[2mm] 0 \ \text{ при } \ a = b = 0, \\[2mm] -\infty \ \text{ при } \ a = 0,\ b \neq 0, \\[2mm] +\infty \ \text{ при } \ a \neq 0,\ b = 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{3}{8}\,\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|$ при $ab \neq 0$; 0 при $a = b = 0$; расходится к $-\infty$ при $a = 0$, $b \neq 0$; расходится к $+\infty$ при $a \neq 0$, $b = 0$.

Задача 34. *Используя интеграл Дирихле* (13)*, вычислите*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx.$$

Решение. Заменой $x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ данный интеграл приводим к интегралу Дирихле (13) при $p = 1$:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,D(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 35. *Вычислите интеграл*

$$I(a,b) = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\,dx \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Решение. Полагая $x = t - b$, с учётом тригонометрической формулы синуса разности получаем, что

$$I(a,b) = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin at}{t}\,\cos(ab) - \frac{\cos at}{t}\,\sin(ab)\Big)\,dt.$$

В силу чётности подынтегральной функции интеграл

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=2D(a)=\pi\,\mathrm{sgn}\,a,$$

где D — интеграл Дирихле (13).

В силу нечётности подынтегральной функции интеграл

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos at}{t}\,dt=0.$$

Таким образом,

$$I(a,b)=\pi\,\mathrm{sgn}\,a\,\cos(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $\pi\,\mathrm{sgn}\,a\,\cos(ab)$.

Задача 36. *Используя формулу*

$$\frac{1}{1+x^2}=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\,dy,$$

вычислите интеграл Лапласа

$$L(a)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx\quad(a\in\mathbb{R}).\tag{16}$$

Решение. Согласно условию

$$L(a)=\int\limits_{0}^{+\infty}dx\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\cos ax\,dy.$$

При любом положительном k и любом вещественном a рассмотрим интеграл

$$\widehat{L}(k,a)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,e^{-kx^2}\,dx$$

или

$$\widehat{L}(k,a) = \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax\, dy. \tag{17}$$

Функция

$$f\colon (x,y) \to e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax,\ \forall x, y \in [0;\, +\infty),$$

непрерывна.

По признаку Вейерштрасса, интегралы

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax\, dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax\, dx$$

на полуоткрытом числовом луче $[0; +\infty)$ равномерно сходятся соответственно по x и по y, так как при любых $x, y \in [0;\, +\infty)$

$$\left| e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax \right| \leqslant e^{-y} \quad \text{и} \quad \left| e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax \right| \leqslant e^{-kx^2}$$

и интегралы от мажорирующих функций сходятся.

В силу оценки

$$\left| \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos ax\, dy \right| \leqslant \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y}\, dy \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx^2}\, dx$$

интеграл (17) сходится.

Следовательно, по теореме 1.5 (об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом с параметром, в несобственном смысле), можно в повторном интеграле (17) изменить порядок интегрирования:

$$\widehat{L}(k,a) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y}\, dy \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(k+y)x^2} \cos ax\, dx.$$

В задаче 28 вычислен интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(k+y)x^2} \cos ax\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k+y}}\ e^{-\frac{a^2}{4(k+y)}} \quad (k > 0,\ y \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R}).$$

Стало быть,

$$\widehat{L}(k,a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+y}}\, e^{-\left(\frac{a^2}{4(k+y)}+y\right)}\, dy = \sqrt{\pi}\, e^{k} \int\limits_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\left(\frac{a^2}{4t^2}+t^2\right)}\, dt,$$

где $y = t^2 - k$.

Интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, e^{-kx^2}\, dx,$$

по признаку Вейерштрасса, равномерно сходится по k на числовом луче $[0;\, +\infty)$ (мажорантная функция $f\colon x \to (1+x^2)^{-1}$, $\forall x \in [0;\, +\infty)$) и имеет непрерывную подынтегральную функцию

$$f\colon (x,k) \to \frac{\cos ax}{1+x^2}\, e^{-kx^2},\ \ \forall (x,k) \in [0;\, +\infty) \times [0;\, +\infty).$$

Значит, по теореме о непрерывности функции, заданной несобственным интегралом с параметром (теорема 1.2), функция $\widehat{L}\colon (k,a) \to \widehat{L}(k,a)$, $\forall k \in [0;\, +\infty)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, непрерывна по переменной k. Поэтому

$$L(a) = \lim_{k\to+\infty} \widehat{L}(k,a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{a^2}{4t^2}+t^2\right)}\, dt.$$

Используя результат задачи 27, окончательно имеем:

$$L(a) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-2\left|\frac{a}{2}\right|} = \frac{\pi}{2}\, e^{-|a|},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}\, e^{-|a|}$.

Задача 37. *Используя интеграл Лапласа* (16)*, вычислите несобственный интеграл*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx.$$

Решение. Используя тригонометрическую формулу синуса половинного аргумента и интеграл Лапласа (16), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^{+\infty} - \frac{\pi}{4}\,e^{-2} = \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-2}).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}\,(1-e^{-2})$.

Задача 38. *Вычислите интеграл*

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx \quad (a\in\mathbb{R}).$$

Решение. Рассмотрим зависящий от параметра y интеграл

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{y^2+x^2}\,dx, \ \ \forall y\in\Big[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big], \ (a\in\mathbb{R}).$$

Дифференцированием по параметру y получаем, что

$$F'(1) = -\,2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx = -\,2I(a).$$

С другой стороны с помощью замены $x = yt$ устанавливаем:

$$F(y) = \frac{1}{y}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(ayt)}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{y}\,L(ay), \ \ \forall y\in\Big[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\Big],$$

где L — интеграл Лапласа (16).

Таким образом, с учётом значения интеграла Лапласа (16) имеем, что интеграл

$$I(a) = -\frac{1}{2}\,F'(1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\,L(ay)\right)'\Big|_{y=1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\pi}{2}\,e^{-|a|y}\right)'\Big|_{y=1} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{-|a|e^{-|a|y}\,y - e^{-|a|y}}{y^2}\right)\Big|_{y=1} = \frac{\pi}{4}\,\big(1+|a|\big)e^{-|a|},\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}\,e^{-|a|}$.

Задача 39. *Вычислите интеграл*

$$I(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos px}{ax^2+2bx+c}\,dx,\ \forall p\in\mathbb{R},\ \ (a>0,\ ac-b^2>0).$$

Решение. Выделяя полный квадрат в знаменателе, получаем, что

$$I(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos px}{\left(\sqrt{a}\,x+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+q^2}\,dx,\quad \text{где}\quad q^2=\frac{ac-b^2}{a}>0.$$

Тогда, выполняя подстановку

$$\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}=t,$$

с учётом тригонометрической формулы косинуса разности будем иметь:

$$I(p) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\dfrac{pt}{\sqrt{a}}\,\cos\dfrac{pb}{a}}{t^2+q^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{pt}{\sqrt{a}}\,\sin\dfrac{pb}{a}}{t^2+q^2}\,dt.$$

Учитывая чётность подынтегральной функции, первый интеграл-слагаемое вычислим с помощью интеграла Лапласа (16):

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\dfrac{pt}{\sqrt{a}}\,\cos\dfrac{pb}{a}}{t^2+q^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\cos\frac{pb}{a}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\dfrac{pt}{\sqrt{a}}}{t^2+q^2}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \cos\frac{pb}{a} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\dfrac{p|q|u}{\sqrt{a}}}{q^2(u^2+1)}\, |q|\, du = \frac{2}{|q|\sqrt{a}} \cos\frac{pb}{a}\, L\left(\frac{|pq|}{\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \frac{2}{|q|\sqrt{a}} \cos\frac{pb}{a} \cdot \frac{\pi}{2}\, e^{-\frac{|pq|}{\sqrt{a}}} = \frac{\pi}{|q|\sqrt{a}} \cos\frac{pb}{a}\, e^{-\frac{|pq|}{\sqrt{a}}}.$$

Второй интеграл-слагаемое, по признаку Вейерштрасса, сходится (доказательство аналогично проведённому в задаче 4). Поэтому с учётом нечётности подынтегральной функции его значение равно нулю.

Таким образом, с учётом обозначения $q^2 = \dfrac{ac-b^2}{a}$ интеграл

$$I(p) = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos\frac{pb}{a}\, e^{-\frac{|p|\sqrt{ac-b^2}}{a}}, \ \ \forall p \in \mathbb{R}, \ \ (a>0, \ ac-b^2>0).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos\dfrac{pb}{a}\, e^{-\frac{|p|\sqrt{ac-b^2}}{a}}$.

Задача 40. *С помошью интегралов Френеля*

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

вычислите интеграл

$$I(a,b,c) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\, dx \quad (a,b,c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0).$$

Решение. Выделяя полный квадрат, получаем, что

$$I(a,b,c) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\left(\sqrt{a}\, x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + q\right) dx, \quad \text{где} \quad q = \frac{ac-b^2}{a}.$$

Если $a > 0$, то с помощью подстановки

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t,$$

тригонометрической формулы синуса суммы и интегралов Френеля будем иметь:

$$I(a,b,c) = \frac{\cos q}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2\,dt + \frac{\sin q}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2\,dt =$$

$$= \frac{2\cos q}{\sqrt{a}} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin t^2\,dt + \frac{2\sin q}{\sqrt{a}} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos t^2\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos q + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin q\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\sin\!\left(\frac{\pi}{4} + q\right) \quad (a > 0).$$

Если $a < 0$, то, полагая $a = -a_1$, $a_1 > 0$, и выполняя аналогичные вычисления, получаем:

$$I(-a_1,b,c) = \sqrt{\frac{\pi}{a_1}}\,\sin\!\left(-\frac{\pi}{4} + q\right) \ \ (a_1 > 0),$$

т.е.

$$I(a,b,c) = \sqrt{\frac{\pi}{-a}}\,\sin\!\left(-\frac{\pi}{4} + q\right) \ \ (a < 0).$$

Итак, учитывая обозначение $q = \dfrac{ac-b^2}{a}$, интеграл

$$I(a,b,c) = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\,\sin\!\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a + \frac{ac-b^2}{a}\right) \ \ (a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0).$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{\pi}{|a|}}\,\sin\!\left(\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a + \dfrac{ac-b^2}{a}\right).$

Задача 41. *Докажите, что*:

$$a)\ \text{V.p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2b}\ \sin(|a|b),\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\backslash\{0\};$$

$$б)\ \text{V.p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 - x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cos(ab),\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Доказательство. а). В силу чётности подынтегральной функции

$$\text{V.p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 - x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4b}\, \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x - b}\, dx + \frac{1}{4b}\, \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x + b}\, dx.$$

Вычислим первый интеграл-слагаемое способом, изложенным в задаче 35. Полагая $x = t + b,$ с учётом тригонометрической формулы косинуса суммы получаем, что

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x - b}\, dx = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\cos at}{t}\ \cos(ab) - \frac{\sin at}{t}\ \sin(ab)\Big)\, dt.$$

В силу нечётности подынтегральной функции интеграл

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t}\, dt = 0.$$

В силу чётности подынтегральной функции интеграл

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\, dt = 2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\, dt = 2D(a) = \pi \operatorname{sgn} a,$$

где D — интеграл Дирихле (13).

Таким образом,

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x-b}\,dx = -\sin(ab)\cdot\pi\,\mathrm{sgn}\,a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Тогда второй интеграл-слагаемое

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}\,dx = \mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x-(-b)}\,dx = \sin(ab)\cdot\pi\,\mathrm{sgn}\,a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Итак,

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{4b}\bigl(-\sin(ab)\cdot\pi\,\mathrm{sgn}\,a\bigr)+\frac{1}{4b}\,\sin(ab)\cdot\pi\,\mathrm{sgn}\,a =$$

$$= \frac{\pi}{2b}\,\sin(ab)\,\mathrm{sgn}\,a = \frac{\pi}{2b}\,\sin(|a|b),\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

б). В силу чётности подынтегральной функции

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{b^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{b^2-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x-b}\,dx - \frac{1}{4}\,\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\,dx.$$

Используя результат задачи 35, получаем:

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x-b}\,dx = \mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\,dx = \pi\,\mathrm{sgn}\,a\,\cos(ab),\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Стало быть,

$$\mathrm{V.p.}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{b^2-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,a\,\cos(ab),\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.\ \blacksquare$$

Задача 42. *Найдите преобразование Лапласа*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt,\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

для функции f, *если*:

а) $f\colon t \to t^n,\ \forall t \in [0;\, +\infty),\ n \in \mathbb{N};$ *б*) $f\colon t \to \sqrt{t}\,,\ \forall t \in [0;\, +\infty);$

$$\text{в) } f\colon t \to \frac{1 - e^{-t}}{t}\,,\ \forall t \in (0;\, +\infty);$$

$$\text{г) } f\colon t \to \sin(a\sqrt{t}\,),\ \forall t \in [0;\, +\infty),\ a \in \mathbb{R}.$$

Решение. а). Рассмотрим интеграл

$$G(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt,\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Подынтегральная функция

$$f\colon (t, p) \to e^{-pt},\ \ \forall t \in [0;\, +\infty),\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

и её частные производные

$$f_p^{(n)}\colon (t, p) \to (\,-1)^n\, e^{-pt}\, t^n,\ \ \forall t \in [0;\, +\infty),\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

любого порядка $n \in \mathbb{N}$ непрерывны. Интеграл G сходится, а интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} (\,-1)^n\, e^{-pt}\, t^n\, dt,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

равномерно сходятся по параметру p на любом полуоткрытом числовом луче $[p_0;\, +\infty),\ p_0 > 0,$ — см. задачу 6.

Следовательно, по теореме 1.3 (о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом с параметром),

$$G^{(n)}(p) = (\,-1)^n \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, t^n\, dt, \quad \text{т.е.} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, t^n\, dt = (\,-1)^n \cdot G^{(n)}(p).$$

Поскольку

$$G(p) = -\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, d(-pt) = -\frac{1}{p}\Big[e^{-pt}\Big]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty),$$

то

$$G^{(n)}(p) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{p^{n+1}}\,,\quad \forall p\in(0;\,+\infty),\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Таким образом, преобразование Лапласа

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, t^n\, dt = \frac{(-1)^{2n}\cdot n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}\,,\quad \forall p\in(0;+\infty),\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

б). С помощью замены $x=\sqrt{t}$ и последующего интегрирования по частям получаем:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\sqrt{t}\, dt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-px^2}x^2\, dx = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{p}\, de^{-px^2} =$$

$$= -\left[\frac{x}{p}\, e^{-px^2}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} + \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-px^2}\, dx = \frac{1}{p\sqrt{p}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{p}\,x)^2}\, d(\sqrt{p}\,x) =$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{p}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty),$$

где использован интеграл Эйлера — Пуассона (12).

в). Применяя формулу Фруллани (15), находим:

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}-e^{-(p+1)t}}{t}\, dt = \ln\frac{p+1}{p}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty).$$

г). С помощью замены $x=\sqrt{t}$ и последующего интегрирования по частям получаем, что

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \sin(a\sqrt{t}\,)\, dt = 2 \int\limits_0^{+\infty} x e^{-px^2} \sin ax\; dx =$$

$$= -\frac{1}{p} \int\limits_0^{+\infty} \sin ax\; de^{-px^2} = -\frac{1}{p} \Big[\sin ax \cdot e^{-px^2}\Big]_{x=0}^{x\to+\infty} +$$

$$+\frac{a}{p} \int\limits_0^{+\infty} e^{-px^2} \cos ax\; dx = \frac{a}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{a^2}{4p}},\ \forall p \in (0;\, +\infty),\ \ (a \in \mathbb{R}).$$

где использован результат задачи 28.

Ответ: а) $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$; б) $\dfrac{1}{2p}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$; в) $\ln \dfrac{p+1}{p}$; г) $\dfrac{a}{2p}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{a^2}{4p}}$.

Задача 43. *Вычислите интеграл Липшица*

$$I(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} J_0(ax)\, e^{-bx}\, dx \quad (a \in \mathbb{R},\ b > 0),$$

где функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0 \colon x \to \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Согласно условию

$$I(a,b) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{\pi} \cos(ax\sin\varphi) e^{-bx}\, d\varphi \quad (a \in \mathbb{R},\ b > 0). \qquad (18)$$

Функция

$$f \colon (x, \varphi) \to \cos(ax\sin\varphi)e^{-bx},\ \forall x \in [0;\, +\infty),\ \forall \varphi \in [0; \pi],$$

непрерывна. В силу оценки

$$\big|\cos(ax\sin\varphi)e^{-bx}\big| \leqslant e^{-bx},\ \forall x \in [0;\, +\infty),\ \forall \varphi \in [0; \pi],$$

интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(ax\sin\varphi)e^{-bx}\,dx,$$

по признаку Вейерштрасса, равномерно сходится по φ на $[0;\pi]$.

Следовательно, по теореме 1.4 (об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом с параметром, в собственном смысле), в повторном интеграле (18) можно изменить порядок интегрирования:

$$I(a,b) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \cos(ax\sin\varphi)e^{-bx}\,dx \quad (a\in\mathbb{R},\ b>0).$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(ax\sin\varphi)e^{-bx}\,dx =$$

$$= \left[\frac{-\,b\cos(ax\sin\varphi) + a\sin\varphi\sin(ax\sin\varphi)}{b^2+a^2\sin^2\varphi}\ e^{-bx}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{b}{b^2+a^2\sin^2\varphi}\,.$$

Вычислим интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{b^2+a^2\sin^2\varphi} \quad (a\in\mathbb{R},\ b>0).$$

Если $a=0$, то его значение равно $\dfrac{\pi}{b^2}$.

Если $a\neq 0$, то

$$I_1 = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\frac{b^2}{a^2}+\sin^2\varphi} = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{b^2}{a^2}+\sin^2\varphi} + \frac{1}{a^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\frac{b^2}{a^2}+\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\ \operatorname{tg}\varphi}{b}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}-0} +$$

$$+\frac{1}{a^2}\left[\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}\ \operatorname{tg}\varphi}{b}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}+0}^{\varphi=\pi}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}-0+0-\frac{a^2}{b\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{b\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Значит, интеграл

$$I_1=\frac{\pi}{b\sqrt{a^2+b^2}}\quad (a\in\mathbb{R},\ b>0).$$

Таким образом, интеграл Липшица

$$I(a,b)=\frac{b}{\pi}\cdot\frac{\pi}{b\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad (a\in\mathbb{R},\ b>0).$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$

Задача 44. *Найдите преобразование Вейерштрасса*

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}\,f(y)\,dy,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

для функции

$$f\colon y\to\cos ay,\ \forall y\in\mathbb{R},\ (a\in\mathbb{R}).$$

Решение. Полагая $x-y=t$, с учётом тригонометрической формулы косинуса разности получаем:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\cos(ax-at)\,dt=$$

$$=\frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\cos at\ dt+\frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\sin at\ dt.$$

Учитывая чётность подынтегральной функции, первый интеграл-слагаемое вычислим, используя результат задачи 28:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos at\, dt = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos at\, dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{a^2}{4}},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Второй интеграл-слагаемое, по признаку Вейерштрасса, сходится (мажорантная функция $f\colon t \to e^{-t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$). Поэтому в силу нечётности подынтегральной функции его значение равно нулю.

Таким образом, для функции f преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (a \in \mathbb{R}).$$

Ответ: $e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax$.

Задача 45. *Найдите разрывный множитель Дирихле*

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x \cos \lambda x}{\lambda}\, d\lambda,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Полагая в задаче 31 $x = \lambda$, $a = 1$, $b = x$, получаем, что

$$D(x) = \frac{1}{2} \big(\operatorname{sgn}(1 - x) + \operatorname{sgn}(1 + x)\big),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

или

$$D(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = \pm 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1 при $|x| < 1$; $\dfrac{1}{2}$ при $x = \pm 1$; 0 при $|x| > 1$.

§ 3. Бета- и гамма-функции

1. Эйлеров интеграл первого рода

Эйлеров интеграл первого рода $\int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi$. *Множество равномерной сходимости эйлерова интеграла первого рода.*

Интеграл

$$\int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi, \tag{1}$$

по предложению Лежандра, принято называть *эйлеровым интегралом первого рода*. Параметры p и q из поля $\mathbb{R}$, входящие в задание, определяют свойства этого интеграла.

Если $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, то подынтегральная функция

$$f\colon \xi \to \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}, \ \forall \xi \in \langle 0; 1\rangle, \tag{2}$$

непрерывна на отрезке $[0;1]$, а значит, интеграл (1) является собственным, зависящим от параметров p и q.

Если $p < 1$, а q — любое вещественное число, то подынтегральная функция (2) не определена в левом конце $\xi = 0$ промежутка интегрирования, причём функция f неограниченно возрастает при стремлении ξ к нулю справа, то есть,

$$\lim_{\xi\to+0}\bigl(\xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\bigr) = +\infty, \ \forall p \in (-\infty; 1), \ \forall q \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Если p — любое вещественное число, а $q < 1$, то подынтегральная функция (2) не определена в правом конце $\xi = 1$ промежутка интегрирования, причём функция f неограниченно возрастает при стремлении ξ к единице слева, то есть,

$$\lim_{\xi\to1-0}\bigl(\xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\bigr) = +\infty, \ \forall p \in \mathbb{R}, \ \forall q \in (-\infty; 1). \tag{4}$$

Поэтому, если $\min\{p, q\} < 1$, то интеграл (1) является несобственным, зависящим от параметров p и q.

В связи с тем, что эйлеров интеграл первого рода может иметь только две особые точки $\xi = 0$ и $\xi = 1$, представим его в виде суммы двух интегралов

$$\int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi = \int\limits_0^{0,5} \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi + \\ + \int\limits_{0,5}^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi \tag{5}$$

и рассмотрим каждый интеграл-слагаемое

$$\int\limits_0^{0,5} \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi \tag{6}$$

и

$$\int\limits_{0,5}^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\, d\xi. \tag{7}$$

При $p \geqslant 1$ и любом вещественном q сужение функции (2) непрерывно на отрезке $[0; 0{,}5]$, поэтому интеграл (6) является определённым.

Если $p < 1$, а q — любое вещественное число, то у интеграла (6) одна особая точка $\xi = 0$. Сужение подынтегральной функции (2) положительно на полуинтервале $(0; 0{,}5]$, и имеет место эквивалентность

$$\frac{(1-\xi)^{q-1}}{\xi^{1-p}} \sim \frac{1}{\xi^{1-p}} \quad \text{при} \quad \xi \to +0,$$

то есть, подынтегральная функция (2) при $p < 1$, $q \in \mathbb{R}$ является бесконечно большой порядка $1 - p$ при $\xi \to +0$.

Учитывая, что сужение функции (2) на полуинтервале $(0; 0{,}5]$ является пожительным, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода (следствие 4.2.1), устанавливаем, что интеграл (6) будет сходящимся при $0 < p < 1$ и расходящимся при $p \leqslant 0$.

Итак, при $p \geqslant 1$, $q \in \mathbb{R}$ интеграл (6) является определённым, при $0 < p < 1$, $q \in \mathbb{R}$ — несобственным сходящимся, а при $p \leqslant 0$, $q \in \mathbb{R}$ — несобственным расходящимся. Поэтому, рассматривая определённый интеграл как разновидность несобственного сходящегося, интеграл (6) будет сходящимся при $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ и расходящимся при $p \leqslant 0$, $q \in \mathbb{R}$.

При любом вещественном p и $q \geqslant 1$ сужение функции (2) непрерывно на отрезке $[0{,}5; 1]$, поэтому интеграл (7) является определённым.

Если $q < 1$, p — любое вещественное число, то у интеграла (7) одна особая точка $\xi = 1$. Сужение подынтегральной функции (2) положительно на полуинтервале $[0{,}5; 1)$ и имеет место эквивалентность

$$\frac{\xi^{p-1}}{(1-\xi)^{1-q}} \sim \frac{1}{(1-\xi)^{1-q}} \quad \text{при} \quad \xi \to 1-0.$$

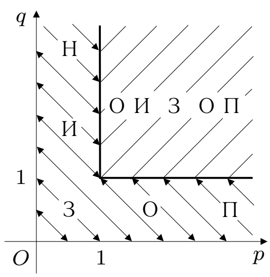

Рис. 1

Стало быть, подынтегральная функция (2) при $p \in \mathbb{R}$, $q < 1$ является бесконечно большой порядка $1-q$ при $\xi \to 1-0$.

Учитывая, что сужение функции (2) на полуинтервале $[0{,}5; 1)$ является положительным, по предельному признаку сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода (следствие 4.2.1), устанавливаем, что интеграл (7) будет сходящимся при $0 < q < 1$ и расходящимся при $q \leqslant 0$.

Итак, интеграл (7) сходится при $p \in \mathbb{R}$, $q > 0$ и расходится при $p \in \mathbb{R}$, $q \leqslant 0$.

В соответствии с критерием сходимости несобственного интеграла на открытом числовом промежутке эйлеров интеграл первого рода (5) является сходящимся на множестве

$$P = \{(p, q) \colon p > 0,\ q > 0\},$$

а во всех иных точках плоскости $\mathbb{R}^2$ он расходится.

На рисунке 1 указаны множества значений параметров p и q, при которых эйлеров интеграл первого рода (1) представляет собой определённый интеграл, зависящий от параметров (ОИЗОП), и несобственный интеграл, зависящий от параметров (НИЗОП).

Отметим столь важный факт, как равномерная сходимость для интеграла (1).

Предложение 1. *Эйлеров интеграл первого рода* (1) *равномерно сходится на множестве*

$$P_0 = \{(p, q) \colon p \geqslant p_0 > 0,\ q \geqslant q_0 > 0\}.$$

Доказательство проведём, основываясь на признаке Вейерштрасса (теорема 1.3.1) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметров. Для этого произвольным образом выберем фиксированные числа p_0 и q_0 со свойствами $0 < p_0$, $0 < q_0$. Тогда

$$\begin{gathered} 0 < \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1} \leqslant \xi^{p_0-1}(1-\xi)^{q_0-1},\ \forall \xi \in (0;1), \\ \forall p \in (p_0;\ +\infty),\ p_0 > 0,\ \forall q \in (q_0;\ +\infty),\ q_0 > 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Это позволяет говорить о существовании функции

$$\varphi \colon \xi \to \xi^{p_0-1}(1-\xi)^{q_0-1},\ \forall \xi \in (0;1),\ p_0 > 0,\ q_0 > 0,$$

обладающей свойством (8) по отношению к сужению подынтегральной функции (2), причём интеграл

$$\int\limits_0^1 \varphi(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 \xi^{p_0-1}(1-\xi)^{q_0-1}\, d\xi,$$

как частный случай интеграла (1) при $p = p_0$, $q = q_0$, сходится.

Условия признака Вейерштрасса выполнены, поэтому несобственный интеграл, зависящий от параметров, (1) равномерно сходится на множестве P_0. ■

2. Определение бета-функции

Бета-функция $B\colon (p,q) \to \int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi$. *Множество непрерывности бета-функции.*

Сходимость эйлерова интеграла первого рода (1.1) позволяет на множестве сходимости $P = \{(p,q)\colon p > 0,\ q > 0\}$ ввести с его помощью функцию.

Определение 1. *Функцию* B *с множеством определения* $\mathrm{D}B = \{(p,q)\colon p > 0,\ q > 0\}$, *заданную с помощью эйлерова интеграла первого рода*

$$B\colon (p,q) \to \int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi,\ \forall (p,q) \in \mathrm{D}B, \tag{1}$$

назовём ***бета-функцией***.

Функция

$$\Phi\colon (\xi,p,q) \to \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1},\ \forall \xi \in (0;1),\ \forall p,q \in (0;+\infty), \tag{2}$$

непрерывна на множестве

$$\mathrm{D}\Phi = \{(\xi,p,q)\colon 0 < \xi < 1,\ p > 0,\ q > 0\}.$$

Эйлеров интеграл первого рода (1.1) равномерно сходится на множестве $P_0 = \{(p,q)\colon p \geqslant p_0 > 0, q \geqslant q_0 > 0\}$. Поэтому, исходя из теоремы 1.3.1 (о непрерывности функции, заданной определённым интегралом, зависящим от параметра, с постоянными пределами интегрирования) и теоремы 1.2.2 (о непрерывности функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра), заключаем о непрерывности бета-функции (1) на её множестве определения.

Теорема 1. *Бета-функция непрерывна на её множестве определения.*

3. Симметричность бета-функции относительно переменных

Симметричность: $B(p,q) = B(q,p)$.

Свойство 1. *Для бета-функции имеет место соотношение симметричности*

$$B(p,q) = B(q,p), \ \forall p,q \in (0;\,+\infty). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$t = 1 - \xi, \ \forall \xi \in [0;1],$$

тогда

$$\xi = 1 - t, \ \ d\xi = -\,dt,$$

при $\xi = 0$ новая переменная $t = 1$, а при $\xi = 1$ — $t = 0$.
Поэтому, выполнив в интеграле (1.1) замену

$$\xi = 1 - t, \ \forall t \in [0;1],$$

будем иметь:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi = -\int\limits_1^0 (1-t)^{p-1}\,t^{q-1}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t^{q-1}\,(1-t)^{p-1}\,dt = B(q,p), \ \forall p,q \in (0;\,+\infty). \ \blacksquare$$

Например,

$$B(3,5) = B(5,3),$$

что означает равенство интегралов

$$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^4\,dx = \int\limits_0^1 x^4(1-x)^2\,dx.$$

4. Формулы приведения бета-функции

Формулы приведения:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\,B(p,q-1);\;\; B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\,B(p-1,q);$$

$$B(p,1) = \frac{1}{p}\,;\;\; B(1,q) = \frac{1}{q}\,;\;\; B(1,1) = 1;$$

$$B(p,n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\,;\;\; B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

Свойство 1. *Для бета-функции имеют место формулы приведения*:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\,B(p,q-1) \quad (p>0,\ q>1) \tag{1}$$

и

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1}\,B(p-1,q) \quad (p>1,\ q>0). \tag{2}$$

Доказательство. Положим

$$u = (1-\xi)^{q-1},\;\; dv = \xi^{p-1}\,d\xi,\; \forall \xi \in \langle 0;1\rangle.$$

Тогда при $p>0,\ q>0$ находим

$$du = -(q-1)(1-\xi)^{q-2}\,d\xi,\;\; v = \frac{1}{p}\,\xi^{p},\; \forall \xi \in \langle 0;1\rangle.$$

Интегрированием по частям устанавливаем:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi = \frac{1}{p}\left[\xi^{p}(1-\xi)^{q-1}\right]_{\xi=0}^{\xi=1} +$$

$$+ \frac{q-1}{p} \int_0^1 \xi^p (1-\xi)^{q-2}\, d\xi = \frac{q-1}{p} \int_0^1 \xi^p (1-\xi)^{q-2}\, d\xi,$$

$$\forall p \in (0;\, +\infty),\ \forall q \in (1;\, +\infty).$$

Учитывая, что

$$\xi^p = \xi^{p-1} - \xi^{p-1} + \xi^p = \xi^{p-1} - \xi^{p-1}(1-\xi),\ \forall \xi \in \langle 0; 1],$$

преобразуем интеграл

$$\int_0^1 \xi^p (1-\xi)^{q-2}\, d\xi = \int_0^1 \xi^{p-1} (1-\xi)^{q-2}\, d\xi - \int_0^1 \xi^{p-1} (1-\xi)^{q-1}\, d\xi =$$

$$= B(p, q-1) - B(p, q),\ \forall p \in (0;\, +\infty),\ \forall q \in (1;\, +\infty).$$

Поэтому

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\, B(p, q-1) - \frac{q-1}{p}\, B(p,q),$$

$$\forall p \in (0;\, +\infty),\ \forall q \in (1;\, +\infty).$$

Разрешив это тождество относительно $B(p,q)$, получим формулу приведения (1).

Формула приведения (2) следует из формулы приведения (1), если использовать симметричность (1.3) бета-функции:

$$B(p,q) = B(q,p) = \frac{p-1}{q+p-1}\, B(q, p-1) =$$

$$= \frac{p-1}{p+q-1}\, B(p-1, q),\ \forall p \in (1;\, +\infty),\ \forall q \in (0;\, +\infty). \blacksquare$$

Укажем некоторые формулы, удобные в приложениях.

Свойство 2. *Для бета-функции имеют место формулы*:

$$B(p,1)=\frac{1}{p}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty); \tag{3}$$

$$B(1,q)=\frac{1}{q}\,,\ \forall q\in(0;\,+\infty); \tag{4}$$

$$B(1,1)=1. \tag{5}$$

Действительно,

$$B(p,1)=\int\limits_0^1 \xi^{p-1}\,d\xi=\frac{1}{p}\Big[\xi^p\Big]_{\xi=0}^{\xi=1}=\frac{1}{p}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty).$$

Отсюда с учётом (1.3) получаем, что

$$B(1,q)=B(q,1)=\frac{1}{q}\,,\ \forall q\in(0;\,+\infty).$$

Формула (5) — частный случай формулы (3) при $p=1$. ■

Свойство 3. *Имеет место формула*

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\,,\ \forall p\in(0;\,+\infty),\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Доказательство. Последовательно применяя формулу приведения (1), при натуральном n находим:

$$B(p,n)=\frac{n-1}{p+n-1}\,B(p,n-1)=$$

$$=\frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\,B(p,n-2)=\ldots=$$

$$= \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p+1}\, B(p,1),\ \forall p \in (0;\,+\infty).$$

Отсюда с учётом формулы (3) получаем формулу (6). ■

Если, кроме $q = n$, параметр p есть натуральное число, то из (6) получаем формулу

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}\,,\ \forall m,n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Пример 1. Используя формулу (6), получаем, что определённый интеграл, зависящий от параметров,

$$\int\limits_0^1 \xi^n\ \sqrt[m]{1-\xi}\ d\xi = B\Big(n+1,\ \frac{1}{m}+1\Big) = B\Big(\frac{m+1}{m}\,,\,n+1\Big) =$$

$$= \frac{n!}{\frac{m+1}{m}\Big(\frac{m+1}{m}+1\Big)\Big(\frac{m+1}{m}+2\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\frac{m+1}{m}+n\Big)} =$$

$$= \frac{n!\,m^{n+1}}{(m+1)(2m+1)(3m+1)\cdot\ldots\cdot(nm+m+1)}$$

при любых натуральных n и m, $m \geqslant 2$.

Пример 2. По формуле (7), интеграл

$$\int\limits_0^1 \xi^m(1-\xi)^n\, d\xi = B(m+1,n+1) = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

при любых целых неотрицательных m и n.

5. Представление бета-функции несобственными интегралами с бесконечными промежутками интегрирования

Формулы $B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx$ *и* $B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\bigl(1-e^{-t}\bigr)^{b-1}\,dt.$

Предложение 1. *Для бета-функции имеет место формула*

$$B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx,\ \forall a,b \in (0;\,+\infty). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть

$$\xi = \frac{x}{x+1}\,,\ \forall x \in [0;\,+\infty).$$

Тогда

$$1-\xi = \frac{1}{x+1}\,,\ \ d\xi = \frac{dx}{(x+1)^2}\,,\ \ \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1} = \frac{x^{a-1}}{(x+1)^{a+b-2}}\,,$$

при $\xi = 0$ новая переменная $x = 0,$ а при $\xi \to 1-0$ переменная $x \to +\infty.$

Выполнив замену

$$\xi = \frac{x}{x+1}\,,\ \forall x \in [0;\,+\infty),$$

в эйлеровом интеграле первого рода (1.1), получим:

$$B(a,b) = \int\limits_0^{1} \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}\,d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx. \ \blacksquare$$

Пример 1. Несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\zeta^2}{(\zeta+1)^6}\, d\zeta = B(3,3) = \frac{2!\,2!}{5!} = \frac{1}{30}\,.$$

Укажем ещё одно представление бета-функции несобственным интегралом на бесконечном промежутке интегрирования.

Предложение 2. *Для бета-функции имеет место формула*

$$B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-at}\big(1-e^{-t}\big)^{b-1}\, dt,\ \forall a,b \in (0;\, +\infty). \tag{2}$$

Доказательство основано на замене

$$\xi = e^{-t},\ \forall t \in [0;\, +\infty),$$

в эйлеровом интеграле первого рода (1.1), при которой переменная $t=0$ при $\xi=1$ и $t\to\,+\infty$ при $\xi\to\,+0$. ■

Пример 2. Несобственный интеграл первого рода

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3t}\big(1-e^{-t}\big)^4\, dt = B(3,5) = \frac{2!\,4!}{7!} = \frac{1}{5\cdot 3\cdot 7} = \frac{1}{105}\,.$$

Пример 3. В соответствии с формулой (1) и с учётом симметричности бета-функции (свойство 1.3) интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx + \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx =$$

$$= B(a,b)+B(b,a) = 2B(a,b) = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx\ \ (a>0,\ b>0). \tag{3}$$

С другой стороны, по свойству аддитивности,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx + {} \\ {} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\ b>0). \tag{4}$$

Подстановкой $x=\dfrac{1}{z}$, $\forall z\in(0;1)$, преобразуем интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = -\int\limits_1^{0} \frac{\dfrac{z^{b-1}+z^{a-1}}{z^{a+b-2}}}{\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^{a+b}} \Big(-\frac{1}{z^2}\Big)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{1} \frac{z^{a-1}+z^{b-1}}{(1+z)^{a+b}}\,dz \quad (a>0,\ b>0),$$

то есть, в правой части равенства (4) интегралы-слагаемые равны. Это позволяет на основании равенства (4) составить два новых равенства:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = 2\int\limits_0^{1} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\ b>0); \tag{5}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\ b>0). \tag{6}$$

Из равенств (3) и (5) следует формула

$$\int\limits_0^{1} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\ b>0) \tag{7}$$

или

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = B(a,b),\ \forall a,b \in (0;\,+\infty). \tag{8}$$

Из равенств (3) и (6) следует формула

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx \quad (a>0,\, b>0) \tag{9}$$

или

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx = B(a,b),\ \forall a,b \in (0;\,+\infty). \tag{10}$$

Так, в соответствии с формулой (8) с последующим использованием формулы (6.4) интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{(1+x)^3\sqrt{1+x}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{2-1}+x^{\frac{3}{2}-1}}{(1+x)^{2+\frac{3}{2}}}\,dx =$$

$$= B\Big(2,\frac{3}{2}\Big) = \frac{(2-1)!}{\frac{3}{2}\Big(\frac{3}{2}+1\Big)} = \frac{4}{15}\,.$$

По формуле (10) находим, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2(x^2+1)}{(1+x)^8}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{5-1}+x^{3-1}}{(1+x)^{5+3}}\,dx =$$

$$= B(5,3) = \frac{4!\,2!}{7!} = \frac{1}{105}\,.$$

6. Формула дополнения бета-функции

Формулы $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\,\pi}\,,\ B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin a\,\pi}\ (0<a<1).$

Лемма 1. *Пусть натуральные числа* m *и* n *такие, что* $m<n$. *Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\,\pi}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Предварительно рассмотрим один из видов несобственного интеграла на числовой прямой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt, \tag{2}$$

где P и Q суть полиномы, причём полином Q не имеет вещественных нулей, а степень полинома P по крайней мере на две единицы ниже степени полинома Q, то есть,

$$\rho = \deg Q(t) - \deg P(t) \geqslant 2. \tag{3}$$

Для достаточно больших t подынтегральная функция $\dfrac{P}{Q}$ сохраняет определённый знак. Поэтому (изменяя в случае надобности знак) можно использовать предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла (2) и эквивалентность

$$\frac{P(t)}{Q(t)} \sim \frac{1}{t^{\rho}} \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

В соответствии с (3) подынтегральная функция является бесконечно малой при $t\to\infty$ порядка $\rho\geqslant 2$, и интеграл (2) абсолютно сходится.

Перейдём к рассмотрению задачи о вычислении интеграла (2).

Если $t_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$, $\beta_\lambda \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$, $\lambda = 1, 2, \dots$, суть различные нули полинома Q, то рациональная дробь $\dfrac{P}{Q}$ разлагается на элементарные дроби следующим образом

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_\lambda \Big(\frac{A_\lambda^1}{t - t_\lambda} + \frac{A_\lambda^2}{(t - t_\lambda)^2} + \dots\Big), \tag{4}$$

причём число элементарных дробей в каждой скобке равно показателю кратности соответствующего нуля (знаки сверху являются номерами слагаемых, а не показателями степеней).

Распространяя на случай комплексной функции от вещественной переменной способы интегрирования, получаем, что при $m > 0$ интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t - t_\lambda)^{m+1}} = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t - t_\lambda)^{m+1}} =$$

$$= -\frac{1}{m} \lim_{h \to +\infty} \Big[\frac{1}{(t - t_\lambda)^m}\Big]_{-h}^{h} = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_\lambda \frac{A_\lambda^1}{t - t_\lambda} = \lim_{h \to +\infty} \int\limits_{-h}^{h} \sum_\lambda \frac{A_\lambda^1}{t - t_\lambda}\,.$$

Поскольку

$$\frac{1}{t - t_\lambda} = \frac{1}{t - \alpha_\lambda - \beta_\lambda\, i} = \frac{t - \alpha_\lambda + \beta_\lambda\, i}{(t - \alpha_\lambda - \beta_\lambda\, i)(t - \alpha_\lambda + \beta_\lambda\, i)} =$$

$$= \frac{t - \alpha_\lambda}{(t - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2} + i\, \frac{\beta_\lambda}{(t - \alpha_\lambda)^2 + \beta_\lambda^2}\,,$$

то интеграл

$$\int\limits_{-h}^{h} \frac{dt}{t-t_\lambda} = \left[\frac{1}{2}\ln\bigl((t-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2\bigr) + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{t-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(h-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}{(h+\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2} + i\Bigl(\mathrm{arctg}\,\frac{h-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} + \mathrm{arctg}\,\frac{h+\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\Bigr).$$

При $h \to +\infty$ первое слагаемое (вещественная часть) в последнем выражении стремится к $0,$ а второе — к πi или $-\pi i$ (в зависимости от того, будет ли $\beta_\lambda > 0$ или $\beta_\lambda < 0$). Поэтому приходим к такому результату

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = \pi i \sum_\lambda A_\lambda^1 \,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\, t_\lambda, \tag{5}$$

где мнимая часть $\mathrm{Im}\, t_\lambda = \beta_\lambda$.

Формулу (5) можно изменить на основании следующих соображений.

Умножим обе части равенства (4) на t. Предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tP(t)}{Q(t)} = 0,$$

так как имеет место соотношение (3) и $\deg\{tP(t)\} < \deg Q(t)$.

Другими словами, левая часть полученного из (4) равенства стремится к нулю.

В правой части в пределе при $t \to \infty$ обращаются в нуль все члены с нелинейными знаменателями, так что и предел суммы остальных членов также равен нулю.

Отсюда

$$\sum_\lambda A_\lambda^1 = 0,$$

поэтому

$$\sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = -\sum_{\lambda}^{-} A_{\lambda}^{1},$$

где $\sum\limits_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1}$ — сумма тех A_{λ}^{1}, которые отвечают $\beta_{\lambda} = \mathrm{Im} t_{\lambda} > 0$, а $\sum\limits_{\lambda}^{-} A_{\lambda}^{1}$ — сумма тех A_{λ}^{1}, которые отвечают $\beta_{\lambda} = \mathrm{Im} t_{\lambda} < 0$.

Это позволяет формулу (5) записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = 2\pi i \sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1}. \tag{6}$$

Итак, получена формула (6) вычисления несобственного интеграла (2).

Теперь рассмотрим вычисление коэффициентов A_{λ}^{1} в случае простого нуля t_{λ} полинома Q, для которого производная $Q'(t_{\lambda}) \neq 0$. В разложении (4) ему отвечает только один член $\dfrac{A_{\lambda}^{1}}{t - t_{\lambda}}$. Для этого обе части равенства (4) умножим на $t - t_{\lambda}$ и представим итоговое равенство в виде

$$\frac{P(t)}{\dfrac{Q(t) - Q(t_{\lambda})}{t - t_{\lambda}}} = A_{\lambda}^{1} + (t - t_{\lambda}) R(t), \tag{7}$$

что возможно, ибо $Q(t_{\lambda}) = 0$.

В равенстве (7) $R(t)$ представляет группу членов, оставшихся конечными при $t \to t_{\lambda}$.

Переходя в равенстве (7) к пределу при $t \to t_{\lambda}$, получаем

$$A_{\lambda}^{1} = \frac{P(t_{\lambda})}{Q'(t_{\lambda})}\,. \tag{8}$$

Одним из примеров приложения формул (6) и (8) является интеграл из формулы (1).

Корнями уравнения

$$1 + t^{2n} = 0$$

являются комплексные числа

$$t_\lambda = \cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} + i\,\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}\,,\ \lambda = \overline{0, 2n-1}\,,$$

но лишь первые n из них имеют положительные мнимые части (без учёта периода):

$$\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} > 0 \iff 0 < \frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} < \pi \iff$$

$$\iff 0 < 2\lambda + 1 < 2n \iff -\frac{1}{2} < \lambda < n - \frac{1}{2}\,,$$

то есть, $\lambda = \overline{0, n-1}$.

Очевидно, что $t_\lambda = t_0^{2\lambda+1}$, где $t_0 = \cos\dfrac{\pi}{2n} + i\,\sin\dfrac{\pi}{2n}$.

В соответствии с формулой (8) (с учётом того, что t_λ суть простые корни) имеем:

$$A_\lambda^1 = \frac{t_\lambda^{2m}}{2nt_\lambda^{2n-1}} = \frac{t_\lambda^{2m+1}}{2nt_\lambda^{2n}} = -\frac{t_\lambda^{2m+1}}{2n}\,,$$

ибо

$$t_\lambda^{2n} = \cos(2\lambda+1)\pi + i\,\sin(2\lambda+1)\pi = -1,\ \lambda = \overline{0, n-1}\,.$$

Поэтому

$$A_\lambda^1 = -\frac{1}{2n}\,t_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}\,.$$

А тогда

$$\sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = -\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=0}^{n-1} t_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

и получим сумму n членов геометрической прогрессии

$$t_0^{2m+1},\ (t_0^{2m+1})^3,\ (t_0^{2m+1})^5,\ \ldots\ ,\ (t_0^{2m+1})^{2n-1}$$

со знаменаталем $q = t_0^{2(2m+1)}$.

Стало быть,

$$\sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{t_0^{2m+1} - t_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - t_0^{2(2m+1)}}\,.$$

Поскольку $t_0^{2n} = -1$, то

$$t_0^{(2m+1)(2n+1)} = \left(t_0^{2n}\right)^{2m+1} t_0^{2m+1} = -\,t_0^{2m+1},$$

и

$$\sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{t_0^{2m+1}}{1 - t_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{t_0^{2m+1} - t_0^{-(2m+1)}}\,.$$

Теперь учтём, что

$$t_0^{\pm(2m+1)} = \cos\frac{(2m+1)}{2n}\,\pi \pm i\,\sin\frac{(2m+1)}{2n}\,\pi,$$

поэтому

$$t_0^{(2m+1)} - t_0^{-(2m+1)} = 2i\,\sin\frac{2m+1}{2n}\,\pi,$$

и получаем:

$$\sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = -\frac{1}{2ni\,\sin\dfrac{(2m+1)}{2n}\,\pi}\,.$$

Отсюда, по формуле (6), устанавливаем, что при $m < n$ несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2m}}{1+t^{2n}}\,dt = 2\pi i \sum_{\lambda}^{+} A_{\lambda}^{1} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \dfrac{2m+1}{n}\,\pi}\,.$$

Формула (1) доказана. ■

Свойство 1. *При* $0 < a < 1$ *имеет место формула дополнения*

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \ \ (0 < a < 1). \tag{9}$$

Доказательство. В формуле (1.5) положим $b = 1 - a$, считая $0 < a < 1$, тогда

$$B(a, 1-a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx. \tag{10}$$

Используем формулу (1), которая в силу чётности подынтегральной функции допускает запись в виде

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}}\,dy = \frac{\pi}{2n\,\sin \dfrac{2m+1}{2n}\,\pi}\,,\ m < n,\ m, n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Заменой

$$y = x^{\frac{1}{2n}},$$

при которой

$$1 + y^{2n} = 1 + x,\ \ y^{2m}\,dy = \frac{1}{2n}\,x^{\frac{2m}{2n}}\,x^{\frac{1}{2n}-1}\,dx = \frac{1}{2n}\,x^{\frac{2m+1}{2n}-1}\,dx,$$

из (11) получаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \dfrac{2m+1}{2n}\,\pi}\,, \;\; m < n,\; m, n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Сравнивая (10) и (12), приходим к выводу, что интеграл (10) вычислен в частном случае, когда

$$a = \frac{2m+1}{2n}\,,\; m < n,\; m, n \in \mathbb{N},$$

при этом неравенство $m < n$ обеспечивает оценку $\dfrac{2m+1}{2n} < 1.$

Поэтому к любому $a \in (0;1)$ можно произвольно приблизиться дробью $\dfrac{2m+1}{2n}$ при $m < n,\; m, n \in \mathbb{N}.$

Переходя в равенстве (12) к пределу при $\dfrac{2m+1}{2n} \to a,$ будем иметь, что

$$\lim\limits_{\frac{2m+1}{2n} \to a} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,,$$
$$m < n,\; m, n \in \mathbb{N},\; 0 < a < 1,\; a \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Если докажем непрерывность функции

$$F\colon a \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx,\; \forall a \in (0;1), \tag{14}$$

на интервале $(0;1),$ то из равенства (13) получим необходимое равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,,\ \forall a \in (0;1),$$

из которого в силу (10) следует формула дополнения (9).

Для непрерывности функции $F\colon (0;1) \to \mathbb{R}$, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра, (14) с непрерывной подынтегральной функцией

$$\Phi\colon (a,x) \to \frac{x^{a-1}}{1+x}$$

на открытом множестве $\{(a,x)\colon 0 < a < 1,\ x > 0\}$, достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (14) на $(0;1)$.

Интеграл (14) обладает двумя несобственностями: первого рода по верхнему пределу интегрирования $+\infty$ и второго рода в точке $x = 0$ — по нижнему пределу интегрирования 0. Поэтому предварительно рассмотрим два несобственных интеграла, зависящих от параметра,

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx \quad (0 < a < 1) \tag{15}$$

и

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx \quad (0 < a < 1). \tag{16}$$

Равномерную сходимость на интервале $(0;1)$ каждого из интегралов (15) и (16) установим посредством признака Вейерштрасса (теорема 1.3.1).

Пусть a_0 есть произвольное фиксированное число из интервала $(0;1)$. Тогда

$$x^a \leqslant x^{a_0},\ \forall x \in (0;1),\ \forall a \in [a_0;1),$$

и

$$\frac{x^a}{1+x} \leqslant \frac{x^{a_0}}{1+x}\,,\ \forall x \in (0;1),\ \forall a \in [a_0;1). \tag{17}$$

Поскольку

$$\frac{x^{a_0-1}}{1+x} = O\Big(\frac{1}{x^{1-a_0}}\Big) \quad \text{при} \quad x \to +0,$$

когда $0 < 1 - a_0 < 1,$ а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-a_0}}$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^{a_0-1}}{1+x}\,dx,$ который не зависит от параметра $a.$

Тогда в силу оценки (17), по признаку Вейерштрасса, интеграл (15) сходится равномерно и абсолютно на интервале $(0;1).$

Здесь учтена произвольность выбора числа a_0 так, чтобы $0 < a_0 \leqslant a < 1.$

Рассмотрим интеграл (16). Пусть a_1 — произвольное фиксированное число из интервала $(0;1).$ Тогда

$$x^a \leqslant x^{a_1},\ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall a \in (0;a_1],$$

и

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \leqslant \frac{x^{a_1-1}}{1+x}\,,\ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall a \in (0;a_1], \tag{18}$$

причём функция в правой части этого неравенства не зависит от параметра $a.$

Поскольку

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^{a_1-1}}{1+x} : \frac{1}{x^{2-a_1}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = 1,$$

то есть,

$$\frac{x^{a_1-1}}{1+x} \sim \frac{1}{x^{2-a_1}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

а интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{2-a_1}}$, когда $1 < 2 - a_1 < 2,$ сходится, то, по предельному признаку сравнения, сходится и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{x^{a_1-1}}{1+x}\, dx.$

Отсюда в соответствии с признаком Вейерштрасса (учитывая оценку (18)) интеграл (16) равномерно и абсолютно сходится на интервале $(0;1)$.

По свойству аддитивности, применённому к несобственным интегралам (15) и (16), делаем вывод о равномерной (и абсолютной) сходимости на интервале $(0;1)$ интеграла (14). ■

Например, по формуле дополнения (9)

$$B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\Big) = B\Big(\frac{1}{2}\,, 1 - \frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \pi,$$

и получаем весьма оригинальную формулу

$$B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\Big) = \pi. \tag{19}$$

Пример 1. Эйлеров интеграл первого рода

$$\int\limits_0^1 x^{1\frac{1}{3}}\,(1-x)^{2\frac{2}{3}}\,dx = B\Big(2\frac{1}{3}\,, 3\frac{2}{3}\Big).$$

Последовательно используем формулы приведения (1.4) и (2.4):

$$B\Big(\frac{7}{3}\,, \frac{11}{3}\Big) = \frac{\dfrac{11}{3} - 1}{\dfrac{7}{3} + \dfrac{11}{3} - 1}\, B\Big(\frac{7}{3}\,, \frac{11}{3} - 1\Big) = \frac{8}{3\cdot 5}\, B\Big(\frac{7}{3}\,, \frac{8}{3}\Big) =$$

$$= \frac{8}{3\cdot 5}\cdot \frac{\dfrac{8}{3} - 1}{\dfrac{7}{3} + \dfrac{8}{3} - 1}\, B\Big(\frac{7}{3}\,, \frac{8}{3} - 1\Big) = \frac{2}{3^2}\, B\Big(\frac{7}{3}\,, \frac{5}{3}\Big) =$$

$$= \frac{2}{3^2} \cdot \frac{\frac{5}{3} - 1}{\frac{7}{3} + \frac{5}{3} - 1} \, B\Big(\frac{7}{3}, \frac{5}{3} - 1\Big) = \frac{4}{3^4} \, B\Big(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\Big) =$$

$$= \frac{4}{3^4} \cdot \frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{7}{3} + \frac{2}{3} - 1} \, B\Big(\frac{7}{3} - 1, \frac{2}{3}\Big) = \frac{2^3}{3^5} \, B\Big(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\Big) =$$

$$= \frac{2^3}{3^5} \cdot \frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - 1} \, B\Big(\frac{4}{3} - 1, \frac{2}{3}\Big) = \frac{2^3}{3^6} \, B\Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big).$$

По формуле дополнения (9),

$$B\Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big) = B\Big(\frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\,.$$

Стало быть,

$$\int\limits_0^1 x^{1\frac{1}{3}} \, (1 - x)^{2\frac{2}{3}} \, dx = \frac{2^4\sqrt{3}}{3^7} \, \pi.$$

7. Примеры

Интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1 - x^b)^{c-1} \, dx = \frac{1}{b} \, B\Big(\frac{a}{b}, c\Big) \quad (a > 0, \; b > 0, \; c > 0). \qquad (1)$$

Доказательство. Если $0 < a < 1$, то нижний предел интегрирования 0 является точкой несобственности интеграла, а при $0 < c < 1$ верхний предел интегрирования 1 является точкой несобственности интеграла.

С учётом этих обстоятельств выполним подстановку

$$x^b = y,$$

при которой

$$bx^{b-1}\,dx = dy \quad \text{или} \quad dx = \frac{1}{b}\,y^{\frac{1-b}{b}}\,dy,$$

новая переменная $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 1$ при $x = 1$.

Тогда при $a > 0, b > 0$ и $c > 0$ интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x^b)^{c-1}\,dx = \frac{1}{b}\int\limits_0^1 y^{\frac{a}{b}-1}(1-y)^{c-1}\,dy = \frac{1}{b}\,B\Big(\frac{a}{b}\,, c\Big). \blacksquare$$

Пример 1. $\displaystyle\int\limits_0^1 x\,\sqrt[3]{1-x^3}\;dx = \int\limits_0^1 x^{2-1}(1-x^3)^{\frac{4}{3}-1}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}\,B\Big(\frac{2}{3}\,, \frac{4}{3}\Big) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\dfrac{4}{3}-1}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}-1}\,B\Big(\frac{2}{3}\,, \frac{4}{3}-1\Big) =$$

$$= \frac{1}{9}\,B\Big(\frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{9}\,B\Big(1-\frac{1}{3}\,, \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\,\pi.$$

Пример 2. При натуральном $n > 1$ интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \int\limits_0^1 x^{1-1}(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}-1}\,dx = \frac{1}{n}\,B\Big(\frac{1}{n}\,, 1-\frac{1}{n}\Big) = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}\,.$$

Пример 3. $\displaystyle\int\limits_0^\gamma x^2\sqrt{\gamma^2-x^2}\;dx = \gamma^4\int\limits_0^\gamma \Big(\frac{x}{\gamma}\Big)^2\sqrt{1-\Big(\frac{x}{\gamma}\Big)}\;d\Big(\frac{x}{\gamma}\Big) =$

$$= \gamma^4 \int\limits_0^1 \zeta^2 (1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}\, d\zeta = \gamma^4 \cdot \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{3}{2}\,, \frac{3}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\gamma^4}{2} \cdot \frac{\dfrac{3}{2}-1}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-1}\, B\Big(\frac{3}{2}-1, \frac{3}{2}\Big) = \frac{\gamma^4}{8}\, B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{3}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\gamma^4}{8} \cdot \frac{\dfrac{3}{2}-1}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}-1}\, B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{3}{2}-1\Big) = \frac{\gamma^4}{16}\, B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\Big) = \frac{\gamma^4}{16}\,\pi \quad (\text{при } \ \gamma > 0).$$

Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^a}{(\alpha+\beta x^{\lambda})^b}\, dx = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\frac{a+1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda\alpha^b}\, B\Big(\frac{a+1}{\lambda}\,, b - \frac{a+1}{\lambda}\Big)$$
$$\Big(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \frac{a+1}{\lambda} < q\Big). \tag{2}$$

Доказательство. С учётом замены

$$x = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\, t\Big)^{\frac{1}{\lambda}},\ \forall t \in (0;\, +\infty),$$

интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^a}{(\alpha+\beta x^{\lambda})^b}\, dx = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\frac{a+1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda\alpha^b} \cdot \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^{\frac{a+1}{\lambda}-1}}{(1+t)^b}\, dt =$$

$$= \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\frac{a+1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda\alpha^b}\, B\Big(\frac{a+1}{\lambda}\,, b - \frac{a+1}{\lambda}\Big)$$

при $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \dfrac{a+1}{\lambda} < b.$ ■

Пример 4. При $a = \nu - 1,\ \lambda = \beta = b = 1$ на основании формулы (2) имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\nu-1}}{1+x^\lambda}\,dx = \frac{1}{\lambda}\,B\Big(\frac{\nu}{\lambda}, 1-\frac{\nu}{\lambda}\Big) = \frac{\pi}{\lambda\sin\dfrac{\pi\nu}{\lambda}}\,,$$

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ 0 < \nu < \lambda.$$

Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\nu-1}}{1+x^\lambda}\,dx = \frac{\pi}{\lambda\sin\dfrac{\pi\nu}{\lambda}} \quad (0 < \nu < \lambda). \tag{3}$$

Пример 5. При $\nu = 1$ формула (3) будет иметь вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\lambda} = \frac{\pi}{\lambda\sin\dfrac{\pi}{\lambda}} \quad (\lambda > 1). \tag{4}$$

Формула (4) позволяет весьма просто вычислять интегралы, которые при непосредственном интегрировании по формуле Ньютона — Лейбница требуют значительное количество элементарных преобразований.

Пример 6. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi}{3\sin\dfrac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}\,.$

Пример 7. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4\sin\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}\,.$

Пример 8. $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\pi}{\lambda\sin\dfrac{\pi}{\lambda}} = 1.$

Пример 9. При $a > 1$ интеграл (с учётом формул (4) и (3))

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{1+x^{2a}}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2a}} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^{2a}}\,dx = \frac{\pi}{2a\sin\dfrac{\pi}{2a}} +$$

$$+ \frac{\pi}{2a\sin\dfrac{\pi(a+1)}{2a}} = \frac{\pi}{2a\sin\dfrac{\pi}{2a}} + \frac{\pi}{2a\cos\dfrac{\pi}{2a}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{\sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2a}+\dfrac{\pi}{4}\Bigr)}{\sin\dfrac{\pi}{a}}\,.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{1+x^{2a}}\,dx = \sqrt{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{a}\,\sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2a}+\dfrac{\pi}{4}\Bigr)}{\sin\dfrac{\pi}{a}} = 1.$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\cos^b x\,dx = \frac{1}{2}\,B\Bigl(\frac{a+1}{2}\,,\frac{b+1}{2}\Bigr),$$
$$\forall a,b\in(-1;\,+\infty). \tag{5}$$

Доказательство. Если $-1 < a < 0$, то нижний предел интегрирования 0 является точкой несобственности интеграла, а при $-1 < b < 0$ верхний предел интегрирования $\dfrac{\pi}{2}$ является точкой несобственности интеграла.

С учётом этих обстоятельств выполним подстановку

$$\sin x = \sqrt{t}\,,$$

при которой

$$\cos x = \sqrt{1-t}\,,\ \ \cos x\,dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad \text{или} \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}\,,$$

новая переменная $t=0$ при $x=0$ и $t=1$ при $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда при $a>-1$ и $b>-1$ интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,B\Big(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\Big). \blacksquare$$

Формальной заменой a на $a-1$, b на $b-1$ формулу (5) приводим к виду

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x\,dx = \frac{1}{2}\,B\Big(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\Big),\ \forall a,b\in(0;+\infty). \qquad (6)$$

В частных случаях (при $b=1$ и $a=1$) формула (6) будет иметь вид

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} x\,dx = \frac{1}{2}\,B\Big(\frac{a}{2},\frac{1}{2}\Big),\ \forall a\in(0;+\infty). \quad (7)$$

Пример 10. Интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}\,B\Big(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{7}{4}-1}{\frac{7}{4}+\frac{5}{4}-1}\cdot B\Big(\frac{7}{4}-1,\frac{5}{4}\Big) = \frac{3}{16}\,B\Big(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\Big) =$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{5}{4} - 1} \cdot B\Big(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} - 1\Big) = \frac{3}{64}\, B\Big(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\Big) =$$

$$= \frac{3}{64}\, B\Big(1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\Big) = \frac{3}{64} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{64}\, \pi.$$

Пример 11. Интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^a x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^{-a} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{a+1}{2}, \frac{-a+1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{a+1}{2}, 1 - \frac{a+1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{a+1}{2}\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi a}{2}} \quad (|a| < 1).$$

Итак,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^a x\, dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} \quad (|a| < 1).$$

Пример 12. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\big(\alpha x + \beta(1-x) + \gamma\big)^{a+b}}\, dx$$

при $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma > 0,\ a > 0,\ b > 0.$

Пусть

$$\frac{(\alpha+\gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t.$$

Тогда

$$1-t=\frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma},\quad \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{\bigl(\alpha x+\beta(1-x)+\gamma\bigr)^2}\,dx=dt,$$

новая переменная $t=0$ при $x=0$ и $t=1$ при $x=1$.

Следовательно, при $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\gamma>0$, $a>0$, и $b>0$ интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\bigl(\alpha x+\beta(1-x)+\gamma\bigr)^{a+b}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{(\alpha+\gamma)^a(\beta+\gamma)^b}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt=\frac{B(a,b)}{(\alpha+\gamma)^a(\beta+\gamma)^b}\,.$$

Пример 13. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)^a(\beta-x)^b}{(x+\gamma)^{a+b+2}}\,dx$$

при $0<\alpha<\beta,\ \gamma>0,\ a>\,-1,\ b>\,-1.$

Пусть

$$\frac{x-\alpha}{x+\gamma}=\frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma}\,t,\ \forall t\in(0,1).$$

Тогда

$$1-t=\frac{\alpha+\gamma}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-x}{x+\gamma},\quad \frac{\alpha+\gamma}{(x+\gamma)^2}\,dx=\frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma}\,dt.$$

Следовательно, при $0<\alpha<\beta,\ \gamma>0,\ a>\,-1,\ b>\,-1$ интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)^a(\beta-x)^b}{(x+\gamma)^{a+b+2}}\,dx=\int\limits_\alpha^\beta \Bigl(\frac{x-\alpha}{x+\gamma}\Bigr)^a\Bigl(\frac{\beta-x}{x+\gamma}\Bigr)^b\frac{dx}{(x+\gamma)^2}=$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^{a+b+1}}{(\beta+\gamma)^{a+1}(\alpha+\gamma)^{b+1}} \int\limits_0^1 t^a(1-t)^b\,dt =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^{a+b+1}}{(\beta+\gamma)^{a+1}(\alpha+\gamma)^{b+1}}\, B(a+1, b+1).$$

Пример 14. *Вычислим интеграл*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2a-1}(1-x)^{2b-1}}{(1+x^2)^{a+b}}\,dx$$

при $a>0$ и $b>0$.

Для этого используем подстановку

$$t = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x)^2}{1+x^2},$$

при которой

$$1-t = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x)^2}{1+x^2}, \quad \frac{dx}{(1+x)(1-x)} = \frac{dt}{4t(1-t)},$$

новая переменная $t=0$ при $x=-1$ и $t=1$ при $x=1$.

Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\right)^a\left(\frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\right)^b\frac{dx}{(1+x)(1-x)} =$$

$$= 2^{a+b-2}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = 2^{a+b-2}B(a,b),\ \forall a,b\in(0;\,+\infty).$$

Итак,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2a-1}(1-x)^{2b-1}}{(1+x^2)^{a+b}}\,dx = 2^{a+b-2}B(a,b),\ \forall a,b\in(0;\,+\infty). \quad (8)$$

Пример 15. Интеграл

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\Big)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}\Big)^{\cos 2\alpha} d\varphi \ \ \Big(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Выполним подстановку

$$\operatorname{tg}\varphi = x,$$

при которой переменная $x = -1$ при $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ и $x = 1$ при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Обозначим

$$\cos 2\alpha = 2a - 1,$$

где $0 < a < 1,$ при этом

$$a = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos\alpha^2, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

Тогда (с учётом формулы (8))

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi}\Big)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \Big(\frac{1 + x}{1 - x}\Big)^{2a-1} \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1 + x)^{2a-1}(1 - x)^{2(1-a)-1}}{(1 + x^2)^{a+(1-a)}}\, dx = 2^{a+(1-a)-2} B(a, 1 - a) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sin a\pi} = \frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)} \quad \Big(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,,\ 0 < a < 1\Big).$$

Итак,

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\Big)^{\cos 2\alpha} d\varphi = \frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)} \quad \Big(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\Big).$$

8. Эйлеров интеграл второго рода

Эйлеров интеграл второго рода $\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi$. *Множество равномерной сходимости эйлерова интеграла второго рода.*

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi, \tag{1}$$

по предложению Лежандра, принято называть *эйлеровым интегралом второго рода*. Входящий в его задание параметр p определяет характеристики эйлерового интеграла второго рода.

Интеграл (1) является несобственным, причём при $p < 1$, кроме несобственности первого рода, он обладает и несобственностью второго рода, которая наблюдается в точке $\xi = 0$.

С целью различия этих несобственностей рассмотрим в отдельности два интеграла

$$\int\limits_0^{1} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi \tag{2}$$

и

$$\int\limits_1^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi. \tag{3}$$

Поскольку сужение функции

$$f\colon \xi \to \xi^{p-1}\, e^{-\xi},\ \forall \xi \in (0;\, +\infty), \tag{4}$$

положительно на полуинтервале $(0;1]$, то можем использовать предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла второго рода по отношению к интегралу (2).

Учитывая, что имеет место эквивалентность

$$\xi^{p-1}\, e^{-\xi} \sim \xi^{p-1} \quad \text{при} \quad \xi \to +0,$$

заключаем о сходимости интеграла (2) при $p > 0$ и расходимости при $p \leqslant 0$.

Докажем, что несобственный интеграл первого рода (3) сходится при любом вещественном p. Для этого отметим, что сужение функции (4) положительно на полуоткрытом числовом луче $[1; +\infty)$, и можно использовать предельный признак сравнения Коши для несобственного интеграла первого рода, по которому из того, что

$$\xi^{p-1}\, e^{-\xi} = o(\xi^{-2}) \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty,$$

т.е. функция (4) является бесконечно малой порядка λ, $\lambda > 2$, при $\xi \to +\infty$ при любом $p \in \mathbb{R}$, следует сходимость интеграла (3).

В соответствии с критерием сходимости несобственного интеграла на открытом числовом промежутке и со свойством антимонотонности несобственного интеграла эйлеров интеграл второго рода (1) является сходящимся при $p > 0$ и расходящимся при $p \leqslant 0$, причём при $p > 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{1} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi + \int\limits_1^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi. \tag{5}$$

Предложение 1. *Эйлеров интеграл второго рода* (1) *равномерно сходится на числовом луче* $[p_0; +\infty)$ *при любом положительном* p_0.

Доказательство. Пусть p_0 и p_1 — произвольные фиксированные числа такие, что $0 < p_0 < p_1$. Тогда при

$$0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 \tag{6}$$

имеет место оценка

$$\xi^{p-1} \leqslant \xi^{p_0-1} + \xi^{p_1-1},\ \forall \xi \in (0; +\infty). \tag{7}$$

Действительно, в силу (6) имеют место эквиваленции:

$$p \leqslant p_1 \iff p - p_0 \leqslant p_1 - p_0 \quad \text{и} \quad p_0 \leqslant p \iff p - p_0 \geqslant 0,$$

из которых следует, что $p_1 - p_0 \geqslant p - p_0 > 0.$

Если $\xi \geqslant 1,$ то

$$\xi^{p-p_0} \leqslant \xi^{p_1-p_0}.$$

Если $0 < \xi < 1,$ то

$$\xi^{p-p_0} \leqslant \xi^{p_1-p_0} + 1.$$

Значит,

$$\xi^{p-p_0} \leqslant \xi^{p_1-p_0} + 1, \ \forall \xi \in (0;\, +\infty).$$

Умножая это неравенство на $\xi^{p_0} > 0,$ получаем, что

$$\xi^{p} \leqslant \xi^{p_1} + \xi^{p_0}, \ \forall \xi \in (0;\, +\infty).$$

Отсюда, почленным делением на $\xi > 0,$ устанавливаем неравенство (7).

Интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p_0-1}\, e^{-\xi}\, d\xi \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p_1-1}\, e^{-\xi}\, d\xi,$$

как частные случаи интеграла (1), сходятся, а значит, сходится и интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\xi^{p_0-1} + \xi^{p_1-1}\right) e^{-\xi}\, d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p_0-1}\, e^{-\xi}\, d\xi + \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p_1-1}\, e^{-\xi}\, d\xi.$$

Из неравенства (7) следует, что

$$\xi^{p-1}\, e^{-\xi} \leqslant \xi^{p_0-1}\, e^{-\xi} + \xi^{p_1-1}\, e^{-\xi}, \ \forall \xi \in (0;\, +\infty).$$

Значит, подынтегральная функция

$$\xi^{p-1}\, e^{-\xi} \leqslant \varphi(\xi),\ \forall \xi, p \in (0;\, +\infty),$$

где $\varphi(\xi) = \xi^{p_0-1}\, e^{-\xi} + \xi^{p_1-1}\, e^{-\xi}$.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, несобственный интеграл с параметром p, $p \in (0;\, +\infty)$, (1) равномерно сходится на отрезке $[p_0; p_1]$. А из того, что p_0 и p_1, $0 < p_0 < p_1$, выбраны произвольно приходим к утверждению предложения. ■

9. Определение гамма-функции

Гамма-функция $\Gamma\colon p \to \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi,\ \forall p \in (0;\, +\infty)$. *Множество непрерывности гамма-функции. Дифференцируемость гамма-функции.* $\Gamma^{(l)}\colon p \to \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1} \ln^l \xi e^{-\xi}\, d\xi,\ \forall p \in (0;\, +\infty)$.

Равномерная сходимость эйлерова интеграла второго рода (1.1) позволяет на его основании ввести новую функцию.

Определение 1. *Функцию* Γ *с множеством определения* $D\Gamma = (0;\, +\infty)$, *заданную с помощью эйлерова интеграла второго рода*

$$\Gamma\colon p \to \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi,\ \forall p \in (0;\, +\infty), \tag{1}$$

*назовём **гамма-функцией**.*

Гамма-функция является одной из основных неэлементарных функций.

Теорема 1. *Гамма-функция непрерывна на её множестве определения.*

Доказательство. Подынтегральная функция

$$\Phi\colon (\xi, p) \to \xi^{p-1}\, e^{-\xi},\ \forall \xi, p \in (0;\, +\infty), \tag{2}$$

непрерывна на множестве $\{(\xi, p)\colon \xi > 0,\ p > 0\}$, эйлеров интеграл второго рода (1.1) равномерно сходится на $(0;\, +\infty)$.

Поэтому в соответствии с теоремой о непрерывности функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра, гамма-функция (1) непрерывна. ■

Теорема 2. *Гамма-функция бесконечное число раз непрерывно дифференцируема на множестве определения, а её производная l-го порядка находится по формуле*

$$\Gamma^{(l)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1} \ln^l \xi^l \, e^{-\xi} \, d\xi, \ \forall p \in (0; +\infty). \tag{3}$$

Доказательство. Частная производная подынтегральной функции (2) по параметру p

$$\partial_p \Phi(\xi, p) = \xi^{p-1} \ln \xi \, e^{-\xi},$$

а также частные производные высших порядков

$$\partial_p^l \Phi(\xi, p) = \xi^{p-1} \ln^l \xi \, e^{-\xi}, \ l = 1, 2, \dots ,$$

являются непрерывными функциями на $\{(\xi, p) \colon \xi > 0, \ p > 0\}$.

Если докажем равномерную сходимость на открытом числовом луче $(0; +\infty)$ интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1} \ln^l \xi \, e^{-\xi} \, d\xi, \ l = 1, 2, \dots , \tag{4}$$

то, тем самым, в силу теоремы о непрерывном дифференцировании функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра, докажем формулу (3) и то, что функция $\Gamma^{(l)}$ является непрерывной на открытом числовом луче $(0; +\infty)$ при любом натуральном l.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1} \, |\ln^l \xi| \, e^{-\xi} \, d\xi, \ l \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

с неотрицательной подынтегральной функцией на множестве $\{(\xi, p)\colon \xi > 0,\ p > 0\}$.

Пусть p_0 и p_1 — произвольные фиксированные числа со свойством $0 < p_0 < p_1$. Тогда имеет место неравенство (7.8) при условии (6.8), из которого получаем, что

$$\begin{gathered}\xi^{p-1}\,|\ln^l \xi|\, e^{-\xi} \leqslant \xi^{p_0-1}\,|\ln^l \xi\,|e^{-\xi} + \xi^{p_1-1}\,|\ln^l \xi|\, e^{-\xi},\\ \forall \xi \in (0;\,+\infty),\ l = 1, 2, \ldots\,,\ 0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1,\ p_0 < p_1.\end{gathered} \tag{6}$$

Предварительно рассмотрим два несобственных интеграла

$$\int\limits_0^1 \xi^{p_0-1}\,|\ln^l \xi\,|e^{-\xi}\,d\xi,\ \forall l \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

и

$$\int\limits_1^{+\infty} \xi^{p_0-1}\,\ln^l \xi\, e^{-\xi}\,d\xi,\ \forall l \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

которые не зависят от параметра p.

Поскольку $e^{-\xi} \leqslant 1,\ \forall \xi \in [0;1]$, то из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^1 \xi^{p_0-1}\,|\ln^l \xi|\,d\xi \tag{9}$$

с положительной на интервале $(0;1)$ подынтегральной функцией, по признаку сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла, следует сходимость интеграла (7).

Докажем сходимость интеграла (9). Для этого заменой

$$\xi = \exp\,(-p_0^{-1}\,t),\ \forall t \in [0;\,+\infty),$$

при которой

$$d\xi = -p_0^{-1}\,\exp\,(-p_0^{-1}\,t)\,dt,\ \ t = -p_0\,\ln \xi,$$

при $\xi = 1$ переменная $t = 0$ и $t \to +\infty$ при $\xi \to +0$, интеграл (9) приводим к виду

$$\int\limits_{+\infty}^{0} \exp\bigl(p_0^{-1}(1-p_0)t\bigr)\,|-p_0^{-1}\,t|^l\,(-p_0^{-1})\,\exp(-p_0^{-1}\,t)\,dt =$$

$$= p_0^{-(l+1)} \int\limits_{0}^{+\infty} t^l\, e^{-t}\,dt,$$

который сходится, как частный случай эйлерова интеграла второго рода (1.1), когда $p - 1 = l \geqslant 1$.

Итак, интеграл (7) сходится.

Приступим к доказательству сходимости интеграла (8).

Функция

$$\zeta\colon \xi \to \ln\xi - \xi,\ \forall \xi \in [1;\, +\infty), \tag{10}$$

непрерывна и имеет неположительную производную

$$\mathsf{D}\zeta = \frac{1}{\xi} - 1 = \frac{1-\xi}{\xi} \leqslant 0,\ \forall \xi \in [1;\, +\infty).$$

Поэтому функция (10) убывает на полуоткрытом числовом луче $[1;\, +\infty)$. Если учесть, что $\zeta(1) = -1 < 0$, то $\zeta(\xi) < 0$ при всех $\xi \in [1;\, +\infty)$, то есть,

$$0 \leqslant \ln\xi < \xi,\ \forall \xi \in [1;\, +\infty).$$

Отсюда

$$0 \leqslant \ln^l \xi < \xi^l,\ \forall \xi \in [1;\, +\infty),\ \forall l \in \mathbb{N},$$

но тогда у интеграла (8) подынтегральная функция

$$0 \leqslant \xi^{p_0 - 1}\,\ln^l \xi\, e^{-\xi} < \xi^{l + p_0 - 1}\, e^{-\xi},$$

$$\forall \xi \in [1;\, +\infty),\ \forall l \in \mathbb{N},\ p_0 > 0.$$

Поэтому из сходимости интеграла

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \xi^{l+p_0-1}\, e^{-\xi}\, d\xi,\ l \in \mathbb{N},\ p_0 > 0, \tag{11}$$

с положительной на промежутке $[1; +\infty)$ подынтегральной функцией, по признаку сравнения абсолютной сходимости несобственного интеграла, следует сходимость интеграла (8).

Несобственный интеграл (11) является частным случаем эйлерова интеграла второго рода (1.1), когда $p - 1 = l + p_0 - 1 > 0$, и поэтому сходится.

Таким образом, доказана сходимость интегралов (7) и (8), а значит, в соответствии с критерием сходимости несобственного интеграла на открытом числовом промежутке сходится и интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \xi^{p_0-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi = \int\limits_{0}^{1} \xi^{p_0-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_{1}^{+\infty} \xi^{p_0-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi,\ \forall l \in \mathbb{N},\ p_0 > 0.$$

Совершенно аналогично, заменив формально p_0 на p_1, доказываем сходимость интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \xi^{p_1-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi,\ \forall l \in \mathbb{N},\ p_1 > 0.$$

Теперь, по свойству линейности несобственного интеграла, устанавливаем, что сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \big(\xi^{p_0-1} + \xi^{p_1-1}\big)\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \xi^{p_0-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} \xi^{p_1-1}\, |\ln^l \xi|\, e^{-\xi}\, d\xi,$$

$$\forall l \in \mathbb{N},\ 0 < p_0 < p_1.$$

В силу (6), по признаку Вейерштрасса, заключаем о равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, (5) на отрезке $[p_0; p_1]$. Поскольку числа p_0 и p_1 выбраны произвольно с одним лишь условием $0 < p_0 < p_1$, то интеграл (5) равномерно сходится на числовом луче $(0; +\infty)$.

Значит, интеграл (3) сходится равномерно и абсолютно на открытом числовом луче $(0; +\infty)$. ■

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^a \exp(-x^b)\, dx,$$

зависящий от параметров a и b, выразим через гамма-функцию. Для этого выполним замену

$$x = t^{\frac{1}{b}},\ \forall t \in (0; +\infty),$$

при которой

$$dx = \frac{1}{b}\, t^{\frac{1}{b}-1}\, dt,\ \forall t \in (0; +\infty),$$

а новая переменная $t \to +0$ при $x \to +0$ и $t \to +\infty$ при $x \to +\infty$, когда $b > 0$; $t \to +0$ при $x \to +\infty$ и $t \to +\infty$ при $x \to +0$, когда параметр $b < 0$.

Тогда, если $b > 0$, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^a \exp(-x^b)\, dx = \frac{1}{b} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{a+1}{b}-1}\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{b}\, \Gamma\Big(\frac{a+1}{b}\Big),\ \forall a \in (-1; +\infty),\ \forall b \in (0; +\infty),$$

а если $b<0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} x^a \exp(-x^b)\,dx = \frac{1}{b}\int\limits_{+\infty}^{0} t^{\frac{a+1}{b}-1}\, e^{-t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{b}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{a+1}{b}-1}\, e^{-t}\,dt = -\frac{1}{b}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{b}\Big),$$

$$\forall a\in(-\infty;\,-1),\ \forall b\in(-\infty;0).$$

Итак, объединяя оба результата, получаем формулу

$$\int\limits_0^{+\infty} x^a \exp(-x^b)\,dx = \frac{1}{|b|}\,\Gamma\Big(\frac{a+1}{b}\Big) \tag{12}$$

при $\dfrac{a+1}{b}>0.$

10. Формула приведения

Формулы приведения: $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p), \forall p\in(0;\,+\infty),\ \Gamma(p+n)= = (p+n-1)(p+n-2)\cdot\ldots\cdot(p+1)p\,\Gamma(p), \forall p\in(0;\,+\infty), \forall n\in\mathbb{N},\ \Gamma(n+1)= = n!, \forall n\in\mathbb{N}.$

Свойство 1. *Для гамма-функции имеет место формула приведения*

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p),\ \forall p\in(0;\,+\infty). \tag{1}$$

Доказательство. Положим

$$u=\xi^p,\ \ dv=e^{-\xi}\,d\xi.$$

Тогда при $p>0$ находим

$$du=p\xi^{p-1}\,d\xi,\ \ v=-e^{-\xi}.$$

Интегрированием по частям устанавливаем, что

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} \xi^p \, e^{-\xi} \, d\xi = -\Big[\xi^p \, e^{-\xi}\Big]_0^{+\infty} +$$

$$+ p \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1} \, e^{-\xi} \, d\xi = p\,\Gamma(p), \ \forall p \in (0; +\infty). \blacksquare$$

Повторное применение формулы приведения (1) даёт формулу

$$\begin{gathered} \Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \cdot \ldots \cdot (p+1)p\,\Gamma(p), \\ \forall p \in (0; +\infty), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{2}$$

Формула (2) позволяет *свести вычисление гамма-функции для сколь угодно большого значения аргумента к вычислению гамма-функции от аргумента, меньшего единицы.*

Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi} \, d\xi = -\Big[e^{-\xi}\Big]_0^{+\infty} = 1,$$

то

$$\Gamma(1) = 1. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) следует

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Пример 1. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^3 \, e^{-\xi} \, d\xi = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Формулу (4) можно рассматривать как формулу вычисления факториала натурального числа посредством гамма-функции

$$n! = \Gamma(n+1).$$

Поэтому гамма-функция является обобщением факториала. С помощью гамма-функции понятие факториала можно распространить на множество положительных вещественных чисел, приняв, по определению, что

$$\alpha! = \Gamma(\alpha + 1),\ \forall \alpha \in (0;\ +\infty).$$

Так,

$$(0{,}3)! = \Gamma(0{,}3 + 1) = 0{,}3\,\Gamma(0{,}3),$$

$$\Big(\frac{5}{3}\Big)! = \Gamma\Big(\frac{5}{3} + 1\Big) = \frac{5}{3}\,\Gamma\Big(\frac{5}{3}\Big) = \frac{5}{3}\,\Gamma\Big(\frac{2}{3} + 1\Big) =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\,\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big) = \frac{10}{9}\,\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big),$$

$$e! = \Gamma(e + 1) = \Gamma\big((e-2) + 3\big) =$$

$$= \big((e-2)+2\big)\big((e-2)+1\big)(e-2)\,\Gamma(e-2) = e(e-1)(e-2)\,\Gamma(e-2),$$

$$\pi! = \Gamma(\pi + 1) = \Gamma\big((\pi - 3) + 4\big) =$$

$$= \big((\pi - 3) + 3\big)\big((\pi - 3) + 2\big)\big((\pi - 3) + 1\big)(\pi - 3)\,\Gamma(\pi - 3) =$$

$$= \pi(\pi - 1)(\pi - 2)(\pi - 3)\,\Gamma(\pi - 3).$$

11. Исследование гамма-функции и построение её графика

Выпуклость. Экстремум. Асимптота. Множество значений.

Предложение 1. *Гамма-функция является выпуклой на её множестве определения.*

Действительно, вторая производная

$$\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\ln^2\xi\, e^{-\xi}\,d\xi > 0,\ \forall p \in (0;\ +\infty),$$

так как подынтегральная функция неотрицательная

$$\xi^{p-1} \ln^2 \xi \, e^{-\xi} \geqslant 0, \ \forall \xi, p \in (0; +\infty).$$

Это означает выпуклость гамма-функции на открытом числовом луче $(0; +\infty)$.

Предложение 2. *Гамма-функция* (1.2) *имеет единственную точку экстремума* $p = \widetilde{p}$, *являющуюся точкой минимума, которая лежит на интервале* $(1; 2)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1! \, \Gamma(1) = \Gamma(1) = 1,$$

то есть,

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1. \tag{1}$$

По теореме Ролля, из того, что имеет место закономерность (1), следует существование точки $\widetilde{p} \in (1; 2)$, в которой производная $\Gamma'(\widetilde{p}\,) = 0$.

Поскольку

$$\Gamma''(p) > 0, \ \forall p \in (0; +\infty),$$

то функция Γ' является возрастающей на числовом луче $(0; +\infty)$, и поэтому нет двух различных $\widetilde{p}_1$ и $\widetilde{p}_2$ таких, что

$$\Gamma'(\widetilde{p}_1) = \Gamma'(\widetilde{p}_2).$$

Это доказывает единственность точки экстремума $p = \widetilde{p}$ у гамма-функции.

То, что $p = \widetilde{p}$ — точка минимума гамма-функции, следует из её выпуклости, то есть, из того, что вторая производная

$$\Gamma''(p) > 0, \ \forall p \in (0; +\infty),$$

а значит,

$$\Gamma'(p) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < p < \widetilde{p} \quad \text{и} \quad \Gamma'(p) > 0 \quad \text{при} \quad p > \widetilde{p}\,. \ \blacksquare$$

Приближённые значения точки минимума $\widetilde{p}$ и самого минимума таковы:

$$\widetilde{p} \approx 1{,}4616\ldots, \quad \Gamma(\widetilde{p}\,) \approx 0{,}8856\ldots .$$

Поскольку гамма-функция непрерывна на открытом числовом луче $(0;\,+\infty)$ (теорема 1.9) и имеет единственную точку экстремума $p=\widetilde{p}$, которая является точкой минимума, то в этой точке минимума гамма-функция Γ достигает своего наименьшего значения

$$\min_{(0;+\infty)} \Gamma(p) = \Gamma(\widetilde{p}\,) \approx 0{,}8856\ldots . \qquad (2)$$

Предложение 3. *Прямая* $p=0$ *суть вертикальная асимптота графика гамма-функции* $\Gamma\colon p \to \Gamma(p), D\Gamma = (0;\,+\infty)$.

Доказательство. Из непрерывности гамма-функции Γ на открытом луче $(0;\,+\infty)$ следует, что

$$\lim_{p\to+0} \Gamma(p+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Поэтому в силу формулы приведения (1.10) и

$$\lim_{p\to+0} \Gamma(p) = +\infty$$

гамма-функция

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \sim \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p \to +0, \qquad (3)$$

то есть, $p=0$ — вертикальная асимптота графика гамма-функции Γ. Причём при стремлении переменной p к нулю справа гамма-функция (1.9), оставаясь определённо положительной, неограниченно возрастает. ■

Если учесть, что у гамма-функции есть наименьшее значение (2) и выполняется соотношение (3), а сама гамма-функция непрерывна на $(0;\,+\infty)$, то приходим к следующему утверждению.

Предложение 4. *Множеством значений гамма-функций* (1.9) *является полуоткрытый числовой луч*

$$E\Gamma = \Big[\min_{(0;+\infty)} \Gamma(p);\,+\infty\Big).$$

Предложение 5. *Предел*

$$\lim_{p\to+\infty}\Gamma(p) = +\infty.$$

Доказательство. Гамма-функция Γ возрастает на полуоткрытом числовом луче $[\widetilde{p};\,+\infty)$, так как производная

$$\Gamma'(p) > 0,\ \forall p \in (\widetilde{p};\,+\infty),$$

где $\widetilde{p}$ — точка минимума гамма-функции.

Кроме того,

$$\Gamma(p) > n!,\ \forall p \in (n+1;\,+\infty),$$

при любом натуральном n, так как $\Gamma(n+1) = n!$.

Всё это обеспечивает, что

$$\Gamma(p) \to +\infty \quad \text{при} \quad p \to +\infty. \blacksquare$$

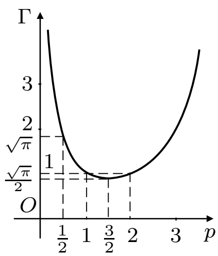

Рис. 1

На рисунке 1 с учётом полученных в пункте 9 и в этом пункте свойств схематически построен график гамма-функции (1.9) в прямоугольной декартовой системе координат $Op\Gamma$.

12. Формула связи между бета- и гамма-функциями

Формула Эйлера $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $\forall p,q \in (0;\,+\infty)$.

Теорема 1. *Связь между бета- и гамма-функциями устанавливается формулой Эйлера*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,,\ \forall p,q \in (0;\,+\infty). \tag{1}$$

Доказательство Дирихле. Пусть

$$\xi = tx,$$

где $t > 0$. Тогда $d\xi = t\,dx$, $x = 0$ при $\xi = 0$ и $x \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$, а гамма-функция с учётом задания (1.9) примет вид

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} \xi^{p-1}\, e^{-\xi}\, d\xi = t^p \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-tx}\, dx, \ \forall p, t \in (0; +\infty).$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\, e^{-tx}\, dx, \ \forall p, t \in (0; +\infty).$$

Заменяя p на $p+q$ и одновременно t на $t+1$, получаем:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x}\, dx,$$

$$\forall (p+q) \in (0; +\infty), \ \forall t \in (-1; +\infty).$$

Умножим обе части этого тождества на t^{p-1} при положительных t, p и q:

$$\Gamma(p+q)\, \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = t^{p-1} \int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x}\, dx.$$

Выполним при положительных p и q почленное интегрирование полученного тождества по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q) \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\, dt \int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x}\, dx$$

или, учитывая представление (1.5), получаем, что

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q)=\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\,e^{-(1+t)x}\,dx.$$

Если допустимо изменить порядок интегрирования, то

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\,e^{-x}\,dx\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,e^{-tx)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\,e^{-x}\,\Gamma(p)\,x^{-p}\,dx=\Gamma(p)\int\limits_0^{+\infty} x^{q-1}\,e^{-x}\,dx=$$

$$=\Gamma(p)\,\Gamma(q),\ \forall p,q\in(0;\,+\infty).$$

Итак,

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q)=\Gamma(p)\,\Gamma(q),\ \forall p,q\in(0;\,+\infty),$$

что соответствует формуле Эйлера (1) с учётом того, что гамма-функция не имеет нулей.

Таким образом, доказательство теоремы будет завершено, если докажем равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,dt\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\,e^{-(1+t)x}\,dx=\\ =\int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\,e^{-x}\,dx\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\,e^{-tx}\,dt,\ \forall p,q\in(0;\,+\infty),\end{gathered}\tag{2}$$

то есть, в повторном дважды несобственном интеграле

$$\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\, x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x}\, dx$$

можно изменить порядок интегрирования.

Пусть $p > 1$ и $q > 1$. Тогда подынтегральная функция

$$\Phi\colon (t,x) \to t^{p-1}\, x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x},\ \forall (t,x) \in \{(t,x)\colon t > 0,\ x > 0\},$$

непрерывна.

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi(t,x)\, dt = x^{p+q-1}\, e^{-x} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-tx}\, dt =$$

$$= \Gamma(p)\, x^{q-1}\, e^{-x},\ \forall p, q \in (1;\, +\infty),$$

является функцией переменной x, непрерывной на полуоткрытом числовом луче $[0;\, +\infty)$, а интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi(t,x)\, dx = t^{p-1} \int\limits_0^{+\infty} x^{p+q-1}\, e^{-(1+t)x}\, dx =$$

$$= \Gamma(p+q)\, \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,,\ \forall p, q \in (1;\, +\infty),$$

является функцией переменной t, непрерывной на полуоткрытом числовом луче $[0;\, +\infty)$.

Кроме того, существует повторный несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} \Phi(t,x)\, dt = \Gamma(p)\, \Gamma(q),\ \forall p, q \in (1;\, +\infty).$$

Всё это обеспечивает выполнение условий теоремы 1 об интегрировании функции, определяемой несобственным интегралом, зависящим от параметра, в несобственном смысле, по которой устанавливаем равенство (2), но только при $p > 1,\ q > 1$.

Значит, при $p > 1,\ q > 1$ имеет место формула (1).

Докажем формулу Эйлера (1) при $p > 0,\ q > 0$.

Если $p > 0,\ q > 0$, то, по доказанному, имеем:

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\,. \tag{3}$$

По формулам приведения (1.4) и (2.4) для бета-функции,

$$\begin{gathered} B(p+1, q+1) = \frac{p}{p+q+1}\, B(p, q+1) = \\ = \frac{pq}{(p+q)\,(p+q+1)}\, B(p,q),\ \forall p, q \in (0;\ +\infty). \end{gathered} \tag{4}$$

По формуле приведения (1.10) для гамма-функции находим:

$$\begin{gathered} \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p\,\Gamma(p)\,q\,\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\,\Gamma(p+q)} = \\ = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} \cdot \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\,,\ \forall p, q \in (0;\ +\infty). \end{gathered} \tag{5}$$

Из равенств (3), (4) и (5) следует формула Эйлера (1) при положительных значениях p и q. ■

Пример 1. Формула (1.7) с учётом формулы Эйлера (1) будет иметь следующий вид

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}\,(1-x^b)^{c-1}\,dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{a}{b}\Big)\,\Gamma(c)}{\Gamma\Big(\dfrac{a}{b}+c\Big)} \quad (a > 0,\, b > 0,\, c > 0). \tag{6}$$

Пример 2. Формула (2.7) с учётом формулы Эйлера (1) будет иметь следующий вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a}{(\alpha+\beta x^\lambda)^b}\,dx = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\frac{a+1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda\alpha^b} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{\lambda}\Big)\,\Gamma\Big(b-\dfrac{a+1}{\lambda}\Big)}{\Gamma(b)}$$
$$\Big(\alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda>0,\ 0<\frac{a+1}{\lambda}<b\Big). \tag{7}$$

Пример 3. Формула (6.7) с учётом формулы Эйлера (1) будет иметь следующий вид

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}x\,\cos^{b-1}x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac{a}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{b}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)} \quad (a>0,\ b>0). \tag{8}$$

В частных случаях

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{a+1}{2}\Big)} \quad (a>0). \tag{9}$$

13. Формула дополнения

Формула $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, $\forall p\in(0;1)$. *Интеграл Эйлера — Пуассона* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Теорема 1. *Для гамма-функции имеет место формула дополнения*

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,,\ \forall p\in(0;1). \tag{1}$$

Доказательство. Полагая в формуле Эйлера (1.12) $q=1-p$ при $0<p<1$, получаем, что

$$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p),\ \forall p \in (0; 1).$$

Учитывая формулу дополнения для бета-функции, получаем формулу (1). ■

При $p = \dfrac{1}{2}$ из формулы дополнения (1) получаем, что

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,. \tag{2}$$

По формуле (2.10) с учётом формулы (2) находим:

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2} + n - 1\Big)\Big(\frac{1}{2} + n - 2\Big) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \Big(\frac{1}{2} + 1\Big)\frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\sqrt{\pi}\,,\ n = 1, 2, \ldots\,.$$

Формула

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\sqrt{\pi}\,,\ n = 1, 2, \ldots\,, \tag{3}$$

весьма удобна в приложениях.

Пример 1. С помощью гамма-функции, используя формулу (2), вычислим значение интеграла Эйлера — Пуассона (12.6.2).

Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\,dz = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,.$$

Пусть $z = \xi^2$ при $\xi \geqslant 0$. Тогда

$$dz = 2\xi\,d\xi,\quad \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\xi}\,,\ \forall \xi \in (0; +\infty),$$

при $z \to +0$ новая переменная $\xi \to +0$, а при $z \to +\infty$ новая переменная $\xi \to +\infty$.

Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Следовательно, интеграл Эйлера — Пуассона

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

можно[1] вычислить по формуле (12.9) при $a = 2n,\ b = 2$ с последующим использованием формулы (3):

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\,\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\,\sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Пример 3. Интеграл

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sqrt[5]{x^2}}}$$

[1] Формулу (12.9) можно непосредственно не использовать, а выполнить замену $x = t^{\frac{1}{2}}$, $\forall t \in (0;\,+\infty)$, как это было сделано в примере 1.9, когда параметр $b = 2$.

можно[1] вычислить по формуле (6.12) при $a = 1, b = \dfrac{2}{5}, c = \dfrac{1}{2}$ с последующим использованием формул (2.10), (4.10) и (2):

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma(3)} = \frac{15}{8}\cdot\frac{\pi}{2!} = \frac{15\pi}{16}\,.$$

Пример 4. Используя формулы (8.12) и (9.12), вычислим интегралы

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 2x}}\,, \quad I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}\,, \quad I_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}\,,$$

---

[1] Можно использовать формулу (1.7) при $a = 1, b = \dfrac{2}{5}, c = \dfrac{1}{2}$. Также можно выполнить подстановку $x^{\frac{2}{5}} = t,\ \forall t \in (0;1)$, как это делается при выводе формулы (1.7). Всякий раз получим, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}} = \frac{5}{2}\,B\Big(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\Big).$$

Значение бета-функции $B\Big(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$ можно вычислить, использовав формулу Эйлера (1.12), с последующими вычислениями, произведёнными в этом примере. Также можно дважды использовать формулу (2.4) и формулу (19.6):

$$B\Big(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{\dfrac{5}{2}-1}{\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}-1}\,B\Big(\frac{5}{2}-1, \frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{4}\,B\Big(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\dfrac{3}{2}-1}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}-1}\,B\Big(\frac{3}{2}-1, \frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{8}\,B\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{8}\,\pi.$$

$$I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 4x}}\,, \quad I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 2x}}\,.$$

Интеграл[1]

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 2x}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\sin x\,\cos x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}-1} x\,\cos^{\frac{1}{2}-1} x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac14\Big)\Gamma\Big(\dfrac14\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac12\Big)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi}\,\Gamma^2\Big(\frac14\Big).$$

Интеграл[2]

$$I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}-1} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac14\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac34\Big)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma^2\Big(\dfrac14\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac14\Big)\Gamma\Big(1-\dfrac14\Big)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma^2\Big(\dfrac14\Big)}{\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi}\,\Gamma^2\Big(\frac14\Big).$$

Интеграл[3]

$$I_3 = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\sin 2t}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\,\Gamma^2\Big(\frac14\Big).$$

[1]Были использованы формулы (8.12) и (2).

[2]Были использованы формулы (9.12) и (1).

[3]Была выполнена замена $x = 2t$, $\forall t \in \Big(0;\, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, и использован результат вычисления интеграла I_1 .

Интеграл[1]

$$I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 4x}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\sin 2u}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\pi}\, \Gamma^2\Big(\frac{1}{4}\Big).$$

Интеграл[2]

$$I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{\sin u}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\pi}\, \Gamma^2\Big(\frac{1}{4}\Big).$$

Пример 5 (*задача Эйлера*). *Произведение*

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}\, dx = \frac{\pi}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

По формуле (6.12) при $a = 1,\ b = 2n,\ c = \dfrac{1}{2}$ находим

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2}\Big)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

По формуле (6.12) при $a = n+1,\ b = 2n,\ c = \dfrac{1}{2}$ находим

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}\, dx = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{n+1}{2n}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n} + 1\Big)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

[1] Была выполнена подстановка $2x = u,\ \forall u \in \Big(0; \dfrac{\pi}{2}\Big),$ и использован результат вычисления интеграла I_1 .

[2] Была выполнена подстановка $2x = u,\ \forall u \in \Big(0; \dfrac{\pi}{2}\Big),$ и использован результат вычисления интеграла I_2 .

Тогда произведение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}}\, dx = \frac{1}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}+1\Big)}\,\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}+1\Big)}\,\pi = \frac{\pi}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)}{\dfrac{1}{2n}\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{2n}\Big)} = \frac{\pi}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

В частности, произведение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

14. Произведение Эйлера

Произведение $\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \sin\dfrac{\pi\nu}{n} = n\, 2^{1-n}$. *Произведение Эйлера* $(n \in \mathbb{N})$

$E = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma\Big(\dfrac{k}{n}\Big) = \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\,.$

Лемма 1. *Произведение*

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\pi\nu}{n} = n\,2^{1-n}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть z_k — корни уравнения

$$z^n - 1 = 0.$$

Тогда полином $z^n - 1$ имеет следующее разложение на линейные множители

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k). \tag{2}$$

Учитывая, что z_k суть корни n-й степени из единицы и равны

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{2\pi k}{n}\,,\;\; i = \sqrt{-1}\,,\; k = \overline{0, n-1}\,,$$

представление (2) запишем в виде

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \Bigl(z - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\,\sin\frac{2\pi k}{n}\Bigr) =$$

$$= (z-1)\prod_{k=1}^{n-1} \Bigl(z - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\,\sin\frac{2\pi k}{n}\Bigr).$$

Отсюда

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Bigl(z - \cos\frac{2\pi \nu}{n} - i\,\sin\frac{2\pi \nu}{n}\Bigr). \tag{3}$$

Поскольку

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^n - 1}{z - 1} = \lim_{z\to 1}\bigl(nz^{n-1}\bigr) = n,$$

$$\lim_{z\to 1}\prod_{\nu=1}^{n-1} \Bigl(z - \cos\frac{2\pi \nu}{n} - i\,\sin\frac{2\pi \nu}{n}\Bigr) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n-1} \Bigl(1 - \cos\frac{2\pi \nu}{n} - i\,\sin\frac{2\pi \nu}{n}\Bigr),$$

то, переходя в равенстве (3) к пределу при $z \to 1$, будем иметь:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Big(1 - \cos\frac{2\pi\nu}{n} - i\,\sin\frac{2\pi\nu}{n}\Big).$$

Приравнивая модули, получаем:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Big|1 - \cos\frac{2\pi\nu}{n} - i\,\sin\frac{2\pi\nu}{n}\Big| =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n-1} \sqrt{\Big(1 - \cos\frac{2\pi\nu}{n}\Big)^2 + \sin^2\frac{2\pi\nu}{n}} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \sqrt{2\Big(1 - \cos\frac{2\pi\nu}{n}\Big)} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{n-1} \sqrt{4\sin^2\frac{\pi\nu}{n}} = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\pi\nu}{n}\,.$$

Отсюда следует равенство (1). ■

Теорема 1. *Произведение Эйлера*

$$E = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{k}{n}\Big) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Доказательство. Произведение

$$E = \Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)$$

перепишем в обратном порядке

$$E = \Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Перемножим оба выражения:

$$E^2 = \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma\Big(\frac{\nu}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{n-\nu}{n}\Big).$$

Если учесть, что $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, то, по формуле дополнения (1.13), произведения

$$\Gamma\Big(\frac{\nu}{n}\Big)\,\Gamma\Big(1-\frac{\nu}{n}\Big) = \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi\nu}{n}}\,,\ \nu = \overline{1, n-1}\,.$$

Поэтому

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi\nu}{n}} = \frac{\pi^{n-1}\,2^{n-1}}{n}\,,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

в соответствии с (1). Отсюда следует формула Эйлера (4). ■

15. Формула Лежандра

Формула $B(p,p) = 2^{1-2p}\,B\Big(\dfrac{1}{2}\,,p\Big)$, $\forall p\in(0;+\infty)$. *Формула Лежандра* $\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p)$, $\forall p\in(0;\,+\infty)$.

Лемма 1. *Для бета-функции имеет место формула*

$$B(p,p) = 2^{1-2p}\,B\Big(\frac{1}{2}\,,p\Big),\ \forall p\in(0;\,+\infty). \tag{1}$$

Доказательство. Бета-функция

$$B(p,p) = \int\limits_0^1 \big(\xi(1-\xi)\big)^{p-1}\,d\xi = \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)^2\Big)^{p-1}\,d\xi =$$

$$= 2\int\limits_0^{0{,}5} \Big(\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big)^2\Big)^{p-1}\,d\xi,\ \forall p\in(0;\,+\infty),$$

где была использована симметричность подынтегральной функции относительно точки $\xi = 0{,}5$ на промежутке интегрирования $[0;1]$ при $p \geqslant 1$ и $(0;1)$ при $0 < p < 1$.

Пусть

$$\frac{1}{2} - \xi = \frac{1}{2}\sqrt{t}\,,$$

когда $\xi \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Тогда $d\xi = -\dfrac{1}{4}\,\dfrac{dt}{\sqrt{t}}\,,$ при $\xi = 0$ новая переменная $t = 1,$ а при $\xi = \dfrac{1}{2}$ — $t = 0,$ и интеграл

$$\int\limits_0^{0,5} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2\right)^{p-1} d\xi = \left(\frac{1}{4}\right)^p \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\,(1-t)^{p-1}\,dt =$$

$$= 2^{-2p}\, B\left(\frac{1}{2}\,, p\right), \ \forall p \in (0;\,+\infty).$$

Сопоставляя полученные результаты вычислений, приходим к равенству (1). ■

Теорема 1. *Для гамма-функции имеет место формула Лежандра*

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p), \ \forall p \in (0;\,+\infty). \qquad (2)$$

Доказательство. Заменяя в формуле (1) бета-функции на гамма-функции на основании формулы Эйлера (1.12), получаем, что

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \dfrac{1}{2}\right)}\,, \ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

или

$$\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\,\Gamma(2p), \ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Отсюда с учётом того, что $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,,$ получаем формулу Лежандра (2). ■

Пример 1. Последовательно используя формулы (1.5), (1.12), (1.11), (2) и (3.13), находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{\xi}}{(1+\xi)^2}\,d\xi = B\Big(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\Big) = \frac{\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{5}{4}\Big)}{\Gamma(2)} = \Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$

16. Формула Раабе

Интеграл Раабе $R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(p)\,dp = \ln\sqrt{2\pi}\,.$ *Формула Раабе* $R(p) = \int\limits_p^{p+1} \ln\Gamma(\theta)\,d\theta = p(\ln p - 1) + \ln\sqrt{2\pi}\,, \forall p \in (0;\, +\infty).$

Интеграл

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(p)\,dp \tag{1}$$

будем называть *интегралом Раабе*.

Прежде всего докажем существование этого интеграла.

Из формулы приведения (1.10) находим:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}\,, \ \forall p \in (0;\, +\infty). \tag{2}$$

Если теперь учесть, что гамма-функция принимает положительные значения (предложение 4.11 и формула (2.11)), то, логарифмируя равенство (2), получаем:

$$\ln\Gamma(p) = \ln\Gamma(p+1) - \ln a,\ \forall p \in (0;\ +\infty). \tag{3}$$

Если $0 < p \leqslant 1$, то $1 < p+1 \leqslant 2$ и $\Gamma(p+1)$ есть положительная величина такая, что

$$0 \leqslant \min_{(0;+\infty)} \Gamma(p) \leqslant \Gamma(p+1) \leqslant \Gamma(2) = 1.$$

При этом $\Gamma(p+1)$ — непрерывная функция. Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(p+1)\,dp$ является определённым. Поэтому из равенства (3) следует, что интеграл Раабе (1) существует тогда и только тогда, когда существует несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \ln p\,dp$. Сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \ln p\,dp$ устанавливается непосредственным его вычислением.

Итак, интеграл Раабе (1) существует.

Теорема 1. *Интеграл Раабе*

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(p)\,dp = \ln\sqrt{2\pi}\,. \tag{4}$$

Доказательство. Выполним в интеграле Раабе (1) формальную замену p на $1-p$:

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(p)\,dp = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-p)\,dp.$$

Тогда

$$2R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(p)\,dp + \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-p)\,dp = \int\limits_0^1 \ln\bigl(\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)\bigr)\,dp.$$

Теперь используем формулу дополнения (1.13) и получим

$$2R_0 = \int\limits_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin p\pi}\, dp = \int\limits_0^1 (\ln \pi - \ln \sin p\pi)\, dp = \ln \pi -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \ln \sin p\pi \, d(p\pi) = \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \ln \sin \xi \, d\xi =$$

$$= \ln \pi + \ln 2 = \ln 2\,\pi,$$

так как интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \ln \sin \xi \, d\xi = \, - \pi \ln 2.$$

Итак, $2R_0 = \ln 2\pi$, что соответствует (4). ■

Интеграл

$$R(p) = \int\limits_a^{a+1} \ln \Gamma(\theta)\, d\theta, \ \forall p \in (0;\, +\infty), \tag{5}$$

является определённым интегралом с пределами интегрирования, зависящими от параметра.

Действительно, при $p > 0$ подынтегральная функция $\ln \Gamma(\theta)$ непрерывна на любом отрезке $[p; p+1]$, ибо при $\theta > 0$ гамма-функция $\Gamma\colon \theta \to \Gamma(\theta)$ непрерывна и принимает положительные значения.

Функция $R\colon p \to R(p),\ \forall p \in (0;\, +\infty)$, заданная с помощью определённого интеграла, зависящего от параметра, (5), имеет более простое выражение в элементарных функциях.

Теорема 2. *Имеет место формула Раабе*

$$R(p) = \int\limits_p^{p+1} \ln \Gamma(\theta)\, d\theta = p(\ln p - 1) + \ln \sqrt{2\pi}\,, \ \forall p \in (0;\, +\infty). \tag{6}$$

Доказательство. По свойству аддитивности определённого интеграла,

$$R(p) = \int\limits_0^{p+1} \ln\Gamma(\theta)\, d\theta - \int\limits_0^{p} \ln\Gamma(\theta)\, d\theta.\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Используя теорему Барроу о дифференцировании функции, определяемой интегралом Римана с переменным верхним пределом интегрирования, находим производную

$$R'(p) = \ln\Gamma(p+1) - \ln\Gamma(p) = \ln\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)}\,,\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

С учётом формулы приведения (1.10) производная

$$R'(p) = \ln p,\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Интегрируя это равенство, находим, что

$$R(p) = \int \ln p\, dp = p(\ln p - 1) + C,\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

где C — некоторая постоянная.

Из существования интеграла Раабе (1) следует непрерывность функции

$$\overline{R} : p \to \left[\begin{array}{l} R(p),\ \forall p \in (0;\, +\infty), \\ R_0 \quad \text{при} \quad p = 0, \end{array}\right.$$

построенной на основе (5) и (1).

Тогда из равенства $R(p) = p(\ln p - 1) + C$ предельным переходом при $p \to +0$ получаем, что

$$\lim_{p\to+0} R(p) = C + \lim_{p\to+0}\big(p(\ln p - 1)\big)$$

или

$$R_0 = C.$$

Значит,

$$R(p) = p(\ln p - 1) + R_0,\ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

что соответствует формуле Раабе (6). ■

17. Формулы для логарифмической производной гамма-функции

Формула Коши $\mathsf{D}\ln\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{-\xi} - \dfrac{1}{(1+\xi)^p}\Big)\dfrac{d\xi}{\xi}$, $\forall p \in (0;\, +\infty)$. *Формула* $\mathsf{D}\ln\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\dfrac{e^{-\xi}}{\xi} - \dfrac{e^{-p\xi}}{1-e^{-\xi}}\Big)\,d\xi$, $\forall p \in (0;\, +\infty)$. *Постоянная Эйлера* $\mathcal{C} = -\Gamma'(1)$. *Формула* $\dfrac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^{\infty}\Big(\dfrac{1}{1+\xi} - \dfrac{1}{(p+1)^p}\Big)\dfrac{d\xi}{\xi}$, $\forall p \in (0;\, +\infty)$. *Формула Гаусса* $\dfrac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1-t^{p-1}}{1-t}\,dt$, $\forall p \in (0;\, +\infty)$. *Формула* $\mathsf{D}^2\ln\Gamma(p) = \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(\nu+p)^2}$, $\forall p \in (0;\, +\infty)$.

Теорема 1. *Для логарифмической производной гамма-функции имеет место формула Коши*

$$\mathsf{D}\ln\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{-\xi} - \frac{1}{(1+\xi)^p}\Big)\frac{d\xi}{\xi},\ \forall p \in (0;\, +\infty). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим логарифмическую производную гамма-функции

$$\mathsf{D}\ln\Gamma(p) = \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)},\ \forall p \in (0;\, +\infty).$$

Используя формулу Эйлера (1.12) выражения бета-функции через гамма-функцию, а также формулу приведения (1.10) для гамма-функции, путём элементарных преобразований находим разность

$$\Gamma(q) - B(p,q) = \Gamma(q) - \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} =$$

$$= \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\big(\Gamma(p+q) - \Gamma(p)\big) = \frac{q\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)-\Gamma(p)}{q} =$$

$$= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)-\Gamma(p)}{q}\,,\ \forall p, q \in (0;\,+\infty).$$

С учётом непрерывности гамма-функции получаем, что

$$\lim_{q\to+0} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(p)} = \frac{1}{\Gamma(p)}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

$$\lim_{q\to+0} \frac{\Gamma(p+q)-\Gamma(p)}{q} = \Gamma'(p),\ \forall p \in (0;\,+\infty).$$

Поэтому предельным переходом в равенстве

$$\Gamma(q) - B(p,q) = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)-\Gamma(p)}{q}$$

к пределу при $q \to +\infty$ получаем:

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \lim_{q\to+0}\big(\Gamma(q) - B(p,q)\big),\ \forall p \in (0;\,+\infty), \tag{2}$$

или

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \lim_{q\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \xi^{q-1}\big(e^{-\xi} - (1+\xi)^{-(p+q)}\big)\,d\xi,\ \forall p \in (0;\,+\infty), \tag{3}$$

если учесть определение (1.9) гамма-функции и представление (1.5) для бета-функции.

Осуществляя в правой части равенства (3) предельный переход в несобственном интеграле, зависящем от параметров, получаем формулу Коши (1).

Доказательство теоремы будет завершено, если обоснуем возможность предельного перехода:

$$\lim_{q\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\Phi(\xi,b)\,d\xi=\int\limits_0^{+\infty}\lim_{q\to+0}\Phi(\xi,b)\,d\xi, \tag{4}$$

то есть,

$$\lim_{q\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\Phi(\xi,b)\,d\xi=\int\limits_0^{+\infty}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где подынтегральная функция

$$\Phi\colon\,(\xi,b)\to\xi^{q-1}\big(e^{-\xi}-(1+\xi)^{-(p+q)}\big),$$

предельная функция

$$\varphi\colon\,\xi\to\frac{1}{\xi}\,\big(e^{-\xi}-(1+\xi)^{-p}\big),$$

считая $\xi>0,\ p>0,\ q>0.$

Вблизи $\xi=0$ и $q=0$ отображение

$$(\xi,t)\to\frac{1}{\xi}\,\big(e^{-\xi}-(1+\xi)^{-(p+q)}\big)$$

является непрерывной функцией от ξ и $q,$ а $\xi^q<1,$ что обеспечивает равномерную сходимость функции Φ к предельной функции φ при $q\to\ +0.$

Пусть q_0 — произвольное фиксированное число из числового луча $(0;\ +\infty).$ Тогда при $q\geqslant q_0$ и достаточно больших ξ

$$\xi^{q-1}\left|e^{-\xi}-(1+\xi)^{-(p+q)}\right| \leqslant \xi^{q_0-1}\left((1+\xi)^{-p}-e^{-\xi}\right),$$

причём имеет место сходимость

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi^{q_0-1}\left((1+\xi)^{-p}-e^{-\xi}\right) d\xi = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi^{q_0-1}}{(1+\xi)^p}\, d\xi -$$

$$-\int\limits_0^{+\infty} \xi^{q_0-1}\, e^{-\xi}\, d\xi = B(q_0, p-q_0) - \Gamma(q_0),$$

считая $p > q_0$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса устанавливаем равномерную и абсолютную сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \Phi(\xi, q)\, d\xi$ при $q > 0$. Поэтому формула (4) имеет место. ■

Если в равенстве (2) для бета-функции вместо представления (1.5) использовать представление (2.5), то получим, что

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \lim_{q\to+0} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\xi}\,\xi^{q-1} - e^{-p\xi}\left(1-e^{-\xi}\right)^{q-1}\right) d\xi.$$

Переходя к пределу под знаком интеграла (обоснование аналогично, как и в (4)), получим ещё одну формулу логарифмической производной гамма-функции

$$\mathsf{D}\ln\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\xi}}{\xi} - \frac{e^{-p\xi}}{1-e^{-\xi}}\right) d\xi,\ \forall p \in (0;\, +\infty). \qquad (5)$$

Из формулы Коши (1) при $p = 1$ получаем:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\xi} - \frac{1}{1+\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = -\,\mathcal{C}.$$

Величину

$$\mathcal{C} = -\Gamma'(1) \tag{6}$$

назовём *постоянной Эйлера.*

Тогда из формулы Коши (1) с учётом (6) получаем ещё одно представление для логарифмической производной гамма-функции

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^{\infty} \Big(\frac{1}{\xi+1} - \frac{1}{(\xi+1)^p}\Big)\,\frac{d\xi}{\xi}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty). \tag{7}$$

В формуле (7) выполним подстановку

$$\frac{1}{\xi+1} = t$$

и получим *формулу Гаусса* для логарифмической производной гамма-функции

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-t^{p-1}}{1-t}\,dt,\ \forall p \in (0;\,+\infty). \tag{8}$$

Рассмотрим нахождение второй производной логарифма гамма-функции.

Если $0 < t < 1$, то

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} t^{\nu}.$$

Отсюда при $0 < t < 1$ и $p > 0$ частное

$$\frac{1-t^{p-1}}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \big(t^{\nu} - t^{p+\nu-1}\big).$$

С учётом формулы Гаусса (8) проинтегрируем это равенство по переменной t от 0 до 1:

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^1 \frac{1-t^{p-1}}{1-t}\,dt = \int\limits_0^1 \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(t^{\nu} - t^{p+\nu-1}\right) dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \int\limits_0^1 \left(t^{\nu} - t^{p+\nu-1}\right) dt = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left[\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{t^{p+\nu}}{p+\nu}\right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\right), \ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

то есть,

$$\mathsf{D} \ln \Gamma(p) + \mathcal{C} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\right), \ \forall p \in (0;\,+\infty). \qquad (9)$$

Ряд в правой части равенства (9) равномерно сходится на открытом числовом луче $(0;\,+\infty)$, что устанавливаем по признаку Вейерштрасса, исходя из следующих соображений.

Пусть p_0 — произвольное фиксированное положительное число. Тогда при $0 < p \leqslant p_0$ имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\right| = \frac{|p-1|}{(\nu+1)(\nu+p)} < (p_0+1)\,\frac{1}{\nu^2}\,.$$

Числовой ряд

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu^2}$$

сходится.

Поэтому, по признаку Вейерштрасса, ряд из (9) равномерно сходится на полуинтервале $(0; p_0]$. В силу произвольного выбора числа $p_0 > 0$ ряд из равенства (9) равномерно сходится на открытом числовом луче $(0;\,+\infty)$.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \mathsf{D}_p\Big(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\Big) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{(\nu+p)^2}\,.$$

При $p > 0$ этот ряд равномерно сходится, ибо

$$\frac{1}{(\nu+p)^2} < \frac{1}{\nu^2}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

а значит, выполняются условия признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Поэтому допустимо почленное дифференцирование по переменной p функционольного ряда из (9).

Дифференцируя равенство (9) по переменной a, получаем формулу

$$\mathsf{D}^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{(\nu+p)^2}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty). \tag{10}$$

18. Формула Гаусса произведения гамма-функций

Формула Гаусса умножения $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \Gamma\Big(p + \frac{\nu-1}{n}\Big) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-np}\, \Gamma(np)$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in (0;\,+\infty)$.

Теорема 1 (*умножения для гамма-функции*). *При любом натуральном n и вещественном положительном числе p имеет место формула Гаусса*

$$\prod_{\nu=1}^{n} \Gamma\Big(p + \frac{\nu-1}{n}\Big) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-np}\, \Gamma(np), \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in (0;\,+\infty). \tag{1}$$

Доказательство. В формуле Гаусса для логарифмической производной гамма-функции (8.17) положим, что

$$t = u^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

В результате получим

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \mathcal{C} = n\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{np-1}}{1-u^n}\,du,\ \forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда формальной заменой p на $p + \dfrac{\nu}{n}$, где $\nu = \overline{0, n-1}$, получаем:

$$\frac{\Gamma'\Bigl(p + \dfrac{\nu}{n}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(p + \dfrac{\nu}{n}\Bigr)} + \mathcal{C} = n\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{np+\nu-1}}{1-u^n}\,du,$$

$$\forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \nu = \overline{0, n-1}\,.$$

Просуммируем эти равенства по ν от 0 до $\nu - 1$:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\Bigl(p + \dfrac{\nu}{n}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(p + \dfrac{\nu}{n}\Bigr)} + n\mathcal{C} = n\int\limits_0^1 \Bigl(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{np-1}}{1-u}\Bigr)\,du,$$

$$\forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

с учётом того, что сумма n членов геометрической прогрессии

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} u^{np+\nu-1} = u^{np-1}\cdot\frac{1-u^n}{1-u}\,.$$

Из формулы Гаусса для логарифмической производной гамма-функции (8.70) находим:

$$\frac{\Gamma'(np)}{\Gamma(np)} + \mathcal{C} = \int\limits_0^1 \frac{1-u^{np-1}}{1-u}\,du,\ \forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Умножим равенство (3) на натуральное число n и вычтем из равенства (2):

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\Big(p+\dfrac{\nu}{n}\Big)}{\Gamma\Big(p+\dfrac{\nu}{n}\Big)} - n\,\frac{\Gamma'(np)}{\Gamma(np)} = n\int\limits_0^1 \Big(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u}\Big)\,du,$$

$$\forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\mathsf{D}_p \ln \frac{\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\dfrac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(p+\dfrac{n-1}{n}\Big)}{\Gamma(np)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\Big(p+\dfrac{\nu}{n}\Big)}{\Gamma\Big(p+\dfrac{\nu}{n}\Big)} - n\,\frac{\Gamma'(np)}{\Gamma(np)}\,,\ \forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

и

$$n\int\limits_0^1 \Big(\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u}\Big)\,du = n\left[\ln\frac{1-u^n}{1-u}\right]_{u=0}^{u=1} =$$

$$= -\,n\,\ln n,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

получаем равенство

$$\mathsf{D}_p \ln \frac{\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\dfrac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(p+\dfrac{n-1}{n}\Big)}{\Gamma(np)} =$$

$$= -\,n\,\ln n,\ \forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя по p, находим, что

$$\ln \frac{\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\dfrac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(p+\dfrac{n-1}{n}\Big)}{\Gamma(np)} =$$

$$= -\,pn\,\ln n + \ln C,\ \forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

или, потенцируя,

$$\Gamma(p)\,\Gamma\Big(p+\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(p+\frac{n-1}{n}\Big) = \frac{C}{n^{np}}\,\Gamma(np),$$
$$\forall p \in (0;\,+\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Для нахождения постоянной C в равенстве (4) положим

$$p = \frac{1}{n}$$

и получим

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma(1) = \frac{C}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда с учётом формулы для произведения Эйлера (4.14) находим

$$C = n\,E = \sqrt{(2\pi)^{n-1}\,n}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

Равенство (4) при (5) примет вид (1). ■

Заметим, что при $n = 2$ формула Гаусса (1) представляет собой формулу Лежандра (2.15).

19. Формула Вейерштрасса

Формула Вейерштрасса $\dfrac{1}{\Gamma(p+1)} = e^{C_p}\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{p}{n}\Big)\exp\Big(-\dfrac{p}{n}\Big)$, $\forall p \in (-1;\,+\infty)$.

Рассмотрим равенство (9.17), в правой части которого расположен равномерно сходящийся на $(0;+\infty)$ функциональный ряд.

Это позволяет проинтегрировать равенство (9.17) по переменной p от 1 до $p > 0$:

$$\int\limits_1^p \big(\mathsf{D}\ln\Gamma(p) + \mathcal{C}\big)\,dp = \Big[\ln\Gamma(p) + \mathcal{C}p\Big]_1^p =$$

$$= \ln\Gamma(p) + (p-1)\mathcal{C},\ \forall p > 0;$$

$$\int\limits_1^p \sum_{\nu=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\Big)\,dp = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\ \int\limits_1^p\Big(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p}\Big)\,dp =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\left[\frac{a}{\nu+1} - \ln(\nu+p)\right]_{p=1}^{p=p} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{+\infty}\Big(\frac{p-1}{\nu+1} - \ln\frac{\nu+p}{\nu+1}\Big),\ \forall p \in (0;\,+\infty),$$

и

$$\ln\Gamma(p) + (p-1)\mathcal{C} = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\Big(\frac{p-1}{\nu+1} - \ln\frac{\nu+p}{\nu+1}\Big),\ \forall p \in (0;\,+\infty). \quad (1)$$

Формально заменяя p на $p+1$ (при $p > -1$), разложение (1) перепишем в виде

$$\ln\Gamma(p+1) + \mathcal{C}p = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{p}{k} - \ln\frac{p+k}{k}\Big),\ \forall p \in (\,-1;\,+\infty),$$

или

$$\ln\frac{1}{\Gamma(p+1)} = \mathcal{C}p + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\ln\Big(1+\frac{p}{k}\Big) - \frac{p}{k}\Big),\ \forall p \in (\,-1;\,+\infty).$$

Потенцируя, получаем разложение функции

$$p \to \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

в бесконечное произведение

$$\frac{1}{\Gamma(p+1)} = e^{\mathcal{C}p} \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{p}{n}\Big) \exp\Big(-\frac{a}{n}\Big), \ \forall p \in (-1;\, +\infty). \quad (2)$$

Равенство (2) назовём *формулой Вейерштрасса* для гамма-функции.

20. Продолжение гамма-функции

$$\widehat{\Gamma}\colon p \to \left[\begin{array}{l} \Gamma(p), \ \forall p \in (0;\, +\infty), \\ \dfrac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\cdot \ldots \cdot (p+n-1)}\,, \forall p \in (-n;\, -n+1), \ n = 1, 2, \ldots . \end{array} \right.$$

Формулу приведения (1.10)

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \ \ \forall p \in (0;\, +\infty),$$

перепишем в виде

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}\,, \ \ \forall p \in (0;\, +\infty). \quad (1)$$

Частное $\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ без связи с формулой (1) в соответствии с определением 1.9 (гамма-функции) определено на множестве $(-1; 0) \cup (0;\, +\infty)$.

На положительном числовом луче $(0; +\infty)$ имеет место формула (1), и по частному $\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$ находится значение $\Gamma(p)$ гамма-функции Γ в точке $p \in (0;\, +\infty)$.

На интервале $(-1;0)$ построим функцию

$$\Gamma_{-1}\colon p \to \frac{\Gamma(p+1)}{p}\,, \ \ \forall p \in (-1;0). \tag{2}$$

Поскольку

$$\Gamma(p+1) > \Gamma(1) = 1, \ \forall p \in (-1;0),$$

то функция (2) является отрицательной.

При $p=0$ значение

$$\Gamma(p+1) = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1,$$

поэтому $\Gamma_{-1}(p) \to -\infty$ при $p \to -0$, причём

$$\Gamma_{-1}(p) \sim \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p \to -0. \tag{3}$$

Исследуем поведение функции Γ_{-1} при $p \to -0$.

Полагая

$$y = p+1, \ \forall p \in (-1;0),$$

получаем, что

$$p \to -1+0 \iff y \to +0.$$

Тогда с учётом асимптотической формулы (3.11)

$$\Gamma_{-1}(p) = \Gamma_{-1}(y-1) = \frac{\Gamma(y)}{y-1} \sim \frac{1}{y} = -\frac{1}{p+1} \quad \text{при} \quad y \to +0$$

и

$$\Gamma_{-1}(p) \sim -\frac{1}{p+1} \quad \text{при} \quad p \to -1+0. \tag{4}$$

Значит,

$$\Gamma_{-1}(p) \to -\infty \quad \text{при} \quad p \to -1+0.$$

На основании (2) построим функцию

$$\widehat{\Gamma}_{-1}\colon p \to \begin{bmatrix} \Gamma(p),\ \forall p \in (0;\ +\infty), \\ \Gamma_{-1}(p),\ \forall p \in (\,-1;0), \end{bmatrix} \tag{5}$$

которая является продолжением гамма-функции (1.2) на множество $(\,-1;0)\cup(0;\ +\infty)$.

Функция (5) посредством гамма-функции представляется формулой

$$\widehat{\Gamma}_{-1}\colon p \to \begin{bmatrix} \Gamma(p),\ \forall p \in (0;\ +\infty), \\ \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\,,\ \forall p \in (\,-1;0). \end{bmatrix} \tag{6}$$

Предложение 1. *Для функции* $\widehat{\Gamma}_{-1}$ *имеет место формула приведения*

$$\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1) = p\,\widehat{\Gamma}_{-1}(p),\ \forall p \in (\,-1;0)\cup(0;\ +\infty). \tag{7}$$

Действительно, при $p>0$, по формуле приведения (1.10) для Γ, с учётом задания (5)

$$\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1) = \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) = p\,\widehat{\Gamma}_{-1}(p),\ \forall p \in (0;\ +\infty),$$

а при $-1<p<0$ в соответствии с заданием (6)

$$\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1) = \Gamma(p+1) = p\,\widehat{\Gamma}_{-1}(p),\ \forall p \in (\,-1;0).\ \blacksquare$$

Осуществим дальнейшее продолжение гамма-функции на множество отрицательных вещественных чисел. Для этого формулу приведения (7) перепишем в виде

$$\widehat{\Gamma}_{-1}(p) = \frac{\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1)}{p}\,,\ \forall p \in (\,-1;0)\cup(0;\ +\infty). \tag{8}$$

Частное $\dfrac{\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1)}{p}$ без связи с формулой (8) в соответствии с заданием (5) функции $\widehat{\Gamma}_{-1}$ определено на множестве $(-2;-1)\cup$ $\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

На множестве $(-1;0)\cup(0;+\infty)$ имеет место формула (7), и по частному $\dfrac{\widehat{\Gamma}_{-1}(p+1)}{p}$, используя представление (8), находим значение $\widehat{\Gamma}_{-1}(p)$ функции (5) в точке $p\in(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

На интервале $(-2;-1)$ построим функцию

$$\Gamma_{-2}\colon p\to\frac{\Gamma_{-1}(p+1)}{p}\,,\ \ \forall p\in(-2;-1). \tag{9}$$

В соответствии с заданием (2)

$$\Gamma_{-1}(p+1)=\frac{\Gamma(p+2)}{p+1}\,,\ \ \forall p\in(-2;-1),$$

и функцию (9) можно выразить через гамма-функцию формулой

$$\Gamma_{-2}\colon p\to\frac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)}\,,\ \ \forall p\in(-2;-1). \tag{10}$$

Функция Γ_{-1} отрицательна на интервале $(-1;0)$, поэтому из задания (9) следует, что функция Γ_{-2} положительна на интервале $(-2;-1)$.

Пусть

$$y=p+1,\ \forall p\in(-2;-1).$$

Тогда

$$\begin{gathered}\Gamma_{-2}(p)=\frac{\Gamma_{-1}(p+1)}{p}=\frac{\Gamma_{-1}(y)}{y-1}\,,\\ \forall p\in(-2;-1),\ \forall y\in(-2;0).\end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда с учётом равносильности

$$p \to -2+0 \iff y \to -1+0$$

и асимптотической формулы (4) устанавливаем, что

$$\Gamma_{-2}(p) = \frac{\Gamma_{-1}(y)}{y-1} \sim \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{y+1}\Big) = \frac{1}{2(y+1)} = \frac{1}{2(p+2)}$$

$$\text{при} \quad y \to -1+0$$

и

$$\Gamma_{-2}(p) \sim -\frac{1}{2(p+2)} \quad \text{при} \quad p \to -2+0.$$

Значит,

$$\Gamma_{-2}(p) \to +\infty \quad \text{при} \quad p \to -2+0.$$

По формуле (11), с учётом равносильности

$$p \to -1-0 \iff y \to -0$$

и асимптотической формулы (3) устанавливаем, что

$$\Gamma_{-2}(p) = \frac{\Gamma_{-1}(y)}{y-1} \sim -\frac{1}{y} = -\frac{1}{p+1} \quad \text{при} \quad y \to -0,$$

$$\Gamma_{-2}(p) \sim -\frac{1}{p+1} \quad \text{при} \quad p \to -1-0.$$

Значит,

$$\Gamma_{-2}(p) \to +\infty \quad \text{при} \quad p \to -1-0.$$

На основании $\widehat{\Gamma}_{-1}$ и Γ_{-2} построим функцию

$$\widehat{\Gamma}_{-2}\colon p \to \left[\begin{array}{l} \widehat{\Gamma}_{-1}(p), \ \forall p \in (-1;0) \cup (0;+\infty), \\ \Gamma_{-2}(p), \ \forall p \in (-2;-1), \end{array}\right. \tag{12}$$

которую с учётом (5) запишем в виде

$$\widehat{\Gamma}_{-2}\colon p\to \left[\begin{array}{l}\Gamma(p),\ \forall p\in(0;\ +\infty),\\[1ex] \Gamma_{-1}(p),\ \forall p\in(\,-1;0),\\[1ex] \Gamma_{-2}(p),\ \forall p\in(\,-2;\ -1).\end{array}\right. \tag{13}$$

Если учесть формулы (6) и (10), то функцию (12) посредством гамма-функции можно задать формулой

$$\widehat{\Gamma}_{-2}\colon p\to \left[\begin{array}{l}\Gamma(p),\ \forall p\in(0;\ +\infty),\\[1ex] \dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\,,\ \forall p\in(\,-1;0),\\[1ex] \dfrac{\Gamma(p+2)}{p(p+1)}\,,\ \forall p\in(\,-2;\ -1).\end{array}\right. \tag{14}$$

Таким образом, функция $\widehat{\Gamma}_{-2}$, будучи продолжением функции $\widehat{\Gamma}_{-1}$, является продолжением и гамма-функции на множество $(\,-2;\ -1)\cup(\,-1;0)\cup(0;\ +\infty)$.

Продолжая описанный процесс, подобно формулам (5) и (13) строим рекуррентное продолжение гамма-функции

$$\widehat{\Gamma}\colon p\to \left[\begin{array}{l}\Gamma(p),\ \forall p\in(0;\ +\infty),\\[1ex] \Gamma_{-n}(p),\ \forall p\in(\,-n;\ -n+1),\ n=1,2,\dots\,,\end{array}\right.$$

где

$$\Gamma_{-n}\colon p\to \frac{\Gamma_{-n+1}(p+1)}{p}\,,\ \forall p\in(\,-n;\ -n+1),\ n=1,2,\dots\,,$$

с учётом формулы (2) при

$$\Gamma_0(p+1)=\Gamma(p+1),\ \forall p\in(\,-1;0).$$

Подобно построению формул (6) и (14) строим рекуррентное продолжение гамма-функции в виде

$$\widehat{\Gamma}\colon p \to \left[\begin{array}{l} \Gamma(p),\ \forall p \in (0;\,+\infty), \\[2ex] \dfrac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\,, \\[2ex] \qquad\qquad \forall p \in (-n;\,-n+1),\ n = 1, 2, \ldots\,. \end{array}\right. \tag{15}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered} \Gamma_{-n}(p) = \frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}\,, \\ \forall p \in (-n;\,-n+1),\ n = 1, 2, \ldots\,. \end{gathered} \tag{16}$$

При этом

$$\Gamma_{-n}(p) \sim \frac{(-1)^n}{n!(p+n)}$$

при $p \to -n+0,\ n = 1, 2, \ldots$, и

$$\Gamma_{-n}(p) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(p+n-1)}$$

при $p \to -(n-1)-0,\ n = 1, 2, \ldots$, и является бесконечно большой первого порядка в каждом случае.

Если положить

$$\theta = p + n,\ \forall p \in (-n;\,-n+1),\ n = 1, 2, \ldots,$$

то формула (16) примет вид

$$\Gamma_{-n}(\theta - n) = \frac{(-1)^n\Gamma(\theta)}{(1-\theta)(2-\theta)\cdot\ldots\cdot(n-\theta)}\,,\ \forall \theta \in (0;1),$$

при $n = 1, 2, \ldots$.

Отсюда следует, что на интервале $(-n; -n+1)$ при нечётном n функция Γ_{-n} является отрицательной, а при чётном n функция Γ_{-n} является положительной.

Продолжение $\widehat{\Gamma}$ гамма-функции построено на рисунке 1.

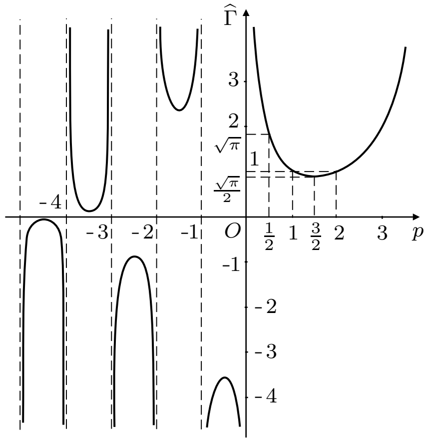

Рис. 1

21. Задачи

Задача 1. *Вычислите интеграл*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi)^3 \sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \cos^{-\frac{1}{2}}\varphi \, d\varphi.$$

Решение. Используя формулы

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx = \frac{1}{2}\, B\Big(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\Big), \ \forall \alpha, \beta \in (-1; +\infty),$$

$$B(x,y)=B(y,x),\ \forall x,y\in(0;\,+\infty),$$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,\ \forall x,y\in(0;\,+\infty),$$

$$\Gamma(2)=1,$$

$$\Gamma(1+x)=x\Gamma(x),\ \forall x\in(0;\,+\infty),$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\,,\ \forall x\in(0,1),$$

находим:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)^3\sin^{-\frac12}\varphi\,\cos^{-\frac12}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac12}\varphi\,\cos^{\frac52}\varphi\,d\varphi+3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac12}\varphi\,\cos^{\frac32}\varphi\,d\varphi+$$

$$+3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac32}\varphi\,\cos^{\frac12}\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac52}\varphi\,\cos^{-\frac12}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac12\,B\Big(\frac14\,,\frac74\Big)+\frac32\,B\Big(\frac34\,,\frac54\Big)+\frac32\,B\Big(\frac54\,,\frac34\Big)+\frac12\,B\Big(\frac74\,,\frac14\Big)=$$

$$=B\Big(\frac14\,,\frac74\Big)+3B\Big(\frac34\,,\frac54\Big)=\frac{\Gamma\Big(\frac14\Big)\Gamma\Big(\frac74\Big)}{\Gamma(2)}+3\,\frac{\Gamma\Big(\frac34\Big)\Gamma\Big(\frac54\Big)}{\Gamma(2)}=$$

$$=\Gamma\Big(\frac14\Big)\Gamma\Big(\frac74\Big)+3\Gamma\Big(\frac34\Big)\Gamma\Big(\frac54\Big)=\Gamma\Big(\frac14\Big)\Gamma\Big(1+\frac34\Big)+3\Gamma\Big(\frac34\Big)\Gamma\Big(1+\frac14\Big)=$$

$$=\frac34\,\Gamma\Big(\frac14\Big)\Gamma\Big(\frac34\Big)+\frac34\,\Gamma\Big(\frac34\Big)\Gamma\Big(\frac14\Big)=\frac32\,\Gamma\Big(\frac14\Big)\Gamma\Big(1-\frac14\Big)=$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\pi.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,\pi$.

Задача 2. *Вычислите несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}\,.$$

Решение. Выполним замену $x = 2t, \ \forall t \in (0;1)$, при которой

$$\sqrt[3]{x^2(2-x)} = 2\ \sqrt[3]{t^2(1-t)}\,, \ \forall t \in (0;1).$$

Тогда интеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2(1-t)}} = \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{3}-1}(1-t)^{\frac{2}{3}-1}\,dt =$$

$$= B\Big(\frac{1}{2}\,, \frac{2}{3}\Big) = B\Big(\frac{1}{3}\,, 1-\frac{1}{3}\Big) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{3}\,.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{3}$.

Задача 3. *Вычислите интеграл*

$$\int\limits_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\,dx.$$

Указание. Выполните подстановку $2 - x = t, \ \forall t \in (0;1)$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{27}$.

Задача 4. *Вычислите несобственный интеграл*

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}\,.$$

Указание. Выполните замену $x = 2(2z-1)$, $\forall z \in (0;1)$.
Ответ: $\pi\sqrt{2}$.

Задача 5. *Вычислите несобственный интеграл*

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}\,.$$

Указание. Выполните подстановку $x^3 = t$, $\forall t \in [0;\,+\infty)$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$.

Задача 6. *Вычислите интеграл*

$$I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx,\ \forall p \in (0;1).$$

Решение. Введём в рассмотрение вспомогательный несобственный интеграл, зависящий от параметра,

$$H(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,\ \forall p \in (0;1). \tag{1}$$

Допустим, что относительно этого интеграла выполняются условия теоремы о дифференцировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, по которой производная

$$\mathsf{D}H(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} \partial_p\,\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx = I(p),\ \forall p \in (0;1).$$

Итак,

$$I(p) = \mathsf{D}H(p), \ \forall p \in (0;1). \tag{2}$$

Используя свойства бета- и гамма-функций, устанавливаем, что

$$H(p) = B(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,, \ \forall p \in (0;1). \tag{3}$$

Отсюда, по формуле (2), находим:

$$I(p) = \mathsf{D}H(p) = \mathsf{D}\,\frac{\pi}{\sin p\pi} \ = \ -\,\pi^2 \cdot \frac{\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\,, \ \forall p \in (0;1).$$

Итак, интеграл I вычислен, если докажем, что имеет место формула дифференцирования под знаком несобственного интеграла:

$$\mathsf{D}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \partial_p\,\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx, \ \forall p \in (0;1).$$

Для этого интеграл (1) представим в виде суммы

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p), \ \forall p \in (0;1),$$

несобственных интегралов, зависящих от параметра,

$$H_1(p) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx, \ \forall p \in (0;1), \quad \text{и} \quad H_2(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx, \ \forall p \in (0;1).$$

У интегралов H_1 и H_2 подынтегральные функции

$$F_1\colon\ (x,p) \to \frac{x^{p-1}}{1+x}\,, \ \forall x \in (0;1], \ \forall p \in (0;1),$$

и

$$F_2\colon (x,p) \to \frac{x^{p-1}}{1+x}\,, \ \forall x \in [1;\,+\infty), \ \forall p \in (0;1),$$

непрерывны.

Из представления (3) следует сходимость на интервале $(0;1)$ интеграла H, а вместе с ним и интегралов-слагаемых H_1 и H_2.

Частные производные

$$\partial_p F_1\colon (x,p) \to \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,,\ \forall x \in (0;1],\ \forall p \in (0;1),$$

и

$$\partial_p F_2\colon (x,p) \to \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,,\ \forall x \in [1;\,+\infty),\ \forall p \in (0;1),$$

при каждом фиксированном значении переменной x из соответствующего числового промежутка являются функциями переменной p, непрерывными на интервале $(0;1)$.

Равномерную сходимость на отрезке $[\delta; 1-\delta]$, содержащемся в интервале $(0;1)$, сужений интегралов

$$I_1(p) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx,\ \forall p \in (0;1),$$

и

$$I_2(p) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx,\ \forall p \in (0;1),$$

устанавливаем по признаку Вейерштрасса равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла с параметром (теорема 1.3.1) на основании оценок

$$\frac{x^{p-1}|\ln x|}{1+x} < x^{p-1}|\ln x| \leqslant x^{\delta-1}|\ln x| < x^{\frac{\delta}{2}-1},$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_+(\varepsilon;0),\ \forall p \in [\delta; 1-\delta],$$

и

$$\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x} < \frac{x^{p-1}\ln x}{x} \leqslant \frac{x^{(1-\delta)-1}\ln x}{x} = x^{-(1+\delta)}\ln x \leqslant x^{-\left(1+\frac{\delta}{2}\right)},$$

$$\forall x \in \mathrm{U}_-(\varepsilon;\,+\infty),\ \forall p \in [\delta; 1-\delta],$$

и сходимости интегралов

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-\frac{\delta}{2}}} \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\frac{\delta}{2}}} \quad \text{при} \quad \delta > 0.$$

Оценка

$$|\ln x| < x^{-\frac{\delta}{2}}, \ \forall x \in \overset{\circ}{\mathrm{U}}_+(\varepsilon; 0), \quad \text{при} \quad 0 < \delta < 1$$

следует из того, что существует такое положительное число ε, когда непрерывная отрицательная функция

$$\varphi \colon x \to x^{\frac{\delta}{2}} \ln x, \ \forall x \in (0; \varepsilon), \ \ (0 < \delta < 1)$$

возрастая, стремится к нулю:

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{\delta}{2}}} = \lim_{x \to +0} \frac{x^{-1}}{-\dfrac{\delta}{2}\, x^{-\frac{\delta}{2}-1}} = -\frac{2}{\delta} \lim_{x \to +0} x^{\frac{\delta}{2}} = 0.$$

Оценка

$$\ln x < x^{\frac{\delta}{2}}, \ \forall x \in (\varepsilon; +\infty), \quad \text{при} \quad 0 < \delta < 1$$

следует из того, что существует такое положительное число ε, когда непрерывная положительная функция

$$\psi \colon x \to x^{-\frac{\delta}{2}} \ln x, \ \forall x \in (\varepsilon; +\infty), \ \ (0 < \delta < 1)$$

убывая, стремится к нулю:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{\delta}{2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1}}{\dfrac{\delta}{2}\, x^{\frac{\delta}{2}-1}} = \frac{2}{\delta} \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\delta}{2}} = 0.$$

Ответ: $-\pi^2 \cdot \dfrac{\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$.

Задача 7. *Вычислите несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3}\, dx.$$

Указание. Выполните замену

$$x = \sqrt[3]{t}\,,\ \forall t \in (0;\, +\infty).$$

Ответ: $\dfrac{2}{27}\,\pi^2$.

Задача 8. *Докажите, что сумма S ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{(na+1)(na+2)\cdot\ldots\cdot(na+k)} \quad (a>0)$$

выражается интегралом

$$S = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{k-1} f(t^a)\, dt,$$

если

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x),\ \forall x \in (\,-1;1).$$

Доказательство. Используя разложение функции f в степенной ряд на интервале $(\,-1;1)$ и основываясь на теореме о почленном интегрировании сходящихся степенных рядов, находим:

$$\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{k-1} f(t^a)\, dt = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{an}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int\limits_0^1 t^{an}(1-t)^{k-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n B(an+1, k) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(k-1)!}{(na+1)(na+2)\cdot\ldots\cdot(na+k)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{(na+1)(na+2)\cdot\ldots\cdot(na+k)} \,. \blacksquare$$

Задача 9. *Найдите сумму ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} \,.$$

Решение. Основываясь на задаче 8, находим, что $k = 3$, $a = 4$, $c_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \,, \ \forall x \in (-1; 1),$$

а значит,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} = \frac{1}{2!} \int\limits_0^1 (1-t)^2 \cdot \frac{1}{1+t^4}\, dt = \frac{1}{2}\, I.$$

В интеграле I выполним подстановку

$$t^4 = x, \ \forall x \in [0; 1],$$

при которой

$$t = \sqrt[4]{x}\,, \quad dt = \frac{1}{4}\, x^{-\frac{3}{4}}\, dx,$$

если $t = 0$, то $x = 0$ и если $t = 1$, то $x = 1$.

Тогда

$$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{(1-\sqrt[4]{x}\,)^2\,x^{-\frac{3}{4}}}{1+x}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{(1-2\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\,)\,x^{-\frac{3}{4}}}{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{x^{-\frac{3}{4}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}}{1+x}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{1}{4}-1} + x^{\frac{3}{4}-1}}{1+x}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{1}{4}\,B\Big(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\Big) - \int\limits_0^1 \frac{d\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x}\,)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,B\Big(\frac{1}{4}, 1-\frac{1}{4}\Big) - \big[\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\big]_0^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} - \Big(\frac{\pi}{4} - 0\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,\big(\sqrt{2}-1\big).$$

Поэтому сумма

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\,\big(\sqrt{2}-1\big) = \frac{\sqrt{2}-1}{8}\,\pi.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}-1}{8}\,\pi.$

В задачах 10 – 35 на основании задачи 8 найдите сумму ряда:

Задача 10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\,.$ *Ответ*: $\ln 2.$

Задача 11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}\,.$ *Ответ*: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\,\pi.$

Задача 12. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$. *Ответ*: $\frac{\pi + 2\ln 2}{8}$.

Задача 13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$. *Ответ*: $-1 + 2\ln 2$.

Задача 14. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)}$. *Ответ*: $\frac{\pi - 2\ln 2}{4}$.

Задача 15. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(3n+1)(3n+2)}$. *Ответ*: $\frac{2}{3}\ln 2$.

Задача 16. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n}}{(4n+1)(4n+2)}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2}\,) + \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)$.

Задача 17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}$.

Задача 18. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$. *Ответ*: $-\frac{1}{2} + \ln 2$.

Задача 19. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$. *Ответ*: $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}\ln 3$.

Задача 20. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$. *Ответ*: $\frac{1}{4}\ln 2$.

Задача 21. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$. *Ответ*: $-\dfrac{5}{4} + 2\ln 2$.

Задача 22. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$. *Ответ*: $\dfrac{1-\ln 2}{2}$.

Задача 23. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$. *Ответ*: $\dfrac{2}{3}\ln 2 - \dfrac{\sqrt{3}}{18}\pi$.

Задача 24. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

Ответ: $\dfrac{-5+8\ln 2}{12}$.

Задача 25. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

Ответ: $\dfrac{5-\pi}{12} - \dfrac{1}{6}\ln 2$.

Задача 26. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Ответ: $\displaystyle\int\limits_0^1 (1-t)\ln(1+t^2)\,dt = \dfrac{\pi-3}{2}$.

Задача 27. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

Ответ: $\displaystyle \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2\ln(1+t^2)\,dt = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2}-\ln 2-\frac{5}{6}\Big).$

Задача 28. $\displaystyle \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{(4n+3)(4n+4)(4n+5)}\,.$

Ответ: $\displaystyle \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2\operatorname{arctg} t^2\,dt =$

$$= \frac{1}{4}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2}\,)-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{24}\,(2\sqrt{2}-1).$$

Задача 29. $\displaystyle \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\,.$

Ответ: $\displaystyle \int\limits_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln(1+\sqrt{2}\,)-(\sqrt{2}-1).$

Задача 30. $\displaystyle \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\,.$

Ответ: $\displaystyle \int\limits_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}-1.$

Задача 31. $\displaystyle \frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\,.$

Ответ: $\displaystyle \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = 1-\frac{1}{4}\big(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}\,)\big).$

Задача 32. $\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\,.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{(1-t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\dfrac{3\pi}{8}-1.$

Задача 33. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\,.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^2\ln\dfrac{1}{1-t^2}\,dt=\dfrac{17}{18}-\dfrac{4}{3}\,\ln 2.$

Задача 34. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}\cdot\dfrac{1}{2^n}\,.$

Ответ: $\int\limits_0^1\dfrac{t^2(1-t)^2}{2+t}\,dt=36\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{175}{12}\,.$

Задача 35. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\cdot\dfrac{1}{3^n}\,.$

Ответ: $\dfrac{3}{2}\int\limits_0^1\dfrac{t(1-t)^2}{3+t^2}\,dt=\dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\dfrac{3}{2}-\ln\dfrac{4}{3}\Big).$

Задача 36. *Выразите через эйлеровы интегралы*

$$I(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^pe^{-qx}\ln x\,dx\ \ (q>0).$$

Решение. После замены

$$x = \frac{t}{q}\,,\ \forall t \in (0;\,+\infty),$$

при которой

$$t = qx, \quad dx = \frac{1}{q}\,dt,$$

если $x \to 0$, то $t \to 0$, а если $x \to +\infty$, то $t \to +\infty$, получаем:

$$I(p) = \frac{1}{q^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t\, dt - \frac{\ln q}{q^{p+1}} \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt.$$

Первый интеграл есть производная от гамма-функции аргумента $p+1,\ p > -1$, а второй равен $\Gamma(p+1)$. Поэтому

$$I(p) = \frac{\Gamma'(p+1)}{q^{p+1}} - \frac{\ln q}{q^{p+1}}\,\Gamma(p+1) =$$

$$= \frac{d}{dp}\biggl(\frac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}\biggr),\ \forall p \in (-1;\,+\infty),\ \ q > 0.$$

Ответ: $\dfrac{d}{dp}\biggl(\dfrac{\Gamma(p+1)}{q^{p+1}}\biggr),\ \forall p \in (-1;\,+\infty).$

Задача 37. *Выразите через эйлеровы интегралы*

$$\int\limits_0^1 \Bigl(\ln\frac{1}{x}\Bigr)^p dx.$$

Решение. Применяя подстановку

$$\ln\frac{1}{x} = t,\ \forall x \in (0;1],$$

при которой

$$x = e^{-t}, \quad dx = -e^{-t}\,dt,$$

если $x \to +0$, то новая переменная $t \to +\infty$, а если $x = 1$, то новая переменная $t = 0$, получаем:

$$\int\limits_0^1 \Bigl(\ln\frac{1}{x}\Bigr)^p dx = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt = \Gamma(p+1),\ \forall p \in (-1; +\infty).$$

Ответ: $\Gamma(p+1)$, $\forall p \in (-1; +\infty)$.

Задача 38. *Найдите первую и вторую производные функции*

$$\beta\colon p \to B(p, 1-p),\ \forall p \in (0; 1),$$

где B *— бета-функция.*

Решение. Так как бета-функция

$$B(p, 1-p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx,\ \forall p \in (0; 1),$$

то первая производная функция

$$\beta'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\, dx,\ \forall p \in (0; 1),$$

а вторая производная функция

$$\beta''(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\, dx,\ \forall p \in (0; 1).$$

Ответ: $\beta'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\, dx,\ \forall p \in (0; 1),$

$$\beta''(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\, dx,\ \forall p \in (0; 1).$$

Задача 39. *Вычислите*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1 + x^4}\, dx.$$

Решение. Применяя подстановку

$$x = \sqrt[4]{t}\,,\ \forall t \in (0;\, +\infty),$$

получаем, что

$$I = \frac{1}{64} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}} \ln^2 t}{1 + t}\, dt.$$

Учитывая результаты задачи 38 устанавливаем, что

$$I = \frac{1}{64}\, \beta''\Big(\frac{1}{4}\Big),$$

где $\beta(p) = B(p, 1 - p)$, $\forall p \in (0; 1)$.

Следовательно,

$$I = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2}\Big(B(p, 1 - p)\Big)\Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2}\Big(\frac{\pi}{\sin \pi p}\Big)\Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{64}\, \pi^3.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{64}\, \pi^3$.

Задача 40. *Вычислите*

$$I(p, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1 + x) \ln x}\, dx,\ \forall p,\ q \in (0; 1).$$

Решение. Относительно интеграла

$$J(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{(1 + x) \ln x}\, dx,\ \ 0 < s < 1,$$

заметим, что

$$J'(s) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{1+x}\, dx = B(s, 1-s),\ \forall s \in (0;1).$$

Тогда

$$I(p,q) = J(p) - J(q) = \int B(p, 1-p)\, dp - \int B(q, 1-q)\, dq + C, \forall p,q \in (0;1),$$

где C — некоторая постоянная.

Учитывая, что

$$B(s, 1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\ ,\ \forall s \in (0;1),$$

имеем:

$$I(p,q) = \pi \int \frac{dp}{\sin \pi p} - \pi \int \frac{dq}{\sin \pi q} + C = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi q}{2}} \right| + C,\ \forall p,q \in (0;1).$$

Полагая $q = p$, устанавливаем, что $C = 0$.

Таким образом,

$$I(p,q) = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi q}{2}} \right|,\ \forall p,q \in (0;1).$$

Ответ: $\pi \ln \left| \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi q}{2}} \right|,\ \forall p,q \in (0;1).$

Задача 41. *Вычислите*

$$I(p) = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx \quad (0 < p < 1).$$

Решение. Интеграл I является несобственным с граничной особой точкой $x = 0$.

Введём в рассмотрение интеграл

$$J(q) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-q}}\, dx,\ \forall q \in [0;\, +\infty),\ \ (0 < p < 1).$$

Интеграл J равномерно абсолютно сходится при $q \geqslant 0$, что устанавливаем по признаку Вейерштрасса (теорема 1.3.1) равномерной абсолютной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, используя оценку

$$\left|\frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-q}}\right| \leqslant \frac{\left|x^{p-1} - x^{-p}\right|}{1-x}\,,\ \forall x, p \in (0;1),\ \forall q \in [0;\, +\infty),$$

и сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{\left|x^{p-1} - x^{-p}\right|}{1-x}\, dx.$$

Поскольку подынтегральная функция

$$f\colon (x,q) \to \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-q}}\,,\ \forall x \in (0;1),\ \forall q \in [0;\, +\infty),\ \ (0 < p < 1)$$

непрерывна, а интеграл J равномерно сходится на $[0;\, +\infty)$, то заданная несобственным интегралом с параметром функция

$$J\colon q \to J(q)$$

на любом отрезке $[0;a] \subset [0;+\infty)$ непрерывна (теорема 1.2.2) и возможен предельный переход при $q \to +0$ под знаком интеграла:

$$\lim_{q \to +0} J(q) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x}\, dx. \tag{4}$$

Согласно определению бета-функции

$$J(q) = B(p,q) - B(1-p,q),\ \forall p \in (0;1),\ \forall q \in (0;\, +\infty).$$

Тогда из равенства (4) с учётом формулы Эйлера (1.12) имеем

$$I(p) = \lim_{q\to+0}\bigl(B(p,q) - B(1-p,q)\bigr) =$$

$$= \lim_{q\to+0}\Gamma(q)\Bigl(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+q)}\Bigr).$$

Отсюда с учётом формулы приведения, по которой

$$\Gamma(q) = \frac{\Gamma(q+1)}{q}\,,\ \forall q \in (0;\,+\infty),$$

применяя правило Лопиталя, получаем, что несобственный интеграл с параметром

$$I(p) = \lim_{q\to+0}\frac{\Gamma(q+1)\Bigl(\dfrac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} - \dfrac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+q)}\Bigr)}{q} =$$

$$= \lim_{q\to+0}\biggl(\Gamma'(q+1)\biggl(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+q)}\biggr) +$$

$$+\,\Gamma'(q+1)\biggl(-\frac{\Gamma(p)\Gamma'(p+q)}{\Gamma^2(p+q)} + \frac{\Gamma(1-p)\Gamma'(1-p+q)}{\Gamma^2(1-p+q)}\biggr)\biggr) =$$

$$= \lim_{q\to+0}\biggl(\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+q)}\cdot\frac{\Gamma'(1-p+q)}{\Gamma(1-p+q)} - \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\cdot\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}\biggr) =$$

$$= \lim_{q\to+0}\biggl(\frac{\Gamma'(1-p+q)}{\Gamma(1-p+q)} - \frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}\biggr) = \frac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)} - \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} =$$

$$= -\,\bigl(\ln\bigl(\Gamma(1-p)\Gamma(p)\bigr)\bigr)' = -\,\Bigl(\ln\frac{\pi}{\sin\pi p}\Bigr)' =$$

$$= -\,\bigl(\ln\pi - \ln\sin\pi p\bigr)' == \bigl(\ln\sin\pi p\bigr)' = \pi\operatorname{ctg}\pi p.$$

Ответ: $\pi\operatorname{ctg}\pi p$.

Задача 42. *Вычислите*

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx\quad (0<\alpha<\beta).$$

Решение. С учётом определения гиперболического синуса интеграл

$$I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\beta x}(1-e^{-2\beta x})}\,dx.$$

Применяя подстановку

$$e^{-2\beta x}=t,\ \forall t\in(0;1),$$

при которой

$$x=-\frac{1}{2\beta}\ln t,\quad dx=-\frac{1}{2\beta t}\,dt,$$

если $x\to+0$, то новая переменная $t\to 1$, а если $x\to+\infty$, то новая переменная $t\to 0$, получаем:

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^1\frac{t^{p-1}-t^{-p}}{1-t}\,dt,$$

где $p=\dfrac{\beta-\alpha}{2\beta}$, причём $0<\alpha<\beta$.

Поскольку $0<p<0{,}5$, то, используя результаты задачи 41, будем иметь, что

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{ctg}\Big(\pi\,\frac{\beta-\alpha}{2\beta}\Big)=\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi\alpha}{2\beta}\Big)=$$

$$=\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2\beta}\quad(0<\alpha<\beta).$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}$, $0<\alpha<\beta$.

Задача 43. *Вычислите*

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx,$$

где Γ *— гамма-функция.*

Решение. После замены

$$x = 1 - t,\ \forall t \in (0;1),$$

при которой

$$t = 1 - x,\ \ dx = -\,dt,$$

если $x \to 0$, то $t \to 1$, а если $x \to 1$, то $t \to 0$, получаем:

$$I = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-t)\sin\pi t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \bigl(\ln\Gamma(t) + \ln\Gamma(1-t)\bigr)\sin\pi t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\bigl(\Gamma(t)\Gamma(1-t)\bigr)\sin\pi t\,dt.$$

Используя формулу дополнения (1.13), будем иметь:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\Bigl(\frac{\pi}{\sin\pi t}\Bigr)\sin\pi t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \bigl(\ln\pi - \ln\sin\pi t\bigr)\sin\pi t\,dt = \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \ln\sin\pi t\sin\pi t\,dt =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \ln\sin\pi t\sin\pi t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \ln\pi + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \ln\sin\pi t\,d\cos\pi t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \ln\pi + \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\Big[\cos\pi t\ln\sin\pi t\Big]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\cos^2\pi t}{\sin\pi t}\ d(\pi t)\right) =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\Big[\cos\pi t\ln\sin\pi t\Big]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{d(\pi t)}{\sin\pi t} + \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sin\pi t\, d(\pi t)\right) =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\cos\pi t\ln\sin\pi t - \ln\frac{\sin\pi t}{1+\cos\pi t} - \cos\pi t\right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\cos\pi t + (1-\cos\pi t)\ln\sin\pi t - \ln(1+\cos\pi t)\Big]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\big(-2\cos\pi\varepsilon + 2\cos\pi\varepsilon\ln\sin\pi\varepsilon +$$

$$+ \ln(1+\cos\pi\varepsilon) - \ln(1-\cos\pi\varepsilon)\big) = \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\big(-2\cos\pi\varepsilon +$$

$$+ \cos\pi\varepsilon\ln(1-\cos^2\pi\varepsilon) + \ln(1+\cos\pi\varepsilon) - \ln(1-\cos\pi\varepsilon)\big) =$$

$$= \frac{\ln\pi}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ \lim_{\varepsilon\to+0}\big(-2\cos\pi\varepsilon\ ++(1+\cos\pi\varepsilon)\ln(1+\cos\pi\varepsilon) -$$

$$-(1-\cos\pi\varepsilon)\ln(1-\cos\pi\varepsilon)\big) = \frac{1}{\pi}\Big(1+\ln\frac{\pi}{2}\Big),$$

так как предел

$$\lim_{y\to+0} y\ln y = \lim_{y\to+0}\frac{\mathsf{D}\ln y}{\mathsf{D}\,\dfrac{1}{y}} = \lim_{y\to+0}(-y) = 0.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\pi}\Big(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\Big)$.

Задача 44. *Докажите равенство*

$$\prod_{m=1}^{n} \int\limits_{0}^{+\infty} x^{m-1}\, e^{-x^n}\, dx = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \tag{5}$$

при любом натуральном n.

Доказательство. Выполняя замену

$$x = t^{\frac{1}{n}} \quad (t > 0),$$

при которой

$$dx = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}\, dt,$$

новая переменная $t \to 0$ при $x \to 0$, а при $x \to +\infty$ — $t \to +\infty$, получаем, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1}\, e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{n}\, \Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big), \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, произведение

$$\prod_{m=1}^{n} \int\limits_{0}^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n^n} \prod_{m=1}^{n} \Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big), \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

При $n = 1$ равенство (5) с учётом (6) обращается в числовое тождество $1 = 1$.

Пусть $n \geqslant 2$. Поскольку квадрат произведения

$$\Big(\prod_{m=1}^{n} \Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big)^2 = \Big(\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big) \cdot \ldots \cdot \Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Big) \cdot$$

$$\cdot\left(\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)=$$

$$=\left(\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\right)\left(\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big)\right)\cdot\ldots\cdot\left(\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\right),$$

то с учётом формулы дополнения гамма-функции при $n \geqslant 2$ находим

$$\left(\prod_{m=1}^{n}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)\right)^2=\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{n}}$$

или

$$\prod_{m=1}^{n}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{n}}}\ .$$

Тогда, используя формулу

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}\quad(n\geqslant 2),$$

получаем

$$\prod_{m=1}^{n}\Gamma\Big(\frac{m}{n}\Big)=\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\quad(n\geqslant 2).$$

Отсюда на основании тождества (6) заключаем, что равенство (5) имеет место при $n \geqslant 2$.

Итак, равенство (5) выполняется при любом натуральном n. ■

Задача 45. *Используя равенство*

$$\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_{0}^{+\infty}t^{m-1}e^{-xt}\,dt,\ \forall x\in(0;+\infty),$$

найдите интеграл

$$I(a,m)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^m}\,dx,$$

где $a\neq 0,\ 0<m<1.$

Решение. Согласно условию задачи интеграл I можно представить следующим образом:

$$I(a,m)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to+0}}\int\limits_\delta^{A}dx\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax\,dt. \tag{7}$$

Функция

$$f\colon (t,x)\to t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax,\ \forall t\in(0;\,+\infty),\ \forall x\in[\delta;A],$$

является непрерывной.

Несобственный интеграл, зависящий от параметра x,

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax\,dt,$$

по признаку Вейерштрасса, равномерно сходится по x на $[\delta;A],$ так как

$$\left|t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax\right|\leqslant t^{m-1}\,e^{-\delta t},\ \forall t\in(0;\,+\infty),\ \forall x\in[\delta;A],$$

и сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}\,e^{-\delta t}\,dt\quad(0<m<1).$$

Следовательно, по теореме 1.4.2 (об интегрировании функции, заданной несобственным интегралом, зависящим от параметра, в собственном смысле), в повторном интеграле (7) можно изменить порядок интегрирования:

$$I(a,m)=\frac{1}{\Gamma(m)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to+0}}\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_\delta^A t^{m-1}\,e^{-xt}\cos ax\,dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to+0}}\int\limits_0^{+\infty}t^{m-1}\left[\frac{a\sin ax-t\cos ax}{a^2+t^2}\,e^{-tx}\right]_{x=\delta}^{x=A}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to+0}}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{m-1}\,(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}\,e^{-At}\,dt+$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^m\cos a\delta}{a^2+t^2}\,e^{-\delta t}\,dt-a\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{m-1}\sin a\delta}{a^2+t^2}\,e^{-\delta t}\,dt\Bigg).$$

В скобках первый интеграл-слагаемое при $A\to+\infty$ сремится к нулю, поскольку

$$\left|\int\limits_0^1\frac{t^{m-1}\,(a\sin aA-t\cos aA)}{(a^2+t^2)e^{At}}\,dt+\int\limits_1^{+\infty}\frac{t^{m-1}\,(a\sin aA-t\cos aA)}{(a^2+t^2)e^{At}}\,dt\right|<$$

$$<\frac{1+|a|}{a^2}\int\limits_0^1 e^{-At}\,dt+e^{-A}\int\limits_1^{+\infty}\frac{t^{m-1}\,(|a|+t)}{a^2+t^2}\,dt\quad(a\neq0,\ 0<m<1).$$

Второй интеграл-слагаемое, по признаку Вейерштрасса, равномерно сходится по δ на отрезке $[0;\delta_0]$. Кроме того его подынтегральная функция непрерывна на множестве $\{(t,\delta)\colon 0\leqslant t<+\infty,\,0\leqslant\delta\leqslant\delta_0\}$, а её сужение на всяком отрезке $[0;\eta]\subset[0;+\infty)$ при $\delta\to+0$ равномерно сходится к функции

$$\varphi\colon t\to\frac{t^m}{a^2+t^2}\,,\ \ \forall t\in[0;\eta],\ \ (0<m<1).$$

Поэтому, по теореме 1.1.2 (о предельном переходе под знаком несобственного интеграла), второй интеграл-слагаемое при $\delta\to+0$ стремится к интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^m}{a^2+t^2}\,dt = \frac{|a|^{m-1}}{2}\,B\Big(\frac{m+1}{2}\,,\,1-\frac{m+1}{2}\Big) =$$

$$= \frac{\pi|a|^{m-1}}{2\sin\Big(\dfrac{m+1}{2}\,\pi\Big)} = \frac{\pi|a|^{m-1}}{2\cos\dfrac{\pi m}{2}} \quad (a\neq 0,\ 0<m<1),$$

где использованы значение интеграла (2.7) и формула (9.6) дополнения бета-функции.

Применяя теорему о предельном переходе под знаком несобственного интеграла (теорема 1.2.2) для третьего интеграла-слагаемого, устанавливаем, что он стремится к нулю при $\delta \to +0$.

Итак, интеграл

$$I(a,m) = \frac{\pi|a|^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\dfrac{\pi m}{2}} \quad (a\neq 0,\ 0<m<1).$$

Ответ: $\dfrac{\pi|a|^{m-1}}{2\Gamma(m)\cos\dfrac{\pi m}{2}}$, $a\neq 0,\ 0<m<1.$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Горбузов Виктор Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Учебное пособие

Редактор Н.Н. Красницкая
Компьютерная верстка: С.Н. Даранчук

Сдано в набор 12.03.2006. Подписано в печать 17.04.2006.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 28,76. Уч.-изд. л. 27,28. Тираж 300 экз. Заказ

Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»
ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике издательского центра
Учреждения образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы»
ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.