

Галкин С. В.

**Краткий курс математического анализа
в лекционном изложении
для студентов МГТУ им. Н. Э. Баумана
(первый семестр)**

М. 2005г.

Лекции 1,2. Введение, элементы математической логики и теории множеств.

1. Числа.

На первом курсе будущим инженерам читают две математических дисциплины: алгебру (линейную алгебру) и анализ (математический анализ). Алгебра имеет дело со структурами объектов, анализ - с процессами изменения объектов.

Еще в школе мы изучаем числа. **Натуральные числа** (класс, множество натуральных чисел обозначается N) могут быть представлены в виде суммы конечного числа единиц, например, $4=1+1+1+1$. Если взять все натуральные числа, нуль, все натуральные числа со знаком "минус", мы получим **целые числа** (класс, множество целых чисел обозначается Z). **Рациональные числа** (класс, множество рациональных чисел обозначается Q) могут быть представлены в виде отношения (ratio - отношение) двух целых чисел:

$q = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$. Рациональные числа можно представить конечной или бесконечной периодической дробью, например, $1/4 = 0,25$, $4/3 = 1,3$, $17/45 = 0,3777...$. Числа, которые представляются бесконечной непериодической дробью, называются **иррациональными числами**. Иррациональные числа известны очень давно, некоторые из них имеют фундаментальное значение и обозначаются специальными буквами

($\sqrt{2} = 1,4142...$, $\sqrt{3} = 1,732...$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau = 1,618...$, $\pi = 3,1415...$, $e = 2,718...$).

Рациональные и иррациональные числа образуют **действительные числа** (класс, множество действительных чисел обозначается R).

С изучения свойств чисел как структур началась алгебра: например, целые числа являются примером одной из основных алгебраических структур - группы.

С изучением свойств различных комбинаций чисел родилась комбинаторика, а затем и теория вероятностей.

Изучение порядка следования чисел, числовых последовательностей постепенно переросло в изучение изменений, переменных величин, функциональных зависимостей. Математика стала изучать процессы, их динамику, начался математический анализ.

За много веков развития математики различные ее ветви переплелись так, что часто невозможно сказать, с чем мы имеем дело, с алгебраическим, функциональным, вероятностным или каким либо иным исследованием. Исследуются алгебраические структуры функций, операторов, изменения алгебраических структур, случайные процессы и т.д. Математика едина, она имеет единый символический язык, который тоже развивается, изучается, причем теми же математическими средствами. Этот язык служит основой современных компьютеров, а компьютерный язык, программирование 40 лет назад стали самостоятельными математическими дисциплинами. Многие области науки, техники "математизированы" и "компьютеризированы" так, что современный инженер просто обязан хорошо знать основы математики и владеть ее языком.

Язык математики имеет свои правила, он основан на математической логике, теории множеств (в статике) и правилах упорядочения (в динамике) - правилах перехода от причин к следствиям, правилах доказательств.

Метод математической индукции.

Метод полной математической индукции - это метод доказательства, основанный на принципе математической индукции.

Принцип математической индукции. Утверждение $A(n)$, зависящее от натурального параметра n верно для любого натурального n , если:

- доказано $A(1)$ (или $A(N_0)$, N_0 - натуральное число),
- предполагается справедливость $A(n)$ - индуктивное предположение,
- доказывается $A(n+1)$ на основе первых двух пунктов.

Пример. Доказать $1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$.

При $n=1$ утверждение справедливо. Пусть справедливо $1+3+5+\dots+2n-1 = n^2$ для некоторого натурального n . Докажем утверждение для $n+1$.

$$1+3+5+\dots+(2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Пример. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x \geq -1$).

При $n=1$ неравенство выполнено. Предположим, что оно выполнено при некотором натуральном n . Докажем, что оно выполнено при $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x.$$

Следовательно, неравенство выполнено для любого натурального n .

Метод полной математической индукции известен очень давно, но и сейчас он используется довольно часто при доказательстве теорем.

2. Элементы математической логики.

В математической логике имеют дело с высказываниями. **Простое высказывание** - это некоторое утверждение, которое либо истинно, либо ложно. Например, высказывание "2 - четное число" истинно, а "3 - четное число" ложно. Такие высказывания не изменяют истинности, это - логические константы (И - всегда истинное и Л - всегда ложное высказывания). Есть высказывания, истинность которых зависит от некоторых условий, например $\sin x > 0$. Оно истинно, если $2\pi l < x < (2n+1)\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и ложно при других значениях x .

Над высказываниями можно производить **логические операции**. Истинность результата логической операции устанавливают по таблице истинности, которая задает истинность результата в зависимости от истинности операндов. Рассмотрим основные логические операции: **отрицание**, **конъюнкцию** (логическое умножение), **дизъюнкцию** (логическое сложение), **импликацию** (следование) и **эквиваленцию**.

Отрицание ($\neg A$, $\bar{A}$, "не A "). Высказывание $\neg A$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Например $A: x = 0$, $\neg A: x \neq 0$.

Таблица истинности строится так:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Конъюнкция (логическое умножение) ($A \wedge B$, "A и B"). $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда A истинно и B истинно. Если A или B ложно, то $A \wedge B$ ложно. Пусть, например, A : $x + y = 1$, B : $x - y = 0$ (x, y - действительные числа). Тогда $A \wedge B$: $x = y = 1/2$. Пара (x, y) является решением системы уравнений, если она является решением и первого, и второго уравнения.

Таблица истинности строится так:

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкция (логическое сложение) ($A \vee B$, "A или B"). $A \vee B$ истинно, если A истинно или B истинно. Например, если A : $x-1=0$, B : $x-2=0$ (x - действительное число), то $A \vee B$: $(x-1)(x-2)=0$.

Таблица истинности строится так:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Импликация (следование) ($A \Rightarrow B$, "если A , то B ", "для B достаточно A ", "для A необходимо B "). $A \Rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A - истинно, а B - ложно (из истины не может следовать ложь).

Таблица истинности строится так:

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Докажем в качестве примера закон транзитивности для действительных чисел, т.е. $K: (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ - всегда истинно, составив таблицу истинности.

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$K: (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	И	И

В самом деле, высказывание K истинно при всех значениях A, B, C .

Эквиваленция (эквивалентность, $A \Leftrightarrow B$). $A \Leftrightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают, т.е. A и B ложны или A и B истинны.

Таблица истинности строится так:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

В качестве примера докажем справедливость способа доказательства теорем "от противного": $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, составив таблицу истинности.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
И	И	Л	Л	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И

Свойства логических операций.

1. $\neg(\neg A) = A$ (двойное отрицание)
2. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ - ассоциативность,
3. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - дистрибутивность,
4. $\neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) = (\neg A \wedge \neg B)$ - законы де Моргана.

Справедливость свойств доказывается с помощью таблиц истинности. Проверьте справедливость некоторых свойств.

Заметим, что законы ассоциативности для чисел $(A(BC) = (AB)C$ - для умножения и $(A+B)+C = A+(B+C)$) аналогичны логическим. Законы дистрибутивности для чисел несколько иные. Для чисел $A(B+C) = AB+AC$, совсем как в логике, но $A+(BC) \neq (A+B)(A+C)$. Из этого следует, что законы арифметики, по которым до сих пор строятся компьютеры, отличаются от законов логики, по которым мыслит человек. Поэтому для того, чтобы сконструировать интеллектуального робота, подобного человеку, мало увеличить память и скорость выполнения операций. Надо изменить принцип конструирования - логику, составляя интеллектуальные программы на языке логики, а не на языке арифметики.

Часто в математических записях используются **квантор всеобщности** $\forall$ (любой, произвольный) и **квантор существования** $\exists$ (существует). Например, запись $\forall x \notin X$ означает: любой элемент x из множества X , запись $\forall x: p$ или $\forall x/p$ означает: любой элемент x , для которого выполнено свойство p . Записи $\exists x \in X$ и $\exists x: p$, $\exists x/p$ означают: существует элемент x из множества X , существует элемент x , для которого выполнено свойство p .

Символы математической логики позволяют записывать математические определения и теоремы кратко, просто и содержательно. Запишем, например, определение предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 : (x > M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Здесь $M(\varepsilon)$ предполагается действительным числом. Запишем еще определение предела последовательности действительных чисел $\{x_n\}$, $(n=1,2,3,\dots)$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : (n > N) \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon.$$

Здесь $N(\varepsilon)$ предполагается натуральным числом. Понятие предела мы обсудим подробно далее, но постарайтесь осмыслить (или запомнить) его уже сейчас. Если это удалось, постарайтесь записать определения предела функции при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0$, где x_0 - конечное число.

3. Элементы теории множеств.

Множество - это совокупность элементов. $x \in A$ - элемент x принадлежит множеству A , $x \notin A$ - x не является элементом A . Два множества называются равными ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Множество считается заданным, если его элементы заданы или указан алгоритм их отыскания.

Множество может быть задано следующими способами:

- перечислением элементов, если элементов конечное число,
- указанием характеристического свойства множества $g(x)$, которому удовлетворяют все элементы множества, и только они, например, M : $\{x: g(x)\}$ или M : $\{x/ g(x)\}$,
- выделением части из целого, например, четные числа, делящиеся на 6,
- объединением частей в целое, например, множество целых чисел определяется как множество натуральных чисел, нуль, множество натуральных чисел, умноженных на (-1).

Если ни один элемент не удовлетворяет характеристическому свойству, то это свойство определяет **пустое множество** ($\emptyset$). Если любой элемент удовлетворяет характеристическому свойству, то такое множество U называется **универсальным**. Множество A является **подмножеством** множества B , если все его элементы принадлежат B ($A \subset B$).

Операции над множествами.

Объединение множеств ($A \cup B$).



$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B).$$

Элементы объединения принадлежат или множеству A , или множеству B .

Пересечение множеств ($A \cap B$).



$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Элементы пересечения принадлежат и множеству A , и множеству B .

Множества не пересекаются, если их пересечение - пустое множество.

Разность множеств ($A \setminus B$).



$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Элементы разности множеств A и B принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B . Если $A \subset B$, то $A \setminus B$ - пустое множество.

Дополнение множества А до множества В ($C_B A$).

$$x \in C_B A \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge x \in B \setminus A.$$



Дополнение множества А до универсального множества U ($\bar{A}$)

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Упражнение. Доказать

$$A \cup U = U, A \cap U = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Свойства операций над множествами.

1 Коммутативность $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$.

2 Ассоциативность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

3 Дистрибутивность $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Эти свойства допускают обобщение на счетное число множеств.

Если множество конечно (содержит конечное число элементов), то его кардинальным числом ($Card A$) называется количество элементов множества.

Справедлива формула $Card (A \cup B) = Card A + Card B - Card (A \cap B)$.

Пример. В группе студентов 15 человек изучают английский язык, 8 - немецкий, 5 - и немецкий, и английский. Сколько человек в группе? (18 человек).

Декартовым произведением ($X \times Y$) множеств X, Y называется множество пар $(x, y), x \in X, y \in Y$.

Пример. $R^1 \times R^1 = R^2$ - декартово произведение двух прямых представляет собой плоскость, $R^1 \times R^2 = R^3$ - декартово произведение прямой и плоскости представляет собой пространство трех измерений, $R^1 \times \dots \times R^1 = R^n$ - декартово произведение n прямых - представляет собой n - мерное пространство координат.

Если множества X, Y конечны, то $Card (X \times Y) = Card X \cdot Card Y$.

Пример. Сколькими различными путями можно пройти из пункта А в пункт В через пункт С, если из пункта А в пункт В ведут три дороги, а из пункта В в пункт С - четыре дороги? (12 путями).

4. Элементы комбинаторики.

Принцип комбинаторики.

Пусть некоторая операция представляет собой совокупность N подопераций, из которых каждая s - ая операция может быть выполнена k_s способами. Тогда операция может быть выполнена $K = \sum_{s=1}^N k_s$ способами.

Основные понятия комбинаторики: **размещения, сочетания и перестановки** могут быть пояснены на задаче размещения m шаров по n лункам.

1. Размещения с повторением.

Сколькими способами можно разместить m шаров по n лункам (в каждой лунке помещается только один шар), если лунки заполняют последовательно, номер помещенного в каждую лунку шара записывают, а сам шар вынимают из лунки и смешивают с остальными?

Операция размещения шаров представляет собой совокупность n подопераций - размещения шара в s -ой лунке ($s = 1, 2, \dots, n$). Размещение шара в первой лунке может быть выполнено $k_1 = m$ способами. Так как шар вынимается из лунки и смешивается с остальными, то при размещении шара во вторую лунку ситуация та же, что при его размещении в первую лунку. Поэтому $k_2 = k_1 = m$. Аналогично, $k_s = m$ ($s = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, по принципу комбинаторики $K = m^n$.

2. Размещения без повторений.

Сколькими способами можно разместить m шаров по n лункам (в каждой лунке помещается только один шар), если лунки заполняют последовательно, а сам шар остается в лунке и не смешивается с остальными?

Здесь $k_1 = m$, так же как в предыдущем случае. Но $k_2 = m-1$, так как один из шаров остался в первой лунке, $k_3 = m-2$, ... $k_s = m-(s-1) = m-s+1$, ... $k_n = m-n+1$. Следовательно, по принципу комбинаторики $K = A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1)$

3. Перестановки.

Сколькими способами можно переставить n шаров?

Этот случай сводится к размещениям без повторения n шаров по n лункам, так как шары остаются в лунках, а лунок столько же, сколько шаров ($m=n$). Следовательно, $K = P_n = n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

4. Сочетания.

Сколькими способами в множестве из m элементов можно выбрать подмножество из n элементов? Этот случай тоже сводится к размещениям без повторений, но отличается тем, что элементы не различаются, важно только их количество. Поэтому варианты, в которых в подмножестве находятся те же элементы, различающиеся только их порядком, должны считаться за один вариант. Следовательно, способов будет меньше, чем в размещениях без повторений в P_n раз, так как именно P_n способами можно упорядочить подмножество из n элементов. Следовательно, $K =$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Сочетания легко определять из треугольника Паскаля, который выглядит так:

C_0^0	1
$C_1^0 \ C_1^1$	1 1
$C_2^0 \ C_2^1 \ C_2^2$	1 2 1
$C_3^0 \ C_3^1 \ C_3^2 \ C_3^3$	1 3 3 1
$C_4^0 \ C_4^1 \ C_4^2 \ C_4^3 \ C_4^4$	1 4 6 4 1
.....	1 5 10 10 5 1

Свойства сочетаний.

$$1. C_m^n = C_m^{m-n} \quad 2. C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \quad 3. C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m.$$

Эти свойства можно вывести, рассматривая треугольник Паскаля. Ясно, что сочетания представляют собой биномиальные коэффициенты.

Бином Ньютона.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Заметим, что отсюда сразу следует свойство 3 сочетаний, если $A=B=1$.

Выведем формулу бинома Ньютона методом математической индукции.

Если $m=1$, то $A+B = C_1^0 a + C_1^1 b = a+b$. Пусть по индуктивному предположению формула верна при некотором натуральном m . Покажем ее справедливость при $m+1$.

$$\begin{aligned} (a+b)^{m+1} &= (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \dots + C_m^k a^{m-k} b^k + C_m^{k+1} a^{m-(k+1)} b^{k+1} + \dots + \\ &+ C_m^{m-1} a b^{m-1} + C_m^m b^m)(a+b) = a^{m+1} + a^m b (C_m^1 + C_m^0) + \dots + a^{m-k} b^{k+1} (C_m^{k+1} + C_m^k) + \dots \\ &+ a b^m (C_m^{m-1} + C_m^m) + b^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \dots + C_{m+1}^{k+1} a^{m-k} b^{k+1} + \dots + C_{m+1}^m a b^m + \\ &+ C_{m+1}^{m+1} b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Формула бинома Ньютона доказана. В математическом анализе часто можно встретить запись формулы при $A=1$, $B=x$:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$$

Лекции 3,4. Множества на числовой прямой, функции.

1. Множества на числовой прямой.

Числовая прямая определяется:

- направлением,
- началом отсчета,
- масштабом.

Точки числовой прямой можно поставить во взаимно однозначное соответствие с действительными числами, поэтому действительное число можно считать координатой соответствующей точки, а числовую прямую можно называть координатной прямой.

Основные множества (**промежутки**) на числовой прямой: **интервал** $(A,B) = \{x: A < x < B\}$, **отрезок** $[A,B] = \{x: a \leq x \leq b\}$, **полуинтервалы** $[A,B) = \{x: a \leq x < b\}$, $(A,B] = \{x: a < x \leq b\}$. Если числа A,B - конечны, то эти множества ограничены, если $a = -\infty$ или (и) $b = +\infty$, $(\forall x \in R: -\infty < x < +\infty)$, то эти множества не ограничены. Пополняя числовую прямую элементами $-\infty, +\infty$, получаем расширенную числовую прямую. Формально элементы $-\infty, +\infty$ можно считать точками расширенной числовой прямой.

Окрестностью конечной точки x (числовой прямой) считают интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. **Проколотой окрестностью** конечной точки x считают

объединение интервалов $(x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon)$. Это - двусторонние окрестности. Можно построить левостороннюю $(x - \varepsilon, x)$ и правостороннюю $(x, x + \varepsilon)$ окрестности конечной точки x . Для точек $-\infty, +\infty$ можно построить соответственно только правостороннюю и левостороннюю окрестности $(-\infty, b), (a, +\infty)$.

Различные промежутки могут пересекаться или не пересекаться, быть подмножеством друг друга ("вложены друг в друга").

Справедлива **лемма о вложенных промежутках (отрезках)**.

Пусть имеется последовательность $[A_k, B_k]$ вложенных отрезков ($[A_1, B_1] \supset [A_2, B_2] \supset \dots [A_n, B_n] \supset \dots$). Пусть $\lim_{k \rightarrow +\infty} |b_k - a_k| = 0$.

Тогда существует такая точка c , общая для всех вложенных отрезков, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = c = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$.

Можно рассматривать не только основные множества числовой оси, но и произвольные числовые множества X .

Числовое множество X называется **ограниченным сверху**, если существует конечное число M , такое, что все элементы X не превышают M . Такое число M называется **верхней гранью** множества X .

Числовое множество X называется **ограниченным снизу**, если существует конечное число m , такое, что все элементы X не менее чем m . Такое число m называется **нижней гранью** множества X .

Числовое множество X называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и ограничено снизу.

Например, для полуинтервала $[-2, 3)$ можно считать нижними гранями, например, числа $-100, -5, -2,001, -2$, а верхними гранями - числа $3, 4, 5, 78$. Можно попытаться найти наибольшую нижнюю грань и наименьшую верхнюю грань этого полуинтервала - числа $(-2), 3$. Заметим, что одно из них (-2) принадлежит полуинтервалу, а второе 3 не принадлежит.

Задачу отыскания наибольшей нижней грани и наименьшей верхней грани (если они существуют) можно поставить и для произвольного числового множества.

Число M называется **точной верхней гранью** числового множества X ($M = \sup X$), если

1. M - верхняя грань X ($\forall x \in X, x \leq M$),
2. Для любого числа, меньшего M найдется элемент множества X , больший этого числа ($\forall y < M \exists x \in X : x > y$).

Число m называется **точной нижней гранью** числового множества X ($m = \inf X$), если

1. m - нижняя грань X ($\forall x \in X, x \geq m$),
2. Для любого числа, большего m найдется элемент множества X , меньший этого числа ($\forall y > m \exists x \in X : x < y$).

Если числовое множество не ограничено сверху, то $\sup X = +\infty$, если числовое множество не ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$.

Найдите точные верхнюю и нижнюю грани множества правильных дробей, числитель и знаменатель которых положительны.

Теорема о существовании верхней и нижней граней числового множества.

Любое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет конечную точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство. Доказательство проведем для точной верхней грани, для точной нижней грани доказательство аналогично.

Так как X не пусто, то можно указать отрезок $[A, B]$, содержащий хотя бы одну точку из X . Рассмотрим отрезок $[A, M]$, где M - верхняя грань (M существует, так как X ограничено сверху). Если $M \in X$, то $M = \sup X$, и точная верхняя грань найдена. Пусть $M \notin X$. Тогда на построенном отрезке часть точек принадлежит X , а часть не принадлежит X . Обозначим $A = A_1$, $M = B_1$, построен отрезок $[A_1, B_1]$, часть точек которого принадлежит X , а часть не принадлежит X . Разделим его пополам, обозначим $[A_2, B_2]$ ту из его половин - отрезок вдвое меньшей длины, часть точек которого принадлежит X , а часть не принадлежит X . Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков, удовлетворяющую лемме о вложенных промежутках. Следовательно, по лемме существует такая точка c , общая для всех вложенных отрезков, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = c = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$, причем в любой окрестности c (по построению) лежат как точки множества X , так и не точки множества X . **Проверим, что $C = \sup X$.** Условие 1 выполнено, иначе существует двусторонняя окрестность c , все точки которой принадлежат X , что невозможно. Условие 2 выполнено, иначе существует двусторонняя окрестность c , все точки которой не принадлежат X , что невозможно.

2. Функции и отображения.

Пусть $\forall x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ по закону $y = f(x)$, тогда говорят, что на множестве X задана **функция** $f(x)$ с областью определения X и областью значений $Y_1 = \{y \in Y : y = f(x), \forall x \in X\}$. Говорят, что x является прообразом, а y - образом при **отображении** $f(x)$ множества X в Y . X - это множество прообразов, а Y - множество образов. Кратко определение функции или отображения можно записать так:
 $f : X \rightarrow Y : \Leftrightarrow (\forall x \in X \exists ! y \in Y : y = f(x))$.

Виды отображений.

1. Отображение называется **эпиморфизмом (сюръекцией, отображением "на")**, если любой элемент множества Y является образом ($\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$).
2. Отображение называется **мономорфизмом (инъекцией, взаимно однозначным отображением "в")**, если различные элементы $x \in X$ имеют при отображении различные образы ($\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).
3. Отображение называется **изоморфизмом (биекцией, взаимно однозначным отображением "на")**, если оно является и эпиморфизмом, и мономорфизмом ($y \in f(X) = Y, \exists ! x \in X : y = f(x)$).

Пример. Отображение отрезка $[-\pi, \pi]$ функцией $y = \sin x$ на отрезок $[-1, 1]$ является эпиморфизмом, но не является мономорфизмом. То же отображение на отрезок $[-3, 2]$ не является ни эпиморфизмом, ни мономорфизмом. Отображение той же функцией отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ на отрезок $[-2, 0]$ является мономорфизмом, но не является эпиморфизмом. То же отображение на отрезок $[-1, 1]$ является изоморфизмом.

Обратной функцией или **обратным отображением** к функции или отображению $f(x) : X \rightarrow Y, y=f(x)$ является функция или отображение $\varphi(y) : Y \rightarrow X, x=\varphi(y)$. Обратная к $f(x)$ функция $\varphi(y)$ "возвращает" любой элемент из Y (образ) в его прообраз.

Теорема. Для того, чтобы существовало обратное отображение, необходимо и достаточно, чтобы отображение было изоморфизмом.

Доказательство. Необходимость. Пусть обратное отображение существует. Ясно, что для того, чтобы успешно "возвратить" элемент в его прообраз, надо, чтобы любой элемент Y был образом (отображение $f(x)$ должно быть эпиморфизмом), кроме того, надо знать, куда возвращать (отображение $f(x)$ должно быть мономорфизмом). Поэтому отображение должно быть изоморфизмом. Достаточность продумайте самостоятельно.

Обратная функция имеет тот же график, что и функция, только функция определена в X , а обратная функция - в Y . Например, график функции $y=\sin x$ тот же, что и график функции $x=\text{ArCsin} y$. Но привычнее строить график $y=\text{ArCsin} x$, меняя местами переменные. Для того, чтобы построить этот график, надо поменять местами переменные, т.е. отобразить график $x=\text{ArCsin} y$ (или $y=\sin x$) симметрично относительно биссектрисы первого - третьего координатных углов.

Сравнение множеств, мощность множества.

Если множества конечны, то установить, в каком из них больше элементов, легко. Если же множества содержат бесконечное число элементов, то сравнение множеств превращается в проблему, которую, однако, можно решить с помощью понятия изоморфизма.

Рассмотрим известный пример: надо сравнить множества мужчин и женщин, пришедших на танцевальный вечер. Кого больше, мужчин или женщин? Просто пересчитать их трудно, гораздо легче поставить вальс. Танцоры разберутся по парам, если в одиночестве останутся мужчины, то их больше.

Для бесконечных множеств вместо количества элементов вводят **мощность множества**. Говорят, что множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие, имеют **равную мощность** или **эквивалентны**. Отношение равномощности разбивает множества на классы эквивалентных множеств.

Класс, которому принадлежит данное множество X , называется **мощностью множества X** или его **кардинальным числом $\text{Card} X$** . Для конечного множества кардинальное число равно количеству его элементов.

Так, например, натуральные числа можно пересчитать, поэтому считают, что **множество натуральных чисел счетно**.

Теорема. Множество рациональных чисел счетно.

Эту теорему можно доказать, располагая рациональные числа в таблицу, где номер строки задает знаменатель, а номер столбца - числитель (первая строка: $1/1, 1/2, 1/3, \dots$, вторая строка: $2/1, 2/2, 2/3, \dots$, третья: $3/1, 3/2, 3/3, 3/4, \dots$). Затем нумеруют элементы "змейкой": $1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 2/2, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \dots$. Так как все элементы таблицы можно поставить во взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) с числами натурального ряда, то число рациональных чисел счетно.

Кантор доказал, что действительные числа можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками отрезка $[0,1]$ числовой оси (следовательно, и с точками любого отрезка $[A,B]$, так как растяжение отрезка $[0,1]$ в $|B-A|$ раз и сдвиг на A - изоморфизмы). Говорят, что действительные числа имеют мощность континуума (точек отрезка числовой оси). Иррациональные числа тоже имеют мощность континуума.

Поэтому и можно ввести числовую прямую, ставя во взаимно однозначное соответствие (изоморфизм) каждой точке числовой прямой ее координату - действительное число. Причем никаких "дыр" на числовой оси - точек, которым нельзя было бы поставить в соответствие действительное число (координату), не окажется. В этом смысле множество действительных чисел полно или непрерывно. (Аксиома полноты или непрерывности: $\forall x \in X \subset \mathbb{R}, \forall y \in Y \subset \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}: x \leq C \leq y$).

В любой окрестности рационального числа окажется иррациональное число. Например в окрестности диаметром 0,01 рационального числа $1/8 = 0,125$ можно указать иррациональное число (0,12512112...или 0,12521221...).

В любой окрестности любого иррационального числа тоже можно указать рациональное число. Рассмотрим, например, иррациональное число 0,12112... и окрестность диаметром 0,01. Числа 0,123, 0,125, рациональны (представляются конечной десятичной дробью) и лежат в заданной окрестности иррационального числа.

Способы задания функции.

Есть несколько способов задания функции. Привычнее всего **явное** задание функции $y = f(x)$.

Функция может быть задана **неявно**, в виде соотношения $G(x,y)=0$, если существует такая функция $y=f(x)$, которая при подстановке обращает это соотношение в тождество $G(x,y(x))=0$.

Соотношение $G(x,y)=0$ может задавать единственную функцию (например, $G(x,y)=x^2-y=0$), несколько функций (например, $x^2+y^2=1$) или вообще не определять ни одной функции (например, $\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)=2$).

Часто в технике изучают процессы изменения переменных во времени, например, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Такими соотношениями определяется **параметрически заданная** функция. Например, уравнение окружности может быть задано в виде неявно заданной функции $x^2+y^2=1$ или параметрически заданной функции $x=\cos t$, $y=\sin t$. Уравнение эллипса можно задать неявно, в виде соотношения $x^2/A^2+y^2/B^2=1$ или параметрически, в виде $x=A\cos t$, $y=B\sin t$. Параметрически обычно задается циклоида $x=A(t-\sin t)$, $y=A(1-\cos t)$, астроида $x=A\cos^3 t$, $y=A\sin^3 t$.

Функция может быть задана в виде **композиции** функций или **сложной функции** $y=f(g(x)) : X \rightarrow G \rightarrow Y$. Ясно, что область значений функции $g(x)$ должна быть подмножеством области определения функции $f(g)$. Если пытаться явно выразить функцию по ее параметрическому представлению, то надо потребовать существования обратной функции к функции $x(t) : t = h(x)$. Тогда $y = y=\psi(t) = y=\psi(h(x))$ - явная зависимость y от x .

Типы функций.

Монотонные функции.

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на X , если $\forall x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
 Функция $f(x)$ называется **неубывающей** на X , если $\forall x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
 Функция $f(x)$ называется **убывающей** на X , если $\forall x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
 Функция $f(x)$ называется **невозрастающей** на X , если $\forall x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
 Возрастающая и убывающая функции называются **строго монотонными** функциями.

Четные, нечетные, периодические функции.

Функция $f(x)$ называется **четной**, если $f(x) = f(-x)$.

Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если $f(x) = -f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси OY , график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример. Показать нечетность функции $y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Теорема. Любую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-A, A]$ можно представить единственным образом в виде суммы четной и нечетной функций.

Доказательство. Обозначим $g(x) = 0,5(f(x) + f(-x))$, $h(x) = 0,5(f(x) - f(-x))$.

$g(x)$ - четная функция, $h(x)$ - нечетная. $f(x) = g(x) + h(x)$.

Функция $f(x)$ называется **периодической**, если $f(x + T) = f(x)$ (минимальное из всех таких T называется периодом функции).

Теорема. Если функция $f(x)$ - периодическая с периодом T , то функция

$f(kx)$ - периодическая с периодом T/k . Доказать самостоятельно.

Вычислить периоды функций $\sin 2x$, $\cos(0,5x)$.

Функция называется **ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)**, если множество ее значений ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу) в ее области определения..

Основные элементарные функции.

К **основным элементарным функциям** относятся:

- степенная x^n ,
- показательная A^x ,
- тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$,
- обратные тригонометрические функции $\operatorname{ArCsin} x$, $\operatorname{ArCCos} x$, $\operatorname{ArCtg} x$, $\operatorname{ArCCtg} x$,
- логарифмическая функция $\log_A x$.

К **элементарным функциям** относятся функции, которые получаются из основных элементарных функций конечным числом сложений, вычитаний, умножений, делений и взятий сложной функции.

Графики и операции над ними.

Операции над графиком функции.

- сдвиг графика по оси x на A , по оси y на B в положительном направлении $y - B = f(x - A)$,
- сжатие графика в $k > 0$ раз по x , сжатие в $m > 0$ раз по y . $my = f(kx)$,

- инверсия (изменение направления) оси $(-y) = f(x), y = f(-x)$.

Примеры. $y-5 = (x-5)^2, 3y = \sin(0,5 x), y = \ln(-x)$.

Операции над графиками функций.

Надо помнить, что все операции выполняются над ординатами графиков.

- сложение,
- вычитание,
- умножение,
- деление,
- взятие сложной функции.

Примеры. $y = |x-1| + |x+1|, y = x - |x|, y = x \sin x, y = (x-1)^2 / (x-3)^2, y = \ln(\cos x), y = \cos(\ln x)$.

Лекция 5 Предел последовательности.

Числовая последовательность и ее предел.

Упорядоченное в соответствии с числами натурального ряда множество числовых значений некоторой переменной величины называется **числовой последовательностью**.

Если можно указать номер последнего элемента, то последовательность **конечна**, если этого сделать нельзя, то она **бесконечна**.

Пример. Последовательность чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...) задается рекуррентной формулой

$$x_1 = x_2 = 1, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

Будем рассматривать бесконечные числовые последовательности.

Число a называется **пределом** последовательности ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$), если для любого положительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что, начиная с этого номера (при всех $n > N$), будет выполнено неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$, причем $x_n \neq a, \forall n$.

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon).$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A , то говорят, что *последовательность сходится к a ($\{x_n\} \rightarrow a$)*.

Пример.

Рассмотрим последовательность $x_n = 1/n$. Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдем соответствующий номер $N(\varepsilon)$.

$1/n < \varepsilon \Rightarrow n > 1/\varepsilon \Rightarrow N = E(1/\varepsilon)$, где $E()$ - целая часть. Если, например, $\varepsilon = 0,01$, то $N=100$. При $n > 100$ будет $1/n < 0,01 = \varepsilon$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Число a будет являться **пределом** последовательности ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$), если в любой ее ε - окрестности лежит бесконечное число точек последовательности, а вне ее - конечное число.

Точка a называется **предельной точкой последовательности**, если в любой ее ε - окрестности лежит бесконечное число точек последовательности.

Вне ε - окрестности предельной точки может лежать и бесконечное число точек последовательности.

Пример. Последовательность $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ имеет две предельных точки (-

1) и 1. Последовательность $x_n = n$ вообще не имеет предельных точек.

Если предельная точка одна, то из определения предельной точки следует, что она является пределом. Например, предельная точка 0 последовательности $x_n = (-1)^n / n$ является и ее пределом.

Основные свойства предела последовательности.

1. *Предел постоянной равен самой постоянной.*

Пусть $x_n = C$. Тогда для любого номера выполнено $|x_n - C| = |C - C| = 0$, независимо от выбора ε . Следовательно, по определению предела $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

2. *Если предел последовательности существует, то он единственен.*

Пусть существуют два предела последовательности $A \neq B$. Пусть для определенности $A > B$. Идея доказательства состоит в выборе такого малого размера ε - окрестности, что все элементы, начиная с некоторого должны "разорваться" (они должны лежать как в ε - окрестности A , так и в ε - окрестности B , а это невозможно, так как пределы различны).

Зададим $\varepsilon < (A - B)/2$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то существует номер $N_1(\varepsilon)$, что для любого $n > N_1$ выполнено $|x_n - A| < (A-B)/2$, т.е. $A - (A-B)/2 < x_n < A + (A-B)/2$, откуда $(A+B)/2 < x_n < (3A-B)/2$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = B$, то существует номер $N_2(\varepsilon)$, что для любого $n > N_2$ выполнено $|x_n - B| < (A-B)/2$, т.е. $B - (A-B)/2 < x_n < B + (A-B)/2$, откуда $(3B-A)/2 < x_n < (A+B)/2$.

Выберем $N > \max(N_1, N_2)$. Тогда для любых $n > N$ выполнены оба неравенства $(A+B)/2 < x_n$ и $x_n < (A+B)/2$, что невозможно. Противоречие с $A \neq B$. Следовательно, $A = B$.

3. *Сходящаяся последовательность является ограниченной.*

Пусть последовательность (x_n) сходится к a . Тогда для любого числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$, что при любом номере $n > N$ выполнено $|x_n - A| < \varepsilon$ или $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$, откуда $|x_n| \leq \max\{|A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\} = M_1$. При $n < N$ $|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\} = M_2$. Так как M_1, M_2 конечны, то последовательность ограничена ($\forall x_n \leq \max(M_1, M_2)$).

Теорема Вейерштрасса.

Любая возрастающая, ограниченная сверху последовательность имеет предел.

Любая убывающая, ограниченная снизу последовательность имеет предел.

Доказательство (для возрастающей последовательности).

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то существует ее точная верхняя грань $A = \sup x_n$. Зададим $\forall \varepsilon > 0$. По свойству точной верхней грани найдется элемент последовательности x_N , такой что $A - \varepsilon < x_N < A$. Так как

последовательность возрастает, то $\forall n > N \Rightarrow A - \varepsilon < x_N < x_n < A$. Следовательно, выполнено неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

Число e , второй замечательный предел.

Второй замечательный предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e = 2,7181828...$

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k}$.

Покажем, что эта последовательность - монотонно возрастающая и ограниченная сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет конечный предел.

1. Докажем, что последовательность - монотонно возрастающая.

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots \\
 &= \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})\dots(1 - \frac{k-1}{n})}{k!} + \dots \\
 &\quad + \frac{(1 - \frac{1}{n})\dots(1 - \frac{n-1}{n})}{n!}. \\
 x_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{n+1} + \frac{(n+1)n}{2!} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \\
 &= \frac{(n+1)n\dots 2}{(n+1)!} \frac{1}{(n+1)^n} + \frac{(n+1)n\dots 1}{(n+1)!} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})}{3!} + \dots \\
 &\quad + \frac{(1 - \frac{1}{n+1})\dots(1 - \frac{n-1}{n+1})}{n!} + \frac{(1 - \frac{1}{n+1})\dots(1 - \frac{n}{n+1})}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Сравним x_{n+1} и x_n .

$$\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} > \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!}, \quad \frac{(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})}{3!} > \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!}.$$

Поскольку каждое соответствующее слагаемое x_{n+1} больше соответствующего слагаемого x_n , а последнее слагаемое в x_{n+1} , которого нет в x_n , положительно, то $x_{n+1} > x_n$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

2. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} < \frac{1}{3!}, \dots \text{ Следовательно, } x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Покажем, что $n! > 2^{n-1}$. $n! = n(n-1)(n-2)...4321$, $2^{n-1} = 222...222$, $2 = 2, 3 > 2, 4 > 2...n > 2$
 Поэтому $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, следовательно, $x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$.

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует конечный предел последовательности - иррациональное число $e = 2,71828...$, которое было названо так в честь Л. Эйлера.

Гиперболические функции.

Точно так же, как в тригонометрии, вводятся синус, косинус, тангенс и котангенс гиперболические.

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}, \operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}.$$

Они называются гиперболическими функциями, так как *основное соотношение для них* $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (если обозначить $y_1 = \operatorname{ch}x$, $y_2 = \operatorname{sh}x$, то уравнение $y_1^2 - y_2^2 = 1$ - это уравнение равнобочной гиперболы). Сравните с основным тригонометрическим соотношением $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (если обозначить $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, то уравнение $y_1^2 + y_2^2 = 1$ - это уравнение единичной окружности). Как и в тригонометрических функциях, $\operatorname{ch}x$ - четная функция, $\operatorname{sh}x$ - нечетная функция. Для гиперболических функций справедливы формулы сложения

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

Фундаментальная последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n_1 > N, \forall n_2 > N \Rightarrow |x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$. То есть при достаточно больших номерах элементы последовательности с этими номерами становятся очень близкими друг к другу. Определение можно дать и так: последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n > N, \forall p > 0 \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Если сравнивать с предыдущим определением, то здесь p обозначается расстояние между двумя номерами.

Пример. Проверить фундаментальность последовательности $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$.

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_n - x_{n+p}| = \left| \frac{2 + (-1)^n}{n} - \frac{2 + (-1)^{n+p}}{n+p} \right| < \frac{2 + (-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n} < \varepsilon, \quad \text{если}$$

выбрать для произвольного ε номер $N > E\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\forall n > N$, $E(\cdot)$ - целая часть числа. Следовательно, последовательность фундаментальна.

Теорема. Если последовательность фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. Если последовательность фундаментальна, то зафиксировав некоторый номер $n > N(\varepsilon)$ ее элемента, получим, что все элементы с большими номерами будут лежать в ε - окрестности элемента x_n . Следовательно, последовательность ограничена.

Теорема. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то $\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем $\forall n > N, \forall m > N$.

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность фундаментальна.

Лемма Больцано - Вейерштрасса.

Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Пусть все элементы последовательности $\{x_n\}$ лежат на отрезке $[A, B]$. Разделим отрезок пополам, получим два отрезка $[A, (A+B)/2]$, $[(A+B)/2, B]$. Каждый из них имеет длину, в два раза меньше, чем исходный отрезок. Выберем из них тот, на котором содержится бесконечное число элементов последовательности (если это справедливо для того и другого отрезков, то выбирается любой из них) и обозначим его $[A_1, B_1]$. Продолжим этот процесс. В результате получим последовательность вложенных отрезков, имеющих по лемме о вложенных промежутках, единственную общую точку c . Причем $\{A_n\} \rightarrow c$ и $\{B_n\} \rightarrow c$ при $n \rightarrow \infty$. Отмечая на каждом отрезке точку x_k , $k=1, 2, \dots$, получим подпоследовательность $\{x_k\}$ ($A_k \leq x_k \leq B_k$), сходящуюся к точке c .

Критерий Коши.

Для того чтобы числовая последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Необходимость следует из доказанной выше теоремы: если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, тогда по доказанной выше теореме она ограничена, а из ограниченной последовательности по лемме Больцано - Вейерштрасса можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

$$\{x_{n_k}\} \rightarrow a, \forall \frac{\varepsilon}{2} \exists N_1 : \forall n_k > N_1 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как последовательность фундаментальна, то $\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists N_2 : \forall n_1 > N_2, \forall n_2 > N_2 \Rightarrow |x_{n_1} - x_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Выберем $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда для $\forall n > N$ выполнены оба неравенства. Оценим

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) - (a - x_{n_k})| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Лекции 6, 7. Предел функции

Окрестности различных точек и смысл стремления переменной к точке.

1. $x \rightarrow x_0$, x_0 - конечная точка.

$V_\delta(x_0): (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ - окрестность точки (двусторонняя).

При $x \rightarrow x_0$ существует стягивающаяся к x_0 система окрестностей точки $V_\delta(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_0$.

$V_\delta^0(x_0): (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ - проколота окрестность точки (двусторонняя).

При $x \rightarrow x_0$ существует стягивающаяся к x_0 система проколотых окрестностей точки $V_\delta^0(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_0$, ($x_0 \notin V_\delta^0(x_0)$).

2. $x \rightarrow x_0 + 0$, x_0 - конечная точка $\begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$.

$V_\delta(x_0): (x_0, x_0 + \delta)$ - правосторонняя окрестность точки.

При $x \rightarrow x_0 + 0$ существует стягивающаяся к x_0 система правосторонних окрестностей точки $V_\delta(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_0 + 0$.

3. $x \rightarrow x_0 - 0$, x_0 - конечная точка. $\begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$.

$V_\delta(x_0): (x_0 - \delta, x_0)$ - левосторонняя окрестность точки.

При $x \rightarrow x_0 - 0$ существует стягивающаяся к x_0 система левосторонних окрестностей точки $V_\delta(x_0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} x_0 - 0$.

4. $x \rightarrow +\infty$.

$V_\delta(+\infty): (\delta, +\infty), \delta > 0$.

5. $x \rightarrow -\infty$.

$V_\delta(-\infty): (-\infty, -\delta), \delta > 0$.

6. $x \rightarrow \infty$.

$$V_\delta(\infty) : (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty).$$

Замечание. Понятие проколотая окрестность вводится только в случае конечной точки (п.1). В остальных случаях (п.2 - п.6) точка по определению не принадлежит окрестности и термин "проколотая" теряет смысл.

Общее определение предела функции по Коши.

$$\lim_{x \rightarrow * } f(x) = ** , \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x \in V_\delta^0(*) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(**).$$

В качестве проколотой δ - окрестности точки $(*)$ и ε - окрестности точки $(**)$ при конкретном выборе этих точек $(x_0, +\infty, \dots$ и т.д.) выбираются окрестности по типам 1 - 6.

Например, для конечной точки x_0 вводятся:

Предел функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

правосторонний предел или предел справа

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b = f(x_0 + 0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

левосторонний предел или предел слева

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b = f(x_0 - 0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Эти пределы могут быть и бесконечными, например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon.$$

Для бесконечно удаленных точек числовой прямой используются окрестности п.п. 4 - 6. Например,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon.$$

Геометрический смысл предела состоит в том, что для любого размера ε окрестности точки $(**)$ существует проколотая окрестность точки $(*)$ размера $\delta(\varepsilon)$, такая, что как только x попадает в проколотую окрестность точки $(*)$, то $f(x)$ попадает в окрестность точки $(**)$.

Определение предела функции по Гейне. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, если для любой последовательности аргументов, сходящейся к x_0 ($\{x_n\} \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0)$) соответствующая последовательность значений функции сходится к точке B ($\{f(x_n)\} \rightarrow b$).

Теорема. Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.

Теорема. Для того чтобы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы справа и слева и они были бы равны B .

$$\left(\begin{array}{l} 1. \exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \\ 2. \exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0), \\ 3. f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = b. \end{array} \right).$$

Необходимость. Выберем последовательности $\{x_n\} \rightarrow x_0 + 0$, $\{x_n\} \rightarrow x_0 - 0$. Пределы $f(x)$ по этим последовательностям представляют собой предел справа и предел слева, существуют, и равны B (эквивалентность пределов по Коши и Гейне).

Достаточность. Так как правый предел существует, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : (x_0 < x < x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Так как левый предел существует, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : (x_0 - \delta_2 < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнены оба неравенства, следовательно, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. По определению предела по Коши $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Свойства предела функции.

1. Если предел $f(x)$ существует, то он единственен.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства предела последовательности.

Пусть функция имеет два предела $a \neq b$ при стремлении $x \rightarrow x_0$. Пусть

$a > b$. Выберем $\forall \varepsilon < \frac{a-b}{2}$. Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{2} < f(x) < \frac{3a-b}{2}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{3b-a}{2} < f(x) < \frac{a+b}{2}.$$

Выбирая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получим, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ должны быть выполнены оба неравенства, что невозможно. Противоречие с $a \neq b$. Следовательно, $A=B$.

2. Если существует предел функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то функция локально ограничена (существует окрестность точки x_0 , в которой функция ограничена).

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Обозначим $M = \max(|b - \varepsilon|, |b + \varepsilon|)$. Тогда в δ -окрестности точки x_0 $|f(x)| < M$, т.е. функция локально ограничена.

Теорема о сохранении функцией знака своего предела.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b > 0$, тогда в некоторой окрестности точки x_0 $f(x) > 0$.

Доказательство. Выберем $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < b)$. Так как существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b > 0$, то $\forall \varepsilon (0 < \varepsilon < b)$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow 0 < b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0 .

Теорема о знаке предела знакопостоянной функции.

Пусть существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ и $f(x) > 0$ (в некоторой окрестности точки x_0). Тогда $b \geq 0$.

Доказательство. Пусть $b < 0$. Тогда по предыдущей теореме существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой $f(x) < 0$. Противоречие.

Теорема о предельном переходе в неравенстве.

Пусть $f_1(x) < f_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = b_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = b_2$. Тогда $b_1 \leq b_2$.

Доказательство. Пусть $b_1 > b_2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - b_1| < \varepsilon \Rightarrow b_1 - \varepsilon < f_1(x) < b_1 + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - b_2| < \varepsilon \Rightarrow b_2 - \varepsilon < f_2(x) < b_2 + \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon < \frac{b_1 - b_2}{2}$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда в окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнены оба неравенства и $f_1(x) > b_1 - \varepsilon > \frac{b_1 + b_2}{2} > b_2 + \varepsilon > f_2(x)$. Противоречие с $f_1(x) < f_2(x)$.

Теорема о пределе промежуточной функции

(первый признак существования предела, теорема о двух милиционерах).

Пусть $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Доказательство.

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow$

$b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow$

$b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$.

Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда в окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ будут выполнены оба неравенства. Следовательно, в этой окрестности

$b - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < b + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Замечание. Название "о двух милиционерах" связано с "милиционерами" $g(x), h(x)$, которые зажав "преступника" $f(x)$ с двух сторон, ведут его в отделение B ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$).

Лекция 8 1 и 2 замечательные пределы.

1 замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1. Пусть $x > 0$.

Рассмотрим круг единичного радиуса, центральный угол x радиан, стягивающую его дугу x радиан, линию синуса $\sin x$ и линию тангенса $\operatorname{tg} x$.

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Делим это неравенство на $\sin x > 0$.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \text{ "Переворачиваем" неравенство: } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, то по первому признаку существования предела $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Пусть $x < 0$.

$$\text{Сделаем замену } z = -x. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{\sin(-z)}{(-z)} = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Так как предел слева и предел справа равен 1, то существует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2 замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Ранее было доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Рассмотрим $\forall \{x_n\} \rightarrow 0, 0 < x_n < 1$. Отсюда $1 < \frac{1}{x_n} < \infty$, $E\left(\frac{1}{x_n}\right) = k_n$ E - целая часть). Последовательно выпишем цепочку неравенств:

$$k_n < \frac{1}{x_n} < k_n + 1, \quad \frac{1}{k_n + 1} < x_n < \frac{1}{k_n}, \quad 1 + \frac{1}{k_n + 1} < (1 + x_n) < 1 + \frac{1}{k_n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} < (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1}}{\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)} < (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right).$$

Так как $\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} 1$, $\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) \xrightarrow{k_n \rightarrow \infty} 1$, то при $k_n \rightarrow \infty$ левая и правая части неравенства стремятся к e . Следовательно, по первому признаку существования предела $\lim_{k_n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$, или $\lim_{k_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{k_n} = e$.

Бесконечно малые величины (функции).

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (величиной, функцией) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ или, раскрывая определение предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Пример. $\sin x$ - бесконечно малая при $x \rightarrow 0, x \rightarrow \pi, x \rightarrow 2\pi, \dots$, $\sin x$ не является бесконечно малой, например, при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x \rightarrow 1, x \rightarrow 2$.

Любое число не является бесконечно малой за исключением числа нуль и то только потому, что его можно отождествить с функцией $\alpha(x) \equiv 0$.

Теоремы о бесконечно малых.

1. Теорема о сумме двух бесконечно малых.

Если $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, то $(\alpha(x) + \beta(x))$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Так как $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, то

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняются оба неравенства и $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следовательно, $\alpha(x) + \beta(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$.

2. Теорема о сумме конечного числа бесконечно малых.

Сумма конечного числа бесконечно малых - бесконечно малая.

Пусть

$\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, тогда $\gamma(x) = \alpha_1(x) + \dots + \alpha_n(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Для случая $n=2$ утверждение доказано предыдущей теоремой.

Пусть утверждение справедливо при $n-1$. Тогда $\gamma(x) = [\alpha_1(x) + \dots + \alpha_{n-1}(x)] + \alpha_n(x) = \gamma_1(x) + \gamma_2(x) - \text{б.м.}, \text{т.к. } \gamma_1(x), \gamma_2(x) = \alpha_n(x) - \text{б.м.}$ ($\gamma_1(x)$ как сумма $(n-1)$ б.м., $\gamma(x)$ - сумма двух б.м.).

Функция $f(x)$ называется **ограниченной при $x \rightarrow x_0$** , если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнено $|f(x)| < M$, где M - некоторое положительное число.

Ясно, если функция является ограниченной, то она ограниченная при $x \rightarrow x_0$, где x_0 - любая точка числовой оси. Обратное неверно.

Функция $f(x)$ называется **неограниченной при $x \rightarrow x_0$** , если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнено $|f(x)| > M$, где M - любое, заданное заранее положительное число.

Пример. Функция $1/x$ ограничена при $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$, но неограниченная при $x \rightarrow 0$.

3. Теорема о произведении бесконечно малой на ограниченную.

Пусть $f(x)$ - ограниченная при $x \rightarrow x_0$, $\alpha(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, тогда их произведение $f(x) \alpha(x)$ - функция ограниченная при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ - ограниченная при $x \rightarrow x_0$, то $\exists M > 0, \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < M$.

Так как $\alpha(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, то

$\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists \delta_2(\frac{\varepsilon}{M}) : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при

$0 < |x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ выполнены оба неравенства. Оценим при

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x)\alpha(x)| \leq |f(x)| |\alpha(x)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Следовательно, $(f(x) \alpha(x))$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$.

Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой.

Для того чтобы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = b + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) - \text{б.м. при } x \rightarrow x_0.$$

Необходимость. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначая $\alpha(x) = f(x) - b$, получим $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т.е.

$\alpha(x) - \text{б.м. при } x \rightarrow x_0, f(x) = b + \alpha(x)$.

Достаточность. $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) - \text{б.м. при } x \rightarrow x_0$.

Тогда $f(x) - b = \alpha(x) - \text{б.м. при } x \rightarrow x_0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

Теоремы о пределах.

1. Предел постоянной равен самой постоянной.

Справедливо равенство $c = c + 0$, где 0 - число нуль или тождественно равная нулю функция - б.м. при любом $x \rightarrow x_0$. Пусть $f(x)=C$, тогда $f(x)= C + \alpha(x)$, ($\alpha(x) \equiv 0$). По теореме о связи функции, предела и б.м. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

2. Предел суммы равен сумме пределов, если предел каждого из слагаемых существует.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

По теореме о связи функции, предела и б.м. $f(x) = a + \alpha(x), g(x) = b + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$. Тогда $f(x) + g(x) = (a + b) + (\alpha(x) + \beta(x)) = (a + b) + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ - б.м. (как сумма двух б.м.). Следовательно, по теореме о связи функции, предела и б.м., $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

3. Предел произведения равен произведению пределов, если предел каждого из сомножителей существует.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab$

По теореме о связи функции, предела и б.м. $f(x) = a + \alpha(x), g(x) = b + \beta(x), \alpha(x), \beta(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$. Поэтому $f(x)g(x) = ab + b\alpha(x) + a\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$. По теореме о произведении б.м. на ограниченную три последних слагаемых - б.м. (в последнем слагаемом $\alpha(x)$ ограничена при $x \rightarrow x_0$ как функция, имеющая конечный предел (нулевой)). Следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

4. Предел частного равен частному пределов, если предел делителя не равен нулю.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

(пусть для определенности $B > 0$).

Покажем, что $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} = \gamma(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$, тогда теорема верна по теореме о связи функции, предела и б.м.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} = \frac{f(x)b - g(x)a}{g(x)b}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, то

$\forall 0 < \varepsilon < \frac{b}{2} \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{b}{2} < g(x) < \frac{3b}{2}$, следовательно,

$$\frac{b^2}{2} < g(x)b < \frac{3b^2}{2} \Rightarrow \frac{2}{3b^2} < \frac{1}{g(x)b} < \frac{2}{b^2}.$$

Следовательно, дробь $\frac{1}{g(x)b}$ - функция ограниченная при $x \rightarrow x_0$.

Рассмотрим числитель
 $f(x)b - g(x)a = (f(x) - a)b + ab - (g(x) - b)a - ab = (f(x) - a)b - (g(x) - b)a$.

Это разность двух функций, каждая из которых представляет собой произведение б. м. на постоянную ($(f(x) - a)$ и $(g(x) - b)$ - б. м. при $x \rightarrow x_0$ по теореме о связи функции, предела и б.м.). Следовательно, числитель - б. м. при $x \rightarrow x_0$. Тогда дробь представляет собой произведение б.м. (числитель) на ограниченную при $x \rightarrow x_0$ ($\frac{1}{g(x)b}$). Следовательно, $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} = \frac{f(x)b - g(x)a}{g(x)b}$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

Теорема о пределе сложной функции.

Пусть задана сложная функция $y = f(g(x))$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$,
 $\lim_{g \rightarrow g_0} f(g) = y_0$. Пусть существует некоторая проколота окрестность точки x_0 , в которой $g(x) \neq g_0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = y_0$.

Доказательство. Используем определение предела по Гейне. Рассмотрим $\forall \{x_n\} \rightarrow x_0$. Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g_0$, то по определению Гейне $\exists \{g(x_n)\} = \{g_n\} \rightarrow g_0$. Так как $\lim_{g \rightarrow g_0} f(g) = y_0$, то по определению Гейне $\exists \{f(g_n)\} = \{f(g(x_n))\} \rightarrow y_0$. Следовательно, в силу произвольности последовательности $\{x_n\} \rightarrow x_0$ и $\{f(g(x_n))\} \rightarrow y_0$ по определению Гейне существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = y_0$. Заметим, это - предел и в смысле определения Коши, так как определения предела по Гейне и Коши эквивалентны.

Лекция 9. Бесконечно малые и бесконечно большие.

Сравнение бесконечно малых, порядок малости.

Сравнить две бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ означает найти предел их отношения. Если предел отношения вообще не существует (ни конечный, ни бесконечный), то такие б.м. называются не сравнимыми. Например б.м. при $x \rightarrow 0$ $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ не сравнимы, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

Если предел отношения б.м. существует и конечен, то эти б.м. **одного порядка малости**.

В частности, если предел отношения б.м. равен единице, то эти б.м. - **эквивалентные б.м.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ($\alpha(x) \sim \beta(x)$).

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ - б.м. **высшего порядка малости** по отношению к $\beta(x)$, а $\beta(x)$ - б.м. **низшего порядка малости** по отношению к $\alpha(x)$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ - б.м. **высшего порядка малости** по отношению к $\alpha(x)$, а $\alpha(x)$ - б.м. **низшего порядка малости** по отношению к $\beta(x)$,

Если $\alpha(x)$ одного порядка малости с $(\beta(x))^p$, то $\alpha(x)$ - **называется б.м. p -ого порядка малости** по отношению к б.м. $\beta(x)$.

Пример. Б.м. $1 - \cos x$ является б.м. второго порядка малости по отношению к б.м. x при $x \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ или

$$(1 - \cos x) \sim x^2/2 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Первый и второй замечательные пределы позволяют составить таблицу эквивалентных б.м. при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{ArCsin} x \sim x, \quad \operatorname{ArCtg} x \sim x, \quad (1 - \cos x) \sim x^2/2, \quad (\sqrt{1+x} - 1) \sim x/2.$$

Эти соотношения являются следствиями первого замечательного предела.

Например, для того, чтобы доказать, что $\operatorname{ArCtg} x \sim x$, заменим $z = \operatorname{ArCtg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} z$, $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow z \rightarrow 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z}{\sin z} = 1.$$

Покажем еще, что $(\sqrt{1+x} - 1) \sim x/2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел позволяет пополнить таблицу эквивалентных б.м. при $x \rightarrow 0$.

$$\log_A(1+x) \sim x \log_A e = x/\ln A, \quad \ln(1+x) \sim x, \\ A^x - 1 \sim x \ln A, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x.$$

Выведем эти соотношения.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a e. \quad \text{Заметим, что здесь}$$

используется непрерывность логарифма. Соотношение $\ln(1+x) \sim x$ - следствие выведенного соотношения при $A = e$.

Для того, чтобы показать $A^x - 1 \sim x \ln A$, сделаем замену $z = A^x - 1$. Тогда $x = \log_A(1+z)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Соотношение $e^x - 1 \sim x$ - следствие выведенного соотношения при $A = e$.

Для того чтобы вывести соотношение $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$, введем замену $z = (1+x)^\mu - 1$. $\ln(1+z) = \mu \ln(1+x)$, $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow z \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(1+z)} \frac{\mu \ln(1+x)}{x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\ln(1+z)} \mu \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \mu$$

Использование бесконечно малых при вычислении пределов.

Таблица эквивалентных бесконечно малых позволяет облегчить вычисление пределов. Использование бесконечно малых при вычислении пределов основано на следующих теоремах.

Теорема. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1.$$

Теорема При вычислении предела отношение б.м. можно заменить отношением им эквивалентных б.м. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\gamma(x) \sim \delta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\delta(x)}.$$

Доказательство.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)\beta(x)\delta(x)}{\gamma(x)\beta(x)\delta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\delta(x)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\delta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\delta(x)}.$$

Теорема Для того, чтобы $\alpha(x) \sim \beta(x)$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ была б.м. высшего порядка малости как по отношению к $\alpha(x)$, так и по отношению к $\beta(x)$.

Необходимость. Пусть $\alpha(x) \sim \beta(x)$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0. \quad \text{Аналогично можно}$$

показать, что $\alpha(x) - \beta(x)$ - б.м. и по отношению к $\beta(x)$.

Достаточность доказывается аналогично, проводя выкладки в обратном порядке.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых различного порядка малости эквивалентна бесконечно малой наименьшего порядка малости.

Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ - б.м. $p_1, p_2, \dots, p_n$ порядков малости по отношению к $(x-x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, тогда, если $p_s = \min(p_1, p_2, \dots, p_n)$, то $(\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)) \sim \alpha_s(x)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) + \dots + \alpha_s(x) + \dots + \alpha_n(x)}{\alpha_s(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_s(x)} + \dots + 1 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_s(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k_1(x-x_0)^{p_1}}{k_s(x-x_0)^{p_s}} + \dots + 1 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k_n(x-x_0)^{p_n}}{k_s(x-x_0)^{p_s}} = 1, \end{aligned}$$

так как $\forall m \neq s, p_m > p_s, \alpha_m = k_m (x - x_0)^{p_m}$.

Пример. Порядок малости $(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})$ при $x \rightarrow 0$ равен 1/3.

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + (1 - \cos x) + \ln(1+x)}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln(1+x)}{x} = 2$,

Бесконечно большие и их связь с бесконечно малыми.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** (б.б.) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$.

Пример. Функция $y = 1/x$ является б.б. при $x \rightarrow 0$.

Теорема. Для того чтобы $f(x)$ была б.б. при $x \rightarrow x_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(x) = 1/f(x)$ была б.м. при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Необходимость. $f(x)$ - б.б. при $x \rightarrow x_0$, следовательно,
 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty \Rightarrow \forall \frac{1}{\varepsilon} > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\alpha(x)| = \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$

Следовательно, $\alpha(x)$ - б.м. при $x \rightarrow x_0$.

Достаточность доказывается аналогично.

Б.б. $f(x)$ называется **б.б. p -го порядка роста** по отношению к б.б. $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^p} = K$, K - константа, не равная нулю.

Б.б. называются **эквивалентными**, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Б.б. $f(x)$ называется **б.б. большего порядка роста** по отношению к б.б. $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ и **меньшего порядка роста**, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Теорема. Сумма б.б. различного порядка роста эквивалентна б.б. наибольшего порядка роста. Пусть $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ - б.б. $p_1, p_2, \dots, p_n$ порядков роста по отношению к $(x - x_0)^{-1}$ при $x \rightarrow x_0$, тогда, если $p_s = \max(p_1, p_2, \dots, p_n)$, то $(\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x))$ эквивалентна $\alpha_s(x)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x) + \dots + \alpha_s(x) + \dots + \alpha_n(x)}{\alpha_s(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_s(x)} + \dots + 1 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_s(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k_1(x - x_0)^{-p_1}}{k_s(x - x_0)^{-p_s}} + \dots + 1 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k_n(x - x_0)^{-p_n}}{k_s(x - x_0)^{-p_s}} = 1, \end{aligned}$$

так как $\forall m \neq s, p_m < p_s, \alpha_m = k_m (x - x_0)^{-p_m}$.

Пример. Порядок роста $(\sqrt{x} + x^2 + x^{\frac{5}{2}})$ при $x \rightarrow +\infty$ равен 5/2.

Замечание. При $x \rightarrow +\infty$ б.б. $\ln x$ меньшего порядка роста, чем x^α , $\forall \alpha > 0$, x^α - б.б. меньшего порядка роста, чем A^x , $\forall A > 1$.

Лекция 10. Непрерывность функции.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Выполнение этого соотношения предполагает существование левой части (т.е. предела функции) и правой части (т.е. значения функции в точке).

Эквивалентные определения непрерывности функции в точке.

Эти определения используют либо ту или иную запись предела функции (левой части соотношения), либо необходимые и достаточные условия предела функции.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0** , если

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В левой части раскрыто определение предела функции по Коши (предел существует), но вместо проколотой окрестности рассматривается окрестность точки x_0 , так как предел должен быть равен именно значению функции в точке, которое определено, так как существует правая часть.
2. $\forall \{x_n\} \rightarrow x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$. В левой части раскрыто определение предела функции по Гейне. Предел должен быть равен именно значению функции в точке, которое определено, так как существует правая часть.
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Здесь использовано необходимое и достаточное условие существования предела (существование и равенство пределов слева и справа).
4. $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x) \rightarrow 0$. Бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. В самом деле, если приращение функции не стремится к нулю, то и предел функции не существует. Здесь обозначено $\Delta x = x - x_0, \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$.
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$. В самом деле, $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ и эта запись сразу следует из основного определения непрерывности. Однако это определение позволяет понять суть непрерывности: *непрерывность позволяет менять местами операции взятия предела и вычисления функции, т.е. "войти (и выйти) с символом предела под символ функции"*.

В доказательствах можно выбирать наиболее удобное определение непрерывности.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в интервале (A, B)** , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 слева**, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ (предел существует и равен).

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 справа**, если $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ (предел существует и равен).

Напомним, что пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ называются *односторонними пределами*.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** на отрезке $[A, B]$, если она непрерывна на интервале (A, B) , непрерывна в точке $\{A\}$ справа и непрерывна в точке $\{B\}$ слева.

Самостоятельно дайте определение функции, непрерывной на полуинтервале (сегменте) $[A, B)$, $(A, B]$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0 . Тогда их сумма, разность, произведение и частное (если делитель отличен от нуля в точке x_0) непрерывны в точке x_0 .

Доказательство проведем, используя теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного функций. Все выкладки аналогичны. Приведем, например доказательство для суммы и произведения функций.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f(x) + g(x))|_{x=x_0}$$

Здесь использована теорема о пределе суммы функций и определение непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(x_0)g(x_0) = (f(x)g(x))|_{x=x_0}$$

Здесь использована теорема о пределе произведения функций и определение непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема. Основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

Доказательство проведем для двух функций 1) $f(x) = \sin x$, 2) $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ - многочлен, используя определение непрерывности п.4 ($\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f(x) \rightarrow 0$).

$$1) \quad |\Delta \sin x| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = 2 \left| \sin \frac{(x + \Delta x) - x}{2} \right| \left| \cos \frac{(x + \Delta x) + x}{2} \right| =$$

$$2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|. \quad \text{Следовательно,} \quad \text{при}$$

$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \sin x \rightarrow 0$, т.е. функция $\sin x$ непрерывна в любой точке x .

2) Покажем непрерывность функции x^m ($0 < m \leq n$). Тогда многочлен - функция непрерывная как сумма непрерывных функций.

$$\Delta x^m = (x + \Delta x)^m - x^m = x^m \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^m - 1 \right] \sim x^m m \frac{\Delta x}{x} = (mx^{m-1}) \Delta x. \quad \text{Так как}$$

величина (mx^{m-1}) - не зависит от Δx , то правая часть соотношения - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно, и левая часть - эквивалентная ей бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$.

Поэтому $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x^m \rightarrow 0$, следовательно, x^m - непрерывная функция в любой конечной точке x .

Теорема о непрерывности сложной функции.

Пусть задана сложная функция $f(g(x))$. Пусть функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = g_0$). Пусть функция $f(g)$ непрерывна в точке g_0 ($\lim_{g \rightarrow g_0} f(g) = f(g_0) = f_0$). Тогда сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f_0$).

Доказательство основано на теореме о пределе сложной функции и доказывается аналогично (с использованием определения непрерывности функции п.2).

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \rightarrow x_0$. Тогда по непрерывности $g(x)$ в точке x_0 (п.2) $\{g(x_n)\} = \{g_n\} \rightarrow g_0 = g(x_0)$. Тогда по непрерывности $f(x)$ в точке g_0 (п.2) $\{f(g_n)\} \rightarrow f_0 = f(g_0)$. Отсюда следует $\{f(g(x_n))\} \rightarrow f_0 = f(g(x_0))$. Следовательно, для произвольной последовательности $\{x_n\} \rightarrow x_0$ выполнено $\{f(g(x_n))\} \rightarrow f(g(x_0))$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 (определение непрерывности функции, п.2).

Теорема. Элементарные функции непрерывны в области определения.

Доказательство. Класс элементарных функций - это множество функций, которые можно получить из основных элементарных функций четырьмя действиями арифметики и взятием сложной функции. По одной из предыдущих теорем основные элементарные функции непрерывны в своей области определения. По другой из предыдущих теорем функции, которые можно получить из основных элементарных функций четырьмя действиями арифметики, непрерывны. По третьей из предыдущих теорем функции, которые можно получить из основных элементарных функций взятием сложной функции, непрерывны. Рассматривая эти результаты совместно, убеждаемся в непрерывности элементарных функций в области их определения.

Лекция 11. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Первая теорема Больцано - Коши. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A, B]$. Пусть на концах отрезка функция принимает значения разных знаков. Тогда существует некоторая точка на отрезке ($c \in [a, b]$), в которой функция принимает нулевое значение ($f(c) = 0$).

Вторая теорема Больцано - Коши. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A, B]$. Пусть $f(A) = A$, $f(B) = B$ (для определенности $A < B$). Тогда для любого числа C : $A < C < B$, существует некоторая точка на отрезке ($c \in [a, b]$), в которой функция принимает значение C ($f(c) = C$).

Первая теорема Вейерштрасса. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A,B]$. Тогда она ограничена на этом отрезке ($\exists m, \exists M : \forall x \in [a,b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$.)

Вторая теорема Вейерштрасса. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A,B]$. Тогда она достигает на нем своей верхней и нижней грани. ($\exists x_1 \in [a,b], \exists x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \mu = \inf_{[a,b]} f(x), f(x_2) = M = \sup_{[a,b]} f(x)$).

Следствие. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке, принимает на нем все свои промежуточные значения.

Докажем это. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$, на границах которого функция достигает своей верхней и нижней грани. Этот отрезок существует по второй теореме Вейерштрасса и принадлежит отрезку $[A,B]$, на котором функция непрерывна. По второй теореме Больцано - Коши функция принимает на отрезке $[x_1, x_2]$ все свои промежуточные значения (между нижней и верхней гранями). Так как отрезок $[x_1, x_2]$ принадлежит отрезку $[A,B]$, то и на отрезке $[A,B]$ функция принимает на нем все свои промежуточные значения.

Теорема о непрерывности обратной функции.

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на отрезке $[A,B]$. Пусть $\alpha = f(a), \beta = f(b)$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена, непрерывна и монотонна обратная функция к функции $f(x)$ - функция $x = g(y)$.

Эта теорема приводится без доказательства, но заметим, что непрерывность и монотонность обеспечивает изоморфизм отображения $[A,B]$ на $[\alpha, \beta]$ посредством функции $f(x)$, а изоморфизм по доказанной ранее теореме - это необходимое и достаточное условие существования обратной функции.

Точки разрыва функции и их классификация.

Точкой разрыва функции называется точка, не являющаяся точкой непрерывности. Следовательно, в точке разрыва не выполнено условие

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Это условие может быть нарушено в нескольких случаях.

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (предел в левой части существует и конечен), но либо значение функции в точке x_0 не определено вообще, либо определено, но не равно пределу в левой части.

Такой разрыв называется *устранимым*, а точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*. Разрыв можно устранить, доопределяя функцию в точке x_0 значением предела (левой части равенства). Устранив разрыв, мы сделаем функцию непрерывной, так как определение непрерывности функции в точке x_0 (после устранения разрыва) будет выполняться.

Например, функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, имеющую устранимый разрыв в точке

$x=0$, можно сделать непрерывной, полагая $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, но $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$,
хотя оба предела конечны.

Такой разрыв называется *разрывом первого рода*. Его нельзя устранить, так как пришлось бы исправлять не значение функции в точке, а поведение функции в окрестности точки x_0 .

Например, функция $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв первого

рода, так как $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, а $f(+0) = \frac{\pi}{2}$.

3. Хотя бы один из односторонних пределов (предел слева или предел справа) бесконечен или не существует вообще.

Такой разрыв называется разрывом второго рода. Например, точка $x=0$ является для функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ точкой разрыва второго рода, так как $f(+0) = +\infty$, хотя $f(-0) = 0$. Точка $x=0$ является для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ точкой разрыва второго рода, здесь пределы слева и справа бесконечны (с разными знаками). Точка $x=0$ является для функции $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ точкой разрыва второго рода, так как здесь ни левый, ни правый пределы не существуют вообще (ни конечные, ни бесконечные).

Придумайте в качестве упражнения аналитически заданные функции, имеющие несколько точек разрыва разных типов.

Асимптоты графика функции.

Асимптота графика функции - это прямая, к которой стремится точка M , лежащая на графике функции при $M \rightarrow \infty$.

Здесь "стремится" - означает, что $\lim_{M \rightarrow \infty} \rho(M, \Gamma) = 0$, где Γ - асимптота, а ρ - расстояние от точки M до асимптоты. Заметим, что расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Асимптоты могут быть *вертикальными, наклонными и горизонтальными*.

Прямая $x=x_0$ является (двусторонней) **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$.

Например, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой графика $f(x) = \frac{1}{x}$.

Если один из пределов бесконечен, а другой конечен, то прямая называется *односторонней вертикальной асимптотой* (если левый предел бесконечен, то *правосторонней*, если правый предел бесконечен, то *левосторонней*). Это несложно запомнить, если понять, что правосторонняя асимптота находится справа от ветви графика, уходящей в бесконечность, а левосторонняя - слева. Например, прямая $x=0$ является левосторонней вертикальной асимптотой графика $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ и правосторонней вертикальной асимптотой графика $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

Если асимптота не является вертикальной, то она имеет конечный угловой коэффициент.

Уравнение наклонной асимптоты, как и всякой прямой с конечным угловым коэффициентом, можно записать в виде $y = kx + B$.

Если угловой коэффициент асимптоты равен нулю, то такая асимптота называется **горизонтальной**. Если угловой коэффициент асимптоты конечен, но отличен от нуля, то такая асимптота называется **наклонной**.

Наклонная асимптота может быть *правосторонней* ($M \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$) или *левосторонней* ($M \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow -\infty$). У правосторонней и левосторонней асимптот могут быть различные параметры k , B . Более того, может существовать лишь одна асимптота, правосторонняя или левосторонняя или не существовать ни той, ни другой асимптоты. Если какая-либо асимптота не существует, то определяя ее параметры k , B , мы получим бесконечные значения или вообще не сможем определить параметры.

Как же найти параметры наклонной асимптоты (если они существуют и конечны)?

Гораздо проще, если асимптота наклонная или горизонтальная, условие асимптоты записывать не в виде $\lim_{M \rightarrow \infty} \rho(M, \Gamma) = 0$, а в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \text{ для правосторонней асимптоты или}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \text{ для левосторонней асимптоты.}$$

В самом деле, ясно, что $\rho(M, \Gamma) = (f(x) - (kx + b)) \cos \alpha$, где $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Если угловой коэффициент k конечен, то $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\cos \alpha \neq 0$. Тогда $\rho(M, \Gamma) \rightarrow 0 \Leftrightarrow [f(x) - (kx + b)] \rightarrow 0$, поэтому для отыскания параметров асимптоты использовать более простые условия.

Рассмотрим, например правостороннюю асимптоту. Предположим, что параметры асимптоты конечны. Из условия $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) - b = 0$, так как параметр B существует. Тогда и предел существует и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = b$. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) \neq 0$, тогда он либо равен константе, либо бесконечен, либо не существует вообще. В любом из этих случаев, умножая $\left(\frac{f(x)}{x} - k \right)$ на бесконечно большую x , мы не сможем обеспечить локальную ограниченность $x \left(\frac{f(x)}{x} - k \right)$ при $x \rightarrow +\infty$, а, следовательно, конечность предела произведения. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = b$.

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0$ и

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

если только k существует и конечно. Итак, получены формулы для расчета параметров k , B наклонной правосторонней асимптоты. Для наклонной левосторонней асимптоты в этих формулах надо взять $x \rightarrow -\infty$.

Пример. Покажите, что для графика функции $f(x) = x + \arctg x$ прямая $y = x + \frac{\pi}{2}$ - правосторонняя наклонная асимптота, а $y = x - \frac{\pi}{2}$ - левосторонняя.

Пример. Покажите, что для графика функции $f(x) = x + \sin x$ наклонных асимптот нет ($k=1$, но B не существует).

Лекция 12. Производная.

Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Для того чтобы показать, что производная является функцией той точки, в которой она вычисляется, часто пишут

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Физический смысл производной.

Пример. При равномерном движении $s(t) = V t$.

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - Vt}{\Delta t} = V.$$

При равноускоренном движении $s(t) = \frac{at^2}{2}$.

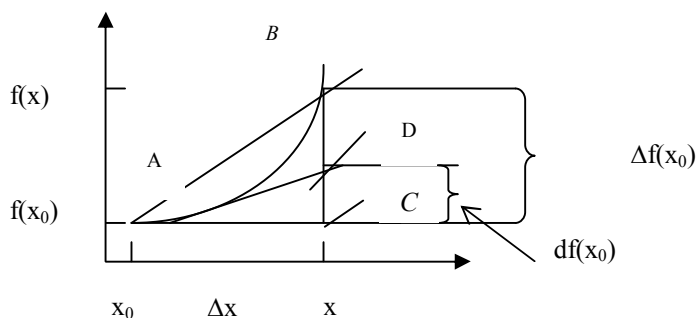
$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a[(t + \Delta t)^2 - t^2]}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2]}{2\Delta t} = at.$$

При движении с переменной скоростью

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = V(t) - \text{мгновенная скорость в момент времени } t.$$

Поэтому **физический смысл производной** состоит в том, что она имеет смысл **скорости изменения функции** при изменении ее аргумента.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график функции $f(x)$. Точки графика $A(x_0, f(x_0))$, $B(x, f(x))$, $C(x, f(x_0))$ являются вершинами прямоугольного треугольника, если провести секущую графика АВ. Вычислим угловой коэффициент секущей АВ.

$$k_{сек} = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если уменьшать Δx , то точка С, будет смещаться к точке А по прямой АС, параллельной оси абсцисс. Точка В тоже будет смещаться к точке А по дуге графика функции. Секущая АВ при $\Delta x \rightarrow 0$ будет стремиться к своему предельному положению - касательной АД к графику функции в точке А. Следовательно, угловой коэффициент секущей будет стремиться при $\Delta x \rightarrow 0$ к угловому коэффициенту касательной к графику в точке А.

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{сек} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, **геометрический смысл производной функции** состоит в том, что она численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции.

Замечание. Приращение ординаты касательной при изменении аргумента на Δx , обозначенное на графике $df(x_0)$, равно (из треугольника ADC) произведению тангенса угла наклона касательной, т.е. $k_{кас}$ на Δx .

$df(x_0) = k_{кас} \Delta x = f'(x_0) \Delta x$. Оказывается, в этом состоит геометрический смысл дифференциала. *Дифференциал численно равен приращению ординаты касательной к графику функции.* Это мы обсудим позже, когда введем понятие дифференциала как главной линейной относительно Δx части приращения функции.

Уравнение касательной и нормали к графику функции.

Запишем уравнение касательной АД (рисунок) к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$. Так как угловой коэффициент касательной численно равен $f'(x_0)$ (геометрический смысл производной) и касательная проходит через точку А, то ее уравнение можно записать в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику функции в точке А, используя условие ортогональности прямых ($k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}}$), можно записать в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример. Провести касательную и нормаль к графику функции $y = e^x$ в той точке, где она параллельна прямой $y = x$.

$$k_{кас} = f'(x_0) = e^{x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = y(x_0) = e^0 = 1.$$

Уравнение касательной: $y - 1 = x$ или $y = x + 1$. Уравнение нормали: $y - 1 = -x$ или $y = 1 - x$.

Односторонние производные.

Левой производной (производной слева) функции в точке x_0 называется

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}.$$

Правой производной (производной справа) функции в точке x_0 называется

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}.$$

Если производная в точке существует, то $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$.

Пример. $y(x) = |x|$. Для этой функции производной в точке $x = 0$ не существует, но $f'(-0) = -1$, $f'(0) = 1$. Это легко получить, построив график функции.

Вообще говоря, производная функции (левая производная или правая производная) в некоторой точке может обращаться в бесконечность. Тогда в этой точке график функции имеет *вертикальную касательную* (правую или левую).

Примеры. Функция $y = \sqrt{x}$ имеет левую вертикальную касательную в точке $x = 0$, так как $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$, при $x < 0$ функция не определена.

Функция $y = \sqrt[3]{x}$ имеет вертикальную касательную в точке $x = 0$, так как $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$.

Дифференцируемость функции в точке.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x, x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x, x_0)\Delta x, \text{ где } \alpha(x, x_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Главная линейная относительно Δx часть приращения функции $A(x_0)\Delta x$ называется **дифференциалом** функции в точке x_0 .

Поэтому функция называется дифференцируемой, если она имеет дифференциал (конечный).

Заметим, что **геометрический смысл дифференциала** состоит в том, что дифференциал численно равен приращению ординаты касательной к графику функции. Выше это было показано.

В курсе средней школы часто дифференцируемой функцией называют функцию, имеющую конечную производную. Насколько это оправдано? Оказывается, что для функций одной переменной эти понятия эквивалентны. Однако для числовых функций нескольких переменных, тем более для функций общего вида понятие производной несколько иное (аргументов больше одного и по каждому аргументу можно ввести производную - "частную производную"). Здесь понятия дифференцируемой функции и функции, имеющей конечные частные производные уже не эквивалентны.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке, тогда

$$\Delta f(x, x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x, x_0)\Delta x, \text{ где } \alpha(x, x_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Разделим обе части равенства на Δx и устремим Δx к нулю.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, x_0) = A(x_0).$$

Следовательно, предел в левой части, т.е. производная функции в точке x_0 существует и конечна, причем $A(x_0) = f'(x_0)$.

Поэтому справедлива форма записи дифференциала

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Заметим, что дифференциал независимой переменной $dx = x'\Delta x = \Delta x$.

Достаточность. Пусть производная функции в точке существует и конечна

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0). \text{ Тогда по теореме о связи функции, предела и}$$

бесконечно малой $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x, x_0)$, где $\alpha(x, x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Умножая обе части на Δx , получим $\Delta f(x, x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x, x_0)\Delta x$, где $\alpha(x, x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно, функция дифференцируема в точке x_0 .

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Так как функция дифференцируема в точке, то $\Delta f(x, x_0) = A(x_0)\Delta x + \alpha(x, x_0)\Delta x$, где $\alpha(x, x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Поэтому $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta f \rightarrow 0$, следовательно, функция непрерывна в точке x_0 по одному из определений непрерывности.

Замечание. Из непрерывности не следует дифференцируемость. Рассмотрим, например $f(x) = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке, так как ее производная в этой точке не существует. В самом деле,

$$f'(-0) = -1, f'(+0) = 1. \quad f'(-0) \neq f'(+0) \Rightarrow f'(0) \text{ не существует вообще.}$$

Лекция 13. Правила дифференцирования.

1. Производная постоянной равна нулю.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2. Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных.

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x)+g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

3. Производная произведения равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\begin{aligned}\text{Доказательство. } \Delta(f(x)g(x)) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = \\ &= [f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f(x)g(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Заметим, $\exists g'(x) \Rightarrow$ непрерывность $g(x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) = g(x)$.

4. Производная частного

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ если } g(x) \neq 0.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \\ &= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x)g(x)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{1}{g^2(x)} [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)].\end{aligned}$$

5. Производная сложной функции.

Теорема о производной сложной функции. Пусть задана сложная функция $y(x) = f(g(x))$. Пусть функция $g(x)$ дифференцируема (имеет конечную производную) в точке x_0 . Пусть функция $f(g)$ дифференцируема (имеет конечную производную) в точке $g_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $y(x) = f(g(x))$ дифференцируема (имеет конечную производную) в точке x_0 , причем

$$y'(x_0) = f'(g_0)g'(x_0).$$

Доказательство. Так как функция $f(g)$ имеет конечную производную в точке g_0 , то она дифференцируема в этой точке (выше была доказана теорема об

эквивалентности этих утверждений). Следовательно, ее приращение в точке g_0 можно представить в виде

$$\Delta y = \Delta f(g_0) = f'(g_0)\Delta g + \alpha(g_0, \Delta g)\Delta g, \text{ где } \alpha(g_0, \Delta g) - \text{б.м. при } \Delta g \rightarrow 0.$$

Так как функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta g = g'(x_0)\Delta x + \beta(x_0, \Delta x)\Delta x, \text{ где } \beta(x_0, \Delta x) - \text{б.м. при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Кроме того, из дифференцируемости функции $g(x)$ в точке x_0 следует ее непрерывность в этой точке, поэтому $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta g \rightarrow 0$, т.е. $\alpha(g_0, \Delta g) - \text{б.м.}$

при $\Delta x \rightarrow 0$. Запишем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, подставляя в выражение $\Delta y = \Delta g$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(g_0)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \alpha(g_0, \Delta g)[g'(x_0) + \beta(x_0, \Delta x)].$$
 В этом выражении $\alpha(g_0, \Delta g) - \text{б.м. при } \Delta x \rightarrow 0$, $[g'(x_0) + \beta(x_0, \Delta x)]$ - ограниченная при $\Delta x \rightarrow 0$, так как $g'(x_0)$ - конечное число, а $\beta(x_0, \Delta x)$ - ограниченная при $\Delta x \rightarrow 0$, как функция, имеющая нулевой предел. Следовательно, второе слагаемое в рассматриваемом выражении - это б.м. при $\Delta x \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(g_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(g_0)g'(x_0).$$

6. Производная обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0 , пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная к функции $f(x)$ функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$.

Доказательство. По теореме о непрерывности обратной функции в условиях данной теоремы существует монотонная и непрерывная в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ обратная функция $x = g(y)$.

Докажем дифференцируемость обратной функции в точке y_0 . По непрерывности обратной функции $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$.

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)}.$$

Дифференцирование основных элементарных функций.

1. Степенная функция $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$.

$$(x^\mu)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}.$$

Полезно запомнить, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Показательная функция $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

3. Логарифмическая функция $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x}.$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$\frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

В этих пунктах использованы пределы, вычисленные выше на основе второго замечательного предела.

Тригонометрические функции.

4. $(\sin x)' = \cos x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Здесь использован первый замечательный предел.

5. $(\cos x)' = -\sin x$

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = (-1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Здесь использована теорема о производной сложной функции.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Покажем справедливость первой из формул, вторая выводится аналогично.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Здесь использовано правило дифференцирования частного.

Обратные тригонометрические функции.

$$7. \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Выведем первую и третью формулы, остальные выводятся аналогично..

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\arctg x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Здесь использована теорема о производной обратной функции.

Гиперболические функции.

$$8. \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

Остальные две формулы выводятся по правилу дифференцирования частного.

Теорема. *Элементарные функции дифференцируемы в области определения.*

Доказательство. Элементарные функции могут быть получены из основных элементарных функций четырьмя действиями арифметики и взятием сложной функции. Выше доказано, что основные элементарные функции дифференцируемы в области их определения. Выше доказано, что функции, полученные указанными действиями из дифференцируемых функций, дифференцируемы. Поэтому элементарные функции дифференцируемы в области их определения.

Любую элементарную функцию можно дифференцировать. Более того, дифференцирование не выводит за класс элементарных функций, дифференцируя элементарную функцию, мы получаем снова элементарную функцию.

Лекция 14. Производные высших порядков.

Производной n-ого порядка функции называется производная от (n-1) ее производной.

Поэтому вторая производная - это производная первой производной, третья производная - это производная второй производной и т.д.

$$f^n(x) = (f^{n-1}(x))', \quad n = 2, 3, \dots$$

Вычислим, например n -ую производную функции $y(x) = xe^x$

$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x, \quad y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \dots y^n = (x+n)e^x.$$

Вычислим n -ую производную функции $y(x) = u(x)v(x)$.

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Здесь уже легко увидеть знакомую формулу биннома Ньютона

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Рассмотрим вопрос о дифференцировании параметрически заданной или неявно заданной функции.

Производная параметрически заданной функции.

Пусть функция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Говорить о производной

функции $y(x)$ по ее аргументу x можно, если определена функция $y = f(x)$.

Так как функция задана параметрически, то для того, чтобы определить $y = f(x)$, надо произвольному x поставить в соответствие $t(x)$, а затем по этому t отыскать $y(t)$. Поэтому должна быть определена обратная функция $t(x)$.

Следовательно, функция $y(x)$ представляет собой сложную функцию $y = y(t(x))$. По теореме о производной сложной функции $y'(x) = y'(t)t'(x)$. Отсюда видно, что должна существовать производная обратной функции, следовательно, нужно требовать выполнения условий теоремы о производной обратной функции.

По теореме о производной обратной функции $t'(x) = \frac{1}{x'(t)}$, тогда

$$y'(x) = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

По этой формуле можно вычислять первую производную параметрически заданной функции.

Первая производная таким образом тоже представляет собой параметрически заданную функцию, обозначим $y'(x) = z(t)$. Тогда

$$y''(x) = z'(t)t'(x) = \frac{(y')'_t}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

Так можно вычислить производную любого порядка

$$y^{(n)}(x) = \frac{(y^{(n-1)})'_t}{x'(t)}.$$

Пример. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$. $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}$, $y''(x) = \frac{(-\operatorname{ctgt})'_t}{x'(t)} = -\frac{1}{\sin^3 t}$

Дифференцирование неявно заданной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно соотношением $F(x,y)=0$. Тогда справедливо тождество $F(x,y(x)) \equiv 0$. Дифференцируя тождество (рассматривая левую часть тождества как сложную функцию), получим соотношение, из которого можно выразить $y'(x)$ через x и $y(x)$. Дифференцируя далее $y'(x)$, получим $y''(x)$ через x , $y(x)$, $y'(x)$. Продолжая этот процесс, получим третью и т.д. производные функции, заданной неявно.

Пример. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

$$2x + 2yy' = 0, \quad y'(x) = -\frac{x}{y}, \quad y''(x) = -\frac{y - xy'}{y^2}.$$

Замечание. На втором семестре в курсе дифференциального исчисления функций нескольких переменных будет получена формула полного дифференциала $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$, где F'_x, F'_y - частные производные по переменным x, y (производная только по переменной x , считая y константой, и производная только по переменной y , считая x константой). Дифференцируя тождество $F(x,y(x)) \equiv 0$, получим $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy \equiv 0$.

Отсюда следует формула для вычисления производной функции, заданной неявно

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

В приведенном примере $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $dF(x,y) = 2x dx + 2y dy \equiv 0$, откуда $y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Так считать проще.

Лекция 15. Дифференциалы первого и высших порядков.

В лекции 12 было дано определение дифференциала как главной линейной относительно приращения аргумента части приращения функции.

Было показано, что геометрический смысл дифференциала состоит в том, что дифференциал функции численно равен приращению ординаты касательной к графику функции, соответствующей приращению аргумента Δx .

Была получена формула для вычисления дифференциала (форма записи дифференциала)

$$df(x) = f'(x)dx$$

($dx \equiv \Delta x$ - приращение независимой переменной).

Интересно выяснить, сохранится ли та же форма записи дифференциала, если в качестве x взять какую-либо функцию независимой переменной.

Инвариантность формы записи (первого) дифференциала.

Теорема. Дифференциал функции может быть записан в форме $df(x) = f'(x)dx$, независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией какой-либо другой переменной.

Доказательство. Пусть $x=g(t)$ - является функцией переменной t . Тогда функция $f(x)$ будет сложной функцией $f(g(t))$ переменной t . Тогда, так как t - независимая переменная, то дифференциал функции можно записать в виде

$$df = f'(t)dt.$$

Если выполнены условия теоремы о производной сложной функции, то

$$f'(t) = f'(x)x'(t).$$

Подставляя производную в выражение для дифференциала функции, получим

$$df = f'(x)x'(t)dt.$$

Но так как t - независимая переменная, а $x(t)$ - функция этой переменной, то $dx = x'(t)dt$, $df = f'(x)x'(t)dt = f'(x)dx$.

Следовательно, дифференциал функции может быть записан в форме

$$df(x) = f'(x)dx$$

независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией какой-либо другой переменной. В этом и состоит *свойство инвариантности формы записи первого дифференциала*.

Следствие. С дифференциалами первого порядка можно обращаться как с алгебраическими выражениями

Из формы записи дифференциала $df(x) = f'(x)dx$ и ее инвариантности следует $f'(x) = \frac{df}{dx}$ (производная равна отношению дифференциалов).

Поэтому и эквивалентны эти две формы записи производной (о чем мы теперь и не задумываемся).

Пример. Выведем формулу для производной параметрически заданной

функции. Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Здесь мы формально

разделили на дифференциал dt , как на алгебраическое выражение.

Правила дифференцирования (вычисления дифференциала).

Все правила вычисления дифференциала суммы, разности и т.д. легко получить из правил вычисления производных суммы, разности и т.д. с помощью формы записи дифференциала $df(x) = f'(x)dx$.

Поэтому обычно правила вычисления дифференциала подробно не рассматриваются, даже сами названия "правила дифференцирования", "дифференцирование" стали относиться скорее к вычислению производных, а не к вычислению дифференциалов.

1. *Дифференциал суммы (разности)*

$$d(f(x) \pm g(x)) = (f(x) \pm g(x))' dx = f'(x)dx \pm g'(x)dx = df(x) \pm dg(x)$$

2. *Дифференциал произведения.*

$$d(fg) = (fg)' dx = (f'g + g'f)dx = (f'dx)g + f(g'dx) = gdf + fdg$$

3. *Дифференциал частного.*

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{f'g - g'f}{g^2} dx = \frac{(f'dx)g - (g'dx)f}{g^2} = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Как видно, достаточно заменить знак производной знаком дифференциала в правилах вычисления производной, чтобы получить правила вычисления дифференциала.

4. Дифференциал сложной функции.

$$d(f(g(x))) = (f(g(x)))' dx = f'(g)g'(x)dx = f'(g)dg$$

5. Дифференциал обратной функции.

Пусть для функции $y(x)$ определена обратная функция $x(y)$. Используя теорему о производной обратной функции, вычислим дифференциал обратной функции.

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow dx = \frac{1}{y'(x)} dy \Rightarrow dx = x'(y)dy.$$

Приближенные вычисления с помощью первого дифференциала.

Первый дифференциал - это главная линейная относительно приращения аргумента часть приращения функции. Поэтому приближенно (с точностью до бесконечно малой второго порядка от приращения аргумента) приращение функции можно заменить первым дифференциалом.

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Отсюда можно получить формулу для приближенного вычисления

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

которая тем точнее, чем ближе x к x_0 .

Пример. Радиус шарового газового баллона ошибочно уменьшили на 10%, на сколько процентов уменьшился его объем?

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V(R + \Delta R) = \frac{4}{3}\pi(R + \Delta R)^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 + 3R^2\Delta R + 3R\Delta R^2 + \Delta R^3)$$

С точностью до линейных членов уменьшение объема составляет $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$. По условию задачи $\Delta R = 0,1R$. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi R^2 \cdot 0,1R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0,3 = 30\%$.

Объем уменьшился на 30%.

Пример. Вычислить приближенно $\operatorname{tg} 47^\circ$.

$$\operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 2^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right) \approx \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{\pi}{90} = 1 + \frac{\pi}{45}.$$

Дифференциалы высших порядков.

Дифференциалом n -ого порядка функции называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ порядка функции.

$$d^n f = d(d^{n-1} f), \quad n = 2, 3, \dots$$

Дифференциалы высших порядков вычисляют (так же как и производные высших порядков), применяя правила дифференцирования, переходя от первого дифференциала ко второму, от второго - к третьему и т.д.

Дифференциал n-ого порядка функции независимой переменной.
(dx - константа)

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = (f''(x))' dx dx = f''(x)dx^2$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)' dx = f'''(x)dx^3 \text{ и т.д.}$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Дифференциал n-ого порядка сложной функции.
(dx(t) - не константа)

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2 + f'(x)(dx)' dx$$

Последнее слагаемое отсутствует, если x - независимая переменная. Именно наличие последнего слагаемого делает не инвариантной форму записи второго дифференциала, тем более, высших дифференциалов.

Следовательно, форма записи высших дифференциалов не инвариантна, она зависит от того, является или не является переменная независимой или функцией другой переменной.

С дифференциалами высших порядков, в отличие от первого дифференциала, уже нельзя обращаться как с алгебраическими выражениями,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ - отношение двух дифференциалов, } f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \text{ - единый}$$

символ, а не отношение второго дифференциала к квадрату dx.

Лекция 16. Теоремы о средних значениях.

Теорема Ферма.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (A, B) и принимает в его внутренней точке x_0 максимальное или минимальное значение. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности функция принимает в точке x_0 максимальное значение. Так как $\exists f'(x_0)$, то существуют производная слева в точке x_0 и производная справа в точке x_0 .

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Так как функция принимает в точке x_0 максимальное значение, то

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \Delta f(x) \leq 0, \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0, \quad \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f(x) \leq 0, \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \leq 0.$$

По теореме о предельном переходе в неравенстве $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) \geq 0, \quad f'(x_0) = f'(x_0 + 0) \leq 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Следствие (геометрический смысл теоремы Ферма). В условиях теоремы Ферма существует касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, параллельная оси абсцисс.

Доказательство. По геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ численно равен $f'(x_0)$. Но $f'(x_0) = 0$ по теореме Ферма, следовательно, касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ горизонтальна, т.е. параллельна оси абсцисс.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$

1) непрерывна на $[a, b]$,

2) дифференцируема в (a, b) ,

3) принимает на концах отрезка равные значения $f(a) = f(b)$,

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на нем своей точной верхней грани M в некоторой точке x_1 , ($f(x_1) = M$) и точной нижней грани m в некоторой точке x_2 ($f(x_2) = m$).

Если $m = M$, то $f(x) \equiv \text{const} = m = M$ на всем отрезке $[a, b]$, тогда в качестве точки c может быть выбрана любая точка интервала (a, b) , в ней $f'(c) = 0$.

Если $m \neq M$, то какая-либо из точек x_1, x_2 лежит в интервале (a, b) . Если они лежат на границах отрезка, являются точками A, B , то значения функции в этих точках должны совпадать по третьему условию теоремы. Но это противоречит $m \neq M$.

Пусть для определенности $x_1 \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(x_1) = 0$, и в качестве точки c можно выбрать точку x_1 .

Замечание. Все условия теоремы существенны, нельзя исключить ни одно из них.

Пусть, например первое условие не выполнено, остальные выполнены.

Можно указать функцию, например, $f(x) = \begin{cases} x - a, & x \in [a, b) \\ 0, & x = b \end{cases}$. Она

дифференцируема в интервале и имеет равные значения на концах отрезка, но не является непрерывной на отрезке. $f'(x) \equiv 1$ на всем интервале и теорема перестает работать.

Пусть, например второе условие не выполнено, остальные выполнены. Рассмотрим, например функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Функция непрерывна на отрезке и имеет равные значения на его концах, однако в интервале $(-1, 1)$ нет точки c , в которой бы $f'(c) = 0$.

Пусть, например третье условие не выполнено, остальные выполнены. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x$ на отрезке $[a, b]$. Она непрерывна на отрезке и дифференцируема в интервале, но $f(a) \neq f(b)$. В интервале $f'(x) \equiv 1$, точки c , в которой выполнялось бы $f'(c) = 0$, на интервале нет.

Следствие (геометрический смысл теоремы Ролля). В условиях теоремы Ролля существует точка $(C, f(C))$ на графике функции, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

В самом деле, при доказательстве использовалась теорема Ферма, ее условия выполнены. Следовательно, справедливо и следствие из нее, по которому существует точка $(C, f(C))$ на графике функции, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$

- 1) непрерывна на $[a, b]$,
- 2) дифференцируема в (a, b) .

Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. Проведем секущую к графику функции через точки $(a, f(a)), (b, f(b))$

$$y_{сек} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - y_{сек} = (f(x) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Покажем, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

- 1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных на отрезке функций $f(x)$, $(x - a)$.
- 2) $F(x)$ дифференцируема в интервале (A, B) как линейная комбинация дифференцируемых в интервале функций $f(x)$, $(x - a)$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$3) \quad F(a) = (f(a) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$F(b) = (f(b) - f(a)) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

По теореме Ролля $\exists c \in (a, b)$, что $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Следовательно, $\exists c \in (a, b)$, что $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Следствие 1 (геометрический смысл теоремы Лагранжа). В условиях теоремы Лагранжа на интервале (A, B) найдется точка c , что касательная к графику функции в точке $(c, f(c))$ параллельна секущей, проведенной через точки $(A, f(A)), (B, f(B))$ графика функции.

В самом деле, значение $f'(c)$ численно равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(C, f(C))$, а значение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ численно равно угловому коэффициенту секущей. По теореме Лагранжа эти значения равны.

Следствие 2. Формула конечных приращений Лагранжа.

В условиях теоремы Лагранжа на интервале (A, B) найдется точка c , что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Это сразу следует из теоремы Лагранжа.

Часто формулу конечных приращений записывают в виде (применяя теорему Лагранжа к произвольному отрезку $[x_1, x_2] \in [a, b]$, $c \in (x_1, x_2)$)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Следствие 3. Если $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv \text{const}$.

По формуле конечных приращений $\forall x_1, x_2 \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$, так как $f'(c) = 0$.

Следствие 4. Достаточное условие возрастания (убывания) функции.

Пусть $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$) на интервале (A, B) . Тогда функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (A, B) .

Пусть $f'(x) > 0$ на интервале (A, B) . Тогда по формуле конечных приращений $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$, так как $f'(c) > 0$. Следовательно, функция возрастает на интервале. Случай $f'(x) < 0$ рассматривается аналогично.

Следствие 5. Критерий не убывания (не возрастания) функции.

Для того, чтобы функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на интервале (A, B) , необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$, ($f'(x) \leq 0$) на этом интервале.

Доказательство. Рассмотрим случай не убывания функции, случай не возрастания доказывается аналогично.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ в интервале (A, B) . Тогда по формуле конечных приращений

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_2 > x_1 \quad \exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Следовательно, функция не убывает на интервале (A, B) .

Необходимость. Пусть функция не убывает на интервале (A, B) . Предположим, что в некоторой точке x_0 выполнено $f'(x_0) < 0$. Тогда

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$. По теореме о сохранении функцией знака своего предела существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$, следовательно $\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f(x) < 0$, т.е. функция убывает в некоторой окрестности точки x_0 . Противоречие.

Замечание. Во всех сформулированных выше следствиях из теоремы Лагранжа требуется выполнение условий теоремы.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[A, B]$ и дифференцируемы в интервале (A, B) . Пусть $g'(x) \neq 0$ в интервале (A, B) .

Тогда существует точка c на интервале (A, B) , что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Левая часть равенства существует, так как $g'(x) \neq 0$ в интервале (A, B) . Правая часть равенства существует, так как $g(b) \neq g(a)$, иначе по теореме Ролля существовала бы точка c_1 в интервале (a, b) , в которой было бы $g'(c_1) = 0$. А это противоречит условию теоремы $g'(x) \neq 0$ в интервале (a, b) .

Составим функцию

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right].$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

- 1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как линейная комбинация непрерывных на отрезке функций $f(x)$, $(g(x) - g(a))$.
- 2) $F(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) как линейная комбинация дифференцируемых в интервале функций $f(x)$, $(g(x) - g(a))$.

$$F'(x) = f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

$$3) F(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(a) - g(a)) \right] = 0.$$

$$F(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(b) - g(a)) \right] = 0.$$

Применим теорему Ролля. На интервале (a, b) существует точка c , что

$$F'(c) = f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Замечание. Если взять $g(x) \equiv x$, то из теоремы Коши получим теорему Лагранжа.

Правило Лопиталя (в случае неопределенности типа $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $(A, B]$ и дифференцируемы в интервале (A, B) , $g'(x) \neq 0$ в интервале (A, B) .

Пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если предел в правой части соотношения существует и конечен.

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$, $g(x)$ в точке $x=a$ значениями их пределов $f(a)=g(a)=0$. Тогда функции $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывными на отрезке $[a, B]$ и будут удовлетворять на нем условиям теоремы Коши.

По теореме Коши существует точка c на интервале (A, B) , в которой выполнено

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Перейдем к пределу в этом соотношении при $x \rightarrow a+0$, учитывая что $c \in (a, x)$ и $x \rightarrow a+0 \Rightarrow c \rightarrow a+0$.

$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, если только предел в правой части существует и конечен.

Замечание. Можно показать, что правило Лопиталя справедливо для неопределенности типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$). Оно справедливо и при $x \rightarrow a-0, x \rightarrow a, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$.

Применяя правило Лопиталя, нужно обязательно убедиться в существовании предела отношения производных. Если конечного предела не существует, то приведенный выше вывод правила Лопиталя теряет силу.

Повторно применяя правило Лопиталя, нужно проверять есть ли неопределенность указанных выше типов (не исчезла ли она при предыдущем применении правила Лопиталя)

Пример. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ (1 замечательный предел).

Сравнение скорости роста логарифмической, степенной и показательной функций.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^m x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \ln^{m-1} x}{x n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \ln^{m-1} x}{n x^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m!}{n^m x^n} = 0$$

Поэтому логарифмическая функция растет медленнее степенной, а степенная функция растет медленнее показательной.

Раскрытие неопределенностей типа $0 \cdot \infty, \infty - \infty$.

Рассмотрим неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Надо вычислить $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$.

Эту неопределенность можно свести к одной из стандартных $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Рассмотрим неопределенность типа $\infty - \infty$.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Надо вычислить $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$.

Сведем эту неопределенность к стандартной.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \left(\frac{0}{0} \right).$$

Раскрытие неопределенностей типа $1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x)^{g(x)}$. Пусть надо вычислить $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$.

Прологарифмируем функцию $F(x)$, $h(x) = \ln F(x) = g(x) \ln f(x)$. Если существует $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = m$, то $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = e^m$.

Неопределенность 1^∞ возникает, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = 0$, и при вычислении $h(x)$ возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Неопределенность 0^0 возникает, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = -\infty$ и при вычислении $h(x)$ возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Неопределенность ∞^0 возникает, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \infty$, и при вычислении $h(x)$ возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

Итак, во всех рассмотренных случаях возникает неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Она сводится к стандартным рассмотренным выше способом.

Пусть предел $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = m$ удалось найти. Если $m = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$.

Если $m = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = +\infty$. Если $m = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = e^c$. Если $m = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 1$.

Примеры.

$$1) F(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, a = 0,$$

$$\ln F(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x). \lim_{x \rightarrow 0} \ln F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e \text{ (2 замечательный предел).}$$

$$2) F(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}, a = 0,$$

$$\ln F(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x^2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x^2)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Лекции 17, 18. Формула Тейлора.

Формула Тейлора для многочлена.

Рассмотрим многочлен n -ой степени

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

и вычислим его коэффициенты по значениям многочлена и его производных в точке $x = x_0$.

$$P_n(x_0) = a_0$$

$$a_0 = P_n(x_0)$$

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n'(x_0) = a_1$$

$$a_1 = P_n'(x_0)$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n''(x_0) = 2! a_2$$

$$a_2 = P_n''(x_0) / 2!$$

$$P_n'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$P_n'''(x_0) = 3! a_3$$

$$a_3 = P_n'''(x_0) / 3!$$

$$P_n^{(n)}(x) = n! a_n$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n! a_n$$

$$a_n = P_n^{(n)}(x_0) / n!$$

Итак, многочлен можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n'(x_0)(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Возникает вопрос, можно ли любую функцию, дифференцируемую достаточное число раз, представить в сходном виде?

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема на интервале (x_0, x) , пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Пусть существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0), k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

где $o(x-x_0)^n$ - остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано.

Таким образом, функция может быть записана в виде суммы многочлена Тейлора (первые n слагаемых, аналогичные слагаемым многочлена $P_n(x)$) и остаточного члена в форме Пеано.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right].$$

Вычислим, применяя нужное число раз правило Лопиталя,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right]}{(x-x_0)^n} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x) - \left[f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right]}{n(x-x_0)^{n-1}} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f''(x) - \left[f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} \right]}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой отсюда следует

$$\frac{F(x)}{(x-x_0)^n} = \alpha(x-x_0) - \text{б.м. при } x \rightarrow x_0 + 0.$$

$$\text{Следовательно, } F(x) = \alpha(x-x_0)(x-x_0)^n.$$

Подставляя в это выражение $F(x)$, получим **формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \alpha(x-x_0)(x-x_0)^n$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема на интервале (x_0, x) , пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$. Пусть существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

где $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\exists c \in (x_0, x)$ - остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Таким образом, функция может быть записана в виде суммы многочлена Тейлора (первые n слагаемых, аналогичные слагаемым многочлена $P_n(x)$) и остаточного члена в форме Лагранжа.

Лемма. Пусть функции $F(x)$, $G(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0, x]$, пусть в интервале (x_0, x) существуют $F^{(n+1)}(x)$, $G^{(n+1)}(x) \neq 0$, пусть существуют пределы справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} F^{(k)}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} G^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда существует

точка $c \in (x_0, x)$, такая что $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$.

Доопределим по непрерывности $F^{(k)}(x_0) = 0$, $G^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Доказательство леммы. Рассмотрим отношение функций и применим нужное число раз теорему Коши, вычитая из числителя и знаменателя дроби - отношения нулевые значения функций и их производных.

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(x_0)}{G'(c_1) - G'(x_0)} = \dots = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(c_n) - G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}.$$

Заметим, что $G(x) \neq 0$, $G'(x) \neq 0$, $G''(x) \neq 0, \dots, G^{(n)}(x) \neq 0$ в интервале (x_0, x) .

Пусть, например, $\exists x_n \in (x_0, x)$, для которой $G^{(n)}(x_n) = 0$. Тогда по теореме Ролля $\exists x_{n+1} \in (x_0, x_n)$, для которой $G^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Это противоречит $G^{(n+1)}(x) \neq 0$. Пусть, например, $\exists x_{n-1} \in (x_0, x_n)$, для которой $G^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0$. Тогда по теореме Ролля $\exists x_n \in (x_0, x_{n-1})$, для которой $G^{(n)}(x_n) = 0$. Это противоречит $G^{(n)}(x) \neq 0$. Аналогично предыдущему пришли к противоречию и т.д. Обозначим

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n].$$

$G(x) = (x-x_0)^{n+1}$. Проверим выполнение условий леммы для этих функций.

$$F(x_0) = f(x_0) - [f(x_0) + f'(x_0)(x_0-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_0-x_0)^n] = 0.$$

$$F'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}].$$

$$F'(x_0) = 0 \dots$$

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$$

$$F^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

$$G(x_0) = (x_0 - x_0)^{n+1} = 0$$

$$G'(x) = (n+1)(x-x_0)^n$$

$$G'(x_0) = (n+1)(x_0 - x_0)^n = 0 \dots$$

$$G^{(n)}(x) = (n+1)n(n-1)...2(x-x_0)$$

$$G^{(n)}(x_0) = 0$$

$$G^{(n+1)}(x) = (n+1)n(n-1)...2 \cdot 1 = (n+1)! \neq 0 \quad \forall x.$$

Условия леммы выполнены. Применяя ее, получим

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}$$

Подставляя сюда функции $F(x)$, $G(x)$, получим **формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Если в формуле Тейлора взять $x_0 = 0$, то получим **формулу Маклорена**.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \text{ где } R_n(x) - \text{остаточный}$$

член формулы Маклорена. Его можно получить из остаточного члена формулы Тейлора (в форме Пеано или Лагранжа), если взять $x_0 = 0$.

Теорема. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и все ее производные в некоторой δ окрестности точки x_0 ограничены в совокупности одной константой ($\forall n, |f^{(n)}(x)| < C$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = 0$. Обозначим

$$a_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

$$|a_{n+1}| = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = |a_n| \frac{|x-x_0|}{n+1} < \frac{\delta}{n+1} |a_n|.$$

Следовательно, последовательность $|a_n|$ монотонно убывает. Так как она ограничена снизу нулем, то по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$. Покажем, что этот предел равен нулю. В самом деле, $|a_n|$ - величина ограниченная, так как $|a_n| < |a_1|$, $\frac{\delta}{n+1}$ - бесконечно малая при $n \rightarrow \infty$, поэтому величина

$\frac{\delta}{n+1} |a_n|$ - бесконечно малая при $n \rightarrow \infty$ и имеет своим пределом нуль. По теореме о предельном переходе в неравенстве $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}| = 0$.

Оценим теперь остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

$$\frac{|f^{(n+1)}(x_0)|}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} < C \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Если остаточный член записан в форме Пеано $R_n(x) = o(x-x_0)^n$, то очевидно $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Представление основных элементарных функций по формуле Маклорена.

$$1. \quad f(x) = e^x.$$

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$2. \quad f(x) = \sin x.$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0 \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

$$|R_{2n+1}(x)| = \frac{|\sin c|}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \quad |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$$

Для того чтобы сделать оценку погрешности представления функции многочленом Тейлора более точной, надо учесть, что в разложении можно формально записать член с производной $(2n + 2)$ порядка (он входит в разложение с нулевым коэффициентом). Тогда остаточный член формулы Тейлора будет содержать x^{2n+3} :

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos(c)}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad |R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$3. \quad f(x) = \cos x$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$f(0) = \cos 0 = 1, \quad f'(0) = -\sin 0 = 0, \quad f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = \sin 0 = 0, \quad f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1 \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$|R_{2n}(x)| = \frac{|\sin(c)|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \quad |R_{2n}(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}$$

Для того, чтобы сделать оценку погрешности представления функции многочленом Тейлора более точной, надо учесть, что в разложении можно формально записать член с производной $(2n + 1)$ порядка (он входит в разложение с нулевым коэффициентом). Тогда остаточный член формулы Тейлора будет содержать x^{2n+2} :

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\cos(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad |R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$4. \quad f(x) = \ln(1+x)$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=-1, f'''(0)=2!, f^{(4)}(0)=-3!...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$5. f(x) = (1+x)^m$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f(0)=1, f'(0)=m, f''(0)=m(m-1), \dots, f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n)(1+c)^{m-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$6. f(x) = \operatorname{sh} x$$

$$f'(x) = \operatorname{Ch} x, f''(x) = \operatorname{sh} x, f'''(x) = \operatorname{Ch} x \dots$$

$$f(0)=0, f'(0)=\operatorname{Ch} 0=1, f''(0)=\operatorname{sh} 0=0, f'''(0)=\operatorname{Ch} 0=1 \dots$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}$$

$$7. f(x) = \operatorname{Ch} x$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}$$

Упражнение. Запишите явно остаточные члены в п.п. 6., 7 в форме Лагранжа.

Вычисление значений функций по формулам Тейлора и Маклорена.

Пример. Вычислить $\sin 10^0 \left(\sin \frac{\pi}{18} \right)$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Оценка погрешности представления функции по формуле Тейлора определяется модулем остаточного члена, так как остаточный член равен разности функции и полинома Тейлора, которым представляется функция.

Поэтому надо найти такое n , что модуль остаточного члена не превышает заданной погрешности представления.

$$|R_{2n+1}| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} \approx \frac{1}{6^{2n+3}(2n+3)!}.$$

$$\text{Если } n=0, \text{ то } |R_1| \approx \frac{1}{216 \cdot 6} < 0,001$$

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18}.$$

Пример. Вычислить $e^{0,3}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

$$R_n(0,3) = \frac{e^c}{(n+1)!} (0,3)^{n+1} < \frac{3(0,3)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,001$$

$$\text{Если } n=2, \text{ то } R_2 < \frac{(0,3)^3}{2} > 0,001. \text{ Если } n=3, \text{ то } R_3 < \frac{(0,3)^4}{8} > 0,001.$$

$$\text{Если } n=4, \text{ то } R_4 < \frac{(0,3)^5}{40} < 0,001.$$

$$e^{0,3} \approx 1 + 0,3 + \frac{0,3^2}{2!} + \frac{0,3^3}{3!} + \frac{0,3^4}{4!}.$$

Формулу Тейлора можно применять и при вычислении пределов.

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots\right) = \frac{1}{2}.$$

Лекция 19. Экстремумы графика функции.

Экстремумы.

Будем предполагать непрерывность функции в точках экстремума. К точкам экстремума функции относятся точки локального максимума и минимума.

Точка x_0 называется **точкой локального минимума функции $f(x)$** (или функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_0), если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Если это неравенство строгое ($f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется **точкой строгого локального минимума функции $f(x)$** .

Пусть в области определения существует несколько точек локального минимума, тогда та точка локального минимума, в которой значение функции наименьшее, называется **точкой глобального минимума функции**.

Точка x_0 называется **точкой локального максимума функции $f(x)$** (или функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0), если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Если это неравенство строгое ($f(x) < f(x_0)$), то точка x_0 называется **точкой строгого локального максимума функции $f(x)$** .

Пусть в области определения существует несколько точек локального максимума, тогда та точка локального максимума, в которой значение функции наибольшее, называется **точкой глобального максимума функции**.

Теорема. Необходимое условие экстремума.

Пусть x_0 - точка экстремума функции $f(x)$. Тогда либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Доказательство. Если $f'(x_0)$ не существует, то теорема доказана. Если $f'(x_0)$ существует, то по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Точка x_0 называется **критической точкой** функции, если в ней выполнены необходимые условия экстремума.

Точка x_0 называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Точки экстремума функции обязательно находятся среди критических точек. Поэтому проверка необходимого условия экстремума позволяет отсеять точки, заведомо не являющиеся точками экстремума.

Пример. $f(x) = x^2$. Точка $x_0 = 0$ - точка минимума функции. $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$.

Пример $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Точка $x_0 = 0$ - точка минимума функции, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $f'(0)$ не существует.

Замечание. **Необходимое условие экстремума не является достаточным.**

Пример. Точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции $f(x) = x^3$. Однако $f'(0) = 0$.

Следовательно, из того, что $f'(x_0) = 0$ еще не следует, что x_0 - точка экстремума функции.

Теорема. Первое достаточное условие экстремума (достаточное условие экстремума дифференцируемой функции по первой производной).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 ,

1. *Если при переходе аргумента через x_0 (в положительном направлении) $f'(x)$ меняет знак с + на -, то x_0 - точка локального максимума.*
2. *Если при переходе аргумента через x_0 (в положительном направлении) $f'(x)$ меняет знак с - на +, то x_0 - точка локального минимума.*
3. *Если при переходе аргумента через x_0 (в положительном направлении) $f'(x)$ не меняет знак, то x_0 - не является точкой экстремума.*

Доказательство. Докажем п.1. Так как при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x < x_0$ $f(x)$ возрастает (достаточный признак возрастания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа). Так как при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x > x_0$ $f(x)$ убывает (достаточный признак убывания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа).

Следовательно, точка x_0 - точка локального максимума.

Докажем п.2. Так как при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x < x_0$ $f(x)$ убывает (достаточный признак убывания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа). Так как при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x > x_0$ $f(x)$ возрастает (достаточный признак возрастания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа).

Следовательно, точка x_0 - точка локального минимума.

Докажем п.3. Если $f'(x) > 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, то $f(x)$ возрастает (достаточный признак возрастания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа), и x_0 - не является точкой экстремума.

Если $f'(x) < 0$ как при $x < x_0$, так и при $x > x_0$, то $f(x)$ убывает (достаточный признак убывания функции - следствие 4 из теоремы Лагранжа), и x_0 - не является точкой экстремума.

Замечание. Достаточное условие экстремума функции не является необходимым.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$. Так как $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, то

$x^2 \leq f(x) \leq 3x^2$. Так как точка $x = 0$ - точка минимума левой и правой частей, то точка $x = 0$ - точка минимума функции.

$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Предел последнего слагаемого при $x \rightarrow 0$ не существует, поэтому нельзя выделить окрестность точки $x = 0$, в которой производная функции сохраняет знак. Достаточное условие не выполнено.

Теорема (применение формулы Тейлора к исследованию функции на экстремум)

Пусть существует $f^{(n)}(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 , пусть $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $f'(x_0), f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Тогда, если n - нечетно, то x_0 не является точкой экстремума, если n - четно, то x_0 - точка экстремума (если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума).

Доказательство. Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в формуле Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Остаточный член можно представить в виде $o((x - x_0)^n) = \alpha(x)(x - x_0)^n$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ б.м. при $x \rightarrow x_0$. Подставляя остаточный член в формулу Тейлора, имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - x_0)^n.$$

По теореме о сохранении функций знака своего предела скобка $\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right)$ в некоторой окрестности точки x_0 будет сохранять знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Так как $f'(x_0), f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то в этой окрестности

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - x_0)^n.$$

Если n - нечетно, то при переходе аргумента через точку x_0 в положительном направлении $(x - x_0)^n$ меняет знак. Так как скобка сохраняет знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, то и $\Delta f(x)$ меняет знак, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума.

Если n - четно, то при переходе аргумента через точку x_0 в положительном направлении $(x - x_0)^n$ остается неотрицательной. Так как скобка

$\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right)$ сохраняет знак $f^{(n)}(x_0)$, то и $\Delta f(x)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$, и точка x_0 является точкой экстремума. Причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то и $\Delta f(x) > 0$, тогда точка x_0 является точкой минимума. Если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то и $\Delta f(x) < 0$, тогда точка x_0 является точкой максимума.

Следствие. Второе достаточное условие экстремума (достаточное условие экстремума дважды дифференцируемой функции).

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 . Тогда если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума функции $f(x)$. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума функции $f(x)$.

Доказательство. Так как точка x_0 стационарна, то $f'(x_0) = 0$. Применим теорему в случае n - четно. Из теоремы следует, что x_0 - точка экстремума функции. Причем, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума функции $f(x)$. Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума функции $f(x)$.

Пример. $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$, точка $x = 0$ - стационарная точка функции. $f''(x) = 2$, $f''(0) = 2 > 0$. Поэтому точка $x = 0$ - точка минимума функции.

Пример. $f(x) = -x^2$. $f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$, точка $x = 0$ - стационарная точка функции. $f''(x) = -2$, $f''(0) = -2 < 0$. Поэтому точка $x = 0$ - точка максимума функции.

Исследование функции на экстремум на интервале и на отрезке.

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум на интервале, надо:

- найти ее критические точки, т.е. найти те значения аргумента x_0 , в которых выполнено необходимое условие экстремума ($f'(x_0) = 0$ или не существует),
- проверить первое достаточное условие экстремума в критических точках или второе достаточное условие экстремума в стационарных точках (в них $f'(x_0) = 0$), определить точки локального минимума и максимума и значения функции в этих точках
- если требуется, то найти глобальный минимум или глобальный максимум функции в заданной области, сравнивая ее значения во всех критических точках функции в этой области (эти значения существуют, так как мы исследуем на экстремум только непрерывные функции).

Исследование функции на экстремум на отрезке отличается от описанного выше тем, что *граничные точки отрезка надо исследовать отдельно*. В них "не работает" теорема Ферма и полученное из этой теоремы необходимое условие экстремума.

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум на отрезке $[A, B]$, надо:

- исследовать функцию на экстремум на интервале (A, B) , отыскать ее точки глобального минимума и максимума и значения функции в этих точках - глобальные минимум и максимум на интервале,

- найти значения функции в граничных точках $x = A$, $x = B$ отрезка, сравнить эти значения с глобальными минимумом и максимумом функции на интервале, определить точки глобального минимума и максимума на отрезке и значения функции в этих точках.

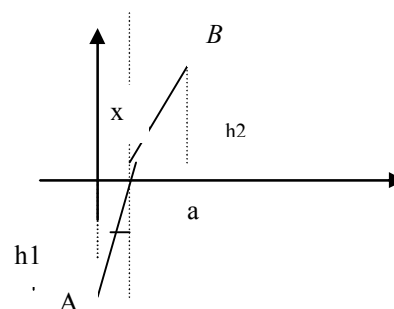
Пример. Задача о преломлении света.

Свет излучается источником, расположенным

в точке В, в среде 2 под углом γ_2 к оси ОУ.

Луч падает на линию раздела сред, преломляется, изменяя угол наклона к ОУ на γ_1 и попадает в

приемник, находящийся в точке А среды 1.



Источник и приемник расположены в своих средах на расстояниях h_2 и h_1 от оси ОУ, точка преломления расположена на оси ОХ в точке x . Среда однородны. Скорости света в средах равны соответственно c_2 и c_1 . Требуется связать углы γ_2 и γ_1 с c_2 и c_1 .

Один из вариационных принципов - принцип Ферма гласит: "Свет движется по тому пути, время прохождения которого минимально".

Используем этот принцип, сведя задачу к задаче на минимум времени прохождения света по траектории его движения в средах. Поскольку среды однородны, то свет в каждой из сред будет двигаться по прямой.

Вычислим время T_1 , T_2 , за которое свет проходит соответствующие пути в первой и второй среде и общее время, которое надо минимизировать выбором точки x .

$$T_1 = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c_1}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{c_2}, \quad T_1 + T_2 = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{c_2},$$

$$\frac{d(T_1 + T_2)}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = \frac{\sin \gamma_1}{c_1} - \frac{\sin \gamma_2}{c_2} = 0.$$

Отсюда следует закон Снеллиуса $\frac{\sin \gamma_1}{c_1} = \frac{\sin \gamma_2}{c_2}$.

Проверьте сами, что найденное соотношение соответствует минимуму, а не максимуму $T_1 + T_2$.

Лекция 20. Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба, исследование графика функции.

Дуга называется **гладкой**, если в каждой ее точке можно провести касательную.

Дуга называется **выпуклой (выпуклой вверх)**, если в любой своей точке она лежит не выше касательной, проведенной в произвольной точке дуги.

Дуга называется **строго выпуклой (строго выпуклой вверх)**, если в любой своей точке она лежит ниже касательной, проведенной в произвольной точке дуги.

Дуга называется **вогнутой (выпуклой вниз)**, если в любой своей точке она лежит не ниже касательной, проведенной в произвольной точке дуги.

Дуга называется **строго вогнутой (строго выпуклой вниз)**, если в любой своей точке она лежит выше касательной, проведенной в произвольной точке дуги.

Функция называется гладкой, выпуклой, строго выпуклой, вогнутой, строго вогнутой, если ее график представляет собой соответствующую дугу (гладкую, выпуклую и т.д.)

Теорема. Достаточные условия строгой выпуклости (строгой вогнутости) дифференцируемой функции.

Пусть $f(x)$ дифференцируема.

Если $f'(x)$ монотонно возрастает в некоторой области, то функция $f(x)$ строго вогнутая в этой области. Если $f'(x)$ монотонно убывает в некоторой области, то функция $f(x)$ строго выпуклая в этой области.

Доказательство. Рассмотрим некоторую точку $(x_0, f(x_0))$ графика функции, запишем уравнение касательной к графику функции в этой точке.

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Запишем значение функции в точке x по формуле конечных приращений Лагранжа.

$$f(x) = f(x_0) + f'(C)(x - x_0), \text{ где точка } C \text{ находится между точками } x, x_0.$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$f(x) - y_{\text{кас}} = (f'(C) - f'(x_0))(x - x_0).$$

1) Пусть $f'(x)$ монотонно возрастает, тогда при $x < C < x_0$ будет $f'(C) < f'(x_0)$ и $f(x) > y_{\text{кас}}$. Если $x > C > x_0$, то $f'(C) > f'(x_0)$ и вновь $f(x) > y_{\text{кас}}$.

Следовательно, график функции в окрестности точки x_0 лежит выше касательной и функция строго вогнута в этой окрестности.

2) Пусть $f'(x)$ монотонно убывает, тогда при $x < C < x_0$ будет $f'(C) > f'(x_0)$ и $f(x) < y_{\text{кас}}$. Если $x > C > x_0$, то $f'(C) < f'(x_0)$ и вновь $f(x) < y_{\text{кас}}$.

Следовательно, график функции в окрестности точки x_0 лежит ниже касательной и функция строго выпукла в этой окрестности.

Теорема. Необходимый и достаточный признаки выпуклости и вогнутости дифференцируемой функции.

Пусть $f(x)$ дифференцируема.

Для того чтобы функция $f(x)$ была выпуклой (вогнутой) в некоторой области, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ не возрастала (не убывала) в этой области.

Доказательство. Рассмотрим случай выпуклой функции, случай вогнутой функции рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть функция выпукла. Если ее производная возрастает, то по достаточному признаку функция строго вогнута. Противоречие.

Достаточность. Так же как в предыдущей теореме запишем уравнение касательной, вычислим значение функции по формуле Лагранжа и получим формулу

$$f(x) - y_{\text{кас}} = (f'(C) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Пусть производная функции $f'(x)$ не возрастает. Тогда при $x < C < x_0$ будет $f'(C) \geq f'(x_0)$ и $f(x) \leq y_{\text{кас}}$. Если $x > C > x_0$, то $f'(C) \leq f'(x_0)$ и вновь $f(x) \leq y_{\text{кас}}$. Следовательно, график функции в окрестности точки x_0 лежит не выше касательной и функция выпукла в этой окрестности.

Теорема. Достаточный признак строгой выпуклости и строгой вогнутости дважды дифференцируемой функции.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой области.

Если в этой области $f''(x) < 0$, то функция $f(x)$ строго выпукла,

если в этой области $f''(x) > 0$, то функция $f(x)$ строго вогнута.

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$, тогда $f'(x)$ монотонно убывает и по достаточному признаку функция строго выпукла. Вторая часть доказывается аналогично.

Функция $f(x)$ **имеет перегиб в точке x_0** , если слева от этой точки дуга графика функции выпукла, а справа вогнута или наоборот, слева вогнута, а справа выпукла.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет перегиб в этой точке, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется **точкой перегиба графика функции**.

Точка перегиба отделяет выпуклую дугу графика функции от вогнутой дуги графика функции.

Можно сказать, что **точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка графика функции, отделяющая выпуклую дугу графика функции от вогнутой.**

Предположим, что существует производная функции в точке x_0 (тогда в точке $(x_0, f(x_0))$ можно провести касательную к графику функции), а точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба. Тогда график функции пересекает касательную к графику, проведенную в точке перегиба, переходя с одной ее стороны на другую.

Теорема. Необходимое условие точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Пусть функция дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

Доказательство. Точка перегиба отделяет выпуклую дугу графика функции от вогнутой. Пусть для определенности слева от точки перегиба

дуга выпукла, а справа - вогнута. Тогда при $x < x_0$ производная функции $f'(x)$ - не возрастает, а при $x > x_0$ производная функции $f'(x)$ - не убывает. Поэтому точка x_0 - точка минимума $f'(x)$. Следовательно, $f''(x_0) = 0$ или не существует.

Теорема. Достаточное условие точки перегиба дважды дифференцируемой функции.

Пусть функция дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и $f''(x)$ меняет знак при переходе x через x_0 . Тогда точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции.

Доказательство. Пусть при переходе x через x_0 $f''(x)$ меняет знак (для определенности) с "+" на "-". Тогда слева от точки x_0 $f'(x)$ возрастает, а справа от точки x_0 $f'(x)$ убывает. Тогда по достаточному признаку строгой выпуклости и вогнутости слева от точки x_0 $f(x)$ строго вогнута, а справа - строго выпукла. Следовательно, $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции.

Теорема. Применение формулы Тейлора к исследованию точек перегиба.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 . Пусть $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если n - нечетно, то $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (в силу $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$) имеем

$$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) (x - x_0)^n$$

В малой окрестности точки x_0 знак скобки в правой части равенства определяется знаком n -ой производной в точке x_0 (теорема о сохранении функцией знака своего предела). Поэтому при переходе x через x_0 (n - нечетно по условию) правая часть равенства меняет знак. Левая часть равенства представляет собой $f(x) - y_{\text{кас}}(x)$. Касательная к графику функции проведена в точке $(x_0, f(x_0))$. Следовательно, при переходе x через x_0 график функции пересекает касательную к графику функции, проведенную в точке $(x_0, f(x_0))$. Поэтому точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции.

Исследование графика функции.10

1. Предварительный анализ

- область определения и область значения функции,
- интервалы непрерывности, точки разрыва, классификация точек разрыва,
- вертикальные асимптоты,
- характерные точки графика функции, например, точки пересечения с осями координат и т.д.,
- четность, нечетность функции,
- периодичность функции.

2. Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.
3. Эскиз графика функции (по полученной в п.п.1, 2 информации, используя элементарные преобразования графика и действия над графиками)
4. Исследование функции на экстремум
 - интервалы монотонности,
 - точки экстремума,
 - экстремальные значения.
5. Исследование графика функции на выпуклость и вогнутость.
 - интервалы выпуклости и вогнутости,
 - точки перегиба
6. Построение графика функции.

Пример. $f(x) = x^2 \ln x$

1. Предварительный анализ
 - Область определения R_+ .
 - Интервал непрерывности R_+ , точка разрыва $x = 0$ - точка устранимого разрыва, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$.
 - характерные точки $(1, 0)$, (e, e^2) ,
 - функция общего вида,
 - функция не периодична,
2. Асимптотика
 - наклонных и горизонтальных асимптот нет, так как функция возрастает быстрее, чем x^2 при $x \rightarrow +\infty$.
3. Исследование на экстремум.
 - $y'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = e^{-1/2}$ - точка минимума, так как $y'(x)$ меняет знак с "-" на "+" при переходе через x_1 в положительном направлении. Интервал $(0, e^{-1/2})$ - интервал убывания, $(e^{-1/2}, +\infty)$ - интервал возрастания. Минимальное значение функции $f_{\min} = f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e}$.
4. Исследование на выпуклость и вогнутость.
 - $y''(x) = 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = e^{-3/2}$ - абсцисса точки перегиба. При $0 < x < e^{-3/2}$ функция выпукла, так как $y''(x) < 0$, при $x > e^{-3/2}$ функция вогнута, так как $y''(x) > 0$.

Эскиз графика и итоговое построение графика выполните самостоятельно.

Пример. $f(x) = x + \arctg x$.

1.
 - Область определения функции - вся ось, область значений - тоже вся ось.
 - Функция непрерывна на всей оси.
 - Характерная точка $(0,0)$.
 - Функция нечетна, не периодична.

2 $y = x - \frac{\pi}{2}$ - левая наклонная асимптота, $y = x + \frac{\pi}{2}$ - правая наклонная асимптота.

3 $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$, функция монотонно возрастает на всей оси, экстремумов нет.

4 $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. При $x < 0$ $f''(x) > 0$, функция вогнута, при $x > 0$ $f''(x) < 0$, функция выпукла. Точка (0, 0) - точка перегиба.

Постройте график функции.

Упражнение. Исследуйте графики функций $f(x) = x \ln x$, $f(x) = xe^{-x^2}$.

Лекция 21. Дифференциал длины дуги.

Рассмотрим дугу АВ, разделим ее на n частей - дуг точек $M_1, M_2, \dots, M_n$. Соединим точки отрезками, они будут являться звеньями ломаной, вписанной в дугу АВ.

Длиной дуги АВ называется предел суммы длин звеньев вписанной в эту дугу ломаной при стремлении к нулю длины звена, имеющего максимальную длину среди всех звеньев ломаной.

Мы называли дугу **гладкой**, если она является графиком дифференцируемой функции. Например, дуга, содержащая угловые точки, не является гладкой. Если точка $(x_0, f(x_0))$ дуги - угловая, то $f'(x_0)$ не существует, хотя левая и правая производные в этой точке существуют.

Гладкая дуга не может содержать точек самопересечения, в точке самопересечения $f'(x)$ определена неоднозначно.

Здесь мы рассматриваем гладкие дуги, которые имеют длину. Для того, чтобы гладкая дуга имела длину, достаточно, чтобы она была графиком **непрерывно дифференцируемой функции**. Поэтому теперь **гладкой дугой** будем называть дугу, являющуюся графиком **непрерывно дифференцируемой функции** или допускающую **непрерывно дифференцируемое параметрическое представление**.

Если дуга гладкая, то длина бесконечно малой дуги эквивалентна длине стягивающей ее бесконечно малой хорды (отрезка, соединяющего ее концы).

Рассмотрим длину дуги графика функции как функцию аргумента x : $S(x)$. Если длина дуги АВ равна l , то $S(x_A)=0$, $S(x_B)=l$, функция $S(x)$ - функция возрастающая.

Рассмотрим точку $M(x, y)$ и точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Длина дуги MM_1 равна приращению длины дуги при изменении аргумента с x на $x + \Delta x$.

Выведем формулу для дифференциала длины дуги.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|MM_1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + y'^2(x)}. \end{aligned}$$

$$dS(x) = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Пример. $y = f(x) = \ln \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Требуется вычислить

дифференциал длины дуги графика функции.

$$dS = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} dx = \frac{1}{\sin x} dx.$$

Рассмотрим случай дуги, заданной параметрически.

$$S: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) - \text{непрерывные функции (непрерывно}$$

дифференцируемое параметрическое представление).

Заменяя при вычислении дифференциала длины дуги бесконечно малую дугу стягивающей ее хордой, имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

$$\text{Следовательно, } dS = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Если в качестве параметра t можно выбрать переменную x , то эта формула превращается в ранее полученную формулу $dS = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$.

Пример. Вычислим дифференциал дуги окружности радиуса R

$$\begin{cases} x = x(t) = R \cos t \\ y = y(t) = R \sin t \end{cases}$$

$dS = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R dt$. Так как переменная t имеет смысл центрального угла φ , на который опирается дуга, то дифференциал длины дуги окружности может быть записан в более привычном виде $dS = R d\varphi$. Или $\frac{2\pi R \leftrightarrow 2\pi}{dS \leftrightarrow d\varphi} \Rightarrow dS = \frac{2\pi R d\varphi}{2\pi} = R d\varphi$.

Кривизна дуги.

Рассмотрим гладкую дугу $M_1 M_2$ и проведем в точках M_1, M_2 касательные к дуге. **Углом смежности** φ дуги $M_1 M_2$ называется угол между касательными к ней, проведенными в ее крайних точках M_1, M_2 .

Средней кривизной дуги называется отношение абсолютной величины угла смежности к длине дуги

$$\kappa_{cp} = \frac{|\varphi|}{M_1 M_2}.$$

Здесь традиционно для дуги и ее длины используется одно и то же обозначение $M_1 M_2$.

Кривизной дуги в точке M_1 называется

$$k = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \kappa_{cp} = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \frac{|\varphi|}{M_1 M_2}.$$

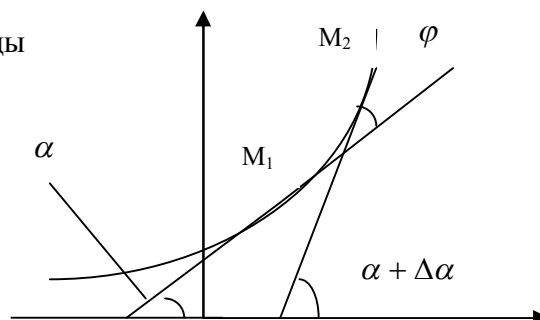
Пример. Кривизна дуги прямой линии равна нулю, так как касательные к прямой совпадают с самой прямой и угол смежности равен нулю.

Пример. Кривизна дуги окружности радиуса R равна $\frac{1}{R}$. В самом деле, угол между касательными к дуге окружности равен центральному углу этой

дуги. Если дуга M_1M_2 опирается на центральный угол $d\varphi$, а ее длина равна dS , то $dS = R d\varphi$ и $k = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\varphi}{R d\varphi} = \frac{1}{R}$.

Формула для вычисления кривизны дуги плоской кривой.

Рассмотрим дугу M_1M_2 - график дважды дифференцируемой функции $y(x)$. Проведем в точках M_1, M_2 касательные к дуге, углы между касательными и осью OX обозначим соответственно $\alpha, \alpha + \Delta\alpha$.



Угол между касательными - угол смежности обозначим φ .

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha(x) = \operatorname{arctg} y'(x), \quad \frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''(x)}{1 + y'^2(x)}.$$

Из рассмотрения треугольника, образованного касательными и осью OX следует $\alpha + \varphi + (\pi - (\alpha + \Delta\alpha)) = \pi$, т.е. $\varphi = \Delta\alpha$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \frac{|\varphi|}{M_1M_2} = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \frac{|\Delta\alpha|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{M_2 \rightarrow M_1} \frac{\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \right|}{\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta x|}} = \\ &= \frac{|\alpha'(x)|}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{\frac{|y''(x)|}{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Рассмотрим случай параметрически заданной функции $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

По формуле производной параметрически заданной функции $y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, $y''(x) = \frac{(y'(x))'_t}{\dot{x}(t)} = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^3(t)}$,

$$(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}^3(t)}.$$

Поэтому

$$k = \frac{|\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

Пример. Вычислим по этой формуле кривизну окружности радиуса R .

$$\begin{cases} x = x(t) = R \cos t \\ y = y(t) = R \sin t \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = -R \sin t, \dot{y}(t) = R \cos t, \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = R^2,$$

$$\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t) = (-R \sin t)(-R \sin t) - (-R \cos t)R \cos t = R^2$$

$$k = \frac{R^2}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}.$$

Круг кривизны, центр кривизны, радиус кривизны.

Рассмотрим точку М на гладкой дуге, проведем касательную и нормаль к дуге в точке М.

Построим окружность, проходящую через точку М с центром, находящимся на построенной нормали на расстоянии $\rho(M) = \frac{1}{k(M)}$ от точки М

в сторону вогнутости дуги графика функции ($k(M)$ - кривизна дуги графика в точке М). Круг, границей которого является эта окружность, называется **кругом кривизны графика функции в точке М.**

Его радиус $\rho(M)$ называется **радиусом кривизны графика функции в точке М**, центр круга называется **центром радиусом кривизны графика функции в точке М.**

Эволюта и эвольвента.

Эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны. Сама кривая называется **эвольвентой** (разверткой) для своей эволюты.

Формулы для координат центра кривизны (уравнение эволюты).

Рассмотрим точку М(х, у) графика функции у(х), обозначим k кривизну графика в точке М, $\rho = \frac{1}{k}$ - радиус кривизны графика в точке М. Пусть центр кривизны находится в точке N(α, β). Найдем зависимость α, β от х, у, у', у''.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'(x)}(\alpha - x)$$

$$(\beta - y)^2 + (\alpha - x)^2 = \rho^2$$

Первое уравнение - уравнение нормали к графику, на которой находится мгновенный (при значениях х, у) центр кривизны. Второе уравнение - уравнение окружности - границы мгновенного круга кривизны.

Подставим первое уравнение во второе.

$$(\alpha - x)^2 \left(\frac{1}{(y'(x))^2} + 1 \right) = \rho^2.$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{\rho^2 (y')^2}{1 + (y')^2}, \quad \beta - y = -\frac{1}{y'} \left(\pm \frac{\rho y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = \mp \frac{\rho}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

$$\alpha = x \pm \frac{\rho y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad \beta = y \mp \frac{\rho}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Если дуга вогнута, то $\beta > y$. Тогда в выражении β надо выбирать нижний знак "плюс", а в выражении α тоже нижний знак "минус".

Если дуга выпукла, то $\beta < y$. Тогда в выражении β надо выбирать верхний знак "минус", а в выражении α тоже верхний знак "плюс".

$$\text{Подставим в эти формулы } \rho = \frac{1}{k} = \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Если дуга вогнута, то $y'' > 0$ и модуль можно снять, сохранив нижний знак в формулах α, β .

Если дуга выпукла, то $y'' < 0$, снимая модуль, надо менять знак. Вместо этого можно просто снять модуль и выбрать вместо верхнего знака в формулах α, β нижний знак.

Поэтому для выпуклой и вогнутой дуги можно использовать формулы для отыскания координат центра кривизны в виде

$$\alpha = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Уравнение эволюты для параметрически заданной функции.

Если функция $y(x)$ задана параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$y'(x) = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}, \quad y''(x) = \frac{\ddot{\psi}(t)\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(\dot{\varphi}(t))^3}$$

$$\beta = \psi + \frac{\left(1 + \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2}\right)(\dot{\varphi})^3}{\ddot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}} = \psi + \frac{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)\dot{\varphi}}{\ddot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}}$$

$$\alpha = \varphi - \frac{\left(1 + \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2}\right)\dot{\psi}(\dot{\varphi})^3}{\ddot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}} = \varphi - \frac{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)\dot{\psi}}{\ddot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}}$$

Пример. Найдём уравнение эволюты циклоиды. Циклоида задана формулами

$$\varphi = x = a(\cos t + t \sin t)$$

$$\psi = y = a(\sin t - t \cos t)$$

$$\text{Вычислим } \dot{\varphi} = a(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t,$$

$$\dot{\psi} = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$\ddot{\phi} = a(\cos t - t \sin t)$$

$$\ddot{\psi} = a(\sin t - t \cos t)$$

$$\beta = a(\sin t - t \cos t) + \frac{a^2 t^2 a t \cos t}{a^2 t^2} = a \sin t$$

$$\alpha = a(\cos t + t \sin t) - \frac{a^2 t^2 a t \sin t}{a^2 t^2} = a \cos t$$

Итак, эволюта циклоиды - окружность, следовательно, эвольвента окружности (развертка окружности) - циклоида.

Свойства эволюты.

1. Любая нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте. Поэтому эволюта - это огибающая семейства нормалей к эвольвенте (касательная к огибающей - одна из кривых семейства).
2. Для эвольвенты можно построить единственную эволюту.
3. Для эволюты можно построить бесконечно много эвольвент.

Лекция 22. Вектор - функция скалярного аргумента.

Пусть каждой точке t некоторого множества числовой оси T поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$. Тогда в области определения T задана вектор - функция $\vec{a}(t)$. Ее предел вводится обычным образом

$$\vec{a}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\vec{a}(t) - \vec{a}_0| < \varepsilon.$$

Теорема. Для того чтобы существовал $\vec{a}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t)$, $\vec{a}_0 = a_{0x}\vec{i} + a_{0y}\vec{j} + a_{0z}\vec{k}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $a_{0x} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t)$, $a_{0y} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t)$, $a_{0z} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t)$.

Доказательство проведите самостоятельно, используя оценки

$$|a_x(t) - a_{0x}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|, |a_y(t) - a_{0y}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|, |a_z(t) - a_{0z}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|,$$

$$|\vec{a}(t) - \vec{a}_0| = \sqrt{(a_x(t) - a_{0x})^2 + (a_y(t) - a_{0y})^2 + (a_z(t) - a_{0z})^2}.$$

Вектор - функция $\vec{a}(t)$ называется **непрерывной в точке t_0** , если $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{a}(t) = \vec{a}(t_0)$.

Теорема. Для того чтобы вектор - функция $\vec{a}(t)$ была непрерывной в точке t_0 , необходимо и достаточно, чтобы координатные функции $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ были непрерывны в точке t_0 .

Доказательство проведите самостоятельно, используя оценки

$$|a_x(t) - a_{0x}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|, |a_y(t) - a_{0y}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|, |a_z(t) - a_{0z}| \leq |\vec{a}(t) - \vec{a}_0|,$$

$$|\vec{a}(t) - \vec{a}_0| = \sqrt{(a_x(t) - a_{0x})^2 + (a_y(t) - a_{0y})^2 + (a_z(t) - a_{0z})^2}.$$

Производной вектор - функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0 называется вектор

$$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

$\Delta \vec{a}(t) = \Delta a_x(t)\vec{i} + \Delta a_y(t)\vec{j} + \Delta a_z(t)\vec{k}$. Деля обе части равенства на Δt и устремляя Δt к нулю, имеем

$$\dot{\vec{a}}(t) = \dot{a}_x(t)\vec{i} + \dot{a}_y(t)\vec{j} + \dot{a}_z(t)\vec{k},$$

$$|\dot{\vec{a}}(t)| = \sqrt{(\dot{a}_x(t))^2 + (\dot{a}_y(t))^2 + (\dot{a}_z(t))^2}.$$

Свойства дифференцирования вектор - функции.

$$1. (\varphi(t)\vec{a}(t))' = \dot{\varphi}(t)\vec{a}(t) + \varphi(t)\dot{\vec{a}}(t)$$

Доказывается переходом к координатной записи вектора и применением правила дифференцирования произведения скалярных функций.

$$2. (\vec{a}_1(t) \bullet \vec{a}_2(t))' = (\dot{\vec{a}}_1(t) \bullet \vec{a}_2(t)) + (\vec{a}_1(t) \bullet \dot{\vec{a}}_2(t))$$

$$(\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2)' = (a_{1x}a_{2x} + a_{1y}a_{2y} + a_{1z}a_{2z})' = (\dot{a}_{1x}a_{2x} + a_{1x}\dot{a}_{2x}) + (\dot{a}_{1y}a_{2y} + a_{1y}\dot{a}_{2y}) + (\dot{a}_{1z}a_{2z} + a_{1z}\dot{a}_{2z}) = (\dot{a}_{1x}a_{2x} + \dot{a}_{1y}a_{2y} + \dot{a}_{1z}a_{2z}) + (a_{1x}\dot{a}_{2x} + a_{1y}\dot{a}_{2y} + a_{1z}\dot{a}_{2z}) = (\dot{\vec{a}}_1 \bullet \vec{a}_2) + (\vec{a}_1 \bullet \dot{\vec{a}}_2)$$

Следствие. Производная вектора, модуль которого постоянен, есть вектор, ортогональный к нему.

Доказательство. $(\vec{a}(t) \bullet \vec{a}(t))' = 2(\dot{\vec{a}}(t) \bullet \vec{a}(t))$ по свойству. Но $(\vec{a}(t) \bullet \vec{a}(t)) = |\vec{a}(t)|^2 = const$. Поэтому $(\vec{a}(t) \bullet \vec{a}(t))' = 2(\dot{\vec{a}}(t) \bullet \vec{a}(t)) = 0$. Отсюда видно, что $\vec{a}(t)$ и $\dot{\vec{a}}(t)$ ортогональны.

$$3. [\vec{a}_1(t) \times \vec{a}_2(t)]' = [\dot{\vec{a}}_1(t) \times \vec{a}_2(t)] + [\vec{a}_1(t) \times \dot{\vec{a}}_2(t)]$$

Это свойство доказывается аналогично свойству 2.

Скорость и ускорение материальной точки.

Введем радиус - вектор материальной точки

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Траектория конца радиуса - вектора точки называется **годографом**.

Скорость.

Скорость материальной точки вводится как производная радиуса - вектора точки

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$. Вектора $\Delta \vec{r}(t)$, $\frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$ направлены по секущей, а вектор $\vec{v}(t)$ **направлен по касательной к годографу** - предельному положению секущей при $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}, \quad |\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}(t)|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}(t).$$

$$\text{Поэтому } \dot{s}(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}, \quad ds(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt.$$

Обозначим $v(t) = |\vec{v}(t)|$, $\vec{\tau}$ - **единичный вектор, направленный по касательной к годографу**.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v(t)\vec{\tau}, \quad \text{так как по определению длины дуги}$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1.$$

$$\text{Итак, } \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \vec{v}(t) = v\vec{\tau}.$$

Ускорение.

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$1) \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$2) \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| \vec{n}. \quad \vec{n} - \text{единичный вектор нормали, он направлен к мгновенному}$$

центру кривизны. В самом деле, $\frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}$ (следствие из свойства

дифференцирования скалярного произведения вектор - функций). Вектор $\Delta \vec{\tau}(t) = \vec{\tau}(t + \Delta t) - \vec{\tau}(t)$ лежит в треугольнике, образованном двумя касательными

к годографу и опирается на угол между ними - угол смежности. $\left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} k$,

где k - мгновенная кривизна (хорда эквивалентна дуге и центральному углу, на который опирается дуга).

$$\text{Поэтому } \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}, \quad \text{где } \rho - \text{мгновенный радиус кривизны.}$$

$$\text{Подставляя это выражение в } \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \text{ имеем } \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{n}.$$

Тогда $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$. Здесь первое слагаемое - тангенциальное ускорение, направленное по касательной к годографу, второе слагаемое - центростремительное ускорение, направленное по нормали к годографу к мгновенному центру кривизны.

Формулы Френе.

1. $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$. Это первая формула Френе, она была получена выше.

2. Введем вектор бинормали $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ и продифференцируем его.

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau} \times \vec{n}) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\tau} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = k(\vec{n} \times \vec{n}) + \left(\vec{\tau} \times \frac{d\vec{n}}{ds}\right) = \left(\vec{\tau} \times \frac{d\vec{n}}{ds}\right).$$

Следовательно, $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{\tau}$. Но $\vec{b}$ - единичный вектор, следовательно,

$$\frac{d\vec{b}}{dt} \text{ и } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}. \text{ Поэтому } \frac{d\vec{b}}{ds} \parallel \vec{n}.$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \aleph \vec{n} = \frac{1}{T} \vec{n} \quad (\aleph - \text{кручение, } T = \frac{1}{\aleph} - \text{радиус кручения}). \text{ Это вторая}$$

формула Френе.

3. $\vec{n} = (-\vec{\tau} \times \vec{b})$. Продифференцируем это выражение.

—

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \vec{b} - \vec{\tau} \times \frac{d\vec{b}}{ds} = -k\vec{n} \times \vec{b} - \vec{\tau} \times \aleph \vec{n} = -k\vec{\tau} - \aleph \vec{b} = -\frac{1}{\rho}\vec{\tau} - \frac{1}{T}\vec{b}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{\tau} - \frac{1}{T}\vec{b} - \text{это третья формула Френе.}$$

Заметим, что для пространственной кривой кривизна и кручение вычисляются по формулам $k^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{(\dot{\vec{r}} \bullet \ddot{\vec{r}})^2}{(\dot{\vec{r}}^2)^3}$, $\aleph = \frac{1}{T} = -\frac{\dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}}}{(\dot{\vec{r}} \bullet \ddot{\vec{r}})^2}$.

Проведем **нормальную плоскость** через векторы нормали $\vec{n}$ и бинормали $\vec{b}$, **спрямляющую плоскость** через векторы касательной $\vec{\tau}$ и бинормали $\vec{b}$, **соприкасающуюся плоскость** через векторы касательной $\vec{\tau}$ и нормали $\vec{n}$.

Вектора касательной, нормали и бинормали составляют сопровождающий репер, а тройка плоскостей - сопровождающий трехгранник, связанный с материальной точкой, движущейся по кривой.

Содержание

Лекции 1,2. Введение, элементы математической логики и теории множеств.

2

Лекции 3,4.	Множества на числовой прямой, функции.	9
Лекция 5.	Предел последовательности.	15
Лекции 6, 7.	Предел функции	20
Лекция 8.	Первый и второй замечательные пределы.	24
Лекция 9.	Бесконечно малые и бесконечно большие.	28
Лекция 10.	Непрерывность функции.	32
Лекция 11.	Свойства функций, непрерывных на отрезке.	34
Лекция 12.	Производная.	38
Лекция 13.	Правила дифференцирования.	41
Лекция 14.	Производные высших порядков.	45
Лекция 15.	Дифференциалы первого и высших порядков.	47
Лекция 16.	Теоремы о средних значениях.	50
Лекции 17, 18.	Формула Тейлора.	57
Лекция 19.	Экстремумы графика функции.	63
Лекция 20.	Выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба, исследование графика функции.	67
Лекция 21.	Дифференциал длины дуги.	71
Лекция 22.	Вектор - функция скалярного аргумента	76