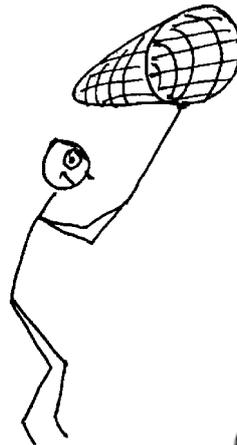


**G.V.Vstovsky**  
**ELEMENTS**  
**OF INFORMATION**  
**PHYSICS**

**Г.В.Встовский**  
**ЭЛЕМЕНТЫ**  
**ИНФОРМАЦИОННОЙ**  
**ФИЗИКИ**



**2002**

ББК 22.3я 7  
УДК 53  
В 85

**Встовский Г.В.** *Элементы информационной физики.* – М.: МГИУ,  
2002. – 260 с.

*Издается в авторской редакции*

---

Подписано в печать 26.11.02	Сдано в производство 27.11.02
Формат бумаги 60×90/16	Бум. множит.
Усл. печ. л. 16,25	Уч.-изд. л. 17,25
Тираж 300	№ 6-37/02
	Заказ № 1206

---

РИЦ МГИУ, 115280, Москва, Автозаводская, 16  
тел. 277-23-15

ISBN 5-276-00349-1

© Г.В. Встовский, 2002  
© МГИУ, 2002

*To MA*

*Посвящается МА*

	<b>Contents</b>	<b>Содержание</b>	
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>Введение</b>	<b>8</b>
	<b>References</b>	<b>Литература</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Concept of information</b>	<b>Понятие информации</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>Measurement, sensation, reception</b>	<b>Измерение, ощущение и восприятие</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Common sense</b>	<b>Обиходный смысл</b>	<b>21</b>
	<b>References</b>	<b>Литература</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>Transform information</b>	<b>Информация преобразования</b>	<b>30</b>
	<b>References</b>	<b>Литература</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>Direct and inverse measurement transform informations (DMTI and IMTI)</b>	<b>Прямая и обратная информации преобразования при измерении (ИППИ и ИОПИ)</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>IMTI and Hartley information</b>	<b>ИОПИ и информация Хартли</b>	<b>39</b>
<b>4.2</b>	<b>IMTI and von Neumann-Shannon-Wiener information</b>	<b>ИОПИ и информация фон Неймана-Шеннона-Винера</b>	<b>41</b>
<b>4.3</b>	<b>Mutual information</b>	<b>Взаимная информация</b>	<b>42</b>
<b>4.4</b>	<b>Jaynes' and Fisher's variational principles in terms of DMTI and IMTI</b>	<b>Вариационные принципы Джейнса и Фишера в терминах ИППИ и ИОПИ</b>	<b>43</b>
<b>4.5</b>	<b>Statistical interpretation of physical entropy, von Neumann-Shannon-Wiener and Hartley informations, and IMTI</b>	<b>Статистическая интерпретация физической энтропии, информации фон Неймана-Шеннона-Винера и Хартли, и ИОПИ</b>	<b>47</b>
<b>4.6</b>	<b>Coarsening the measure of phase space</b>	<b>Огрубление меры фазового пространства</b>	<b>50</b>
<b>4.7</b>	<b>Gas mixing entropy evaluations</b>	<b>Оценки энтропии смешения газов</b>	<b>52</b>

4.8	<b>Equilibrium concentration of vacancies in crystal solids</b>	<b>Равновесная концентрация вакансий в кристалле</b>	58
	<b>References</b>	<b>Литература</b>	60
5	<b>Shift information (SI)</b>	<b>Информация сдвига (ИС)</b>	62
5.1	<b>Fisher information (FI), generalized Fisher information, and characteristic information state</b>	<b>Информация Фишера (ИФ), обобщенная информация Фишера и характеристическое информационное состояние</b>	64
5.2	<b>Frieden's Minimum Fisher and Extreme physical information principles</b>	<b>Принципы Фридена: минимум информации Фишера и экстремум физической информации</b>	70
5.3	<b>One dimensional SI</b>	<b>Одномерная ИС</b>	78
5.4	<b>Fisher information and SI</b>	<b>ИС и информация Фишера</b>	82
5.5	<b>Application to measured distributions</b>	<b>Приложение к измеряемым распределениям</b>	90
5.6	<b>Shift in time, Liouville equation</b>	<b>Сдвиг по времени, уравнение Лиувилля</b>	92
5.7	<b>Nonlinear Klein-Gordon equation (NKG)</b>	<b>Нелинейное уравнение Клейна-Гордона (НКГ)</b>	94
5.8	<b>Many particle system, nonlinear Schroedinger equation (NSE)</b>	<b>Система многих частиц, нелинейное уравнение Шредингера (НШ)</b>	95
5.9	<b>NKG (complex measure)</b>	<b>НКГ (комплексная мера)</b>	97
5.10	<b>Korteweg-de Vries equation (KdV)</b>	<b>Уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)</b>	99

5.11	Appendix (some problems of variational calculus and generalizes variation operator)	Аппендикс (некоторые задачи вариационного исчисления и обобщенный оператор вариации)	105
	References	Литература	112
6.	Information ground of action invariance principle	Информационное обоснование принципа инвариантности действия.	114
6.1	Wiener-Feynman-Kac (WFK) measure	Мера Винера-Фейнмана-Каца (ВФК)	114
6.2	Affine information	Аффинная информация	118
	References	Литература	121
7	Multifractal information	Мультифрактальная информация	122
7.1	Multifractal formalism (MFF)	Мультифрактальный формализм (МФФ)	123
7.2	Information foundation of multifractal formalism	Информационное обоснование мультифрактального формализма	128
7.3	F-symmetry	Ф-симметрия	136
7.4	Multi-point correlations	Многоточечные корреляции	139
7.5	Multifractal parameterization	Мультифрактальная параметризация	143
7.5.1	Methods and algorithms	Методы и алгоритмы	144
7.5.2	The multifractal and pseudomultifractal parameterizations and fractal dissymmetry	Мультифрактальная и псевдомультифрактальная параметризации и фрактальная диссимметрия.	151
7.5.3	Pseudomultifractal analysis of geometrical asymmetry	Псевдомультифрактальный анализ геометрической асимметрии	156
7.5.4	Concluding remarks on FDS	Заключительные замечания по ФДС	164
	References	Литература	166

<b>8</b>	<b>Structural information</b>	<b>Структурная информация</b>	<b>172</b>
<b>8.1</b>	<b>Gas-liquid and liquid-crystal phase transitions</b>	<b>Фазовые переходы газ-жидкость и жидкость-кристалл</b>	<b>179</b>
<b>8.2</b>	<b>Mechanical model of asymmetric membrane</b>	<b>Механическая модель асимметричной мембраны</b>	<b>186</b>
<b>8.2.1</b>	<b>Setting the problem</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>186</b>
<b>8.2.2</b>	<b>Numeric modeling</b>	<b>Численное моделирование</b>	<b>190</b>
<b>8.2.3</b>	<b>Numeric results</b>	<b>Численные результаты</b>	<b>195</b>
<b>8.2.4</b>	<b>Simple model of concentration difference generation</b>	<b>Простая модель генерации разности концентраций</b>	<b>202</b>
<b>8.2.5.</b>	<b>Concluding remarks</b>	<b>Заключительные замечания</b>	<b>206</b>
<b>8.3</b>	<b>Whether is the perpetuum mobile so impossible?</b>	<b>Так ли уж не возможен вечный двигатель?</b>	<b>208</b>
<b>8.4</b>	<b>Appendix (Tables of data used and some numeric results)</b>	<b>Аппендикс (Таблицы использованных данных и некоторый численные результаты)</b>	<b>219</b>
	<b>References</b>	<b>Литература</b>	<b>229</b>
	<b>The logical structure of the book</b>	<b>Логическая структура книги</b>	<b>233</b>
<b>9</b>	<b>Concluding remarks</b>	<b>Заключительные замечания</b>	<b>235</b>
<b>10</b>	<b>Attachment. Practical use of information destroying: Deterministic chaos based cryptography</b>	<b>Приложение. Практическое использование разрушения информации: Криптография на основе детерминированного хаоса</b>	<b>241</b>

## 1. Introduction

This book is one more attempt to answer the questions: What is information? Why is this concept so universal that it is used successfully in a number of very different branches of science? Etc. These questions naturally arise in studying the books and papers where the concept of information is investigated itself or is applied to the processes of communication, model thermodynamic systems, and, especially, to the natural phenomena and processes.

One can make an observation that in all the special and popular literature the concept of information is rarely discussed before (without) previous introduction of some its quantitative measure, and if even so, most of the models are at last described in terms of probability theory or sets theory in the context of a certain class of systems [1-22]. Therefore the information properties and scope of its application depend on the mathematical form of this measure, and, basically, the quantitative properties of some specific information measure are investigated and used, but not the qualitative concept of information.

Thus we have a contradiction between a fundamental character (due to the number of applications) of information concept, a variety of its particular quantitative measures (that are used actually as different definitions), and, on the other hand, absence of attempts to relate differ-

## 1. Введение

Эта книга является еще одной попыткой ответить на вопросы: Что такое информация? Почему это понятие настолько универсально, что успешно используется в целом ряде различных наук? и т.д. Подобные вопросы возникают естественным образом при изучении книг и статей, в которых исследуется само понятие информации или его приложения к описанию процессов коммуникации, модельных термодинамических систем и, особенно, естественных процессов и явлений.

Можно заметить, что как в популярной так и в специальной литературе понятие информации редко обсуждается до (без) предварительного введения некоторой количественной меры информации, но даже если и так, то большинство моделей в конце концов формулируются в терминах теории вероятностей или теории множеств в контексте определенного класса систем [1-22]. Поэтому свойства информации и сфера ее применений зависят от математической формы этой количественной меры, и, в основном, изучаются и используются количественные свойства некоторой частной меры информации, но не само качественное понятие информации.

Таким образом, мы имеем противоречие между фундаментальным характером (благодаря многочисленным приложениям) понятия информации, разнообразием ее частных количественных мер (которые фактически используются как различные определения), и, с другой стороны, отсут-

ent "informations" to each other. The problem is partially resolved (and mostly obscured) by the fact that information, as a rule, is defined (in one way or another) in terms of general enough collection of universal concepts such as probability or cardinality (of sets), uncertainty, information processes, etc. Nevertheless, there still remains dissatisfaction with absence of qualitative notion of what is information itself, irrespectively of its quantitative measure.

Kolmogorov [15] differentiates three possible approaches to the introduction of basic information concepts: the pure combinatorial, probabilistic, and algorithmic ones. The first two are often used together due to re-interpretation of the ratios of combinatorial quantities as the relative frequencies in trials, or as the probabilities of events of certain types. One more approach seems to be distinguished - an algebraic one which is based actually on the use of Hartley information form, but the probability measure is replaced by a cardinal number of certain set of events [21,22].

We offer and discuss another possibility to answer the questions above: information is determined by a broken symmetry in the systems under consideration, all its known quantitative measures are the measures of broken symmetries. All the objects, systems, phenomena or processes studied by one or another particular scientific discipline are

вием попыток соотнести различные "информации" друг с другом. Проблема частично разрешается (и главным образом затемняется) тем, что информация, как правило, определяется (тем или иным способом) в терминах достаточно общего набора универсальных понятий, таких как вероятность или мощность (множеств), неопределенность, информационные процессы, и пр. Тем не менее, по-прежнему остается неудовлетворенность от отсутствия качественного понимания того, что такое информация сама по себе, безотносительно к ее количественным мере.

Колмогоров [15] различает три возможных подхода к введению базовых понятий информации: чисто комбинаторный, вероятностный, и алгоритмический. Первые два из них часто используются вместе благодаря реинтерпретации отношений комбинаторных величин как относительных частот в испытаниях, или как вероятностей событий определенных типов. Повидимому необходимо различать еще один подход - алгебраический, который фактически основан на использовании формы информации Хартли, но с заменой вероятностной меры мерой мощности определенного множества событий [21,22].

Мы предлагаем и обсуждаем еще один возможный ответ на вопросы выше: информация определяется нарушенной симметрией в рассматриваемых системах, все ее известные количественные меры являются мерами нарушенных симметрий. Все объекты, системы, явления или процессы изучаемые той или иной частной научной дисциплиной неизбежно имеют неко-

necessary subject to some constraints on their symmetry (finiteness, initial or boundary conditions, geometrical structure, etc.), therefore they must contain some broken symmetry that is information.

The appearance of symmetry breaking (SB) is to be understood in the most general sense, [23-25], for example. This may be the change of internal state of the system or its external manifestations (characteristics) due to the effect of external conditions or its own evolution, or SB may be an appearance of some non-invariance of equations or distributions describing the system with respect to some mathematical transformations of its characteristics. (For example, if the author, being in his office, receives a message written in Chinese characters, he does not understand it and his emotional state does not change. This is a symmetry. But if someone tells that this message is about a fire in author's house during the last ten minutes and no one calls to a fire-brigade yet, then author's emotional state changes. This is a symmetry breaking.)

It is not an exaggeration to say, that modern physics is a science of the broken and unbroken symmetries [24]. Not touching the sources of this style of thinking in an antiquity and antiquities (the author is not an expert in history of science) it is possible to suspect, that this style seems to assume the more or less definite forms in mathematics to the moment of formulating a so-called

торые ограничения на их симметрию (конечность, начальные или граничные условия, геометрическая структура, и т.д.), поэтому они должны содержать в себе некоторую нарушенную симметрию, то есть информацию.

Возникновение нарушенной симметрии (НС) понимается в самом общем смысле [23-25], например. Это может быть изменение внутреннего состояния системы или ее внешних проявлений (характеристик) в силу влияния внешних условий или ее собственной эволюции, или НС может быть проявлением какой-либо неинвариантности уравнений или распределений, описывающих систему, по отношению к некоторым математическим преобразованиям ее характеристик. (Например, если автор, находясь на работе, получает записку, написанную китайскими иероглифами, он не может понять написанное, и его эмоциональное состояние не изменяется. Это - симметрия. Но если кто-нибудь скажет, что это сообщение о пожаре в доме автора в течение последних десяти минут, и пока никто не звонит в пожарную команду, тогда эмоциональное состояние автора изменится. Это является нарушением симметрии.)

Без преувеличения можно сказать, что современная физика является наукой нарушенных и ненарушенных симметрий [24]. Не касаясь источников этого стиля мышления в древности и античности (автор не является специалистом по истории науки), можно предположить, что этот стиль принял более менее определенные формы в математике к моменту формулировки так называемой Эрлангенской про-

Erlangen program (by F.Klein in 1872 in the lecture in Erlangen) - a unique view point on different geometries. The essence of this program consists in reviewing properties of figures not varying under particular transforms (shifts, rotations, mirror reflections etc.), i.e. it is in studying the figures' symmetry. The requirement of figures identity under transforms naturally leads to a concept of a transformation group (a set of transforms including unity and inverse transforms for all concrete transforms of the set implying that the transforms can be sequentially superimposed on each other satisfying associativity requirement). The different geometries correspond to different groups. It should be stressed separately that *the group property of transforms is essential attribute of a geometrical (and any other) symmetry.*

In physics this style of thinking has undergone to some "metamorphosis" from the principles of minimum optical length and minimum action up to the action invariance principle, theorem by Noether (by the way, the native of Erlangen, the essence of the theorem is that each conservation law corresponds to some symmetry of a Lagrangian), and gauge theories. The examples of sequential steps of implementation of such a "physics geometrization program" [26] can be the Einstein's relativity theory, Kaluza-Klein gravitational and electromagnetic interactions theory, Glashow-Weinberg-Salam electro-weak inter-

граммы (Ф.Клейн в 1872 г. на лекции в Эрлангене) - единой точки зрения на различные геометрии. Суть программы в изучении свойств фигур, не изменяющихся при конкретных преобразованиях (сдвиги, повороты, зеркальные отражения и пр.), т.е. в изучении симметрии фигур. Требование неизменности фигур при преобразовании ведет к понятию группы преобразований (множество преобразований, включающее единичное и обратное преобразования для каждого конкретного преобразования из этого множества, причем преобразования могут последовательно накладываться одно на другое, подчиняясь требованию ассоциативности). Различные группы отвечают различным геометриям. Следует особо подчеркнуть, что *групповое свойство преобразований является неотъемлемым атрибутом геометрической (и любой другой) симметрии.*

В физике этот стиль мышления претерпел несколько "метаморфоз" от принципов минимальной оптической длины и минимального действия до принципа инвариантности действия, теоремы Нетер (кстати, уроженка Эрлангена, суть теоремы в том, что каждой симметрии лагранжиана отвечает некоторый закон сохранения) и калибровочных теорий. Примерами последовательных шагов такой "программы геометризации физики" [26] являются теория относительности Эйнштейна, теория гравитационного и электромагнитного взаимодействия Калуцы-Клейна, теория электрослабых взаимодействий Глэшоу-Вайнбеога-Салама. Концепция феноменологической сим-

actions theory. Yu.I.Kulakov's concept [26,27] of a phenomenological symmetry has become one of the last steps of development of symmetry style of thinking in physics (a theory of physical structures), that is a definite type of the steady ratios of physical characteristics (physical structure of a definite rank), independent neither of the physical nature of the studied object, nor of a choice of measuring instrument, corresponds to each fundamental physical law. The accumulated theoretical knowledge witnesses that the power of the use of symmetry (abstract) way of thinking in physics is those, that in a household activities it would be equivalent to a skill to pass through the walls.

To prove the above statement about the connection between the information measures and SB a heuristic method of exposition was chosen because it is very difficult to overview all the approaches of different authors to consideration of information concept and the related questions (that may be the subject of a separate book). First, we introduce a new general definition of *information as (a totality of) the distinctions* that can be extracted by an active agent (measurement device, sensor, observer, or some information user) in a *fundamental act of comparison* which does not require the necessary use of probability concept or its combinatorial interpretation. We show that such a definition reflects intuitive concept of information. Then we introduce basic mathemati-

метрии Ю.И.Кулакова [26,27] (теория физических структур) стала одним из последних воплощений симметричного стиля мышления в физике. Она имеет дело с определенным типом постоянными соотношениями между физическими характеристиками (физическая структура определенного ранга), не зависящими ни от физической природы изучаемого объекта, ни от выбора измерительных средств, и относящимися к каждому фундаментальному закону. Накопленные теоретические знания свидетельствуют, что мощность использования симметричного (абстрактного) способа мышления в физике такова, что в быту она была бы равносильна умению проходить сквозь стены.

Для доказательства этих положений о связи информационных мер и НС был выбран эвристический способ изложения в силу того, что обзор всех подходов различных авторов к рассмотрению понятия информации и относящихся к ним вопросов является очень трудной задачей (и мог бы составить предмет отдельной книги). Прежде всего мы вводим новое общее определение *информации как совокупности различий*, которые могут быть извлечены активным агентом (измерительным прибором, сенсором, наблюдателем, или другим пользователем) в *фундаментальном акте сравнения*, который не требует необходимого использования понятия вероятности или его комбинаторной интерпретации. Мы показываем, что такое определение отражает интуитивное понятие информации. Затем мы вводим базовую ма-

cal quantitative measure of information - a *transform information* (TI). This concept bridges the prosaic definition of information as distinctions and the more or less exact mathematical formulation which can be easily related to the broken symmetry. Then we show that many classical information measures, including Hartley, von Neumann-Shannon-Wiener, Fisher informations, Renyi entropies, mutual information, the changes in physical entropy, can be considered as (or mathematically expressed by) the particular forms of TI when it is employed to describe one or another specific system. In doing this we overview many basic concepts and related results in terms of TI.

TI, by definition (3.1.) is non-zero when the system under study is not invariant with respect to the transform used to build up TI, therefore it can be perceived as a quantitative SB measure in the system. So can be the corresponding classical information measures to which TI reduces in each particular case. Moreover, by definition, TI can be used to describe the systems when information is determined directly via the observable quantities without previously defined probability measure. Thus we can define and calculate "information without probability." We show that this can give reasonable results such as nonlinear equations or gas-mixing entropy, see Sec. 4.7, 5.9.

тематическую количественную меру информации - *информацию преобразования* (ИП). Это понятие связывает обыденное определение информации как различий и более или менее точную математическую формулировку, которая легко может быть соотнесена с нарушенной симметрией. Далее мы показываем, что многие классические меры информации, включая информации Хартли, фон Неймана-Шеннона-Винера, Фишера, энтропии Реньи, взаимную информацию, изменения физической энтропии, могут рассматриваться как (или быть математически выражены через) частные формы ИП, когда она применяется для описания той или иной частной системы. При этом мы пересматриваем множество основополагающих понятий и соответствующих им результатов в терминах ИП.

ИП по определению (3.1) отлична от нуля, когда исследуемая система неинвариантна по отношению к преобразованию, использованного для построения ИП. Поэтому она может пониматься, как количественная мера ИС в системе. В таком же духе могут пониматься соответствующие классические меры информации, к которым сводится ИП в каждом конкретном случае. Более того, по определению, ИП может быть использована для описания систем, когда информация определяется непосредственно по наблюдаемым величинам без предварительного введения вероятностной меры. Таким образом, мы можем определять и вычислять "информацию без вероятности". Мы показываем что это может давать разумные результаты, такие как

нелинейные уравнения или изменения энтропии при смешении газов, см. подразделы 4.7, 5.9.

The proposed approach to the introduction of information concept allows one to combine the ideas of information theory with the ideas of invariance and broken symmetry, and to ascribe a "sense" to the quantitative measures of information in each particular case of their use independently of the form (formula) of very quantitative information measure. For example, the sense of well-known von Neumann-Shannon-Wiener information measure can be different, it can be even a particular case, or evaluation, of Hartley information, although usually it is considered as a more general form of quantitative information measure.

We finish our discussion by the consideration of possibility to introduce a concept of structural information which is due to the explicit or implicit presence of broken symmetry in geometrical structure of the physical systems, and the possibility to measure this information contents by the physical methods.

Most of the chapters (from Chapter 4 and further) can be read separately, or almost. The author has tried to make, on the one hand, the mathematical "entry" of the text as simple as possible, and, on the other hand, to overview numerous different concepts and problems which can be collected under one "umbrella" of information as asymmetry measure and especially of transform information. If the reader will decide

Предложенный подход к введению понятия информации позволяет комбинировать идеи теории информации с идеями инвариантности и нарушенной симметрии, и приписывать "смысл" количественным мерам информации в каждом частном случае их использования независимо от формы (формулы) самой количественной меры информации. Например, смысл хорошо известной меры информации фон Неймана-Шеннона-Винера может быть различным, она даже может быть (приблизительной) оценкой информации Хартли, хотя обычно рассматривается как более общая форма количественной меры информации.

Мы заканчиваем наше обсуждение рассмотрением возможности введения понятия структурной информации, обусловленной явным или неявным наличием НС в геометрической структуре физических систем, и возможности измерять это информационное содержание физическими методами.

Все главы (от Гл.4 и далее) могут читаться (почти) отдельно. Автор старался, с одной стороны, сделать математическую "составляющую" текста как можно проще, и, с другой стороны, рассмотреть как можно более широкий круг понятий и проблем, которые могут быть собраны под одним "зонтиком" информации как меры нарушенной симметрии и, особенно, информации преобразования. Если читатель сочтет воплощение этой идеи в книге да-

that implementation of this idea in the book is far from an acceptable variant, he (she) can send his (her) thoughts to the grateful author (see address at the end).

леким от приемлемого варианта, он (она) может послать свои соображения благодарному автору (см. координаты в конце).

### References

### Литература

1. Fisher R.A. *Theory of statistical estimation*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1925, **22**, 700-725.
2. Hartley R.V.L. *Transmission of information*. Bell System Tech. J., 1928, **7**, 535-563.
3. Shannon C.E. *A mathematical theory of communication*. Bell System Tech. J., 1948, **27**, 379-423, 623-656.
4. Wiener N. *Cybernetics or Control and Communication in The Animal and The Machine* (M.I.T.Press, John Wiley & Sons, 1961). Винер Н. *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине*. М.: Наука, 1983.
5. Kullback S., Leibler R.A. *On information and sufficiency*. Ann. Math. Statist. 1951, **22**, 79-86.
6. Quastler H. (Ed.) (*Essays on the use of Information Theory in Biology* (Urbana, University of Illinois Press, 1953).
7. Yockey H.P., Platzmann R.L., Quastler H. (Eds.) *Symposium on Information Theory in Biology* (London, etc., Pergamon Press, 1958).
8. Brillouin L. *Science and Information Theory* (New York, Academic Press, 1962). Бриллюэн Л. *Наука и теория информации*. М.:Физматгиз, 1960.
9. Brillouin L., *Scientific Uncertainty and Information* (New York - London, Acad.Press,1964). Бриллюэн Л. *Научная неопределенность и информация*. М.:Мир, 1966.
- 10.Fisher R.A. *Statistical Methods and Scientific Inference* (New York, London, Hufner Press, 1973).
- 11.Kullback S. *Information Theory and Statistics* (New York, London, Wiley and Chapman & Hall, 1959),
- 12.Billingsley P. *Ergodic Theory and Information* (New York, London, Sydney, J.Wiley&Sons, Inc., 1965). Биллингслей П. *Эргодическая теория и информация*. М.:Мир, 1969.
- 13.Kharkevich A.A. *Information theory. Image recognition* (Moscow, Nauka, 1973) [in Russian]. Харкевич А.А. *Теория информации. Опознавание образов*. М.:Наука, 1973.

14. Stratanovich R.L. *Information Theory* (Moscow, Sov.Radio, 1975) [in Russian]. Стратанович Р.Л. *Теория информации*. М.:Сов.радио, 1975.
15. Kolmogorov A.N. *Information Theory and Theory of Algorithms* (Moscow, Nauka, 1987) [in Russian]. Колмогоров А.Н. *Теория информации и теория алгоритмов*. М.:Наука, 1987.
16. Kulikovskiy L.F., Motov V.V. *Theoretical Grounds of Information Processes* (Moscow, Vysshaya Shkola, 1987) [in Russian]. Куликовский Л.Ф., Мотов В.В. *Теоретические основы информационных процессов*. М.: Высшая школа, 1987.
17. Nicolis J.S. *Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach* (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1986). Николис Дж. *Динамика иерархических систем. Эволюционное представление*. М.:Мир, 1989.
18. Haken H. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Berlin, etc., Springer-Verlag, 1988). Хакен Г. *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам*. М.:Мир, 1991.
19. Harmuth H.F. *Information Theory Applied to Space-Time Physics* (Moscow, Mir, 1989) [in Russian]. Хармут Х. *Применение методов теории информации в физике*. М.:Мир, 1989.
20. Kadomtsev B.B. *Dynamics and Information* (Moscow, Uspekhi Fizicheskikh Nauk, 1997) [in Russian]. Кадомцев Б.Б. *Динамика и информация*. М.: Ред. УФН, 1997.
21. Chechkin A.V. *Mathematical Informatics* (Moscow, Nauka, 1991) [in Russian]. Чечкин А.В. *Математическая информатика*. М.:Наука, 1991.
22. Goppa V.D. *Introduction to Algebraic Theory of Information* (Moscow, Nauka, 1995) [in Russian]. Гоппа В.Д. *Введение в алгебраическую теорию информации*. М.:Наука, 1995.
23. Weyl H. *Symmetry* (Princeton University Press, 1952). Вейль Г. *Симметрия*. М.:Наука, 1968.
24. Wigner E.P. *Symmetries and reflections* (Indiana University Press, Bloomington-London, 1967). Вигнер Е. *Этюды о симметрии*. М.:Мир, 1971.
25. Zheludev I.S. *Physics of Crystals and Symmetry* (Moscow, Nauka, 1987) [in Russian]. Желудев И.С. *Физика кристаллов и симметрия*. М.:Наука, 1987.

26. Vladimirov Yu.S. *Space-time: The obvious and hidden dimensions*. Moscow, Nauka, 1989. [in Russian]. Владимиров Ю.С. *Пространство-время: явные и скрытые размерности*. М.: Наука, 1989.
27. Kulakov Yu.I., Vladimirov Yu.S., Karnaukhov A.V. *Introduction to the theory of physical structures and binary geometrophysics*. Moscow, "Archimedes", 1992. [in Russian] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику*. М.: Архимед, 1992.

## 2. Concept of information

Let us maintain the tradition to analyze the concept of information as well as its quantitative measures after even though very superficial consideration of the processes of perception, reflection, etc. of information.

In this chapter the concept of information is discussed from the view point that information (we do not know yet what it is) is extracted and received by the measurement devices, sensation organs of living species, in thinking processes, and by many other systems using for their functioning the numerous physical, chemical, etc. phenomena of very different nature, but all these processes embody, in one way or another, a fundamental act of information processing - a *comparison*. The information itself is a result of this act or of a sequence of these acts. It is not quite right, may be, to reduce all the variety of information treatment processes in nature, engineering and technical science to one main act, but, nevertheless, comparison is a most important feature of all information processes. We try to show this below using the simple (trivial) and evident examples. In the next Chapter this will be reflected in a formal definition of a transform information.

### 2.1. Measurement, sensation, reception

Every measurement device needs a calibration during which one

## 2. Понятие информации

Мы предлагаем поддержать традицию анализировать понятие информации так же как и ее количественные меры после хотя бы поверхностного рассмотрения процессов восприятия, отражения, и т.п. информации.

В этой главе мы обсуждаем понятие информации с той точки зрения, что информация (пока мы не знаем, что это такое) извлекается и принимается измерительными приборами, чувствительными органами живых организмов, в мыслительных процессах, и многими другими системами, использующими в процессе функционирования многочисленные физические, химические и др. явления самой различной природы, но все эти процессы включают в себе в том или ином виде фундаментальный акт обработки информации - *сравнение*. Информация сама по себе является результатом этого акта или последовательности этих актов. Не совсем верно сводить все многообразие процессов обработки информации в природе, науке и технике к одному главному акту, но, тем не менее, сравнение является важнейшей особенностью всех информационных процессов. Мы стараемся показать это ниже, используя простые (тривиальные) и наглядные примеры. В следующей главе эта особенность будет отражена в формальном определении информации преобразования.

### 2.1. Измерение, ощущение и восприятие

Каждый измерительный прибор нуждается в калибровке, в процессе

level of its scale (say, zero) is disposed on (ascribed to) some standard level of input signal, and another scale level is disposed on (ascribed to) another standard input signal. The measurement process is actually a comparison of a measured signal with standard ones. Implying by signal level a quantitative reflection (by a proper device) of different characteristics (voltage, current, pressure, temperature, mass, light intensity, etc.), we see that this scheme of measurement is quite general and reflects a core of measurement process independently of specific features of the devices and the nature of quantities measured.

Intrinsically, measurement device is a system which changes its state in the process of measurement in dependence on external conditions (effects) that is SB, and, so, we can say that in the process of measurement one actual SB is measured on the base of another (standard) SB. This change in the state of measurement device can be used to effect other measurement, control or calculation devices, and such chains are used in systems of automatic control that are the subject of cybernetics [1]. We can characterize the main functioning principle of such systems (the feedback) as a transfer of distinctions between standard and actual signal levels along the chains of specially designed devices. This does not bring anything new for cybernetics, but we see that informa-

которой один уровень его шкалы (скажем, нулевой) (приписывается к) настраивается на некоторый стандартный уровень входного сигнала, а другой уровень шкалы (приписывается к) настраивается на другой стандартный входной сигнал. Процесс измерения фактически осуществляет сравнение измеряемого сигнала со стандартными. Подразумевая под уровнем сигнала количественное выражение (при помощи подходящего прибора) различных характеристик (напряжения, силы тока, давления, температуры, массы, интенсивности света, и пр.), мы видим, что эта схема измерения является совершенно общей и отражает суть процесса измерения независимо от внутренне присущих особенностей прибора и природы измеряемых величин.

Сам по себе измерительный прибор является системой, которая изменяет свое состояние в процессе измерения в зависимости от внешних условий (влияний) что является НС, и, таким образом, мы можем сказать, что в процессе измерения одна фактическая НС измеряется на основе другой (стандартной) НС. Это изменение в состоянии измерительного прибора может быть использовано для воздействия на другие измерительные, управляющие, вычислительные устройства, и такие цепочки используются в системах автоматического регулирования, которые являются предметом изучения кибернетики [1]. Мы можем характеризовать главный принцип функционирования таких систем (обратная связь) как перенос различий между стандартными и фактическими уровнями сигналов вдоль цепочек специально спроектиро-

tion in the automatic control systems is (a totality of) the distinctions and this does not contradict the fundamentals of cybernetics.

The sensors and conditioned reflex systems of living species function in analogous way [2]. All things that are cold or hot, bright or dark, etc. are actually colder or hotter, brighter or darker, etc. as compared with some "standard" level of the sensor that may be the level fixed in a memory or may vary during the adaptation of the organism to the environmental conditions. The sensors change their state due to the external effects and this change is transmitted along the signal systems to the organs that are responsible for one or another reflex.

Living sensors are more complicated as compared with measurement devices, and they can receive the complexes of changes of external effects, but this ability is again due to the presence of some basic distinctions. For example, the ability to differentiate colors or sounds is due to the differences in wavelengths in the spectra of incoming or reflected light or sound. The direction of incoming sound is determined by the differences of signals in two ears. The ability to evaluate the distance "by eye" is the result of subtle evaluation of differences in orientations of two eyes (that is

ванных устройств. Это не дает ничего нового для кибернетики, но мы видим, что информация в системах автоматического регулирования представляет собой различия (совокупность различий), и это не противоречит основам кибернетики.

Сенсоры и системы условных рефлексов живых организмов функционируют похожим образом [2]. Все объекты, которые являются холодными или горячими, яркими или темными, и т.д., фактически являются более холодными или горячими, более яркими или темными, и т.д. по сравнению с некоторыми "стандартными" уровнями сенсоров, который могут быть уровнями, фиксированными в памяти или могут меняться в процессе адаптации организма к условиям окружающей среды. Сенсоры изменяют свое состояние под влиянием внешних воздействий, и это изменение передается по цепочке сигнальной системы к органам, ответственным за тот или иной рефлекс.

Сенсоры живых систем сложнее измерительных приборов и могут воспринимать комплексы изменений внешних воздействий, но эта способность опять-таки обусловлена присутствием некоторых базовых различий. Например, способность различать цвета или звуки обусловлена различием в длинах волн в спектрах падающего или отраженного света или звука. Направление приходящего звука определяется по различию сигналов в двух ушах. Способность оценивать расстояние "на глаз" является результатом тонкой оценки различий в ориентации двух глаз (что достигается в процессе длительной тренировки). Способность

achieved during long training). The ability to smell is due to the changes in concentrations and to the presence of concentration gradients. Moreover, the growth and development of sensory organs are determined by the presence of "information" on the input of organs [2]. I.e. information governs the organization of living matter.

We can transmit or receive information only making the corresponding devices to change their states in such a way that these changes result in changes in the states of other devices, etc. A constancy of a state of some signal receiver (a symmetry) signifies the absence of information in its output. Information is there only if the state of the receiver changes (SB).

Thus we can conclude from the trivial examples above that information in simple technical devices and sensation organs is the distinctions between standard and actual signal levels and the information transfer is possible in such systems only if they or their parts change their states (SB).

## 2.2. Common sense

Besides the comparison, many other processes are involved to extract the information intuitively understood in common sense. The complex devices of digital or analogous information processing deal with such a large number of characteristics and their distinctions (at a fundamental level) that they all can not be processed simultaneously, at

различать запахи обусловлена изменениями концентраций и присутствием градиентов концентраций. Более того, рост и развитие органов ощущения определяется наличием "информации" на входе органов [2]. То есть информация управляет организацией живой материи.

Мы можем передавать и принимать информацию только вынуждая соответствующие приборы изменять свое состояние таким образом, что эти изменения приводят к изменениям состояний других приборов, и т.д. Неизменность состояния некоторого приемника сигнала (симметрия) означает отсутствие информации на его выходе. Информация появляется только если состояние приемника меняется (НС).

Таким образом, из простых примеров выше мы можем заключить, что информация в простых технических устройствах и органах ощущения является различиями между стандартными и фактическими уровнями сигналов, и что передача информации в таких системах возможна только если они или их части изменяют свое состояние (НС).

## 2.2. Обиходный смысл

Одно лишь сравнение недостаточно для извлечения информации интуитивно понимаемой в обиходном смысле. Сложные устройства цифровой или аналоговой обработки информации имеют дело с таким большим числом характеристик и их различий (на фундаментальном уровне), что все они не могут быть обработаны одновременно, сразу. Поэтому обрабаты-

once. Therefore the processing system perceives only some subsets of the whole collection of the ground distinctions, or summary effects of these subsets ("clusters"). Such subsets can be "carved", for example, by imposing the perception limits on the physical, chemical, or other quantitative parameters. That is the distinctions are filtered before the chain of acts of comparison, choice, fixation (into the memory), and reaction. Implicitly, such a filtration is made by any information receptor, but in the simplest devices this function is intrinsically built in the construction of the device (like a trigger) and does not influence further information processing. In the case of complex information systems this function of classification is very important and is responsible for the semantic aspect of information perceived.

One more example. Information in the computer represents the totalities of arrays of 0's and 1's (bits, fundamental SB), and the large enough sequences of these arrays are interpreted by the devices of the computer as texts, commands, format parameters, or whatever else (higher SB recognized by the devices). I.e. complex processing of information implies also comparison of (hierarchical) structures of fundamental distinctions and information becomes distinctions in structures, but nevertheless, the distinctions. The simplest and complicated versions of information processing chains are schematically shown in

вающая система воспринимает только некоторые подмножества целого набора базовых различий, или суммарные эффекты этих подмножеств ("кластеров"). Такие подмножества могут быть вырезаны, например, наложением границ, пределов восприятия на физические, химические, или другие количественные параметры. То есть различия фильтруются перед цепочкой актов сравнения, выбора, фиксации (в памяти) и реакции. Неявно такая фильтрация производится любым рецептором информации, но в простейших устройствах эта фильтрация изначально встроена в конструкцию устройства (как пороговый фильтр, триггер) и не влияет на дальнейшую обработку информации. В случае сложных информационных систем эта функция классификации очень важна и определяет семантический аспект воспринимаемой информации.

Еще один пример. Информация в компьютере представляет собой совокупности наборов нулей и единиц (битов, фундаментальная НС), и достаточно большие последовательности таких совокупностей интерпретируются устройствами компьютера как тексты, команды, параметры формата, или что-либо еще (НС более высокого порядка, распознаваемые устройствами). То есть сложная обработка информации подразумевает так же сравнение (иерархических) структур фундаментальных различий, и информация становится различиями в структурах, но тем не менее, различиями. Простейшие и более сложные варианты цепочек обработки информации схематически по-

Fig.2.1.

казаны на рис. 2.1.

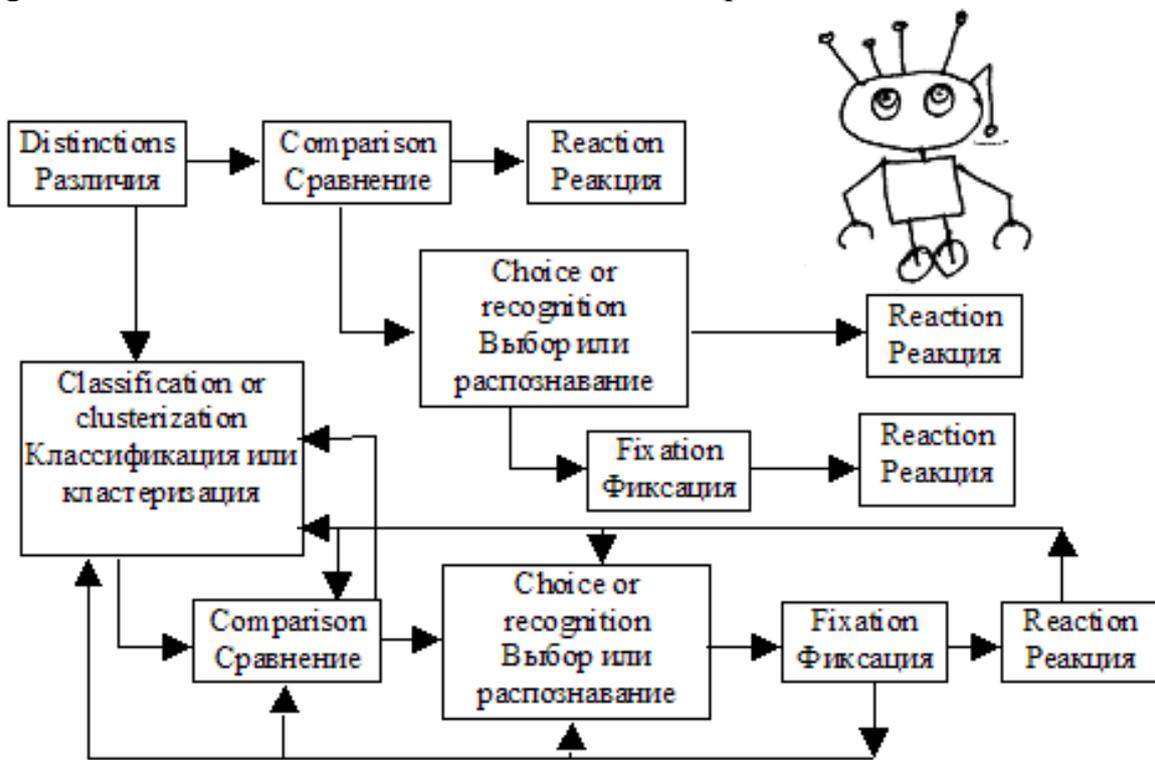


Fig.2.1. Schematic representation of the possible simplest and complicated chains of information processing with possible feedbacks.

Рис.2.1. Схематическое представление возможных простейших и более сложных цепочек обработки информации с возможными обратными связями.

When considering the thinking process, we should take into account the necessity of other numerous "operations" (such as the choice and fixation) employed for information processing, but all they are done using (a sequence of) acts of comparison. We call the news those events which stand out from the sequence of "usual," everyday events, and the more significant this standing out, the more interesting the news. In other words, we are comparing the sequences of events. A blank sheet of paper does not contain information until the points (or the regions) of its surface are indistinguishable. On the fundamental

При рассмотрении мыслительных процессов нам следует принять во внимание необходимость других многочисленных "операций" (таких как выбор и фиксация) используемых при обработке информации, но все они производятся с использованием (последовательности) актов сравнения. Мы зовем новостями такие события, которые выделяются из цепочки "обычных" ежедневных событий, и чем существенней это отличие, тем интереснее новости. Другими словами, мы сравниваем последовательности событий. Чистый лист бумаги не содержит информации до тех пор, пока точки (или области) его поверхности неразличимы. На фундаментальном уровне,

level, information written, drawn, scratched on the sheet is due to the distinctions between its surface points (regions) that is the fundamental SB. We (or, for example, robotic vision device) can interpret the totality of these distinctions, if it is possible, using some symbolic "dictionaries" as the letters or pictures that is SB at "higher levels." In dependence on the result of this recognition the state of recognition system may vary that is another SB reflecting the SB on the surface of the sheet of paper.

The latter examples are more complicated in that respect that the comparison is made with the (symbolic) images in a memory. A ravage or replacement of such higher SB's corresponding to some "dictionary" or "data base" can be used to destroy or hide information as it does in cryptography, for example. (The cryptographic methods of information defense are based on the rearrangement and substitution of the discrete elements by which information is written, processed, transmitted, etc. This destroys the higher SB's and make the recognition "dictionaries" useless. One of the possible practical implementations of this idea is described in the Attachment at the end of the book.)

The attempts to describe such an "SB transfer" in terms of the bifurcation sequences in a *most general* form [3-5] require the *necessary* use of probability and the related

информация, написанная, нарисованная, нацарапанная на листе, обусловлена различиями между точками (областями) его поверхности, что является фундаментальной НС, Мы (или, например, визуальное устройство робота) можем интерпретировать совокупность этих различий, если это возможно, на основе некоторых символических "словарей" как буквы или рисунки, что является НС "на более высоких уровнях". В зависимости от результата этого распознавания распознающая система может изменить свое состояние, что есть другая НС, отражающая НС на поверхности листа бумаги.

Последние примеры являются более сложными в том отношении, что сравнение производится с (символическими) образами в памяти. Разрушение или подмена таких НС более высоких порядков, соответствующих некоторому символическому "словарю" или "базе данных", могут быть использованы для уничтожения или сокрытия информации, как это делается, например, в криптографии. (Криптографические методы защиты информации основаны на перестановке и подстановке дискретных элементов, с помощью которых информация записывается, обрабатывается, передается, и т.д. Это разрушает НС высоких порядков и делает "словари" для распознавания бесполезными. Одна из возможных реализаций этой идеи описана в приложении в конце книги.)

Попытки описать подобный "НС-перенос" в терминах последовательности бифуркаций в *наиболее общем* виде [3-5] требуют *необходимого* использования вероятности и относя-

concepts. We do not do this here to not obscure the problem of what is information itself.

In general, even though rather roughly, a commonplace thinking can be thought of as the comparison, choice among, and other "operations" with the elements of sets of symbolic characteristics (the sizes, colors, signal levels, etc.) describing or modeling different observable objects and images of these objects in the memory of the self. That is we may postulate that images of observable objects in the brain are the sets of characteristics. The very discrimination of different symbols-characteristics is due to the (implicit) presence of some their quantitative measure determined by the frequency of appearance, the intensity of specific effects on the sensors, etc. that is characteristic of one or another observable object. This specific measure is earmarked into the memory of the self in the processes of growth or evolution. In other words, the differentiation of thinking images can be perceived as a fixation of some SB. From this point of view we can interpret the commonplace information, its semantic and value aspects, as the presence, novelty, and value of the distinctions between the thinking images of the objects, phenomena, or their totalities, acting on the self, and the images, kept in his memory. Taking into account the considerations above, again, abstractedly from the conscious observer, we can in-

щихся к ней понятий. Мы не делаем этого здесь, чтобы не затемнять проблему того, что есть информация сама по себе.

В общем, хотя довольно грубо, обыденное мышление можно понимать как сравнение, выбор между, и другие "операции" с элементами множеств символических характеристик (размеры, цвета, уровни сигналов, и т.п.), описывающими или моделирующими различные наблюдаемые объекты, и образами этих объектов в памяти субъекта. То есть мы можем постулировать, что образы наблюдаемых объектов в мозгу (памяти) субъекта являются наборами (множествами) характеристик. Само по себе различие символов-характеристик обусловлено (неявным) присутствием некоторой их количественной меры, определяемой частотой появления, интенсивностью специфических воздействий на органы чувств, и пр., что является характерным для того или иного наблюдаемого объекта. Эта специфическая мера фиксируется в памяти субъекта в процессе роста или эволюции. Другими словами, дифференциация мысленных образов может быть понята как фиксация некоторой НС. С этой точки зрения мы можем понимать обыденную информацию, ее семантический и ценностный аспекты, как наличие, новизну, и величину различий между мысленными образами объектов, явлений или их совокупностей воздействующих на объект, и образами закрепленными в его памяти. Принимая во внимание проведенное выше рассмотрение, опять же, абстрагируясь от осознающего наблюдателя, мы можем интерпретировать *инфор-*

*terpret information as distinctions themselves, in general.*

A scientific logical thinking is fundamentally the same with the difference that the choice of basic characteristics is not "enforced" by the sensory organs but is determined by the chosen level of description and the abstraction experience accumulated, the both appearing from the everyday thinking at last. Actually, all the investigations, theoretical and experimental ones, deal with thinking evaluation, modeling, etc. of the distinctions between the elements of the set(s) of characteristics (physical, chemical, etc. quantities, sizes, populations, aureole areas, etc.), or with images provided with their specific structures (initial and final states, trajectories, events of certain types, spectra, probability distributions, etc.), and the distinctions between the structures of these sets are investigated. The formal logical schemes of consideration can implement the filtration function, because the distinctions may exist but may not be taken into account in course of concrete investigation on the respective level of description. This is similar to the case, when some device can not detect distinctions in the signal because of insufficient or lowered (by experimenter) sensitivity. In both cases no information is extracted and used (non fixed SB).

The definition of information as a measure of the distinctions in general allows to introduce the

*мацию как различия сами по себе, вообще.*

Научное логическое мышление в основе своей является таким же, с тем отличием, что выбор базовых характеристик не побуждается органами чувств, но определяется выбранным уровнем описания и накопленным опытом абстракций, причем оба. в конце концов, происходят из обыденного мышления. Фактически все исследования, теоретические и экспериментальные, имеют дело с мысленным оцениванием, моделированием, и т.д. различий между элементами множеств характеристик (физических, химических и пр. величин, размеров, численностей, площадей ареалов, и т.д.), или с образами, наделенными своей собственной специфической структурой (начальные и конечные состояния, траектории, события определенных типов, спектры, вероятностные распределения, и т.д.), и исследуются различия между структурами этих множеств. Формальные логические схемы рассмотрения могут нести в себе функцию фильтрации, т.к. различия могут присутствовать, но не приниматься в расчет в ходе конкретного исследования на соответствующем уровне описания. Это напоминает тот случай, когда некоторый прибор не может детектировать различия в сигнале ввиду недостаточной или заниженной (экспериментатором) чувствительности. В обоих случаях информация не будет извлекаться и использоваться (не фиксированная ИС).

Определение информации как меры различий вообще позволяет вводить количественные меры информа-

quantitative information measures which are adequate to the systems under study. In the author's opinion, the "unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences" (Wigner, Ch. 17,[6]) is partly due to this aspect of the information concept. The most visual examples of this are the adequate description of many natural processes by the apparatus of differential equations, difference schemes based modeling by computers, cellular automation based modeling, etc. All analogous models simply re-produce the evolution of the space non-uniformities, non-uniformities of the boundary or initial conditions, etc.

The fundamental role of distinctions was stressed by many authors. For instance, Auerbach [7,8] was pointing out the importance of distinctions between physical quantities and introduced a concept of *ectropy* as a characteristics of energy distribution non-uniformity, or of the energy concentration in the system. Branson [9] defined directly the information as a function of the difference of the concentrations on the sides of membrane in modeling the behavior of biological membranes. In an extensive monograph [10] by Gutschko there are the detailed descriptions of the physical processes (and real devices using them) reflecting the variable characteristics of the signals in the form of fixed surface (non-uniform) relieves. A study of physical processes in the ears of mammals shows [11] that the auditory signals are treated in such a

ции, адекватные рассматриваемым системам. По мнению автора "непостижимая эффективность математики в естественных науках" (Вигнер, Гл.13, [6]) от части обусловлена этим аспектом понятия информации. Наиболее наглядными примерами этого являются адекватное описание многих естественных процессов аппаратом дифференциальных уравнений, компьютерное моделирование с помощью различных схем, моделирование на основе клеточных автоматов, и пр. Все аналогичные модели просто воспроизводят эволюцию пространственных неоднородностей, неоднородностей начальных или граничных условий, и т.д.

Фундаментальная роль различий отмечалась многими авторами. Например, Ауэрбах [7,8] подчеркивал важность различий между физическими величинами и ввел понятие *эктропии* как характеристики неоднородности распределения энергии, или концентрации энергии в системе. Брэнсон [9] определил информацию непосредственно как функцию различий концентраций по сторонам мембраны при моделировании поведения биологических мембран. В обширной монографии Гуццо [10] приводится детальное описание физических процессов (и реальных приборов на их основе), отражающих переменные характеристики сигналов в форме фиксированных поверхностных (неоднородных) рельефов. Исследование физических процессов в ушах млекопитающих показывает [11], что звуковые сигналы обрабатываются таким образом, что их частотные и другие характеристики

way that their frequency and other characteristics are presented by the (space) distributions of neuron activity in the brain, that is reminiscent, by the way, of the reliefography methods [10]. We have mentioned above that Wiener [1] give a lot of examples of using the differences to control the feedback. More exactly, he writes: "The information fed back to the control center tends to oppose the departure of the controlled from the controlling quantity, but it may depend in widely different ways on this departure. The simplest control systems are linear...", p.97.

All these examples, as well as many others, that can be found in literature, say in forward of universality of the definition of *information as the distinctions in general*.

представляются в виде (пространственного) распределения нейронной активности в мозгу, что напоминает, кстати, метод рельефографии [10]. Мы упоминали выше, что Винер [1] дает много примеров использования различий для управления обратной связью. Точнее, он пишет: "Информация, передаваемая управляющему центру, стремится изменить отклонение управляемой величины от управляющей на обратное, но она может самым различным образом зависеть от этого отклонения. Простейшие управляющие системы линейны...", с.165.

Все эти примеры, так же как и многие другие, которые можно найти в литературе, говорят в пользу универсальности определения *информации как различий вообще*.

## References

1. Wiener N. *Cybernetics or Control and Communication in The Animal and The Machine* (M.I.T.Press, John Wiley & Sons, 1961). Винер Н. *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине*. М.: Наука, 1983.
2. *Mind and brain*. Special issue of Sci.Am., 1992, **267**,N3.
3. Haken H. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Berlin, etc.,Springer-Verlag,1988). Хакен Г. *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам*. М.:Мир, 1991.
4. Nicolis J.S. *Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach* (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1986). Николис Дж. *Динамика иерархических систем. Эволюционное представление*. М.:Мир, 1989.
5. Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity. An Introduction* (New York, Freeman, 1989). Николис Г., Пригожин И. *Познание сложного. Введение*. М.:Мир, 1990.
6. Wigner E.P. *Symmetries and reflections* (Indiana University Press, Bloomington-London, 1967). Вигнер Е. *Этюды о симметрии*. М.:Мир, 1971.
7. Auerbach F. *Ectropism and Physical Theory of Life* (S.-Petersburgh, Obrasovanie, 1911) [in Russian]. Ауэрбах Ф. *Эктропизм и физическая теория жизни*. С.-Петербург: Образование, 1911.

## Литература

8. Auerbach F. *The Queen of the World and Her Shadow. Energy and Entropy* (Petrograd, Nauchnoe Knigoizdatel'stvo, 1917) [in Russian]. Ауэрбах Ф. *Царица мира и ее тень*. Петроград: Научное книгоиздательство, 1917.
9. Branson H.R. *A definition of information from the thermodynamics of irreversible processes*. In *(Essays on the Use of) Information Theory in Biology*. H.Quastler (Ed.) (Urbana, University of Illinois Press, 1953). Pp.25-40.
10. Gutscho Yu.P. *Physics of Reliefography* (Moscow, Nauka, 1992) [in Russian]. Гуццо Ю.П. *Физика рельефографии*. М.:Наука, 1992.
11. De Boer E. *Auditory physics. Physical principles in hearing theory III*. Phys.Rep. 1991, **203**, N3, 125-231.

### 3. Transform information

Behind almost every modern scientific term there is a set of characteristics (quantities) with its own many-level or hierarchical structure. But there is a unique common feature of all mathematical models that is the fact that all (physical) models imply the use of (not less than) two sets: a support set (space, space-time, phase space, set of elementary events, nodes of crystal lattice, etc.) and a set of "intensity measures" or "marks" ascribed to the domains or points of the support set (the fields and their intensities, probability measure and other distributions). For example, in statistical physics the support set is the phase space or state space and the intensity measures are the probabilities. In gas-(hydro-) dynamics the support space is the Euclidean coordinate space and the intensity measures are the distributions of density, velocity, temperature, pressure and other gas-dynamic quantities. In quantum mechanics the support space is the coordinate space or space-time and the intensity measure is the wave function the squared absolute value of which is interpreted as probability. Although such a model looks too primitive, this "sandwich" works perfectly in the most effective (due to the number of applications) mathematical theory - a probability theory where it is actually the base of considerations or even the way of thinking [1,2]. In applications we are interested in the distribution of in-

### 3. Информация преобразования

Почти за каждым современным научным термином стоит набор характеристик (величин) со своей собственной многоуровневой или иерархической структурой. Но имеется одна общая черта всех математических моделей, заключающаяся в том, что все (физические) модели подразумевают использование (не менее чем) двух множеств: базового множества (пространство, пространство-время, фазовое пространство, множество элементарных событий, узлы кристаллической решетки, и т.д.) и множества "мер интенсивностей" или "меток", приписанных областям или точкам базового множества (поля и их интенсивности, вероятностная мера или другие распределения). Например, в статистической физике базовым множеством является фазовое пространство или пространство состояний, а мерами интенсивности являются вероятности. В гидро-газодинамике базовым множеством является евклидово координатное пространство, а мерами интенсивностей являются распределения плотности, скорости, температуры, давления и других газодинамических параметров. В квантовой механике базовым множеством является координатное пространство или пространство-время, а мерой интенсивностей является волновая функция, квадрат абсолютной величины которой трактуется как вероятность. Хотя такая модель выглядит слишком примитивной, этот "бутерброд" идеально работает в самой эффективной (по числу приложений) математической теории - теории вероят-

tensities over the support set, as a rule.

As will be shown below, very often one can obtain the mathematical description of one or another system comparing the intensities of the points or domains of the support set, i.e. in trying to evaluate the distinctions of the domains or points of support set, or saying alternatively, trying to evaluate a non-uniformity of the set of intensity measures. The key idea is to transform properly the intensity measures (or the support set that is followed by the transformation of intensities) *and to compare the intensity distributions before and after the transform using as a quantitative measure of their distinction a transform information* (TI), Fig.3.1:

ностей, где он фактически является основной рассмотрения, или даже способом мышления [1,2]. В приложениях нас интересуют, как правило, распределения интенсивностей по базовому множеству.

Как будет показано ниже, очень часто можно получить математическое описание той или иной системы, сравнивая интенсивности точек или областей базового множества, то есть пытаюсь оценить различия областей или точек базового множества, или, говоря по-другому, оценивая неоднородность множества мер интенсивностей. Ключевая идея состоит в том, чтобы подходящим образом трансформировать меры интенсивностей (или базовое множество, что влечет трансформацию интенсивностей) и *сравнить распределения интенсивностей до и после трансформации, используя в качестве количественной меры их различия информацию преобразования* (ИП), рис.3.1:

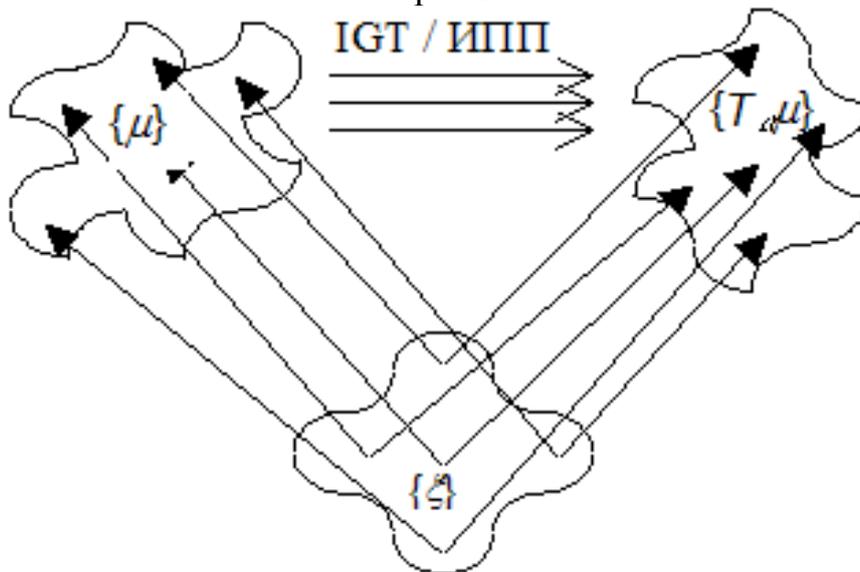


Fig.3.1. Schematic representation of transformation of the model "sandwich."

Рис.3.1. Схематическое представление преобразования модельного "бутерброда".

$$I_{Tr} = \int d\xi \mu(\xi) \ln(\mu(\xi)/T_\alpha \mu(\xi)), \quad I_{Tr} = \sum_k \mu_k \ln(\mu_k/T_\alpha \mu_k), \quad (3.1)$$

where  $\{\xi\}$  or  $\{k\}$  is the support set, continuous or discrete one,  $\{\mu(\xi)\}$  or  $\{\mu_k\}$  are the intensities ascribed to the points (domains) of the support set,  $T_\alpha\mu$  is a result of some transform  $T$  (shift, rotation, unitary transform, etc. ) of the intensities,  $\alpha$  is a parameter of the transform. *Information generating transform* (IGT)  $T$  may be local or global but it must not distort the uniform intensity distribution (containing no information).

To not obscure the core by the mathematical details (which are to be discussed to make the consideration rigorous) we will hold that all the measures and transformations, that will be used in the following to build up TI, obey the necessary requirements (piecewise continuity, positiveness or whatever else depending on physical scenario). We will imply also that the measures and their transforms satisfy the initial and boundary conditions imposed on the system under consideration.

Somewhat running ahead, it is necessary to point out three important circumstances : (i) the information introduced above does not imply the necessary use of the probability measures to describe the physical systems, (ii) the concept of transform  $T$  may be used not only in the mathematical sense, but also symbolically, for example, to reflect the unknown mechanism of evolution of the measure or its transfor-

где  $\{\xi\}$  или  $\{k\}$  - базовое множество, непрерывное или дискретное,  $\{\mu(\xi)\}$  или  $\{\mu_k\}$  - интенсивности приписанные к точкам (областям) базового множества,  $T_\alpha\mu$  - результат некоторого преобразования  $T$  (сдвиг, вращение, унитарное преобразование, и пр.) интенсивностей,  $\alpha$  - параметр преобразования. *Информационно производящее преобразование* (ИПП)  $T$  может быть локальным или глобальным, но оно не должно искажать однородное распределение интенсивностей (не содержащее информации).

Чтобы не затемнять сути математическими деталями (которые необходимо обсудить, чтобы сделать рассмотрение строгим), мы будем полагать, что все меры и преобразования, которые будут использоваться в дальнейшем для построения ИП, удовлетворяют необходимым требованиям (кусочная непрерывность, неотрицательность, или что-либо еще в зависимости от физической постановки задачи, сценария). Мы так же будем подразумевать, что меры и их преобразования удовлетворяют начальным и граничным условиям, наложенным на рассматриваемую систему.

Несколько забегаая вперед, необходимо отметить три важных обстоятельства: 1) выше введенная информация не подразумевает необходимого использования вероятностных мер для описания физических систем, 2) понятие преобразования  $T$  может использоваться не только в математическом смысле, но так же символически, например, чтобы отразить неизвестный механизм эволюции меры или ее преобразования из априорной в постери-

mation from an a priori form into the posterior one in the course of trials, (iii) we do not imply the rigorous use of the term "intensity measure", i.e. this measure must not necessarily be real and normalized.

When the probability measure is used, TI is a particular case of the Kullback information which is a measure of the distinction between two probability distributions not implying the necessary presence of any connection between them [3-5]. On the other hand, TI can be applied to the non-probabilistic measures. Depending on the transform used, in such cases TI can be related to the classical information measures : when  $T$  is a shift - to the Fisher information  $I_F$ ; when  $T$  is a "multifractal transform" - to the generalized Renyi dimensions (entropies)  $D_q$ ; when  $T$  is a "measurement transform" - to the Hartley information  $I_H$ , von Neumann-Shannon-Wiener information  $I_{NSW}$ , or to mutual information  $I_M$ . The corresponding SB's are with respect to the shift, "multifractal transform", "measurement transform" or rearrangements of particles (or states, or events), see Table 3.1. All these cases are discussed below, but in addition the possibility is demonstrated to use TI as a measure of non-uniformity of the non-probabilistic distributions, i.e. to apply it to the distributions of physical quantities directly, without their statistical interpretation.

орную форму в ходе испытаний, 3) мы не предполагаем строгого использования термина "мера интенсивностей", то есть эта мера не обязательно должна быть вещественной и нормированной.

Когда используется вероятностная мера, ИП является частным случаем информации Кульбака, которая является мерой различия двух вероятностных распределений, не подразумевая необходимого наличия связи между ними [3-5]. С другой стороны, ИП может применяться к невероятностным мерам. В зависимости от используемого преобразования, в таких случаях ИП может быть соотнесена к классическим мерам информации: когда  $T$  является сдвигом - к информации Фишера  $I_F$ ; когда  $T$  является "мультифрактальным преобразованием" - к обобщенным размерностям (энтропиям) Реньи  $D_q$ ; когда  $T$  является "преобразованием измерения" - к информации Хартли  $I_H$ , информации фон Неймана-Шеннона-Винера  $I_{NSW}$ , или взаимной информации  $I_M$ . Соответствующие НС - по отношению к сдвигу, "мультифрактальному преобразованию", "преобразованию измерения" или перестановкам частиц (или состояний, или событий), см. табл. 3.1. Все эти случаи обсуждаются ниже, но в дополнение к этому демонстрируется возможность использования ИП как меры неоднородности невероятностных распределений, то есть непосредственно применения ее к распределениям физических величин без их статистической интерпретации.

**Table 3.1.** Some information measures, as symmetry breaking measures with respect to the corresponding transforms, and the relating variational principles, where  $I_H$ ,  $I_F$ ,  $I_{NSW}$ ,  $I(\Delta)$  and  $I(q)$  are the Hartley, Fisher, von Neumann-Shannon-Wiener, shift and multifractal informations, respectively,  $D_q$  are the generalized Renyi entropies,  $L(p/x)$  is Fisher likelihood function, EPIP is for Frieden's extreme physical information principle,  $I_{aff}$  is affine information, NKG is for non-linear Klein-Gordon equation, KdV - for Korteweg-de Vries equation,  $\Delta S$  is a change in physical entropy,  $I_{Tr}$  is transform information.

**Таблица 3.1.** Некоторые меры информации, как меры нарушения симметрии по отношению к соответствующим преобразованиям, и соответствующие вариационные принципы, где  $I_H$ ,  $I_F$ ,  $I_{NSW}$ ,  $I(\Delta)$  и  $I(q)$  - информации Хартли, Фишера, фон Неймана-Шеннона-Винера, сдвига и мультифрактальная информация, соответственно,  $D_q$  - обобщенные энтропии Реньи,  $L(p/x)$  - функция подобия Фишера, ПЭФИ - принцип экстремальной физической информации Фридена,  $I_{aff}$  - аффинная информация, НКГ - нелинейное уравнение Клейна-Гордона, КдВ - уравнение Кортвега-де Вриза,  $\Delta S$  - изменение физической энтропии,  $I_{Tr}$  - информация преобразования.

TRANSFORM ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	INTENSITY MEASURE/МЕРА ИНТЕНСИВНОСТИ		
	probability вероятность	real вещественная	complex комплексная
rearrangements перестановки	$I_H, I_{NSW}$		
shift сдвиг	$I_F, I(\Delta)$ , EPIP, NKG, ПЭФИ, НКГ	$I(\Delta)$ , KdV КдВ	$I(\Delta)$ , NKG, $I_{aff}$ , action invariance инвариантность действия
multifractal мультифрактальное	$I(q), D_q$	$I(q)$	
inverse measurement transform обратное преобразова- ние измерения	$I_{NSW}, I_H$ , Jaynes' principle принцип Джейн- са	$\Delta S \propto I_{Tr}$ by intensive vari- ables по интенсивным переменным	
direct measurement transform прямое преобразова- ние измерения	$L(p/x)$ , Fisher's principle принцип Фишера	$\Delta S \propto I_{Tr}$ by extensive vari- ables по экстенсив- ным перемен- ным	

From the definition of TI (3.1) it is immediately seen that if even the measure  $\mu$  (discrete or continuous) is not uniform, but invariant under some transform  $T$ , the respective TI is zero, and its variance from zero must reflect the extent of SB with respect to the transform  $T$  in the system described by the measure  $\mu$ . This remains valid also for all the classical information measures to which TI reduces in the respective cases. Using this correspondence we can ascribe to respective informations a sense due to the IGT used to build up TI and reveal respective SB. Thus the problem of the sense of one or another information measure can be resolved from the unique view point of SB.

It is necessary to point out that the modern literature on the self-organization theory virtually is impregnated with the ideas of SB and information theory, [6-11] to number a few, but the existence of immediate relation between the information measures and SB was not emphasized. (But it should be pointed out that there are many transparent hints in the literature, especially in [8-10,12].) By the use of TI this connection is directly revealed. The proposed approach to the definition of the information sense corresponds to the idea that the sense can be ascribed to the information only due to the response of the system to an external effects [9] owing to which the system is subject to the optional constraints

Из определения ИП (3.1) непосредственно видно, что, если даже мера  $\mu$  (дискретная или непрерывная) неоднородна, но инвариантна при некотором преобразовании  $T$ , соответствующая ИП равна нулю, и ее отличие от нуля должно отражать степень НС по отношению к этому преобразованию  $T$  в системе, описываемой мерой  $\mu$ . Это остается верным так же для всех классических мер информации, к которым сводится ИП в соответствующих случаях. Используя это соответствие, мы можем приписывать соответствующим информациям смысл в силу ИП, использованного для построения ИП, и выявляющего соответствующую НС. Таким образом, проблема смысла той или иной информационной меры может быть разрешена с единой точки зрения НС.

Необходимо подчеркнуть, что современная литература по теории самоорганизации буквально пропитана идеями НС и теории информации, [6-11] и многие другие, но существование непосредственной связи между мерами информации и НС не было выявлено. (Но необходимо подчеркнуть, что имеется много прозрачных намеков в литературе, особенно в [8-10,12].) С использованием ИП эта связь выявляется непосредственно. Предлагаемый подход к определению смысла информации соответствует идее, что смысл может быть приписан информации только с учетом ответа системы на внешние воздействия [9], благодаря которым система подвергается дополнительным ограничениям и изменяет свое состояние.

and changes its state.

It is somewhat more difficult to enlighten from the view point of TI the value aspect (that is a more specific feature) of information, however, from the most general view point it may be put that the information is not of any value if only one its quantity is used to build up the mathematical description of the system (zero, extreme, etc. quantity). If all possible quantities of information are used then information is of value which is equal to some its characteristic quantity like it was proposed by Kharkevich [13].

We could discuss in more details all aspects of information concept, if all fundamental acts of information processing would be reflected in formal definition of quantitative information measure. But in the TI form (3.1) only one fundamental act of comparison is formally reflected (to some extent).

Thus, on the one hand, we are restricted in our discussion of the information aspects, on the other hand, we seem to be able to reveal the most objective information properties, since comparison is a main feature of all processes of information «treatment.»

Несколько труднее осветить с точки зрения ИП ценностный аспект (который является более специфической особенностью) информации, однако, с самой общей точки зрения, можно положить, что информация не имеет никакой ценности, если только одна ее величина используется для построения математического описания системы (нулевое, экстремальное, и т.д. значение). Если используются все возможные значения информации, то ценность информации равна некоторой ее характерной величине, подобно тому, как это было предложено Харкевичем [13].

Мы могли бы более детально обсудить все аспекты понятия информации, если бы все фундаментальные акты обработки информации были отражены в формальном определении количественной меры информации. Но в форме ИП (3.1) формально отражен (до некоторой степени) только один фундаментальный акт сравнения.

Таким образом, с одной стороны, мы ограничены в нашем рассмотрении аспектов информации, с другой стороны, по-видимому, мы имеем возможность выявить наиболее объективные свойства информации, т.к. сравнение является наиболее важной особенностью всех процессов обработки информации.

## References

1. Кас М. *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (New York, Interscience, 1959).
2. Kolmogorov A.N. *The Basic Concepts of Probability Theory* (Moscow, Nauka, 1974) [in Russian]. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей*. М.:Наука, 1974.

## Литература

3. Kullback S., Leibler R.A. *On information and sufficiency*. Ann.Math.Statist. 1951, **22**, 79-86.
4. Kullback S. *Information Theory and Statistics* (New York Willey, London Chapman & Hall, 1959).
5. Stratanovich R.L. *Information Theory* (Moscow, Sov.Radio, 1975) [in Russian]. Стратанович Р.Л. *Теория информации*. М.:Сов.радио, 1975.
6. Prigogine I. *From Being to Becoming. Time and Complexity in the Physical Sciences* (San Francisco, Freeman, 1980). Пригожин И. *От существующего к возникающему. Время и сложность в физических науках*. М.:Наука, 1985.
7. Prigogine I., Stengers I. *Order out of Chaos. Man's New Dialog with Nature* (London, Heinemann, 1984). Пригожин И., Стенгерс И. *Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой*. М.: Прогресс, 1986.
8. Nicolis J.S. *Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach* (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1986). Николис Дж. *Динамика иерархических систем. Эволюционное представление*. М.:Мир, 1989.
9. Haken H. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Berlin, etc.,Springer-Verlag,1988). Хакен Г. *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам*. М.:Мир, 1991.
- 10.Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity. An Introduction* (New York, Freeman, 1989). Николис Г., Пригожин И. *Познание сложного. Введение*. М.:Мир, 1990.
- 11.Prigogine I., Stengers I. *Time, Chaos, Quantum* (Moscow, Progress, 1994) [in Russian]. Пригожин И., Стенгерс И. *Время, хаос, квант*. М.:Прогресс, 1994.
- 12.Brillouin L., *Scientific Uncertainty and Information* (New York - London, Academic Press,1964). Бриллюэн Л. *Научная неопределенность и информация*. М.:Мир, 1966.
- 13.Kharkevich A.A. *Information theory. Image recognition* (Moscow, Nauka, 1973) [in Russian]. Харкевич А.А. *Теория информации. Опознавание образов*. М.:Наука, 1973.

#### 4. Direct and inverse measurement transform informations

Many theoretical models in probability theory and, consequently, in statistical physics, conventional information theory and other sciences using the probability theory, consider the transitions of the systems under study from one state to another, the states being described by different probability distributions (measures). In this chapter we demonstrate the use of TI for the description of changes of distributed quantities on the base of considerations of appropriate symbolic transforms mentioned in Chapter 3. We call this transform *a measurement transform* because very often the theoretical models are to describe the measurement, real or gedanken, or the evolution of the system due to some external effects that can be also regarded as a measurement procedure from a general view point, e.g. the quantum mechanical theory of measurement process. More specifically, we consider here the simplest cases when some system with discrete support set (set of states) can be described by a priori discrete probability distribution  $\{p_k\}$  (i.e. our "opinion" about the system "at first glance") which transforms after the measurements (trials, observations, etc.) into distribution  $\{p'_k\}$  that we call here *a direct measurement transform* (DMT). Its inverse (symbolic) transform is called respectively *an inverse measurement*

#### 4. Прямая и обратная информации преобразования измерения

Многие теоретические модели теории вероятностей и, следовательно, в статистической физике, традиционной теории информации и других науках, использующих теорию вероятностей, рассматривают переходы исследуемых систем из одного состояния в другое, причем состояния описываются различными вероятностными распределениями (мерами). В этой главе мы демонстрируем использование ИП для описания изменений распределенных величин на основе рассмотрения подходящих символических преобразований, упомянутых в главе 3. Мы называем такое преобразование *преобразованием измерения*, потому что очень часто теоретические модели призваны описывать измерения, реальные или мысленные, или эволюцию системы под действием некоторых внешних воздействий, что с общей точки зрения также можно рассматривать как процедуру измерения, как, например, в квантово-механической теории процесса измерения. Конкретно, мы рассматриваем здесь простейшие случаи, когда система с дискретным базовым множеством (набором состояний) может быть описана априори дискретным вероятностным распределением  $\{p_k\}$  (нашим "мнением" о системе "на первый взгляд"), которое трансформируется после измерений (испытаний, наблюдений и т.д.) в распределение  $\{p'_k\}$ , что мы называем здесь *прямым преобразованием измерения* (ППИ). Обратное к нему (символическое) преобра-

*transform* (IMT). The corresponding TI's are the *direct measurement transform information* (DMTI) :

$$I_{dir} = \sum_k p_k \ln(p_k/p'_k), \quad (4.0.1)$$

and *inverse measurement transform information* (IMTI) :

$$I_{inv} = \sum_k p'_k \ln(p'_k/p_k). \quad (4.0.2)$$

Their interpretations as SB measures are specific to the systems investigated. They both have the form and all the properties of Kullback information [1,2].

#### 4.1. IMTI and Hartley information

Consider some system subject to the trials with  $N$  possible a priori outcomes.  $N$  can be known for the given class of systems from earlier observations or can be taken due to reasonable assumptions. Before the trials we have to ascribe to all outcomes equal probabilities  $p_k=1/N$ ,  $k=1, \dots, N$ . That is we first describe the system by uniform a priori measure corresponding to the maximum disorder or complete symmetry of outcomes. Let then in the course of rather rough trials we see that there can be released only  $M < N$  outcomes. If it is all we need then we can describe our system by the non-uniform measure  $\{p'_k=1/M, k=1, \dots, M, p'_k=0, M < k \leq N\}$  (after appropriate re-numeration, may be). I.e. we divide the set of possible outcomes into two incompatible groups and our "opinion" about the system's measure transforms:  $\{p_k\} \rightarrow \{p'_k\}$ . The corresponding IMTI reads :

зование называется *обратным преобразованием измерения* (ОПИ). Соответствующими ИП являются *информация прямого преобразования измерения* (ИППИ):

$$I_{dir} = \sum_k p_k \ln(p_k/p'_k), \quad (4.0.1)$$

и *информация обратного преобразования измерения* (ИОПИ):

$$I_{inv} = \sum_k p'_k \ln(p'_k/p_k). \quad (4.0.2)$$

Их интерпретации как мер НС зависят от систем, к которым они применяются. Обе эти информации имеют форму и все свойства информации Кульбака [1,2].

#### 4.1. ИОПИ и информация Хартли

Рассмотрим некоторую систему, над которой проводятся испытания (наблюдения) с  $N$  априори возможными исходами.  $N$  может быть известным для данного класса систем из более ранних наблюдений или взято на основе разумных предположений. До проведения испытаний нам приходится приписывать всем исходам равные вероятности  $p_k=1/N$ ,  $k=1, \dots, N$ . То есть, мы сначала описываем систему однородным априорным распределением, соответствующим максимальному беспорядку или полной симметрии исходов. Пусть затем в ходе предварительных испытаний мы видим, что реализуются только  $M < N$  исходов. Если это все, что нам нужно, то мы можем описывать нашу систему однородной мерой  $\{p'_k=1/M, k=1, \dots, M, p'_k=0, M < k \leq N\}$  (после подходящей перенумерации, может быть). То есть, мы разделили множество возможных исходов на две различные группы, и наше "мнение" о мере системы преобразуется:  $\{p_k\} \rightarrow \{p'_k\}$ . Соответствующая

ИОПИ будет иметь вид:

$$I_{inv} = \sum_{k=1}^N p'_k \ln(p'_k/p_k) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} \ln\left(\frac{1/M}{1/N}\right) = \ln\left(\frac{N}{M}\right) = \ln \frac{1}{M} - \ln \frac{1}{N} = I_H, \quad (4.1.1)$$

that is exactly the formula of Hartley information  $I_H$ , [3-8] and many others. (We assume in eq.(4.1.1) to be  $0 \cdot \ln(0)=0$  in the sense  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)=0$ , as is easy to show.) This can be easily modified for the case of continuous "outcomes".

Many authors in considering similar problems even do not mention that this form of information was first introduced by Hartley.  $I_H$  is traditionally interpreted in the way [5,6] that, if in initial state there are  $N$  equiprobable outcomes, then the gain of information  $I_H$  decreases this number to  $M$ . In our consideration  $I_H$  becomes an SB measure which indicates that not all the initially expected outcomes are possible, making no difference between the possible outcomes, see Fig.4.1.

что в точности совпадает с формулой информации Хартли  $I_H$ , [3-8] и многие другие. (Мы предполагали в ур. (4.1.1), что  $0 \cdot \ln(0)=0$  в смысле предела  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)=0$ , что легко показать.) Эта формула легко может быть модифицирована на случай непрерывного множества "исходов".

Многие авторы при рассмотрении подобных проблем даже не упоминают, что та форма информации была впервые введена Хартли.  $I_H$  традиционно интерпретируется таким образом [5,6], что если в начальном состоянии имеются  $N$  равновероятных исходов, то извлечение количества информации  $I_H$  уменьшает это число до  $M$ . В нашем рассмотрении  $I_H$  становится мерой НС, которая показывает, что не все изначально ожидаемые исходы возможны, не делая различия между возможными исходами, см. рис. 4.1.

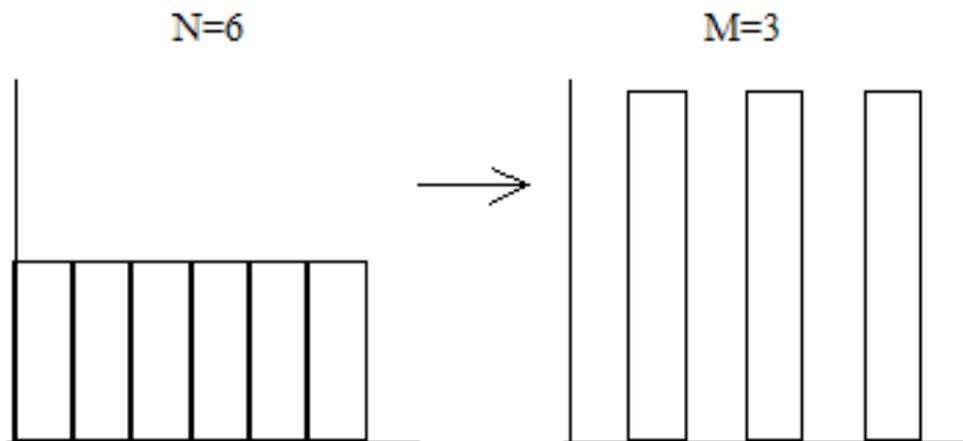


Fig.4.1. SB of trial outcomes characterized by Hartley information.

Рис.4.1. НС исходов испытаний, характеризуемая информацией Хартли.

## 4.2. IMTI and von Neumann-Shannon-Wiener information

Consider now a more subtle investigation of the system with  $N$  possible outcomes of trials. To be concrete, let the system be some receiver of messages transmitted by  $N$  discrete symbols and each trial indicates what symbol is received. Before observations we have to consider all symbols equally probable, so our a priori measure characterizing the system is uniform  $\{p_k=1/N, k=1, \dots, N\}$ . I.e. there is no knowledge about SB among the symbols, but we can suspect it. Instead of simple registration of whether some concrete symbol is received, we can evaluate the relative frequencies of appearance of different symbols (during long enough time)  $\{p'_k, k=1, \dots, N\}$  to take the set of them as a new measure describing the system on the base of Fisher's maximum likelihood principle, see Sec. 4.4. The corresponding IMTI is :

$$I_{\text{inv}} = \sum_{k=1}^N p'_k \ln(p'_k/p_k) = \sum_{k=1}^N p'_k \ln(Np'_k) = \ln(N) + \sum_{k=1}^N p'_k \ln(p'_k) = \ln(N) - I_{NSW}, \quad (4.2.1)$$

where  $I_{NSW}$  is a conventional von Neumann-Shannon-Wiener information [4-9], which in this case generalizes the form of Hartley information (4.1.1). Eq.(4.2.1) shows direct relation between IMTI and  $I_{NSW}$  and they both can be considered as indicators of the fact that not all the symbols (outcomes) are equally probable (SB), see Fig.4.2.

## 4.2. ИОПИ и информация фон Неймана-Шеннона-Винера

Рассмотрим теперь более тонкое исследование системы с  $N$  возможными исходами испытаний. Для конкретности, пусть системой будет некоторый приемник сообщений, передаваемых с помощью  $N$  дискретных символов, и каждое испытание показывает, какой символ принят. До наблюдений мы должны рассматривать все символы как равновероятные, так что наша априорная мера, характеризующая систему, является однородной  $\{p_k=1/N, k=1, \dots, N\}$ . То есть, нет никаких сведений об НС среди символов, но мы можем подозревать ее присутствие. Вместо того, чтобы просто регистрировать, какой конкретный символ получен, мы можем оценить относительные частоты получения различных символов (в течении достаточно продолжительного времени наблюдений)  $\{p'_k, k=1, \dots, N\}$ , чтобы взять множество этих частот, как новую меру, описывающую систему на основе принципа максимального подобия Фишера, см. п.4.4. Соответствующая ИОПИ имеет вид:

где  $I_{NSW}$  является обычное информацией фон Неймана-Шеннона-Винера [4-9], которая в данном случае обобщает форму информации Хартли (4.1.1). Ур. (4.2.1) показывает непосредственное соотношение между ИОПИ и  $I_{NSW}$ . Они обе могут рассматриваться как индикаторы того факта, что не все символы (исходы) равновероятны (НС), см. рис.4.2.

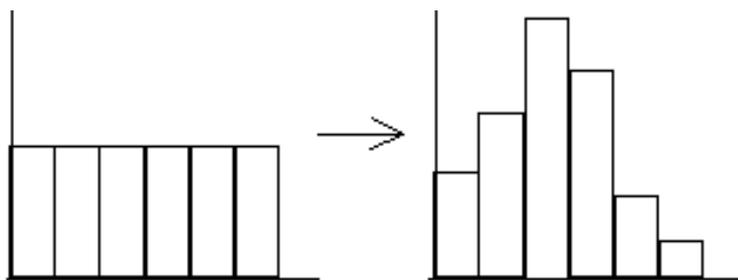


Fig.4.2. SB of trial outcomes characterized by von Neumann-Shannon-Wiener information.

Рис.4.2. НС исходов испытаний, характеризующая информацией фон Неймана-Шеннона-Винера.

As  $\ln(N)$  is a maximum possible value of  $I_{NSW}$ , we can rewrite eq.(4.2.1) in the form of general measure of non-uniformity of discrete probability distribution  $\{p_k, k=1, \dots, N\}$

$$I_{inv} = \sum_{k=1}^N p_k \ln(Np_k) = I_{NSW}^{\max} - I_{NSW}. \quad (4.2.2)$$

Поскольку  $\ln(N)$  является максимальным возможным значением  $I_{NSW}$ , мы можем переписать ур. (4.2.1) в форме общей меры неоднородности дискретного вероятностного распределения  $\{p_k, k=1, \dots, N\}$

### 4.3. Mutual information

Let we have two non-interacting systems, each having its own discrete space state  $\{\alpha\}, \{\beta\}$ , characterized by the measures  $\{p_\alpha\}, \{p_\beta\}$ , respectively. Putting the systems into interaction, we have to describe the "combined" system by the joint measure  $\{p_{\alpha\beta}\}$  characterizing the joint state space  $\{\alpha\beta\}$ . I.e. the initial measure of the non-interacting systems transforms into the joint measure:  $\{p_\alpha p_\beta\} \rightarrow \{p_{\alpha\beta}\}$ , or  $p_{\alpha\beta} = T(p_\alpha p_\beta)$ . Then the inverse transform information by definition coincides with mutual information by definition [9,10]:

$$I_{inv} = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} \ln(p_{\alpha\beta} / T^{-1} p_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} \ln(p_{\alpha\beta} / (p_\alpha p_\beta)) = I_M. \quad (4.3.1)$$

We will use these definition and interpretation of mutual information for derivation of non-linear

### 4.3. Взаимная информация

Пусть имеются две невзаимодействующие системы, каждая со своим дискретным пространством состояний  $\{\alpha\}, \{\beta\}$ , характеризующихся мерами  $\{p_\alpha\}, \{p_\beta\}$ , соответственно. Приводя системы во взаимодействие, мы должны описывать объединенную систему совместной мерой  $\{p_{\alpha\beta}\}$ , характеризующей совместное пространство состояний  $\{\alpha\beta\}$ . То есть, начальная мера невзаимодействующих систем преобразуется в совместную меру:  $\{p_\alpha p_\beta\} \rightarrow \{p_{\alpha\beta}\}$ , или  $p_{\alpha\beta} = T(p_\alpha p_\beta)$ . Тогда информация обратного преобразования по определению совпадает со взаимной информацией по определению [9,10]:

Мы используем это определение и интерпретацию взаимной информации для вывода нелинейного уравне-

Schroedinger equation in the next Chapter.

ния Шредингера в следующей главе.

#### 4.4. Jaynes' and Fisher's variational principles in terms of DMTI and IMTI

As was shown in refs.[11-14,8], Jaynes' principle of maximum information entropy (uncertainty) taken in the form of  $I_{NSW}$ , subject to the constraints reflecting the knowledge of average quantities can be regarded as the base for the derivation of the specific statistical measure of one or another system under consideration  $\{p_k, k=1, \dots, M\}$  - the distribution of subjective probability over the (discrete) state space  $\{k\}$ . Operationally, it is the Lagrangian problem:

$$-\sum_k p_k \ln p_k - \lambda \sum_k p_k - \sum_i \beta_i \sum_k p_k f_k^i = \text{extremum} . \quad (4.4.1)$$

Here  $\{p_k\}$  is a probability distribution over the state space of the system,  $I_{NSW} = -\sum_k p_k \ln p_k$  is the uncertainty. The second and third terms represent the constraints (the normalized distribution, given coordinates, kinetic energy, correlations, etc. with average values  $\langle f_k^i \rangle = \sum_k p_k f_k^i$ ),  $\lambda, \beta_i$  are the indefinite Lagrange multipliers.

From a general view point, as this principle provides the correct results and allows to avoid the additional hypothesis's of ergodicity, a priori uniform distribution etc., the uncertainty in the form of  $I_{NSW}$  can be considered as a concept more fundamental than even the energy, as Jaynes proposed it [11], but it is not enough to identify  $I_{NSW}$  with a *physical* entropy. Virtually, thermo-

#### 4.4. Вариационные принципы Джейнса и Фишера в терминах ИППИ и ИОПИ

Как было показано в работах [11-14,8], принцип Джейнса максимума информационной энтропии (неопределенности) в форме  $I_{NSW}$  при ограничениях, отражающих знание средних величин, может быть основой вывода частной статистической меры той или иной исследуемой системы  $p_k, k=1, \dots, M\}$  - распределения субъективной вероятности на (дискретном) пространстве состояний  $\{k\}$ . Этот принцип формулируется в виде лагранжевой задачи:

Здесь  $\{p_k\}$  - распределение вероятностей по пространству состояний системы,  $I_{NSW} = -\sum_k p_k \ln p_k$  - неопределенность. Второй и третий члены представляют ограничения (нормированное распределение, данные координаты, кинетическая энергия, корреляции и т.д. со средними значениями  $\langle f_k^i \rangle = \sum_k p_k f_k^i$ ),  $\lambda, \beta_i$  - неопределенные множители Лагранжа.

С общей точки зрения, поскольку этот принцип дает правильные результаты и позволяет избежать дополнительных гипотез эргодичности, однородного априорного распределения и т.п., неопределенность в форме  $I_{NSW}$  может рассматриваться как понятие, более фундаментальное чем даже энергия, как это предложил Джейнс [11], но этого недостаточно для отождествления  $I_{NSW}$  с *физической* энтропией. На самом

dynamics always deals with the entropy increments rather than with the absolute entropy [15]. We brush against this problem in the next section. Here we only give interpretation of this principle in terms of IMTI.

In the particular case when the system is described by the probability measure subject to the only constraint of being normalized without the additional constraints on any average values, Jaynes' principle results in the uniform distribution  $\{p_k = 1/M = \text{const}\}$  and the uncertainty has its maximum value  $\ln(M)$ . An introduction of the constraints on the average values results in the non-uniform distribution  $\{p_k\}$ :

$$p_k = \exp(-\sum_i \beta_i f_k^i) / \sum_k \exp(-\sum_i \beta_i f_k^i). \quad (4.4.2)$$

This can be interpreted as SB among the states due to the additional constraints imposed.

If we would observe this system randomly many times during long enough period of time, we would find it in the states  $k$  with relative frequencies  $p_k$  instead of equal frequencies  $1/M$  for the constraints are absent. The similar case we have considered in the interpretation of von Neumann-Shannon-Wiener information in terms of IMTI. In this case IMTI takes a form

$$\sum_k p_k \ln(M p_k) \quad (4.4.3)$$

which can be used in the formulation of Jaynes' principle instead of uncertainty in the form of  $I_{NSW}$ . I.e. we can rewrite Jaynes' principle in the equivalent form :

деле термодинамика имеет дело сращениями энтропии, а не с самой энтропией [15]. Мы коснемся этой проблемы в следующем разделе. Здесь мы только даем интерпретацию принципа Джейнса в терминах ИОПИ.

В частном случае, когда система описывается вероятностной мерой при единственном ограничении, чтобы мера была нормирована, без дополнительных ограничений на какие-либо средние величины, принцип Джейнса приводит к однородному распределению  $\{p_k = 1/M = \text{const}\}$ , когда неопределенность имеет свое максимальное значение  $\ln(M)$ . Введение ограничений на средние величины приводит к неоднородному распределению  $\{p_k\}$ :

Это может быть интерпретировано как НС среди состояний, обусловленная дополнительно наложенными ограничениями.

Если бы мы проводили много наблюдений за этой системой в течение достаточно продолжительного периода времени, то обнаруживали бы систему в состояниях  $k$  с относительными частотами  $p_k$  вместо равных частот  $1/M$ , как в случае отсутствия ограничений. Похожий случай мы рассмотрели при интерпретации информации фон Неймана-Шеннона-Винера через ИОПИ. В данном случае ИОПИ принимает форму

которая может быть использован при формулировании принципа Джейнса вместо неопределенности в форме  $I_{NSW}$ . То есть, мы можем переписать принцип Джейнса в эквивалентном виде:

$$\sum_k p_k \ln(M p_k) + \lambda \sum_k p_k + \sum_i \beta_i \sum_k p_k f_k^i = \text{extremum} . \quad (4.4.4)$$

The principles (4.4.1) and (4.4.4) give the same results, but the latter reflects explicitly the role of the constraints on the average values  $\langle f_k^i \rangle$  which are responsible for the SB's. When additional constraints on average values are imposed the system measure  $\{p_k\}$  becomes non-uniform. This can be interpreted as SB with respect to the rearrangements of states (or particle groups, see next). The system remains invariant under any rearrangement of the particles only in the same state. We see that sense of the same uncertainty form  $I_{NSW}$  may change.

The Fisher's maximum likelihood principle is formulated as follows [14,16]. If we have carried out an experiment (trials) with  $M$  possible outcomes and obtained for  $k=1, \dots, M$ ,  $x_k$  times each outcome,  $\sum_k x_k = n$ , then the probabilities (measures) of the outcomes can be determined as a solution to a variational problem :

$$-\log L(x/p) + \lambda \sum_k p_k = \text{extremum}, \quad (4.4.5)$$

where  $L(x/p) = \prod_k (p_k)^{x_k}$  is a Fisher's likelihood function. The variation and subsequent normalization result in  $\{p_k = x_k/n\}$ . One can obtain the same result using an information of direct measurement transform  $(x_k/n) \rightarrow p_k$ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{x_k}{n} \ln \left( \frac{x_k/n}{p_k} \right) + \lambda \sum_k p_k = \text{extremum}, \quad (4.4.6)$$

where the first left hand term can be directly obtained from  $-L(x/p)$  with additional terms independent of  $p_k$ 's, and then not influencing the solution.

The problem (4.4.6) is trivial

Принципы (4.4.1) и (4.4.4) дают одни и те же результаты, но последний в явном виде отражает роль ограничений на средние величины  $\langle f_k^i \rangle$ , ответственных за НС. Когда на систему накладываются дополнительные ограничения на средние величины, мера системы  $\{p_k\}$  становится неоднородной. Это может быть интерпретировано как НС по отношению к перестановкам состояний (или групп частиц, см. ниже). Система остается инвариантной при любой перестановке частиц только внутри группы частиц в одном состоянии. Мы видим, что смысл одной и той же формы  $I_{NSW}$  может меняться.

Принцип максимального подобия Фишера формулируется следующим образом [14,16]. Если мы провели эксперимент (испытания) с  $M$  возможными исходами и получили для  $k=1, \dots, M$ ,  $x_k$  раз каждый исход,  $\sum_k x_k = n$ , то вероятности (меры) исходов могут быть определены как решение вариационной задачи:

где  $L(x/p) = \prod_k (p_k)^{x_k}$  есть функция подобия Фишера. Вариация и последующая нормировка дают  $\{p_k = x_k/n\}$ . Тот же результат можно получить, используя информацию прямого преобразования измерения  $(x_k/n) \rightarrow p_k$ :

где первый член в левой части может быть непосредственно получен из  $-L(x/p)$  добавлением слагаемых, не зависящих от мер  $p_k$ , и потому не влияющих на результат решения.

Задача (4.4.6) является тривиаль-

and is not of practical interest (meantime, in Sec. 4.2, when considering  $I_{NSW}$ , we have used Fisher's principle implicitly to select a new measure of the system after the trials), but we describe it here to show the coordination of DMTI and IMTI with other general concepts. For example, Jaynes' and Fisher's principles correspond to two different interpretations of a probability concept.

The Jaynes' principle corresponds to a subjective interpretation when probability is to express an absence of knowledge and to evaluate the possibility of one or another event. The form (4.4.4) of this principle using the information of (symbolic) transform  $\{p_k\} \rightarrow \{1/M\}$ , which is inverse to the transform of a priori "equi-distribution"  $\{1/M\}$  into the distribution  $\{p_k\}$  which is to be found, reflects the subjective interpretation of probability.

The Fisher's maximum likelihood principle corresponds to an objective interpretation when probability is considered to be an intrinsic property of every event in the sense of frequency of appearing. In the proposed interpretation of this principle the use of information of direct measurement transform  $\{x_k/n\} \rightarrow \{p_k\}$  of the registered frequency of outcomes into their measure corresponds to the objective interpretation. DMTI makes the form of Fisher's principle trivial. In such an approach an influence of additional constraints like  $\langle f_k^i \rangle$  in Jaynes' principle is automatically

ной и не представляет практического интереса (в то время как при рассмотрении  $I_{NSW}$  в разделе 4.2 мы неявно использовали принцип Фишера при выборе новой меры системы после испытаний), но мы приводим эту формулировку, чтобы показать соответствие между ИОПИ и ИППИ, и другими общими концепциями. Например, принципы Джейнса и Фишера соответствуют двум разным интерпретациям понятия вероятности.

Принцип Джейнса соответствует субъективной интерпретации, когда вероятность должна выражать отсутствие сведений и оценивать возможность того или иного события. Форма (4.4.4) этого принципа, использующая информацию (символического) преобразования  $\{p_k\} \rightarrow \{1/M\}$ , являющегося обратным по отношению к преобразованию априорного "равнораспределения"  $\{1/M\}$  в распределение  $\{p_k\}$ , которое нужно найти, отражает субъективную интерпретацию вероятности.

Принцип максимального подобия Фишера соответствует объективной интерпретации, когда вероятность рассматривается как внутренне присущее свойство самого события в смысле частоты появления. В предложенной интерпретации этого принципа использование информации прямого преобразования измерения регистрируемой частоты исходов в их меру согласовывается с объективной интерпретацией. ИППИ делает форму принципа Фишера тривиальной. При таком подходе влияние дополнительных ограничений типа  $\langle f_k^i \rangle$  в принципе Джейнса принимается в расчет автоматически в ходе испытаний при регист-

taken into account by the very course of trials by registration of the actual numbers of outcomes. But we see that the Jaynes' principle provides more opportunities for theoretical considerations.

Thus both principles above reflect the appearance of non-uniformity (SB) of distribution characterizing the system under study, that is why they both can be interpreted on the base of transform information.

#### **4.5. Statistical interpretation of physical entropy, von Neumann-Shannon-Wiener and Hartley informations, and IMTI**

As a rule, in discussing the particular problems in statistical physics, the authors often identify the uncertainty in the form of von Neumann-Shannon-Wiener information with physical entropy. In many applications such an identification does not influence the final results, but we should always keep in mind that  $I_{NSW}$  is merely a (very valuable and productive but) model quantity obeying the rules of entropy. Here we try to show that there is no identity of these two quantities.

The base of the consideration is a statistical interpretation of physical entropy by Boltzmann :

рации фактических чисел исходов. Но мы видим, что принцип Джейнса предоставляет больше возможностей для теоретических построений.

Таким образом, оба принципа, описанные выше, отражают неоднородность (НС) распределения, характеризующего рассматриваемую систему, и поэтому они оба могут быть интерпретированы в терминах информации преобразования.

#### **4.5. Статистическая интерпретация физической энтропии, информации фон Неймана-Шеннона-Винера и Хартли, и ИОПИ**

Как правило, при обсуждении частных проблем статистической физики авторы часто отождествляют неопределенность в форме информации фон Неймана-Шеннона-Винера с физической энтропией. Во многих приложениях такое отождествление не влияет на окончательные результаты, но нам необходимо всегда иметь в виду, что  $I_{NSW}$  является всего лишь (очень ценной и продуктивной но) модельной величиной, удовлетворяющей законам энтропии. Здесь мы пытаемся показать, что эти величины не тождественны.

Основой нашего рассмотрения является статистическая интерпретация физической энтропии по Больцману:

$$S = k_B \ln W, \quad (4.5.1)$$

where  $W$  is a number of the so called complexions, i.e. the number of ways the given macroscopic state can be realized,  $k_B$  is the Boltzmann

где  $W$  - число так называемых комплексий, т.е. число способов, которыми данное макроскопическое состояние может быть реализовано,  $k_B$  - кон-

constant.

Let our system consists of  $N$  weakly interacting particles that can be rearranged in  $W_1=N!$  ways that is the complexion number. Let then the particles become distributed over  $M$  different states ("boxes", parts of the system, groups of particles) by  $N_k$  particles in each state due to the change of external conditions that may be the decrease in temperature, imposing of external field, or whatever else. This means that the initial complexion number of the system of  $N$  "combined" particles  $W_1=N!$  or, speaking alternatively, the number of rearrangements of the particles not affecting the properties of the system, changes and becomes equal to the product of rearrangement numbers of the particles "inside" the particle groups  $W_2=\prod_k N_k!$ . I.e. the system of particles becomes invariant with respect to not all the possible rearrangements, but only to the rearrangements inside each particle group (SB). The change in entropy is, respectively,

$$\begin{aligned} \Delta S=S_1-S_2 &= k_B(\ln W_1-\ln W_2)=k_B(\ln(N!)-\sum_k \ln(N_k!))= \\ &= k_B \ln(N!/\prod_k N_k!)=S_1-\sum_k S_k^k. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Now we can reduce the formula for  $\Delta S$ , in the limit of very large  $N_k$ 's and  $N$ , using the Stirling approximation  $N!=(N/e)^N \sqrt{2\pi N}$ , throwing away the smaller terms, to the form

$$\Delta S = k_B N I_{NSW} = -N k_B \sum_k p_k \ln(p_k), \quad (4.5.3)$$

where  $p_k=N_k/N$  are the "probabilities" to find the arbitrary chosen particle in the  $k$ -th state (group). We see that entropy in Boltzmann interpretation changes from  $S_1=k_B \ln(W_1)$  to  $S_2=k_B \ln(W_2)$  and the value of this

станта Больцмана.

Пусть наша система состоит из  $N$  слабо взаимодействующих частиц, которые могут быть расставлены  $W_1=N!$  способами, что и является числом комплексий. Пусть далее частицы распределяются по  $M$  различным состояниям ("ящикам", частям системы, группам частиц) по  $N_k$  частиц в каждом состоянии в силу изменения внешних условий, например, уменьшения температуры, наложения внешних полей, или чего-либо еще. Это означает, что начальное число комплексий системы из  $N$  "объединенных" частиц, или говоря по-другому, числа перестановок частиц, не влияющих на свойства системы, изменяется и становится равным произведению чисел перестановок частиц "внутри" групп частиц  $W_2=\prod_k N_k!$ . Т.е. система частиц становится инвариантной по отношению не ко всем возможным перестановкам, а только к перестановкам внутри каждой группы частиц (НС). Изменение энтропии, соответственно, равно

Теперь мы можем свести формулу для  $\Delta S$  в пределе очень больших чисел  $N_k$  и  $N$ , используя аппроксимацию Стирлинга  $N!=(N/e)^N \sqrt{2\pi N}$ , отбрасывая малые члены, к виду

где  $p_k=N_k/N$  - "вероятности" найти произвольно выбранную частицу в  $k$ -м состоянии (группе). Мы видим, что энтропия в больцмановской интерпретации изменяется от  $S_1=k_B \ln(W_1)$  до  $S_2=k_B \ln(W_2)$ , величина этого изменения

change by one particle in average is given by  $k_B I_{NSW}$ . Thus in this case the formula of the information entropy  $I_{NSW}$  (uncertainty) displays SB with respect to the transforms of rearrangement group. By the way, Plank tried to interpret the entropy change in this way. He did this also from the view point of invariance of the system under rearrangements of identical particles [17,18].

It can be interpreted also in the sense that all the rearrangements of particles are the microstates that have equal probabilities  $P_1=1/W_1$  and  $P_2=1/W_2$  before and after partition of the particles into the groups, respectively, which are transformed to each other  $P_1 \rightarrow P_2$ . The change in entropy corresponding to this SB is equal to the Hartley information  $I_H = \ln(P_2/P_1)$  having the sense of IMTI. The same sense is to be ascribed to respective  $I_{NSW}$  in eq.(4.5.3). In the well-known formula we find a non-trivial example of  $I_{NSW}$  being merely an approximation of  $I_H$  rather than a more general form of Hartley information. We can say, however, that this is due to the reinterpretation of the ratios of combinatorial numbers in the limit case in terms of relative frequencies, or "probabilities."

на одну частицу в среднем дается формулой  $k_B I_{NSW}$ . Таким образом, в этом случае форма информационной энтропии (неопределенности)  $I_{NSW}$  выражает НС по отношению к преобразованиям группы перестановок. Кстати, этим способом пытался интерпретировать изменения энтропии Планк. Он также делал это с точки зрения инвариантности системы при перестановках идентичных частиц [17,18].

Мы так же можем интерпретировать полученные формулы в том смысле, что перестановки частиц являются микросостояниями, которые имеют равные вероятности  $P_1=1/W_1$  и  $P_2=1/W_2$  до и после разделения частиц на группы, которые трансформируются одна в другую  $P_1 \rightarrow P_2$ . Изменение энтропии, соответствующее этому НС равно информации Хартли  $I_H = \ln(P_2/P_1)$ , имеющей смысл ИОПИ. Тот же смысл должен быть приписан форме  $I_{NSW}$  в ур.(4.5.3). В хорошо известной формуле мы находим нетривиальный пример того, что  $I_{NSW}$  является всего лишь оценкой  $I_H$ , а не более общей формой по отношению к информации Хартли. Однако, мы можем сказать, что это обусловлено реинтерпретацией отношений комбинаторных величин в предельном случае в терминах относительных частот, или "вероятностей".

#### 4.6. Coarsening the measure of phase space

In applications of the statistical theory to different problems it may be useful often to use a more coarse partition of the state space, the transition being completely correct if the coarsened partition is made into the domains of the state space where the internal measure of the system is constant or changes rather weakly. In this case we conserve almost all the information (as a totality of distinctions of the domain measures) about the system states, therefore all the functions of the system measure, some of them being the statistical interpretations of state functions of the system, must not change in the correct transition to the coarsened partition, at least for the equilibrium measure (distribution) [19].

Consider the transition from the partition of the state space into  $N$  domains described by the measure  $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,N}$  to the coarsened partition into  $M < N$  domains described by the measure  $\{P_k\}_{k=1,\dots,M}$ . It is easy to see that the uncertainty measures  $I_{NSW}[\rho]$  and  $I_{NSW}[P]$  do not correspond to each other even in the case of uniform distribution  $\{\rho_i^0=1/N\}$ ,  $\{P_k^0=1/M\}$ , when the external constraints are absent, i.e. when the uncertainties are maximum, since  $I_{NSW}[\rho^0=1/N]=\ln(N)$ , but  $I_{NSW}[P^0=1/M]=\ln(M)$ , although the transition is completely correct. But the uncertainty measures in the forms of IMTI  $I_{Tr}(P \rightarrow P^0)$  and

#### 4.6. Огрубление меры фазового пространства

В приложениях статистической теории к различным проблемам часто бывает полезным использовать более грубое разбиение пространства состояний, при этом переход является полностью корректным, если огрубленное разбиение проводится по областям пространства состояний, где собственная мера системы постоянна или меняется достаточно слабо. В этом случае мы сохраняем почти всю информацию (как совокупность различий мер областей) о состояниях системы, поэтому все функции меры системы, некоторые из которых могут являться статистическими интерпретациями функций состояния системы, не должны изменяться при корректном переходе к огрубленному распределению, по крайней мере для равновесной меры (распределения) [19].

Рассмотрим переход от разделения пространства состояний на  $N$  областей, описываемого мерой  $\{\rho_i\}_{i=1,\dots,N}$ , к огрубленному распределению на  $M < N$  областей, описываемому мерой  $\{P_k\}_{k=1,\dots,M}$ . Легко видеть, что меры неопределенности  $I_{NSW}[\rho]$  и  $I_{NSW}[P]$  не соответствуют друг другу даже в случае однородного распределения  $\{\rho_i^0=1/N\}$ ,  $\{P_k^0=1/M\}$ , когда отсутствуют внешние ограничения, т.е. когда неопределенности максимальны, так как  $I_{NSW}[\rho^0=1/N]=\ln(N)$ , но  $I_{NSW}[P^0=1/M]=\ln(M)$ , хотя переход является полностью корректным. Но меры неопределенности в форме ИОПИ  $I_{Tr}(P \rightarrow P^0)$  и  $I_{Tr}(\rho \rightarrow \rho^0)$  соответствуют друг другу, что очевидно в тривиаль-

$I_{Tr}(\rho \rightarrow \rho^0)$  correspond to each other that is evident in the trivial case of uniform measures  $P=P^0$  and  $\rho=\rho^0$ .

Let the measures be non-uniform, but one can make the completely correct transition  $\{\rho_i\} \rightarrow \{P_k\}$  considering the coarse partition into the domains when  $P_k = \sum_i \rho_{ik} = (N/M)\rho_{ik}$  (the sum over the  $k$ -th "coarse" domain of the minimum size of  $N/M$  "fine" domains where the internal measure is constant  $\rho_i = \rho_{ik} = \text{const}$ ).

ном случае однородных мер  $P=P^0$  и  $\rho=\rho^0$ .

Пусть меры будут неоднородны, но мы можем провести корректный переход  $\{\rho_i\} \rightarrow \{P_k\}$ , рассматривая огрубленное разбиение на области, когда  $P_k = \sum_i \rho_{ik} = (N/M)\rho_{ik}$  (сумма по  $k$ -й "группой" области минимального размера из  $N/M$  "малых" областей, где собственная мера постоянная,  $\rho_i = \rho_{ik} = \text{const}$ ). Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_{Tr}(\rho \rightarrow \rho^0) &= \sum_{i=1}^N \rho_i \ln(\rho_i N) = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N/M} \rho_{ik} \ln(\rho_{ik} N) \\ &= \sum_{k=1}^M P_k \ln((P_k M/N) N) = \sum_{k=1}^M P_k \ln(P_k M) = I_{Tr}(P \rightarrow P^0). \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

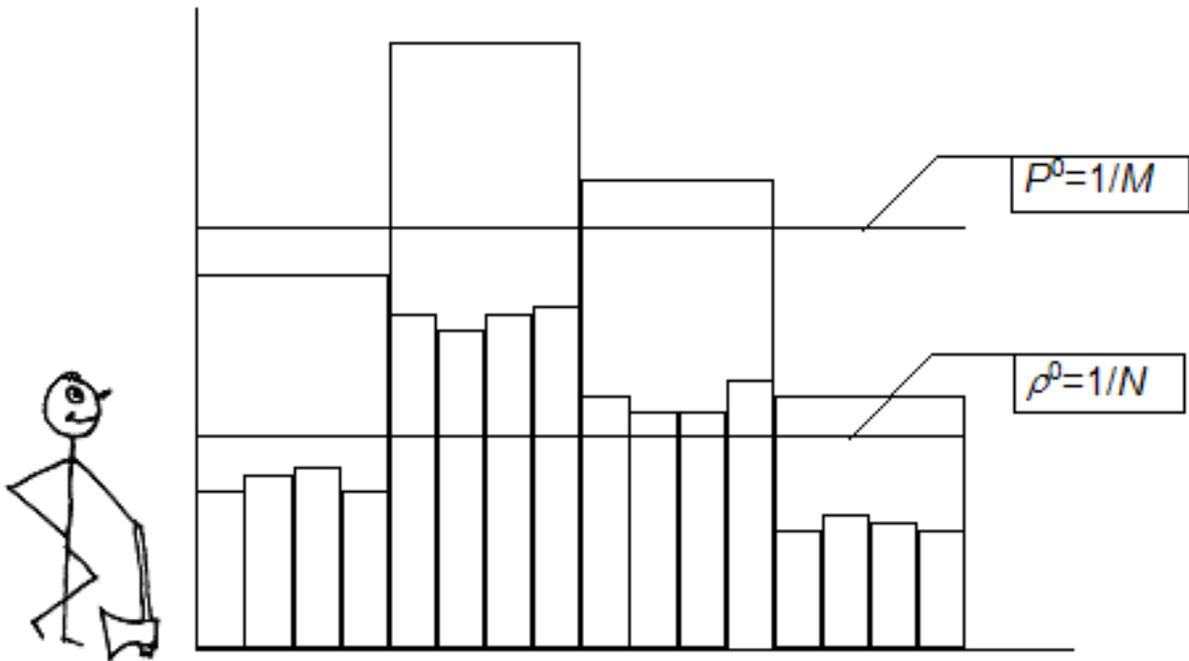


Fig.4.3. Schematic representation of rather correct coarsening of the measure.

Рис.4.3. Схематическое представление вполне корректного огрубления меры.

In a more realistic case, see Fig.4.3, when the equality  $P_k = (N/M)\rho_{ik}$  is not rigorous and  $\rho_{ik}$  are to be replaced by the average values over the  $k$ -th domain, anyway the part of the information about the internal distribution  $\{\rho_i\}$  will be lost,

В более реалистичном случае, см. рис.4.3, когда равенство  $P_k = (N/M)\rho_{ik}$  не является строгим, и  $\rho_{ik}$  должны быть заменены на средние величины по  $k$ -й области, в любом случае часть информации о собственном распределении будет потеряна, но меры

ternal distribution  $\{\rho_i\}$  will be lost, but the measures of uncertainty in the forms of IMTI  $I_{Tr}(P \rightarrow P^0)$  and  $I_{Tr}(\rho \rightarrow \rho^0)$  will be more adequate to each other rather than respective  $I_{NSW}$ 's.

#### 4.7. Gas mixing entropy evaluations

The property (4.6.1) does not depend on the normalization condition (by unity or number of particles), therefore it can be used for the partitions into the domains of arbitrary large size (when the transition can be made rather correctly, of course). After the transition the measure may lose its statistical character and coincide with the distributions of macroscopic parameters over the parts of the system. Since entropy is a function of the measure, in these cases one may use TI to calculate the changes in physical entropy in the transition of the system from one to another equilibrium state. To carry out this procedure the system should be partitioned into the parts which are at equilibrium before and after the matter and energy are redistributed. Several different macroscopic distributions may be necessary to describe the transition, and also their relative "weights" in the overall change of entropy.

In a few words, if we are given the non-statistical measures  $\{p^1_r\}, \{p^2_r\}, \dots$ , normalized by 1, and can ascribe to them their relative values ("weights")  $\mu^1, \mu^2, \dots, \sum \mu^k = 1$ , and these measures are transformed due to some processes into the

неопределенности в форме ИОПИ  $I_{Tr}(P \rightarrow P^0)$  and  $I_{Tr}(\rho \rightarrow \rho^0)$  будут более адекватны друг другу, нежели чем соответствующие  $I_{NSW}$ .

#### 4.7. Оценки энтропии смешения газов

Свойство (4.6.1) не зависит от нормировки меры (на единицу или число частиц), поэтому оно может быть использовано для разбиений на области произвольно большого размера (разумеется при условии, что переход может быть выполнен корректно). После перехода мера может потерять свой статистический характер и совпасть с распределением макроскопических параметров по частям системы. Поскольку энтропия является функцией меры, в этих случаях можно использовать ИП для вычисления изменений физической энтропии при переходе системы из одного равновесного состояния в другое. Для проведения такой процедуры система должна быть разделена на части, которые находятся в равновесии до и после перераспределения вещества и энергии. Для описания перехода могут понадобиться несколько макроскопических распределений, а так же их относительные "веса" в общем изменении энтропии.

В нескольких словах, если мы имеем нестатистические меры  $\{p^1_r\}, \{p^2_r\}, \dots$ , нормированные на 1, и можем приписать им относительные величины ("веса")  $\mu^1, \mu^2, \dots, \sum \mu^k = 1$ , и эти меры трансформируются в силу некоторого процесса в меры  $\{g^1_r\}$ ,

measures  $\{g_r^1\}$ ,  $\{g_r^2\}$ , ..., respectively, with relative "weights"  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$ , ...,  $\sum \lambda^k=1$ , then the change in specific physical entropy (by particle) is a weighted sum of TI's of the measures :

$$\Delta S/k_B = \sum_k (\mu^k \sum_r p_r^k \ln(p_r^k/g_r^k) + \lambda^k \sum_r g_r^k \ln(g_r^k/p_r^k)). \quad (4.7.1)$$

It turns out that a rule is to be followed : The direct transform informations should be calculated by the extensive variables, and the inverse transform informations should be calculated by the intensive variables. Then the weighted sum of the informations gives the entropy change in the system. So, in eq.(4.7.1) the terms with both direct and inverse measurement TI must be included. Not trying to found this rule rigorously, we carry out here the calculations using the results obtained by other methods elsewhere for comparison.

Example 1. Isothermal expansion of a perfect gas.  $N$  gas particles, being initially in a volume  $V_1$  at equilibrium, expand at constant temperature to a volume  $V_1+V_2$ . Two volumes  $V_1$  and  $V_2$  represent the system parts. An initial distribution of gas particles over the system parts (volumes)  $\{N,0\}$  transforms into a distribution  $\{N_1=NV_1/(V_1+V_2), N_2=NV_2/(V_1+V_2)\}$ , or for the normalized distributions :  $\{1,0\} \rightarrow \{V_1/(V_1+V_2), V_2/(V_1+V_2)\}$ . An information of the direct transform of this "extensive" measure reads

$$I_{dir} = 1 \ln \left[ \frac{1}{V_1 / (V_1 + V_2)} \right] + 0 \ln \left[ \frac{0}{V_2 / (V_1 + V_2)} \right] = \ln[(V_1+V_2)/V_1]. \quad (4.7.2)$$

$\{g_r^2\}$ , ..., соответственно, с относительными "весами"  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$ , ...,  $\sum \lambda^k=1$ , то изменение удельной (на частицу) физической энтропии является взвешенной суммой ИП этих мер:

Оказывается, что при этом необходимо следовать правилу: информации прямого преобразования следует вычислять по интенсивным переменным, а информации обратного преобразования следует вычислять по экстенсивным переменным. Тогда взвешенная сумма информации дает изменение энтропии в системе. Поэтому в ур.(4.7.1) должны быть включены информации как прямого, так и обратного преобразования измерения. Не пытаясь строго обосновать это правило, мы приводим здесь примеры вычислений для сравнения с результатами, полученными другими методами другими авторами.

Пример 1. Изотермическое расширение идеального газа.  $N$  частиц газа, будучи в начале в объеме  $V_1$  в равновесии, расширяются при постоянной температуре до объема  $V_1+V_2$ . Два объема  $V_1$  и  $V_2$  представляют части системы. Начальное распределение частиц газа по частям системы (объемам)  $\{N,0\}$  преобразуется в распределение  $\{N_1=NV_1/(V_1+V_2), N_2=NV_2/(V_1+V_2)\}$ , или для нормированных распределений  $\{1,0\} \rightarrow \{V_1/(V_1+V_2), V_2/(V_1+V_2)\}$ . Для информации прямого преобразования этой "экстенсивной" меры получаем:

There are no other measures and informations, so the change in physical entropy is equal to  $k_B I_{dir}$  per one particle or  $RI_{dir}$  per a mole, that coincides with a known result [5].

Example 2. Isothermal mixing of two different perfect gases. Let two gases be initially at equilibrium at the same temperature and pressure in two different volumes:  $N_1$  particles of one gas in the volume  $V_1$ , and  $N_2$  particles of another gas in the neighbor volume  $V_2$ . This problem includes the transformations of two "extensive" measures due to the particle numbers of two gases. By analogy with the derivation of eq.(4.7.2) one obtains for the direct transform informations of the first  $I_{dir}^1$  and the second  $I_{dir}^2$  gases:

$$I_{dir}^1 = \ln[(V_1+V_2)/V_1], \quad I_{dir}^2 = \ln[(V_1+V_2)/V_2]. \quad (4.7.3)$$

The relative "weights" of these informations can be taken equal to the relative quantities (particle numbers) of the gases:  $\mu_1=N_1/(N_1+N_2)$ ,  $\mu_2=N_2/(N_1+N_2)$ . The weighted by  $\mu$  sum of the DMTI's (4.7.3) after elementary calculations using the gas state equation reads:

$$I_{dir} = \mu_1 I_{dir}^1 + \mu_2 I_{dir}^2 = - \sum_{k=1}^2 p_k \ln(p_k), \quad p_k = N_k / \sum_{k=1}^2 N_k, \quad (4.7.4)$$

that is in accordance with the known result [5].  $k_B I_{dir}$  and  $RI_{dir}$  are the entropy changes per particle and mole, respectively.

If in the both volumes there is the same gas then we have only one extensive measure which, in accordance with the initial conditions, does not change, and so must be the physical entropy. Thus we avoid the famous Gibbs' paradox [20] in an

Других мер и информации в данном случае нет, поэтому изменение физической энтропии равно  $k_B I_{dir}$  на одну частицу, или  $RI_{dir}$  на моль, что совпадает с известным результатом [5].

Пример 2. Изотермическое смешение двух различных идеальных газов. Пусть два газа вначале находятся в равновесии при одних и тех же температуре и давлении в двух различных объемах:  $N_1$  частиц в объеме  $V_1$ , и  $N_2$  частиц в соседнем объеме  $V_2$ . Эта задача включает преобразование двух "экстенсивных" мер по числам частиц двух газов. По аналогии с выводом ур. (4.7.2) получаем для информации прямых преобразований первого  $I_{dir}^1$  и второго  $I_{dir}^2$  газов

$$I_{dir}^1 = \ln[(V_1+V_2)/V_1], \quad I_{dir}^2 = \ln[(V_1+V_2)/V_2]. \quad (4.7.3)$$

Относительные "веса" этих информации могут быть взяты по относительным количествам (числам частиц) газов:  $\mu_1=N_1/(N_1+N_2)$ ,  $\mu_2=N_2/(N_1+N_2)$ . Взвешенная по  $\mu$  сумма этих ИППИ (4.7.3) после простых вычислений, использующих уравнение состояния идеального газа, приводится к виду:

$$I_{dir} = \mu_1 I_{dir}^1 + \mu_2 I_{dir}^2 = - \sum_{k=1}^2 p_k \ln(p_k), \quad p_k = N_k / \sum_{k=1}^2 N_k, \quad (4.7.4)$$

что соответствует известному результату [5].  $k_B I_{dir}$  и  $RI_{dir}$  дают изменения энтропии на частицу или моль, соответственно.

Если в обоих объемах находится один и тот же газ, мы имеем только одну экстенсивную меру, которая, в соответствии с начальными условиями, не изменяется, и так же не должна меняться физическая энтропия. Таким образом, мы элементарным путем из-

elementary way.

Example 3. Mixing of the equal quantities of the same perfect gas which are initially in the volumes  $V_1$  and  $V_2$  at the same temperature but different pressures  $P_1$  and  $P_2$ . The state equations for the parts of the gas are : before the mixing  $P_1V_1=N_1k_B T=Nk_B T/2$ , and  $P_2V_2=N_2k_B T=Nk_B T/2$ ; after the mixing  $PV=Nk_B T$  for both, where the notations  $V=V_1+V_2$ ,  $N=N_1+N_2$ ,  $N_1=N_2$ , are introduced for the overall volume and gas particle numbers. In this case two macroscopic distributions change, one is extensive (of gas particles), and another is intensive (the pressure). But these changes are in exact correspondence due to the state equations. So we can calculate the entropy change in two ways using : information of direct transform of extensive measure, or information of inverse transform of intensive measure. The transform of normalized extensive measure reads:

$$\{1/2, 1/2\} \rightarrow \{V_1/V=P_2/(P_1+P_2), V_2/V=P_1/(P_1+P_2)\},$$

and the transform of normalized intensive measure reads:

$$\{P_1/(P_1+P_2), P_2/(P_1+P_2)\} \rightarrow \{1/2, 1/2\}.$$

The respective informations for these transforms are

$$I_{dir}^N = I_{inv}^P = \ln(\pi), \quad \pi = \frac{1}{2}(P_1+P_2)/(P_1P_2)^{1/2}. \quad (4.7.5)$$

They both are equal to the logarithm of the ratio of the arithmetic mean of initial pressures to their geometric mean. Multiplying one of them by  $k_B$  or  $R$ , one obtains the respective specific change in physical entropy [15].

бегаем знаменитый парадокс Гиббса [20].

Пример 3. Смешение двух равных количеств одного и того же идеального газа, изначально находящихся в объемах  $V_1$  и  $V_2$  при одной температуре, но разных давлениях  $P_1$  и  $P_2$ . Уравнения состояния для частей газа до смешения:  $P_1V_1=N_1k_B T=Nk_B T/2$ , и  $P_2V_2=N_2k_B T=Nk_B T/2$ ; после смешения  $PV=Nk_B T$  для обеих частей, где введены обозначения  $V=V_1+V_2$ ,  $N=N_1+N_2$ ,  $N_1=N_2$ , для общих объема и числа частиц. В этом случае изменяются два макроскопических распределения, одно экстенсивное (по числу частиц), и другое интенсивное (по давлению). Но эти изменения находятся в точном соответствии друг с другом благодаря уравнениям состояния. Поэтому мы можем вычислить изменение энтропии двумя способами, используя: информацию прямого преобразования экстенсивной меры, или информацию обратного преобразования интенсивной меры. Преобразование нормированной экстенсивной меры имеет вид:

а преобразование нормированной интенсивной меры -

Для соответствующих информаций этих преобразований получаем:

Они обе равны логарифму отношения арифметического среднего начальных давлений к их геометрическому среднему. Умножая одну из них на  $k_B$  или  $R$ , получаем соответствующее изменение физической энтропии на частицу или моль соответственно, [15].

Example 4. Mixing of two equal quantities of perfect gas which are initially at different temperatures but the same pressure. Using the state equation, it is easy to verify that the pressure does not change during the mixing. The state equations are : before mixing  $k_B T_1 N_1 / V_1 = P = k_B T_2 N_2 / V_2$ , after the mixing  $k_B (T_1 + T_2) N / 2 = PV$ , where, as was above,  $V = V_1 + V_2$ ,  $N = N_1 + N_2$ ,  $N_1 = N_2$ . In this case the entropy change should be calculated by the changes of both of the two measures : the extensive one (particle numbers) which transforms as

$$\{1/2, 1/2\} \rightarrow \{V_1/V = T_1/(T_1 + T_2), V_2/V = T_2/(T_1 + T_2)\},$$

and the intensive one (temperature) which transforms as

$$\{T_1/(T_1 + T_2), T_2/(T_1 + T_2)\} \rightarrow \{1/2, 1/2\}.$$

The informations of the direct transform of extensive measure and of the inverse transform of intensive measure are equal to each other again :

$$I_{dir}^N = I_{inv}^T = \ln(\theta), \quad \theta = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)/(T_1 T_2)^{1/2}, \quad (4.7.6)$$

but a fundamental difference of the measure calculated by temperature is that it represents the specific energy per a degree of freedom per particle for both parts of the gas together. To take into account the joint effect of the changes in temperature and particle numbers on the entropy change one has to sum  $2 \cdot (3/2) I_{inv}^T$  (the specific entropy change of both parts of gas per particle due to the heat transfer) and  $2 I_{dir}^N$  (the specific change in entropy of both equal parts of gas per particle due to the mass transfer), and divide the result by 2 (by

Пример 4. Смешение двух равных количеств идеального газа, находящихся при разных температурах, но при одном и том же давлении. Используя уравнение состояния, легко проверить, что давление при смешении не изменится. Уравнения состояния: до смешения  $k_B T_1 N_1 / V_1 = P = k_B T_2 N_2 / V_2$ ; после смешения  $k_B (T_1 + T_2) N / 2 = PV$ , где, как и выше,  $V = V_1 + V_2$ ,  $N = N_1 + N_2$ ,  $N_1 = N_2$ . В данном случае изменение энтропии следует рассчитывать по изменениям обеих этих мер: экстенсивной (по числу частиц), которая преобразуется как

и интенсивной (температура), преобразующейся как

Информации прямого преобразования экстенсивной меры и обратного преобразования интенсивной меры снова равны друг другу:

но фундаментальное отличие меры, рассчитанной по температуре, состоит в том, что она представляет удельную энергию на одну степень свободы на частицу для обеих частей газа вместе. Чтобы учесть совместный эффект изменений температуры и числа частиц на изменение энтропии, нужно сложить  $2 \cdot (3/2) I_{inv}^T$  (удельное изменение энтропии для обеих частей газа на частицу в силу теплопереноса),  $2 I_{dir}^N$  (удельное изменение энтропии для двух равных частей газа на частицу в силу массопереноса), и разделить результат на 2 (на две равные части газа).

two equal parts of gas). For the change in entropy per mole one has

$$R(2I_{dir}^N + 3I_{inv}^T)/2 = (5/2)R\ln(\theta) \quad (4.7.7)$$

in complete correspondence with the known result of ref. [15]. For the two atomic gas with 3 translational, 2 rotational and 1 vibrational degrees of freedom at high enough temperature one has to sum  $2*((3+2+1)/2)I_{inv}^T$  and  $2I_{dir}^N$  that gives  $4R\ln(\theta)$ . For the low temperature when vibrational degree of freedom does not take part in heat transfer the sum of  $2*((3+2)/2)I_{inv}^T$  and  $2I_{dir}^N$  results in  $(7/2)R\ln(\theta)$ .

It should be emphasized that the above examples are not presented as ready-to-use formal procedure, but only as an illustration of the possibility to elaborate such a procedure. The examples of such calculations are obtained on the base of: (i) the use of direct/inverse measurement transform information, (ii) the use of the matter state equation (of the perfect gas). The existence of a reliable procedure to calculate  $\Delta S$  using the changes of macroscopic observable quantities would allow to inverse this procedure to determine the matter state equation by the measured values of  $\Delta S$  (by the calorimetric data, for example). This would be very useful in investigations of the complex many-component systems when the state equation can not be derived from the primary fundamental principles as it may, for example, be in biological systems or in the case of investigations of modern materials with super complicated structures.

Для изменения энтропии на моль получаем:

$$R(2I_{dir}^N + 3I_{inv}^T)/2 = (5/2)R\ln(\theta) \quad (4.7.7)$$

в полном соответствии с известным результатом работы [15]. Для двух атомного газа с 3 поступательными, 2 вращательными и 1 колебательной степенью свободы при достаточно высокой температуре нужно сложить  $2*((3+2+1)/2)I_{inv}^T$  и  $2I_{dir}^N$ , что дает в итоге  $4R\ln(\theta)$ . При низкой температуре, когда колебательная степень свободы не участвует в теплопереносе сумма  $2*((3+2)/2)I_{inv}^T$  и  $2I_{dir}^N$  приводит к  $(7/2)R\ln(\theta)$ .

Следует подчеркнуть, что примеры, приведенные выше, не преподносятся здесь как процедура "готовая к употреблению", а всего лишь как иллюстрация возможности разработки такой процедуры. Результаты примеров вычислений получены на основе: 1) использования информации прямого\обратного преобразования измерения; 2) использования уравнения состояния вещества (идеального газа). Наличие надежной процедуры вычисления  $\Delta S$  по изменениям макроскопических наблюдаемых величин позволило бы обратить эту процедуру для определения уравнения состояния вещества по измеряемым величинам  $\Delta S$  (по calorиметрическим данным, например). Это было бы очень полезно в исследованиях сложных многокомпонентных систем, когда уравнение состояния не может быть выведено из первых принципов, как например, при исследовании биологических систем или современных материалов со сверхсложными структурами.

#### 4.8. Equilibrium concentration of vacancies in crystal solids

In this section we describe one more example of the use of transform information to derive an equilibrium concentration of vacancies in the crystal as it obtained by Kolmakov [21]. The formula of equilibrium concentration of vacancies reads [22,23]

$$C_V = \exp(-E_0 / k_B T), \quad (4.8.1)$$

where  $E_0$  is an activation energy of one vacancy,  $k_B$  is Boltzmann constant,  $T$  is the temperature. This formula is usually derived from the condition of the minimum of free energy change  $\Delta F = U - T\Delta S$  by calculation of the change in configurational entropy  $\Delta S$  [23].

Consider, like in derivations of gas mixing entropy, a system consisting of two parts: 1) ideal crystal (without vacancies) of  $N_1$  nodes in the volume  $V_1$ ; 2) "imaginary" crystal (of the same symmetry) of vacancies of  $N_2$  nodes with the same node density in the volume  $V_2$ . We imply  $N_2$  to be the number corresponding to equilibrium concentration  $C_V = N_2 / (N_1 + N_2)$ , but not fix it yet. Thus we have

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{N_1 - N_2}{V_1 - V_2} = \frac{N_1 + N_2}{V_1 + V_2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \quad (4.8.2)$$

The both parts of this system are at the temperature  $T$ . The entropy change due to redistribution of vacancies is calculated by the formula

$$\Delta S = k_B N_2 I_{dir}, \quad (4.8.2)$$

where  $I_{dir}$  is information of direct transform of the normalized measure

#### 4.8. Равновесная концентрация вакансий в кристалле

В этом разделе мы описываем еще один пример использования ИП для вывода равновесной концентрации вакансий в кристалле, следуя результату работы Колмакова [21]. Формула равновесной концентрации вакансий имеет вид [22,23]

$$C_V = \exp(-E_0 / k_B T), \quad (4.8.1)$$

где  $E_0$  - активационная энергия вакансии,  $k_B$  - константа Больцмана,  $T$  - температура. Эта формула обычно выводится из условия минимума изменения свободной энергии  $\Delta F = U - T\Delta S$  при подстановке изменения конфигурационной энтропии  $\Delta S$  [23].

Как и в выводе энтропии смешения газа, рассмотрим систему состоящую из двух частей: 1) идеальный кристалл (без вакансий) с числом узлов  $N_1$  в объеме  $V_1$ ; 2) "мнимый" кристалл (с той же симметрией) из вакансий с числом узлов  $N_2$  с той же плотностью узлов в объеме  $V_2$ . Мы подразумеваем, что  $N_2$  является числом узлов, отвечающим равновесной концентрации  $C_V = N_2 / (N_1 + N_2)$ , но пока не фиксируем его. Таким образом, имеем:

$$\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} = \frac{N_1 - N_2}{V_1 - V_2} = \frac{N_1 + N_2}{V_1 + V_2}, \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \frac{V_2}{V_1 + V_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \quad (4.8.2)$$

Обе части этой системы находятся при температуре  $T$ . Изменение энтропии в силу перераспределения вакансий дается формулой

$$\Delta S = k_B N_2 I_{dir}, \quad (4.8.2)$$

где  $I_{dir}$  - информация прямого преобразования нормированной меры перерас-

of vacancy redistribution. The final distribution corresponds to equilibrium. Initially, the vacancy distribution is  $\{0, N_2\}$  and it transforms into the distribution  $\{N_2 V_1 / (V_1 + V_2), N_2 V_2 / (V_1 + V_2)\}$ , or for the normalized distributions the transform reads

$$\{0, 1\} \rightarrow \{V_1 / (V_1 + V_2), V_2 / (V_1 + V_2)\}.$$

This gives the direct transform information

$$I_{dir} = \ln \left( \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) \quad (4.8.3)$$

and immediately the change in free energy

$$\Delta F = N_2 E_0 - k_B T N_2 \ln \left( \frac{N_1 + N_2}{N_2} \right) = N_2 (E_0 + k_B T \ln C_V). \quad (4.8.4)$$

This formula shows that the growth of free energy due to increase in the number of vacant nodes in the crystal must be compensated by the increase in entropy. The redistribution of vacancies occurs until  $\Delta F$  is negative or zero at equilibrium,  $\Delta F = 0$ . This condition immediately gives the formula (4.8.1) and we can now calculate the equilibrium number of vacancies  $N_2$ .

The extremum condition  $d\Delta F/dN_2 = 0$  results in the formula

$$C_V = \frac{1}{e} \exp(-E_0 / k_B T). \quad (4.8.5)$$

This formula shows that a maximum value of vacancy concentration for the very high temperature could not be greater than  $1/e$  that is a more realistic value than 1 given by eq.(4.8.1).

предела вакансий. Конечное распределение соответствует равновесию. Начальное распределение вакансий  $\{0, N_2\}$  трансформируется в распределение  $\{N_2 V_1 / (V_1 + V_2), N_2 V_2 / (V_1 + V_2)\}$ , или для нормированных распределений:

Это дает информацию прямого преобразования

и непосредственно изменение свободной энергии

Эта формула показывает, что рост свободной энергии в силу увеличения вакантных узлов должен компенсироваться увеличением энтропии. Перераспределение вакансий происходит до тех пор, пока  $\Delta F$  отрицательна или равна нулю в равновесии,  $\Delta F = 0$ . Это условие немедленно дает формулу (4.8.1) и мы теперь можем вычислить равновесное число вакансий  $N_2$ .

Условие экстремума  $d\Delta F/dN_2 = 0$  приводит к формуле

Эта формула показывает, что максимальная величина концентрации вакансий при очень большой температуре не может превышать  $1/e$ , что является более реальной величиной чем 1, даваемая ур.(4.8.1).

## References

## Литература

1. Kullback S., Leibler R.A. *On information and sufficiency*. Ann.Math.Statist. 1951, **22**,79-86.
2. Kullback S. *Information Theory and Statistics* (New York, London, Wiley and Chapman & Hall, 1959),
3. Hartley R.V.L. *Transmission of information*. Bell System Tech. J., 1928, **7**, 535-563.
4. Wiener N. *Cybernetics or Control and Communication in The Animal and The Machine* (M.I.T.Press, John Wiley & Sons, 1961). Винер Н. *Кибернетика, или управление и связь в животном и машине*. М.: Наука, 1983.
5. Brillouin L. *Science and Information Theory* (New York, Academic Press, 1962). Бриллюэн Л. *Наука и теория информации*. М.:Физматгиз, 1960.
6. Brillouin L., *Scientific Uncertainty and Information* (New York - London, Acad.Press,1964). Бриллюэн Л. *Научная неопределенность и информация*. М.:Мир, 1966.
7. Nicolis J.S. *Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach* (Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1986). Николис Дж. *Динамика иерархических систем. Эволюционное представление*. М.:Мир, 1989.
8. Haken H. *Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems* (Berlin, etc.,Springer-Verlag,1988). Хакен Г. *Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам*. М.:Мир, 1991.
9. Shannon C.E. *A mathematical theory of communication*. Bell System Tech. J., 1948, **27**, 379-423, 623-656.
- 10.Li W. *Mutual information functions versus Correlation Functions*. J.Stat.Phys., 1990, **60**, N5/6, 823-837.
- 11.Jaynes E.T. *Information theory and statistical mechanics*. Phys.Rev., 1957,**106**, N4, 620-630.
- 12.Jaynes E.T. *Information theory and statistical mechanics II*. Phys.Rev., 1957, **108**, N2, 171-190.
- 13.Tribus M. *Information theory as the basis for thermostatics and thermodynamics*. J.Appl.Mech., 1961, **28**, N1, 1-8.
- 14.Tribus M., Davies R.M., et al. (Discussion of) *Information theory as the basis for thermostatics and thermodynamics*. J.Appl.Mech., 1961, **28**, N3,465-470.
- 15.Chambadal P. *Evolution et applications du concept d'entropie* (Paris, Dunod, 1963) [in French]. Шамбадаль П. *Развитие и приложения понятия энтропии*. М.: Физматгиз, 1967.
- 16.Fisher R.A. *Statistical Methods and Scientific Inference* (New York, London, Hufner Press, 1973).

17. Vdovichenko N.V. *Development of Fundamental Principles of Statistical Physics in the First Half of XX Century* (Moscow, Nauka, 1986) [in Russian]. Вдовиченко Н.В. *Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX века*. М.:Наука, 1986.
18. Planck M. *Absolute entropie und chemische Konstante*. Ann.Phys., 1921, **66**, 365-372.
19. Tolman R.C. *Principles of Statistical Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, England, 1938).
20. Haitun S.D. *The History of Gibbs' Paradox* (Moscow, Nauka, 1986) [in Russian]. Хайтун С.Д. *История парадокса Гиббса*. М.:Наука, 1986.
21. Kolmakov A.G. *Example of the use of transform information concept for calculation of equilibrium concentration of vacancies*. Proc. Symposium "Synergetics. Structure and material properties. Self-Organizing Technologies. 12-14.11.96, Moscow, Pt.1." Pp.238-240 (Moscow, 1996) [in Russian]. Колмаков А.Г. *Пример использования понятия информации преобразования для вычисления равновесной концентрации вакансий*. Труды Симпозиума "Синергетика. Структура и свойства материалов. Самоорганизующиеся технологии. 12-14.11.96, Москва, Ч.1" Сс. 238-240. Москва, 1996.
22. Kittel Ch. *Introduction to solid state physics* (4<sup>th</sup> Edition, New York, etc., J.Wiley&Sons, 1976). Киттель Ч. *Введение в физику твердого тела*. М.:Мир, 1978.
23. Novikov A.A., Rozin K.M. *Crystallography and Defects of Crystal Lattice* (Moscow, Metallurgy, 1990) [in Russian]. Новиков А.А., Розин К.М. *Кристаллография и дефекты кристаллической решетки*. М.: Металлургия, 1990.

## 5. Shift information (SI)

In this chapter we consider a scope of problems concerning one of the simplest forms of transform information - a *shift information* (SI), and a family of Frieden's variational principles based on a concept of *Fisher information* (FI) - the minimum Fisher information principle (MFIP), and extreme physical information principle (EPIP) that provide a universal motivation as well as a way for direct derivation of a variety of physical laws and many linear equations in mathematical physics: Maxwell-Boltzmann and Boltzmann laws (distributions), Schroedinger, Klein-Fock-Gordon, Dirac, and Helmholtz wave equations, Maxwell's equations of electromagnetic field, some uncertainty principles, and many other results, [1-9], for example. But the Fisher information can be considered as a particular form of shift information [10,11], and then all the results by Frieden and co-authors are included in a general SI based scheme. Moreover, the nonlinear Klein-Gordon, Schroedinger, and Korteweg-de Vries equations can be derived additionally.

First we introduce the concept of Fisher information and describe some results by Frieden. It would require a separate book to discuss all the results reported by Frieden and co-authors and we do not do this here (see a book: B.R.Frieden, "Physics from Fisher Information" (Cambridge Univ.Press, 1998)). The

## 5. Информация сдвига (ИС)

В этой главе мы рассматриваем круг вопросов, касающихся одной из простейших форм информации преобразования - *информации сдвига* (ИС), и семейство вариационных принципов Фридена, сформулированных на основе понятия *информации Фишера* (ИФ) - принципа минимума информации Фишера (ПМИФ), и принцип экстремальной физической информации (ПЭФИ), которые предоставляют универсальную мотивацию, а так же способ непосредственного вывода целого ряда физических законов и многих линейных уравнений математической физики: распределений Максвелла-Больцмана и Больцмана, волновых уравнений Шредингера, Клейна-Фока-Гордона, Дирака и Гельмгольца, уравнений Максвелла электромагнитного поля, некоторых принципов неопределенности, и многих других результатов, [1-9], например. Но информацию Фишера можно рассматривать как особую форму информации сдвига [10,11], и поэтому все результаты Фридена с соавторами включаются в общую схему на основе ИС. Более того, дополнительно могут быть выведены нелинейные уравнения Клейна-Гордона, Шредингера и Кортвега-де Фриза.

Сначала мы вводим понятие информации Фишера и описываем некоторые результаты Фридена. Обсуждение всех результатов, полученных Фриденом с соавторами, потребовало бы написания отдельной книги, и мы не будем делать этого здесь (см. книгу: B.R.Frieden, "Physics from Fisher Information" (Cambridge Univ.Press,

main goal of this Chapter is to fit the nonlinear equations into the SI (and thus the TI) based general scheme of derivation of physical laws and equations.

SI is a measure of SB in a system described by some continuous measure with respect to the shift of intensities over the continuous support set. Frieden in his works proves the universality and generality of Fisher information as compared with von Neumann-Shannon-Wiener one. Indeed, in many cases Fisher information not only replaces von Neumann-Shannon-Wiener information, but also gives the more general results (for example, the generalized Maxwell velocity distribution of the particles [1]). However these quantitative information measures may correspond to different SB's. Although in many cases of the continuous mathematical models they give the similar results, but FI can not reflect, for example, SB with respect to the re-arrangements, and so it does not allow to derive the Boltzmann distribution over the discrete energy states. Both these informations can not replace each other completely. The more general, by Frieden, character of Fisher information is rather due to a greater number of continuous models of physical phenomena. This can be explained by the circumstance that the ability to distinguish images, to model the environment, and to think could develop only on the level of

1998)). Главной целью данной главы является намерение показать, как нелинейные уравнения вписываются в общую теоретическую схему на основе ИС (и, таким образом, ИП), позволяющую выводить физические законы и уравнения.

ИС является мерой НС в системе, описываемой некоторой непрерывной мерой, по отношению к сдвигу интенсивностей над непрерывным базовым множеством. Фриден в своих работах доказывает универсальность и общность информации Фишера по сравнению с информацией фон Неймана-Шеннона-Винера. В самом деле, во многих случаях информация Фишера не только заменяет информацию фон Неймана-Шеннона-Винера, но даже дает более общие результаты (например, обобщенное распределение Максвелла частиц по скоростям [1]). Однако, эти количественные меры информации могут соответствовать различным НС. Хотя во многих случаях непрерывных математических моделей они дают сходные результаты, но ИФ не может выразить, например, НС по отношению к перестановкам, и поэтому она не позволяет вывести распределение Больцмана по дискретным энергетическим состояниям. Обе эти информации не могут заменить друг друга полностью. Более общий, по Фридену, характер информации Фишера скорее обусловлен большим количеством непрерывных моделей физических явлений. Это можно объяснить тем обстоятельством, что способности различать образы, моделировать окружение и думать могли развиваться только на уровне макроскопической самооргани-

macroscopic self-organizing system consisting of the very large number of elementary units (particles, cells) such as a brain. For such a system of information processing a continuum should be a natural basic image, or rather the way of representation of the images. This is a reason for the greater number of continuous models in physics.

### 5.1. Fisher information (FI), generalized Fisher information, and characteristic information state

The introduction of FI used here is somewhat different from the definition by Fisher himself [12-14]. It was adapted by B.R.Frieden to be used not only in statistics, but in physics.

Following to Frieden [1,2], consider a system of particles characterized by a parameter  $y$  (this may be one of the coordinates, velocities, energies, etc.). The problem is to evaluate the mean value  $\omega$  of  $y$  in such a way that the mean square deviation of this evaluation from a true mean value  $\Omega$  to be minimum, Fig.5.1.

Measuring the parameter  $y$ , we can calculate the evaluation of its mean  $\omega(y)$ . Let the system be characterized by a probability distribution density  $p(y \setminus \Omega)$ , then the condition of minimum mean square deviation of  $\omega(y)$  from  $\Omega$  reads

$$e^2 = \int dy p(y \setminus \Omega) [\omega(y) - \Omega]^2 = \text{minimum}. \quad (5.1.1)$$

зующейся системы, состоящей из очень большого числа элементарных единиц (частиц, клеток), такой как мозг. Для такой системы обработки информации континуум должен быть естественным базовым образом, или скорее способом представления образов. Это и является причиной большего числа непрерывных моделей в физике.

### 5.1. Информация Фишера (ИФ), обобщенная информация Фишера, и характеристическое информационное состояние

Определение информации Фишера, использованное здесь, несколько отличается от определения самого Фишера [12-14]. Оно было адаптировано Б.Р.Фриденем для использования не только в статистике, но и в физике.

Следуя Фридену [1,2], рассмотрим систему частиц, характеризуемую параметром  $y$  (это может быть одна из координат, скоростей, энергий и т.д.). Задача состоит в оценке средней величины  $\omega$  параметра  $y$  таким образом, чтобы среднее квадратичное отклонение этой оценки от истинной средней величины  $\Omega$  было минимальным, рис.5.1.

Измеряя параметр  $y$ , мы можем вычислить его среднее  $\omega(y)$ . Пусть система характеризуется плотностью распределения вероятности  $p(y \setminus \Omega)$ , тогда условие минимума среднеквадратичного отклонения  $\omega(y)$  от  $\Omega$  имеет вид

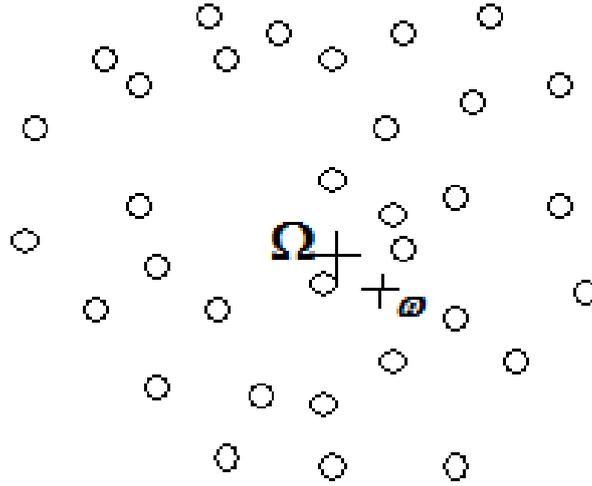


Fig.5.1. A gedanken measurement experiment by Frieden.

Рис.5.1. Мысленный измерительный эксперимент по Фридену.

The expression  $p=p(y\backslash\Omega)$  means that  $p$  is a probability density of parameter  $y$  when its mean value is  $\Omega$ . An assumption that the estimate  $\omega(y)$  is unbiased gives

$$\int dy p(y\backslash\Omega)\omega(y) = \Omega, \text{ or } \int dy p(y\backslash\Omega)[\omega(y) - \Omega] = 0.$$

The differentiation by  $\Omega$  gives

$$\int dy p(y\backslash\Omega)(-1) + \int dy \frac{\partial p(y\backslash\Omega)}{\partial \Omega} [\omega(y) - \Omega] = 0,$$

and elementary calculations result in

$$\begin{aligned} 1 &= \int dy \frac{\partial p(y\backslash\Omega)}{\partial \Omega} [\omega(y) - \Omega] = \int dy \frac{\partial \ln[p(y\backslash\Omega)]}{\partial \Omega} p(y\backslash\Omega) [\omega(y) - \Omega] = \\ &= \int dy \left( \frac{\partial \ln[p(y\backslash\Omega)]}{\partial \Omega} \sqrt{p(y\backslash\Omega)} \right) \left( \sqrt{p(y\backslash\Omega)} [\omega(y) - \Omega] \right). \end{aligned}$$

(Note, that we implicitly let  $p(y\backslash\Omega)$  to be the square of another quantity.) An application of Cauchy-Bunjakovsky-Schwarz inequality to the square of latter equation leads to relation

$$1 \leq \int dy p(y\backslash\Omega) \left( \frac{\partial \ln[p(y\backslash\Omega)]}{\partial \Omega} \right)^2 \int dy p(y\backslash\Omega) [\omega(y) - \Omega]^2,$$

or

$$1 \leq e^2 \int dy \frac{(\partial p(y\backslash\Omega)/\partial \Omega)^2}{p(y\backslash\Omega)}, \quad 1/e^2 \leq \int dy \frac{(\partial p(y\backslash\Omega)/\partial \Omega)^2}{p(y\backslash\Omega)}.$$

After substitution  $x=y-\Omega$ ,  $dx=dy$ ,

Выражение  $p=p(y\backslash\Omega)$  означает, что  $p$  является плотностью вероятности параметра  $y$ , когда средняя величина равна  $\Omega$ . Предположение, что оценка  $\omega(y)$  является несмещенной, дает

Дифференцирование по  $\Omega$  дает

а элементарные вычисления приводят к соотношению

(Заметим, что мы неявно представляем  $p(y\backslash\Omega)$  в виде квадрата другой величины.) Применение неравенства Коши-Буняковского-Шварца приводит к соотношению

$\partial/\partial\Omega=-d/dx$ , we obtain

$\partial/\partial\Omega=-d/dx$ , получаем

$$e^2 \geq 1/I_F, \quad (5.1.2)$$

$$I_F = \int dx \frac{[dp(x)/dx]^2}{p(x)}, \quad (5.1.3)$$

where  $I_F$  is Fisher information by definition. It is seen from the latter result that the *best possible* evaluation, that is  $\max(\min(e^2))$ , is achieved when Fisher information  $I_F$  is minimum. It is seen from the explicit expression (5.1.3) that Fisher information can serve as a measure of non-uniformity of the probability distribution density  $p(x)$  since  $I_F$  is zero for the uniform distribution  $p=const$ . It can be said that  $I_F$  is a measure of orderness in the sense that ideal smoothness of probability distribution corresponds to a complete disorder.

где  $I_F$  - информация Фишера по определению. Из последнего результата видно, что *лучшая возможная* оценка, т.е.  $\max(\min(e^2))$ , достигается, когда информация Фишера  $I_F$  минимальна. Из явного выражения (5.1.3) видно, что информация Фишера может служить мерой неоднородности плотности распределения вероятности  $p(x)$ , поскольку  $I_F$  становится равной нулю при однородном распределении  $p=const$ . Можно сказать, что  $I_F$  является мерой упорядоченности в том смысле, что идеально ровное распределение вероятностей соответствует полному беспорядку.

In the case of measurement of an  $N$ -component parameter  $Y=(y_1, \dots, y_N)$  and measuring its  $N$ -component mean  $\omega=(\omega_1, \dots, \omega_N)$  which differs from a true  $N$ -component value  $\Omega=(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ , we have a collection of mean square deviations that are to be minimum:

В случае измерения  $N$ -компонентного параметра  $Y=(y_1, \dots, y_N)$  и вычисления его  $N$ -компонентного среднего  $\omega=(\omega_1, \dots, \omega_N)$ , которое отличается от истинной  $N$ -компонентной величины  $\Omega=(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ , мы имеем набор среднеквадратичных отклонений, которые должны быть минимальны:

$$e_k^2 = \int dY p(Y \setminus \Omega) [\omega_k(y) - \Omega_k]^2 = \text{minimum}, k=1, \dots, N. \quad (5.1.4)$$

In general, we can evaluate the accuracy of our measurement using some combination of these deviations. Frieden [4] introduced by definition both the mean square error from the true value  $\Omega$

В общем случае, мы можем оценить точность нашего измерения, используя некоторую комбинацию этих величин. Фриден [4] ввел по определению как среднеквадратичную ошибку от истинной величины  $\Omega$

$$e^2 = \sum_{k=1}^N e_k^2, \quad (5.1.5)$$

and generalized Fisher information

так и обобщенную информацию Фишера

$$I_F = \sum_{k=1}^N \frac{1}{e_k^2} . \quad (5.1.6)$$

Because of inequality

В силу неравенства

$$e_k^2 \geq 1 / I_{Fk} , \quad (5.1.7)$$

we have in general

мы имеем в общем случае

$$I_F \leq \sum_{k=1}^N I_{Fk} . \quad (5.1.8)$$

In the case when we can represent the underlying probability distribution as a sum of distant modes (see Fig.5.2)

Если мы можем представить некоторое распределение вероятностей в виде суммы разнесенных мод (см. рис.5.2)

$$p(Y \setminus \Omega) = \sum_{k=1}^N p(y_k \setminus \Omega) , \quad (5.1.9)$$

(i.e. when each counterpart is non-zero in each own separate region) the inequality (5.1.8) becomes equation and we have for the generalized Fisher information by analogy with eq.(5.1.3)

(т.е. когда каждая составляющая отлична от нуля в своей собственной отдельной области) неравенство (5.1.8) становится уравнением, и мы получаем для обобщенной информации Фишера по аналогии с ур. (5.1.3)

$$I_F = \int dx \sum_{k=1}^N \frac{[dp_k(x) / dx]^2}{p_k(x)} . \quad (5.1.10)$$

In terms of probability density amplitudes  $q_k, p_k=(q_k)^2$ :

В терминах амплитуд плотности вероятностей  $q_k, p_k=(q_k)^2$ :

$$p = \sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N q_k^2 , \quad (5.1.11)$$

we obtain for generalized Fisher information an expression

мы получаем для обобщенной информации Фишера выражение

$$I_F = 4 \int dx \sum_{k=1}^N \left( \frac{dq_k}{dx} \right)^2 . \quad (5.1.12)$$

This can be further generalized for the many-dimensional  $N$ -component case to the form

Оно может быть обобщено далее на многомерный  $N$ -компонентный случай в форме

$$I_F = 4 \int dr \sum_{k=1}^N \nabla q_k(r) \nabla q_k(r) , \quad (5.1.13)$$

where  $r$  is many-dimensional parameter space. In terms of statistical gedanken measurement experiment,  $r$  is a (vector) deviation of the meas-

где  $r$  - многомерное пространство параметров. В терминах мысленного статистического измерительного эксперимента,  $r$  является (векторным) от-

ured quantity  $Y$  from its true mean  $\Omega$ . The minimization of FI (5.1.13) is the basis for derivation of many statistical laws of physics.

The general properties of FI defined in such a way can be related to the properties of statistical interpretation of physical entropy in the form of Boltzmann H-function or von Neumann-Shannon-Wiener information [1-4]. This enables to consider FI as an orderness measure in the system under study.

клонением измеряемой величины  $Y$  от своего истинного среднего  $\Omega$ . Минимизация ИФ (5.1.13) является основой для вывода многих статистических законов физики.

Общие свойства ИФ, определенной таким способом, могут быть соотнесены со свойствами статистической интерпретации физической энтропии в форме H-функции Больцмана или информации фон Неймана-Шеннона-Винера [1-4]. Это позволяет рассматривать ИФ как меру упорядоченности исследуемой системы.

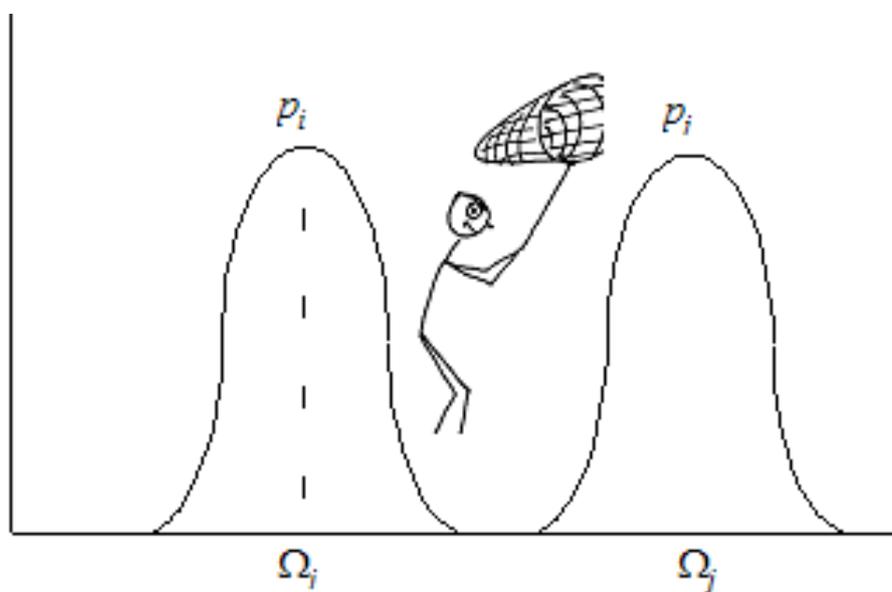


Fig.5.2. Schematic representation of characteristic information state (CIS).

Рис.5.2. Схематичное представление характеристического информационного состояния (ХИС).

The state of the system when its probability density can be replaced by the sum of distant modes (5.1.9) was called by Frieden a *characteristic information state* (CIS) [4], Fig.5.2. This state corresponds to the system consisting of  $N$  separated, non-interacting subsystems. Inequality (5.1.8) is reversal to

Состояние системы, когда ее плотность вероятности может быть заменена суммой разнесенных мод (5.1.9), было названо Фриденем *характеристическим информационным состоянием* (ХИС) [4], рис.5.2. Это состояние соответствует системе, состоящей из  $N$  отдельных невзаимодействующих подсистем. Неравенство

the mixing property of physical entropy (entropy of merged subsystems is greater than the sum of entropies of separated subsystems). There is some contradiction in the use of CIS concept in the gedanken measurement experiment which is a basis of very productive principles below. On the one hand, the  $q_k(r)$  components are placed in the characteristic information state during the gedanken experiment. On the other hand, after the solution is obtained from some principle minimizing Fisher information, this solution is directly used to calculate the probability law via eq.(5.1.11) [4]. This contradiction can be resolved to some degree by re-interpretation of the necessity of CIS in the sense of a game between the information user (observer) and the nature (demon) [7]. In such a game the demon tries to minimize FI making the probability amplitude functions (modes) broader and smoother. But the observer wants to maximize the esquired information and he must choose, or prepare, the system in CIS. On the other hand, observer suspects that due to the demon's efforts the information output will be minimum of possible outputs that is why he expects the Fisher information to be minimum.

Another way to resolve the contradiction is to re-interpret gedanken measurement experiment as a series of *independent* measurements and the resulting probability distribution as a product of marginal

(5.1.8) является обратным по отношению к "смесительному" свойству физической энтропии (энтропия объединенных подсистем больше суммы энтропий отдельных подсистем). Имеется некоторое противоречие в использовании понятия ХИС в мысленном измерительном эксперименте, который является основой очень продуктивных принципов, описанных ниже. С одной стороны, компоненты  $q_k(r)$  помещаются с ХИС в течение мысленного эксперимента. С другой стороны, после того, как решение для них получено из некоторого принципа, минимизирующего ИФ, это решение непосредственно используется для вычисления закона вероятности в соответствии с ур. (5.1.11) [4]. Это противоречие может быть до некоторой степени разрешено реинтерпретацией необходимости ХИС в смысле игры между пользователем информации (наблюдателем) и природой (демоном) [7]. В этой игре демон старается минимизировать ИФ, делая функции амплитуд вероятности шире и ровнее. Но наблюдатель хочет максимизировать извлекаемую информацию, и он должен выбрать, или приготовить систему в ХИС. С другой стороны, наблюдатель подозревает, что, благодаря усилиям демона, информационный выход будет минимальным из возможных выходов, и поэтому он ожидает, что ИФ будет минимальной.

Другой способ разрешения противоречия состоит в реинтерпретации мысленного измерительного эксперимента, как серии *независимых* измерений, а результирующего распределения вероятностей как произведения

laws [8]

$$p(Y \setminus \Omega) = \prod_k p(y_k \setminus \Omega) = \prod_k p(y_k \setminus \Omega_k), \quad (5.1.14)$$

where each  $\Omega_j$  has no influence on  $y_k$ ,  $j \neq k$ . Then, in somewhat different way, we can obtain the same form of Fisher information in terms of probability amplitudes (5.1.13). Thus we avoid the necessity of CIS. The resolution of these problems is much updated in "Physics from Fisher Information" (Cambridge Univ.Press, 1998) by Dr.B.R.Frieden. But we think that our retrospective exposition here and below can be very useful.

## 5.2. Frieden's Minimum Fisher and Extreme physical information principles

Extreme physical information principle (EPIP) is a generalization of the minimum Fisher information principle (MFIP) which was found to be, as we mentioned above, a universal basis for derivation of many physical laws and linear equations [1-9]. Later, nonlinear Klein-Gordon equation was derived [10,11].

The main goal of this book is to describe the use of the transform information as a symmetry breaking measure, so we will not describe all the derivations by Frieden's and co-authors. We outline here only the main concepts and give the elementary examples.

The conceptual basis for Frieden's derivations was a gedanken experiment on seeking an

маргинальных распределений [8]

где каждое  $\Omega_j$  не влияет на  $y_k$ ,  $j \neq k$ . Поэтому несколько иным способом мы можем получить ту же форму информации Фишера через амплитуды вероятности (5.1.13). Таким образом, мы избегаем необходимости ХИС. Обновленное изложение этих вопросов можно найти в книге д-ра Фридена "Physics from Fisher Information" (Cambridge Univ.Press, 1998). Но мы считаем, что наше ретроспективное изложение здесь и далее может быть очень полезным.

## 5.2. Принципы Фридена: минимум информации Фишера и экстремум физической информации

Принцип экстремальной физической информации (ПЭФИ) является обобщением принципа минимума информации Фишера (ПМИФ), который, как мы упомянули выше, дает универсальную основу для вывода многих физических законов и линейных уравнений [1-9]. Позже было выведено нелинейное уравнение Клейна-Гордона [10,11].

Главной целью данной книги является описать использование информации преобразования как меры нарушения симметрии, поэтому мы не будем описывать здесь все результаты Фридена с соавторами. Мы только описываем здесь основные понятия и даем элементарные примеры.

Концептуальной основой выводов Фридена был мысленный эксперимент по нахождению выражения для

expression for a minimum mean-square error of estimation of the mean of parameter  $\xi$  characterizing the system of particles under investigation. The particles may be material particles or quasiparticles, photons, etc. and the physical parameter  $\xi$  may be a position coordinate, velocity, etc. The requirement that an efficient estimation error is to be maximum results in

$$I_F = \text{minimum}, \quad (5.2.1)$$

where FI  $I_F$  is a functional (5.1.13) of the derivatives of probability density amplitudes in eq.(5.1.11). Frieden had first discovered [1] that a number of physical models can be obtained as the solutions to the problem (5.2.1) under additional constraint imposed by a mean kinetic energy. This was called MFIP :

$$I_F - \lambda \langle E_{kin} \rangle = \text{minimum}, \quad (5.2.2)$$

$\lambda$  is indefinite Lagrange multiplier. Other constraints (e.g. the normalization condition) may be imposed as well. Sometimes instead of mean kinetic energy, the constraint term should be a mean squared energy, as in relativistic quantum mechanics.  $I_F$  is assumed to be a (dis)order measure in the system, so MFIP is akin to the second law of thermodynamics.

Later, Frieden has proposed an axiomatic formulation of the updated theory and developed an agenda for derivations [4-9], where the constraint term is considered as an equivalent piece of information obtained from FI by some unitary transformation, e.g. by Fourier trans-

наименьшей среднеквадратичной ошибки определения среднего параметра  $\xi$ , характеризующего систему частиц. Частицы могут быть материальными или квазичастицами, фотонами и т.д. Параметр  $\xi$  может быть координатой, скоростью и т.д. Требование максимума ошибки эффективной оценки приводит к формулировке

где ИФ  $I_F$  есть функционал (5.1.13) от производных амплитуд плотности вероятности в ур. (5.1.11). Фриден сначала открыл [1], что целый ряд физических моделей может быть получен как решение задачи (5.2.1) при дополнительных ограничениях, налагаемых средней кинетической энергией. Это было названо ПМИФ:

$\lambda$  - неопределенный множитель Лагранжа. Могут быть наложены так же другие ограничения (например, условие нормированности). Иногда вместо кинетической энергии ограничительный член может быть средним квадратом энергии, как в случае релятивистской квантовой механики. Подразумевается, что  $I_F$  является мерой (бес)порядка в системе, и таким образом, ПМИФ родственен второму закону термодинамики.

Позже Фриден предложил аксиоматическую формулировку более развитой теории и развил алгоритм вывода [4-9], в котором ограничительный член рассматривается как эквивалентное количество информации, получаемое из ИФ с помощью некоторого унитарного преобразования, напри-

form, and then this term is interpreted in terms of physical observable quantities, for example, momentum. This has been called EPIP. In the works [7-9] it takes a form

$$\delta I = \delta J, \text{ or } \delta K = 0, K = I - J = \text{extremum}, \quad (5.2.3)$$

where  $I$  is FI called in this context a *free information*,  $K$  is called an *associated physical information* to be extremized,  $J$  is the expression of FI which after unitary transformation and physical re-interpretation takes the form

$$J = \int d\xi F(\{\psi(\xi)\}, \xi). \quad (5.2.4)$$

It is called a *bound Fisher information* because it is interpreted as a maximum possible value of information that can be obtained from the measurement.  $I$  is our choice of information to be extracted from the system, so it is called a free information. It is necessarily lesser than  $J$ . Eq.(5.2.3) expresses the sense of information game with nature when we try to minimize the deficit of extracted information  $K$ .

It should be emphasized, that the transform, Frieden and co-authors write about, serves to express (re-interpret) FI in terms of observable quantities and then to obtain the basic forms of a constraint term in the most universal way. But the information generating transform (shift) of Sec. 5.3 is necessary to obtain the mathematical form of FI itself.

We should note that all the

мер, преобразования Фурье, и затем интерпретируется через физические наблюдаемые величины, например, импульс. Эта теория была названа ПЭФИ. В работах [7-9] он принимает форму

где  $I$  - ИФ, называемая в данном контексте *свободной информацией*,  $K$  называется *ассоциированной физической информацией*, которая должна быть экстремальной,  $J$  есть выражение ИФ, которое после унитарного преобразования и физической реинтерпретации принимает вид

Она называется *предельной информацией Фишера*, потому что она понимается как максимальное возможное количество информации, которое может быть получено из измерения.  $I$  является нашим выбором информации, которая должна быть извлечена из системы, поэтому она называется *свободной информацией*. Она необходимо меньше, чем  $J$ . Ур.(5.2.3) выражает смысл информационной игры с природой, когда мы стараемся минимизировать недостаток извлекаемой информации  $K$ .

Нужно подчеркнуть, что преобразование о котором пишут Фриден и его соавторы, служит для выражения (реинтерпретации) ИФ в терминах наблюдаемых величин и последующего получения основных форм ограничительного члена наиболее универсальным способом. Но информационно производящее преобразование (сдвиг) в п.5.3 необходимо для получения математической формы самой ИФ.

Следует заметить, что все ре-

derivations by Frieden and co-authors formally use the probability measures only. However, in deriving the Maxwell's equations of electromagnetic field [3], the probability measure actually was a statistical interpretation of energy distribution (or intensity (absolute value) of 4-potential, more exactly). In deriving the weak-field gravitational equations [9], the wave functions (amplitudes) were the interpretations of the components of the associated metric tensor. So, Fisher information used to be actually the measure of non-uniformity of physical quantities.

The derivation of time-independent one dimensional Schroedinger equation is a good simple example of the use of both minimum Fisher information and extreme physical information principles. These examples show the basic distinctions of these principles in an elementary way. On the other hand, they demonstrate the different ways of the use of Fisher information in deriving physical laws. Consider first MFIP based derivation.

Let  $p(x)dx$  be a quantum mechanical (yet unknown) probability to find some particle in the neighborhood  $dx$  of the space point (coordinate)  $x$ ,  $p(x)=[q(x)]^2$ , i.e.  $q(x)$  is an absolute value of a normalized  $\psi$ -function of the particle. Let the total energy of the particle be  $W$ , the potential at the point  $x$  be  $U(x)$ , and wave function of the particle vanishes at infinity. The kinetic energy

результаты Фридена с соавторами получены на основе формального использования только лишь вероятностной меры. Однако при выводе уравнений Максвелла электромагнитного поля [3], вероятностная мера была построена на основе статистической интерпретации распределения энергии (или интенсивности (абсолютной величины) 4-потенциала, более точно). При выводе уравнений гравитации в приближении слабого поля [9] волновые функции (амплитуды) были интерпретациями компонент ассоциированного метрического тензора. Таким образом, информация Фишера была в этих случаях фактически мерой неоднородности физических величин.

Вывод независящего от времени одномерного уравнения Шредингера является хорошим примером использования как принципа минимума информации Фишера так и принципа экстремальной физической информации. Эти простые примеры ниже показывают основные отличия этих принципов. С другой стороны, они демонстрируют различные способы использования информации Фишера для вывода физических законов. Рассмотрим сначала вывод на основе ПМИФ.

Пусть  $p(x)dx$  есть квантовомеханическая (пока неизвестная) вероятность обнаружения частицы в окрестности  $dx$  пространственной точки (координаты)  $x$ ,  $p(x)=[q(x)]^2$ , т.е.  $q(x)$  является абсолютной величиной нормированной  $\psi$ -функции частицы. Пусть общая энергия частицы равна  $W$ , потенциал в точке  $x$  -  $U(x)$ , и волновая функция стремится к нулю на бесконечности. Кинетическая энергия час-

of the particle is  $E_{kin}=W-U(x)$ . The MFIP (5.2.2) then reads

$$\int dx \left( 4 \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 - \lambda [W - U(x)] q^2 \right) = \text{minimum}, \quad (5.2.5a)$$

and the solution to this problem is given by (see Appendix 5.11)

$$\int dx \left( \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial (dq/dx)} \right) \left( 4 \left( \frac{dq}{dx} \right)^2 - \lambda [W - U(x)] q^2 \right) = 0. \quad (5.2.5b)$$

This leads to equation

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\lambda}{4} [W - U(x)] q = 0, \quad (5.2.5c)$$

which is one dimensional time-independent Schroedinger wave equation, if we choose  $\lambda=8m/\hbar^2$  ( $m$  is a mass of a particle and  $\hbar=h/2\pi$ ,  $h$  is the Plank constant). This derivation is not closed, because we have used implicitly many important physical facts and basic physical assumptions.

Now let us obtain the same equation (for the same physical scenario) by EPIP (5.2.3) in four steps of Frieden's derivation agenda [4] for the more general case when the number of "degrees of freedom"  $N$  is not previously fixed to be unity and each amplitude function  $q_k$  in (5.1.11) is complex.

Step 1. We must identify the physical quantity describing our system that is a quantum mechanical (yet unknown) probability  $p(x)dx$  to find some particle in the neighborhood  $dx$  of the space point (coordinate)  $x$ ,  $x$  being the deviation of the measured particle position  $y$  from its true mean, or the classical particle position,  $\Omega$ . We imply  $p(x)$  to be a

тицы равна  $E_{kin}=W-U(x)$ . ПМИФ (5.2.2) тогда имеет вид:

а решение этой задачи дается уравнением (см. Аппендикс 5.11)

Это приводит к уравнению

которое будет одномерным независимым от времени волновым уравнением Шредингера, если мы выберем  $\lambda=8m/\hbar^2$  ( $m$  - масса частицы,  $\hbar=h/2\pi$ ,  $h$  - постоянная Планка). Этот вывод не замкнут, потому что мы неявно использовали много важных физических фактов и фундаментальных физических предположений.

Теперь получим то же самое уравнение (для той же постановки задачи, физического сценария) с помощью ПЭФИ (5.2.3) и сделаем это в четыре шага, следуя рецепту Фридена [4], для более общего случая, когда число "степеней свободы"  $N$  предварительно не фиксируется (равным 1), и каждая амплитудная функция  $q_k$  в (5.1.11) является комплексной.

Шаг 1. Мы должны указать физическую величину, описывающую нашу систему, которой является квантово-механическая (пока неизвестная) вероятность  $p(x)dx$  обнаружения частицы в окрестности  $dx$  пространственной точки (координаты)  $x$ , причем  $x$  является отклонением измеряемой координаты частицы от ее истинного среднего, или классической координа-

well-behaved function, zero at infinity.

Step 2. We must identify the component functions  $q_k$  in eq.(5.1.11) (in this case) with complex quantum mechanical amplitudes, the number of which  $N$  is left as a free parameter that is fixed on the basis of sufficiency at the end of derivation. In general, we must consider the complex amplitudes, so eq.(5.1.11) now reads

$$p(x) = \sum_{k=1}^N [q_{1k}^2(x) + q_{2k}^2(x)], \quad (5.2.6)$$

where all  $q_{1k}$  and  $q_{2k}$  are the real functions (the absolute real and imaginary parts of complex amplitudes  $q_k$ ). This choice of the probability form (i) allows the complex amplitudes, as is in general; (ii) Since the amplitudes  $q_k$  are placed in their CIS (by the gedanken measurement scenario) the use of  $2N$  optimum estimators  $\Omega_{1k}, \Omega_{2k}, k=1, \dots, N$ , increases information, that reduces an error  $e^2$ , that is the aim of experiment.

Step 3. We must form the free information using the identified amplitudes:

$$I = 4 \sum_{k=1}^N \int dx \left( \left( \frac{dq_{1k}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dq_{2k}}{dx} \right)^2 \right). \quad (5.2.7)$$

We can express all the functions in terms of their Fourier spectra (as we imply they also to be the well-behaved functions):

$$q_{jk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int d\mu \varphi_{jk}(\mu) e^{i\mu x/\hbar}, \quad j=1,2; k=1, \dots, N.$$

The complex probability amplitudes

ты,  $\Omega$ . Мы подразумеваем, что  $p(x)$  обладает нужными нам свойствами и равна нулю на бесконечности.

Шаг 2. Мы должны принять компонентные функции  $q_k$  в ур.(5.1.11) (в этом случае) за комплексные квантово-механические амплитуды, число которых  $N$  считается свободным параметром задачи, который фиксируется в конце вывода на основе соображений достаточности. В общем случае, мы должны использовать комплексные амплитуды, поэтому ур.(5.1.11) теперь имеет вид:

где  $q_{1k}$  и  $q_{2k}$  являются вещественными функциями (модули вещественных и мнимых частей комплексных амплитуд  $q_k$ ). Такой выбор формы вероятности 1) позволяет использовать комплексные амплитуды, 2) поскольку амплитуды  $q_k$  берутся в своем ХИС (по сценарию мысленного измерительного эксперимента), использование  $2N$  оптимальных оценок  $\Omega_{1k}, \Omega_{2k}, k=1, \dots, N$ , увеличивает информацию, что уменьшает ошибку  $e^2$ , что и является целью эксперимента.

Шаг 3. Мы должны построить свободную информацию, используя указанные амплитуды,

Мы можем выразить все функции через их Фурье спектры (т.к. мы предполагаем, что они обладают всеми необходимыми нам свойствами):

Комплексные амплитуды вероятности

$$q_k = q_{1k} + iq_{2k}, k=1, \dots, N,$$

are expressed in analogous way by their spectra

$$\varphi_k(\mu) = \varphi_{1k}(\mu) + i\varphi_{2k}(\mu), k=1, \dots, N.$$

They can be written in a vector form

$$\boldsymbol{\varphi}(\mu) = (\varphi_1(\mu), \dots, \varphi_N(\mu)).$$

By de Broglie's wave hypothesis, we can associate  $\mu$  with particle momentum and  $\hbar$  - with Plank constant divided by  $2\pi$ . By Born's interpretation, we can associate  $\boldsymbol{\varphi}(\mu)$  with amplitudes of probability density distribution over the momentum space (over a conjugate Fourier space)

аналогичным образом выражаются через свои спектры  
Все вместе они могут записаны в векторной форме  
На основе волновой гипотезы де Бройля мы можем ассоциировать  $\mu$  с импульсом частицы и  $\hbar$  с постоянной Планка, деленной на  $2\pi$ . На основе интерпретации волновой функции по Борну мы можем ассоциировать  $\boldsymbol{\varphi}(\mu)$  с амплитудами распределения вероятности по пространству импульсов (по сопряженному Фурье пространству)  $\mu$

$$P(\mu) = |\boldsymbol{\varphi}(\mu)|^2 = \boldsymbol{\varphi}(\mu)\boldsymbol{\varphi}^{*T}(\mu) = \sum_{k=1}^N \left( |\varphi_{1k}(\mu)|^2 + |\varphi_{2k}(\mu)|^2 + iA_k(\mu) \right),$$

$$A_k(\mu) = \varphi_{1k}^* \varphi_{2k} - \varphi_{2k}^* \varphi_{1k}.$$

By substitution of inverse and direct Fourier transforms of the real amplitude components  $q_{1k}$ ,  $q_{2k}$  we can obtain, on the one hand,

Подстановкой прямых и обратных преобразований Фурье вещественных компонент амплитуд  $q_{1k}$ ,  $q_{2k}$  мы можем получить, с одной стороны,

$$A_k(\mu) = \frac{i}{\pi\hbar} \iint dx dx' q_{1k}(x) q_{2k}(x') \sin\left(\frac{\mu}{\hbar}(x - x')\right),$$

i.e. it is an odd function of  $\mu$ . On the other hand,

т.е. это нечетная функция  $\mu$ . С другой стороны,

$$I = \frac{4}{\hbar^2} \sum_{k=1}^N \int d\mu \mu^2 \left( |\varphi_{1k}(\mu)|^2 + |\varphi_{2k}(\mu)|^2 \right) = \frac{4}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 \left( P(\mu) - i \sum_{k=1}^N A_k(\mu) \right),$$

$$I = \frac{4}{\hbar^2} \int d\mu \mu^2 P(\mu) = \frac{4}{\hbar^2} \langle \mu^2 \rangle.$$

Thus, using together the de Broglie's wave hypothesis, Born's interpretation of  $P(\mu)$  as a probability density, and classical relation for the kinetic energy

Таким образом, используя вместе волновую гипотезу де Бройля, борновскую интерпретацию  $P(\mu)$  как плотность вероятности, и классическое соотношение для кинетической энергии

$$W - U(x) = E_{kin} = \frac{\mu^2}{2m},$$

we can express our free information

мы можем выразить нашу свободную

via the mean kinetic energy, and the obtained expression must be the bound Fisher information  $J$

$$J = \frac{4}{\hbar^2} \langle 2mE_{kin} \rangle = \frac{8m}{\hbar^2} \int dx [W - U(x)] \sum_{k=1}^N [q_{1k}^2(x) + q_{2k}^2(x)]. \quad (5.2.8)$$

Note, that the third step can be considered as a re-interpretation of the free information in terms of observable quantities. In this particular case it simply requires Fourier transform of Fisher information. In such a way, we re-express it as an average in  $x$ -space (like in eq.(5.2.4)):

$$J = \int dx F(\{q(x)\}, x).$$

Step 4. With function  $F$  identified, we must find a solution to the problem (5.2.3) which reads in this case

$$4 \sum_{k=1}^N \int dx \left( \left( \frac{dq_{1k}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dq_{2k}}{dx} \right)^2 \right) - \frac{8m}{\hbar^2} \int dx [W - U(x)] \sum_{k=1}^N [q_{1k}^2(x) + q_{2k}^2(x)] = \text{extremum}.$$

The solution to this problem (see Appendix 5.11) is a set of equations

$$\frac{d^2 q_{jk}}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [W - U(x)] q_{jk} = 0, \quad j=1,2; k=1,\dots,N.$$

This is a set of  $2N$  identical differential equations, i.e. this is one equation of the second order with two independent solutions. Thus we need to use no more than two real (different) amplitudes or one complex wave function to describe our system ( $\psi = q_1 + iq_2$ ). The latter equation becomes the usual time-independent one dimensional Schroedinger wave equation with a right coefficient which is obtained without arbitrary choice of Lagrange multiplier, as was above:

информацию через среднюю кинетическую энергию, и полученное выражение должно быть предельной информацией Фишера  $J$

Заметим, что третий шаг можно рассматривать как реинтерпретацию свободной информации в терминах наблюдаемых величин. В данном частном случае это требует простого преобразования Фурье информации Фишера. Таким способом мы заново выражаем ее как среднее по пространству  $x$  (по типу ур.(5.2.4)):

Шаг 4. Получив функцию  $F$ , мы должны найти решение задачи (5.2.3), которая в данном случае имеет вид

Решение этой задачи дается системой уравнений (см. Аппендикс 5.11)

Это система  $2N$  идентичных дифференциальных уравнений, т.е. на самом деле это одно уравнение второго порядка с двумя независимыми решениями. Таким образом, мы нуждаемся не более чем в двух вещественных (различных) амплитудах, или одной комплексной волновой функции для описания нашей системы ( $\psi = q_1 + iq_2$ ). Последнее уравнение становится обычным не зависящим от времени волновым уравнением Шредингера с правильным коэффициентом, которое получено без дополнительного произвольного выбора множителя Лагранжа,

как это было выше:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[W - U(x)]\psi = 0. \quad (5.2.9)$$

The derivations of other equations can be more tedious and demand a sophisticated interpretation of the space of measured parameter and probability density amplitudes. Next we reinterpret Fisher information in terms of certain particular form of transform information - shift information which by no means contradicts the principles above, and so, the results following from them.

### 5.3. One dimensional shift information

Consider one dimensional well-behaved distribution (not necessarily probability density)  $p(x)$  describing some physical system [10]. One can evaluate its non-uniformity (roughness) comparing it with its shifted image  $p(x+\Delta)$ , Fig.5.3, using as a non-uniformity measure a quantity

$$I(\Delta) = \int dx p(x) \ln \left( \frac{p(x)}{p(x+\Delta)} \right), \quad (5.3.1)$$

which we call a shift information (SI) since it is a particular form of TI (3.1) for the information generating transform (IGT) is a shift.

Вывод других уравнений может быть более утомительным и потребовать усложненной интерпретации пространства измеряемого параметра и амплитуд плотности вероятности. Далее мы получим информацию Фишера на основе одной частной формы информации преобразования - информации сдвига, которая никоим образом не противоречит принципам, описанным выше, и поэтому всем результатам, которые из них следуют.

### 5.3. Одномерная информация сдвига

Рассмотрим одномерное непрерывное распределение (не обязательно плотность вероятности)  $p(x)$ , описывающее некоторую физическую систему [10]. Мы можем оценить его неоднородность (шероховатость), сравнивая его с его же сдвинутым образом  $p(x+\Delta)$ , рис.5.3, используя как меру неоднородности величину

которую мы называем информацией сдвига (ИС), т.к. она является частной формой ИП (3.1), когда информационно производящее преобразование (ИПП) является сдвигом.

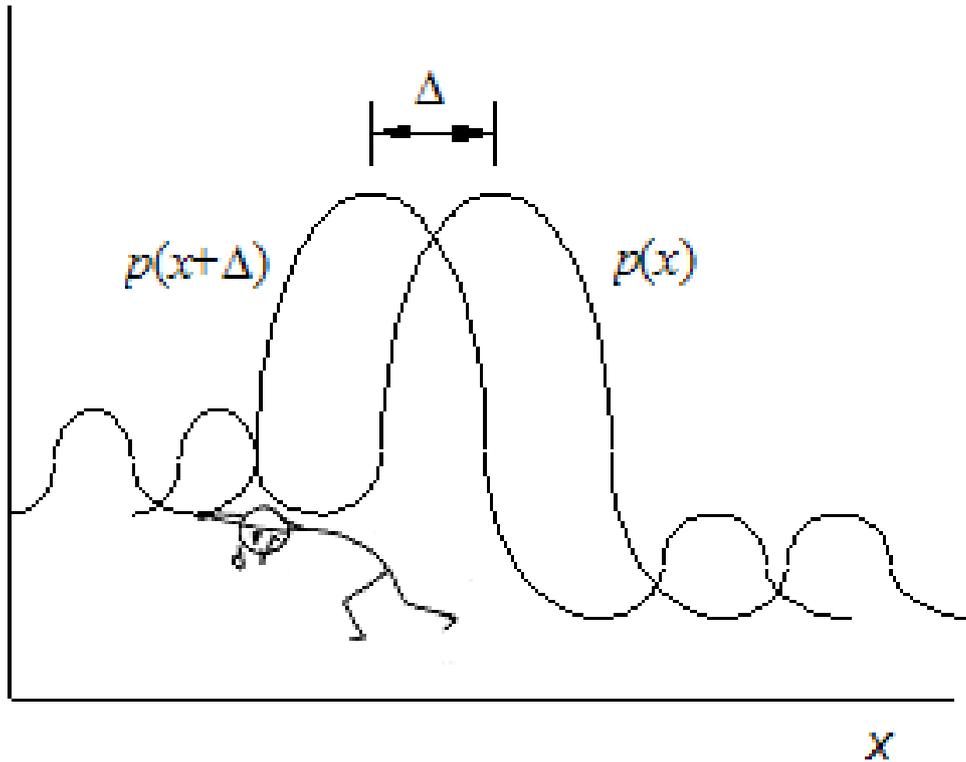


Fig.5.3. Shift of some physical distribution.

Рис.5.3. Сдвиг некоторого физического распределения.

Let the shift be global,  $\Delta = \text{const}$ , and small, so that we can use the expression of  $\ln[p(x+\Delta)]$  in a Taylor series

Пусть сдвиг будет глобальным,  $\Delta = \text{const}$ , и малым, так что мы можем использовать для  $\ln[p(x+\Delta)]$  разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}
 I(\Delta) &= \int dx \left( p \ln p - p \left( \ln p + \frac{d}{dx} (\ln p) \Delta + \frac{d^2}{dx^2} (\ln p) \frac{\Delta^2}{2} + \dots \right) \right) \\
 &= - \int dx \left( p' \Delta - \left( \frac{(p')^2}{p} - p'' \right) \frac{\Delta^2}{2} + \dots \right) \quad (5.3.2)
 \end{aligned}$$

( $p' = dp/dx$ ,  $p'' = d^2p/dx^2$ ). One can recognize the Fisher's "intrinsic accuracy" [12] form in the second-order term. The integral of  $(p')^2/p$  would be the Fisher information by definition (5.1.3), if  $p(x)$  would be the probability density. We intend to use  $I(\Delta)$  in the variational problems to derive some equations, and we will need in its variation. The variation of  $I(\Delta)$  gives (see Appendix 5.11)

( $p' = dp/dx$ ,  $p'' = d^2p/dx^2$ ). В слагаемом второго порядка можно узнать форму "внутренне присущей точности" Фишера [12]. Интеграл от  $(p')^2/p$  был бы информацией Фишера по определению (5.1.3), если  $p(x)$  была бы плотностью вероятности. Мы намереемся использовать  $I(\Delta)$  в вариационных задачах для вывода некоторых уравнений, и поэтому нам понадобится ее вариация. Вариация  $I(\Delta)$  дает (см. Аппендикс 5.11)

$$\begin{aligned} \delta(p)I(\Delta) &= -\int dx \delta p \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial p''} - \dots \right) \left( p' \Delta - \left( \frac{(p')^2}{p} - p'' \right) \frac{\Delta^2}{2} + \dots \right) \\ &\cong \frac{\Delta^2}{2} \int dx \delta p \left( \left( \frac{p'}{p} \right)^2 - 2 \frac{p''}{p} \right). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

We can obtain the same expression using the Fisher information form (variation of the first order term gives zero)

$$\frac{\Delta^2}{2} \delta(p) \int dx \frac{(p')^2}{p} = \frac{\Delta^2}{2} \int dx \delta p \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p'} \right) \frac{(p')^2}{p} = \frac{\Delta^2}{2} \int dx \delta p \left( \left( \frac{p'}{p} \right)^2 - 2 \frac{p''}{p} \right) \cong \delta I(\Delta).$$

It should be mentioned that in this one dimensional case one could use instead of (5.3.1) a symmetric (in  $\Delta$ ) form of SI

$$I(\pm\Delta) = \int dx p(x) \ln \left( \frac{p(x)}{\sqrt{p(x+\Delta)p(x-\Delta)}} \right) \quad (5.3.4)$$

to obtain the same approximation of  $\delta I(\Delta)$ . This is equivalent to the elimination of the odd powers from the Taylor series, or to averaging the series over two possible directions of the shift. For the uniform function,  $p=const$ , both these SI's are zero. Thus they can be considered as the (different) measures of broken symmetry in the system with respect to the shift. Not averaged over the shift directions, SI is a "directed" measure of SB. Thus, for the distribution  $p(x)$  is the probability density, we can associate one dimensional Fisher information (5.1.3) with the limit (some kind of derivatives)

$$I_F \leftrightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{I(\pm\Delta)}{\Delta^2}, \quad (5.3.5)$$

implying equivalence of the use of the both in the variational problems.

Мы можем получить это же выражение, используя форму информации Фишера (вариация члена первого порядка равна нулю)

Следует отметить, что в данном одномерном случае можно использовать вместо (5.3.1) симметричную (по  $\Delta$ ) форму ИС

для того, чтобы получить ту же самую аппроксимацию  $\delta I(\Delta)$ . Это эквивалентно устранению нечетных степеней из ряда Тейлора, или усреднению ряда по двум возможным направлениям сдвига. Для однородной функции,  $p=const$ , обе ИС нулевые. Таким образом, их можно рассматривать как (различные) меры нарушения симметрии в системе по отношению к сдвигу. Без усреднения по направлениям сдвига, ИС является "направленной" мерой ИС. Таким образом, если распределение  $p(x)$  является плотностью вероятности, мы можем ассоциировать одномерную информацию Фишера (5.1.3) с пределом (некоторым типом производных)

Подразумеваемая эквивалентность использования обоих в вариационных задачах.

The usefulness of SI introduction can be demonstrated by the derivation of the same one dimensional time-independent Schroedinger equation. Let  $p(x)$  be the probability density for a particle of mass  $m$  (without spin) with a total energy  $W$  in the potential  $U(x)$ . Let us use SI in the MFIP instead of FI.  $I(\Delta)$  is undimensioned and we have to assign to it some energy value. The intrinsic energy measure for the particle of mass  $m$  is  $mc^2$  by Einstein formula,  $c$  being the light velocity. An energy-time uncertainty implies that the particle with energy  $mc^2$  can not be considered as really existing for the time period less than  $\hbar/(2mc^2)$ , and a minimum physical shift value which can be used to construct  $I(\pm\Delta)$  is  $\Delta=c\hbar/(2mc^2)=\hbar/(2mc)$ . Instead of MFIP (5.2.5a), we have a problem

$$mc^2 I(\pm\Delta) - \lambda \int dx [W - U(x)] p(x) = \text{extremum}, \quad (5.3.6a)$$

where  $\Delta$  is the minimum physical shift. The solution to this problem is given by

$$\int dx \delta p \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial p''} - \dots \right) \left( mc^2 \left( \frac{(p')^2}{p} - 2p'' \right) \frac{\Delta^2}{2} - \lambda [W - U(x)] p \right) = 0,$$

or\или

$$mc^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{2mc} \right)^2 \left( \left( \frac{p'}{p} \right)^2 - 2 \frac{p''}{p} \right) - \lambda [W - U(x)] = 0. \quad (5.3.6b)$$

Substitution of  $p=q^2$  gives finally Schroedinger equation

$$\frac{\hbar^2}{2m} q'' + \lambda [W - U(x)] q = 0. \quad (5.3.6c)$$

Hence, the Lagrange multiplier  $\lambda=1$  can be omitted. However, we have to use as the external "input" the

Полезность введения ИС можно продемонстрировать на выводе все того же одномерного не зависящего от времени уравнения Шредингера. Пусть  $p(x)$  плотность вероятности для частицы массы  $m$  (без спина) с полной энергией  $W$  в потенциале  $U(x)$ . Используем ИС в ПМИФ вместо ИФ.  $I(\Delta)$  является безразмерной и мы должны приписать ей некоторую величину энергии. Внутренне присущей энергетической мерой для частицы массы  $m$  по формуле Эйнштейна является величина  $mc^2$ ,  $c$  - скорость света. Соотношение неопределенности для энергии и времени подразумевает, что частицу с энергией  $mc^2$  нельзя рассматривать как реально существующую на временах менее чем  $\hbar/(2mc^2)$ , и минимальный физический сдвиг, который можно использовать для построения  $I(\pm\Delta)$  есть  $\Delta=c\hbar/(2mc^2)=\hbar/(2mc)$ . Вместо ПМИФ (5.2.5a) мы получаем задачу

где  $\Delta$  - минимальный физический сдвиг. Решение этой задачи дается уравнением

Подстановка  $p=q^2$  дает наконец уравнение Шредингера

Поэтому множитель Лагранжа  $\lambda=1$  можно опустить. Однако мы использовали дополнительные предположения

concept of intrinsic energy and energy-time uncertainty principle. It should be mentioned that substitution of  $p$  by amplitude  $q$  after the solution like eq.(5.3.6b) is obtained leads to incorrect results in many dimensional cases. Thus the substitution must be done before variation of SI. This simply means that we should use the primary real scalar physical quantities to build up shift informations.

In this one dimensional case above the substitution of  $p=q^2$  into eq.(5.3.6a) gives the same result but with  $\lambda=1/2$ . Thus the equivalent problem is

$$2mc^2I(\pm\Delta) - \int dx [W - U(x)]q^2(x) = \text{extremum} \quad (5.3.7)$$

(where SI is implied to use  $q$  instead of  $p$ ), and this shows that different forms of probability measure require different forms of SI. We will generalize the problem (5.3.7) to the case of many particle system in Sec. 5.8.

We could use the mean kinetic energy undimensioned by  $mc^2$  in this case of the system of one particle and we would obtain the same result, but we can not do this in the case of system of many particles of different masses, because the particles differ in their masses and there is no distinguished intrinsic energy measure for all the particle system.

#### 5.4. Fisher information and SI

Now we can generalize the consideration of shift information to the case of "multi-amplitude" measure  $\mu$  and many dimensional pa-

о внутренне присущей энергии и соотношении неопределенности. Следует упомянуть, что переход к амплитудам после нахождения решения типа (5.3.6b) ведет к неправильным результатам в многомерных случаях. Таким образом подстановку амплитуд следует выполнять до варьирования ИС. Это просто означает, что мы должны использовать первичные вещественные скалярные физические величины для построения информации сдвига.

В этом одномерном случае выше подстановка  $p=q^2$  в ур.(5.3.6a) дает тот же результат, но с  $\lambda=1/2$ . Таким образом, эквивалентная задача имеет вид

(где ИС использует  $q$  вместо  $p$ ), и это показывает, что различные формы вероятностной меры требуют использования различных форм ИС. Мы обобщим задачу (5.3.7) на случай системы многих частиц в разделе 5.8.

Мы могли бы в данном случае использовать среднюю кинетическую энергию, обезразмеренную множителем  $mc^2$ , и получили бы тот же самый результат, но мы не можем поступить так же в случае системы многих частиц с различными массами, потому что частицы различаются по массам и нет выделенной меры внутренне присущей энергии во всей системе частиц.

#### 5.4. ИС и информация Фишера

Теперь мы можем обобщить рассмотрение информации сдвига на случай "много амплитудной" меры  $\mu$  и много мерного параметра (непрерыв-

parameter (support) continuous space  $\xi$  [10]. Without specifying the physical system, we try to obtain for  $\mu(\xi)$  its uniformity measure and then to fit it into physical scenarios of a wide class to develop their mathematical models.

Let  $\mu(\xi)$  be the scalar intensity measure of some field at the point  $\xi$  of some space. We mean that this may be the square of an absolute value of some vector field, of wave function, probability density or whatever else. It can be said that  $\mu(\xi)$  is an intensity measure of some entity which is continually distributed (in some sense) over the many ( $N$ ) dimensional continuous support set  $\{\xi\}$ , the intensity being zero at infinity or at the boundary of the support set.. Again we can evaluate its non-uniformity by the comparison of  $\mu(\xi)$  itself and its shifted image  $\mu(\xi+\Delta)$ . By analogy with one dimensional case, we use as a quantitative measure of their distinction a quantity which we call shift information in general [10]

$$I(\Delta) = \int d\xi \mu(\xi) \ln \left( \frac{\mu(\xi)}{G_{\Delta} \mu(\xi)} \right) = \int i(\Delta) d\xi, \quad (5.4.1)$$

where  $G_{\Delta} \mu(\xi)$  is some proper function of  $\mu(\xi+\Delta)$ :  $\mu(\xi+\Delta)$  itself,  $\sqrt{\mu(\xi+\Delta)\mu(\xi-\Delta)}$ , etc. The shift  $\Delta$  may be global,  $\Delta=const$ , or local,  $\Delta=\Delta(\xi)$ . For the simplest considerations, it is sufficient to use an infinitesimal shift and get rid of the sense of its direction, i.e. to make some "deparameterization" of  $G_{\Delta}$ . Let

ного базового множества)  $\xi$  [10]. Не определяя конкретно физическую систему, мы попробуем получить для  $\mu(\xi)$  ее меру неоднородности и затем встроить ее в физические постановки задач широкого класса, чтобы получать их математические модели.

Пусть  $\mu(\xi)$  будет скалярной мерой интенсивности некоторого поля в точке  $\xi$  некоторого пространства. Мы имеем в виду, что это может быть квадрат абсолютной величины некоторого векторного поля, волновой функции, плотности вероятности или чего-либо еще. Можно сказать, что  $\mu(\xi)$  - мера интенсивности некоторой сущности, непрерывно распределенной (в некотором смысле) по много- ( $N$ -) мерному непрерывному базовому множеству  $\{\xi\}$ , причем эта интенсивность равна нулю на границе множества или на бесконечности. Опять же мы можем оценить ее неоднородность при сравнении самой  $\mu(\xi)$  с ее сдвинутым образом  $\mu(\xi+\Delta)$ . По аналогии с одномерным случаем, мы используем как количественную меру их различия величину, которую мы называем информацией сдвига в общем случае [10]

где  $G_{\Delta} \mu(\xi)$  есть некоторая функция от  $\mu(\xi+\Delta)$ : сама  $\mu(\xi+\Delta)$ ,  $\sqrt{\mu(\xi+\Delta)\mu(\xi-\Delta)}$ , и др. Сдвиг  $\Delta$  может быть глобальным,  $\Delta=const$ , или локальным  $\Delta=\Delta(\xi)$ . Для простейших рассмотрений достаточно использовать инфинитезимальный сдвиг и "избавиться" от влияния выбора направления сдвига, т.е. провести некоторую "депараметризацию"  $G_{\Delta}$ .

$G_{\pm\Delta}\mu(\xi)=\sqrt{\mu(\xi+\Delta)\mu(\xi-\Delta)}$ , so that Пусть  $G_{\pm\Delta}\mu(\xi)=\sqrt{\mu(\xi+\Delta)\mu(\xi-\Delta)}$ , так что

$$\begin{aligned} i(\pm\Delta) &= \mu \ln \left( \frac{\mu}{G_{\pm\Delta}\mu} \right) = \mu \ln \mu - \frac{\mu}{2} [\ln \mu(\xi+\Delta) + \ln \mu(\xi-\Delta)] \\ &= -\frac{\mu}{2} \sum_{jk} (\partial_j \partial_k \ln \mu) \Delta_j \Delta_k - \dots, \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

where  $\partial_k = \partial / \partial \xi_k$ ,  $\{\Delta_k\}$  are the components of  $\Delta$ . We can eliminate  $\Delta$  by a limit

где  $\partial_k = \partial / \partial \xi_k$ ,  $\{\Delta_k\}$  - набор компонент  $\Delta$ . Мы можем избавиться от  $\Delta$  с помощью предела

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{i(\pm\Delta)}{|\Delta|^2}, \quad (5.4.3)$$

and averaging it over all possible directions by an operator

и усреднения последнего по всем возможным направлениям с помощью оператора

$$A = \prod_{n=1}^N \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi_n, \quad (5.4.5)$$

so that

так что

$$A \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{i(\pm\Delta)}{|\Delta|^2} = -\frac{\mu}{2} A \sum_{jk} (\partial_j \partial_j \ln \mu) \cos \phi_j \cos \phi_k = -\frac{\mu}{4} \sum_k (\partial_k^2 \ln \mu),$$

$\cos \phi_k = \Delta_k / |\Delta|$ . Thus we can simplify the consideration, investigating, instead of  $I(\pm\Delta)$ , the quantity

$\cos \phi_k = \Delta_k / |\Delta|$ . Таким образом мы можем упростить рассмотрение, исследуя вместо  $I(\pm\Delta)$  величину

$$I' = \int d\xi \left( A \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{i(\pm\Delta)}{|\Delta|^2} \right) = -\int d\xi \left( \frac{\mu}{4} \sum_k (\partial_k^2 \ln \mu) \right), \quad (5.4.6)$$

which can be considered as some type of derivative.

которую можно понимать как некоторый тип производной.

Let us express now the intensity  $\mu$  by the ( $M$ ) field components, or amplitudes,

Выразим теперь интенсивность  $\mu$  через ( $M$ ) полевых компонент, или амплитуд

$$\mu = \sum_{s=1}^M \mu_s = \sum_{s=1}^M \psi_s^2. \quad (5.4.7)$$

Substitution into eq.(5.4.6) for  $\mu(\xi)$  its expression via eq.(5.4.7) gives

Подстановка в ур.(5.4.6) для  $\mu(\xi)$  выражения из ур.(5.4.7) дает

$$-\frac{\mu}{4} \sum_k (\partial_k^2 \ln \mu) = \frac{1}{4} \sum_k \left( \frac{(\partial_k \mu)^2}{\mu} - (\partial_k^2 \mu) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sum_k \left( \frac{1}{\mu} \left( 2 \sum_s \psi_s (\partial_k \psi_s) \right)^2 - 2 \sum_s \psi_s (\partial_k^2 \psi_s) - 2 \sum_s (\partial_k \psi_s)^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \sum_k \left( 4 \sum_s (\partial_k \psi_s)^2 - 2 \sum_s \psi_s (\partial_k^2 \psi_s) - 2 \sum_s (\partial_k \psi_s)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \left( \sum_s (\partial_k \psi_s)^2 - \sum_s \psi_s (\partial_k^2 \psi_s) \right).
\end{aligned}$$

We have used here the Cauchy-Bunjakovsky-Schwarz inequality. Thus

Мы использовали здесь неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Таким образом:

$$I' \leq I = \frac{1}{2} \int d\xi \sum_k \left( \sum_s (\partial_k \psi_s)^2 - \sum_s \psi_s (\partial_k^2 \psi_s) \right), \quad (5.4.8)$$

the equality being achieved for  $M=1$ , or one component intensity. Both terms in the right hand side of eq.(5.4.8) are the inner products of two vectors. At this step we should mention that first we introduced the "directed" shift information  $I(\Delta)$ , then considered its "simplified" version averaged over all possible infinitesimal shifts  $I'$ , and now we can investigate an estimation  $I$  of the latter via eq.(5.4.8).

причем равенство достигается для  $M=1$ , или однокомпонентной интенсивности. Оба члена в правой части ур.(5.4.8) являются скалярными (внутренними) произведениями двух векторов. Здесь нам следует напомнить, что сначала мы ввели "направленную" информацию сдвига  $I(\Delta)$ , затем рассмотрели "упрощенную" версию, усредненную по всем возможным инфинитезимальным сдвигам  $I'$ , и теперь мы можем исследовать оценку последней по ур. (5.4.8).

By the way, in the case when  $\xi$  is a four dimensional space-time,  $\psi$  is an electromagnetic four potential and  $(\sum_k (\partial_k)^2) \psi = J$  is a four vector current density, the requirement that  $I$  be extremal is equivalent to the variational problem resulting in Maxwell's equations [3,4]. Thus we led to the SI form which can give the reasonable results.

Кстати, в случае, когда  $\xi$  - четырех мерное пространство-время,  $\psi$  - электромагнитный 4-потенциал, и  $(\sum_k (\partial_k)^2) \psi = J$  - 4-вектор плотности тока, требование, чтобы  $I$  было экстремальным, эквивалентно вариационной задаче, дающей в результате уравнения Максвелла [3,4]. Таким образом, мы получили форму ИС, которая может давать разумные результаты.

For the components  $\{\psi_s\}$  and all their derivatives are zero at infinity, or at some closed hypersurface, we obtain for the variation of  $I$  (by amplitudes, see Appendix 5.11)

Когда компоненты  $\{\psi_s\}$  и все их производные обращаются в нуль на бесконечности или некоторой замкнутой гиперповерхности, мы получаем для вариации  $I$  (по амплитудам, см.

Аппендикс 5.11)

$$\delta(\psi_s)I = -2 \int d\xi \left( \sum_k \partial_k^2 \right) \psi_s, \quad s=1, \dots, M. \quad (5.4.9)$$

We can also show that

Мы так же можем показать, что

$$I = \int d\xi \sum_{ks} (\partial_k \psi_s)^2. \quad (5.4.10)$$

To do this, consider a differential form  $\omega_s$  such that

Для этого рассмотрим (внешнюю) дифференциальную форму  $\omega_s$  такую, что

$$\omega_s = \sum_k (\partial_k \psi_s) (-1)^{k-1} (*d\xi_k), \quad d\omega_s = d\xi \sum_k (\partial_k^2 \psi_s),$$

$$d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_N, \quad *d\xi_k = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \wedge \dots \wedge d\xi_N.$$

We use here the usual notations for the Hodge star and external derivatives and multiplication, assuming  $\psi_s$  to be a zero form. By definition

Мы используем здесь обычные обозначения для звезды Ходжа и внешних производных, подразумевая, что  $\psi_s$  - нуль-формы. По определению

$$d(\psi_s \wedge \omega_s) = \psi_s \wedge d\omega_s + d\psi_s \wedge \omega_s,$$

and then

и потому

$$d\xi \psi_s (\sum_k \partial_k^2) \psi_s = \psi_s \wedge d\omega_s = d(\psi_s \wedge \omega_s) - d\psi_s \wedge \omega_s.$$

Let  $D$  and  $\partial D$  be the integration domain and its boundary where all the components  $\psi_s$  and their derivatives  $\partial_k \psi_s$  are zero, then

Пусть  $D$  и  $\partial D$  - область интегрирования и ее граница, на которой все компоненты  $\psi_s$  и их производные  $\partial_k \psi_s$  обращаются в нуль, тогда

$$\begin{aligned} - \int_D d\xi \psi_s (\sum_k \partial_k^2) \psi_s &= - \int_D \psi_s \wedge d\omega_s = - \int_D d(\psi_s \wedge \omega_s) + \int_D d\psi_s \wedge \omega_s \\ &= - \int_{\partial D} (\psi_s \wedge \omega_s) + \int_D d\psi_s \wedge \omega_s = \int_D d\psi_s \wedge \omega_s \\ &= \int_D \left( \sum_j (\partial_j \psi_s) d\xi_j \right) \wedge \left( \sum_k (\partial_k \psi_s) (-1)^{k-1} (*d\xi_k) \right) = \int_D d\xi \sum_k (\partial_k \psi_s)^2. \end{aligned}$$

And we obtain for  $I$  (5.4.8)

И мы получаем для  $I$  (5.4.8)

$$I = \int d\xi \sum_{ks} (\partial_k \psi_s)^2 = - \int d\xi \sum_{ks} \psi_s (\partial_k^2 \psi_s). \quad (5.4.11)$$

This is reminiscent of the EIP that is a «balance» of the free (Fisher form) and bound informations.

Это напоминает ПЭФИ, который можно понимать как баланс свободной (форма Фишера) и предельной информации.

The results obtained are general enough and further investigation is a question of interpretation. For

Полученные выше результаты являются достаточно общими, и дальнейшее исследование является вопро-

the intensity measure  $\mu$  is a probability density, the form (5.4.10) of the estimation  $I$  coincides with (1/4 of) Fisher information form by Frieden's definition. Thus Fisher information can be thought of as a measure of totality of distinctions between close shifted images of the same probability distribution («self-distance») averaged over all possible directions of shift. I.e. it is a simplest SB measure with respect to the shift.

As was shown in previous section, SI based interpretation of MFIP is useful because it enables to eliminate (to some extent) the arbitrariness of the choice of Lagrange multipliers and to obtain equations with right coefficients using the Heisenberg uncertainty principle to choose the “right” value of the shift (which must be a minimum possible physical shift). The necessity of such a choice can be regarded as an element of the game (this choice does not depend on the number of modes of amplitude functions) instead of the necessity to choose (prepare) the system in CIS. Moreover, choice of the transform  $T_\alpha$  in the basic form of TI (3.1) also can be considered as an element of the first stage of the global game [11] in which the observer previously tries to divine what symmetry(ies) is(are) broken in one or another system to be investigated in the most detailed manner. This choice of SB is to describe the system in the most informative way.

As is known, every continu-

сом интерпретации. Если мера интенсивности  $\mu$  является плотностью вероятности, форма (5.4.10) оценки для  $I$  совпадает с (1/4) формой информации Фишера по определению Фридена. Таким образом, информацию Фишера можно понимать как меру совокупности различий между сдвинутыми образами одного и того же распределения вероятности (“само-дистанцию”), усредненную по всем возможным направлениям сдвига. Т.е. как простейшую меру НС по отношению к сдвигу.

Как было показано в предыдущем подразделе, интерпретация ПМИФ на основе ИС полезна, потому что позволяет устранить (до некоторой степени) произвол в выборе множителей Лагранжа и получать уравнения с правильными коэффициентами на основе принципа неопределенности Гейзенберга для выбора “правильной” величины (минимального физического) сдвига. Необходимость такого выбора следует рассматривать как элемент игры (этот выбор не зависит от числа мод или амплитудных функций) вместо необходимости выбора (приготовления) системы в ХИС. Более того, выбор преобразования  $T_\alpha$  в основной форме ИП (3.1) так же можно рассматривать как элемент первой стадии глобальной игры [11], в которой наблюдатель предварительно старается угадать, какие симметрии нарушены в той или иной системе, чтобы исследовать их наиболее детально. Этот выбор НС нужен для наиболее информативного описания.

Как известно, любое непрерыв-

ous transform of continuous manifold is reduced locally to the shift [15]. So, infinitesimal shift is the most universal way to reveal possible SB's with respect to continuous transformations. As FI is an evaluation of such an SI, this explains a staggering abundance of physical laws which can be derived from EPIP, because its key quantity is FI. Thus the very use of FI, that is an averaged infinitesimal SI, is a first step to win a game with nature and then the choice of "right" finite shift is to be done to evaluate the true information amount which can be extracted.

From the latter consideration we can conclude that information game interpretation of the measurement process [7] gives, may be, a broader theoretical support than it follows from its application to EPIP, and is independent of the particular terms of interpretation. CIS and TI based theories equally fit into this interpretation.

As an illustration to the concepts introduced in this Section, consider the derivation of linear Klein-Fock-Gordon equation (KFG) for the free relativistic particle without spin [10]. Let the particle be described by the probability density

$$\mu = |\psi|^2 = |\psi_1 + i\psi_2|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2, \quad (5.4.12)$$

over the support set  $\xi = \{ict, x, y, z\}$  that is a Minkowskian space-time. To find the equation describing this particle we can use MFIP in the

ное преобразование непрерывного многообразия локально сводится к инфинитезимальному сдвигу [15]. Поэтому инфинитезимальный сдвиг является наиболее универсальным способом выявления возможных НС по отношению к непрерывным преобразованиям. Т.к. ИФ есть оценка такой ИС, это объясняет ошарашивающее обилие физических законов, которые можно вывести из ПЭФИ, т.к. его ключевой величиной является ИФ. Т.е. само по себе использование ИФ, которая является усредненной инфинитезимальной ИС, есть первый шаг к выигрышу игры с природой, и затем остается сделать выбор "правильного" конечного сдвига для оценки истинного количества информации, которое можно извлечь.

Из последнего рассмотрения мы можем заключить, что интерпретация процесса измерения как информационной игры [7] дает, может быть, более широкую теоретическую основу, чем это следует и из ее приложения и ПЭФИ, и является независимой от частных терминов интерпретации. Теории на основе ХИС и ИП одинаково хорошо встраиваются в эту интерпретацию.

В качестве иллюстрации концепций, вводимых в этом подразделе, рассмотрим вывод линейного уравнения Клейна-Фока-Гордона (КФГ) для релятивистской частицы без спина [10]. Пусть частица описывается плотностью вероятности

над базовым пространством  $\xi = \{ict, x, y, z\}$ , которое является пространством-временем Минковского. Для отыскания уравнения, описываю-

form similar to the problem (5.3.7), but using the undimensioned shift information and the mean squared kinetic energy as a constraint. Let  $W$  be the particle energy and  $U(\xi)$  be potential. Then we have a problem

$$2|\Delta|^2 I - \frac{\lambda}{(mc^2)^2} \int d\xi [W - U(\xi)]^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) = \text{extremum}, \quad (5.4.13)$$

от

или

$$2|\Delta|^2 \int d\xi \sum_{k=1}^4 \left( (\partial_k \psi_1)^2 + (\partial_k \psi_2)^2 \right) - \frac{\lambda}{(mc^2)^2} \int d\xi [W - U(\xi)]^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) = \text{extremum},$$

where  $m$  is particle mass,  $|\Delta|^2 = (ic\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ , and we have undimensioned constraint term by the square of intrinsic energy measure of the particle. Now we should choose the minimum physical shift by Heisenberg uncertainty principle. It is not a trivial task in the relativistic case [16] but we can try the following choice:  $\Delta t = \hbar / (\omega m_0 c^2)$ ,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c\Delta t$ , and hence  $|\Delta|^2 = 2(\hbar / (\omega m_0 c))^2$ ,  $m_0$  being the rest mass. This value we should substitute into the solution to the problem (5.4.13), see Appendix 5.11:

щего эту частицы, мы можем использовать ПМИФ в форме, похожей на задачу (5.3.7), но используя безразмерную информацию сдвига и средний квадрат кинетической энергии в качестве ограничения. Пусть  $W$  - энергия частицы,  $U(\xi)$  - потенциал. Тогда мы имеем задачу

где  $m$  - масса частицы,  $|\Delta|^2 = (ic\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ , и мы обезразмерили ограничительный член на квадрат меры внутренне присущей энергии частицы. Теперь мы должны выбрать минимальный физический сдвиг с помощью принципа неопределенности Гейзенберга. Это не тривиальная задача в релятивистском случае [16], но мы можем "испытать" следующий выбор:  $\Delta t = \hbar / (\omega m_0 c^2)$ ,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = c\Delta t$ , и потому  $|\Delta|^2 = 2(\hbar / (\omega m_0 c))^2$ ,  $m_0$  - масса покоя. Мы должны подставить эту величину в решение задачи (5.4.13), см. Аппендикс 5.11:

$$? \psi = - \frac{\lambda}{|\Delta|^2 (mc^2)^2} [W - U(\xi)]^2 \psi, \quad (5.4.14)$$

where  $? = \sum_k (\partial_k)^2$  is the D'Alembertian operator. For the free relativistic particle  $U(\xi) = 0$ ,  $W = mc^2$ ,  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $v$  being particle velocity. Substitution of all these values into eq.(5.4.14) leads to equation

где  $? = \sum_k (\partial_k)^2$  - оператор Даламбера. Для свободной релятивистской частицы  $U(\xi) = 0$ ,  $W = mc^2$ ,  $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $v$  - скорость частицы. Подстановка всех этих величин в ур.(5.4.14) дает уравнение

$$? \psi = -\frac{\lambda \omega^2}{4} \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \psi, \quad (5.4.15)$$

which takes the standard KFG form with  $\lambda \omega^2/4=-1$ , or  $\omega=2i$ ,  $\lambda=1$ . Thus the requirements of the "right" choice of the shift attempts us to choose the complex shift in the Minkowskian space-time.

которое принимает форму стандартного КФГ с  $\lambda \omega^2/4=-1$ , или  $\omega=2i$ ,  $\lambda=1$ . Таким образом, требование "правильного" выбора сдвига вынуждает нас выбрать комплексный сдвиг в пространстве-времени Минковского.

### 5.5. Application to measured distributions

As was pointed above, physical meaning of SI depends on the system and the way of its description. Very often the exponential and Gauss distributions are employed to describe the physical quantities statistically. Consider first abstractedly a normalized exponential distribution over the one dimensional parameter space  $x$

$$p(x, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad \int_0^{\infty} p(x, \lambda) dx = 1.$$

It is easy to obtain for the shift information of this distribution

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} dx p(x, \lambda) \ln \left( \frac{p(x, \lambda)}{p(x + \Delta, \lambda)} \right) = \lambda \Delta.$$

I.e. by the use of SI we can evaluate the effective parameters of unknown exactly distributions, for example, numerically, obtaining the values of ratios like  $I(\Delta)/\Delta$ . In particular cases, the value of SI itself may have a clear physical sense. For example, in the case of the Boltzmann distribution over the energy space,  $x=E$ , when the system is in the state with absolute temperature  $T$ ,  $\lambda=1/k_B T$ , and the energy can really change by minimum discrete quanta,  $\Delta=\hbar\nu$ ,

### 5.5. Приложение к измеряемым распределениям

Как подчеркивалось выше, физический смысл ИС зависит от системы и способа ее описания. Очень часто при статистическом описании физических величин применяются экспоненциальное и гауссово распределения. Рассмотрим сначала абстрактно нормированное экспоненциальное распределение по одномерному пространству параметра  $x$

Легко получить для информации сдвига этого распределения

Т.е. применяя ИС мы можем оценивать эффективные параметры неизвестных точно распределений, например, численно получая величины отношений типа  $I(\Delta)/\Delta$ . В частных случаях сами величины ИС могут иметь ясный физический смысл. Например, в случае распределения Больцмана по энергетической оси,  $x=E$ , когда система находится в состоянии с абсолютной температурой  $T$ ,  $\lambda=1/k_B T$ , и энергия может изменяться минимальными дискретными квантами,  $\Delta=\hbar\nu$ , но, тем не ме-

but, nevertheless, we can describe the system by the continuous exponential distribution over the energies (the quantum is very small), we obtain for the shift information

$$I(\Delta) = \frac{\hbar \nu}{k_B T}.$$

This is a very important parameter used in the models, for example, of non-equilibrium gas dynamics investigating the exchange by the energy between the translational, rotational, and vibrational molecular degrees of freedom.

For the Gauss distribution function

$$g(x, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \exp(-\lambda^2 x^2), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \lambda) dx = 1,$$

its shift information

$$I(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x, \lambda) \ln \left( \frac{g(x, \lambda)}{g(x + \Delta, \lambda)} \right) = \lambda^2 \Delta^2,$$

is a function of the width parameter which can be obtained by the ratio  $I(\Delta)/\Delta^2$  or by the limit of this ratio for  $\Delta \rightarrow 0$ .

These elementary examples show that in the cases, when we know the physical laws of the system under investigation, but need its (more or less) exact parameters, we can simply calculate SI numerically using the set of the data measured, instead of approximation of the data by one or another explicit function and fitting its parameters.

нее, мы можем описывать систему непрерывным экспоненциальным распределением по энергиям (квант очень мал), мы получаем для информации сдвига

Это очень важный параметр, используемый при анализе моделей, например, в неравновесной газодинамике, исследующей обмен энергией между поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы молекул газа.

Для функции распределения Гаусса

ее информация сдвига

является функцией параметра уширения, который может быть вычислен через отношение  $I(\Delta)/\Delta^2$  или как предел этого отношения при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Эти элементарные примеры показывают, что в случаях, когда мы знаем физические законы для исследуемой системы, но нам нужны (более или менее) точные параметры, мы можем просто вычислить ИС численно, используя набор померенных данных, вместо аппроксимации данных той или иной явной функцией, и подбирая параметры.

### 5.6. Shift in time, Liouville equation

In this section we derive Liouville equation from the requirement the certain limit form of transform information to be zero. This is similar to the Frieden's formulation of EPIP. But before to draw the derivation we should mention that only Kullback information [17,18]

$$K(P, P^0) = \int P(X) \ln \left( \frac{P(X)}{P^0(X)} \right) dX \quad (5.6.1)$$

$(P^0(X))$  is equilibrium measure of the phase space  $\{X\}$  of some system,  $P(X)$  is this measure for the small deviation from equilibrium state) is a Liapunov function of the non-equilibrium system which results in the Glansdorf-Prigogine criterion of minimum entropy production in the case of small deviation from equilibrium [19,20].

As was noted in Chapter 3, in the case of use of probability measure to build up TI, TI is a particular form of Kullback information. So, it must not be a big news to derive Liouville equation from a particular form of TI which is here shift information for the infinitesimal shift in time. Nevertheless, this demonstrates the abilities of TI based methods.

Let the time-dependent (well-behaved) measure of the phase space  $\{X_i\}$  of some system of particles be  $\{P(t)=P(t, \{X_i(t)\})\}$  (probability measure), where  $X_i(t)$  are the particle coordinates in the phase space. Let

### 5.6. Сдвиг во времени, уравнение Лиувилля

В этом подразделе мы выводим уравнение Лиувилля из требования равенства нулю определенной предельной формы информации преобразования. Это похоже на формулировку ПЭФИ Фридена. Но перед проведением вывода мы должны напомнить, что только информация Кульбака [17,18]

$(P^0(X))$  - равновесная мера фазового пространства  $\{X\}$  некоторой системы,  $P(X)$  - мера при малом отклонении от равновесного состояния) является функцией Ляпунова неравновесной системы, которая позволяет получить критерий минимума производства энтропии Глэнсдорфа-Пригожина для малых отклонений от равновесия [19,20].

Как отмечалось в главе 3, в случае использования вероятностной меры для построения ИП, ИП является частным случаем информации Кульбака. Поэтому вывод уравнения Лиувилля из частной формы ИП, информации инфинитезимального сдвига по времени здесь, не должен восприниматься как особая новость. Тем не менее, мы приводим этот вывод здесь для демонстрации возможностей методов на основе ИП.

Пусть зависящая от времени (с "хорошими" свойствами) мера фазового пространства  $\{X_i\}$  некоторой системы частиц есть  $\{P(t)=P(t, \{X_i(t)\})\}$  (вероятностная мера), где  $X_i(t)$  суть координаты частиц в фазовом простран-

us introduce an operator of shift in time  $U(\Delta t)$

ве. Вводим оператор сдвига по времени  $U(\Delta t)$

$$\begin{aligned} U(\Delta t)P(t) &= P(t + \Delta t) = P(t + \Delta t, \{X_i(t + \Delta t)\}) = P(t) + \Delta t \frac{dP}{dt} + O[(\Delta t)^2] \\ &= P(t) + \Delta t \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} \right) + O[(\Delta t)^2]. \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

The corresponding SI then reads

Соответствующая ИС имеет вид

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int dX P(t) \ln \left( \frac{P(t)}{U(\Delta t)P(t)} \right) = \int dX (P(t) \ln P(t) - P(t) \ln P(t + \Delta t)) \\ &= \int dX \left\{ P(t) \ln P(t) - P(t) \ln \left[ P(t) \left( 1 + \frac{\Delta t}{P(t)} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} \right) + \frac{O[(\Delta t)^2]}{P(t)} \right) \right] \right\} \\ &= - \int dX P(t) \ln \left( 1 + \frac{\Delta t}{P(t)} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} \right) + \frac{O[(\Delta t)^2]}{P(t)} \right) \\ &\approx - \int dX \left( \Delta t \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} \right) + O[(\Delta t)^2] \right). \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Thus we can obtain Liouville equation

Таким образом мы можем получить уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = 0 \quad (5.6.4)$$

as a solution to a problem

как решение задачи

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (5.6.5)$$

Again we can consider this limit in the sense that it is some type of derivative, and that zero derivative corresponds to the extremum of information. Thus we can explicitly interpret Liouville equation as a result of extremization of some symmetry breaking measure in the system described by the measure  $P$ . For the closed system of particles this implies conservation of volume of the system in the phase space.

Опять же мы можем рассматривать этот предел в смысле производной некоторого типа, и что нуль этой производной соответствует экстремуму информации. Таким образом, мы интерпретируем уравнение Лиувилля как результат экстремизации некоторой меры нарушения симметрии в системе, описываемой мерой  $P$ . Для замкнутой системы частиц это подразумевает сохранение объема системы в фазовом пространстве.

### 5.7. Nonlinear Klein-Gordon equation (NKG)

Let us apply now the shift information measure  $I(\Delta)$  to some vector field  $\psi(\xi)=\{\psi_1(\xi),\dots,\psi_M(\xi)\}$ , assuming that there exists its statistical interpretation, such that its intensity measure defined via eq.(5.4.7) is a probability density. Let the kinetic energy can be calculated as in the case of derivation of Schroedinger equation, but the potential depends on the field  $U=U(\psi)$  rather than on coordinates  $\xi$  [10]. Making use of eqs.(5.4.1)-(5.4.11) giving the estimation of  $I(\Delta)/\Delta^2$ , and assuming  $\xi=\{\xi_k\}=\{ict,x,y,z\}$  to be the Minkowskian space-time, we can set a problem similar to (5.4.13)

$$2|\Delta|^2 \int d\xi \sum_{k,s=1}^{4,M} (\partial_k \psi_s)^2 - \lambda \int d\xi (W - U(\psi)) = \text{extremum}, \quad (5.7.1)$$

where the first term is SI evaluation averaged over all possible directions of shift in the space-time and  $W$  is a total energy of the system. Probability measure  $\mu=\sum_s(\psi_s)^2$  does not weight the second integral and this is not a constraint on the mean kinetic energy, but on the total one. The solution to the problem (5.7.1) is (see Appendix 5.11)

$$\int d\xi \left( \frac{\partial}{\partial \psi_s} - \sum_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial (\partial_k \psi_s)} \right) \left( 2|\Delta|^2 \sum_{ks} \left( \frac{\partial \psi_s}{\partial \xi_k} \right)^2 - \lambda (W - U(\psi)) \right) = 0, \quad (5.7.2)$$

that gives

$$4|\Delta|^2 \left( \sum_k \partial_k^2 \right) \psi_s = \lambda \frac{\partial U}{\partial \psi_s}, \quad s=1,\dots,M. \quad (5.7.3)$$

This is the nonlinear Klein-Gordon equation generalizing the sine-Gordon equation when  $M=1$ ,

### 5.7. Нелинейное уравнение Клейна-Гордона (НКГ)

Теперь применим меру информации сдвига  $I(\Delta)$  к некоторому векторному полю  $\psi(\xi)=\{\psi_1(\xi),\dots,\psi_M(\xi)\}$ , предполагая, что существует его статистическая интерпретация такая, что его мера интенсивности, определенная по ур.(5.4.7) является плотностью вероятности. Пусть кинетическая энергия может быть вычислена как и в случае вывода уравнения Шредингера, но потенциал зависит от поля,  $U=U(\psi)$ , а не от координат  $\xi$  [10]. Используя уравнения (5.4.1)-(5.4.11), дающие оценку для  $I(\Delta)/\Delta^2$ , и предполагая, что  $\xi=\{\xi_k\}=\{ict,x,y,z\}$  есть пространство-время Минковского, мы можем поставить задачу, похожую на (5.4.13)

где первый член является оценкой информации сдвига, усредненной по всем возможным направлениям в пространстве-времени, а  $W$  есть полная энергия системы. Вероятностная мера  $\mu=\sum_s(\psi_s)^2$  не входит во второй интеграл, и он дает ограничение не на среднюю кинетическую энергию, а на полную. Решение задачи (5.7.1) (см. Аппендикс 5.11) есть

что дает

Это есть нелинейное уравнение Клейна-Гордона, обобщающее уравнение син-Гордона, когда  $M=1$ ,  $U(\psi)\propto(1-$

$U(\psi) \propto (1 - \cos(\psi))$ , and the  $\phi^4$ -model when  $U(\psi) \propto (\psi^2 - \alpha)^2$ . Equation (5.7.3) can be re-written in the form

$$\Delta \psi = \frac{\lambda}{4|\Delta|^2} \nabla_\psi U, \quad (5.7.4)$$

where  $\Delta = \sum_k (\partial_k)^2$  is D'Alembertian operator, and  $\nabla_\psi$  is a gradient in the "internal space"  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ .

$\cos(\psi)$ , и  $\phi^4$ -модель, когда  $U(\psi) \propto (\psi^2 - \alpha)^2$ . Ур. (5.7.3) может быть переписано в форме

где  $\Delta = \sum_k (\partial_k)^2$  - оператор Даламбера, а  $\nabla_\psi$  - градиент по "внутреннему пространству"  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ .

### 5.8. Many particle system, nonlinear Schroedinger equation (NSE)

Generalize now the problem (5.3.7) to the case of the system of  $K$  weakly interacting particles of the masses  $\{m_\alpha\}$ ,  $\alpha=1, \dots, K$ , with total energy  $W$  in the potential  $U_0(x)$ , where  $x$  is for all the coordinates of configurational space  $\{x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_K\}$ ,  $x_\alpha$  are the coordinates of a particle of mass  $m_\alpha$ . Let the measure of the system be

$$\mu_0 = |\psi_{01} + i\psi_{02}|^2 = (\psi_{01})^2 + (\psi_{02})^2 = \sum_s (\psi_{0s})^2, \quad \psi_{0s} = \psi_{0s}(x) = \psi_{0s}(x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_K).$$

We can construct  $K$  shift informations with respect to minimal physical shifts  $|\Delta_\alpha| = \hbar/(2m_\alpha c)$  in the coordinates of each particle:

### 5.8. Система многих частиц, нелинейное уравнение Шредингера (НШ)

Теперь обобщим задачу (5.3.7) на случай системы  $K$  слабо взаимодействующих частиц с массами  $\{m_\alpha\}$ ,  $\alpha=1, \dots, K$ , общей энергией  $W$  в потенциале  $U_0(x)$ , где  $x$  обозначает координаты всего конфигурационного пространства  $\{x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_K\}$ ,  $x_\alpha$  суть координаты частицы с массой  $m_\alpha$ . Пусть эта система описывается мерой

Мы можем построить  $K$  информаций сдвига по отношению к минимальным физическим сдвигам  $|\Delta_\alpha| = \hbar/(2m_\alpha c)$  по координатам каждой частицы

$$I(\pm\Delta_\alpha) = \int dx \mu_0 \ln \left( \frac{\mu_0}{G_{\pm\Delta_\alpha} \mu_0} \right), \quad (5.8.1)$$

$$G_{\pm\Delta_\alpha} \mu = \sqrt{\mu_0(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha + \Delta_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_K) \mu_0(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - \Delta_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_K)}.$$

Then making use of derivations in Section 5.4 we can justify the consideration by the use of evaluations of these SI's via eqs.(5.4.6)-(5.4.10)

Далее используя выкладки раздела 5.4., мы можем упростить рассмотрение, используя оценки этих ИС по ур. (5.4.6)-(5.4.10)

$$I(\pm\Delta_\alpha) \cong |\Delta_\alpha|^2 I_\alpha[\psi_0] = |\Delta_\alpha|^2 \int dx \sum_{ks} (\partial_{k(\alpha)} \psi_{0s})^2, \quad \alpha=1, \dots, K. \quad (5.8.2)$$

$(\partial_{k(\alpha)} = \partial/\partial x_{k(\alpha)})$  is a partial derivative by  $k$ -th component of the coordi-

$(\partial_{k(\alpha)} = \partial/\partial x_{k(\alpha)})$  - частная производная по  $k$ -й компоненте координат  $x_\alpha$  частицы с

nates  $x_\alpha$ .) To each such SI we assign an intrinsic energy measure of the particle  $m_\alpha c^2$  and the problem generalizing (5.3.7) reads

$$\sum_{\alpha} 2m_{\alpha}c^2|\Delta_{\alpha}|^2 I_{\alpha}[\psi_0] - \int dx (W - U_0(x)) \sum_s \psi_{0s}^2(x) = \text{extremum}. \quad (5.8.3)$$

As before, we can find the solution

$$\left[ -\sum_{\alpha} \frac{\hbar}{2m_{\alpha}} \left( \sum_k (\partial_{k(\alpha)})^2 \right) - (W - U_0(x)) \right] \psi_{0s} = 0. \quad (5.8.4)$$

This is the usual time-independent Schroedinger equation for the system of weakly interacting particles.

Let now the particles are put into interaction due to the decrease in temperature, or polarization effect of external field imposed, or other effects. Besides the modification of the potential function  $U_0(x) \rightarrow U_1(x)$ , we can explicitly take into account the transformation of the system measure  $\mu_0 \rightarrow \mu_1$ , or  $\psi_0 \rightarrow \psi_1$  by introducing into the problem (5.8.3) additional term in the form of mutual information, as was derived in Sec.4.3. We must impose also the condition that the transformed measure is to be normalized like in formulation of Jaynes' principle, Sec.4.4, where we have also used inverse measurement transform information. Thus we have a problem

$$\sum_{\alpha} 2m_{\alpha}c^2|\Delta_{\alpha}|^2 I_{\alpha}[\psi_1] - \int dx (W - U_1(x)) \left( \sum_s \psi_{1s}^2(x) \right) - \lambda \int dx \left( \sum_s \psi_{1s}^2(x) \right) \ln \left( \frac{\sum_s \psi_{1s}^2(x)}{\sum_s \psi_{0s}^2(x)} \right) - \chi \int dx \left( \sum_s \psi_{1s}^2(x) \right) = \text{extremum}. \quad (5.8.5)$$

The solution to this problem is a time-independent Schroedinger

$k$ -й компоненте координат  $x_\alpha$  частицы с номером  $\alpha$ ). Каждой такой ИС мы приписываем внутренне присущую меру энергии частицы  $m_\alpha c^2$ , и теперь задача, обобщающая задачу (5.3.7), имеет вид

Как и раньше, мы находим ее решение

Это есть обычное не зависящее от времени уравнение Шредингера системы слабо взаимодействующих частиц.

Пусть теперь частицы начинают испытывать взаимодействие друг с другом в силу понижения температуры, или поляризационных эффектов наложенного внешнего поля, или чего-то еще. Помимо модификации потенциальной функции,  $U_0(x) \rightarrow U_1(x)$ , мы можем в явном виде принять во внимание преобразование меры системы  $\mu_0 \rightarrow \mu_1$ , или  $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ , вводя в задачу (5.8.3) дополнительный член в форме взаимной информации, как было выведено в п.4.3. Мы так же должны наложить условие, что преобразованная мера должна быть нормирована, как при формулировке принципа Джейнса в п.4.4, где мы так же использовали обратную информацию преобразования измерения. Тогда мы получим задачу

Решением этой задачи является независящее от времени уравнение

equation with a logarithmic non-linearity for the Lagrange multipliers are  $\lambda = -\chi$ :

$$\left[ -\sum_{\alpha} \frac{\hbar}{2m_{\alpha}} \left( \sum_k (\partial_{k(\alpha)})^2 \right) - (W - U_1(x)) - \lambda \ln \left( \frac{\sum_s \psi_{1s}^2}{\sum_s \psi_{0s}^2} \right) \right] \psi_{1s} = 0. \quad (5.8.6)$$

This equation was discussed, for example, in ref.[21], but with a «reper» function  $\psi_0$  describing the uniform distribution,  $\psi_0 = \text{const}$ , and the logarithmic term introduced «by hand» on the base of reasonable assumptions. Further investigation of this equation is out of the scope of this book but we have shown that the joint use of different SB measures gives also reasonable results.

### 5.9. NKG (complex measure)

Consider an abstract case of complex distribution when its law (equation) is derived from a variational problem analogous to minimum Fisher information principle, see Sec. 5.7 [10]:

$$\int d\xi p(\xi) \ln(p(\xi)/p(\xi+\Delta)) - \lambda \int d\xi (W - U(p)) p(\xi) = \text{extremum} \quad (5.9.1)$$

Here  $p = P \exp(i\varphi(\xi))$  is a simplest complex distribution,  $P$  and  $\varphi$  are real,  $W$  is a total energy of the system under consideration,  $U$  is a potential energy depending on  $p$ , rather than directly on «coordinate»  $\xi$ . It should be pointed out that we consider an «angle variable»  $\varphi$  [22] as an observable quantity and then define shift information, although complex distribution  $p(\xi)$  is not observable.

The complex kinetic energy  $(W - U(p)) P \exp(i\varphi(\xi))$  in eq.(5.9.1)

Шредингера с логарифмической нелинейностью, когда множители Лагранжа связаны соотношением  $\lambda = -\chi$ :

Это уравнение обсуждалось ранее, например, в [21], но с «реперной» функцией  $\psi_0$ , описывающей однородное распределение,  $\psi_0 = \text{const}$ , и логарифмическим членом, вводимым «от руки» на основе разумных предположений (т.е. не «от фонаря»). Дальнейшее исследование этого уравнения выходит за рамки настоящей работы, но мы показали, что совместное использование различных мер НС так же дает разумные результаты.

### 5.9. НКГ (комплексная мера)

Рассмотрим абстрактный случай комплексного распределения, когда его закон (уравнение) выводится из вариационной задачи, аналогичной принципу минимума информации Фишера, см. п.5.7 [10]:

$$\int d\xi p(\xi) \ln(p(\xi)/p(\xi+\Delta)) - \lambda \int d\xi (W - U(p)) p(\xi) = \text{extremum} \quad (5.9.1)$$

Здесь  $p = P \exp(i\varphi(\xi))$  - простейшее комплексное распределение,  $P$  и  $\varphi$  - вещественные,  $W$  - полная энергия рассматриваемой системы,  $U$  - потенциальная энергия, зависящая от  $p$ , а не непосредственно от «координаты»  $\xi$ . Следует заметить, что мы рассматриваем «угловую переменную»  $\varphi$  [22] как наблюдаемую величину и затем определяем информацию сдвига, хотя комплексное распределение  $p(\xi)$  не является наблюдаемым.

Комплексную кинетическую энергию можно трактовать в том

can be interpreted in such a way that there are two channels of exchange between the kinetic energy and the potential ones that is a rather general case. For example, the exchange with gravitational and elastic energies of a chain of elastically connected pendulums, with magnetic anisotropy energy and energy of non-uniformity of magnetic momenta distribution in the case of Bloch walls, with population inversion and polarization energies in the case of self-induced light propagation, and so on [22].

Replacing  $\varphi(\xi+\Delta)$  by its Taylor series for the small shift we obtain a variational problem:

$\int d\xi \exp(i\varphi(\xi)) i(\varphi'\Delta + \varphi''\Delta^2/2 + \dots) - \lambda \int d\xi (W - U(\varphi)) \exp(i\varphi(\xi)) = \text{extremum}$  (5.9.2)  
 $(\varphi' = d\varphi/d\xi, \varphi'' = d\varphi'/d\xi)$ , the approximate solution to which is

$$\int d\xi \delta\varphi \left( \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial\varphi'} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \frac{\partial}{\partial\varphi''} \right) \exp(i\varphi(\xi)) [i(\varphi'\Delta + \varphi''\Delta^2/2) - \lambda(W - U(\varphi))] = 0.$$

That gives two equations (for real and imaginary parts)

$$\varphi'' = -(\lambda/\Delta^2)dU/d\varphi, \quad (\varphi')^2 = (2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi)), \quad (5.9.3)$$

which are compatible as

$$\varphi'' = (\varphi')' = \frac{d}{d\xi} [(2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi))]^{1/2} =$$

$$- (\lambda/\Delta^2)(dU/d\varphi) \varphi [(2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi))]^{-1/2} = - (\lambda/\Delta^2)dU/d\varphi.$$

The first equation (5.9.3) is a two-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation in the moving frame  $\xi = x + vt$  ( $\partial_t = v\partial_\xi, \partial_x = \partial_\xi, \partial_\xi = \partial/\partial\xi$ )

which is a sine-Gordon equation when  $U \propto (1 - \cos(\varphi))$ .

Thus we have shown that in addition to the cases considered above, systems described by some

смысле, что имеются два канала обмена между кинетической энергией и потенциальными, что является довольно общим случаем. Например, обмен с гравитационной и упругой энергиями в цепочке упруго связанных маятников, с энергией магнитной анизотропии и энергией неоднородности распределения магнитных моментов в случае блоховских стенок, с энергиями инверсии населенностей и поляризации в случае самоиндуцированной прозрачности, и т.д. [22].

Заменяя  $\varphi(\xi+\Delta)$  его рядом Тейлора для малого сдвига, мы получаем вариационную задачу:

$\int d\xi \exp(i\varphi(\xi)) i(\varphi'\Delta + \varphi''\Delta^2/2 + \dots) - \lambda \int d\xi (W - U(\varphi)) \exp(i\varphi(\xi)) = \text{extremum}$  (5.9.2)  
 $(\varphi' = d\varphi/d\xi, \varphi'' = d\varphi'/d\xi)$ , приближенное решение которой дается уравнением

Это дает два уравнения (для вещественной и мнимой частей)

$$\varphi'' = -(\lambda/\Delta^2)dU/d\varphi, \quad (\varphi')^2 = (2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi)), \quad (5.9.3)$$

которые являются совместными, т.к.

$$\varphi'' = (\varphi')' = \frac{d}{d\xi} [(2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi))]^{1/2} =$$

$$- (\lambda/\Delta^2)(dU/d\varphi) \varphi [(2\lambda/\Delta^2)(W - U(\varphi))]^{-1/2} = - (\lambda/\Delta^2)dU/d\varphi.$$

Первое уравнение (5.9.3) является двухмерным уравнением Клейна-Гордона в движущейся системе координат  $\xi = x + vt$  ( $\partial_t = v\partial_\xi, \partial_x = \partial_\xi, \partial_\xi = \partial/\partial\xi$ )

которое дает уравнение син-Гордона, когда  $U \propto (1 - \cos(\varphi))$ .

Таким образом, мы показали, что в дополнение к случаям, рассмотренным выше, системы, описываемые не-

"angle" variable  $\varphi(\xi)$  [22] are also comprehended by the SI (and thus by TI) based principles. This also gives a rather non-trivial example of TI *without probability*.

которой "угловой" переменной  $\varphi(\xi)$  [22], так же охватываются принципами на основе ИС (и поэтому - на основе ИП). Это так же дает нетривиальный пример ИП *без вероятности*.

### 5.10. Korteweg-de Vries equation (KdV)

Consider some continuous medium described by several macroscopic distributions (of velocity, pressure, partial densities, field intensity, or whatever else), subject to the disturbances that are so small that the amplitudes of disturbances of all distributions are proportional to integer powers of each other, so that it is enough to consider only disturbance of one physical distribution, for example, velocity disturbance  $v$ . It should be noted that these justifications are usually made at the final stage of KdV derivation, see, for example, [22], Ch.5.

In analogy with the use of EIP in its simplest form of MFIP, we must construct the information measure and the constraint on kinetic energy. We can also guess that as the velocity disturbance is small, and the kinetic energy is proportional to the square of velocity, we may need one more constraint on momentum which is proportional to velocity. For the smaller disturbances this constraint must be stronger.

Let the disturbances be one dimensional and propagate in the di-

### 5.10. Уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)

Рассмотрим некоторую непрерывную среду, описываемую несколькими макроскопическими распределениями (скорости, давления, парциальных плотностей, интенсивности поля, или чего-либо еще), под воздействием возмущений, которые настолько малы, что амплитуды возмущений всех распределений пропорциональны целым степеням друг друга, так что достаточно рассматривать возмущение только одного физического распределения, например возмущения скорости  $v$ . Следует заметить, что эти упрощения обычно делаются на заключительной стадии вывода КдВ, см., например, [22], гл.5.

По аналогии с использованием ПЭФИ в его простейшей форме ПМИФ нам следует сконструировать меру информации и поставить ограничение на кинетическую энергию. Мы можем также сообразить, что поскольку возмущение мало, а кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, нам может понадобиться еще одно ограничение на импульс, пропорциональный скорости. Для малых возмущений это ограничение может быть более сильным.

Пусть возмущения будут одномерными и распространяются в на-

rection  $z$ ,  $v$  be the velocity disturbance. We can use SI (5.3.2) for infinitesimal shift  $\Delta$  along the direction  $z$  to measure the non-uniformity of velocity disturbance  $v$ , and try to find the disturbances making this measure extremal under constraints on kinetic energy and momentum of the disturbances (they must be finite). Let the velocity disturbance  $v$  be undimensioned by the value of macroscopic drift velocity of the system  $V$  in  $z$ -direction, and we consider this system in the coordinate frame moving with this drift velocity. Taking into account that the first order term in series (5.3.2) does not influence the extremum, since its variation is zero, we come to a variational problem

$$\frac{\Delta^2}{2} \int \left( \frac{(v')^2}{v} - v'' \right) dz - \lambda \int v^2 dz - \mu \int v dz = \text{extremum}, \quad (5.10.1)$$

where  $\lambda$ ,  $\mu$  are the indefinite Lagrange multipliers,  $v' = dv/dz$ ,  $v'' = d^2v/dz^2$ . By the way, the third term, which is a constraint on the momentum, is reminiscent of mathematical form of the constraint on the probability density which is to be normalized. The problem (5.10.1) is not equivalent to MFIP because we apply SI directly to the distribution of physical quantity and use the constraints on the total kinetic energy (like in Sec. 5.9) and momentum. Under the condition the disturbances to be zero at infinity, the solution to the problem is (see Appendix 5.11)

правления  $z$ ,  $v$  - возмущение скорости. Мы можем использовать ИС (5.3.2) при инфинитезимальном сдвиге  $\Delta$  вдоль оси  $z$  как меру неоднородности возмущения скорости  $v$ , и попытаться найти возмущения по экстремуму этой меры при ограничениях на кинетическую энергию и импульс возмущений (они должны быть конечны). Пусть возмущение скорости  $v$  обезразмерено на величину макроскопической дрефтовой скорости системы  $V$  в направлении  $z$ , и мы рассматриваем систему в системе координат, движущейся с этой скоростью дрефта. Принимая во внимание, что член первого порядка в ряде (5.3.2) не влияет на экстремум, т.к. его вариация равна нулю, мы приходим к вариационной задаче

где  $\lambda$ ,  $\mu$  - неопределенные множители Лагранжа,  $v' = dv/dz$ ,  $v'' = d^2v/dz^2$ . Кстати, третий член, обусловленный ограничением на импульс, напоминает по математической форме ограничение на плотность вероятности, которая должна быть нормирована. Задача (5.10.1) не эквивалентна ПМИФ, потому что мы применяем ИС непосредственно к распределению физической величины и используем ограничения на полные кинетическую энергию (как в п.5.9) и импульс. При условии, что возмущения равны нулю на бесконечности, решение задачи дается уравнением (см. Аппендикс 5.11)

$$\int dz \delta v \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial v'} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial v''} - \dots \right) \left( \frac{\Delta^2}{2} \left( \frac{(v')^2}{v} - v'' \right) - \lambda v^2 - \mu v \right) = 0.$$

After simple calculations we obtain

$$\frac{\Delta^2}{2} \left( \left( \frac{v'}{v} \right)^2 - 2 \frac{v''}{v} \right) - 2\lambda v - \mu = 0. \quad (5.10.2)$$

It turns out that KdV in the moving frame can be derived from eq.(5.10.2) when an additional constraint is imposed on the system:

$$B + Cv^2 = \frac{(v')^2}{v} - v''. \quad (5.10.3)$$

From a physical view point we can interpret this condition as a "balance" between the kinetic energy, dissipation (the second derivative), and effective non-uniformity measure. On the other hand, two equations (5.10.1) and (5.10.3) are reminiscent of the EPIP [4]  $I=J=extremum=0$  where the constraints are considered as the parts of "equivalent information" which was called later by Frieden a physical information which is to be zero. The difference is that we can not include the momentum term in this balance, the term being significant (see next) for the derivation of KdV. Note that we can derive KdV from both equations (5.10.2) and (5.10.3), but not from the any one of the two.

Taking the derivative  $d/dz$  of eq.(5.10.3), expressing from the resulting equation the bracket

$$\left( \left( \frac{v'}{v} \right)^2 - 2 \frac{v''}{v} \right),$$

and substituting it into eq.(5.10.2), we obtain the equation

$$\frac{2\mu}{\Delta^2} v' + 2 \left( C + \frac{2\lambda}{\Delta^2} \right) v v' + v''' = 0, \quad (5.10.4)$$

После простых вычислений мы получаем

Оказывается, что КдВ в движущейся системе координат может быть получено из ур. (5.10.2), когда на систему наложено дополнительное ограничение

С физической точки зрения мы можем трактовать это условие как "баланс" между кинетической энергией, диссипацией (вторая производная) и эффективной мерой неоднородности. С другой стороны, два уравнения (5.10.1) и (5.10.3) напоминают ПЭФИ [4]  $I=J=extremum=0$ , когда ограничения рассматриваются как части "эквивалентной информации", позже названной Фриденом физической информацией, которая должна равняться нулю. Различие состоит в том, что мы не можем включить в этот баланс импульс, который существенен (см. ниже) для вывода КдВ. Заметим, что мы можем вывести КдВ из двух уравнений (5.10.2) и (5.10.3), но не из какого-либо одного из них.

Беря производную  $d/dz$  от ур.(5.10.3), выражая из результирующего уравнения скобку

и подставляя ее в ур.(5.10.2), мы получим уравнение

which is KdV in the moving frame  $z=x+Vt$ ,  $V=2\mu/\Delta^2$  ( $\partial_t=V\partial_z$ ,  $\partial_x=\partial_z$ ,  $\partial_z=\partial/\partial z$ ). Eq.(5.10.4) is an approximation valid for the small but finite shifts. KdV is also the approximation for the case of long waves that is in correspondence with the use of small shifts.

KdV in its "canonical" form reads [23]

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0. \quad (5.10.5)$$

The soliton solution to this equation is

$$v_0(z) = 2\eta^2 \sec^2(\eta z), z = x + 4\eta^2 t, \quad (5.10.6)$$

which obeys condition (5.10.3) with parameters  $C=1$ ,  $B=0$ . So, if we choose  $V=2\mu/\Delta^2=4\eta^2$ , or  $\mu=2\eta^2\Delta^2$ ,  $2(1+2\lambda/\Delta^2)=6$ , or  $\lambda=\Delta^2$ , for the Lagrange multipliers, we obtain the solution to the problem (5.10.1) in the canonical form of KdV. The value of the shift must be chosen in correspondence to the physical nature of the system under study. On the other hand, we see that all the terms in problem (5.10.1), when  $\mu=2\eta^2\Delta^2$ ,  $\lambda=\Delta^2$ , are proportional to  $\Delta^2$  and we could omit the squared shift before finding the extremum.

By the way, in trying to justify the choice of physical shift for the KdV derivation to answer the Dr. Frieden's question of what is the sense of the shift in private communication to the author, the latter came to the use of Heisenberg uncertainty principle to choose the right shift in derivation of Schroedinger equation (5.3.6).

KdV can be obtained in a more general form with a free pa-

которое является КдВ в движущейся системе координат  $z=x+Vt$ ,  $V=2\mu/\Delta^2$  ( $\partial_t=V\partial_z$ ,  $\partial_x=\partial_z$ ,  $\partial_z=\partial/\partial z$ ). Ур. (5.10.4) является аппроксимацией, верной для малых конечных сдвигов. КдВ так же является аппроксимацией для случая длинных волн, что находится в соответствии с использованием малых сдвигов.

В своей "канонической" форме КдВ имеет вид [23]

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0. \quad (5.10.5)$$

Солитонное решение этого уравнения есть

$$v_0(z) = 2\eta^2 \sec^2(\eta z), z = x + 4\eta^2 t, \quad (5.10.6)$$

которая удовлетворяет уравнение (5.10.3) с параметрами  $C=1$ ,  $B=0$ . Поэтому, если мы выберем значения  $V=2\mu/\Delta^2=4\eta^2$ , или  $\mu=2\eta^2\Delta^2$ ,  $2(1+2\lambda/\Delta^2)=6$ , или  $\lambda=\Delta^2$ , для множителей Лагранжа, мы получим решение задачи (5.10.1) в канонической форме КдВ. Величина сдвига должна быть выбрана в соответствии с физической природой исследуемой системы. С другой стороны, мы видим, что все члены в задаче (5.10.1), когда  $\mu=2\eta^2\Delta^2$ ,  $\lambda=\Delta^2$ , пропорциональны  $\Delta^2$ , и мы можем опустить квадрат сдвига до поиска экстремума.

Кстати, пытаясь оправдать выбор физического сдвига для вывода КдВ, чтобы ответить на вопрос д-ра Фридена о смысле физического сдвига в частном письме автору, последний пришел к использованию принципа неопределенности Гейзенберга для выбора правильной величины сдвига для вывода уравнения Шредингера (5.3.6).

КдВ может быть получено в более общей форме со свободным пара-

parameter [24]

$$v_t + vv_x + Rv_{xxx} = 0, R = \text{const}, \quad (5.10.7)$$

which can be reduced to the form (5.10.6) by the scaling space and time coordinates, and the function  $v$ . This is equivalent to our solution (5.10.4), and thus  $\Delta$ , like  $R$ , simply scales the problem and the specific choice of  $\Delta$  (which is to be small, nevertheless) does not influence the result qualitatively. More exactly, squared shift value  $\Delta^2$  is a scaling parameter.

We can now evaluate the information contents of the solution (5.10.6) making use of symmetric shift information

$$I(\pm\Delta) \cong \frac{\Delta^2}{2} \int \left( \frac{(v'_0)^2}{v_0} - v''_0 \right) dz = \frac{\Delta^2}{2} 4\eta^3 \int \frac{dz}{ch^4(z)} = \frac{8}{3} \eta^3 \Delta^2. \quad (5.10.8)$$

Taking into account the physical sense of the additional constraint (5.10.3), it may be said that minimized, squeezed information, being proportional to the total kinetic energy, is *conserved*. This is reminiscent of both: the ascribing the intrinsic energy measure via the Einstein formula to undimensioned shift informations in Secs. 5.3, 5.8, and the "normalization" of the latent entropies of phase transitions by molar mass in the context of structural information in Sec.8.1.

To include into consideration the more general KdV solution ("cnoidal waves")

$$v(z) = \beta + (\alpha + \beta)cn^2(\omega z, k), \quad \omega = \frac{\sqrt{\alpha - \gamma}}{4}, \quad z = x + Vt, \quad (5.10.9)$$

$$V = 2(\alpha + \beta + \gamma), \quad k = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}, \quad 0 \leq k \leq 1, \gamma \leq \beta \leq \alpha,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  being arbitrary constants, the  $\alpha, \beta, \gamma$  - произвольные постоянные, ог-

метром [24]

которая может быть сведена к форме (5.10.6) выбором масштабов пространства, времени и функции  $v$ . Это эквивалентно решению (5.10.4), и таким образом  $\Delta$ , как и  $R$ , просто масштабирует задачу, и специальный выбор  $\Delta$  (который должен быть малым, тем не менее) не влияет на результат качественно. Более точно, масштабным параметром является квадрат величины сдвига  $\Delta^2$ .

Мы можем теперь оценить информационное содержание решения (5.10.6), используя симметричную ИС

Принимая во внимание физический смысл дополнительного ограничения (5.10.3), можно сказать, что минимизированная, сжатая информация, будучи пропорциональной кинетической энергии, *сохраняется*. Это напоминает два момента: приписывание внутренне присущей меры энергии по формуле Эйнштейна безразмерным информациям сдвига в разделах 5.3, 5.8, и "нормировку" скрытых энтропий фазовых переходов на молярную массу в контексте структурной информации в разделе 8.1.

Для включения в рассмотрение более общего решения КдВ (кноидальные волны)

constraint (5.10.3) should be parameterized by the same parameter  $k$  as the solution (5.10.9). For  $\beta=0$  this constraint is satisfied, if  $C=k^2$ ,  $B=\alpha^2(1-k^2)$ ,  $\alpha$  is the amplitude of the wave solution (5.10.9). For  $k=1$ ,  $\beta=\gamma$ , we obtain the constraint corresponding to the soliton solution (5.10.6), and so is the solution (5.10.9), as it must be.

It is easy to verify that a generalization of KdV

$$v_t + 2v^q v_x + v^{(2r+1)} = 0 \quad (5.10.10)$$

in the moving frame can be derived as a solution to an SI based variational problem

$$\frac{\Delta^2}{2} \int \left( \frac{(v')^2}{v} - v'' \right) dz - \lambda \int v^{q+1} dz - \mu \int v dz = \text{extremum}, \quad (5.10.11)$$

with an additional constraint

$$B + Cv^{q+1} = \frac{(v')^2}{v} - v^{(2r)}, \quad (5.10.12)$$

but the physical sense of such manipulations is obscure.

раничение (5.10.3) должно быть параметризовано тем же параметром  $k$ , как и решение (5.10.9). Для  $\beta=0$  это ограничение удовлетворяется, если  $C=k^2$ ,  $B=\alpha^2(1-k^2)$ ,  $\alpha$  - амплитуда волнового решения (5.10.9). При  $k=1$ ,  $\beta=\gamma$ , мы получаем ограничение, соответствующее солитонному решению (5.10.6), к которому сводится решение (5.10.9), как это и должно быть.

Легко проверить, что обобщение КдВ

в движущейся системе координат может быть выведено, как решение вариационной задачи на основе ИС

с дополнительным ограничением

но физический смысл таких манипуляций неясен.

### 5.11. Appendix (some problems of variational calculus and generalized variation operator)

First, consider the simplest variational problem of finding an extremum of a functional

$$\int_a^b L(p, p') dx = \text{extremum}, \quad (5.11.1a)$$

where  $p=p(x)$  is unknown function of variable  $x$  and  $L(p, p')$  is a given function of  $p$  and its derivative  $p'=dp/dx$ . Let  $L(p, p')$  and  $p(x)$  be well-behaved functions and  $\delta(p)$  be an operator of variation of function  $p(x)$ . The solution to this problem in the case of fixed (invariable)  $p(a)$ ,  $p(b)$  is obtained by integration by parts:

$$\begin{aligned} \delta(p) \int_a^b L(p, p') dx &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p'} \delta p' \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p'} (\delta p)' \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) \delta p dx + \frac{\partial L}{\partial p'} \delta p \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \delta p dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \right) \delta p dx = 0, \end{aligned}$$

that results in the Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' = 0. \quad (5.11.1b)$$

The solution of this equation provides extremum of functional (5.11.1a).

A somewhat generalized version of problem (5.11.1a) is a problem

$$\int_a^b L(p, p', p'') dx = \text{extremum}, \quad (5.11.2a)$$

where  $p''$  is a second derivative

### 5.11. Аппендикс (некоторые задачи вариационного исчисления и обобщенный оператор вариации)

Сначала рассмотрим простейшую вариационную задачу поиска экстремума функционала

$$\int_a^b L(p, p') dx = \text{extremum}, \quad (5.11.1a)$$

где  $p=p(x)$  - неизвестная функция переменной  $x$ , а  $L(p, p')$  - данная функция  $p$  и ее производной  $p'=dp/dx$ . Пусть  $L(p, p')$  и  $p(x)$  обладают необходимыми свойствами, и  $\delta(p)$  - оператор вариации функции  $p(x)$ . Решение этой задачи в случае фиксированных (неизменяемых)  $p(a)$ ,  $p(b)$  находится интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \delta(p) \int_a^b L(p, p') dx &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p'} \delta p' \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p'} (\delta p)' \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) \delta p dx + \frac{\partial L}{\partial p'} \delta p \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \delta p dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \right) \delta p dx = 0, \end{aligned}$$

что приводит к уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' = 0. \quad (5.11.1b)$$

Решение этого уравнения обеспечивает экстремум функционала (5.11.1a).

Несколько более общей версией задачи (5.11.1a) является задача

$$\int_a^b L(p, p', p'') dx = \text{extremum}, \quad (5.11.2a)$$

где  $p''$  - вторая производная  $d^2p/dx^2$ ,  $p$

$d^2p/dx^2$ ,  $p$  and  $p'$  are assumed to be fixed at the boundaries  $x=a$ ,  $x=b$ . In analogous way we obtain:

$$\begin{aligned} \delta(p) \int_a^b L(p, p', p'') dx &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p'} \delta p' + \frac{\partial L}{\partial p''} \delta p'' \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \right) \delta p dx + \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right) (\delta p)'' dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \right) \delta p dx + \frac{\partial L}{\partial p''} (\delta p)' \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right)' (\delta p)' dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' \right) \delta p dx - \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right)' \delta p \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right)'' \delta p dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' + \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right)'' \right) \delta p dx = 0. \end{aligned}$$

Thus the solution to the problem (5.11.2a) is

Таким образом, решение задачи (5.11.2a) есть

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p'} \right)' + \left( \frac{\partial L}{\partial p''} \right)'' = 0. \quad (5.11.2b)$$

Evidently, if  $L$  is a well behaved function of any arbitrary collection of derivatives  $p^{(k)}$ , then solution to a problem

Очевидно, если  $L$  является непрерывной функцией произвольного набора производных  $p^{(k)}$ , то решением задачи

$$\int_a^b L(\{p^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,\infty}) dx = \text{extremum}, \quad \delta p^{(k)}(a) = \delta p^{(k)}(b) = 0, \quad (5.11.3a)$$

is given by equation

дается уравнением

$$\delta(p)L=0, \quad \delta(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{d}{dx} \right)^k \frac{\partial}{\partial p^{(k)}}. \quad (5.11.3b)$$

In a more general case, when  $L$  depends on a set of unknown functions  $\{p_i(x)\}_{i=1,\dots,M}$  and their derivatives, the solution to the corresponding problem is a set of equations

В более общем случае, когда  $L$  зависит от множества неизвестных функций  $\{p_i(x)\}_{i=1,\dots,M}$  и их производных, решением соответствующей задачи будет система уравнений

$$\delta(p_i)L=0, \quad i=1,\dots,M, \quad (5.11.4)$$

with variation operator given by с оператором вариации согласно (5.11.3b).

Consider now a problem [25] Рассмотрим теперь задачу [25]

$$\int_D L(p, p_x, p_y, p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}) dx dy = \text{extremum}, \quad (5.11.5a)$$

where  $L$  is a well-behaved function of  $p(x,y)$  (function of two variables) and its partial derivatives, integration is over a two-dimensional region  $D$ , and all the variations ( $\delta p$ ,  $\delta p_x$ , etc.) are zero on its boundary  $\partial D$ . The solution to the problem is given by zero variation of the functional: где  $L$  есть "хорошая" функция от  $p(x,y)$  (функция двух переменных) и ее частных производных, интегрирование проводится по двумерной области  $D$ , и все вариации ( $\delta p$ ,  $\delta p_x$ , и пр.) обращаются в нуль на ее границе  $\partial D$ . Решение этой задачи дается нулевой вариацией функционала:

$$0 = \delta(p) \int_D L dx dy = A_1 + A_2$$

$$= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p_x} \delta p_x + \frac{\partial L}{\partial p_y} \delta p_y \right) dx dy + \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p_{xx}} \delta p_{xx} + \frac{\partial L}{\partial p_{xy}} \delta p_{xy} + \frac{\partial L}{\partial p_{yy}} \delta p_{yy} \right) dx dy = 0.$$

Consider the two integrals  $A_1$  and  $A_2$  separately. Рассмотрим два интеграла  $A_1$  и  $A_2$  отдельно

$$A_1 = \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \frac{\partial L}{\partial p_x} (\delta p)_x + \frac{\partial L}{\partial p_y} (\delta p)_y \right) dx dy$$

$$= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \right)_x - \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \right)_y \right) \delta p dx dy + \int_D \left( \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \delta p \right)_x + \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \delta p \right)_y \right) dx dy$$

$$= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \right)_x - \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \right)_y \right) \delta p dx dy + \oint_{\partial D} \left( \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \delta p \right) dy - \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \delta p \right) dx \right)$$

$$= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \right)_x - \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \right)_y \right) \delta p dx dy = 0.$$

Thus the equality  $A_1=0$  is provided by equation Т.е. равенство  $A_1=0$  обеспечивается выполнением условия

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \left( \frac{\partial L}{\partial p_x} \right)_x - \left( \frac{\partial L}{\partial p_y} \right)_y = 0.$$

It would be solution to the problem, if  $L$  would not depend on second derivatives. Это уравнение было бы решением задачи, если  $L$  не зависела бы от вторых производных.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_D \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} (\delta p)_{xx} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} (\delta p)_{xy} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} (\delta p)_{yy} \right) dx dy \\
&= \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} (\delta p) \right)_x + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} (\delta p)_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} (\delta p)_y \right)_y \right) dx dy \\
&\quad - \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_x (\delta p)_x + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y (\delta p)_x + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_y (\delta p)_y \right) dx dy \\
&= \oint_{\partial D} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} (\delta p) \right)_x dy - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} (\delta p)_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} (\delta p)_y \right) dx \right) \\
&\quad - \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_x (\delta p)_x + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y (\delta p)_x + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_y (\delta p)_y \right) dx dy \\
&= - \int_D \left( \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_x \delta p + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y \delta p \right)_x + \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y \delta p \right)_y \right) dx dy \\
&\quad + \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_{xx} \delta p + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_{yx} \delta p + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_{yy} \delta p \right) dx dy \\
&= - \oint_{\partial D} \left( \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_x \delta p + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y \delta p \right)_x dy - \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_y \delta p \right)_y dx \right) \\
&\quad + \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_{xx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_{yx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_{yy} \right) \delta p dx dy \\
&= \int_D \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_{xx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_{yx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_{yy} \right) \delta p dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Thus, solution to the problem (5.11.5a) is

Таким образом решение задачи (5.11.5a) есть

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x} \right)_x - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_y} \right)_y + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xx}} \right)_{xx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{xy}} \right)_{yx} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{yy}} \right)_{yy} = 0. \quad (5.11.5b)$$

Consider now a more general case, for the function  $L$  depends on  $p$  and all its partial derivatives up to the third order, but  $p$  is a function of arbitrary number  $N$  of independent

Рассмотрим теперь более общий случай, когда функция  $L$  зависит от  $p$  и всех ее частных производных вплоть до третьего порядка, но  $p$  при этом зависит от произвольного числа  $N$  неза-

variables belonging to the region  $D$  of a  $N$ -dimensional space, and all the variations (of  $p$  and its derivatives) are zero at the boundary  $\partial D$  of this region:

висимых переменных, принадлежащих области  $D$   $N$ -мерного пространства, и все вариации (функции  $p$  и ее производных) обращаются в нуль на границе  $\partial D$  этой области:

$$\int_D L(p, \{p_i\}, \{p_{ij}\}, \{p_{ijk}\}) dx = \text{extremum}, \quad (5.11.6a)$$

where  $p_i = \partial p / \partial x_i$ ,  $p_{ij} = \partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$ ,  $p_{ijk} = \partial^3 p / \partial x_i \partial x_j \partial x_k$ ,  $dx$  is an infinitesimal volume. To find a solution we use a Newton-Leibniz-Gauss-Ostrogradsky-Green-Stokes-Poincare-Cartan theorem  $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$  [26,27] and usual notations for the differentials of coordinates  $dx_i$  and Hodge star  $*$ .

где  $p_i = \partial p / \partial x_i$ ,  $p_{ij} = \partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$ ,  $p_{ijk} = \partial^3 p / \partial x_i \partial x_j \partial x_k$ ,  $dx$  - инфинитезимальный объем. Для нахождения решения мы используем теорему Ньютона-Лейбница-Гаусса-Остроградского-Грина-Стокса-Пуанкаре-Картана  $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$  [26,27], и обычные обозначения для дифференциалов координат  $dx_i$  и звезды Ходжа  $*$ .

$$\begin{aligned} \delta(p) \int_D L dx &= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \sum_i \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \delta p_{ij} + \sum_{ijk} \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} \delta p_{ijk} \right) dx \\ &= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \sum_i \frac{\partial L}{\partial p_i} (\delta p)_i + \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} (\delta p)_{ij} + \sum_{ijk} \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} (\delta p)_{ijk} \right) dx \\ &= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p + \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p \right)_i - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \right)_i \delta p \right) dx \\ &+ \int_D \left( \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} (\delta p)_j \right)_i - \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \right)_i (\delta p)_j + \sum_{ijk} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} (\delta p)_{jk} \right)_i - \sum_{ijk} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} \right)_i (\delta p)_{jk} \right) dx \\ &= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \right)_i \delta p - \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \right)_i (\delta p)_j - \sum_{ijk} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} \right)_i (\delta p)_{jk} \right) dx \\ &+ \oint_{\partial D} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p + \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} (\delta p)_j \right) + \sum_{jk} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} (\delta p)_{jk} \right) \right) (-1)^{i-1} (*dx_i) \\ &= \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial p} \delta p - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} \right)_i \delta p \right) dx \\ &+ \int_D \left( - \sum_{ij} \left( \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \right)_i \delta p \right)_j + \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ij}} \right)_{ij} \delta p - \sum_{ijk} \left( \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} \right)_i (\delta p)_k \right)_j + \sum_{ijk} \left( \frac{\partial L}{\partial p_{ijk}} \right)_{ij} (\delta p)_k \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p - \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right)_i \delta p + \sum_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} \right)_{ij} \delta p + \sum_{ijk} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_{ijk} (\delta p)_k \right) dx \\
&\quad - \oint_{\partial D} \sum_j \left( \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} \right)_i \delta p + \sum_{ik} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_i (\delta p)_k \right) (-1)^{j-1} (*dx_j) \\
&= \int_D \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} \delta p - \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right)_i \delta p + \sum_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} \right)_{ij} \delta p - \sum_{ijk} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_{ijk} \delta p \right) dx \\
&\quad + \oint_{\partial D} \sum_k \left( \sum_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_{ij} \delta p \right) (-1)^{k-1} (*dx_k) \\
&= \int_D \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right)_i + \sum_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} \right)_{ij} - \sum_{ijk} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_{ijk} \right) \delta p dx = 0.
\end{aligned}$$

Thus, solution to the problem Таким образом решение задачи (5.11.6a) is (5.11.6a) есть

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} - \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \right)_i + \sum_{ij} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ij}} \right)_{ij} - \sum_{ijk} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ijk}} \right)_{ijk} = 0. \quad (5.11.6b)$$

In step by step generalization of this problem we can obtain a more general solution for the case when  $L$  depends on arbitrary collection of partial derivatives of all orders:

При постепенном обобщении этой задачи мы можем получить более общее решение для случая, когда  $L$  зависит от произвольного набора частных производных всех порядков

$$\delta(p)L=0, \quad \delta(p) = \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^N \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n_i} \right) \frac{\partial}{\partial \left( \prod_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n_i} p \right)}, \quad (5.11.6c)$$

assuming  $(\partial \partial x_i)^0=1$ . Each product of derivatives  $\partial_i = \partial / \partial x_i$  power  $n_i$  can be uniquely related to some "vector"  $n=(n_1, \dots, n_N)$ , and using the notations

подразумевая  $(\partial \partial x_i)^0=1$ . Каждое произведение производных  $\partial_i = \partial / \partial x_i$  в степенях  $n_i$  можно однозначно сопоставить "вектору"  $n=(n_1, \dots, n_N)$ , и с помощью обозначений

$$\prod_{i=1}^N \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n_i} = \partial(-n), \quad \prod_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{n_i} = \partial(n),$$

we can rewrite  $\delta(p)$  in a compact form

мы можем записать  $\delta(p)$  в компактной форме

$$\delta(p) = \sum_n \delta(-n) \frac{\partial}{\partial(\delta(n)p)}, \quad (5.11.7)$$

where the sum is over all possible "vectors"  $n$  with non-negative integer "coordinates". Evidently, for the function  $L$  depends on a set of functions  $\{p_l\}_{l=1,\dots,M}$  the solution to the corresponding many dimensional problem is a set of equations  $\delta(p_l)L=0$  like it was for the one dimensional case (5.11.4). The variation operator  $\delta(p)$  in the most general form (5.11.7) can be applied to all particular cases above that is why no distinctions were made between the notations of this operator in the particular cases.

The variation operator in its general form enables to obtain the general results that can be used for solution of concrete problems. For example, for any partial derivative of  $k$ -th order  $p^{(k)}$ , we have

$$\delta(p)Ap^{(k)} = A^{(k)}. \quad (5.11.8)$$

For a one dimensional case  $N=1$ ,  $p=p(\xi)$  we obtain

$$\delta(p)\left(p\partial_\xi^n(\ln p)\right) = \partial_\xi^n(\ln p) + \left(-\partial_\xi^n p\right)\frac{1}{p}, \quad (5.11.9a)$$

and so, applying this formula to the Taylor series, we can obtain an exact relation

$$\delta(p)\left(p(\xi)\ln p(\xi + \Delta)\right) = \ln p(\xi + \Delta) + \frac{p(\xi - \Delta)}{p(\xi)}, \quad (5.11.9b)$$

on the base of which we can write out for a one dimensional shift information (for any shift) another exact relation

$$\delta(p)\left(p(\xi)\ln\frac{p(\xi)}{p(\xi + \Delta)}\right) = 1 + \ln\left(\frac{p(\xi)}{p(\xi + \Delta)}\right) - \frac{p(\xi - \Delta)}{p(\xi)}. \quad (5.11.9c)$$

где сумма берется по всем возможным "векторам"  $n$  с неотрицательными целыми "координатами". Очевидно, когда функция  $L$  зависит от набора функций  $\{p_l\}_{l=1,\dots,M}$ , решение соответствующей многомерной задачи дается системой уравнений  $\delta(p_l)L=0$ , как это было и в одномерном случае (5.11.4). Оператор вариации в наиболее общей форме (5.11.7) может применяться ко всем частным случаям, описанным выше, и поэтому мы не делали различий в обозначениях этого оператора в частных случаях.

Оператор вариации в его общей форме позволяет получать общие результаты, которые можно использовать при решении конкретных задач. Например, для любой частной производной  $k$ -го порядка  $p^{(k)}$ , имеем

Для одномерного случая  $N=1$ ,  $p=p(\xi)$  имеем

и поэтому, применяя эту формулу к разложению ряда Тейлора, получим точное соотношение

на основе которого мы можем записать для одномерной информации (любого) сдвига так же точное соотношение

## References

## Литература

1. Frieden B.R. *Fisher information, disorder, and the equilibrium distributions of physics*. Phys.Rev.A, 1990, **41**, N8, 4265-4276.
2. Frieden B.R. *Fisher information and the complex nature of the Schroedinger wave equation*. Found.Phys., 1991, **21**, N7, 757-771.
3. Frieden B.R. *Fisher information as the basis for Maxwell's equations*. Physica A, 1992, **180**, 359-385.
4. Frieden B.R. *Estimation of distribution laws, and physical laws, by a principle of extremized physical information*. Physica A, 1993, **198**, 262-338.
5. Frieden B.R., Hughes R.J. *Spectral 1/f noise derived from extremized physical information*. Phys.Rev.E, 1994, **49**, N4, 2644-2649.
6. Nikolov B., Frieden B.R. *Limitation on entropy increase imposed by Fisher information*. Phys.Rev.E, 1994, **49**, N6, 4815-4820.
7. Frieden B.R., Soffer B.H. *Lagrangians of physics and the game of Fisher information transfer*. Phys.Rev.E, 1995, **52**, N3, 2274-2286.
8. Frieden B.R., Cocke W.J. *Foundation for Fisher information based derivations of physical laws*. Phys.Rev.E, 1996, **54**, N1, 257-260.
9. Cocke W.J., Frieden B.R. *Information and Gravitation*. Found.Phys., 1997, **27**, N10, 1397-1412.
10. Vstovsky G.V. *Interpretation of extreme physical information principle in term of shift information*. Phys.Rev.E, 1995, **51**, N5, 975-979.
11. Vstovsky G.V. *Transform information: A symmetry breaking measure*. Found.Phys., 1997, **27**, N10, 1413-1444.
12. Fisher R.A. *Theory of statistical estimation*. Proc.Cambridge Philos.Soc., 1925, **22**, 700-725.
13. Fisher R.A. *Statistical information*. In (*Essays on the use of Information Theory in Biology*. Quastler H. (Ed.) (Urbana, University of Illinois Press, 1953). P. 12-13.
14. Fisher R.A. *Statistical Methods and Scientific Inference* (New York, London, Hufner Press, 1973).
15. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York, etc., Springer-Verlag, 1986). Олвер П.Дж. *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям* (Москва, Мир, 1989).
16. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P. *Quantum Electrodynamics, Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics, Vol.IV* (Moscow, Nauka, 1989). Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика. Курс теоретической физики Т.IV* (Москва, Наука, 1989).
17. Kullback S., Leibler R.A. *On information and sufficiency*. Ann.Math.Statist. 1951, **22**, 79-86.
18. Kullback S. *Information Theory and Statistics* (New York, London, Wiley and Chapman & Hall, 1959),

19. Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity. An Introduction* (New York, Freeman, 1989). Николис Г., Пригожин И. *Познание сложного. Введение* (Москва, Мир, 1990).
20. Schloegl F. *Statistical ground of Glansdorf-Prigogine evolution criterion*. In *Thermodynamics and Regulation of Biological Process*. Lamprecht I., Zotin A.I. (Eds.) (Berlin, etc., Walter de Gruyfer, 1984). Шлёгль Ф. *Статистическое обоснование эволюционного критерия Глэнсдорфа-Пригожина*. В сб.: *Термодинамика и регуляция биологических процессов*. Под ред. Зотина А.И. (Москва, Наука, 1984).
21. Brasher J.D. *Nonlinear wave mechanics, information theory, and thermodynamics*. Int.J.Theor.Phys., 1991, **30**, N7, 979-984.
22. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (London, etc., Academic Press, 1984). Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (Москва, Мир, 1986).
23. Newell A.C. *Solitons in Mathematics and Physics* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1985). Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике* (Москва, Мир, 1989).
24. Bhatnagar P.L. *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems* (Oxford, Clarendon Press, 1979). Бхатнагар П. *Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах* (Москва, Мир, 1983).
25. Elsgolz L.E. *Differential Equations and Variational Calculus* (Moscow, Nauka, 1969) [in Russian]. Эльсгольц Л.Е. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* (Москва, Наука, 1969).
26. Ryder L.H. *Quantum Field Theory* (Cambridge Univ.Press, 1985). Райдер Л. *Квантовая теория поля* (Москва, Мир, 1988).
27. Arnol'd V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Moscow, Nauka, 1989) [in Russian]. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики* (Москва, Наука, 1989).

## 6. Information ground of action invariance principle

As we have seen above, application of transform information to the non-probabilistic distributions leads to the reasonable results like the nonlinear equations and gas-mixing entropy. In this chapter we use this concept in the case when physical system is described by a complex Wiener-Feynman-Kac (WFK) measure which is of great importance for the quantum mechanics and quantum field theory [1-7]. Next we derive action invariance by formal application of transform information to this measure for the information generating transform has a unit Jacobian.

### 6.1. Wiener-Feynman-Kac (WFK) measure

Following to Kac [1], first let us introduce the concept of WFK-measure. As was shown by Einstein and Smoluchovsky, a probability  $P(Q)$  of an event  $Q$ , that a trajectory of a Brownian particle  $x(t)$  in one dimensional case placed at  $t=0$  at the point  $x(0)=0$  will satisfy the condition

$$x(0)=0, a_1 < x(t_1) < b_1, a_2 < x(t_2) < b_2, \dots, a_n < x(t_n) < b_n, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \quad (6.1.1)$$

is

$$P(Q) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} p(0 \setminus x_1, t_1) p(x_1 \setminus x_2, t_2 - t_1) p(x_2 \setminus x_3, t_3 - t_2) \dots p(x_{n-1} \setminus x_n, t_n - t_{n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$p(x \setminus y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right), \quad (6.1.2)$$

where  $D$  is for a diffusion coefficient

## 6. Информационное обоснование принципа инвариантности действия

Как мы видели выше, применение информации преобразования к вероятностным распределениям приводит к разумным результатам типа нелинейных уравнения и энтропии смешения газов. В этой главе мы используем это понятие в случае, когда физическая система описывается комплексной мерой Винера-Фейнмана-Каца (ВФК), которая имеет большое значение для квантовой механики и квантовой теории поля [1-7]. Ниже мы выведем инвариантность действия с помощью формального использования информации преобразования этой меры, когда информационно производящее преобразование имеет единичный якобиан.

### 6.1. Мера Винера-Фейнмана-Каца (ВФК)

Следуя Кацу [1], введем сначала понятие ВФК меры. Как было показано Эйнштейном и Смолуховским, вероятность  $P(Q)$  события  $Q$ , что траектория броуновской частицы в одномерном случае, помещенной при  $t=0$  в точку  $x(0)=0$ , будет удовлетворять условию

есть

где  $D$  обозначает коэффициент диффу-

cient ("diffusion constant").

Wiener called the condition (6.1.1) a quasi-interval and introduced the concept of quasi-interval measure  $P(Q)$  by definition. He also proved the existence of the integral, or mean, with respect to this measure. Let  $E$  signs an expectation with respect to the measure of quasi-intervals. Consider the Wiener integral

$$E \left[ \exp \left( - \int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right) \right], \tag{6.1.3}$$

taking into account that

$$\begin{aligned} \int_0^t V(x(\tau)) d\tau &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n V(x(kt/n)) \right). \\ E \left[ \exp \left( - \int_0^t V(x(\tau)) d\tau \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \exp \left( - \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n V(x(kt/n)) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( - \frac{t}{n} V(x_k) \right) p(x_{k-1} \setminus x_k, t/n) dx_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt/n}} \exp \left( - \frac{t}{n} V(x_k) - \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4Dt/n} \right) dx_k. \end{aligned}$$

The existence of this integral follows from the measurability (here it can be said - continuity) of the function  $V(x)$ .

Feynman actually obtained this integral into another form [2,3]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4\pi Dt/n)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( - \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \left( V(x_k) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{t/n} \right)^2 \frac{1}{2D} \right) \right) \prod_{k=1}^n dx_k,$$

which can be written symbolically as integration over all possible trajectories

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( - \int_0^t \left( \frac{(dx/d\tau)^2}{4D} + V(x(\tau)) \right) d\tau \right) d(\text{trajectory}).$$

Fig.6.1 schematically shows this limit transition. More exactly, Feynman, when considering the

зии ("диффузионную постоянную").

Винер назвал условие (6.1.1) квазиинтервалом и ввел понятие меры квазиинтервала  $P(Q)$  по определению. Он также доказал существование интеграла, или среднего, по этой мере. Пусть  $E$  обозначает ожидание по отношению к мере квазиинтервалов. Рассмотрим интеграл Винера

принимая во внимание, что

Существование этого интеграла следует из измеримости (здесь можно сказать - из непрерывности) функции  $V(x)$ .

Фейнман фактически получил тот же интеграл в другой форме [2,3]

который символически может быть записан как интеграл по всем возможным траекториям

Рис.6.1 схематично показывает этот предельный переход. Более точно, Фейнман, при рассмотрении движения

movement of a particle of mass  $m$  in the potential field  $V(x)$ , came independently to an expression

$$\int_{\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x(\tau)) \right) d\tau \right] Dx(t), \quad (6.1.4)$$

that is Wiener integral with other coefficients, but in this expression we can easily recognize an action integral, and the integral (6.1.4) takes a form of integration over exponents of all possible action integrals. As was pointed out by Кас [1], an imaginary coefficient  $i/\hbar$ ,  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  is Plank constant, makes the rigorous consideration difficult.

частицы массы  $m$  в потенциальном поле  $V(x)$ , независимо пришел к выражению

которое является интегралом Винера с другими коэффициентами, но в этом выражении мы легко можем узнать интеграл действия, и интеграл (6.1.4) принимает форму интегрирования по экспонентам всех возможных интегралов действия. Как было замечено Касцем, мнимый коэффициент  $i/\hbar$ ,  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  - постоянная Планка, делает трудным строгое рассмотрение.

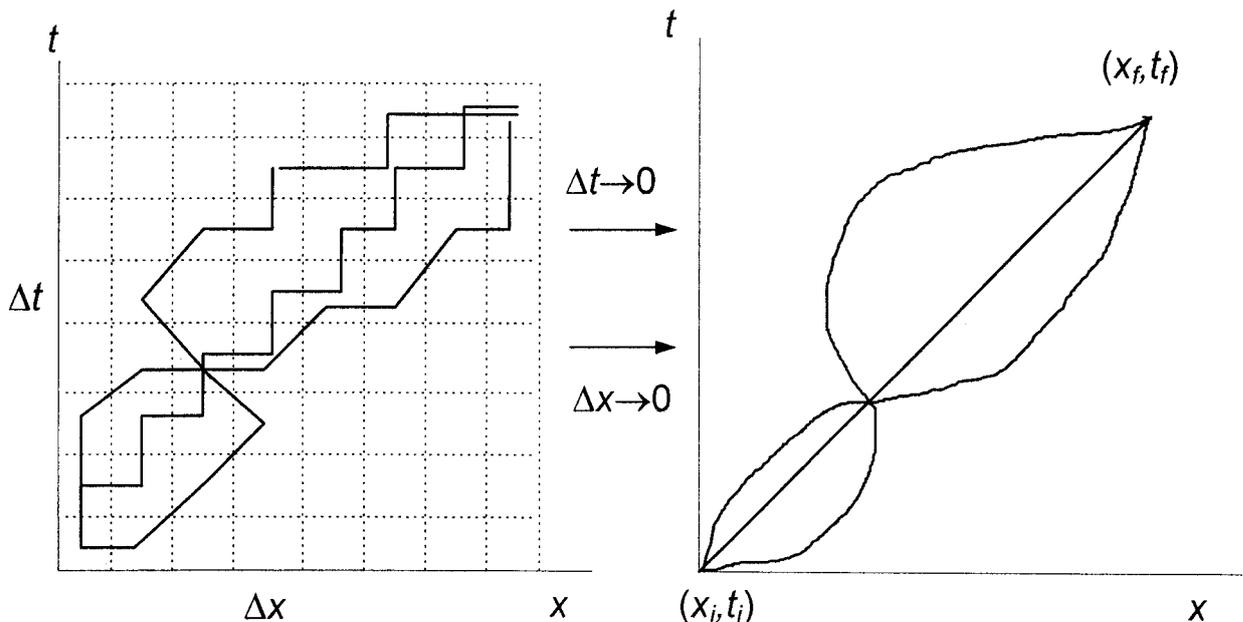


Fig.6.1. Three discrete possible sequences of Brownian particle positions (quasi-intervals) and their limits (trajectories) in the one dimensional case.

Рис.6.1. Три дискретные последовательности возможного положения броуновской частицы (квазиинтервалы) и их пределы (траектории) в одномерном случае.

Feynman proposed also a more general expression for a quantum mechanical propagator (an amplitude of a probability for particle of mass  $m$  to pass from the initial point  $q_i$  at time  $t_i$  to the final point  $q_f$  at time  $t_f$ ):

$$\langle q_f t_f \mid q_i t_i \rangle = \int \frac{Dq Dp}{h} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} (pq - H(p, q)) dt\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^n dq_k \int \prod_{k=0}^n \frac{dp_k}{h} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^n \left( p_k \frac{q_{k+1} - q_k}{(t_f - t_i)/n} - H\left(p_k, \frac{q_{k+1} + q_k}{2}\right) \right) \frac{t_f - t_i}{n}\right),$$

where  $q, p$  are the coordinates and momenta,  $H(p, q)$  is a Hamiltonian of the system. In a particular case when

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

taking the Gauss integrals over all momenta, one can reduce the propagator to the form

$$\langle q_f t_f \mid q_i t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{ih\tau}\right)^{(n+1)/2} \int \prod_{k=1}^n dq_k \exp\left(\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{k=0}^n \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\tau}\right)^2 - V(q_k)\right)\right)$$

$$= N \int Dq \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt\right) = N \int Dq \exp(iS/\hbar), \quad (6.1.5)$$

where  $N$  is a normalization factor,  $L$  - Lagrangian,  $S$  - action integral. The latter expression is analogous to (6.1.4). Such expressions are called also the functional, or path, integrals since they can be interpreted as the limits of sums (integrals) over the space of continuous coordinate sequences (trajectories), to which the complex measure, proportional to  $\exp(iS/\hbar)$ , is assigned. We call it here WFK-measure.

Фейнман предложил так же более общее выражение для квантовомеханического пропагатора (амплитуды вероятности для частицы массы  $m$  переместиться из начальной точки  $q_i$  в момент времени  $t_i$  в конечную точку  $q_f$  в момент времени  $t_f$ ):

где  $q, p$  - координаты и импульсы.  $H(p, q)$  - гамильтониан системы. В частном случае когда

беря гауссовы интегралы по импульсам, можно свести пропагатор к виду

где  $N$  - нормирующий множитель,  $L$  - лагранжиан,  $S$  - интеграл действия. Последнее выражение аналогично (6.1.4). Такие выражения называются также функциональными интегралами, или интегралами по траекториям, поскольку их можно представить в виде пределов сумм по пространству непрерывных последовательностей координат (траекторий), которым приписана комплексная мера, пропорциональная  $\exp(iS/\hbar)$ , Мы называем ее здесь ВФК мерой.

## 6.2. Affine information

In the physical theories using the path integration method the set of possible trajectories or the set of possible state sequences is used as (the part of) the support set, and the WFK measure is used as the set of intensities (in terms of Ch.3) [1-6]. "In introducing such a measure the Minkowskian space is first transformed through a Wiek rotation into an Euclidean space. The calculations are done in the framework of the Euclidean metric and the results are finally reinterpreted in the usual physical space" [5]. Speaking in a quite simple way, physical time is replaced by the imaginary one  $t \rightarrow it/\hbar$  and the measure of one trajectory becomes proportional to  $\exp(-S)$ , where  $S$  is an action integral in the units of Plank constant.

Let  $x = \{x_n\}$  be the space coordinates, then the measure of one possible trajectory (in a sense of quasi-intervals [1]) is

$$d\mu = \prod_n dx_n \exp(-S[x]) / Z, \quad Z = \int \exp(-S[x]) \prod_n dx_n. \quad (6.2.1)$$

Consider some transformation  $x \rightarrow x'$ , when the action integral transforms as  $S \rightarrow S'$ . We can built up a measure of non-uniformity of this measure of the coordinate sequences (trajectories). Consider a specific form of transform information which we call here an *affine information*

$$I_{aff} = \int d\mu \ln(d\mu/d\mu'), \quad (6.2.2)$$

$$d\mu' = \prod_n dx'_n \exp(-S[x']) / Z', \quad Z' = \int \exp(-S[x']) \prod_n dx'_n.$$

Thus

## 6.2. Аффинная информация

В физических теориях, использующих метод интегралов по траекториям, множество возможных траекторий, или множество возможных последовательностей состояний, используется как базовое множество (или его часть), а ВФК мера используется как множество интенсивностей (в терминах Гл.3) [1-6]. "При введении такой меры пространство Минковского сначала трансформируется поворотом Вика в евклидово пространство. Вычисления делаются в системе с евклидовой метрикой, а результаты окончательно реинтерпретируются в обычном физическом пространстве" [5]. Говоря по-просту, физическое время заменяется на мнимое  $t \rightarrow it/\hbar$ , и мера одной траектории становится пропорциональной  $\exp(-S)$ , где  $S$  есть интеграл действия в единицах постоянной Планка.

Пусть  $x = \{x_n\}$  - пространственные координаты, тогда мера одной возможной траектории (в смысле квазиинтервалов [1]) равна

Рассмотрим некоторое преобразование  $x \rightarrow x'$ , когда интеграл действия преобразуется как  $S \rightarrow S'$ . Мы можем построить меру неоднородности этой меры координатных последовательностей (траекторий). Рассмотрим частный случай информации преобразования, которую мы называем здесь *аффинной информацией*

Таким образом

$$I_{aff} = \int \frac{1}{Z} \prod_n dx_n \exp(-S[x]) \ln \left[ \frac{\prod_n x_x \exp(-S[x]) / Z}{\prod_n x'_n \exp(-S[x']) / Z'} \right]$$

The path and action integrals can be rewritten as the limits of sums and we can simplify this equation using the usual properties of logarithmic and exponential functions. After rather simple converting, the latter equation reads

$$I_{aff} = \int \frac{1}{Z} \prod_n dx_n \exp(-S[x]) \left( \ln \left[ \frac{Z' \prod_n x_x}{Z \prod_n x'_n} \right] + S[x'] - S[x] \right). \quad (6.2.3)$$

We can redo these computations also when the more general action integral form is used

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt (p(dx/dt) - H(p,x)),$$

(where  $t$  is a time,  $p$  is momentum,  $H(p,x)$  is a Hamiltonian,  $t_i$  and  $t_f$  are the limits of integration). The path integral (6.2.2) with this more general form of action integral can also be reduced to the form similar to eq.(6.2.3) in analogous way.

For the shifts in space and time, rotations and other transforms with unit Jacobians the logarithmic term in eq.(6.2.3) is zero, and the requirement the system to be invariant under these transforms, i.e. the symmetry property expressed by the equation  $I_{aff} = 0$ , results in action invariance.

From a formal mathematical view point, all derivations can be delivered without using the Wiek rotation, but applying the form of ПI to the complex measure  $\exp(iS/\hbar)$  immediately. I.e. Wiek rotation as well as the choice of the form of action

Континуальный интеграл и интеграл действия могут быть переписаны как пределы сумм, и мы можем упростить это выражение, используя обычные свойства логарифмов и экспоненциальных функций. После довольно простого преобразования последнее уравнение принимает вид

Мы можем заново проделать эти вычисления так же для случая более общей формы интеграла действия

(где  $t$  - время,  $p$  - импульс,  $H(p,x)$  - гамильтониан,  $t_i$  и  $t_f$  - пределы интегрирования). Континуальный интеграл (6.2.2) с этой более общей формой интеграла действия так же может быть приведен к форме, аналогичной ур.(6.2.3) тем же самым способом.

Для сдвигов в пространстве и времени, вращений и других преобразований с единичным якобианом логарифмический член в ур.(6.2.3) равен нулю, и требование, чтобы системы не изменялась при таких преобразованиях, т.е. свойство симметрии, выраженное уравнением  $I_{aff}=0$ , приводит к инвариантности действия.

С формальной математической точки зрения все выкладки могут быть проведены без использования поворота Вика, а непосредственно применяя форму ИП к комплексной мере  $\exp(iS/\hbar)$ . Т.е. поворот Вика, так же как выбор формы интеграла действия, не

integral do not influence the coordination between the corresponding TI and the fundamental principle of theoretical physics that is the action invariance. Moreover, this fundamental principle is *derived* from consideration of the specific form of transform information.

The problem arises of what is the sense of the logarithmic term in eq.(6.2.3) for the information generating transform is non-unitary? How could we obtain (if we could), for example, the gauge fields, or the mass spectrum of elementary particles, explicitly from this term?

We should emphasize that we derived the action invariance principle from zero value of certain form of transform information that can be associated with Frieden's extreme physical information principle which is akin to the second law of thermodynamics, see Ch.5. As is known, action invariance is a basis for establishing the main conservation laws in (not only) classic mechanics - conservation of energy (invariance to the time shifts), momentum (invariance to the space shifts), angular momentum (invariance to the space rotations) and others (in other branches of physics). As was pointed out by Ulybin in his essay on phenomenological thermomechanics [8] (the second part), the latter two conservation laws are not taken into account by thermodynamics, and the second law replaces them in some sense. We have obtained the action invariance princi-

вливают на согласованность между соответствующей ИП и фундаментальным принципом теоретической физики, которым является инвариантность действия. Более того этот фундаментальный принцип *выводится* из рассмотрения частной формы информации преобразования.

Возникает проблема, что представляет собой по смыслу логарифмический член в ур.(6.2.3), когда информационно производящее преобразование не унитарно? Как могли бы быть получены (если это возможно), например, калибровочные поля, или спектр масс элементарных частиц, в явном виде из этого члена?

Следует подчеркнуть, что мы вывели принцип инвариантности действия из равенства нулю некоторой формы информации преобразования, что можно ассоциировать с принципом экстремальной физической информации Фридена, который родственен второму закону термодинамики, см. гл.5. Как известно, инвариантность действия является базисом для установления законов сохранения в (не только) классической механике - сохранения энергии (инвариантность по отношению к сдвигам по времени), импульса (инвариантность по отношению к сдвигам в пространстве), момента импульса (инвариантность по отношению к поворотам в пространстве) и др. (в других областях физики). Как было замечено Улыбиным в его эссе по феноменологической термомеханике [8] (вторая часть), последние два закона сохранения не принимаются во внимание термодинамикой, и второй закон термодинамики заменяет их в

ple (which is the basis for derivation of all conservation laws) from the consideration of certain information measure akin to the statistical interpretation of physical entropy that supports the Ulybin's view point. This is reminiscent of the remark by Jaynes that information measure can be considered as a concept more fundamental than the energy, see Sec.4.4.

некотором смысле. Мы получили принцип инвариантности действия (являющегося основой вывода всех законов сохранения) из рассмотрения некоторой информационной меры, родственной к статистической интерпретации физической энтропии, что говорит в пользу точки зрения Улыбина. Это напоминает замечание Джейнса о том, что информационная мера может рассматриваться как понятие, более фундаментальное, чем энергия, см. п.4.4.

### References

### Литература

1. Кас М. *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (New York, Interscience, 1959).
2. Feynman R.P., Hibbs A.R. *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York, McGraw Hill, 1965). Фейнман Р., Хибс А. *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (Москва, Мир, 1968).
3. Ryder L.H. *Quantum Field Theory* (Cambridge Univ.Press, 1985). Райдер Л. *Квантовая теория поля* (Москва, Мир, 1988).
4. Seiler E. *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, etc., 1982). Зайлер Э. *Калибровочные теории. Связь с конструктивной квантовой теорией поля и статистической механикой* (Москва, Мир, 1985).
5. Kogut J.V. *An introduction to lattice gauge theory and spin systems*. Rev.Mod.Phys., 1979, **51**, N4, 659-713.
6. Drouffe J.M., Itzykson C. *Lattice gauge fields*. Phys.Rep., 1978, 38C, N3, 133-175..
7. Dimopoulos S., Raby S.A., Wilczek F. *Unification of Couplings*. Physics Today, 1991, 44, N10, 25-33.
8. Metscheryakov A.S., Ulybin S.A. *Thermodynamics. Phenomenological Thermomechanics* (Moscow, Khimiya, 1994) [in Russian]. Мещеряков А.С., Улыбин С.А. *Термодинамика. Феноменологическая термомеханика* (Москва, Химия, 1994).

## 7. Multifractal information

Multifractal information is a measure of symmetry breaking with respect to some family of transforms called here the multifractal transforms. First, we describe the usual formulation of multifractal formalism and then interpret (found) it in terms of multifractal information. Multifractal formalism is a formal procedure ascribing to the measure of the object under study a pair of plane curves - the so called  $f(\alpha)$ -spectrum and (set of) Renyi dimensions. This is described in the extensive literature, [1-26] and many others. The parameters of these curves can be calculated analytically or numerically and then used for a quantitative parameterization. The information foundation shows that, from mathematical viewpoint, multifractal formalism, on the one hand, is a particular solution to the Jaynes' principal, on the other hand, can be considered as a result of investigation of some SB measure - multifractal information. This interpretation seems to be useful also because it reveals functional features of some formal parameters and even their physical sense which can be used to analyze real processes even not available for the direct observation. This is demonstrated by the examples below using the original methodology of applied numeric multifractal analysis that allows directly to reveal and describe quantitatively a breaking of specific symmetry

## 7. Мультифрактальная информация

Мультифрактальная информация является мерой нарушения симметрии по отношению к некоторому семейству преобразований, называемых здесь мультифрактальными. Сначала мы дадим обычную формулировку мультифрактального формализма, а затем интерпретируем ее через мультифрактальную информацию. Мультифрактальный формализм - это формальная процедура, приписывающая мере исследуемого объекта пару плоских кривых - т.н.  $f(\alpha)$ -спектр и размерности Реньи (множество размерностей). Этот формализм описан во многих работах, [1-26] и многие другие. Параметры этих кривых можно вычислять аналитически или численно, и затем использовать для количественной параметризации. Информационное обоснование показывает, что с математической точки зрения мультифрактальный формализм, с одной стороны, является частным решением принципа Джейнса, с другой стороны, может трактоваться как результат исследования некоторой меры НС - мультифрактальной информации. Эта трактовка, по-видимому, является полезной, поскольку она выявляет функциональные особенности некоторых формальных параметров и даже их физический смысл, что можно использовать для анализа реальных процессов, даже недоступных для непосредственного наблюдения. Это демонстрируется на примерах ниже с использованием оригинальной методологии прикладного мультифрактального анализа, которая позволяет непосред-

type - of a fractal symmetry (F-symmetry), in the structures of experimentally observed objects.

### 7.1. Multifractal formalism (MFF)

Multifractal description is based on the generation (in one way or another) of a measure due to partition of a space embedding the object under consideration into the boxes, the object being called a measure support. An investigation of the scaling properties of a generalized correlation function (partition function) of the measure (under some assumptions about scaling properties of very measure) enables to ascribe to the object some (families of) statistical quantities to characterize it quantitatively or to compare it with the similar objects that provides a rather subtle identification [1-26]. I.e. the transition from fractal to multifractal description signs actually the transition from investigation of only object's geometrical properties to investigation of its measure [1].

Consider some strange (irregular, porous, rough, etc.) object embedded into Euclidean space and divide it into  $N$  boxes of sizes  $l_i \leq l$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $l < 1$  being a characteristic size of the boxes and the size of the whole object is a unity. Such a partition enables to ascribe to the boxes their measures ("weights")  $\{\mu_i\}$ ,  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ , respectively to the nature of the object. For example, if we investigate a fractal mass aggrega-

ственно выявлять и описывать нарушение специфической формы симметрии - фрактальной симметрии (Ф-симметрии), в структурах экспериментально наблюдаемых объектов.

### 7.1. Мультифрактальный формализм (МФФ)

Мультифрактальное описание основано на генерации (тем или иным способом) меры при разбиении пространства, охватывающего исследуемый объект, на ячейки, причем объект называется базовым множеством меры. Исследование скейлинговых свойств обобщенной корреляционной функции (функции разбиения) меры (при некоторых предположениях о скейлинговых свойствах самой меры) позволяет приписать объекту некоторые статистические величины (или их семейства) количественной характеристики объекта и сравнения его с другими похожими объектами, что дает возможность достаточно тонкой идентификации [1-26]. Т.е. переход от фрактального к мультифрактальному описанию фактически означает переход от исследования только лишь геометрических свойств объекта к исследованию его меры [1].

Рассмотрим некоторый странный (нерегулярный, пористый, шершавый, и пр.) объект, погруженный в евклидово пространство, и разделим его на  $N$  ячеек размеров  $l_i \leq l$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $l < 1$  - характеристический размер ячеек, а размер всего объекта равен единице. Такое разбиение позволяет приписать ячейкам их меры ("веса")  $\{\mu_i\}$ ,  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ , соответственно природе изучаемого объекта. Например, если мы исследуем массовый фрактальный

gate, the measures can be the parts  $m_i/M$  of overall mass  $M$ . If we investigate a Poincare cross section of a phase space of some dynamical system, then we can count for each box (of the cross section partition) the number of times  $n_i$  the trajectory passes through it for a long enough period of time and take the ratios  $n_i/\Sigma n_i$  as the measures of the boxes. If we fill an area of an apple-tree garden with boxes, shake down all the apples, count the numbers of apples  $\{n_i\}$  in the boxes, and divide them by the overall number of apples, then we obtain an "apple measure" of the apple-tree garden area  $\{n_i/\Sigma n_i\}$ .

In many interesting cases we can introduce a scaling value (exponent)  $\alpha$  defined as [4]

$$\mu_i \propto l_i^\alpha, l \rightarrow 0. \quad (7.1.1)$$

In fact, we should define a set of exponents (pointwise "dimensions" [18])  $\{\alpha_i\}$  corresponding to the measures of the boxes, but instead we suggest that  $\alpha$  can take the values from some range with a probability density  $\rho(\alpha)l^{f(\alpha)}$  and so the probability to get  $\alpha$  from an interval  $(\alpha', \alpha'+d\alpha')$  is

$$d\alpha' \rho(\alpha) l^{f(\alpha)} \quad (7.1.2)$$

where a continuous function  $f(\alpha')$  reflects the different (fractal) dimensions of the sets, upon which the singularities of strength  $\alpha'$  may lie [4]. Thus we model our measure by interwoven sets of singularities of strength  $\alpha$ , each characterized by its

агрегат, мерами ячеек могут быть доли  $m_i/M$  общей массы агрегата  $M$ . Если мы изучаем сечение Пуанкаре фазового пространства динамической системы, то мы можем подсчитать для каждой ячейки (разбиения сечения) число раз  $n_i$ , которое траектория динамической системы проходит через данную ячейку за достаточно долгий промежуток времени, и взять отношения  $n_i/\Sigma n_i$  в качестве мер ячеек. Если мы плотно заставим площадь яблоневого сада ящиками, стрясем все яблоки с деревьев, подсчитаем числа яблок  $\{n_i\}$  в ящиках и поделим их на общее число яблок, то мы получим яблочную меру площади яблоневого сада  $\{n_i/\Sigma n_i\}$ .

Во многих интересных случаях мы можем ввести скейлинговую величину  $\alpha$  (экспоненту), определяемую по уравнению [4]

Фактически, нам следовало бы определить множество таких экспонент (поточечных "размерностей" [18])  $\{\alpha_i\}$ , соответствующих мерам ячеек, но вместо этого мы предположим, что  $\alpha$  может принимать значения из некоторого диапазона значений с плотностью вероятности  $\rho(\alpha)l^{f(\alpha)}$ , и поэтому вероятность выбрать наугад  $\alpha$  из интервала  $(\alpha', \alpha'+d\alpha')$  есть

где непрерывная функция  $f(\alpha')$  отражает различные (фрактальные) размерности множеств, на которых могут лежать сингулярности силы  $\alpha'$  [4]. Таким образом мы моделируем нашу меру набором взаимопроникающих множеств сингулярностей силы  $\alpha$ , каждое

own dimension  $f(\alpha)$ . Now we can evaluate a generalized correlation function [2,4]

$$\chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q, \quad (7.1.3)$$

using the eqs. (7.1.1), (7.1.2), by integration over the whole region of possible values of  $\alpha$ ,

$$\chi(q) = \int d\alpha \rho(\alpha) l^{-f(\alpha)} l^{q\alpha}, \quad (7.1.4)$$

which is dominated for the small  $l \rightarrow 0$  by the value  $\alpha = \alpha(q)$  for which  $q\alpha - f(\alpha)$  is minimum,

$$\frac{d}{d\alpha'} (q\alpha' - f(\alpha'))_{\alpha'=\alpha(q)} = 0, \quad \frac{d^2}{d(\alpha')^2} (q\alpha' - f(\alpha'))_{\alpha'=\alpha(q)} > 0,$$

and so

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad f''(\alpha(q)) < 0. \quad (7.1.5)$$

On the other hand, it can be proved [4] that there is a unique finite non-zero function  $\tau(q)$  such that

$$\chi(q) \propto l^{\tau(q)}, \quad l \rightarrow 0, \quad \tau(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \ln(\chi(q)) / \ln(l), \quad (7.1.3a)$$

and so it follows from eqs. (7.1.3), (7.1.4) that

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha), \quad d\tau(q) / dq = \alpha, \quad (7.1.6)$$

i.e.  $\tau(q)$  and  $f(\alpha)$  are connected by Legendre transform. Evidently,  $\tau(1)=0$ , that can be explicitly expressed by

$$\tau(q) = (q-1)D_q. \quad (7.1.7)$$

It can be shown that  $D_q = \tau(q)/(q-1)$  are the Renyi dimensions, and  $D_0, D_1, D_2$  are the fractal, information and correlation dimensions by definition, respectively [2,4]. For  $q=0$ :

$$D_0 = \frac{\tau(q=0)}{-1} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^N (\mu_i)^0}{\ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}, \quad (7.1.8a)$$

where  $N(l)$  is a number of "non zero" parts (with non zero measure)

со своей собственной размерностью  $f(\alpha)$ . Теперь мы можем оценить обобщенную корреляционную функцию [2,4]

$$\chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q, \quad (7.1.3)$$

используя уравнения (7.1.1), (7.1.2), при помощи интеграла по всей области возможных значений  $\alpha$

$$\chi(q) = \int d\alpha \rho(\alpha) l^{-f(\alpha)} l^{q\alpha}, \quad (7.1.4)$$

величина которого для малого  $l \rightarrow 0$  определяется такой величиной  $\alpha = \alpha(q)$ , для которой величина  $q\alpha - f(\alpha)$  минимальна,

$$\frac{d}{d\alpha'} (q\alpha' - f(\alpha'))_{\alpha'=\alpha(q)} = 0, \quad \frac{d^2}{d(\alpha')^2} (q\alpha' - f(\alpha'))_{\alpha'=\alpha(q)} > 0,$$

и поэтому

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad f''(\alpha(q)) < 0. \quad (7.1.5)$$

С другой стороны, можно доказать [4], что имеется единственная конечная ненулевая функция  $\tau(q)$ , такая, что

$$\chi(q) \propto l^{\tau(q)}, \quad l \rightarrow 0, \quad \tau(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \ln(\chi(q)) / \ln(l), \quad (7.1.3a)$$

и поэтому из ур-й (7.1.3), (7.1.4) следует, что

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha), \quad d\tau(q) / dq = \alpha, \quad (7.1.6)$$

т.е.  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$  связаны преобразованием Лежандра. Очевидно,  $\tau(1)=0$ , что можно выразить в явном виде

$$\tau(q) = (q-1)D_q. \quad (7.1.7)$$

Можно показать, что  $D_q = \tau(q)/(q-1)$  являются размерностями Реньи, а  $D_0, D_1, D_2$  суть фрактальная, информационная и корреляционная размерности по определению, соответственно, [2,4]. Для  $q=0$ :

$$D_0 = \frac{\tau(q=0)}{-1} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^N (\mu_i)^0}{\ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}, \quad (7.1.8a)$$

где,  $N(l)$  - число "ненулевых" частей (с ненулевой мерой) размеров  $\leq l$  исследуемого объекта

of sizes  $\leq l$  of the structure under study. For  $q=1$ :

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\tau(q)}{q-1} = \lim_{q \rightarrow 1} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^N (\mu_i)^q}{(q-1) \ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial}{\partial q} \ln \sum_{i=1}^N (\mu_i)^q}{\frac{\partial}{\partial q} (q-1) \ln l} =$$

$$= \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\mu_i)^q} \frac{\sum_{i=1}^N (\mu_i)^q \ln(\mu_i)}{\ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i \ln(\mu_i)}{\ln l} \quad (7.1.8b)$$

(a Lhopital rule was used). And for  $q=2$ :

$$D_2 = \frac{\tau(q=2)}{2-1} = \tau(2) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^N (\mu_i)^2}{\ln l}. \quad (7.1.8c)$$

The formulas (7.1.6), (7.1.7) are called multifractal formalism (MFF). Its interpretation [1] in term of multinomial and pseudomultinomial measures (not considered here) we call *a canonical interpretation of multifractal formalism*. The more popular interpretation in terms of interwoven sets of singularities [4] we call *a standard interpretation*. Typical views of the curves  $\tau(q)$ ,  $D_q$ ,  $f(\alpha)$  are shown in Fig.7.1. In the case of "ideal" regular fractals these curves degenerate to the simple dependencies  $f=\alpha=D_1$ ,  $\tau(q)=(q-1)D_1$ ,  $D_q=D_1$ . The non-zero value of  $f_{q=+\infty}$  means that the set of strongest singularities  $\alpha_{q=+\infty}$  does not shrink into a point at  $l \rightarrow 0$  [4].

Формулы (7.1.6), (7.1.7) называются мультифрактальным формализмом (МФФ). Его интерпретацию [1] в терминах полиномиальных и псевдополиномиальных мер (здесь не рассматривается) мы называем *канонической интерпретацией мультифрактального формализма*. Более популярную интерпретацию в терминах взаимопроникающих сингулярностей [4] мы будем называть *стандартной интерпретацией*. Типичный вид кривых  $\tau(q)$ ,  $D_q$ ,  $f(\alpha)$  показан на рис.7.1. В случае "идеальных" регулярных фракталов эти кривые вырождаются в простые зависимости  $f=\alpha=D_1$ ,  $\tau(q)=(q-1)D_1$ ,  $D_q=D_1$ . Ненулевое значение величины  $f_{q=+\infty}$  означает, что множество сильнейших сингулярностей  $\alpha_{q=+\infty}$  не сжимается в точку при переходе к пределу  $l \rightarrow 0$  [4].

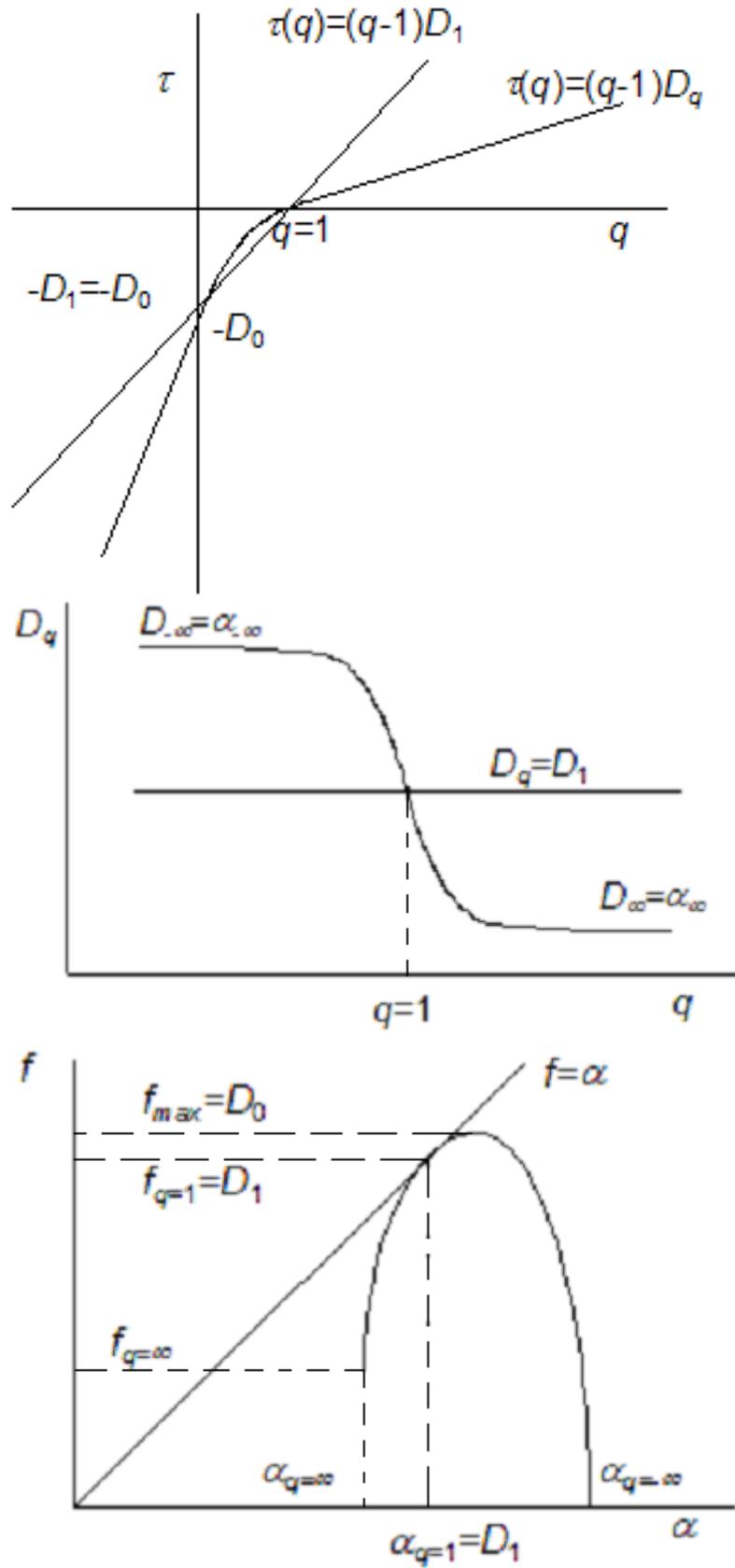


Fig.7.1. Typical views of multifractal functions.

Рис.7.1. Типичный вид мультифрактальных функций.

From eq.(7.1.4) we can obtain

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq} = \frac{1}{\chi(q)} \int d\alpha' [\alpha' \rho(\alpha') l^{q\alpha' - f(\alpha')}] = \langle \alpha' \rangle. \quad (7.1.9)$$

This shows that  $\alpha$  can be interpreted as an average over an ensemble of iso-singularities, and  $f(\alpha)$  - as a fractal dimension of the set which best approximates  $\chi(q)$  for a corresponding  $q$  [8]. Thus these quantities can be interpreted as thermodynamic quantities in the canonical ensemble and this is another, *thermodynamic interpretation of multifractal formalism* (not implying any its relation to a thermodynamic formalism (TF) [27]; as is seen from the refs.[1,20-25], there is no unique relation between these formalisms and it must be so because TF is based on Boltzmann distribution [27] giving trivial multifractal spectra, see Sec.7.3).

## 7.2. Information foundation of multifractal formalism

As was above, consider some strange object embedded into Euclidean space and divide it into  $N$  equal boxes of size  $l$  (an “equiboxed” partition). Let the object be described by a measure  $\mu_i = \mu(x_i)$ , ( $x_i$  are the coordinates of  $i$ -th box), such that the values  $\ln(\mu_i)$  have some physical or geometrical sense (for example, of energy or Hoelder exponents [26]). Following the Mandelbrot’s recom-

Из ур. (7.1.4) мы можем получить

Это показывает, что величину  $\alpha$  можно трактовать как среднее по ансамблю изо-сингулярностей, а  $f(\alpha)$  - как фрактальную размерность множества, которое наилучшим образом аппроксимирует сумму  $\chi(q)$  для соответствующего  $q$  [8]. Таким образом, эти величины можно интерпретировать как термодинамические величины в каноническом ансамбле, что дает еще одну, *термодинамическую интерпретацию мультифрактального формализма* (не подразумевая ее отношение к термодинамическому формализму (ТФ) [27]; как это видно из ссылок [1,20-25], нет однозначного соответствия между этими формализмами, и это так и должно быть, потому что ТФ основан на больцмановском распределении [27], дающем тривиальные мультифрактальные спектры, см. п.7.3).

## 7.2. Информационное обоснование мультифрактального формализма

Как мы описывали выше, рассмотрим некоторый странный объект погруженный в евклидово пространство, и разобьем его на  $N$  равных ячеек размера  $l$  (“равноячеечное” разбиение). Пусть объект описывается мерой  $\mu_i = \mu(x_i)$ ,  $x_i$  - координаты  $i$ -ой ячейки, такой что величины  $\ln(\mu_i)$  имеют некоторый физический или геометрический смысл (например, энергий или экспонент Гельдера [26]). Следуя рекомендации Мандельброта [1], мы начнем

mendation [1], we start with consideration of one variational problem.

Let us seek a distribution (or a family of distributions)  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ , having extreme uncertainty in the form of von Neumann-Shannon-Wiener information, subject to the constraints on the logarithms  $\ln(\mu_i)$  averaged over the measure  $\{\mu_{1i}\}$ , and the measure  $\{\mu_{1i}\}$  is to be normalized,  $\sum_i \mu_{1i} = 1$ . Then we have a variational problem like one considered by Mandelbrot in investigation of multinomial measure [1] (the problem being a particular case of Jaynes' principle, see section 4.4):

$$-\sum_i \mu_{1i} \ln(\mu_{1i}) + q \sum_i \mu_{1i} \ln(\mu_i) + \lambda \sum_i \mu_{1i} = \text{extremum}, \quad (7.2.1)$$

where  $q$  and  $\lambda$  are real Lagrange multipliers. The solution to this problem is

$$\mu_{1i}(q) = \frac{(\mu_i)^q}{\chi(q)}, \quad \chi(q) = \sum_{k=1}^N (\mu_k)^q. \quad (7.2.2)$$

As the solution (7.2.2) coincides exactly with the internal measure  $\{\mu_i\}$  for arbitrary  $q$  only in the case of uniform measure  $\{\mu_i = \text{const}\}$ , we can consider this solution as a transform reflecting a non-uniformity of the internal object's measure (SB), the Lagrange multiplier  $q$  being the "control" of magnification of non-uniformity after the transform  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q)\}$ . This transform was considered earlier [1,13-16] and was used to define or to investigate the properties of other quantities, but not to derive the multifractal formalism itself.

The distribution  $\{\mu_{1i}(q)\}$

рассмотрение с постановки некоторой вариационной задачи.

Попробуем найти распределение (или семейство распределений)  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ , имеющее экстремальную неопределенность в форме фон Неймана-Шеннона-Винера, при ограничениях на логарифмы  $\ln(\mu_i)$ , усредненных по мере  $\{\mu_{1i}\}$ , а сама мера  $\{\mu_{1i}\}$  должна быть нормирована,  $\sum_i \mu_{1i} = 1$ . Теперь мы имеем вариационную задачу типа рассмотренной Мандельбротом при исследовании мультиномиальной меры [1] (причем задача является частным случаем принципа Джейнса, см. п.4.4):

где  $q$  и  $\lambda$  - вещественные множители Лагранжа. Решение этой задачи есть

Т.к. решение (7.2.2) в точности совпадает с собственной мерой  $\{\mu_i\}$  при любом  $q$  только в случае однородной меры  $\{\mu_i = \text{const}\}$ , мы можем рассматривать это решение как преобразование, отражающее неоднородность собственной меры объекта (НС), причем множитель Лагранжа  $q$  выступает в роли управляющего параметра, ответственного за увеличение неоднородности после преобразования  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q)\}$ . Это преобразование рассматривалось ранее [1,13-16] и использовалось для определения или исследования свойств других величин, но не для вывода самого мультифрактального формализма.

Распределение  $\{\mu_{1i}(q)\}$  должно

should reflect the peculiarities of the internal distribution  $\{\mu_i\}$  and we can investigate them comparing the measures before and after transform (7.2.2) using TI (which we call *multifractal information*) as a measure of their distinction :

отражать особенности собственной меры  $\{\mu_i\}$  и мы можем исследовать эти особенности, сравнивая меры до и после преобразования (7.2.2), используя ИП (которую мы называем *мультифрактальной информацией*), как меру их различия

$$I(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i \ln \left( \frac{\mu_i}{\mu_{1i}} \right). \quad (7.2.3)$$

The simple calculation gives for  $I(q)$  :

Простое вычисление дает для  $I(q)$  :

$$I(q) = (1 - q) \sum_{i=1}^N \mu_i \ln(\mu_i) + \ln \left( \sum_{i=1}^N (\mu_i)^q \right),$$

and we can obtain a relation

и мы можем получить соотношение

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{I(q)}{(q-1) \ln(l)} = \frac{\tau(q)}{(q-1)} - D_1 = D_q - D_1, \quad (7.2.4a)$$

or

или

$$D_q = \tau(q)/(q-1) = D_1 + \lim_{l \rightarrow 0} I(q)/((q-1) \ln l), \quad (7.2.4b)$$

$$\tau(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \ln(\chi(q))/\ln l,$$

where  $D_1$  is the usual information dimension

где  $D_1$  - обычная информационная размерность

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \mu_i \ln(\mu_i) / \ln l,$$

$D_q$  are the Renyi dimensions (entropies).

$D_q$  - размерности (энтропии) Реньи.

Legendre transform of the function

Преобразование Лежандра от функции

$$\tau_l(q) = \lim_{l \rightarrow 0} I(q)/\ln l \quad (7.2.5)$$

gives

дает

$$\alpha_l(q) = d\tau_l/dq = \alpha(q) - D_1, \quad (7.2.6)$$

$$f_l(q) = q\alpha_l - \tau_l(q) = f(q) - D_1, \quad (7.2.7)$$

where  $\alpha(q)$  and  $f(q)$  are the definitions of explicitly parameterized  $f(\alpha)$ -spectrum introduced in refs.[16,20]

где  $\alpha(q)$  и  $f(q)$  - определение явно параметризованного  $f(\alpha)$ -спектра, введенное в работах [16,20],

$$\alpha(q) = d\tau/dq = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_i \mu_{1i}(q) \ln(\mu_i)/\ln l, \quad (7.2.8)$$

$$f(q) = q\alpha(q) - \tau(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_i \mu_{1i}(q) \ln(\mu_{1i}(q))/\ln l. \quad (7.2.9)$$

I.e. the function  $f_l(\alpha_l)$  is simply the shifted  $f(\alpha)$ -spectrum. We have just shown that multifractal de-

Т.е. функция  $f_l(\alpha_l)$  есть просто сдвинутый  $f(\alpha)$ -спектр. Мы только что показали, что мультифрактальное опи-

scription can be obtained from investigation of information  $I(q)$  of direct multifractal transform that is analogous to Fisher's principle. Moreover, we can rewrite the variational problem (7.2.1) in the equivalent form using information of inverse multifractal transform just like we did it in the case of Jaynes' principle :

$$-\sum_i \mu_i \ln(\mu_i/\mu) + (q-1) \sum_i \mu_i \ln(\mu_i) + \lambda \sum_i \mu_i = \text{extremum}. \quad (7.2.10)$$

The difference is again determined by the character of the measure we use. If we start with Jaynes' principle we *seek* a unknown subjective measure  $\mu_1$ . If we start with information  $I(q)$  we *use* the known objective measure  $\mu$ .

The relation  $f=f_I+D_1$  is reminiscent of the relation  $f=\rho+D_0$  [1], where  $\rho=\rho(\alpha)$  is a limit distribution function in the double-logarithmic coordinates, and the "intrinsic" parameters here are  $f_I=f-D_1$ ,  $\alpha_I=\alpha-D_1$ ,  $\Delta_q=D_1-D_q$  instead of parameters  $\rho$ ,  $\alpha<\alpha>$ ,  $D_q-D_0$ , as was proposed in ref.[1].

It is easy to see that transform (7.2.2) represents a group, as applying it twice, we obtain

$$\mu_{2i}(q_1, q_2) = \frac{(\mu_i(q_1))^{q_2}}{\sum_{i=1}^N (\mu_i(q_1))^{q_2}} = \frac{(\mu_i)^{q_1 q_2} / \left[ \sum_{k=1}^N (\mu_k)^{q_1} \right]^{q_2}}{\sum_{i=1}^N (\mu_i)^{q_1 q_2} / \left[ \sum_{k=1}^N (\mu_k)^{q_1} \right]^{q_2}} = \frac{(\mu_i)^{q_1 q_2}}{\sum_{i=1}^N (\mu_i)^{q_1 q_2}} = \mu_i(q_1 \times q_2), \quad (7.2.11)$$

Rewriting this transform in the form  $\mu_i(q)=V[\{\mu_i\},q]$ , we have  $\mu_{2i}(q_1, q_2)=V[\{\mu_i(q_1)\},q_2]=V[\{\mu_i\},q_1 q_2]=\mu_i(q_1 q_2)$ , and as  $\mu_i(1)=\mu_i$ , then  $\mu_i(q_1 q_2)=\mu_i$ , if  $q_1=1/q_2$ . I.e. the unity and inverse (for any trans-

сание может быть получено из исследования информации  $I(q)$  прямого мультифрактального преобразования, что аналогично принципу Фишера. Более того, мы можем переписать вариационную задачу (7.2.1) в эквивалентной форме, используя информацию обратного мультифрактального преобразования, как мы делали это при рассмотрении принципа Джейнса:

Различие в этих двух подходах опять же определяется характером используемой меры. Если мы начинаем с рассмотрения принципа Джейнса, мы *ищем* неизвестную субъективную меру  $\mu_1$ . Если мы начинаем с информации  $I(q)$ , мы *используем* известную объективную меру  $\mu$ .

Соотношение  $f=f_I+D_1$  напоминает соотношение  $f=\rho+D_0$  [1], где  $\rho=\rho(\alpha)$  предельная функция распределения в двухлогифмических осях, а "внутренне присущими" параметрами здесь являются  $f_I=f-D_1$ ,  $\alpha_I=\alpha-D_1$ ,  $\Delta_q=D_1-D_q$  вместо параметров  $\rho$ ,  $\alpha<\alpha>$ ,  $D_q-D_0$ , как предлагалось в работе [1].

Легко видеть, что преобразование (7.2.2) представляет группу, т.к., применяя его дважды, получаем

Переписывая это преобразование в виде  $\mu_i(q)=V[\{\mu_i\},q]$ , мы имеем  $\mu_{2i}(q_1, q_2)=V[\{\mu_i(q_1)\},q_2]=V[\{\mu_i\},q_1 q_2]=\mu_i(q_1 q_2)$ , и поскольку  $\mu_i(1)=\mu_i$ , то  $\mu_i(q_1 q_2)=\mu_i$ , если  $q_1=1/q_2$ . Т.е. действительно существуют единичное и обратное (по от-

form) transforms do exist. The uniform measure ( $q=0$ ) is a steady point of the multifractal group acting on a space of normalized measures. *Thus multifractal description is based not only on the use of the internal measure of the object, but on the use of the whole family  $\{\mu_{1i}\}$  which is a group transitivity class.*

The direct multifractal transform (7.2.2) simulates (to some extent) a measure renormalization in transforming the support set (e.g. under contraction) without transforming the very support, because for any transform of the support a  $q$ -value can be selected providing an equivalent local renormalization of its measure.

Explicit parameterization of the transform (7.2.2) allows to rewrite the both  $f$  (7.2.9) and  $\alpha$  (7.2.8) in a more general form using a quantity

$$F(r, s) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \sum_{i=2}^N \mu_{1i}(r) \ln(\mu_{1i}(s)),$$

$$\alpha(q) = F(q, 1), f(q) = F(q, q), \quad (7.2.12)$$

$F(r, s)$  represents a two-parameter family of generalized uncertainties. From quite a general point of view, surface  $F(r, s)$  in the  $(r, s, F)$ -space must provide a most complete multifractal presentation of the peculiarities of the intrinsic measure  $\{\mu_i\}$ . We can use instead of this family also the Kullback information

ношению к любому) преобразования. Однородное распределение ( $q=0$ ) является неподвижной точкой этой мультифрактальной группы, действующей на пространстве нормированных мер. *Таким образом, мультифрактальное описание основано не только на использовании собственной меры объекта, а на использовании целого семейства мер  $\{\mu_{1i}\}$ , которое является классом транзитивности группы.*

Прямое мультифрактальное преобразование (7.2.2) симулирует (до некоторой степени) перенормировку меры при преобразовании базового множества (например, при сжатии, контракции) без преобразования самого базового множества, потому что для любого преобразования базового множества можно выбрать величину  $q$ , обеспечивающую эквивалентную локальную перенормировку меры.

Явная параметризация преобразования (7.2.2) позволяет записать оба  $f$  (7.2.9) и  $\alpha$  (7.2.8) в более общей форме, используя величину

$F(r, s)$  представляет собой двухпараметрическое семейство обобщенных неопределенностей. С совершенно общей точки зрения, поверхность  $F(r, s)$  в пространстве  $(r, s, F)$  должна обеспечивать наиболее полное мультифрактальное представление особенностей собственной меры  $\{\mu_i\}$ . Вместо этого семейства мы можем так же использовать информации Кульбака

$$I(r, s) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \sum_{i=2}^N \mu_i(r) \ln \left( \frac{\mu_i(r)}{\mu_i(s)} \right), \quad (7.2.13)$$

and an obvious relation

и очевидное соотношение

$$I(r, s) = f(r) - F(r, s). \quad (7.2.14)$$

In addition, we give some formulas which are to generalize the formalism. Suppose that there is a problem to find  $q$  where a curvature of  $D(q)$  dependence is maximum, see Fig.7.1. As curvature is determined by the second derivative, this problem is to be solved in a formal way by equating the third derivative to zero  $d^3D/dq^3=0$ . Let's write out the explicit formulas (obtained by the rather simple manipulations) for the first three derivatives of the generalized Renyi dimensions by  $q$ .

Дополнительно приведем еще ряд формул, направленных на обобщение формализма. Предположим, что стоит задача нахождения таких величин  $q$ , при которых кривизна зависимости  $D(q)$  максимальна, см. рис.7.1. Поскольку кривизна определяется второй производной, эту задачу формально следует решать приравнением к нулю третьей производной  $d^3D/dq^3=0$ . Выпишем явные формулы (полученные после довольно простых преобразований) первых трех производных обобщенных размерностей Реньи по  $q$ .

$$\frac{dD}{dq} = \frac{1}{(q-1)^2} (-\tau(q) + \alpha_1), \quad \frac{d^2D}{dq^2} = \frac{2}{(q-1)^3} \left( \tau(q) - \alpha_1 \left( 1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) + \frac{\alpha_2}{2} \right),$$

$$\frac{d^3D}{dq^3} = \frac{6}{(q-1)^4} \left( -\tau(q) + \alpha_1 \left( 1 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_1^2}{3} \right) - \frac{\alpha_2}{2} (1 + \alpha_1) + \frac{\alpha_3}{6} \right),$$

$$\alpha_p = \alpha_p(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \sum_i \mu_i(q) [\ln(\mu_i^{(q-1)})]^p, \quad (7.2.15)$$

$$\alpha_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(q-1)}{\ln l} \sum_i \mu_i(q) \ln \mu_i = (q-1)\alpha(q).$$

It is seen from the formulas that a naive wish to get more information about the curvature of the Renyi dimensions spectrum may slip into detailed investigation of two parameter family of some generalized uncertainties. In general, investigation of two parameter families of uncertainties like (7.2.12-15) represents a certain perspective of MFF development.

Из этих формул видно, что наивное желание побольше знать о кривизне спектра размерностей Реньи может плавно перейти в подробное исследование двух параметрического семейства некоторых обобщенных неопределенностей. Вообще исследование двух параметрических семейств неопределенностей типа (7.2.12-15) представляет собой определенную перспективу развития МФФ.

Thus in trying to interpret multifractal formalism in terms of

Таким образом, пытаюсь интерпретировать мультифрактальный фор-

transform information, we obtain a collection of quantities generalizing this way of description. Further generalization can be obtained on the base of description of multi-point correlations on multifractals.

The first consequence of information foundation is the possibility to use the value of  $f_\infty = f(q=\infty)$  (7.2.9), or its evaluation  $f_Q$  (where  $Q \gg 1$  is some positive  $q$ -value as large as possible), as a *quantitative measure of uniformity* of the object under study, because 1) in the standard interpretation of multifractal formalism [4] this value must be zero, if the set of weakest singularities with greatest measure contracts into a point in the limit  $l \rightarrow 0$ ; 2) transform (7.2.2) reflects the internal object's measure  $\mu$  non-uniformity, making the result  $\mu_1$  more non-uniform for  $|q| > 1$ . So, we propose the following interpretation: *the greater  $f_\infty \approx f_Q$ , the more uniform structure.*

Multifractal formalism can be considered as a particular solution to Jaynes' principle (4.4.1) which can be rewritten in its general form using Kullback information as

$$-\sum_k p_k \ln \left( p_k / \exp \left( -\lambda - \sum_i \beta_i f_k^i \right) \right) = \text{extremum}. \quad (7.2.16)$$

This implies minimization of the distinctions of a sought distribution  $\{p_k\}$  over a state space of the system from the exponential one which corresponds to the additional constraints imposed,  $\lambda$ ,  $\beta_i$  are the Lagrange multipliers. In this sense

мализм в терминах информации преобразования, мы получаем набор величин, обобщающих этот способ описания объектов. Дальнейшее обобщение может быть получено на основе описания многоточечных корреляций на мультифракталах.

Как первое следствие информационного обоснования, величину  $f_\infty = f(q=\infty)$  (7.2.9), или ее оценку  $f_Q$  (где  $Q \gg 1$  - некоторое большое положительное значение  $q$ , чем больше, тем лучше), можно использовать как *количественную меру однородности* объекта, потому что: 1) эта величина должна быть нулем, если в стандартной интерпретации множество слабейших сингулярностей с наибольшей мерой стремится к точке в пределе  $l \rightarrow 0$ ; 2) преобразование (7.2.2) отражает неоднородность собственной меры объекта  $\mu$ , делая результат преобразования  $\mu_1$  более неоднородным при  $|q| > 1$ . Поэтому мы предлагаем следующую интерпретацию: *чем больше  $f_\infty \approx f_Q$ , тем более однородна структура.*

Поскольку мультифрактальный формализм может рассматриваться как частное решение принцип Джейнса (4.4.1), который может быть записан в своей общей форме, использующей информацию Кульбака как

Это подразумевает минимизацию отличий искомого распределения  $\{p_k\}$  по пространству состояний системы от экспоненциального, которое удовлетворяет дополнительным ограничениям принципа,  $\lambda$ ,  $\beta_i$  - множители Лагранжа. В этом смысле форму ин-

we can interpret Kullback information in eq.(7.2.16) as an ordering measure. Comparing it with multifractal information (7.2.3), we can say the same about the form  $I(q)/(q-1)$  ((7.2.3) divided by the order of non-centered moment of very measure that is actually the generalized correlation function

$\chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q$ ). This value has two (theoretical) extremuma for  $q=-\infty$  and  $q=+\infty$ . On the other hand, it is a direct measure of symmetry breaking with respect to multifractal transform (7.2.2). Thus we can introduce a multifractal ordering measure  $\Delta_\infty = D_1 - D_\infty$ , or its evaluation  $\Delta_Q = D_1 - D_Q$ ,  $Q \gg 1$ . *The greater  $\Delta_Q$ , the more ordered structure.* This is a second consequence of information foundation and this is close to proposition of ref.[9] where a periodicity measure  $K = D_{-\infty} - D_\infty$  was introduced for the measure generated on the base of frequency Fourier spectrum. This proposition is based on the fact that the Fourier spectrum of a white noise is uniform, so is the measure generated, and the multifractal spectra of such a measure are degenerate. The presence of some prevailing frequencies, i.e. the peaks in the spectrum results in non-uniform measure and non-trivial multifractal spectra. Actually the value  $\Delta_Q$  reflects breaking of F-symmetry.

формации Кульбака в ур.(7.2.16) можно интерпретировать как меру порядка в системе. Сравнивая ее с мультифрактальной информацией (7.2.3), мы можем сказать то же самое о форме  $I(q)/(q-1)$  ((7.2.3) деленной на порядок нецентрального момента самой меры, каковым по сути является обобщенная корреляционная функция

$\chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q$ ). Эта величина имеет два (теоретических) экстремума: при  $q=-\infty$  и  $q=+\infty$ . С другой стороны, она является непосредственной мерой нарушения симметрии по отношению к мультифрактальному преобразованию (7.2.2). Таким образом, мы можем ввести мультифрактальную меру упорядоченности  $\Delta_\infty = D_1 - D_\infty$ , или ее оценку  $\Delta_Q = D_1 - D_Q$ ,  $Q \gg 1$ . *Чем больше  $\Delta_Q$ , тем более упорядочена структура.* Это второе следствие информационного обоснования, и это очень близко к предложению работы [9], где была введена мера периодичности  $K = D_{-\infty} - D_\infty$ , для случая генерации меры на основе частотного Фурье спектра. Это предложение основано на факте, что Фурье спектр белого шума однородный, как и сгенерированная по нему мера, а мультифрактальные спектры такой меры вырождены. Наличие каких-либо превалирующих частот, т.е. пиков в спектре, дает неоднородную меру и нетривиальные мультифрактальные спектры. Фактически величина  $\Delta_Q$  количественно отражает нарушение Ф-симметрии.

### 7.3. F-symmetry

As was noted above, solution (7.2.2) coincides exactly with the intrinsic measure  $\{\mu_i\}$  for any  $q$  only in the case of the uniform measure  $\{\mu_i=const\}$ , and so, this solution can be considered as a transform reflecting the non-uniformity of the intrinsic object's measure, parameter  $q$  being the control parameter responsible for the magnification of the non-uniformity of resulting measure  $\{\mu_{1i}(q)\}$  after transformation  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q)\}$ , see Table 7.1, Fig..7.2.

### 7.3. Ф-симметрия

Как было отмечено выше, решение (7.2.2) точно совпадает с собственной мерой  $\{\mu_i\}$  для любого  $q$  только в случае однородной меры  $\{\mu_i=const\}$ , и поэтому это решение можно рассматривать как преобразование, отражающее неоднородность собственной меры объекта, при этом параметр  $q$  является контрольным параметром, ответственным за увеличение неоднородности результирующей меры  $\{\mu_{1i}(q)\}$  после преобразования  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q)\}$ , см. табл.7.1, рис.7.2.

Table 7.1. Reflecting the measure's non-uniformity by multifractal transform (7.2.2).

Таблица 7.1. Отражение неоднородности меры при мультифрактальном преобразовании (7.2.2).

Uniform measure / Однородная мера	Non-uniform measure / Неоднородная мера
$\mu_i = \frac{1}{N}, \chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q = N \left(\frac{1}{N}\right)^q = \left(\frac{1}{N}\right)^{q-1}$ $\mu_{1i}(q) = \left(\frac{1}{N}\right)^q / \left(\frac{1}{N}\right)^{q-1} = \frac{1}{N} = \mu_i$	$\mu_i <, =, > \frac{1}{N}, \chi(q) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q <, =, > \left(\frac{1}{N}\right)^{q-1}$ $\mu_{1i}(q) \neq \mu_i$

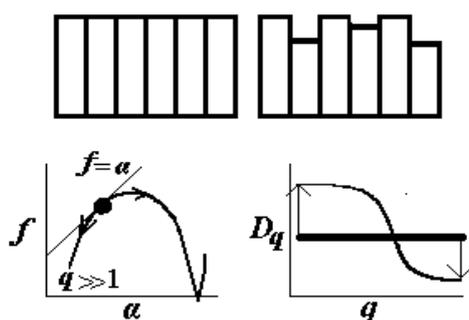


Fig.7.2. The multifractal spectra of the uniform measure are degenerate (the extra bold point in the  $f(\alpha)$ -plot and line in the  $D_q$ -plot), i.e. the uniform distributions are F-symmetric. For the minute non-uniformity appears, the spectra take their typical

Рис.7.2. Мультифрактальные спектры однородной меры вырождены (жирные точка на графике  $f(\alpha)$  и линия на графике  $D_q$ ), то есть однородные распределения Ф-симметричны. При появлении неоднородности спектры приобретают свой типичный вид, см. рис.7.1,

form, see Fig.7.1, F-symmetry becomes broken.

In the absence of "multifractality" all the spectra are trivial, degenerate

$$D_q = D_0 = D_1 = D_2 = \dots = \alpha_{max} = \alpha_{min} = \alpha = f(\alpha), \tau(q) = (q-1)D_1. \quad (7.3.1)$$

Such fractals are called *homogeneous*. From the viewpoint of multifractal information the measures of these fractals obey a *fractal symmetry - F-symmetry*.

This is a rigorous enough definition in analogy with, for example, a concept of geometrical symmetry: we have some object and some group transformation doesn't change its characteristics. In this case the Renyi dimensions and  $f(\alpha(q))$ - and  $\alpha(q)$ -values remain invariant for the transformed measures  $\{\mu_i(q)\}$  after the group transform (7.2.2). We can take the value  $\Delta_\infty = D_1 - D_\infty$ , or its evaluation  $\Delta_Q = D_1 - D_Q$ ,  $Q \gg 1$ , as a quantitative measure of F-symmetry breaking. The regular (one scale) fractals, such as Koch curves, Sierpinski carpets, etc. give the non-trivial examples of F-symmetric objects, as their multifractal spectra are degenerate but dimension is non-integer. Then the simple fractal parameterization can be applied with no obstructions for the homogeneous fractals, or all the regular one-scale fractals. Application of fractal parameterization to the natural fractals implies disregarding the F-symmetry breaking in analogy with consideration of many physical problems using simplified assumption of spherical or cylindrical

Ф-симметрия нарушается.

В отсутствие мультифрактальности все спектры становятся тривиальными, вырожденными:

Такие фракталы называются *однородными*. С точки зрения мультифрактальной информации меры таких фракталов обладают *фрактальной симметрией, Ф-симметрией*.

Это достаточно строгое определение: по аналогии, например, с понятием геометрической симметрии : мы имеем некоторый объект, а некоторое групповое преобразование не изменяет его характеристик. В данном случае размерности Реньи и величины  $f(\alpha(q))$  and  $\alpha(q)$  не изменяются для трансформированной меры  $\{\mu_i(q)\}$  при групповом преобразовании (7.2.2). Мы можем взять величину  $\Delta_\infty = D_1 - D_\infty$ , или ее оценку  $\Delta_Q = D_1 - D_Q$ ,  $Q \gg 1$ , как количественную меру нарушения Ф-симметрии. Регулярные (одномасштабные) фракталы, такие как кривые Коха, ковры Серпинского и пр., дают нетривиальные примеры Ф-симметричных объектов, поскольку их мультифрактальные спектры вырождены, но размерность нецелая. Поэтому фрактальная параметризация с полным основанием может быть использована только для однородных фракталов, каковы, например, все регулярные одномасштабные фракталы. Применение фрактальной параметризации к естественным фракталам подразумевает пренебрежение нарушением Ф-симметрии аналогично тому, как многие физические задачи упрощенно рассматриваются в предпо-

symmetry.

Now we describe two more non-trivial examples of F-symmetric non-uniform measures with integer dimensions - the Boltzmann and Gauss distributions. In the case of the Boltzmann distribution, the equiboxed partition of energy axis  $E=n\Delta E$  enables to generate a measure using the values

$$P(E) \propto \exp(-n\Delta E/kT); \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\Delta E/kT) = \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(-\Delta E/kT))^n = \frac{1}{1 - \exp(-\Delta E/kT)},$$

that gives for the intrinsic measure  $\mu_n$  and generalized correlation function the explicit expressions

$$\mu_n = (1 - \exp(-\Delta E/kT))^n \exp(-n\Delta E/kT), \quad \chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n)^q = \frac{(1 - \exp(-\Delta E/kT))^q}{1 - \exp(-q\Delta E/kT)} \quad (q > 0).$$

Calculating the exponent of generalized correlation function

$$\tau(q) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\ln \chi(q)}{\ln(\Delta E/kT)} = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{(q-1) \ln(\Delta E/kT) - \ln q}{\ln(\Delta E/kT)} = (q-1), \quad (7.3.2)$$

we obtain the explicit analytic expressions for the degenerate branches of multifractal spectra for  $q > 0$ .

$$D_q = 1, \alpha(q) = d\tau/dq = 1, f(q) = q\alpha - \tau(q) = 1$$

In the case of one dimensional normal Gauss distribution the equiboxed partition of random variable's axis  $X=n\Delta X$  enables to build up the measure using the value

$$P(X) \propto \exp(-\lambda^2 X^2) \propto \exp(-\lambda^2 (n\Delta X)^2).$$

For the measure  $\mu_n$  and generalized correlation function we obtain

$$\mu_n = \frac{(\exp(-(\lambda\Delta X)^2))^{n^2}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-(\lambda\Delta X)^2))^{n^2}} = \frac{y^{n^2}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} y^{n^2}}, \quad y = \exp(-(\lambda\Delta X)^2)$$

ложении сферической или цилиндрической симметрии.

Теперь опишем еще два нетривиальных примера Ф-симметричных неоднородных мер с целыми размерностями - распределения Больцмана и Гаусса. В случае распределения Больцмана равноячеечное разбиение энергетической оси  $E=n\Delta E$  позволяет построить меру, используя величину

что дает для собственной меры  $\mu_n$  и обобщенной корреляционной функции явные выражения

Вычисляя экспоненту корреляционной функции

Получаем явные аналитические выражения для вырожденных ветвей мультифрактальных спектров при  $q > 0$

В случае одномерного нормального распределения Гаусса равноячеечное разбиение оси случайной переменной  $X=n\Delta X$  дает возможность построить меру на основе величины

Для меры  $\mu_n$  и обобщенной корреляционной функции получаем

$$\chi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n)^q = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (y^q)^{n^2}}{\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} y^{n^2}\right)^q} = \frac{\theta_3\left(0, \exp\left(\frac{\pi^2}{q \ln y}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{q \ln(1/y)}}}{\left(\theta_3\left(0, \exp\left(\frac{\pi^2}{\ln y}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{\ln(1/y)}}\right)^q} \quad (q > 0),$$

$$\ln(\chi(q)) = \ln \frac{\theta_3\left(0, \exp\left(\frac{\pi^2}{q \ln y}\right)\right)}{\left(\theta_3\left(0, \exp\left(\frac{\pi^2}{\ln y}\right)\right)\right)^q} + (q-1) \ln(\lambda \Delta X) - \frac{1}{2} \ln q,$$

where  $\theta_3$  is a third Jacobi  $\theta$ -function [28]. For the exponent  $\tau(q)$  we have

где  $\theta_3$  - третья  $\theta$ -функция Якоби [28].  
Для экспоненты  $\tau(q)$  имеем

$$\tau(q) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\ln \chi(q)}{\ln(\lambda \Delta X)} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ \frac{\theta_3}{\theta_3} \right] + (q-1) \ln(\lambda \Delta X) - \frac{1}{2} \ln q}{\ln(\lambda \Delta X)} = (q-1), \quad (7.3.3)$$

and, as was above, again we obtain the explicit analytic expressions for the degenerate branches of multifractal spectra for  $q > 0$

$$D_q = 1, \alpha(q) = d\tau / dq = 1, f = q\alpha - \tau(q) = 1.$$

The last two examples show that the property of F-symmetry is not merely the consequence of the measure's uniformity. They are non-trivial due to the fact that they relate F-symmetry to the violently non-uniform but equilibrium distributions (in that sense that they appear usually in description of equilibrium systems). Thus we conclude that F-symmetry breaking can reflect the presence of non-equilibrium effects in the systems under study.

и, как и выше, снова получаем явные аналитические выражения для вырожденных ветвей мультифрактальных спектров при  $q > 0$

Последние два примера показывают, что понятие Ф-симметрии не сводится просто к требованию однородности меры. Эти примеры нетривиальны тем, что связывают Ф-симметрию с сильно неоднородными, но равновесными распределениями (в том смысле, что они возникают при описании неравновесных систем). Нарушение Ф-симметрии мы можем, поэтому, соотнести также с присутствием неравновесных эффектов в исследуемых системах.

#### 7.4. Multi-point correlations

Consider now a more general case of the problem (7.2.1). We seek

#### 7.4. Многоточечные корреляции

Рассмотрим теперь более общий случай задачи (7.2.1). Мы ищем рас-

a distribution (or a family of distributions)  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ , having extreme uncertainty in the form of von Neumann-Shannon-Wiener information, subject to the constraints on the shifted logarithms  $\ln(\mu(x_i+a_k))$  averaged over the measure  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $a_k$ 's being from the given set  $A=\{a_k\}$ ,  $k=1, \dots, M$ , and the measure  $\{\mu_{1i}\}$  being normalized,  $\sum_i \mu_{1i}=1$ .

$$-\sum_{i=1}^N \mu_{1i} \ln(\mu_{1i}) + \sum_{k=1}^M q_k \sum_{i=1}^N \mu_{1i} \ln(\mu(x_i + a_k)) + \lambda \sum_{i=1}^N \mu_{1i} = \text{extremum}, \quad (7.4.1)$$

where  $\{q_k\}$  and  $\lambda$  are  $M+1$  real Lagrange multipliers. The solution to this problem is

$$\mu_1(x_i, q, A) = \frac{\prod_{k=1}^M (\mu(x_i + a_k))^{q_k}}{\chi(q, A)}, \quad (7.4.2)$$

$$\chi(q, A) = \sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^M (\mu(x_i + a_k))^{q_k}, \quad q = \{q_1, \dots, q_M\}, \quad A = \{a_1, \dots, a_M\}.$$

Such a consideration leads to investigation of some multiparameter family of measures and their uncertainties. As the solution (7.4.2) coincides exactly with the internal measure  $\{\mu_i\}$  for arbitrary collections of parameters  $q, A$  only in the case of uniform measure  $\{\mu_i = \text{const}\}$ , we can consider solution (7.4.2) as a transform reflecting a non-uniformity of the internal object's measure (SB), the Lagrange multipliers  $q$  being the "controls" of magnification of non-uniformity after the transform  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q, A)\}$ . This transform is schematically shown in Fig.7.3.

Transform (7.4.2) generalizes transform (7.2.2) ( $M=1$  and  $\{a_k=0\}$ ). Another particular case of the transform (7.4.2) for  $M=2$  and  $\{a_1=0, a_2=r\}$ ,

пределение (или семейство распределений)  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $i=1, \dots, N$ , имеющих экстремальную неопределенность в форме информации фон Неймана-Шеннона-Винера, при наложении ограничений на сдвинутые логарифмы  $\ln(\mu(x_i+a_k))$  усредненные по мере  $\{\mu_{1i}\}$ ,  $a_k$ 'е при этом берутся из заданного множества  $A=\{a_k\}$ ,  $k=1, \dots, M$ , а мера  $\{\mu_{1i}\}$  должна быть нормирована,  $\sum_i \mu_{1i}=1$ .

где  $\{q_k\}$  и  $\lambda$  суть  $M+1$  вещественных множителей Лагранжа. Решение этой задачи дается формулой

Такое рассмотрение ведет к исследованию некоторого многопараметрического семейства мер и их неопределенностей. Поскольку решение (7.4.2) точно совпадает с собственной мерой  $\{\mu_i\}$  для произвольного набора параметров  $q, A$  только для случая однородной меры  $\{\mu_i = \text{const}\}$ , мы можем рассматривать решение (7.4.2) как преобразование, отражающее неоднородность собственной меры объекта (НС), множители Лагранжа  $q$  при этом являются "контроллерами" увеличения неоднородности после преобразования  $\{\mu_i\} \rightarrow \{\mu_{1i}(q, A)\}$ . Это преобразование схематически показано на рис.7.3.

Преобразование (7.4.2) обобщает преобразование (7.2.2) ( $M=1$  и  $\{a_k=0\}$ ). Другой частный случай преобразования (7.4.2), при  $M=2$  и  $\{a_1=0, a_2=r\}$ ,

$a_2=r\}$  was considered in ref.[17]. As is seen from eqs.(7.4.1), (7.4.2), constraints on shifted logarithms take into account the multi-point correlations of internal measure  $\{\mu_i\}$  in a most general way. The collection  $A$ , setting a "correlation configuration", must obey some scaling  $a_k \propto l^{\omega_k}$ ,  $\omega_k > 0$ , in general.

рассматривался в работе [17]. Как видно из ур-й (7.4.1), (7.4.2), ограничения на сдвинутые логарифмы принимает во внимание многоточечные корреляции собственной меры  $\{\mu_i\}$  в самом общем виде. Набор  $A$ , устанавливающий "корреляционную конфигурацию", должен подчиняться некоторому скейлингу  $a_k \propto l^{\omega_k}$ ,  $\omega_k > 0$ , в общем случае.

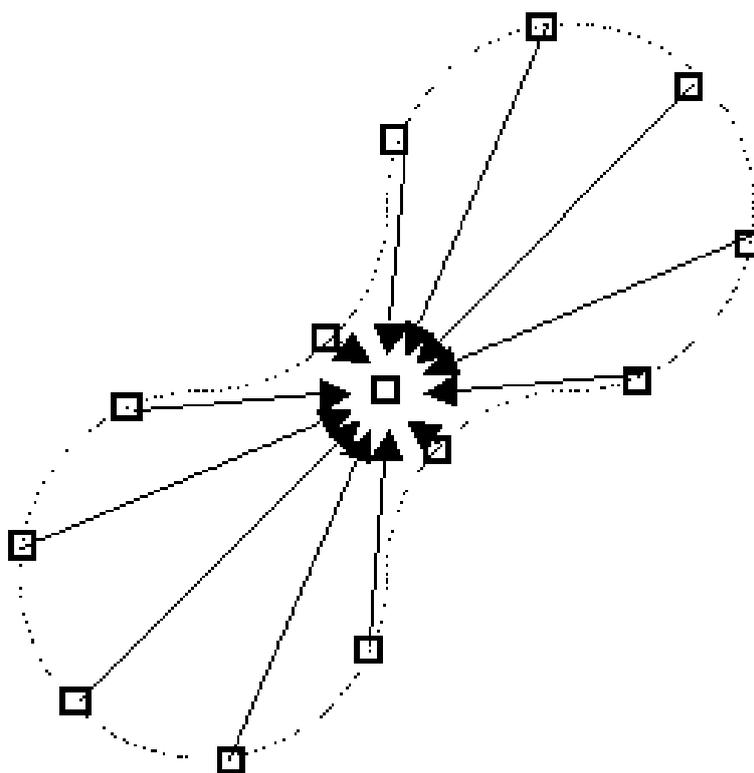


Fig.7.3. Schematic representation of the multi-point transform (6.3.2) for  $M=12$ . Arrows are for the shifts  $\{a_k\}$ ,  $k=1, \dots, 12$ .

Рис.7.3. Схематичное представление многоточечного преобразования (6.3.2) для  $M=12$ . Стрелками обозначены сдвиги  $\{a_k\}$ ,  $k=1, \dots, 12$ .

The distribution  $\{\mu_{1i}(q,A)\}$  should reflect the peculiarities of the internal distribution  $\{\mu_i\}$  and we can investigate them comparing the measures before and after transform (7.4.2) using TI as a measure of their distinction :

Распределение  $\{\mu_{1i}(q,A)\}$  должно отражать особенности собственного распределения  $\{\mu_i\}$ , и мы можем исследовать их, сравнивая меры до и после преобразования (7.4.2), используя ИП как меру их различия:

$$I(q,A) = \sum_{i=1}^N \mu_i \ln(\mu_i / \mu_{1i}). \quad (7.4.3)$$

The simple calculation gives Простое вычисление дает для  
for  $I(q,A)$  :  $I(q,A)$  :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{I(q,A)}{(Q-1)\ln(l)} = \frac{\tau(q,A)}{(Q-1)} + \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^M \frac{q_k I(a_k)}{(Q-1)\ln(l)} - D_1, \quad (7.4.4a)$$

or

$$D_{q,A} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{I(q,A)}{(Q-1)\ln(l)} + D_1, \quad (7.4.4b)$$

$$\tau(q,A) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(\chi(q,A))}{\ln l}, \quad D_{q,A} = \frac{\tau(q,A)}{(Q-1)} + \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^M \frac{q_k I(a_k)}{(Q-1)\ln(l)},$$

$$Q = \sum_k q_k, \quad I(a_k) = \sum_i \mu(x_i) \ln[\mu(x_i)/\mu(x_i+a_k)],$$

where  $D_1$  is the usual information dimension,  $D_{q,A}$  generalizes the Renyi dimensions (entropies). The case of  $Q=1$  (“ $D_1$ -splitting”) requires separate consideration and is not considered here.  $I(a_k)$  are the shift informations. Где  $D_1$  - обычная информационная размерность,  $D_{q,A}$  обобщает размерности (энтропии) Реньи. Случай  $Q=1$  (“ $D_1$ -расщепление”) требует отдельного рассмотрения, и здесь не рассматривается.  $I(a_k)$  - информации сдвигов.

Legendre transform of the function

$$\tau_l(q,A) = \lim_{l \rightarrow 0} I(q,A)/\ln l \quad (7.4.5)$$

gives

$$\alpha_{lk}(q,A) = \partial \tau_l / \partial q_k = \alpha_k(q,A) - D_1 + \lim_{l \rightarrow 0} I(a_k)/\ln l, \quad (7.4.6)$$

$$f_l(q,A) = \sum_k q_k \alpha_{lk} - \tau_l(q,A) = f(q,A) - D_1, \quad (7.4.7)$$

where  $\alpha_k(q,A)$  and  $f(q,A)$  are the generalizations of the two-point definitions of ref.[17] : где  $\alpha_k(q,A)$  и  $f(q,A)$  суть обобщения двух точечных определений в работе[17]:

$$\alpha_k(q,A) = \partial \tau / \partial q_k = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_i \mu_1(x_i, q, A) \ln(\mu(x_i+a_k))/\ln l, \quad (7.4.8)$$

$$f(q,A) = \sum_k q_k \alpha_k(q,A) - \tau(q,A) = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_i \mu_1(x_i, q, A) \ln(\mu_1(x_i, q, A))/\ln l. \quad (7.4.9)$$

The approach described can be also applied to investigate the structures with anisotropic scaling, as described in refs.[18,19], for example. It can be also generalized to the case of arbitrary partition into the boxes of sizes  $l_i \leq l$ .

For  $M=1$  and zero correlation configuration  $\{a_k=0\}$  we obtain information theoretic foundation described in previous section. The group properties of the transform (7.4.2) require separate considera-

Преобразование Лежандра от функции

дает

Описанный подход может так же быть применен для исследования структур с анизотропным скейлингом, как это описывается в работах [18,19], например. Он так же может быть обобщен на случай произвольного разбиения на ячейки размеров  $l_i \leq l$ .

При  $M=1$  и нулевой корреляционной конфигурации  $\{a_k=0\}$  мы получаем информационное обоснование, описанное в предыдущем подразделе. Групповые свойства преобразования (7.4.2) требуют отдельного рассмотре-

tion, but it is clear that they must combine the group properties of the shift and simplest multifractal transform (7.2.2).

### 7.5. Multifractal parameterization

The described above MFF relations can be used for a quantitative description - multifractal parameterization - of real objects. Parameterization is understood here as one or another way of ascribing the quantitative characteristics to the systems of different nature - mechanical, physical, chemical, electrical, biological etc. - for their quantitative description, comparison and distinguishing. The parameterization is carried out on the basis of concrete algorithms of the use of measuring instruments and computing procedures. By nowadays many methods of measuring the fractal dimensions of observable patterns are known [26,29,30]. The majority of works on fractal parameterization is dedicated to investigations of strongly non-equilibrium, inhomogeneous (in space or in time) systems. The very fractal parameterization on the basis of only one value of fractal dimension can not quantitatively express structure inhomogeneity. This limitation forces us to search for the more general approaches to parameterization of fractal patterns such as the multifractal parameterization..

ния, но ясно, что они должны соединять групповые свойства сдвига и простейшего "мультифрактального преобразования" (7.2.2).

### 7.5. Мультифрактальная параметризация

Описанные выше МФФ соотношения могут быть использованы для количественного описания - мультифрактальной параметризации - реальных объектов. Под параметризацией здесь понимается тот или иной способ приписывания количественных характеристик системам различной природы - механическим, физическим, химическим, электрическим, биологическим и др. - для их количественного описания, сравнения и различения. Параметризация проводится на основе конкретных алгоритмов использования измерительных приборов и вычислительных процедур. На сегодняшний день известно много методов измерения фрактальных размерностей структур [26,29,30]. Большинство работ по фрактальной параметризации посвящено исследованию сильно неравновесных, неоднородных (в пространстве и времени) систем. Сама по себе фрактальная параметризация на основе одной величины фрактальной размерности не может количественно отразить неоднородность структуры. Это ограничение вынуждает нас искать более общие подходы к параметризации фрактальных паттернов, такие как

Below we introduce a concept of *adequacy of MF-characteristics calculation* and propose a method of its quantitative evaluation. Keeping in mind the different possible MF-parameters adequacy we can consider any object (and not only specially "constructed" ones) as the support of multifractal measure with one or another degree of adequacy of multifractal description application. As we consider the presence of non-trivial MF-spectra as F-symmetry breaking this approach abolishes the differentiation of the objects into "absolutely fractal" and "absolutely non-fractal" ones. All is multifractal with different degree of F-symmetry breaking. And this is like one is conscious that in Nature there are no absolutely elastic or hard, or plane and smooth objects, there are no ideal spheres or circles or triangles, etc. Similarly, there are no ideal fractals. All imagined symmetries of natural objects are really broken to some degree, but the ideally symmetric objects (images) are the reper images of our thinking.

### 7.5.1. Methods and algorithms

The multifractal parameterization consists in processing a large number of the regression plots in two (or semi-) logarithmic coordinates, each plot corresponding to some certain value of parameter  $q$ . The fractal parameterization corresponds only to one graphics for  $q=0$ . The methods and algorithms of mul-

мультифрактальная параметризация.

Ниже мы вводим понятие *адекватности вычисления МФ-характеристик* и предлагаем метод ее количественной оценки. Имея ввиду различные возможные адекватности МФ-параметров, мы можем рассматривать любой объект (а не только специально "сконструированные") как базовое множество мультифрактальной меры с той или иной степенью адекватности применения мультифрактального описания. Поскольку мы считаем наличие нетривиальных МФ спектров как нарушение Ф-симметрии, этот подход отменяет дифференциацию объектов на "абсолютно фрактальные" и "абсолютно нефрактальные". Все является мультифрактальным с различной степенью нарушения Ф-симметрии. В том же смысле мы понимаем, что в Природе нет абсолютно упругих или твердых, или плоских и гладких объектов, нет идеальных сфер, или кругов, или треугольников, и пр. Аналогично, нет идеальных фракталов. Все воображаемые симметрии реально в некоторой степени нарушены, но идеально симметричные объекты (образы) являются реперными образами нашего мышления.

### 7.5.1. Методы и алгоритмы

Мультифрактальная параметризация состоит в обработке большого числа регрессионных графиков в двух (или полу-) логарифмических координатах, причем каждый график соответствует некоторой определенной величине параметра  $q$ . Фрактальная параметризация соответствует только одному графику для  $q=0$ . Методы и алго-

tifractal parameterization were elaborated in refs.[31-48], and summarizing refs.[49,50], for realization of the automatic processing of large sets of digitized images and consist mostly of three main components: a measures generation method of coarsened partitions (MGMCP), algorithm of scales' generation (for construction of the fractal regression plots) and scales' subranges retrieval algorithm (for calculation of the statistical characteristics of correct multifractal spectra).

The key idea of the MGMCP technique proposed is to use several (many) partitions with different box sizes of the support's embedding space made in such a way that to replace the limits  $l \rightarrow 0$  in eqs.(7.1.3a), (7.2.8,9) by equivalent determination of the slopes of dependencies on the logarithms of box sizes using the least square approximation, i.e. to apply something like the Lhopital rule.

Let we have some (strange) object embedded into Euclidean space of dimension  $d$  partitioned into equal cubic (square, hypercubic) boxes of the size  $l_0$  as small as possible, which we call here and next the *elementary boxes*. Their size may be determined by the way of object's presentation, apparatus sensitivity etc. The sizes of boxes are to be equal for all directions. Their number  $N_0$  must be large enough. Actually such a partition is almost always possible. Let  $\{\mu_{i_0}\}$ ,  $i=1, \dots, N_0$ , be the support measure calculated accordingly to object's

ритмы мультифрактальной параметризации были разработаны [31-48], и суммирующие работы [49,50], для реализации автоматической обработки больших наборов оцифрованных изображений и состоят в основном из трех компонент: метода генерации мер огрубленных разбиений (МГМОП), алгоритма генерации шкал (для построения фрактальных регрессионных графиков) и алгоритма перебора поддиапазонов шкал (для вычисления статистических характеристик корректных мультифрактальных спектров).

Ключевой идеей предложенной техники МГМОП является использование нескольких (многих) разбиений охватывающего пространства базового множества с различными размерами ячеек таким образом, чтобы заменить пределы  $l \rightarrow 0$  в ур.(7.1.3a), (7.2.8,9) на эквивалентное определение наклонов зависимостей от логарифма размера ячеек, используя метод наименьших квадратов, т.е. применить что-то вроде правила Лопиталья.

Пусть имеется некоторый (странный) объект в евклидовом охватывающем пространстве размерности  $d$ , разбитом на как можно более "мелкие" равные кубические (квадратные, гиперкубические) ячейки размера  $l_0$ , которые будут называться здесь и далее *элементарными*. Величина элементарных ячеек может определяться условиями эксперимента, способом представления наблюдаемой структуры, чувствительностью аппаратуры и пр. Размеры элементарных ячеек во всех направлениях предполагаются равными. Число элементарных ячеек  $N_0$  должно быть достаточно большим.

nature by this partition into elementary boxes. Using this partition and its measure we can calculate the measures of larger (equal) boxes of  $l_k \times l_k \times \dots$  elementary ones,  $l_k=2,3,4,5,\dots$ ,  $k=1,\dots,M$ , and the number of such larger boxes is  $N_k=[N_0/l_k]^d$  – an integer part power Euclidean dimension of embedding space. Using measure additivity property, we can ascribe to each larger box the measure equal to the sum of the measures of elementary boxes included. Thus given the set of  $\{l_k\}$  we obtain several (many) equiboxed partitions with box size  $l_k \times l_k$  in the units of elementary boxes with measures  $\{\mu_{ik}, i=1,\dots,N_k\}$ . Below we discuss only the problems concerned with processing of digitized photos. *In this case the elementary boxes (cells) are the pixels and their measures are calculated by their colors coded as the integers numbers.*

The first way of MF-spectra determination consists in calculating for each rougher partition the generalized correlation function  $\chi_k(q) = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ik}^q$  for all needed  $q$ -values from given range and following determination of the slopes of the analogues of Richardson plots in double logarithmic axes  $\ln l_k - \ln(\chi_k(q))$ . This gives an evaluation of generalized correlation function exponent  $\tau(q)$ . This function enables to calculate numerically  $D_q$ - and  $f(\alpha)$ -spectra by numeric Legendre trans-

Практически, такое разбиение возможно всегда. Пусть  $\{\mu_{i0}\}$ ,  $i=1,\dots,N_0$ , есть мера носителя, рассчитанная согласно его природе по разбиению на элементарные ячейки. Используя это разбиение и его меру, мы можем рассчитать меру более крупных (одинаковых) ячеек размером  $(l_k)^d$  элементарных ячеек,  $l_k=2,3,4,5,\dots$ ,  $k=1,\dots,M$ , причем число крупных ячеек равно  $N_k=[N_0/l_k]^d$  – целая часть отношения в степени, равной размерности охватывающего пространства, и каждой такой крупной ячейке приписать (на основании свойства аддитивности меры  $\{\mu_{i0}\}$ ) меру, равную сумме мер элементарных ячеек, которые в нее включены. Таким образом, получаем несколько (много) равноячеечных разбиений с размерами ячеек из заданного набора  $\{l_k\}$  и мерами  $\{\mu_{ik}, i=1,\dots,N_k\}$ , определенными по заданным мерам элементарных ячеек. Ниже мы обсуждаем только проблемы обработки оцифрованных фотографий. *В этом случае элементарные ячейки – пиксели, а их меры вычисляются по их цветам, закодированных целым числом.*

Первый способ вычисления мультифрактальных характеристик состоит в том, что используя набор огрубленных разбиений с их мерами мы можем рассчитать для каждого разбиения его обобщенную корреляционную функцию  $\chi_k(q) = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ik}^q$  для всех заданных величин  $q$  из заданного диапазона. Построив для каждой такой обобщенной корреляционной функции аналог графика Ричардсона в двухлогарифмических осях  $\ln l_k - \ln(\chi_k(q))$ , и определив его наклон по методу наименьших квадратов, получаем оценку

form via eqs.(7.1.6):.

экспоненты обобщенной корреляционной функции  $\tau(q)$ . Эта функция позволяет вычислить численно  $D_q$ - и  $f(\alpha)$ -спектры припомощи численного преобразования Лежандра по ур.(7.1.6):.

$$\chi_k(q) = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ik}^q, \quad \tau(q) = \frac{\Delta \ln(\chi_k(q))}{\Delta \ln l_k},$$

$$D_q = \tau(q)/(q-1), \quad D_1 = \alpha(q=1), \quad \alpha = d\tau(q)/dq, \quad f(\alpha) = q\alpha - \tau(q), \quad (7.5.1)$$

The second way is analogous to one first proposed in ref.[16] and consists in calculation of the sums in eqs.(7.2.8,9)

Второй способ аналогичен предложенному впервые в работе [16] прямому определению  $f(\alpha)$ -спектров и состоит в вычислении сумм в ур.(7.2.8,9)

$$A_k(q) = \sum_i \mu_{1ik}(q) \ln(\mu_{ik}), \quad F_k(q) = \sum_i \mu_{1ik}(q) \ln(\mu_{1ik}(q)),$$

for each rougher partition for all needed  $q$ -values from given range and determination of the slopes of the dependencies  $A_k$  and  $F_k$  on  $\ln l_k$  by least square approximation. Using eqs.(7.1.6,7) we can calculate  $D_q$ -spectrum.

для каждого огрубленного разбиения и каждого нужного  $q$  из заданного диапазона и определения наклонов зависимостей  $A_k$  и  $F_k$  от  $\ln l_k$  по методу наименьших квадратов. По ур. (7.1.6,7) мы можем вычислить  $D_q$ -спектр.

$$\mu_{1ik}(q) = \frac{(\mu_{ik})^q}{\chi_k(q)}, \quad A_k(q) = \sum_i \mu_{1ik}(q) \ln(\mu_{ik}), \quad F_k(q) = \sum_i \mu_{1ik}(q) \ln(\mu_{1ik}(q)),$$

$$\alpha(q) = \frac{\Delta A_k(q)}{\Delta \ln l_k}, \quad f(q) = \frac{\Delta F_k(q)}{\Delta \ln l_k},$$

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha), \quad D_q = \tau(q)/(q-1), \quad D_1 = \alpha(q=1). \quad (7.5.2)$$

The third way is in analogous use of the formulas (7.2.3-4) with a primary determination of information dimension  $D_1$ .

Третий способ состоит в аналогичном подходе на основе формул (7.2.3-4) с первоначальным расчетом информационной размерности  $D_1$ .

The analysis of calculation errors was described in ref.[50]. The second way of calculation with direct determination of  $f(\alpha)$ -spectra and following calculation of Renyi dimensions is preferable due to this analysis and other reasons [49,50].

Анализ ошибок вычисления описан в работе [50]. В силу этого анализа и по ряду других причин [49,50] предпочтительным является второй способ: непосредственный расчет  $f(\alpha)$ -спектров с последующим расчетом размерностей Реньи.

As real observed structures are the chaotic or stochastic ones the coarsened partitions must not cover all the square of elementary cells

Поскольку реально наблюдаемые структуры являются хаотическими или стохастическими, огрубленные разбиения не обязательно должны охва-

since for somewhat lesser square of image we will have a picture with almost the same statistical characteristics. The idea of automatic choice of a set of scales [49,50] is that by a beforehand given minimum part of image  $0 \leq SqPart \leq 1$ , which should be covered by all coarsened partitions, one should to carry out a simple exhaustive search of possibilities from a set of integer numbers [(for example, 2, 3, 5, 7, 11, etc.) power integer numbers (from 1 up to 11, for example), and an exhaustive search of dividers of a minimum image size (in pixels)] to find, what of these numbers are suit for the coarsened partitions covering not less than  $SqPart$  of a whole image square.

Using a set of scales generated for given parameter  $SqPart$ , we can calculate the multifractal spectra by MGMCP for each subrange of this set and test their *correctness*, see eqs.(7.5.4) below. Then we can carry out a statistical analysis of the characteristics of *correct spectra*, i.e. to determine the maximum, minimum, average values and standard deviations of such quantities as  $D_0, D_1, D_2, \Delta_Q, f_Q, Q \gg 1$  (that is necessary to evaluate the limits  $q \rightarrow \infty$ ), and others. In the calculations described below the two basic schemes of subranges retrieval were used: *OR* (*overall range*) and *FE* (*from edges*) [49,50]. If  $M$  is the number of used scales, then  $2(M-1)-1$  pairs of spectra ( $D_q$  and  $f(\alpha)$ , each corresponding to the scale subrange) will be checked on their correctness, see

тывать всю площадь сетки элементарных ячеек, т.к. при небольшом снижении площади охвата мы будем иметь картинку с примерно теми же статистическими характеристиками. Идея автоматизации выбора набора масштабов [49,50] состоит в том, чтобы поперед заданной минимальной доле площади изображения  $0 \leq SqPart \leq 1$ , которую должны охватывать все огрубленные разбиения, простым перебором возможностей из набора простых чисел в целых степенях, например, 2, 3, 5, 7, 11 и т.д. в степенях от 1 до 11, например, а так же перебором делителей минимального размера изображения (в пикселях) выяснить, какие из этих чисел годятся для огрубленных разбиений, покрывающих не менее чем  $SqPart$  всей площади изображения.

Используя набор масштабов, сгенерированный для данного параметра  $SqPart$ , мы можем вычислить мультифрактальные спектры по МГМОП для каждого поддиапазона этого набора и проверить их *корректность*, см. ур.(7.5.4) ниже. Затем мы можем провести статистический анализ характеристик *корректных спектров*, т.е. определить максимальные, минимальные, средние величины и стандартные отклонения таких величин как  $D_0, D_1, D_2, \Delta_Q, f_Q, Q \gg 1$  (что необходимо для оценки пределов  $q \rightarrow \infty$ ), и другие. В вычислениях, описанных ниже, использовались две базовые схемы перебора поддиапазонов: *OR* (*overall range*) и *FE* (*from edges*) [49,50]. Если  $M$  - число используемых шкал, то  $2(M-1)-1$  пар спектров ( $D_q$  и  $f(\alpha)$ , каждая соответствует поддиапазону шкал) проверяются на коррект-

eqs.(7.5.4), when using the scheme *FE*, and  $C_M^2 = M! / (2(M-2)!) = M(M-1) / 2$  pairs of spectra - by the scheme *OR*.

On the base of basic algorithms of multifractal image processing we can introduce the quantitative measures of a non-adequacy of multifractal characteristics calculation. For each characteristic  $X$  (that may be  $D_0, D_1, D_2, \Delta_Q, f_Q, Q \gg 1$ , and others) we can compute its minimum, maximum, average values and standard deviation over all the *correct spectra*, see eqs.(7.5.4). Let's consider expression of a relative error  $\delta X$ , calculated as the ratio of (shifted) standard deviation  $\Delta X$  to the average value  $\langle X \rangle$ , both being determined by sampling  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$

$$\delta X = \frac{\Delta X}{\langle X \rangle} = \frac{\sqrt{\sum (x_i - \langle X \rangle)^2 / N}}{\sum x_k / N} = \sqrt{N} \sqrt{\sum \left( \frac{x_i}{\sum x_k} - \frac{1}{N} \right)^2}$$

Defining the non-adequacy of measurement of the value  $X$  by expression

$$A = \frac{\delta X}{\sqrt{N}} = \sqrt{\sum \left( \frac{x_i}{\sum x_k} - \frac{1}{N} \right)^2}, \quad (7.5.3)$$

we obtain the value, always finite, zero for samplings consisting of identical values. The closer to zero are the values (7.5.3), the more adequate parameterization.

The described above methods and algorithms with the criteria of spectra selection (sampling), see next, were realised in a computer program MFRDrom ("Multifractalodrom") for Windows 95 environment. It allows to handle series of

ность, см. ур.(7.5.4), по схеме *FE*, и  $C_M^2 = M! / (2(M-2)!) = M(M-1) / 2$  пар спектров - по схеме *OR*.

На основе базовых алгоритмов мультифрактальной обработки изображений мы можем ввести количественную меру неадекватности вычисления мультифрактальных характеристик. Для каждой характеристики  $X$  (каковой может быть  $D_0, D_1, D_2, \Delta_Q, f_Q, Q \gg 1$ , и другие) мы можем вычислить ее минимальное, максимальное, среднее значение и стандартное отклонение по всем *корректным спектрам*, см. ур.(7.5.4). Рассмотрим выражение относительной ошибки  $\delta X$ , вычисленной как отношение (сдвинутого) стандартного отклонения  $\Delta X$  к средней величине  $\langle X \rangle$ , причем обе определяются выборкой  $\{x_i, i=1, \dots, N\}$

Определяя неадекватность измерения величины  $X$  выражением

мы получаем величину, всегда конечную, нулевую для выборки, состоящей из идентичных величин. Чем ближе к нулю величины (7.5.3), тем адекватнее параметризация.

Описанные выше методы и алгоритмы с критериями отбора спектров (выборки), см. ниже, были реализованы в компьютерной программе MFRDrom ("Multifractalodrom") для среды Windows 95. Она позволяет обрабатывать серии черно-белых, серых

the black-and-white, grey-level and color images of the size up to 2000x2000 pixels for a range of  $q$ -values up to  $[-200,+200]$ . This program was designed by the author on the basis of accumulated experience of numerical multifractal image analysis of patterns in metals and alloys carried out during a number of years. MFRDrom can calculate the spectra in two ways by MGMCP, allows to investigate spectra in the game mode setting arbitrary samplings of scales, gathers in the tables the values of specified parameters of spectra together with the results of statistical processing of correct (see eqs.(7.5.4)) spectra. It also writes onto the hard disk all calculation results as the text files, which can further be handled by text processors or spreadsheets. The program was tested on the model objects, such as straight lines and Sierpinski carpets, and gave the exact values of fractal dimension up to 4-th (by the first way) and up to 8-th (by the second way of calculation) decimal. Thus MFRDrom correctly reflects the presence of F-symmetry for Sierpinski carpets and other objects. The numeric results described below were obtained by processing the black/white images with assigning unities to the pixels of one color (black, for example) and by the following renormalization of the sums of unities into the coarsened boxes by overall sum of unities over all coarsened partition to generate the measure distributions for each such a partition. And this is merely a

и цветных изображений размером до 2000x2000 пикселей и диапазоны величин  $q$  до  $[-200,+200]$ . Эта программа разработана автором на основе накопленного опыта численного мультифрактального анализа изображений структур металлов и сплавов, проводимого в течение ряда лет. MFRDrom может вычислять спектры двумя способами по MGMCP, позволяет исследовать спектры в режиме игры, устанавливая произвольную выборку масштабов, собирает в таблицы величины нужных параметров спектров вместе с результатами статистической обработки корректных (см. ур.(7.5.4)) спектров. Она также записывает на диск все результаты вычислений как текстовые файлы для дальнейшей обработки другими процессорами или электронными таблицами. Программа была протестирована на модельных объектах, таких как прямые линии и ковры Серпинского, и дает точные величины фрактальной размерности до 4-го (по первому способу) и до 8-го (по второму способу расчета) знака после запятой. Таким образом, MFRDrom правильно отражает наличие Ф-симметрии ковров Серпинского и других объектов. Численные результаты, описанные ниже, были получены при обработке черно-белых изображений приписыванием единиц пикселям одного цвета (черным, например) с последующей ренормализацией сумм единиц в огрубленных ячейках на общую сумму единиц по всему огрубленному разбиению для генерации распределения меры для каждого такого разбиения. И это простейший путь генерации меры и прямого выявления нарушения Ф-

simplest way of measure generation and direct revelation of F-symmetry breaking.

### 7.5.2. The multifractal and pseudomultifractal parameterizations and fractal dissymmetry

The many years experience of numeric multifractal image analysis of structures of very different nature [11,12,31-50] shows its effectiveness in analyzing the hidden processes in metals and alloys, i.e. the processes that can not be directly observed but influence the important characteristics of the systems under study. Almost always there were observed the stable reasonable correlations of MF characteristics ( $D_q$ ,  $q>1$ ,  $\Delta_{40\div 80}$ , etc.) with measured properties or parameters, characterizing the environment or technological conditions. In this sense MFF can be perceived as the way of quantitative parameterization of structures - a *multifractal parameterization* (MFP). This use of MFF is like a measurement of some signal by appropriate device, but instead of one measured value - a "point" on the device scale, we obtain two plane curves,  $D_q$  and  $f(\alpha)$ , and can use some of their parameters to characterize the observed structure quantitatively. Of coarse, we should apply additional criteria, for example, the measured spectra must be correct, i.e.

симметрии.

### 7.5.2. Мультифрактальная и псевдомультифрактальная параметризации и фрактальная диссимметрия.

Многолетний опыт численного мультифрактального анализа изображений структур самой различной природы, [11,12,31-50], показывает его эффективность при анализе скрытых процессов в металлах и сплавах, т.е. таких процессов, которые нельзя наблюдать непосредственно, но при этом они существенно влияют на характеристики изучаемых систем. Почти всегда наблюдались разумные устойчивые корреляции МФ-характеристик ( $D_q$ ,  $q>1$ ,  $\Delta_{40\div 80}$ , и др.) с измеряемыми свойствами или параметрами, характеризующими окружающую среду или технологические условия. В этом смысле МФФ можно понимать как способ количественной параметризации структур - *мультифрактальной параметризации* (МФП). Это использование МФФ напоминает измерение некоторого сигнала с помощью подходящего прибора, но вместо одной измеряемой величины - "точки" на шкале прибора, мы получаем две плоские кривые,  $D_q$  и  $f(\alpha)$ , и можем использовать любые их параметры для количественной характеристики наблюдаемых структур. Разумеется, следует применять дополнительные критерии, например, измеряемые спектры должны быть корректны, т.е.

$$D_{q1} \geq D_{q2}, q1 \leq q2, f(\alpha(q=0)) = \text{maximum} = D_0$$

$$f(\alpha(q=1)) = \alpha(q=1) = D_1, f(\alpha(q1)) \leq f(\alpha(q2)), q1 \geq q2 \geq 0, \quad (7.5.4a)$$

and the others. It turned out that almost always we can not obtain correct branch of  $f(\alpha)$ -spectrum for  $q < -2 \div -5$ , but we do can obtain correct  $f(\alpha)$ -branch for  $q \geq 0$ . Sometimes there appeared a "corn" on this branch such that the criterion (7.5.4a) was not satisfied for  $q > 10 \div 20$ . This situation is schematically shown in Fig.7.4, see also ref.[9]. Sometimes it was impossible at all to choice the set  $\{l_k\}$  to obtain the correct branch of  $f(\alpha)$ -spectrum for  $q > 0$  by (7.5.4a).

и другие. Оказалось, что почти всегда мы не можем получить корректные ветви  $f(\alpha)$ -спектров для  $q < -2 \div -5$ , но мы действительно можем получать корректные ветви  $f(\alpha)$ -спектров для  $q \geq 0$ . Иногда на этой ветви появляется "рог", так что критерий (7.5.4a) не удовлетворяется для  $q > 10 \div 20$ . Эта ситуация схематически представлена на рис.7.4, см. также [9]. Иногда было вообще невозможно выбрать набор масштабов  $\{l_k\}$  так, чтобы получить корректную по (7.5.4a) ветвь  $f(\alpha)$ -спектра при  $q \geq 0$ .

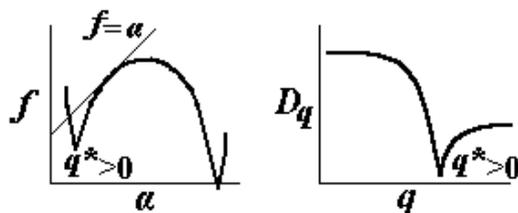


Fig.7.4. Typical incorrectness of  $f(\alpha)$  and  $D_q$  spectra calculated numerically for the real structures.

Рис.7.4. Типичная некорректность  $f(\alpha)$  и  $D_q$  спектров, полученных численно для наблюдаемых реальных структур.

It was found that the reason of such "corns" on the  $f(\alpha)$ -branch for  $q > 0$  is a bend on the dependencies of  $\ln(\chi_k)$ ,  $F_k$  and  $A_k$  on  $\ln(l_k)$  (see eqs.(7.5.1), (7.5.2)) that is schematically shown in Fig.7.5,  $F_k$  being most sensitive to this effect. This bend is most expressed for large positive and negative  $q$ -values. To obtain  $f(\alpha)$ -spectra satisfying the criterion (7.5.4a) we must use the greater scales  $l_k > l_k^*$  to the right of the bend point  $l_k^*$ .

Было обнаружено, что причиной таких "рогов" на ветви  $f(\alpha)$ -спектра для  $q \geq 0$  является наличие изгиба на зависимостях  $\ln(\chi_k)$ ,  $F_k$  и  $A_k$  от  $\ln(l_k)$ , см. ур.(7.5.1), (7.5.2), что схематически представлено на рис.7.5, причем  $F_k$  наиболее чувствительна к этому эффекту. Этот изгиб наиболее выражен для больших положительных и отрицательных величин  $q$ . Чтобы получить корректный  $f(\alpha)$ -спектр, удовлетворяющий критерию (7.5.4a), следует использовать большие шкалы  $l_k > l_k^*$  справа от точки изгиба  $l_k^*$ .

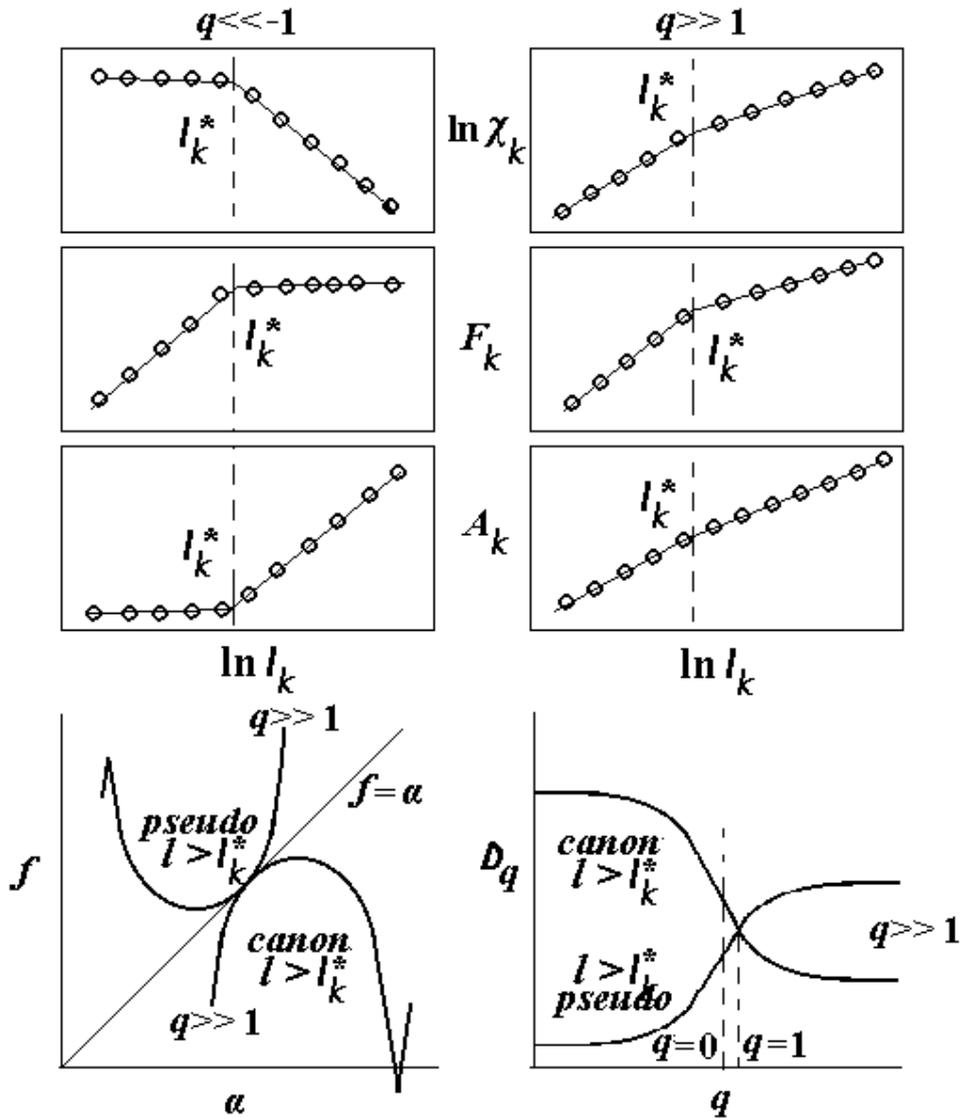


Fig.7.5. Typical bends in the plots of least square approximations and two types of multifractal curves obtained by the scales  $l_k > l_k^*$  (*canon*) and  $l_k < l_k^*$  (*pseudo*).

Рис.7.5. Типичные изломы на графиках аппроксимаций по методу наименьших квадратов и два типа мультифрактальных кривых, получаемых по шкалам  $l_k > l_k^*$  (*canon*) и  $l_k < l_k^*$  (*pseudo*).

It was found also that very often we can obtain the "inverse" MF-spectra using the smaller scales  $l_k$  to the left of the bend point  $l_k^*$ . Such "inverse" spectra were called *the pseudomultifractal spectra* (from the Greek *pseudein* – «to lie or to have a close resemblance to» [51]). In the most cases we can obtain the both types of MF-spectra: *canonical sat-*

Было также обнаружено, что очень часто мы можем получить "инвертированные" мультифрактальные спектры при использовании малых шкал  $l_k$  слева от точки изгиба  $l_k^*$ . Такие инвертированные спектры были названы *псевдомультифрактальными спектрами* (от греческого *pseudein* – «прилегать или быть похожим» [51]). В большинстве случаев мы можем полу-

atisfying the criteria (7.5.4a), and *pseudospectra* satisfying the criteria

$$D_{q1} \leq D_{q2}, q1 \leq q2, f(\alpha(q=0)) = \text{minimum} = D_0, \\ f(\alpha(q=1)) = \alpha(q=1) = D_1, f(\alpha(q1)) \leq f(\alpha(q2)), \alpha(q1) \leq \alpha(q2), 0 \leq q1 \leq q2. \quad (7.5.4b)$$

Their typical views are shown in Fig.7.5.

Below we show that *the presence of pseudospectra can be considered as an intrinsic property of measure support corresponding to its geometrical symmetry breaking.*

It should be pointed out that the values of MF-characteristics calculated separately by two ways described in section 7.5.1 very often coincide up to five decimals and better and the rare distinctions were lesser than 0.02 in the absolute values. In refs.[49.50] there are the examples of such real structures that it was impossible to obtain the canonical spectra for them at all. There were also the structures for which it was impossible to calculate the pseudospectra. So, we can not consider the bends in the plots of Fig.7.5 to be due to the finiteness of the pictures, number of elementary boxes, etc., and this effect seems to be not intrinsic to the calculation technique, but *is due to the not simple hierarchy of very real structures: their selfsimilarity is not the same on different scales.*

In spite of the absence of theoretical background, the appearance of pseudospectra is a more or less stable effect. The parameters of such pseudospectra can be success-

fully both types of spectra: *canonical*, satisfying the criteria (7.5.4a), and *pseudospectra*, satisfying the criteria

Below we show that *the presence of pseudospectra can be considered as an intrinsic property of measure support corresponding to its geometrical symmetry breaking.*

It should be pointed out that the values of MF-characteristics calculated separately by two ways described in section 7.5.1 very often coincide up to five decimals and better and the rare distinctions were lesser than 0.02 in the absolute values. In refs.[49.50] there are the examples of such real structures that it was impossible to obtain the canonical spectra for them at all. There were also the structures for which it was impossible to calculate the pseudospectra. So, we can not consider the bends in the plots of Fig.7.5 to be due to the finiteness of the pictures, number of elementary boxes, etc., and this effect seems to be not intrinsic to the calculation technique, but *is due to the not simple hierarchy of very real structures: their selfsimilarity is not the same on different scales.*

In spite of the absence of theoretical background, the appearance of pseudospectra is a more or less stable effect. The parameters of such pseudospectra can be success-

fully used for the goals of quantitative parameterization, and we call here this way of multifractal parameterization a *pseudomultifractal parameterization* (PMFP).

As we relate the degenerate MF-spectra with presence of F-symmetry, see Sec.7.3, appearance of non-degenerate canonical and pseudospectra should be considered as the different types of F-symmetry breaking. The simultaneous appearance of both types of the multifractal spectra (the canonical and pseudo ones) was called a *fractal dissymmetry* (FDS). It should be reminded here that [51]: "dissymmetry - 1) lack of symmetry; 2) the relationship between two objects when one is the mirror image of the other." And this is reminiscent of the distinction between the "left" and "right" isomers of organic molecules [52].

It was found that very often we can automatically determine the scale ranges for correct calculation of the canonical and pseudospectra, if we add the requirement  $f(\alpha(q_{max}))=minimum$  to the criteria (7.5.4a), and the requirement  $f(\alpha(q_{max}))=maximum$  to the criteria (7.5.4b). Such an addition replaces the necessity to determine the bend point by regression plots.

успешно использовать для целей количественной параметризации, и этот способ мультифрактальной параметризации называется здесь *псевдомультифрактальной параметризацией* (ПМФП).

Поскольку вырожденные МФ-спектры мы можем соотнести с наличием Ф-симметрии, см. п.7.3, появление невырожденных канонических и псевдоспектров следует рассматривать как различные типы нарушения Ф-симметрии. Одновременное появление обоих типов спектров (канонических и псевдоспектров) было названо *фрактальной диссимметрией* (ФДС). Следует напомнить здесь, что [51]: "диссимметрия - 1) отсутствие симметрии; 2) отношение между двумя объектами, когда один является зеркальным образом другого". Это также напоминает различие между "левыми" и "правыми" изомерами органических молекул [52].

Было найдено, что очень часто мы можем автоматически определить диапазоны шкал для корректного вычисления канонических и псевдоспектров, если мы добавим требование  $f(\alpha(q_{max}))=minimum$  к критерию (7.5.4a), и требование  $f(\alpha(q_{max}))=maximum$  к критерию (7.5.4b). Такая добавка снимает необходимость определения точки перегиба по регрессионным графикам.

### 7.5.3. Pseudomultifractal analysis of geometrical asymmetry

In Ch.1 we have brought forward fundamental provision that transform information, in particular, multifractal information, is a measure of symmetry breaking in systems under study. In this subsection it is demonstrated on the model structures that the *appearance of pseudo-spectra really can be considered as intrinsic property of a measure support, related to a symmetry breaking (SB) of its geometrical structure* [45]. For this, first, the series of calculations on model structures, see Table 7.2, with the help of the MFRDrom program were carried out. Quadrat with 4 cyclic symmetries and 4 mirror ones was chosen as ideal initial pattern. The black/white patterns of Table 7.2 differ by a number of "residual" unbroken symmetries - 1 and 2 for odd and even numbers, respectively. They can be considered as the simple models of phase growth in solids. A noise (0.5% of inverted pixels) was imposed on patterns for obtaining the smoothed dependencies of MF-characteristics on an *asymmetry parameter  $a$* , which was introduced for the patterns so that it was equal to 1 at reaching the "extreme" pattern symmetrical form. For example, this is relative position of front on the side of quadrat for patterns 1 and 5, or on a diagonal for pattern 3. For the ellipses it is a ratio of diameters. For 6th pattern it is a

### 7.5.3. Псевдомультифрактальный анализ геометрической асимметрии

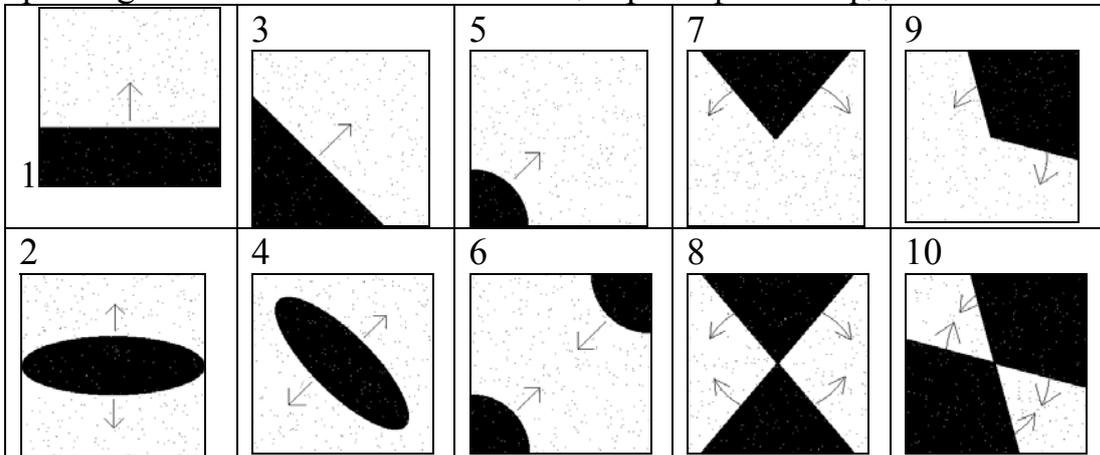
В Гл.1 было выдвинуто общее положение о том, что информация преобразования, в частности, мультифрактальная информация, является мерой нарушения симметрии в описываемых системах. В данном пункте на модельных структурах показывается, что *наличие псевдоспектров действительно можно рассматривать как собственное свойство носителя меры, связанное с нарушением симметрии (НС) его геометрической структуры* [45]. С этой целью сначала были проведены расчеты на модельных структурах, см. табл.7.2, с помощью программы MFRDrom. В качестве идеальной исходной структуры был взят квадрат с 4-мя циклическими и 4-мя зеркальными симметриями. Черно-белые структуры табл.7.2 отличаются числом "остаточных" ненарушенных симметрий - 1 и 2 для нечетных и четных номеров, соответственно. Их можно рассматривать как простые модели роста фаз в твердых телах. На структуры накладывался шум (0,5% инвертированных пикселей) для получения сглаженных зависимостей МФ-характеристик от *параметра асимметрии  $a$* , который вводился для структур таким образом, чтобы он был равен 1 при достижении структурой "крайней" симметричной формы. Например, это относительное положение фронта на стороне квадрата для структур 1 и 5 или на диагонали для структуры 3. Для эллипсов - это отношение диаметров. Для структуры 6 - это отно-

relative front position on half diagonal. For the patterns 7-10 it was a relative angle of (half)disclosure.

сительное положение фронта на полу-диагонали. Для структур 7-10 - это относительный угол (полу)раскрытия.

Table 7.2. The structures modeling the phase growth in solids.

Таблица 7.2. Структуры, моделирующие рост фаз в твердых телах.



The parameters of calculations by MGMCP were: an image size 240x240 pixels; a set of scales of the 100% pattern square coverings  $\{l_k=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, k=1, \dots, 18; N=[240/l_k]^2\}$ ; the range of parameter  $q$  was  $[-200; 200]$ . The spectra were checked on correctness by the scheme OR for all subranges of scales (for example 2-8, 4-16 etc.) by the criteria (7.5.4), and the MF-characteristics were evaluated as the average quantities over all correct spectra. Let's remind, that such technique allows to evaluate quantitatively the (relative) degrees of the uniformity ( $f_{200} \approx f_{\infty}$ ) and ordering ( $\Delta_{200} = D_1 - D_{200} \approx D_1 - D_{\infty} = \Delta_{\infty}$ ) of patterns. Thus, the greater  $f_{200}$ , the more uniform pattern, and the greater  $\Delta_{200}$ , the more ordered pattern for canonical spectra, and on the contrary - for pseudo-spectra taking into account the sign. It was revealed, that the de-

Параметры расчетов по МГМОР: размер изображения 240x240 пикселей; набор масштабов 100%-го охвата площади структур  $\{l_k=2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, k=1, \dots, 18; N=[240/l_k]^2\}$ ; параметр  $q \in [-200; 200]$ . Проводилась проверка спектров на корректность по схеме OR для всех поддиапазонов шкал (например 2-8, 4-16 и т.д.) по критериям (7.5.4), а МФ-характеристики вычислялись как средние величины по всем корректным спектрам. Напомним, что такая методика позволяет количественно оценивать относительную степень однородности ( $f_{200} \approx f_{\infty}$ ) и упорядоченности ( $\Delta_{200} = D_1 - D_{200} \approx D_1 - D_{\infty} = \Delta_{\infty}$ ) структур. При этом, чем больше  $f_{200}$  тем структура однороднее, чем больше  $\Delta_{200}$ , тем она упорядоченнее для канонических спектров, и наоборот - для псевдоспектров, принимая во внимание знак. Было обнаружено, что зависимости МФ-параметров псевдоспек-

dependencies of MF-parameters of pseudospectra reflect not only the presence of the broken (geometrical) symmetry, but also the change of patterns with change of the asymmetry parameter. It is necessary to note that the characteristics of canonical spectra "feel" the presence of SB on the whole, and the characteristics of pseudo-spectra are capable to distinguish similar patterns with different parameters (degrees) of asymmetry. For example, the presence of only one symmetry for patterns 1, 3 gives a steady value of uniformity index  $f_{200}=0.2\div 0.5$  for canonical and 2.2 for pseudo-spectra. For patterns 1-10 of Table 7.2 the dependence of the absolute value of average ordering index by pseudo-spectra on the asymmetry parameter  $a$  are well approximated by an exponential function:  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)|=Aa^{-B}$ , similarly to Fig.7.7b, see Table 7.3, where the ratios  $\alpha$  of the coefficients  $A$ , and  $\beta$  of the coefficients  $B$  are given,  $R^2$  being the squared correlation coefficients.

тров отражают не только наличие нарушенной (геометрической) симметрии, но и изменение структур с изменением параметра асимметрии. Нужно отметить, что характеристики канонических спектров "чувствуют" наличие НС в целом, а характеристики псевдоспектров способны различать сходные структуры с различными параметрами (степенями) асимметрии. Например, наличие только одной симметрии для структур 1, 3 дает устойчивое значение индекса однородности  $f_{200} 0,2\div 0,5$  для канонических и 2,2 для псевдоспектров. Для структур 1-10 Табл.7.2 зависимость модуля среднего индекса порядка по псевдоспектрам от параметра асимметрии хорошо аппроксимируется степенной функцией:  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)|=Aa^{-B}$ , аналогично рис.7.7b, см. Табл.7.3, где так же даются отношения  $\alpha$  коэффициентов  $A$ , и  $\beta$  - коэффициентов  $B$ ,  $R^2$  - квадрат коэффициента корреляции.

Table 7.3. The parameters of non-linear correlation  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)|=Aa^{-B}$ .

Таблица 7.3. Параметры нелинейной корреляции  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)|=Aa^{-B}$ .

No.	$A$	$B$	$R^2$	$\alpha, \beta$
1\2	0,0095\0,0445	1,2246\0,5778	0,9553\0,8941	$\beta=2,119$
3\4	0,0093\0,0336	1,7272\0,842	0,9394\0,9558	$\beta=2,051$
5\6	0,0221\0,0136	1,6102\1,6659	0,9676\0,9677	$\alpha=1,625$
7\8	0,0321\0,0183	1,0237\1,003	0,9111\0,8056	$\alpha=1,754$
9\10	0,0325\0,0164	0,7668\0,9319	0,9327\0,9183	$\alpha=1,982$

The correlation of the ratios  $\beta$  for simply-connected patterns 1-4, and ratios  $\alpha$  for doubly-connected

Обнаружена корреляция отношений  $\beta$  для односвязных структур 1-

patterns 6,8,10 with a number of "residual" symmetries are detected. The fact of decrease in power regression coefficient  $A$  for (almost) invariable  $B$  for transitions from less symmetric (5,7,9) to the more symmetric (6,8,10) structures for doubly-connected patterns is trivial and is due to the very MGMCP. The fact of change in index  $B$  for analogous transitions for simply connected patterns is not trivial and can be explained on the basis of only more general thoughts, that the breaking of a geometrical symmetry of patterns results in change of a symmetry breaking of their measures with respect to multifractal transform (7.2.2). To found this proposition we should remark, that the MF-spectra of square Sierpinski carpets calculated by MGMCP using the MFRDrom program [50], are degenerate (i.e.  $D_q=D_0=D_1=f=\alpha$  for any  $q$ ) that means a nontrivial (dimension is not integer) symmetry of carpets measures (over the embedding space) with respect to multifractal transform (7.2.2), the square Sierpinski carpets having all the symmetries of the whole ideal quadrat. The slightest violation of carpets' patterns, for example, by a noise, or even by one pixel, results in the appearance of nondegenerate spectra,  $\Delta_{200} \neq 0$ .

We remind additionally that the ordering index  $\Delta_{200}$  is an evaluation of one of the extremums of  $n$  multifractal information  $I(q)/(q-1)$ , and if we draw an analogy with Janes' principal, Sec.7.2, then  $\Delta_{200}$  is a mul-

4, и отношений  $\alpha$  для двусвязных структур 6,8,10 с числом "остаточных" симметрий. Факт уменьшения коэффициента степенной регрессии  $A$  при (почти) неизменном  $B$  для переходов от менее симметричных (5,7,9) к более симметричным (6,8,10) двусвязным структурам является тривиальным и обусловлен самой схемой МГМОСР. Факт изменения показателя  $B$  при аналогичных переходах для односвязных структур не является тривиальным и может быть объяснен на основе только более общих соображений, что нарушение геометрической симметрии структур приводит к нарушению симметрии их меры по отношению к мультифрактальному преобразованию (7.2.2). Для обоснования этого положения заметим, что МФ-спектры квадратных ковров Серпинского, рассчитанные по МГМОСР с помощью программы MFRDrom [50], являются вырожденными (т.е.  $D_q=D_0=D_1=f=\alpha$  при любом  $q$ ), что означает нетривиальную (размерность не целая) симметрию мер ковров по отношению к мультифрактальному преобразованию (7.2.2). При этом квадратные ковры Серпинского обладают всеми симметриями целого квадрата. Малейшее нарушение структуры ковров, например, при помощи шума, или даже на один пиксел, приводит к появлению невырожденных спектров,  $\Delta_{200} \neq 0$ .

Дополнительно напомним, что индекс упорядоченности  $\Delta_{200}$  является оценкой одного из экстремумов мультифрактальной информации  $I(q)/(q-1)$ , и если провести аналогию с принципом Джейнса, п.7.2, то  $\Delta_{200}$  является

tifracatl analogue of changes in statistical interpretation of physical entropy due to SB. Non-zero  $\Delta_{200}$  for the structures 1-10 and the obtained correlation of regression dependencies  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)| = Aa^{-B}$  with the number of residual unbroken symmetries say about a real opportunity to measure geometrical asymmetry quantitatively by revelation of multifractal asymmetry ( $\Delta_{200} \neq 0$ ). This is in complete accordance with basic proposition of information physics, Ch.1, considering information (in the sense of transform information) as a quantitative measure of SB in the systems under study.

For the contour lines of patterns 1-6 of Table 7.2 the linear correlations of  $\Delta_{200}$  and  $a$ , not detecting any connection with the number of "residual" symmetries were detected. The linear (piecewise linear) dependencies  $\Delta_{200}^{Ps}(a)$ , for contour lines of the patterns 7,9 and 8,10 exhibit a similarity in a certain range of disclosure angles of contours. This is due to the fact that the MF-parameters of pseudo-spectra, obtained by smaller scales, do not allow to distinguish the boundaries of different subpatterns, if they pass to each other after the rotation by  $90^\circ$ , as, for example, for the left upper and left lower quarters. In Fig 7.6 the results of comparison of  $\Delta_{200}^{Ps}(a)$  - dependencies for the "checkmarks" - the boundaries of patterns 7 and 9 in Table 7.2,- are represented.

мультифрактальным аналогом изменений статистической интерпретации физической энтропии при НС. Отличие  $\Delta_{200}$  от нуля для структур 1-10 и обнаруженная корреляция коэффициентов степенных регрессионных аппроксимаций  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)| = Aa^{-B}$ , с числом остаточных ненарушенных симметрий говорят о реальной возможности количественного измерения геометрической асимметрии с помощью выявления мультифрактальной асимметрии ( $\Delta_{200} \neq 0$ ), что находится в полном согласии с основным положением информационной физики, Гл.1, трактующим информацию (в смысле информации преобразования) как количественную меру НС в изучаемых системах.

Для контуров структур 1-6 таблицы 7.2 были обнаружены линейные корреляции  $\Delta_{200}$  и  $a$ , не выявляющие какой-либо связи с числом "остаточных" симметрий. Линейные (кусочно-линейные) зависимости  $\Delta_{200}^{Ps}(a)$ , для контуров структур 7,9 и 8,10 проявляют подобие в определенном диапазоне углов раскрытия границ. Это связано с тем, что МФ-параметры псевдоспектров, полученные по малым масштабам, не позволяют отличать границы различных структур, если они переходят друг в друга при повороте на  $90^\circ$ , например, находящихся, в верхней правой и нижней правой четвертях квадрата. На рис.7.6 представлены результаты сопоставления  $\Delta_{200}^{Ps}$  для "галок" - границ структур 7 и 9 Табл.7.2.

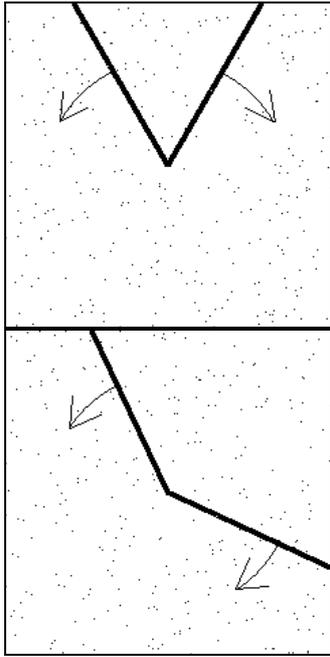


Fig.7.6. A similarity of dependencies of  $\Delta_{200}^{Ps}$  on half disclosure angle of the "checkmarks" - the boundaries of the patterns 7 и 9 in Table 7.2. As the pseudospectra are calculated by the smaller scales, their characteristics do not distinguish the local geometrical asymmetry in the quarters which pass to each other after the rotation by  $90^\circ$ .

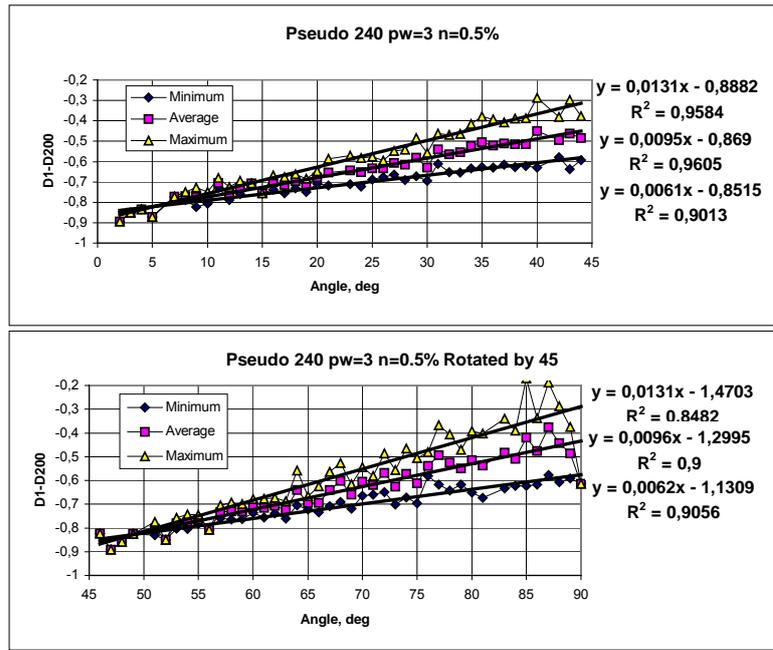


Рис.7.6. Подобие зависимостей  $\Delta_{200}^{Ps}$  от полуугла раскрытия "галок" - границ структур 7 и 9 Табл.7.2. Поскольку псевдоспектры вычисляются с использованием малых шкал, их характеристики одинаково "чувствуют" локальную геометрическую асимметрию в четвертях, которые можно совместить друг с другом при помощи поворота на  $90^\circ$ .

For the goal of more deepened investigation of these effects on model patterns, a series of calculations on the polygons was carried out. During trial calculations on pattern 1 of Table 7.2 it was revealed, that without a noise, just after the square of quadrates filled by more than 40%, all the MF-characteristics "perceive" it as a dense solid structure with dimension 2. Therefore, the residual symmetries of the polygons can be investigated on a square grid with noisy circle area around. As an example of the investigated patterns, the heptagon,  $N=7$ , in-

С целью более подробного исследования этих эффектов на модельных структурах была проделана серия расчетов на многоугольниках. При проведении пробных расчетов на структуре 1 из табл.7.2 было обнаружено, что без наложения шума при заполнении площади квадрата более чем на 40% все МФ-характеристики "воспринимали" его как целую плотную фигуру с размерностью 2. Поэтому остаточные симметрии многоугольников можно исследовать на квадратной сетке с зашумленной круговой областью. В качестве примера исследованных структур на рис.7.7а приводится семи-

scribed into quadrate 480x480 pixels at the center, noisy with probability 0,5% is shown in Fig.7.7a.

угольник,  $N=7$ , вписанный в квадрат 480x480 по центру, зашумленный с вероятностью 0,5%.

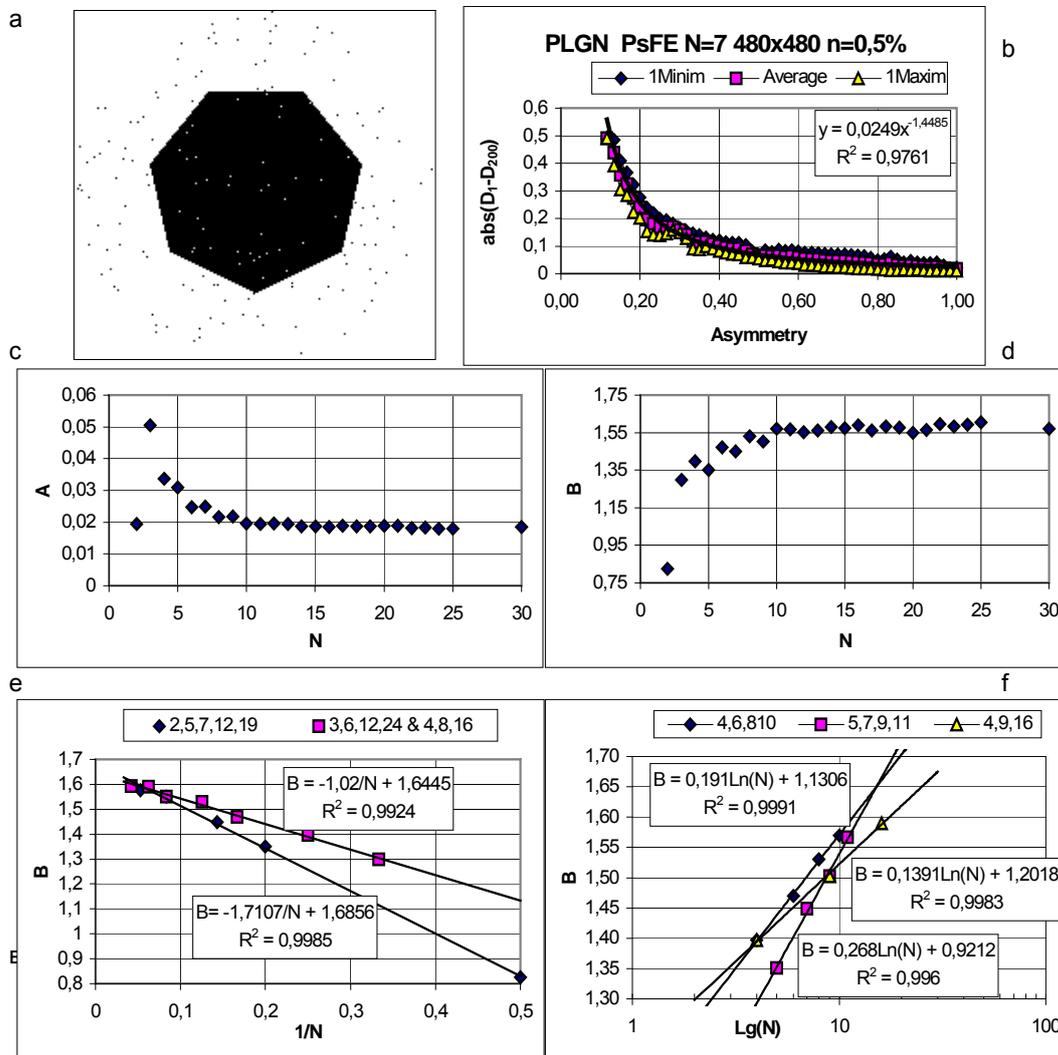


Fig.7.7. The results of polygons series processing.

Рис.7.7. Результаты обработки серий изображений многоугольников.

The ratio of a quadrate size to a diameter of a circle, in which the polygon can be inscribed, was taken as the asymmetry parameter  $a$  of such patterns. The correctness of the spectra was checked up by the scheme  $FE$ . As was earlier, the exponential correlation  $\Delta_{200}^{Ps}(a) = Aa^{-B}$  was detected (see Fig.7.7b for  $N=7$ , for  $N=2$  the ellipses of a type 2 in

В качестве параметра асимметрии таких структур бралось отношение размера квадрата к диаметру круга, в который вписан многоугольник. Корректность спектров проверялась по схеме  $FE$ . Как и ранее, была обнаружена степенная корреляция  $|\Delta_{200}^{Ps}(a)| = Aa^{-B}$ , рис. 7.7b (для  $N=7$ , при  $N=2$  исследовался эллипс типа 2 в табл.7.2). Результаты определения коэффициентов, по-

Table 7.2 were investigated). The results of determination of the correlation coefficients obtained by the scale set providing 100% picture coverings are given in Fig.7.7(c-f) as the dependencies of the coefficients  $A$  and  $B$  on the side number  $N$ .

The correspondence of correlation parameters values with the number of polygon sides  $N$  (and then with the number of their symmetries which is  $2N$  taking into account the rotation for  $360$  or  $0^\circ$ ) were observed only up to  $N=20$ , that is due to the small size of pictures. This correspondence is disintegrated into the branches by the repetition factors or evenness of  $N$ , or even into a group of numbers like the Fibonacci numbers (2,5,7,12,19). In Fig.7.7(e,f) some variants of the retrieved correlations are represented. The results for the polygons with  $N=3,6,12,24$  (the number of the sides is  $N=3*2^n$ ) and  $N=4,8,16$  ( $N=4*2^n$ ) lie practically at one straight line in Fig.7.7e. It is necessary to note one paradoxical circumstance: the number of correct pseudo-spectra by the scheme  $FE$  from 12 up to 30 (depending on  $a=0-1$ ) decreases sharply to 1-2 even by the scheme  $OR$  for increase of a pictures size up to  $980 \times 980$  pixels. It has not allowed to carry out a more detailed investigation of polygon series with greater side numbers in larger pictures. The reason of this objective limitation is not clear.

It should be emphasized that the speech goes about only the pseudospectra as the small number

лученных по набору масштабов 100% охвата картинок, даны на рис.7.7(c-f) в виде зависимостей этих коэффициентов от числа сторон  $N$ .

Соответствия величин корреляционных коэффициентов с числом сторон  $N$  (и поэтому с числом их симметрий, которое равно  $2N$  с учетом тождественного поворота  $360$  или  $0^\circ$ ) наблюдалось только до  $N=20$ , что обусловлено малостью размера картинок. Эти соответствия распадаются на ветви по кратности или четности  $N$ , или даже на группу чисел типа чисел Фибоначи (2,5,7,12,19). На рис.7.7(e,f) представлены несколько вариантов найденных корреляций. Результаты для многоугольников 3,6,12,24 (число сторон  $N=3*2^n$ ) и 4,8,16 (число сторон  $N=4*2^n$ ) легли практически на одну прямую на рис.7.7e. Следует отметить одно парадоксальное обстоятельство: число псевдоспектров по схеме  $FE$  от 12 до 30 (в зависимости от  $a=0-1$ ) резко уменьшается до 1-2 даже по схеме  $OR$  при увеличении размера картинок до  $980 \times 980$  пикселей. Это не позволило провести более обстоятельное исследование полигонов с большим числом сторон на больших картинках. Причина этого объективного ограничения не ясна.

Следует подчеркнуть, что речь идет только о псевдоспектрах, т.к. не-  
большое число корректных канониче-

of correct canonical spectra was observed for only 1% of investigated images of polygons (for 61 values of asymmetry parameters for each of 25 polygons,  $N=2-25,30$ ).

On the whole, the numerical results of the described above investigations of the series of model structures show that the F-symmetry breaking do can reflect the geometric symmetry breaking [45]. We can consider this fact as a possibility to measure a structural information (see Ch.8) quantitatively in the form of "multifractal equivalent."

#### **7.5.4. Concluding remarks on FDS**

As it is seen from the described material, the introduced concept of F-symmetry (fractal symmetry) has a complete set of attributes of customary general concept of symmetry: There is a mathematical object (measure) subject to particular group transform - the multifractal transform which leaves the characteristics of the object (the equal Renyi entropies, zero multifractal information) invariable, if it obeys this type of symmetry, or the transform changes these characteristics otherwise (the unequal Renyi entropies, non-zero multifractal information). The invariance of the object appears in a form of particular, degenerate type of multifractal curves. The non-trivial examples of F-symmetric objects are the regular "one-scale" fractals and the Boltzmann and

ских спектров было обнаружено только для примерно 1% изображений из всех исследованных изображений полигонов (для 61 значения параметров асимметрии на каждый из 25 полигонов,  $N=2-25,30$ ).

В целом численные результаты описанных выше исследований серий модельных структур показывают, что нарушению Ф-симметрии может отражать нарушение геометрической симметрии [45]. Этот факт мы можем принять в качестве возможности измерения структурной информации (см. Гл.8) в форме "мультифрактального эквивалента".

#### **7.5.4. Заключительные замечания по ФДС**

Как видно из изложенного материала, введенное понятие Ф-симметрии (фрактальной симметрии) имеет полный набор атрибутов обычного общего понятия симметрии. Имеется математический объект (мера) под действием частного группового преобразования - мультифрактального преобразования, которое оставляет характеристики объекта (равные энтропии Реньи, нулевая мультифрактальная информация) неизменными, если он подчиняется этому типу симметрии, или это преобразование изменяет его характеристик в противном случае (неравные энтропии Реньи, ненулевая мультифрактальная информация). Инвариантность объекта проявляется в форме частного вырожденного типа мультифрактальных кривых. Нетривиальными примерами Ф-симметричных объектов являются регулярные "одно-

Gauss distribution laws.

An additional feature of this type of symmetry is the possibility of direct quantitative description (parameterization) of its violation degree. This distinguishes F-symmetry from the approach of using the symmetry reasonings customary for physics. It is similar to distinction between weighing the masses with the help of weights (when we equilibrate the balance picking up the necessary "gauge" weights, that, by the way, corresponds to introducing in the Lagrangian the gauge fields necessary for providing action invariance), and weighing the masses by electronic weighting machine (when we see the "misbalance" of the sensor in an index dial numerically).

The process of measurement of a degree of F-symmetry breaking, as well as any other process of measurement, consists in application of definite algorithms and operation sequences and computing procedures, that is, in principle, possible to do by any accessible means without the use of the computer (by an adding machine). The principle possibility of quantitative parameterization on the base of F-symmetry breaking measurement is shown here to be done by the uniform usage of algorithms of scale set choice, measures generation method and statistical analysis of spectra.

The detected local similarity of response of pseudo-spectra on the features of local geometrical

масштабные" фракталы и распределения Больцмана и Гаусса.

Дополнительной особенностью этого типа симметрии является возможность прямого количественного описания (параметризации) степени ее нарушения. Это отличает Ф-симметрию от подхода к использованию симметричных соображений, обычного для физики. Это похоже на различие между взвешиванием масс при помощи гирек (когда мы уравниваем весы подбирая необходимые "калибровочные" веса, что, кстати, соответствует введению в лагранжиан калибровочных полей, необходимых для обеспечения инвариантности действия) и взвешиванием масс на электронных весах (когда мы видим "разбалансировку" сенсора на шкале в численном виде).

Процесс измерения степени нарушения Ф-симметрии, так же как любой процесс измерения, состоит в применении определенных алгоритмов и последовательностей операций и вычислительных процедур, которые, в принципе, можно проделать любыми доступными средствами без использования компьютера (арифмометром). Здесь показано, что принципиальная возможность количественной параметризации на основе измерения нарушения Ф-симметрии должна проводиться при однообразном использовании алгоритмов выбора набора масштабов, метода генерации меры и статистического анализа спектров.

Обнаруживаемое локальное подобие ответа псевдоспектров на особенности локального нарушения гео-

metry violation, Fig.7.6,7.7, and the gentle response of the canonical spectra to symmetry violation on the whole are reminiscent of the sharing the functions of image analysis between hemispheres of a human brain: the figures drawn by the people with a damaged right hemisphere are dispossessed of integrity with the good plotting of details, and, on the contrary, the figures of the people with damaged left hemisphere are dispossessed of clear details, but are well composed as a whole [53].

And (just asking) whether or not can the described effects of fractal dissymmetry, after all, be considered as a real physical phenomenon?

метрической симметрии, рис7.6,7.7, и мягкий ответ канонических спектров на нарушение симметрии в целом напоминают разделение функций анализа изображений между половинами человеческого мозга: фигуры, нарисованные людьми с поврежденной правой половиной, лишены целостности с хорошей прорисовкой деталей, и, наоборот, фигуры людей с поврежденной левой половиной лишены ясных деталей, но хорошо скомпанованы в целом [53].

И (просто вопрос) могут или нет описанные эффекты фрактальной диссимметрии, после всего, рассматриваться как реальное физическое явление?

## References

1. Mandelbrot B.B. *An introduction to multifractal distribution functions*. In *Random Fluctuations and Pattern Growth : Experiments and Models*. H.E.Stanley, N.Ostrowsky eds. (Kluwer Academic, Dordrecht, 1988). P.279-291.
2. Hentschel H.G.E., Procaccia I. *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*. Physica D, 1983, **8**, N3, 435-444.
3. Frish U., Parisi G. In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. Int.School of Physics "Enrico Fermi", Course 88. Eds. M.Ghil et al. (North-Holland, Amsterdam, 1985), p.84.
4. Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. *Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*. Phys.Rev.A, 1986, **33**, N2, 1141-1151.
5. Paladin G., Vulpiani A. *Anomalous scaling laws in multifractal objects*. Phys.Rep., 1987, **156**, N4, 147-225.
6. Aharony A. *Multifractals in physics: successes, dangers and challenges*. Physica A, 479-489.
7. Vicsek T. *Mass multifractals*. Physica, 1990, **168**, 490-497.
8. McCauley J.L. *Multifractal description of the statistical equilibrium of chaotic dynamical systems*. Int.J.Mod.Phys.B, 1989, **3**, N6, 821-852.
9. Giona M., Piccirilli P., Cimagalli V. *Multifractal analysis of chaotic power spectra*. J.Phys.A, 1991, **24**, N1, 367-373.
10. Vstovsky G.V. *A controlled multifractal*. Phys.Lett.A, 1992, **165**, N1, 41-46.

## Литература

11. Vstovsky G.V., Bunin I.J., Kolmakov A.G., et al. *Multifractal analysis of fracture surfaces of solids*. Doklady, RAS, Ser. Physics, 1995, **343**, N5, 613-615. Встовский Г.В., Бунин И.Ж., Колмаков А.Г. и др. *Мультифрактальный анализ поверхностей разрушения твердых тел*. ДАН, Сер. Физика, 1995, **343**, N5, 613-615.
12. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Terentjev V.F. *Description of metal surface structure evolution during mechanical treatment using multifractal analysis method*. Materials Sciences Transactions (Moscow), 1998, N2, 19-24 [in Russian]. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Терентьев В.Ф. *Описание эволюции структуры поверхности металла при механической обработке с использованием мультифрактального анализа*. Материаловедение, 1998, N2, 19-24.
13. Grassberger P. *Information aspects of strange attractors*. In *Chaos in Astrophysics*, J.R. Buchler et al., eds. (Reidl, Dordrecht, 1985). P.193-222.
14. Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I. *Scaling structure and thermodynamics of strange sets*. Phys.Rev.A, 1987, **36**, N3, 1409-1420.
15. Cosenza M.G., Swift J.B. *Scaling properties of multifractal functions at an attractor-repeller transition*. Phys.Rev.A, 1990, **41**, N12, 6615-6620.
16. Chhambra A., Jensen R.V. *Direct determination of the  $f(\alpha)$  singularity spectrum*. Phys.Rev.Lett., 1989, **62**, N12, 1327-1330.
17. Meneveau C., Chhambra A.B. *Two-point statistics of multifractal measures*. Physica A, 1990, **164**, 564-574.
18. Grassberger P., Badii R., Politi A. *Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors*. J.Stat.Phys., 1988, **51**, N1/2, 135-178.
19. Hede B., Kertesz J., Vicsek T. *Self-affine fractal clusters: Conceptual questions and numerical results for directed percolation*. J.Stat.Phys., 1991, **64**, N3/4, 829-841.
20. Katzen D., Procaccia I. *Phase transitions in the thermodynamic formalism of multifractals*. Phys.Rev.Lett., 1987, **58**, N12, 1169-1172.
21. Feigenbaum M.J. *Some characterization of strange sets*. J.Stat.Phys., 1987, **46**, N5/6, 919-924.
22. Stepfalusy P., Tel T., Csordas A., Kovacs Z. *Phase transitions associated with dynamical properties of chaotic systems*. Phys.Rev.A, 1987, **36**, N7, 3525-3528.
23. Bohr T., Jensen M.H. *Order parameter, symmetry breaking, and phase transitions in the description of multifractal sets*. Phys.Rev.A, 1987, **36**, N10, 4904-4915.
24. Lee J., Alsrom P., Stanley H.E. *Exact enumeration approach to multifractal structure for diffusion-limited aggregation*. Phys.Rev.A, 1989, **39**, N12, 6545-6556.

25. Rangel R., Guerrero L.E. *Multifractality, multifractal phase transitions, and symmetry increasing bifurcations in ac-driven phase-slip center*. Phys.Rev.A, 1991, **43**, N2, 669-680.
26. Feder J. *Fractals* (New York, London, Plenum Press, 1988). Федер Е. *Фракталы* (Москва, Мир, 1991).
27. Ruelle D. *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics*. Encyclopedia of Mathematics and its applications. Sec. Statistical mechanics. Ed. G.Galavotti, S.I. Addison-Wesley, 1978. 181 pp.
28. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series*. Moscow, Nauka, 1981. Subsec.5.3.2.1, p.719. [in Russian] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды*. Москва, Наука, п.5.3.2.1, с.719.
29. *Fractals in Physics*. Proc. 6<sup>th</sup> Trieste Int.Symp. on Fractals in Physics. ICTP, Trieste, Italy, July 9-12, 1985. Eds. L. Pietronero, E.Tosatti. North-Holland, Elsevier Science Publishers B.V., 1986. *Фракталы в физике*. Ред. Л.Пьетронеро, Л.М.Тозатти. М.:Мир, 1988.
30. Ivanova V.S., Balankin A.S., Bunin I.J., Oхогоев А.А. *Synergetics and fractals in Materials Science*. Moscow, Nauka, 1994 (in Russian). Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. *Синергетика и фракталы в материаловедении*. М.:Наука, 1994.
31. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Terentjev V.F. *Multifractal analysis of fracture surface features of the near-surface layers of molybdenum*. Metally, 1993, N4, 164-178. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Терентьев В.Ф. *Мультифрактальный анализ особенностей разрушения приповерхностных слоев молибдена*. Изв.РАН, сер. Металлы, 1993, <sup>1</sup>4, 164-178.
32. Kolmakov A.G., Bunin I.G., Vstovsky G.V., *Investigation of effect of surface decarburisation on mechanical properties of molybdenum using multifractal formalism*. International Journal of Offshore and Polar Engineering (ISOPE), March 1997, Vol.7, No1, p. 44-47.
33. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Terentjev V.F. *Multifractal analysis of the surface treatment influence on the static fracture surface structure of low-alloyed molybdenum*. Proc. Conf. "EUROMAT 94 TOPICAL", Hungary, Balatonszeplak, 30.05.-01.06.1994., Vol.IV, p. 1187-1191.
34. Kolmakov A.G., Geminov V.N., Vstovsky G.V., Terentjev V.F., Zabolotny V.T., Starostin E.E. *Effect of rhenium coatings on the mechanical behaviour of molybdenum wires*. Surface and Coatings Technology, 1995, V.72, p. 43-50.
35. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G. *Analyzing the effect of surface treatment on the structure of static fracture surfaces using multifractal formalism*. Phys.Chem. Mater.Treat., 1995, N6, 69-84. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., *Анализ влияния поверхностной обработки на структуру статических*

- изломов малолегированного молибдена с помощью мультифрактального формализма. Физика и химия обработки материалов, 1995, No.6, с.69-84.
36. Kolmakov A.G., Bunin I.G., Vstovsky G.V. *Change of multifractal characteristics of near-surface layers structure of deformed molybdenum due to surface decarburisation*. Phys.Chem. Mater.Treat., 1996, N4, 60-69. Колмаков А.Г., Бунин И.Ж., Встовский Г.В. *Изменение мультифрактальных характеристик структур приповерхностных слоев деформируемого молибдена, вызванное поверхностным обезуглероживанием*. Физика и химия обработки материалов, 1996, N 4, с.60-69.
37. Kolmakov A.G. *Interrelation between the multifractal characteristics of molybdenum fracture surface structure and its mechanical properties*. Metally, 1996, N6, 37-43. Колмаков А.Г., *Взаимосвязь мультифрактальных характеристик структур поверхностей разрушения молибдена с его механическими свойствами*. Известия РАН, сер. Металлы, 1996, No6, с.37-43.
38. Kolmakov A.G., Bunin I.G., Vstovsky G.V. *Surface treatment effect on fatigue characteristics of molybdenum*. Proc. of the Sixth International Fatigue Congress «FATIGUE'96», Berlin, Germany, 06-10 May 1996, Editors: G. Lutjering and H. Nowack, Published by: PERGAMON, 1996, Vol.II, p.1427-1432.
39. Vstovsky G.V., Bunin I.G., Kolmakov A.G., *Information-theoretic interpretation of multifractal formalism and analysis of metallic fracture surfaces*. Proc. of the 11th Biennial European Conf. on Fracture, ECF 11, "Mechanisms and Mechanics of Damage and Failure", Poitiers-Futuroscope, France, 3-6 September 1996, Editors: J. Petit, J. de Fouquet, G. Henaff, P. Villechaise and A. Dragon. Published by: Engineering Materials Advisory Services Ltd. (EMAS), in 2 Volumes, 1996, Vol.1, p. 301-306.
40. Kolmakov A.G. *Interrelation between the mechanical properties and multifractal characteristics of molybdenum wires fracture surface structure*. Phys.Chem. Mater.Treat., 1997, N3, 49-54. Колмаков А.Г. *Взаимосвязь механических свойств с мультифрактальными характеристиками структуры поверхности молибденовых проволок*. Физика и химия обработки материалов, 1997, №3, с. 49-54.
41. Malyshev V.N., Kolmakov A.G., Bunin I.G. *Optimization of the properties and technological regimes of oxide coatings on Al-alloy using multifractal analysis*. Phys.Chem. Mater.Treat., 1997, N5, 77-84. Малышев В.Н., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. *Оптимизация режимов получения и свойств оксидных покрытий на алюминиевом сплаве с использованием метода мультифрактального анализа*. Физика и химия обработки материалов, 1997, №5, с.77-84.

42. Bunin I.G., Kolmakov A.G., Vstovsky G.V. *Multifractals in the evaluation of dissipative properties of metallic materials*. *Metally*, 1998, N1, 103-106. Бунин И.Ж., Колмаков А.Г., Встовский Г.В., *Мультифракталы в оценке диссипативных свойств металлических материалов*. Изв. РАН, Сер. Металлы, 1998, <sup>1</sup>1, с.103-106.
43. Starostin E.E., Kolmakov A.G. *Multifractal description of topographic structure of coating obtained by vacuum thermal evaporation*. *Phys.Chem. Mater.Treat.*, 1998, N5, 38-47. Старостин Е.Е., Колмаков А.Г. *Мультифрактальное описание топографической структуры покрытий, полученных термическим напылением в вакууме*. Физика и химия обработки материалов, 1998, №5, с.38-47.
44. Kolmakov A.G., Vstovsky G.V. *Multifractal analysis of metallic surface structure changes during mechanical treatment*. *Materials Science and Technology*, 1999, **15**, N5, 1-6.
45. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Bunin I.J. *Pseudomultifractal analysis of geometrical asymmetry*. Mathematical modeling of processes in synergetic systems. Eds. A.M.Liparov, G.V.Maier, E.R.Shrager, A.A.Oxogoev. Ulan-Ude, Tomsk. Tomsk Univ.Press, 1999, p.277-281. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. *Псевдомультифрактальный анализ геометрической асимметрии*. В кн. "Математическое моделирование процессов в синергетических системах". Ред. Липанов А.М., Майер Г.В., Шрагер Э.Р., Оксогоев А.А. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. С. 277-281.
46. Vstovsky G.V., Shanyavsky A.A., Artamonov M.A., Kolmakov A.G. *Multifractal selection of titanium disks patterns of air compressors manufactured by the standard technology for their different fatigue fracture resistance*. Mathematical modeling of processes in synergetic systems. Eds. A.M.Liparov, G.V.Maier, E.R.Shrager, A.A.Oxogoev. Ulan-Ude, Tomsk. Tomsk Univ.Press, 1999, p.282-285. Встовский Г.В., Шанявский А.А., Артамонов М.А., Колмаков А.Г. *Мультифрактальная селекция структур авиационных титановых дисков компрессоров, изготовленных по стандартной технологии, при их различном сопротивлении усталостному разрушению*. В кн. "Математическое моделирование процессов в синергетических системах". Ред. Липанов А.М., Майер Г.В., Шрагер Э.Р., Оксогоев А.А. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. С. 282-285.
47. Kolmakov A.G., Vstovsky G.V., Pimenov V.N., Maslyayev S.A., Demina E.V., Gribkov V.A., Dubrovsky A.V., Rybakova L.M., Tshcukin D.N. *Multifractal and X-ray crystal analysis of surface layers of Cr-Mn-steel after an exposure of impulses of deuterium plasma*. Mathematical modeling of processes in synergetic systems. Eds. A.M.Liparov, G.V.Maier, E.R.Shrager, A.A.Oxogoev. Ulan-Ude, Tomsk. Tomsk Univ.Press, 1999, p.304-309. Колмаков А.Г., Встовский Г.В., Пименов В.Н., Масляев С.А., Демина Е.В., Грибков В.А., Дубровский А.В., Рыбакова Л.М., Щукин Д.Н. *Мультиф-*

- рактальный и рентгеноструктурный анализ поверхностных слоев хромомарганцевой стали после облучения импульсами дейтериевой плазмы.* В кн. "Математическое моделирование процессов в синергетических системах". Ред. Липанов А.М., Майер Г.В., Шрагер Э.Р., Оксогоев А.А. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. С. 304-309.
48. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Pimenov V.N., Maslyayev S.A., Demina E.V., *The gravitation effects on the multifractal characteristics of binary metallic systems microstructures.* Mathematical modeling of processes in synergetic systems. Eds. A.M.Lipанov, G.V.Maier, E.R.Shrager, A.A.Oxogoev. Ulan-Ude, Tomsk. Tomsk Univ.Press, 1999, p.322-326.. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Пименов В.Н., Масляев С.А., Демина Е.В. *Влияние гравитационного поля на мультифрактальные характеристики микроструктур двойных металлических систем.* В кн. "Математическое моделирование процессов в синергетических системах". Ред. Липанов А.М., Майер Г.В., Шрагер Э.Р., Оксогоев А.А. Томск: Изд-во ТГУ, 1999. С. 322-326..
49. Vstovsky G.V., Kolmakov A.G., Bunin I.J. *Introduction to multifractal parameterization of materials structures.* Moscow-Izhevsk, Regular and Caotic Dynamics, 2001 [in Russian]. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. *Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов.* Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
50. Vstovsky G.V. *Fractal parameterization of the structures in metals and alloys.* Post PhD Thesis. Moscow, 2001 [in Russian]. Встовский Г.В. *Фрактальная параметризация структур в металлах и сплавах.* Дисс. д.ф.-м.н. Москва, 2001.
51. *Collins Concise English Dictionary.* Third Edition. HarperCollinsPublishers, 1993.
52. Kizel V.A. *Physical Reasons of Dissymmetry of Living Systems* (Moscow, Nauka, 1985) [in Russian]. Кизель В.А. *Физические причины диссимметрии живых систем* (Москва, Наука, 1985).
53. Levy J. *Cerebral asymmetry and aesthetic experience.* In: Beauty and the brain. Eds. I.Renchler, B.Herzberger, D.Epstein. Birkhauser Verlag, Basel, 1988. Ch.9.

## 8. Structural information

In the surrounding natural bodies or man-made constructions we see or intuitively feel the existence of internal fabric, structure, and that the structures of different bodies are different. On the base of this intuitive feeling, the ancients contradistinguished four primary "elements": the air, fire, water, and earth. Now we express this intuitive notion in a more exact concept of aggregation state of the matter. More subtle differentiation includes distinctions in the structures of solids (crystals and amorphous solids), liquids, etc. Such a differentiation is based upon the notion that bodies are the combinations of great numbers of elementary parts - atoms and molecules. The problem of structural description is actually what are the ways the elementary (solid) parts are combined to make the matter with its observable properties.

Schroedinger [1], in discussing the structural features of matter in living species, that may be classified in modern terms as liquid crystals, draws the general structural distinction in the fabric of matter in the form of "equation":

$$\begin{aligned} &\text{molecule}=\text{solid}=\text{crystal} \\ &\text{gas}=\text{liquid}=\text{amorphous solid.} \end{aligned}$$

This distinction is not trivial and in modern terminology it can be characterized using the concepts of the close order and long range order [2]. The concept of close order is

## 8. Структурная информация

В окружающих нас естественных и искусственных телах мы видим или интуитивно чувствуем наличие внутренней структуры, и что структуры различных тел различны. На основе этого интуитивного ощущения древние различали четыре первичных "элемента": воздух, огонь, воду и землю. Теперь мы выражаем это интуитивное понятие в более точной концепции агрегатного состояния материи. Более тонкая дифференциация требует различения структур твердых тел (кристаллы, аморфные тела), жидкостей и пр. Такая дифференциация основана на понимании того, что тела являются комбинациями больших чисел элементарных частей - атомов и молекул. Проблема структурного описания фактически есть выяснение того, какими способами элементарные (неделимые) части соединяются, чтобы в результате появилась материя со своими наблюдаемыми свойствами.

Шредингер в работе [1] при описании структурных особенностей живой материи, которая в современном понимании может быть отнесена к жидким кристаллам, проводит общее различие в структуре материи в форме "уравнения":

$$\begin{aligned} &\text{молекула}=\text{твердое тела}=\text{кристалл} \\ &\text{газ}=\text{жидкость}=\text{аморфное тело.} \end{aligned}$$

Это различие не является тривиальным, и в современной терминологии оно может быть охарактеризовано с помощью понятий ближнего и дальнего порядка [2]. Понятие ближнего

employed to characterize the local substructures consisting of not very large number of particles like the cells of crystal lattices or small enough (non-organic) molecules. The close order is also observable in the structures of liquids and amorphous solids. The concept of long range order is employed to characterize the structures consisting of a large number of the identical structural elements (substructures) with (almost) the same or forecasted orientation changing in accordance with the known rules that are characteristic of a given type of long range order.. The orientation can be characterized in terms of statistical average quantities, like average polarization or magnetization, and this makes the problem of rigorous definition of what is a long range order in general more complicated. The range of this order type is much greater than the size of the substructures. We observe it in crystal solids, liquid crystals, protein molecules, etc. Taking into account the existence of self-organization phenomena in the systems of large numbers of particles even in the absence of close or long range orders, we can say about a "super long range order." Even in the case of "usual" atomic gases without close and long range order among the atoms, we can observe the structures like sound, heat or shock waves that can be classified as «super long range» order. In that number some phenomena in solids should be also included such as Hall effect, Hall-Petch ef-

порядка применяется для характеристики локальных субструктур, состоящих из не очень большого числа частиц, таких как кристаллические ячейки или достаточно малые (неорганические) молекулы. Ближний порядок также наблюдается в структурах жидкостей и аморфных твердых тел. Понятие дальнего порядка применяется для характеристики структур, состоящих из большого числа идентичных структурных элементов (субструктур) с (почти) одинаковой или предсказуемой ориентацией, изменяющейся в соответствии с известными правилами, характерными для данного типа дальнего порядка. Ориентацию можно описывать через статистические средние величины, типа средних поляризации или намагниченности, и это усложняет задачу строгого определения, что такое дальний порядок вообще. Масштаб сохранения дальнего порядка в структуре много больше размера субструктур. Мы наблюдаем дальний порядок в кристаллах, жидких кристаллах, белковых молекулах, и т.д. Принимая во внимание существование явлений самоорганизации в системах большого числа частиц даже в отсутствие ближнего или дальнего порядка, мы можем говорить о "сверхдальнем порядке". Даже в случае "обычных" одноатомных газов без ближнего и дальнего порядка среди атомов, мы можем наблюдать структуры типа звуковых, тепловых или ударных волн, которые могут быть классифицированы как «сверхдальний порядок». В это число нужно включить также некоторые эффекты в твердых телах, такие как эффекты Холла или Холла-Петча, и др. Эти по-

fect, etc. We can summarize these notions in the table (the mark «±» means «is possible»).

нения мы можем суммировать в таблице (где значок «±» означает «возможен»).

State of matter Состояние материи	Close order Ближний порядок	Long range order Дальний порядок	Super long range order Сверхдальний порядок
Plasma / Плазма	-	-	±
Gas / Газ	-	-	±
Liquid / Жидкость	+	-	±
Amorphous solid Аморфное твердое тело	+	-	-
Liquid crystal Жидкий кристалл	+	+	±
Crystal solid Кристаллическое твердое тело	+	+	+
Polycrystal Поликристалл	+	+	±
Biological objects Биологические объекты	+	+	+

Nevertheless, the concepts of close and long range order, being described in details, do not provide a unique classification of numerous structures of observable matter and do not allow to display or evaluate their complexity quantitatively in a universal manner. Biological objects have the most complex structures. Even the simplest viruses, separate protein molecules or biological membranes are so complex [3] that we can only describe their structures in the specific terms, but not in general.

The attempts to evaluate quantitatively the complexity of protein molecules in terms of information measures and to evaluate on this

Тем не менее, понятия ближнего и дальнего порядка, будучи детально описанными, не обеспечивают единой классификации многочисленных структур наблюдаемого вещества и не позволяют выразить или оценить количественно их сложность универсальным образом. Биологические объекты имеют наиболее сложные структуры. Даже простейшие вирусы, отдельные белковые молекулы или биологические мембраны настолько сложны [3], что мы можем описывать их структуры в частных терминах, но не в общем.

Попытки оценить количественно сложность белковых молекул в терминах информационных мер и на этой основе оценить их "информационное

ground their "information contents" give the very scattered values in dependence on the way of information reckoning [4,5]. Nevertheless we can make some general conclusions from the available data and develop a logic of a possible approach to the problem of quantitative evaluation of the complexity of the structures.

First of all, we can observe the differences in the symmetry properties of different structures, especially of biological structures intrinsically "constructed" of chiral molecules [3,6].

The structures of solid atomic crystals are described by finite number of parameters like the coordination number, lattice parameters, etc. The set of their symmetries is also finite (countable) [7,8]. We can suppose that this is characteristic of the long range ordered structures. The close ordered structures ("blocks") in liquids reproduce the local structure of crystals [8,9], hence, close order symmetries in liquids are also finite (countable), but the long range ones - not. We could say that liquid is invariant with respect to the rearrangements of the close ordered blocks. The number of symmetries of the gas is infinite, and gas is invariant with respect to rearrangements of the particles.

The well-known "gas→liquid" and "liquid→crystal" phase transitions are characterized by the subsequent appearance of the close and long range orders, respectively. We can measure the latent

содержание" дают сильно разбросанные величины в зависимости от способа подсчета информации [4,5]. Тем не менее, мы можем сделать некоторые общие выводы из доступных данных и развить логику возможного подхода к проблеме количественной оценки сложности структур.

Прежде всего, мы можем наблюдать различия в свойствах симметрии различных структур, в особенности биологических структур, изначально "построенных" из хиральных молекул [3,6].

Структуры атомных ("твердых") кристаллов описываются конечным числом параметров, типа координационного числа, параметров решетки и пр. Множество их симметрий так же конечно (считаемо) [7,8]. Мы можем предположить, что это является характерной чертой структур с дальним порядком. Структуры с ближним порядком ("блоки") в жидкостях воспроизводят локальные структуры кристаллов [8,9], поэтому, симметрии структур с близким порядком в жидкостях также конечны (считаемы), но симметрии структур масштаба дальнего порядка - нет. Мы можем сказать, что жидкость инвариантна по отношению к перестановкам блоков с ближним порядком. Число симметрий газа бесконечно, газ инвариантен по отношению к перестановкам частиц.

Хорошо известные фазовые переходы "газ→жидкость" и "жидкость→кристалл" характеризуются последовательным возникновением ближнего и дальнего порядков, соответственно. Мы можем измерять скры-

enthalpy  $\Delta H$  of such transitions and calculate the respective stepwise change in physical entropy  $\Delta S$  by dividing  $\Delta H$  by the temperature of the transition, see next, and it is known that the change in entropy due to the appearance of close order (condensation) is greater than the one due to the appearance of long range order (crystallization) approximately by one order. (There is even a so called Trouton rule that  $\Delta S$  in evaporation is approximately 88 J/K/Mol for all substances [10].) Thus the appearances of close and long range orders can be distinguished by these stepwise changes in entropy quantitatively. Moreover, the measurable thermal effects can be observed without change in aggregate state (allotropic transitions [9], racemization of the solution of pure chiral substance [6] for the concentrations of two mirror isomers become equal at long last) and these effects may be related to the change in close order symmetry of the matter. We know also that the melting temperatures of *cis*- and *trans*-isomeric chemical compounds may differ [8]. As is known, increase in the strength of metallic or composite materials requires the use of alloys or man-made fabrics with more complicated, less symmetric close and long range ordered structures. Many other facts could be mentioned in this concern (like Nernst and Ettingshausen, Seebeck and Peltier, or Thomson effects [11-13]) showing that the changes in intrinsic symmetry properties are ac-

тую энтальпию  $\Delta H$  этих переходов и вычислять соответствующее последовательное изменение физической энтропии  $\Delta S$ , деля  $\Delta H$  на температуру переходов, см. ниже, и как известно, изменение энтропии при возникновении ближнего порядка (конденсация) больше, чем изменение энтропии при возникновении дальнего порядка (кристаллизация) примерно на порядок. (Имеется даже т.н. правило Траутона, что  $\Delta S$  испарения примерно равно 88 Дж/К/моль для всех веществ [10].) Таким образом, возникновение ближнего и дальнего порядка можно отличать по этим ступенчатым изменениям энтропии количественно. Более того, измеримые термические эффекты можно наблюдать без изменения агрегатного состояния вещества (аллотропные переходы [9], рацемизация раствора хирального вещества [6], когда концентрации двух зеркальных изомеров становятся в конце концов равными), и эти эффекты можно соотнести с изменением симметрии ближнего порядка в веществе. Мы так же знаем, что температуры плавления *cis*- и *trans*-изомеров могут отличаться [8]. Как известно, увеличение прочности металлических и композиционных материалов требует использования сплавов или искусственных структур с более сложным, менее симметричным строением на ближних и дальних масштабах. В этой связи можно упомянуть много других фактов (типа эффектов Нернста и Эттингзхаузена, Зеебека и Пельтье или Томсона [11-13]), показывающих, что изменения свойств внутренней симметрии сопровождается измеримыми физическими эффектами.

accompanied by the measurable physical effects.

We can relate the subsequent "gas-liquid" and "liquid-crystal" transitions, on the one hand, to the appearance of "structure" in substance, on the other hand, to the subsequent restrictions on the symmetry properties of this structure. Using the concept of information as a measure of broken symmetry in general, we can suppose that there can be defined a quantity, which we call a *structural information*, quantitatively reflecting the information contents of structures and evaluating the restrictions on their symmetries.

We can suppose that the information contents of the "non-structured" perfect gas at equilibrium (i.e. without super long range order) is zero, so is its structural information, if we do not take into account the structure of atoms or molecules of the gas. The gas is symmetric with respect to rearrangements of any its «bloks» of any sizes. The number of these symmetries is practically infinite. The subsequent changes in entropy in "gas-liquid" and "liquid-crystal" transitions can be related to the subsequent changes in structural information of the matter. I.e. the logic of the proposed approach to evaluation of structural information is as follows. The greater the order, the more the number of broken symmetries, the lesser symmetric the structure, the more information contents, the greater the structural informa-

Мы можем соотнести последовательные переходы "газ→жидкость" и "жидкость→кристалл", с одной стороны, с возникновением "структуры" в веществе, с другой стороны, с последовательными ограничениями на свойства симметрии этой структуры. Используя понятие информации, как меры нарушенной симметрии вообще, мы можем предположить, что может быть определена величина, которую мы называем *структурной информацией*, количественно отражающая информационное содержание структур, и оценивающая ограничения на их симметрии.

Мы можем положить, что информационное содержание "бесструктурного" идеального газа в равновесии (т.е. без сверхдальнего порядка) равно нулю, и такова же его структурная информация, если мы не принимаем во внимание структуру атомов или молекул газа. Газ симметричен по отношению к перестановкам любых его блоков любых размеров, и число этих симметрий практически бесконечно. Последовательные изменения энтропии в переходах "газ→жидкость" и "жидкость→кристалл" могут быть соотнесены с последовательным изменением структурной информации вещества. Т.е. логика предлагаемого подхода к оценке структурной информации вещества такова. Чем больший порядок, тем больше число нарушенных симметрий, тем менее симметрична структура, тем больше информационное содержание, тем больше структурная информация. В свете понятия эн-

tion. In the light of Brillouin's concept of entropy as missing information [14,15], the latent transitions entropies must be the evaluations of structural information contents due to the appearances close or long range orders. As is known, concept of physical entropy can not be used for quantitative evaluations of the order in such an approach, since entropy can not be used as a measure of disorder or ordering in general [16]. Thus we should strictly distinguish the entropy of the matter in the given aggregate state and its structural information contents. The first can change in dependence on external conditions. The second changes weakly or even remains constant until the matter symmetry properties change, for example, in 1<sup>st</sup> order phase transition that is considered next. By the way, the abrupt changes in entropy of complex structures, in other words, in structural information, can be used for the purposes of diagnostics and reliability evaluation [17].

And one more observation. Most of physical systems with broken symmetry seems to behave nonlinearly. This is characteristic of biological membranes, semiconductor devices, etc. The investigation of nonlinear behavior is one more opportunity to study structural information quantitatively. In Section 8.2 we describe a simple mechanical model of asymmetric membrane with controlled asymmetry characterized by one real parameter. This model membrane asymmetry exhib-

тропии, как утраченной информации Бриллюэна [14,15], скрытые энтропии переходов должны быть оценками содержания структурной информации в силу возникновения ближнего и дальнего порядков. Как известно, понятие физической энтропии нельзя использовать для количественных оценок порядка при таком подходе, т.к. энтропию нельзя использовать как меру порядка или беспорядка вообще [16]. Таким образом, нам следует строго различать энтропию вещества в данном агрегатном состоянии и содержание структурной информации в нем. Первая может изменяться в зависимости от внешних условий. Вторая изменяется очень слабо или вообще остается постоянной до тех пор, пока не изменятся свойства симметрии, например, при фазовом переходе первого рода, что рассматривается ниже. Кстати, внезапные изменения энтропии сложных структур, другими словами, их структурной информации, могут использоваться для целей диагностики и оценки надежности [17].

И еще одно наблюдение. Большинство физических систем с нарушенной симметрией, по-видимому, ведут себя нелинейно. Это характерно для биологических мембран, полупроводниковых приборов, и пр. Исследование нелинейного поведения является еще одной возможностью для количественного изучения структурной информации. В подразделе 8.2 мы опишем простую механическую модель асимметричной мембраны с управляемой асимметрией, характеризуемой одним вещественным параметром. Эта

its both in the change in overall entropy of the system due to the change in asymmetry parameter, and in the corresponding nonlinear behavior.

### 8.1. "Gas-liquid" and "liquid-crystal" phase transitions

As is known, the "crystal-liquid" and "liquid-gas" transitions are characterized by a so-called latent heat. This quantity is used in elementary expositions of the transitions' thermodynamics in school books. The latent heat is absorbed by the substance in the "crystal→liquid" and "liquid→gas" (vapor) transitions and given off in the "gas→liquid" and "liquid→crystal" ones. The necessity of heat exchange results in that the transitions occur at some (constant) critical temperatures which are characteristic of certain substance at a given pressure. Dividing quantity of the absorbed/liberated heat  $\Delta Q$  by transition temperature  $T_c$  we can obtain an evaluation of the latent transition entropy [10]:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_c}. \quad (8.1.1)$$

More exactly, transitions are characterized by latent enthalpy since the considered transitions occur without chemical reactions, i.e. chemical potential must remain constant. Chemical potential is simply a specific isobar-isothermal potential [18] and such processes are described in thermodynamics by con-

асимметрия модельной мембраны проявляется как в изменении общей энтропии системы при изменении параметра асимметрии, так и в соответствующем нелинейном поведении.

### 8.1. Фазовые переходы "газ-жидкость" и "жидкость-кристалл"

Как известно, фазовые переходы "газ-жидкость" и "жидкость-кристалл" характеризуются т.н. скрытым тепловыделением. Эта величина используется в элементарном изложении термодинамики этих переходов в школьных учебниках. Скрытая теплота поглощается веществом в переходах "кристалл→жидкость" и "жидкость→газ" и выделяется в переходах "газ→жидкость" и "жидкость→кристалл". Необходимость теплообмена приводит к тому, что переходы происходят при некоторой (постоянной) критической температуре, которая характерна для определенного вещества при данном давлении. Деля количество поглощаемого/выделяемого тепла на температуру перехода, мы можем получить оценку скрытой энтропии перехода [10]:

Точнее, переходы характеризуются скрытой энтальпией т.к. рассматриваемые переходы протекают без химических превращений, т.е. химический потенциал должен оставаться постоянным. Химический потенциал есть просто удельный изобарно-изотермический потенциал [18], и такие процессы описываются в термоди-

stancy of this quantity

$$G = U + pV - TS = H - TS = \text{const},$$

where  $U$  is an internal energy depending on thermodynamic parameters,  $p$  is pressure,  $V$  is the volume of the system,  $H=U+pV$  - enthalpy. The constancy of  $G$  at critical temperature reads

$$\Delta G = \Delta U + p\Delta V - T_c \Delta S = \Delta H - T_c \Delta S = 0,$$

and we obtain for the latent transition entropy

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T_c}. \quad (8.1.2)$$

In handbooks the values of  $\Delta H$  and  $T_c$  are usually given for the transitions at some fixed pressure. This way to calculate the latent entropy is more correct since it automatically takes into account both the latent transition heat and the expansion work. We do not overview here the methods to measure and calculate these values. Our aim is to relate  $\Delta S$  with structural changes in substances.

It is known that many (almost all) atomic characteristics and physical and chemical properties of the pure substances and simplest compounds depend periodically on the atomic number (or atomic mass) that is a Mendeleev periodic law [8,9,19-21]. Moreover, there is some correlation of these properties with symmetries of atomic electron shells [8,9,19-21]. This correlation is somewhat broken by the effects of the "falls" of s-electrons into the d-shells (Cr, Ru, Y-Cd, etc.) and the hybridization effects in compounds. (Thus we can hardly ever expect

наимке постоянством этой величины

где  $U$  - внутренняя энергия, зависящая от термодинамических параметров,  $p$  - давление,  $V$  - объем системы,  $H=U+pV$  - энтальпия. Постоянство  $G$  при критической температуре дает условие

и мы получаем для скрытой энтропии перехода

В справочниках обычно приводятся величины  $\Delta H$  и  $T_c$  переходов при некотором фиксированном давлении. Этот способ вычисления скрытой энтропии более корректен, т.к. он автоматически учитывает как скрытое тепловыделение, так и работу расширения. Мы не будем здесь делать обзор методов измерения и вычисления этих величин. Наша цель - соотнесение величины  $\Delta S$  со структурными изменениями в веществе.

Известно, что многие (почти все) атомные характеристики и физические и химические свойства чистых веществ и простейших соединений зависят периодически от атомного номера (или атомной массы), что и является периодическим законом Менделеева [8,9,19-21]. Более того, имеется некоторая корреляция этих свойств с симметриями электронных оболочек [8,9,19-21]. Эта корреляция несколько нарушается ввиду "провалов" s-электронов в d-оболочки (Cr, Ru, Y-Cd, и т.д.) эффектами гибридизации в соединениях. (Таким образом, мы вряд ли можем ожидать "идеальной" корреляции

"ideal" correlation of phase transitions' properties of substances with periodic law.) Nevertheless, this correlation is strong enough to calculate the unknown properties of elements using ones of their neighbors [8,21]. Anyway, as we expect that internal structure symmetry influences the characteristics of phase transitions, we must verify this proposition for all possible transitions and their correspondence to the periodic law. This is a big systematic problem and we can not solve it right now, but we give the facts that internal structure of atoms does influence the thermodynamic characteristics of phase transitions of substances. We consider quantitatively only "crystal-liquid" and "liquid-gas" transitions here. For this purpose, let us draw the  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -plots of latent entropies of these transitions ("v" is for "evaporation", "m" is for "melting") for the normal (atmospheric) pressure using the data from handbooks. In such a way we could hope to see the correlations of the latent entropies of both transitions to each other and with Mendeleev periodic law. By the way the concept of critical temperature ("point") of evaporation was introduced by Mendeleev in 1860.

ляции свойств фазовых переходов веществ с периодическим законом.) Тем не менее, эта корреляция достаточно сильна для того, чтобы вычислять неизвестные свойства элементов, используя свойства их соседей [8,21]. В любом случае, поскольку мы ожидаем, что внутренняя структурная симметрия влияет на свойства фазовых переходов, мы должны проверить это предположение для всех возможных переходов на соответствие с периодическим законом. Это большая систематическая задача, и мы не сможем решить ее прямо сейчас, но мы даем факты, в пользу того, что внутренняя структура атомов действительно влияет на характеристики фазовых переходов веществ. Мы рассматриваем здесь количественно только переходы "газ-жидкость" и "жидкость-кристалл". Для этой цели нарисуем графики в координатах  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$  скрытых энтропий переходов ("v" обозначает испарение, "m" - плавление) при нормальном (атмосферном) давлении, используя данные из справочников. При таком способе мы могли бы надеяться увидеть корреляции энтропий обоих переходов друг с другом и с периодическим законом. Кстати, понятие критической температуры ("точки") испарения было введено Менделеевым в 1860 г.

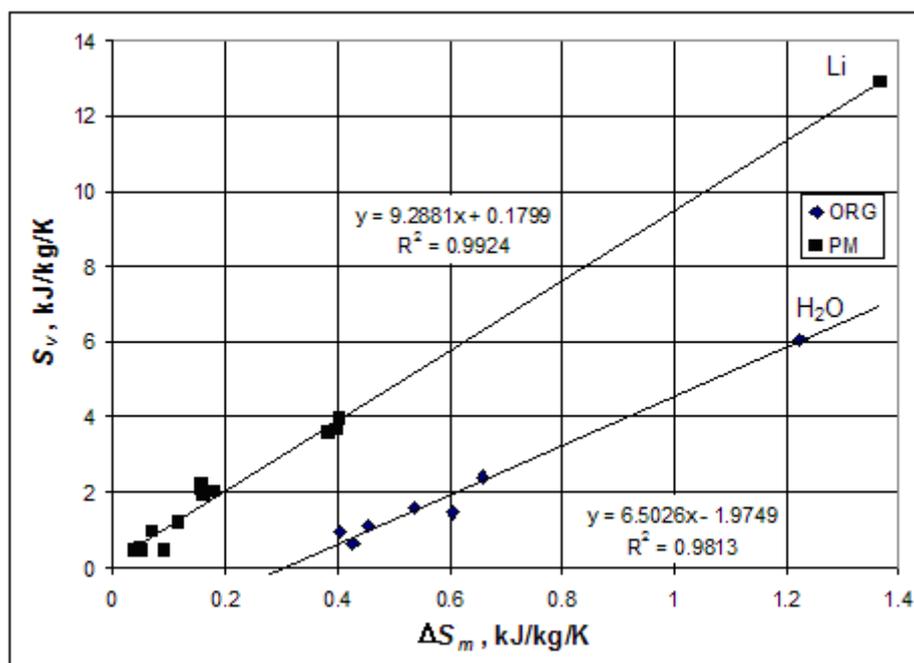


Fig.8.1.  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -plot by the data of scholar handbook [22], see Table 8.4.1. PM is for "pure metals", ORG is for "organics." The linear correlations are given,  $R$ 's are the correlation coefficients.

Рис.8.1.  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -график по данным школьного справочника [22], см. табл. 8.4.1. PM - чистые металлы, ORG - "органика". Приводится линейная корреляция,  $R$  - коэффициенты корреляции.

By the data on the latent specific heats and critical temperatures from a randomly chosen scholar handbook on elementary physics [22], we obtain the plot in Fig.8.1, Table 8.4.1 in Appendix 8.4. There is a visual distinction between the pure metals and simple organic compounds (including water, its appearance in this group seems to be due to a large number of hydrogen bonds in the liquid state). This motivates us to carry out a more detailed investigation.

By the "more scientific" data [23,24] on enthalpy changes and critical temperatures of the transitions we obtain other plots, Fig.8.2, Table 8.4.2 of Appendix 8.4, where the elements are marked in corre-

Используя данные по скрытым теплотам и критическим температурам из выбранного наугад школьного справочника по элементарной физике [22], мы получим график на рис. 8.1, табл. 8.4.1 в Аппендиксе 8.4. Имеется явное различие между чистыми металлами и простыми органическими веществами (включая воду, ее появление в этой группе, по-видимому, обусловлено большим числом водородных связей в жидком состоянии). Это заставляет нас провести более подробное исследование.

Используя "более научные" данные [23,24] по изменениям энтальпии и критическим температурам, мы получаем другие графики, рис. 8.2, табл. 8.4.2 Аппендикса 8.4, где элементы помечены в соответствии рядам клас-

spondence to the rows of classical Mendeleev table. I.e. there is a tendency of "clusterization" of the elements with similar structures of complete internal electron shells.

Thus the features of electron structures do influence the thermodynamic characteristics of phase transitions in such a way that latent entropies of both transitions correlate with each other and periodic law. This correlation should be regarded as more than satisfactory, if we take into account all the difficulties of measuring the quantities used and exact determination of transition temperatures. From Fig.8.2 we see also that the most of elements are grouped along the linear dependence  $\Delta S_v = 10\Delta S_m$ .

This can be interpreted in such a way that structural information contents due to the close order is one order greater than structural information contents due to the long range order. The presence of complete electron shells shifts the noble gases from this main tendency. As in Fig.8.1, simple compounds of halogens in Fig.8.2b also deviate from the main correlation tendency.

сической таблицы Менделеева. Т.е. имеется тенденция "кластеризации" элементов с похожей структурой законченных внутренних электронных оболочек.

Таким образом особенности электронных оболочек действительно влияют термодинамические характеристики фазовых переходов, причем так, что скрытые энтропии обоих переходов коррелируют друг с другом и периодическим законом. Эту корреляцию следует рассматривать как более чем удовлетворительную, если мы примем во внимание трудности измерения использованных величин и точного определения температур переходов. Из рис.8.2 мы так же видим, что большинство элементов группируется вдоль линейной зависимости  $\Delta S_v = 10\Delta S_m$ .

Это можно интерпретировать в том духе, что содержание структурной информации, обусловленной наличием ближнего порядка, на один порядок больше содержания структурной информации, обусловленной наличием дальнего порядка. Наличие законченных электронных оболочек сдвигает благородные газы с этой главной корреляции. Как и на рис.8.1, простые соединения галогенов на рис.8.2b также отклоняются от главной корреляционной тенденции.

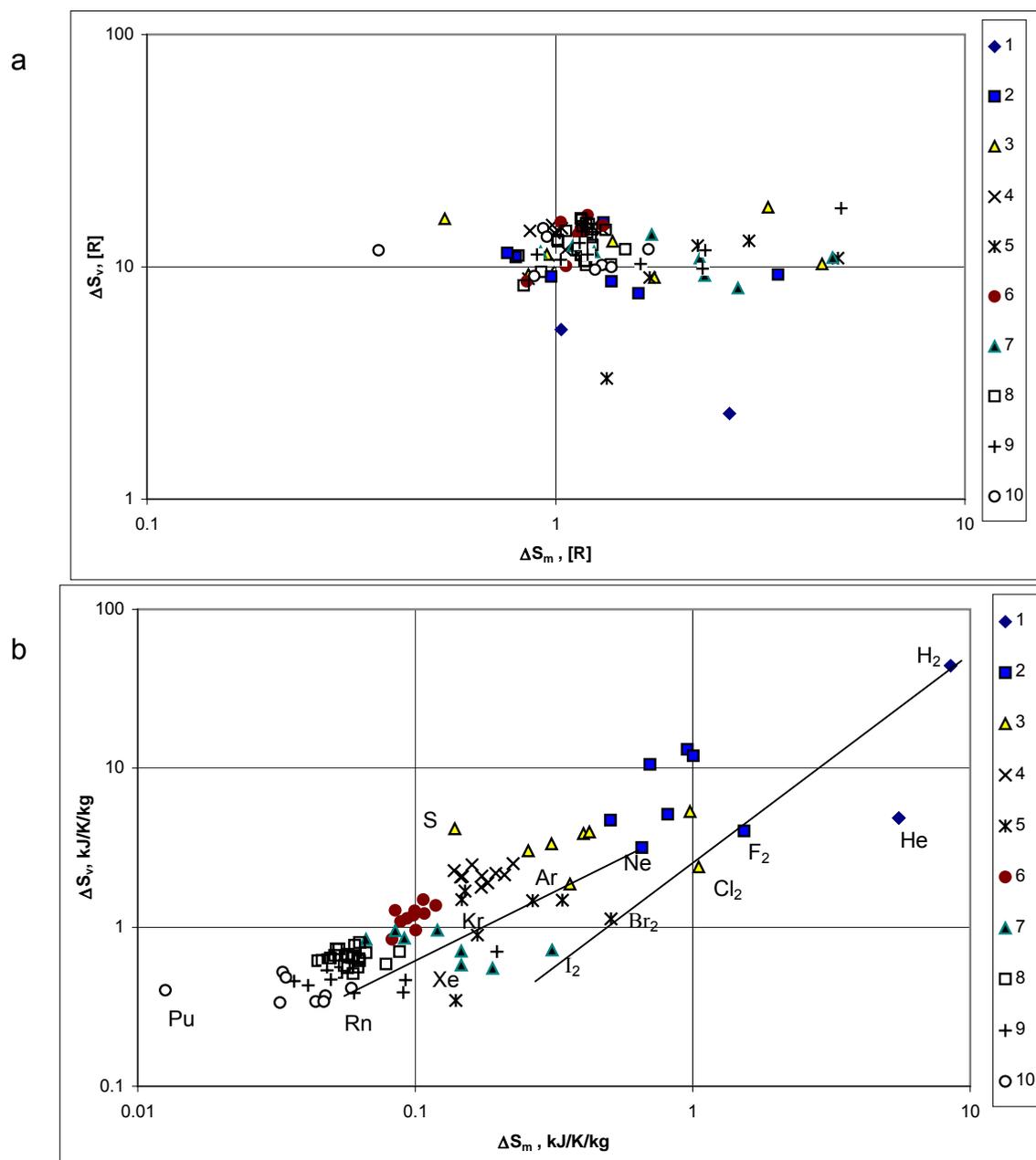


Fig.8.2.  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -plots by the data [23,24] for all the elements with known data on temperatures and latent enthalpies of "gas-liquid" and "liquid-crystal" transitions at normal atmospheric pressure 0.1 MPa (without C and As), see Table 8.4.2. Different badges correspond to the rows of classic Mendeleev table (8 groups, 7 periods, 10 rows). La- and Ac-subgroups are included in 8-th and 10-th rows, respectively. Initial chaos, "wind-fallen elements", in the plot for the latent entropies per mol (in the units of universal gas constant  $R$ ) is replaced by visual ordering in the plot for the specific latent entropies per mass. Note that characteristics for At are calculated but not measured.

Рис.8.2.  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -графики по данным [23,24] для всех элементов с известными температурами и скрытыми энтальпиями переходов "газ-жидкость" и "жидкость-кристалл" при нормальном атмосферном давлении 0,1 МПа (без С и Аs), см. табл. 8.4.2. Различные значки соответствуют рядам классической таблицы Менделеева (8 групп, 7 периодов, 10 рядов). La- и Ac-подгруппы включены в 8-й and 10-й ряды, соответственно. Первоначальный хаос элементов, "бурелом", на графике для скрытых энтропий на моль (в единицах универсальной газовой постоянной  $R$ ) заменяется заметным упорядочением на графике для удельных энтропий на массу. Заметим, что характеристики для At были вычислены, но не измерены.

By the way, we could obtain many other interesting correlations in the subgroups of the elements (via the Mendeleev table or crystal lattice type just before the melting) correcting the latent entropies by the ratios  $K_{st}/K_{own}$ , where  $K$ 's are some combinations of atomic masses, critical transition temperatures, lattice parameters, etc.,  $st$  is for some "standard" combination of gold, for example. But this discussion would take much place and this could be the subject of a separate book.

As we mentioned above, by Brillouin's concept [14,15] of entropy as missing information we should equate the changes of the both:

$$\Delta S = -\Delta I, \quad (8.1.3)$$

and use this formula for primary introduction and evaluation of structural information. On the other hand, the constancy of the latter before and after the transitions, meanwhile entropy changes continually with temperature, motivates us to distinguish the concept of structural information. In approximation not taking into account the structure of atoms and molecules, we can set the value of gas structural information (at equilibrium) to be zero.

It should be noted here that to derive the Schroedinger equations for one particle in Sec.5.3 and many particles in Sec.5.8 in the same manner we assigned to the undimensioned shift informations the values of intrinsic energy measures of par-

Кстати, мы могли бы получить много других интересных корреляций в подгруппах элементов (в соответствии с таблицей Менделеева или типом кристаллической решетки непосредственно перед плавлением), корректируя скрытые энтропии с помощью отношений  $K_{st}/K_{own}$ , где  $K$  - некоторые комбинации атомных масс, критических температур переходов, параметров решетки и пр.,  $st$  обозначает некоторую стандартную комбинацию, например, для золота. Но обсуждение этого заняло бы много места и это могло бы быть предметом отдельной книги.

Как мы упоминали выше, используя по Бриллюэну [14,15] понятие энтропии как потерянной информации, мы могли бы приравнять изменения обоих:

и использовать эту формулу для первоначального введения и оценивания структурной информации. С другой стороны, постоянство последней до и после перехода, в то время как энтропия изменяется непрерывно с температурой, мотивирует нас отличать понятие структурной информации. В приближении, не принимающим во внимание структуру атомов и молекул, мы можем положить величину структурной информации газа (в равновесии) равной нулю.

Здесь следует отметить, что при выводе уравнений Шредингера для одной частицы в подразделе 5.3 и многих частиц в подразделе 5.8 одним и тем же способом, мы приписывали безразмерным информациям сдвига величины внутренне присущих мер энергии

particles  $mc^2$  by Einstein formula. This could be interpreted also in such a way that  $mc^2$  is implied to be some information value characterizing internal structure of the particles. The results of this section are obtained using the specific latent entropies corresponding to the unit masses, not to moles, of substances. This also can be interpreted as we use the evaluations of structural informations re-normalized by the intrinsic values of internal structural informations of atoms. The presence of an additional molecular structure in substance, see organics in Fig.8.1 and halogens in Fig.8.2b, makes the  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$ -correlation different from the «main correlation line»  $\Delta S_v=10\Delta S_m$ .

## 8.2. Mechanical model of asymmetric membrane

Here we describe a model system with a controlled asymmetry resulting in changes of entropy which can be evaluated by observable quantities such as particle numbers (density) and temperature (mean kinetic energy). This model is to show how the hidden (non observable) asymmetry can influence the physical properties of the system.

### 8.2.1. Setting the problem

Consider a system of  $N$  perfectly elastic spherical particles of diameter  $d$  moving frictionless inside the rectangle plane region  $2A \times B$  with perfect elastic walls. The region is partitioned into two equal parts  $A \times B$  by an asymmetric mem-

частиц  $mc^2$  по формуле Эйнштейна. Это можно трактовать так же таким образом, что подразумевается, что  $mc^2$  есть некоторая величина информации, характеризующая внутреннюю структуру частиц. Результаты этого раздела получены на основе использования удельных скрытых энтропий соответствующих единичным массам, а не молям веществ. Это также можно трактовать, как будто мы используем оценки структурных информации, перенормированные на внутренние структурные информации атомов. Наличие дополнительной молекулярной структуры в веществе, см органику на рис.8.8 и галогены на рис.8.2b, делает корреляцию  $\Delta S_m$ - $\Delta S_v$  отличной от "главной корреляционной линии"  $\Delta S_v=10\Delta S_m$ .

## 8.2. Механическая модель асимметричной мембраны

Здесь мы описываем модельную систему с контролируемой асимметрией, наличие которой приводит к изменениям энтропии, которые можно оценить по наблюдаемым величинам, таким как числа частиц (плотность) и температура (средняя кинетическая энергия). Эта модель призвана показать, как скрытая (не наблюдаемая) асимметрия может влиять на физические свойства системы.

### 8.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему  $N$  идеально упругих сферических частиц диаметром  $d$ ,двигающихся без трения в пределах прямоугольной плоской области  $2A \times B$  с идеально упругими стенками. Область разделена на равные части  $A \times B$  асимметричной мембраной - пере-

brane with openings, or flaws, of the size  $D > d$ . The particles can pass free through the openings, Fig.8.3.

городкой с отверстиями (щелями) размера  $D > d$ , через которые частицы могут свободно пролетать, Рис.8.3.

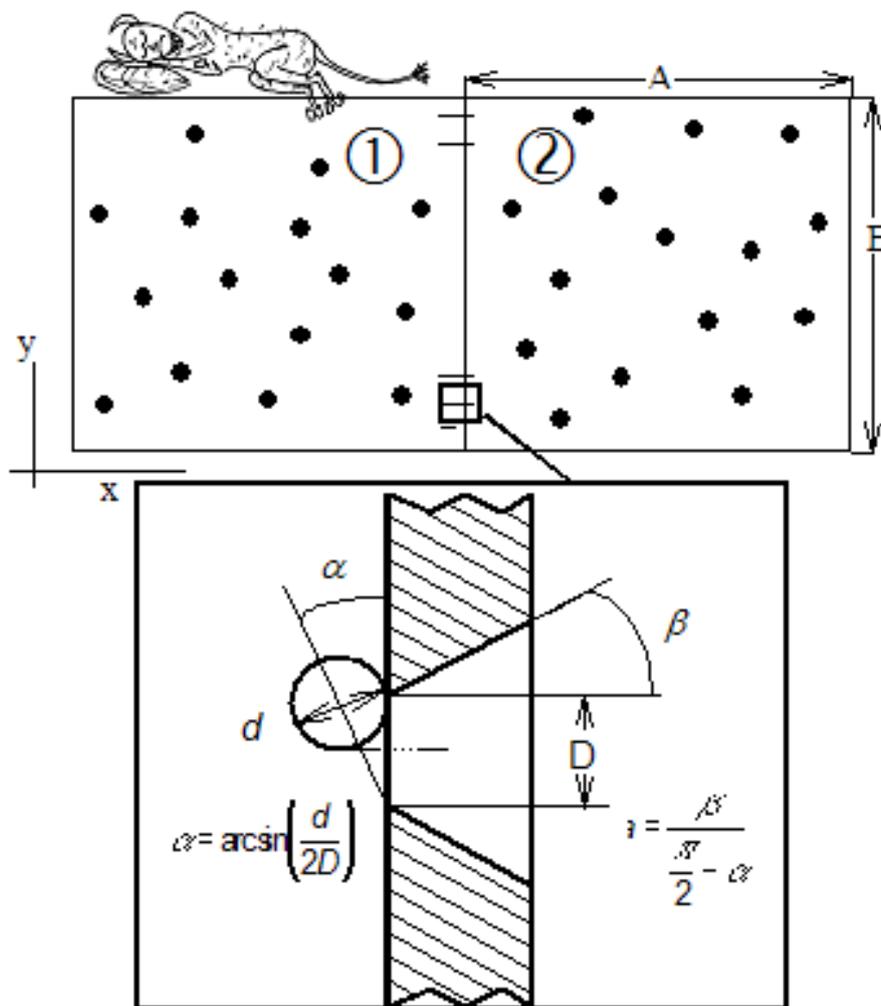


Fig. 8.3. Numeric experiment with asymmetric membrane.

Рис.8.3. Численный эксперимент с асимметричной мембраной.

The flux of particles through the membrane is determined by both the flaw size  $D$  (more exactly, by the ratio of open square of flaws to the overall membrane square, that is a membrane "openness"), and by the ratio of ranges of incoming angles that are in the interval  $[-(\pi/2-\alpha), +(\pi/2-\alpha)]$  for the flux  $1 \rightarrow 2$ ,  $\alpha = \arcsin(d/(2D))$ , and  $[-\beta, \beta]$  for the flux  $2 \rightarrow 1$ , for  $\beta \leq \alpha$ . Asymmetry of the membrane is determined by the ratio of the limits of these angle

Поток частиц через мембрану определяется как размером отверстий  $D$  (точнее соотношением открытой площади отверстий и общей площади мембраны, "открытостью" мембраны), так и соотношением диапазонов углов свободного пролета частиц сквозь мембрану:  $[-(\pi/2-\alpha), +(\pi/2-\alpha)]$  для потока  $1 \rightarrow 2$ ,  $\alpha = \arcsin(d/2D)$ , и  $[-\beta, \beta]$  для потока  $2 \rightarrow 1$  при условии  $\beta \leq \alpha$ . Асимметрия мембраны определяется соотношением этих диапазонов углов. Мы будем характеризовать асимметрию

ratio of the limits of these angle ranges. We shall characterize this asymmetry quantitatively by a parameter  $a = \beta / (\pi/2 - \alpha) = 2\beta / (\pi - 2\alpha)$ ,  $0 < a \leq 1$ . For  $a = 1$  we obtain a symmetric membrane.

As  $\beta \leq \alpha$ , and for the large enough particle number  $N$  we can expect uniform distribution of particles over the incoming angles for all the walls, including membrane and both its sides, then the decrease in  $\beta$  must result in decrease in average particle flux  $2 \rightarrow 1$  from the part 2 to part 1 of the rectangle region in comparison with inverse flux. This effect must lead to the effective accumulation of particles in the part 2 during which the flux  $1 \rightarrow 2$  is decreased due to decrease in particle number in the part 1, and the flux  $2 \rightarrow 1$  is increased due to the increase in particle number in part 2. The accumulation takes place until the both average fluxes become equal at some certain difference in particle numbers. This effect is statistical in nature since we do not prevent the particles to pass from one plane part to another, but we only change the probabilities of the escapes from the parts. Thus we could "observe" the redistribution of the particles due to the membrane asymmetry (SB). The only way to do this by now is a numeric modeling. Note that we can control the asymmetry of this model system.

In the numeric model of the mechanical movement of particles the penetrability of the membrane is taken into account in the form of an

количественно параметром  $a = \beta / (\pi/2 - \alpha) = 2\beta / (\pi - 2\alpha)$ ,  $0 < a \leq 1$ . При  $a = 1$  мембрана будет симметричной.

Поскольку  $\beta \leq \alpha$ , и при достаточно большом числе частиц  $N$  мы можем ожидать равномерного распределения частиц по углам подлета ко всем стенкам, включая мембрану, по обеим сторонам мембраны, то уменьшение  $\beta$  должно привести к уменьшению среднего потока частиц  $2 \rightarrow 1$  из части 2 в часть 1 прямоугольной области по сравнению с обратным потоком. Этот эффект должен привести к эффективному накоплению частиц в части 2, в течение которого поток  $1 \rightarrow 2$  уменьшается из-за уменьшения числа частиц в части 1, а поток  $2 \rightarrow 1$  увеличивается из-за увеличения числа частиц в части 2. Накопление имеет место до тех пор пока оба средних потока сравняются при некоторой определенной разнице в числах частиц. Этот эффект является статистическим по своей природе, поскольку мы не мешаем частицам проходить из одной плоской области в другую, мы только меняем вероятности ухода из частей. Таким образом, мы могли бы "наблюдать" перераспределение частиц, обусловленное асимметрией мембраны (НС). Единственным способом сделать это сейчас является численное моделирование. Заметим, что мы можем контролировать асимметрию этой модельной системы.

В численной модели механического движения частиц проницаемость мембраны принимается во внимание в форме эффективной вероятности  $P$

effective probability  $P$  (is to model the ratio of open square of flaws to the overall membrane square) for the particles to pass through the membrane. When the necessary conditions, governed by the asymmetry parameter  $a$  and the ratio  $d/(2D)$ , see below, for the individual particle to pass through the membrane are obeyed we have to choose a random value  $P_0$  from the interval  $[0,1]$ . If  $P_0 \leq P$  then the particle is allowed to pass through the membrane, and is reflected from the membrane otherwise.

Reality of this model as applied to the real gases is determined by ability of modern technology to produce the membranes with large number of small enough asymmetric openings. To correspond to this mechanical model, the aperture of the openings must be less than the length of the free passage of particles between the collisions with other particles or with the walls, the so called average free path. I.e. the condition of Knudsen flow [25] must be obeyed in the volume of openings. At normal conditions the free path is of order of 1 *mcm*. In the modern experiments with nanotubes and fullerenes the (symmetric) openings of order 1 *nm* are easily obtained [26-31], to number a few. This makes us to hope that this model is realizable in principle.

(призвана моделировать отношение открытой площади щелей к общей площади мембраны) прохода частиц через мембрану. Когда необходимые условия прохода через мембрану, налагаемые параметром асимметрии  $a$  и отношением  $d/(2D)$ , см. ниже, выполнены для конкретной частицы, нам нужно выбрать случайную величину  $P_0$  из интервала  $[0,1]$ . Если  $P_0 \leq P$ , то частице позволено пройти сквозь мембрану, и частица отражается от мембраны в противоположном случае.

Реалистичность предлагаемой модели применительно к реальным газам определяется техническими возможностями создания мембраны с достаточным количеством несимметричных отверстий. Для соответствия механической модели апертура отверстий должна быть менее длины свободного пробега частиц газа до столкновения с другой частицей или со стенкой, т.е. в объеме несимметричных отверстий должны выполняться условия кнудсеновского течения газа [25]. При нормальных условиях длина свободного пробега частиц газов составляет примерно 1 мкм. В современных экспериментах с нанотрубками и фуллеренами легко получают (симметричные) отверстия порядка 1 нм [26-31], чтобы не перечислять много. Это позволяет надеяться, что предлагаемая модель реализуема в принципе.

### 8.2.2. Numeric modeling

*Iterations.* Numeric modeling was carried out by iterations in time by the step  $dt$  which was chosen in such a way that the collisions of particles with the walls, membrane and pair collisions of particles can be "resolved". A simplest model of particle movement was used not taking into account the rotation (that actually means the particles to be the points). Model implies that particles move along the straight lines with constant velocities between the collisions. Before iterations, the velocities and positions of the particles were chosen randomly (see below). At every iteration the time step was calculated by the maximum particle velocity  $dt=d/v_{max}$ . Then the positions were analyzed. If some particle was near the wall, membrane, or other particle (at the distance less than  $d$ ), its velocity components ( $v_x, v_y$ ) were changed according to the rules below. After the calculation of the velocity components ( $v_x, v_y$ ) of all particles the new coordinates of their positions were calculated:  $x_{n+1}=x_n+v_{xn}dt$ ,  $y_{n+1}=y_n+v_{yn}dt$ ,  $n$  being the number of iteration. At every iteration the values of particle numbers  $N_1, N_2$ ,  $N_1+N_2=N$ , temperatures  $T_1, T_2$ , in the regions 1,2, respectively, average temperature  $T$  for all particles (that allows to control the energy conservation), the average values (over all previous iterations) of particle numbers  $N_{1m}, N_{2m}$ ,  $N_{1m}+N_{2m}=N$ , temperatures  $T_{1m}, T_{2m}$ , and overall temperature of all

### 8.2.2. Численное моделирование

*Итерации.* Численное моделирование проводилось итерациями по времени с шагом  $dt$ , который выбирался так, чтобы можно было отследить столкновения частиц со стенками и мембраной и парные столкновения между собой. Использовалась простейшая модель движения частиц без учета их вращения (что фактически означает точечность частиц). Модель предполагает, что между актами столкновений частицы движутся прямолинейно и равномерно. Перед началом итераций случайным образом задавались координаты и скорости частиц (см. ниже). На каждой итерации вычислялся шаг по времени  $dt=d/v_{max}$ , где  $v_{max}$  - модуль максимальной скорости частиц. Далее анализировались координаты частиц, и, в случае близости конкретной частицы к стенкам, мембране или к другой частице (на расстоянии менее  $d$ ) в соответствии с правилами, описанными ниже, изменялись составляющие скорости частиц ( $v_x, v_y$ ). После вычисления компонент скоростей частиц ( $v_x, v_y$ ) вычислялись новые координаты их положений:  $x_{n+1}=x_n+dtv_{xn}$ ,  $y_{n+1}=y_n+dtv_{yn}$ , где  $n$  - номер итерации. На каждой итерации вычислялись числа частиц  $N_1, N_2$ ,  $N_1+N_2=N$ , и температуры  $T_1, T_2$  в областях 1 и 2, соответственно, средняя температура  $T$  для всех частиц (что позволяет контролировать сохранение энергии), а также средние по всем предыдущим итерациям числа частиц  $N_{1m}, N_{2m}$ ,  $N_{1m}+N_{2m}=N$ , температуры  $T_{1m}, T_{2m}$  и общая температура  $T_m=T_{eff}$  всей системы. Сохранение импульса гарантиру-

particles  $T_m = T_{eff}$  were calculated. Momentum conservation is provided by the way of changing the velocity components in the collisions. Iterations were carried out until the averages reach their saturation values. The use of the quantities averaged over all iterations enables to "filter" the short fluctuations which were characterized by the mean square deviations  $SqN_1$ ,  $SqN_2$ ,  $SqT_1$ ,  $SqT_2$ , of the registered parameters from the mean ones. These deviations were also calculated at every iteration for other quantities and were averaged over all the iterations. Thus the iteration cycle was as follows:

- calculation of actual and mean parameters  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N_{1m}$ ,  $N_{2m}$ ,  $T_{1m}$ ,  $T_{2m}$ , and mean squared deviations  $SqN_1$ ,  $SqN_2$ ,  $SqT_1$ ,  $SqT_2$ ;
- determination of maximum particle velocity  $v_{max}$ ;
- calculation of the time step  $dt = d/v_{max}$ ;
- analysis of positions, changing the velocities;
- calculation of the new positions  $x_{n+1} = x_n + v_{xn}dt$ ,  $y_{n+1} = y_n + v_{yn}dt$ ; etc.

*Initial conditions.* Before to start iterations, the initial positions and velocities of particles were specified. The particles were distributed over two equal subregions of the sizes  $A \times B$  of the plane region  $2A \times B$  by  $N_1$  and  $N_2 = N_1 - 1$  particles,  $N_1 + N_2 = N$ . In each subregion the position coordinates of particles were chosen randomly by the use of standard generator of the value uniformly distributed over the corre-

ется правилами изменения скоростей при столкновениях. Итерации продолжались до выхода всех средних по итерациям значений на насыщение. Использование средних по всем итерациям значений позволяет "отфильтровать" кратковременные флуктуации, мерой которых являлись среднеквадратичные отклонения  $SqN_1$ ,  $SqN_2$ ,  $SqT_1$ ,  $SqT_2$ , регистрируемых параметров от их средних (по всем итерациям) величин. Среднеквадратичные отклонения вычислялись также для других величин на каждом шаге итераций и усреднялись по всем итерациям. Таким образом, цикл итераций был следующим:

- вычисление фактических и средних параметров  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N_{1m}$ ,  $N_{2m}$ ,  $T_{1m}$ ,  $T_{2m}$ , и среднеквадратичных отклонений  $SqN_1$ ,  $SqN_2$ ,  $SqT_1$ ,  $SqT_2$ ;
- определение максимальной скорости частиц  $v_{max}$ ;
- вычисление шага по времени  $dt = d/v_{max}$ ;
- анализ координат, изменение скоростей;
- вычисление новых координат  $x_{n+1} = x_n + v_{xn}dt$ ,  $y_{n+1} = y_n + v_{yn}dt$ ; etc.

*Начальные условия.* Перед началом итераций задавались начальные положения и скорости частиц. Частицы распределялись примерно поровну между двумя равными частями  $A \times B$  прямоугольной области  $2A \times B$  по  $N_1$  и  $N_2 = N_1 - 1$  частиц,  $N = N_1 + N_2$ . В каждой части области координаты частиц  $x$  и  $y$  выбирались с помощью стандартного генератора случайной равномерно распределенной на соответствующем интервале величины.

sponding interval.

Initial velocities were specified on the base of relation between the mean squared particle velocity  $\langle v^2 \rangle$  and the temperature  $T$  of perfect gas with two translational degrees of freedom:  $\langle v^2 \rangle = 2(k_B/m)T$ , where  $k_B$  is Boltzmann constant,  $m$  is a mass of particles, or  $\langle v^2 \rangle = 2T_{eff}$ ,  $T_{eff} = (k_B/m)T$ . For certainty, the ratio  $k_B/m = 10^4$  [J/K/kg] was used (atomic hydrogen, the specific value is not important, the effective temperature was varied by order, see below). Given the effective temperature  $T_{eff}$ , for every particle the squared absolute value of its velocity was chosen from the interval  $[0, 4T_{eff}]$  by the use of random quantity uniformly distributed over this interval (and so  $\langle v^2 \rangle = 2T_{eff}$ ). Then, by the use of another random quantity uniformly distributed over the interval  $[0, 2\pi]$ , the velocity direction was chosen and the velocity components  $(v_x, v_y)$  were calculated. Since the particle number was finite and not very large, an additional renormalization of the velocities to the initially set temperature  $T_{eff}$ , was carried out by correction of all velocity components by a factor  $\sqrt{T_{eff}/T_{eff1}}$ , where  $T_{eff1}$  is an actual temperature value of non-renormalized random velocity distribution,

$$T_{eff1} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (v_{jx}^2 + v_{jy}^2). \quad (8.2.1)$$

By the way, this formula was used also for calculation of effective temperatures of the particles at every iteration.

*Collisions with the walls.* At

Начальные скорости задавались на основе соотношения между среднеквадратичной скоростью  $\langle v^2 \rangle$  и температурой  $T$  для идеального газа с двумя поступательными степенями свободы:  $\langle v^2 \rangle = 2(k_B/m)T$ , где  $k_B$  - постоянная Больцмана,  $m$  - масса частицы, или  $\langle v^2 \rangle = 2T_{eff}$ ,  $T_{eff} = (k_B/m)T$ . Для определенности в расчетах принималось  $k_B/m = 10^4$  [Дж/К/кг] (атомарный водород, конкретный выбор не имеет значения, т.к. эффективная температура менялась нв порядок, см. ниже). По заданной температуре  $T_{eff}$  для каждой частицы выбирался квадрат модуля скорости из диапазона  $[0, 4T_{eff}]$  с помощью случайной величины, равномерно распределенной на этом интервале (так, что  $\langle v^2 \rangle = 2T_{eff}$ ). Затем с помощью случайной величины, равномерно распределенной на интервале  $[0, 2\pi]$ , выбиралось направление движения частицы, и вычислялись компоненты  $v_x$  и  $v_y$  ее скорости. Поскольку число частиц было конечным и относительно невелико, осуществлялась дополнительная ренормализация компонент скоростей к первоначально заданной температуре  $T_{eff}$ , умножением всех компонент скоростей на множитель  $\sqrt{T_{eff}/T_{eff1}}$ , где  $T_{eff1}$  - фактическая величина температуры ненормализованного случайного распределения по скоростям,

Кстати, эта формула использовалась также для вычисления эффективных температур частиц на каждой итерации.

*Столкновения со стенками.* На

every iteration the distances between particle centers and walls were analyzed. The particle was considered being in contact with the wall if the corresponding distance was less than  $d/2$ . In this case the sign of respective velocity component was changed, i.e. the changes were  $v_x \rightarrow -v_x$ ,  $v_y \rightarrow -v_y$  for the walls parallel to  $x$ -axis, and  $v_x \rightarrow -v_x$ ,  $v_y \rightarrow v_y$  for the walls parallel to  $y$ -axis.

*Collisions with a membrane.* At every iteration the distances between particle centers and membrane were analyzed. The particle was considered being in contact with membrane if the corresponding distance was less than  $d/2$ . In this case a random number  $P_0$  was generated,  $0 \leq P_0 \leq 1$ , and then this number was compared with given penetrability ("openness")  $P$ . For  $P_0 > P$ , particle was "reflected" from the membrane, i.e. there was a change in its velocity  $x$ -component,  $v_x \rightarrow -v_x$  (a bound). For  $P_0 \leq P$ , ratio  $v_y/v_x$  of the velocity components of given particle was analyzed. The particle was considered as passed through the membrane if

$$\arctan\left(\left|v_y/v_x\right|\right) \leq \pi/2 - \alpha, v_x > 0,$$

for region 1, or,

$$\arctan\left(\left|v_y/v_x\right|\right) \leq \beta, v_x < 0,$$

for region 2. If these conditions were not obeyed the particle was "reflected" from the membrane (a bound). As is seen from Fig.8.3, parameter  $\alpha$  is determined by the particle diameter  $d$  and flaw aperture  $D$ . In this investigation, parameter  $\beta$

каждом шаге итераций контролировались расстояния частиц до стенок. Частица считалась столкнувшейся со стенкой, если расстояние от стенки до ее центра становилось меньше  $d/2$ . В этом случае изменялся знак соответствующей составляющей скорости, т.е. изменения были  $v_x \rightarrow -v_x$ ,  $v_y \rightarrow -v_y$  для стенок, параллельных оси  $x$ , и  $v_x \rightarrow -v_x$ ,  $v_y \rightarrow v_y$  для стенок, параллельных оси  $y$ .

*Столкновения с мембраной.* На каждом шаге итераций проверялись расстояния частиц до мембраны. Частица считалась столкнувшейся с мембраной, если расстояние от мембраны до ее центра становилось меньше  $d/2$ . В этом случае проверялось соотношение между сгенерированным случайным числом  $P_0$ , равно распределенным на интервале  $[0,1]$ , и заданной вероятностью пролета  $P$  ("открытость", проницаемость мембраны). В случае  $P_0 > P$ , частица отражалась от мембраны, т.е. знак  $x$ -составляющей скорости частицы изменялся на противоположный  $v_x \rightarrow -v_x$  (отскок). В случае  $P_0 \leq P$ , анализировалось отношение  $v_y/v_x$ . Частица считалась пролетевшей сквозь мембрану если:

для области 1, или

для области 2. Если эти условия не выполнялись, знак  $v_x$  также изменялся на противоположный (отскок). Как видно из рис.8.3, параметр  $\alpha$  определяется соотношением диаметра частиц  $d$  и размером отверстий  $D$ . В данной работе параметр  $\beta$  вычислялся по форму-

was calculated by the formula  $\beta = a(\pi/2 - \alpha)$ ,  $\alpha = \arcsin(d/(2D))$ . The asymmetry parameter was specified as input parameter of the problem.

*Particle pair collisions.* At every iteration step the distances between particle centers in pairs were analyzed. Two particles were considered to be in contact if these distances were less than  $d$ . The velocities were changed in the case as follows. If  $v_1 = (v_{x1}, v_{y1})$  and  $v_2 = (v_{x2}, v_{y2})$  - are the velocities of colliding particles 1 and 2, respectively, before the collision, and  $v'_1 = (v'_{x1}, v'_{y1})$  and  $v'_2 = (v'_{x2}, v'_{y2})$  are their velocities after the collision, then the relation between them is determined by the known formulas obtained on the base of conservation of both the kinetic energy and momentum:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_{x1} & v'_{y1} \\ v'_{x2} & v'_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & b \\ c & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x1} & v_{y1} \\ v_{x2} & v_{y2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & b \\ c & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (8.2.2)$$

$$g = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, b = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}, c = \frac{2m_1}{m_1 + m_2},$$

where  $m_1, m_2$  are the masses of colliding particles. In our case of identical particles with equal masses, the matrix in eq.(8.2.2) becomes symmetric,  $g=0, b=c=1$  (the collision act is symmetric with respect to the rearrangements of identical particles).

лам  $\beta = a(\pi/2 - \alpha)$ ,  $\alpha = \arcsin(d/(2D))$ . Параметр асимметрии  $a$  считался заданным.

*Парные столкновения частиц.*

На каждом шаге итераций контролировались расстояния между частицами попарно. Две частицы считались столкнувшимися, если расстояние между их центрами становилось меньше  $d$ . В этом случае изменения их скоростей вычислялись по следующей схеме. Если  $v_1 = (v_{x1}, v_{y1})$  и  $v_2 = (v_{x2}, v_{y2})$  - скорости частиц 1 и 2, соответственно, до столкновения,  $v'_1 = (v'_{x1}, v'_{y1})$  и  $v'_2 = (v'_{x2}, v'_{y2})$  - скорости частиц 1 и 2, соответственно, после столкновения, то соотношение между ними определяется по известным формулам, полученным на основе сохранения как кинетической энергии, так и импульса:

где  $m_1, m_2$  - массы сталкивающихся частиц. В нашем случае равенства масс частиц матрица пересчета в ур.(8.2.2) становится симметричной,  $g=0, b=c=1$ , (акт столкновения симметричен относительно перестановки идентичных частиц).

### 8.2.3. Numeric results

Calculations were carried out for the following values of parameters:  $A=20$ ,  $B=10$ ,  $D=1.2$ ,  $d=0.7$ ,  $P=1.0, 0.8, 0.4$ ,  $T=300, 3000$  (Kelvin degrees, as applied to atomic hydrogen  $T_{eff}=10^4 T$ ),  $N=79$ ,  $a=1.0 \div 0.1$ .

Before carrying out the main series of numeric experiments, the trial calculations were done for the particle numbers  $N=13, 35, 79, 121, 251$ , with different asymmetry parameters  $a$  of the membrane. It turned out that the number of iterations necessary for reaching the saturation depends very weakly on the particle number, but the computing time changed from 5 minutes ( $N=13$ ) to 5 hours ( $N=251$ ). For the smaller particle numbers  $N=13, 35$  there were large fluctuations of particle numbers and temperatures, for  $N=13$   $N_1$  has been often zero. The value  $N=79$  was found to be optimum since it provided reasonable computing time and low enough fluctuations, see next. In the following the results were obtained for the iteration numbers from 10000 for  $a=1.0, 0.9$  (12-13 hours for 100 trials of the same variant) to 50000-70000 iterations for  $a=0.1$  (up to 72 hours for 100 trials of the same variant). The figures are given for computer Pentium-100, the program was developed on the base of 16-bit calculations.

In the course of trial calculations one strange effect was obtained: if only one numeric trial up

### 8.2.3. Численные результаты.

Вычисления проводились при следующих значения параметров:  $A=20$ ,  $B=10$ ,  $D=1,2$ ,  $d=0,7$ ,  $P=1,0, 0,8, 0,4$ ,  $T=300, 3000$  (в Кельвинах, применительно к атомарному водороду  $T_{eff}=10^4 T$ ),  $N=79$ ,  $a=1,0 \div 0,1$ .

Перед проведением главной серии численных экспериментов были проделаны пробные расчеты с числом частиц  $N=13, 35, 79, 121, 251$ , при различных параметрах асимметрии мембраны  $a$ . Оказалось, что число частиц слабо влияет на число итераций, необходимых для достижения равновесия, но время машинного счета изменялось от 10 мин. ( $N=13$ ) до 5 часов ( $N=251$ ). При малых числах частиц  $N=13, 35$  наблюдались сильные флуктуации чисел частиц и температур, а при  $N=13$   $N_1$  часто становилось равным нулю. Было найдено, что оптимальным является  $N=79$ , что обеспечивает разумные время счета и достаточно малые флуктуации (см. ниже). Описанные ниже результаты были получены для чисел итераций от 10000 итераций при  $a=1,0, 0,9$  (12-13 часов для 100 запусков одного варианта) до 50000-70000 итераций при  $a=0,1$  (до 72 часов для 100 запусков одного варианта). Цифры приводятся для машины Pentium-100, программа написана на основе 16-битовых вычислений.

При проведении пробных расчетов был обнаружен один странный эффект, заключающийся в том, что если

to saturation was carried out for each asymmetry parameter  $a=1.0\pm 0.1$  (by 0.1 or 0.2 for the same other parameters), then the dependencies of the particle numbers and temperatures ( $N_{1m}, N_{2m}, T_{1m}, T_{2m}$ , averaged over all iterations!) in the regions 1,2, on asymmetry parameter  $a$  were not monotone. These dependencies become monotone, if the results are additionally averaged over large number of identical trials, for example, 100 trials for each value of  $a$ . This effect was independent of the particle number and was observed up to  $N=301$ . On the histograms of DMTI and IMTI, see next, were even obtained two or three and more peaks that is reminiscent of quantum mechanical effects. But the aim of this section is to illustrate the concept of structural information by model system, and we do not discuss here this effect in the following. Because of this effect the results described next were averaged over 100 trials for the same collection of input model parameters. Thus the tendencies for the particle numbers, temperatures, and other quantities corresponding to the stationary states of described model system were obtained for the quantities averaged, the first, over all iterations, and, the second, additionally over 100 identical trials of the same variant, the trials were different only by random initial particle positions and velocities.

v The numeric results for  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  (that corresponds to 3000K for

провести по одному расчету для каждого значения параметра асимметрии от 1,0 до 0,1 (через 0,1 или 0,2 при прочих неизменных параметрах), то не удается получить монотонные зависимости  $N_{1m}, N_{2m}, T_{1m}, T_{2m}$  (усредненных по всем итерациям!) от параметра асимметрии  $a$ . Эти зависимости становятся монотонными только для величин, усредненных по большому числу запусков идентичных вариантов, например, по 100 запусков на каждое значение  $a$ . Этот эффект не зависит от числа частиц вплоть до  $N=301$ . На гистограммах ИОПИ ИППИ при этом наблюдаются бимодальность и даже множественные максимумы, что само по себе напоминает квантово-механические эффекты. Но целью данного раздела является проиллюстрировать концепцию структурной информации на примере модельной системы и мы не обсуждаем здесь этот эффект. Поэтому в дальнейшем все обсуждаемые ниже результаты получены для средних величин по 100 запускам для одного и того же набора входных параметров. Таким образом, закономерности для чисел частиц, температур и т.д., отвечающих стационарным состояниям описываемой модельной системы, получены, во-первых, при усреднении значений на каждой итерации по всем предыдущим итерациям, и во -вторых, при дополнительном усреднении по 100 запускам одного и того же варианта. Варианты различались только случайными начальными распределениями координат и скоростей частиц.

На рис. 8.8 (a,b) Аппендикса 8.4 представлены результаты численного

atomic hydrogen), membrane penetrations  $P=0.4, 0.8, 1.0$ , and other parameters above, are presented in Fig.8.8 (a,b) in Appendix 8.4 for the particle numbers and temperatures. In that figures there are also the results for the mean square deviations of obtained values of particle numbers and temperatures. It is seen that the saturation state is independent of the membrane penetration. The lesser penetration simply demands more iterations and the computing time.

The results for the different temperatures  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$ ,  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$  (corresponding to  $T=3000\text{K}$  and  $T=300\text{K}$  for atomic hydrogen), for  $P=1.0$ , and other parameters above are shown in Fig. 8.9 (a,b) in Appendix 8.4 for the particle numbers and temperatures. The resulting temperatures for  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$  are multiplied by 10 for the convenience of comparison. As in Fig.8.8, the mean square deviations are also given.

From the results in Figs.8.8, 8.9 it is evident that the relative redistribution of particles and their temperatures depends only on asymmetry parameter of the membrane, and is *independent of* the membrane penetrability and mean kinetic energy of the particles. And always there is accumulation of a larger number of particles  $N_2$  with a lower temperature  $T_2$ . The same conclusion was drawn from the trial experiments with different values of input parameters ( $N, A, B, D > d$ ).

The redistribution of particles and their kinetic energy (tempera-

моделирования при  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  (что соответствует  $3000\text{K}$  для атомарного водорода), проницаемости мембраны  $P=0,4; 0,8; 1,0$ , и прочих параметрах, описанных выше. На этих рисунках приводятся также среднеквадратичные отклонения полученных значений чисел частиц и температур. Из этих рисунков очевидна независимость установившихся значений от проницаемости мембраны. Меньшая проницаемость мембраны просто требует больше итераций и машинного времени.

На рис.8.9(a,b) Аппендикса 8.4 представлены те же результаты расчетов для температур  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$  (соответствующих  $T=3000\text{K}$  и  $T=300\text{K}$  для атомарного водорода) при  $P=1$  и прочих равных. Все температуры, отвечающие  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , на рис.8.9b увеличены в 10 раз для удобства сравнения. Аналогично рис.8.8, на рис.8.9 также приведены значения среднеквадратичных отклонений.

Из приведенных на рис.8.8, 8.9 результатов видно, что относительное перераспределение частиц и температур определяется только параметром асимметрии мембраны и *не зависит* от ее проницаемости и средней кинетической энергии частиц. И всегда имеется аккумуляция большего числа частиц  $N_2$  с более низкой температурой  $T_2$ . Аналогичный вывод был сделан при проведении пробных расчетов с различными числами частиц и другими параметрами ( $N, A, B, D > d$ ).

Перераспределение частиц и их кинетической энергии (температур)

tures) must lead to the change, in this case to the decrease, in entropy of our model system, in other words, to generation of negentropy [1], or information [14,15]. To calculate this change we can use the informations of inverse and direct transforms of the distributions, see Chapter 4, Sec.4.7. In our case the system consists of two parts, the extensive measure is given by particle numbers on two sides of membrane,  $P_N = \{P_{N1} = N_1/(N_1 + N_2), P_{N2} = N_2/(N_1 + N_2)\}$ , in the initial state  $P_N^0 = \{1/2, 1/2\}$ , and the intensive measure is given by temperatures  $P_T = \{P_{T1} = T_1/(T_1 + T_2), P_{T2} = T_2/(T_1 + T_2)\}$ , in the initial state  $P_T^0 = \{1/2, 1/2\}$ . An information of direct transform of extensive measure  $P_N^0 \rightarrow P_N$  is

$$I_{dir}^N = \sum_{k=1}^2 P_{Nk}^0 \ln[P_{Nk}^0 / P_{Nk}] = \ln[v], v = \frac{N_1 + N_2}{2\sqrt{N_1 N_2}}. \quad (8.2.3)$$

An information of inverse transform  $P_T \rightarrow P_T^0$  of intensive measure is

$$I_{inv}^T = \sum_{k=1}^2 P_{Tk} \ln[P_{Tk} / P_{Tk}^0] = \frac{T_1}{T_1 + T_2} \ln\left(\frac{2T_1}{T_1 + T_2}\right) + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \ln\left(\frac{2T_2}{T_1 + T_2}\right). \quad (8.2.4)$$

As was in Sec.4.7, to calculate the specific entropy change of described model system, we must add  $2I_{inv}^T$  (the specific entropy change due to heat transfer for the both parts of the system of particles with the **two** degrees of freedom),  $2I_{dir}^N$  (the specific entropy change due to mass transfer for the **two** parts of the system), divide the result by 2 (two parts) and multiply by the Boltz-

должно приводить к изменению, в данном случае к уменьшению, энтропии нашей модельной системы, другими словами к производству негэнтропии [1], или информации [14,15]. Для вычисления этого изменения мы можем использовать обратную и прямую информации преобразования распределений, см. Гл.4, п.4.7. В нашем случае система состоит из двух частей, экстенсивная мера вычисляется по числам частиц по разные стороны мембраны  $P_N = \{P_{N1} = N_1/(N_1 + N_2), P_{N2} = N_2/(N_1 + N_2)\}$ , в начальном состоянии  $P_N^0 = \{1/2, 1/2\}$ , а интенсивная мера вычисляется по температурам в частях системы,  $P_T = \{P_{T1} = T_1/(T_1 + T_2), P_{T2} = T_2/(T_1 + T_2)\}$ , в начальном состоянии  $P_T^0 = \{1/2, 1/2\}$ . Информация прямого преобразования  $P_N^0 \rightarrow P_N$  экстенсивной меры составляет

Информация обратного преобразования  $P_T \rightarrow P_T^0$  интенсивной меры составляет

Как и в п.4.7, для вычисления удельного изменения энтропии описываемой модельной системы мы должны сложить  $2I_{inv}^T$  (удельное изменение энтропии при переносе тепла для обеих частей газа частиц с **двумя** степенями свободы) и  $2I_{dir}^N$  (удельное изменение энтропии при переносе вещества для **двух** частей газа), поделить сумму на 2 (две части) и умножить на константу Больцмана (или газовую постоянную

mann constant  $k_B$  (or universal gas  $R$ ):  
constant  $R$ )

$$\Delta S = -k_B(I_{inv}^T + I_{dir}^N). \quad (8.2.5)$$

Because of qualitative character of this investigation, in the calculations the both values of direct  $I_{dir} = I_{inv}^T + I_{dir}^N$ , and inverse  $I_{inv} = I_{dir}^T + I_{inv}^N$  informations were computed. As is seen from Figs. 8.4, 8.5, their values differ by no more than mean square deviations due to relatively small difference in stationary temperatures, and in qualitative consideration it may be said that they depend on asymmetry parameter in the same manner.

In the next subsection we show that this behavior (on the qualitative level) can be related to the generation of information (negentropy) in the system like this was done by Branson [32] in describing a simple mathematical model of a frog stomach wall which maintains a concentration difference of Na ions when clamped between two solutions of NaCl. Branson called this difference information and we completely agree with him.

Данная работа носит качественный характер, поэтому вычислялись как прямая  $I_{dir} = I_{inv}^T + I_{dir}^N$ , так и обратная ей  $I_{inv} = I_{dir}^T + I_{inv}^N$  информации. Как видно из рис. 8.4, 8.5, они незначительно отличаются друг от друга не более чем на величину среднеквадратичного отклонения из-за наличия относительно небольшой разницы установившихся температур, и на качественном уровне описания можно сказать, что они одинаковым образом зависят от параметра асимметрии

В следующем подразделе мы покажем, что такое поведение можно (на качественном уровне описания) соотнести с генерацией информации (негэнтропии) в системе, подобно тому, как это описывает Брэнсон [32] при построении простой математической модели поддержания разности концентраций ионов натрия по разные стороны мембраны - стенки кишечника лягушки, помещенной в раствор NaCl. Разность концентраций Брэнсон и называет собственно информацией, с чем полностью согласуется данная работа.

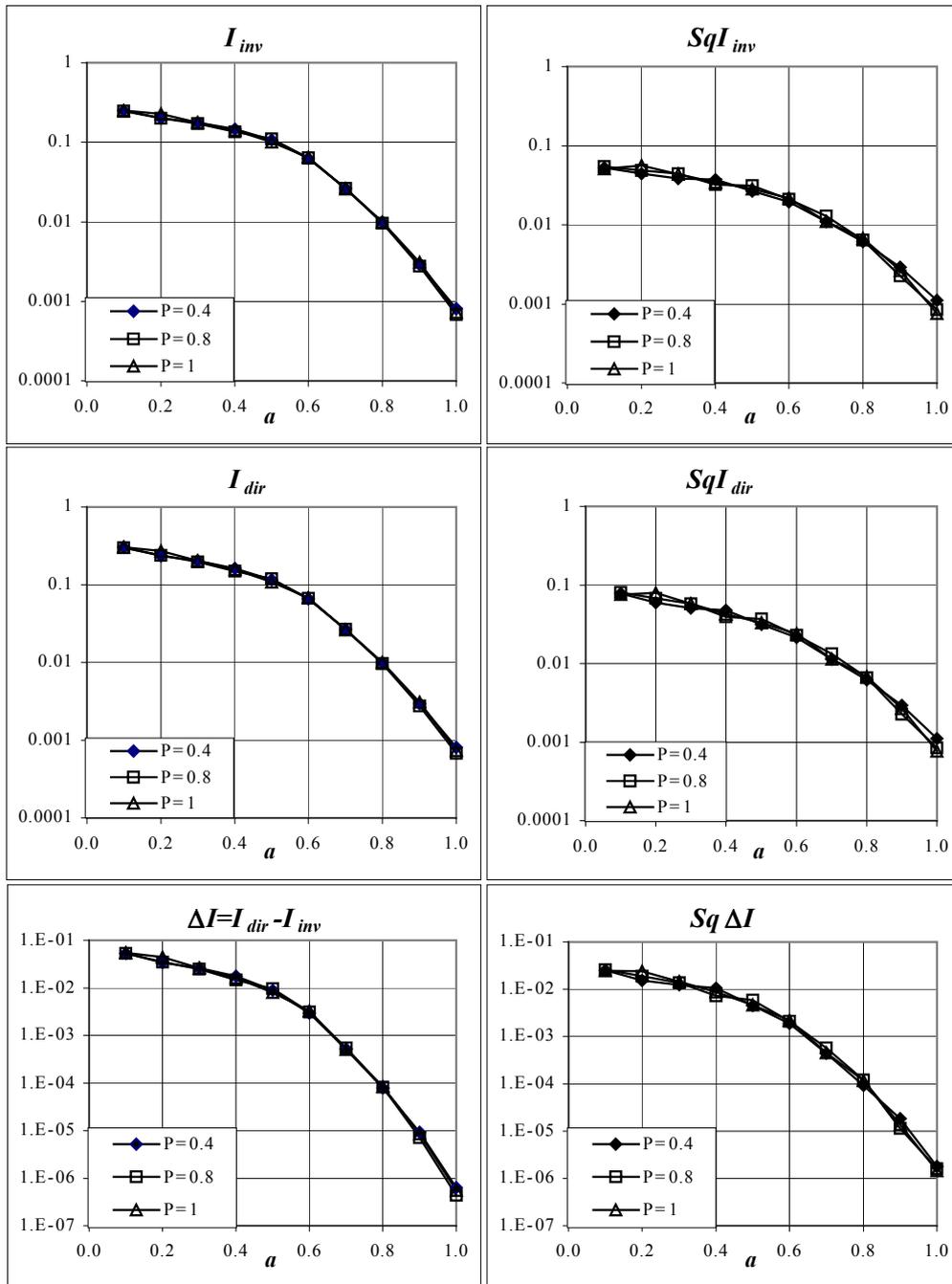


Fig.8.4. Numeric results (the left column of plots) for the dependencies of saturation values of direct and inverse transform information  $I_{dir}$  and  $I_{inv}$ , on the asymmetry parameter, evaluating the entropy changes due to model membrane asymmetry, for the different membrane penetrations,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and other parameters as described in the text. The respective mean square deviations are also given (the right column of plots). Logarithmic scale is necessary to distinguish the values for the low asymmetries.

. Рис.8.4. Численные результаты (левый столбец графиков) для зависимостей величин насыщения прямой и обратной информации преобразования,  $I_{dir}$  и  $I_{inv}$ , от параметра асимметрии, оценивающих изменение энтропии, обусловленное асимметрией мембраны, при различных проницаемостях,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и других параметрах, приведенных в тексте. Справа приводятся соответствующие среднеквадратичные отклонения. Логарифмическая шкала необходима для различия значений при малых асимметриях.

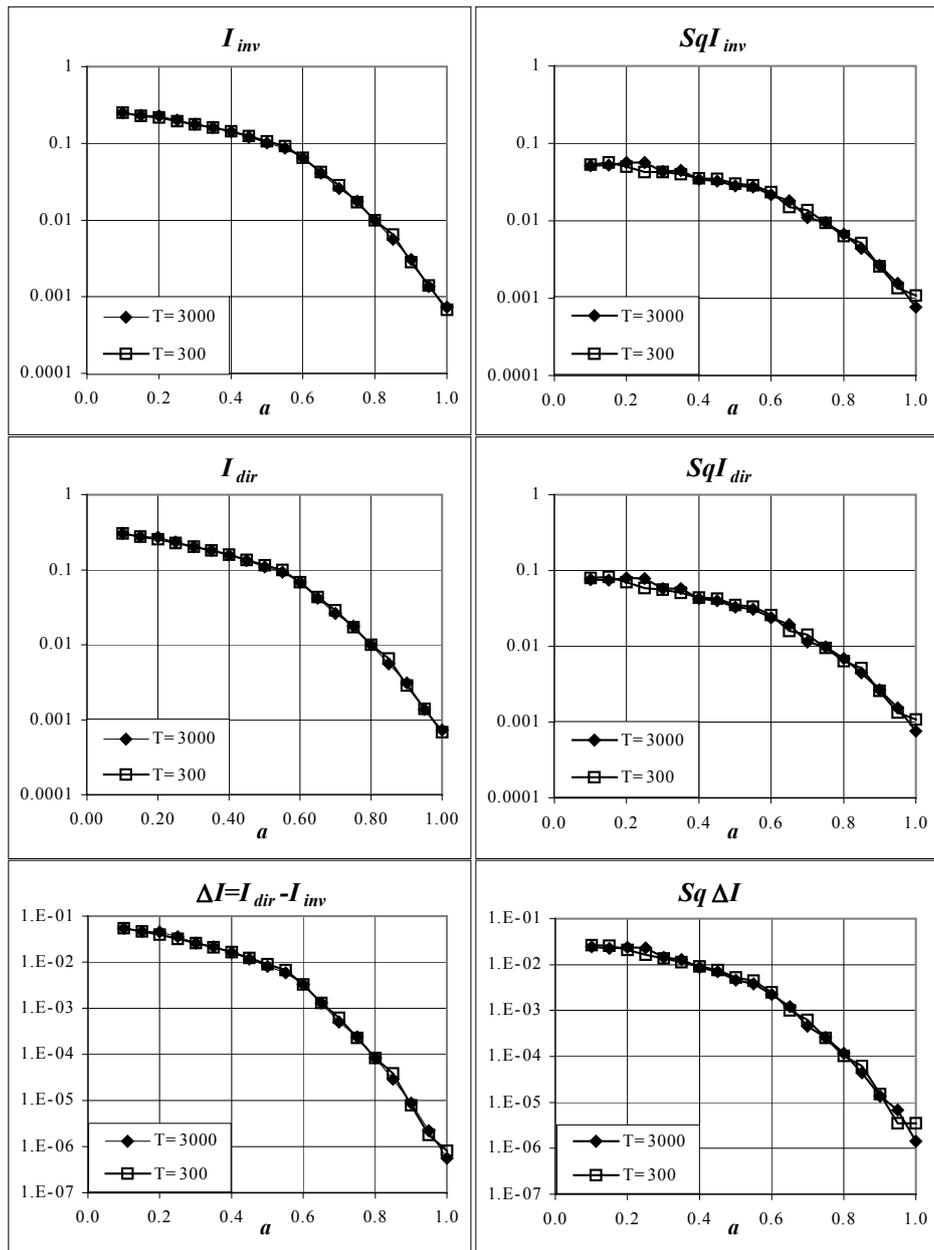


Fig.8.5. Numeric results (the left column of plots) for the dependencies of saturation values of direct and inverse transform information  $I_{dir}$  and  $I_{inv}$ , on the asymmetry parameter, evaluating the entropy changes due to model membrane asymmetry, for the different effective temperatures  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , membrane penetration  $P=1$ , and other parameters as described in the text. The respective mean square deviations are also given (the right column of plots). Logarithmic scale is necessary to distinguish the values for the low asymmetries.

Рис.8.5. Численные результаты (левый столбец графиков) для зависимостей величин насыщения прямой и обратной информации преобразования,  $I_{dir}$  и  $I_{inv}$ , от параметра асимметрии, оценивающих изменение энтропии, обусловленное асимметрией мембраны, при различных эффективных температурах  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , проницаемости мембраны  $P=1$ , и других параметрах, приведенных в тексте. Соответствующие среднеквадратичные отклонения приводятся справа. Логарифмическая шкала необходима для различия информации при малых асимметриях.

Branson's reasoning is based on the fact that when the frog stomach wall dies then the equal equilibrium concentrations are established during some time. Hence, the membrane must produce concentration difference, or information, to maintain this non-equilibrium state. Then on the base of proposition about exponential decay of concentration difference Branson came to the conclusion that information generation rate may be independent of concentration difference and be constant. The situation is very similar to our model of asymmetric membrane. Unlike the Branson model we shall try to analyze the dependence of saturation value of concentration difference on the membrane asymmetry parameter.

#### 8.2.4. Simple model of concentration difference generation

Consider a membrane which can maintain a non-zero difference in particle numbers of some substance  $\Delta N = N_2 - N_1$  due to some physico-chemical mechanisms. As its simplest model describing both the increase in concentration difference up to saturation, and the exponential decay of this difference, we can take on an ordinary differential equation for  $h = \Delta N / (N_2 + N_1)$

$$\frac{dh}{dt} = \beta A (H - h)^\gamma - \alpha h, \quad (8.2.6)$$

where  $\alpha, \beta, \gamma, H$  are non-negative constants,  $A$  is an asymmetry parameter, for example,  $A = 1 - a$ , as applied to our mechanical model above,  $t$  is the time. The first term in the right hand side describes the in-

Насуждения Брэнсона основаны на том, что если мембрана умирает, то через некоторое время разность концентраций исчезает, поэтому мембрана должна "производить" разность концентраций, т.е. должна продуцировать информацию, для того, чтобы поддерживать неравновесную разность концентраций. Дальнейший ход рассуждений на основе экспоненциального распада разности концентраций приводит его к заключению, что скорость производства информации может не зависеть от разности концентраций и быть постоянной. Ситуация очень похожа на нашу модель асимметричной мембраны. В отличие от модели Брэнсона мы сделаем попытку проанализировать зависимость установившейся разности концентраций от параметра, описывающего асимметрию мембраны.

#### 8.2.4. Простая модель генерации разности концентраций

Рассмотрим мембрану, которая может поддерживать ненулевую разность чисел частиц некоторого вещества  $\Delta N = N_2 - N_1$  благодаря наличию каких-либо физико-химических механизмов. В качестве простейшей модели, описывающей как увеличение разности концентраций до насыщения, так и ее экспоненциальный распад примем обыкновенное дифференциальное уравнение для  $h = \Delta N / (N_2 + N_1)$

где  $\alpha, \beta, \gamma, H$  - неотрицательные постоянные,  $A$  - параметр асимметрии мембраны, например,  $A = 1 - a$ , применительно к механической модели, описанной выше,  $t$  - время. Первое слагаемое в правой части описывает генера-

formation generation proportional (in a simplest case) to the asymmetry parameter. The second term describes the exponential decay of concentration difference in the absence of asymmetry. The trivial case  $A=0$  of symmetric membrane gives simple exponential decay. This equation can be solved for  $\gamma=0, 1/2, 1$  by a constant variation technique, and we can obtain the dependence of saturation value  $h(t \rightarrow \infty)$  on the asymmetry parameter and other parameters. For  $\gamma=2$ , this is a Riccati equation which can not be solved (simply), but from the equation  $dh/dt=0$  we can also obtain the sought dependence of saturation value of relative concentration difference on the parameters of the model. In Table 8.2.1 the dependencies  $h_\infty=h(t \rightarrow \infty)=h_\infty(\alpha, \beta, H, A)$  are presented.

цию информации, пропорциональную (в простейшем случае) параметру асимметрии. Второе слагаемое описывает экспоненциальный распад разности концентраций в отсутствие асимметрии. Тривиальный случай  $A=0$  симметричной мембраны дает простой экспоненциальный распад. Это уравнение легко решить методом вариации постоянной для  $\gamma=0, 1/2, 1$ , и получить зависимость установившегося значения  $h(t \rightarrow \infty)$  от параметра асимметрии и постоянных модели. При  $\gamma=2$  это уравнение становится нерешаемым уравнением Рикатти, но положив  $dh/dt=0$ , мы также можем получить искомую зависимость установившегося значения  $h$  от параметров модели. В Таблице 8.2.1 приведены функции  $h_\infty=h(t \rightarrow \infty)=h_\infty(\alpha, \beta, H, A)$ .

Table 8.2.1. The dependencies of the saturation value of the relative concentration difference  $h(t \rightarrow \infty)=h_\infty$  on the parameters of the model (8.2.6) for different value of the parameter  $\gamma$ .

Таблица 8.2.1. Зависимости величины насыщения относительной разности концентраций  $h(t \rightarrow \infty)=h_\infty$  от параметров модели (8.2.6) при различных величинах параметра  $\gamma$ .

$\gamma$	$h_\infty(\alpha, \beta, H, A)$
0	$h_\infty = \frac{\beta}{\alpha} A = \lambda$
1/2	$h_\infty = H \frac{1}{2} (\sqrt{b(b+4)} - b), b = \frac{A^2 \beta^2}{H \alpha^2} = (\lambda)^2 / H$
1	$h_\infty = H \frac{A}{A + \alpha / \beta} = \frac{H}{1 + 1 / \lambda}$
2	$h_\infty = H \left[ (1 + b) - \sqrt{(1 + b)^2 - 1} \right], b = \frac{\alpha}{2HA\beta} = \frac{1}{2H\lambda}$

It is seen that the solutions depend actually on two parameters

Видно, что решения зависят фактически от двух параметров:  $H$  и

$H$  and  $\lambda=A\beta/\alpha$ . For the non-zero asymmetry the model gives non-zero saturation value of concentration difference. For  $\gamma=0$  this value must be proportional to asymmetry parameter  $A$ . In other cases the dependence of saturation value  $h_\infty$  on the asymmetry parameter is nonlinear.

As applied to the numeric results described above, throwing away the small contribution of temperature difference into the changed entropy, substituting into eq.(8.2.3) for  $I_{dir}^N$  the values of

$$N_1=N(1-h_\infty)/2, N_2=N(1+h_\infty)/2, N_1+N_2=N$$

we obtain for  $I_{dir}^N$  an expression:

$$I_{dir}^N = -\frac{1}{2} \ln(1 - h_\infty^2). \quad (8.2.7)$$

The result of fitting the parameters of the analytic model (8.2.6) to calculate the information by eq.(8.2.7) are shown in Fig.8.7 together with numeric results. It is seen that the nonlinear dependencies of information on asymmetry parameter are similar for both numeric and analytic calculations. The criteria of the parameters selection were both the qualitative coincidence and the maximum information value  $I_{dir}^N(h_\infty)$  at  $\alpha=1-A=0.1$ . The most close is a fitting for  $\gamma=1/2$ .

$\lambda=A\beta/\alpha$ . При наличии асимметрии модель дает ненулевые значения установившейся разности концентраций. При  $\gamma=0$  это значение должно быть пропорционально параметру асимметрии. В остальных случаях зависимость  $h_\infty$  от параметра асимметрии будет нелинейной.

Применительно к описанным выше численным результатам, пренебрегая малой поправкой на разность температур в изменении энтропии, подставляя в формулу (8.2.3) для  $I_{dir}^N$  выражения

получаем для  $I_{dir}^N$  выражение:

Результаты подбора параметров аналитической модели (8.2.6) для вычисления информации по ур.(8.2.7) приведены на рис.8.7 вместе с численными результатами. Видно, что нелинейная зависимость информации от параметра асимметрии аналогична для обеих, численной и аналитической, моделей. Критериями подбора были как качественное совпадение, так и количественное совпадение максимальной величины  $I_{dir}^N(h_\infty)$  при  $\alpha=1-A=0,1$ . Наилучшее совпадение достигается при  $\gamma=1/2$ .

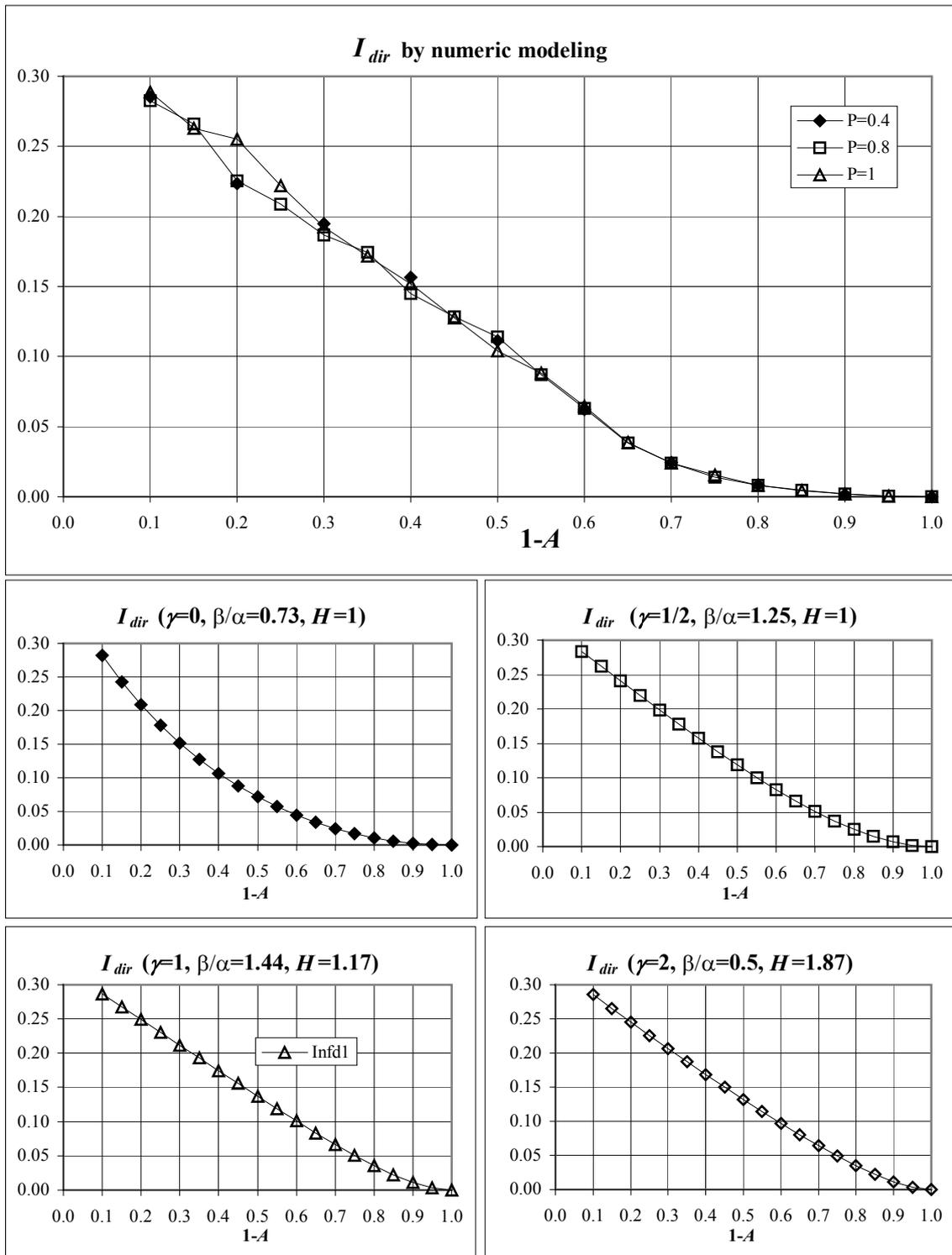


Fig.8.6. Fitting the parameters of the analytic model (8.2.6) to calculate direct transform information by particle numbers as it is done in numeric model of asymmetric membrane.

Рис.8.6. Подбор параметров аналитической модели (8.2.6) для вычисления прямой информации преобразования по числу частиц, как это делается в численной модели асимметричной мембраны.

Thus, on the one hand, by the numeric results, the saturation information value is determined only by the value of asymmetry parameter, on the other hand, by the analytic results, asymmetry parameter can be related to the rate of information production in the system. This makes us to conclude that *information generated by our model systems and information generation rate are completely determined by the asymmetry.*

### 8.2.5. Concluding remarks

Our numeric experiments start with a uniform distribution of particles and their kinetic energy. Then we observe the nonlinear particle redistribution process (with saturation) due to the inserted asymmetry of the membrane. This process does not take place for the symmetric membrane.

Thus information generation is only due to the presence of asymmetry in the structure of our model system and its value does not depend on other model parameters. *The resulted values of DMTI and IMTI calculated by "observable" quantities are the quantitative measures of structural information in our model system.* They are like the latent entropies of gas-liquid and liquid-crystal (increasing asymmetry) transitions discussed in Sec.8.1, because to reach saturation takes approximately 1000-2000 pair collisions (per one particle) and this is a

Таким образом, с одной стороны, в соответствии с численными результатами, величина насыщения информации определяется только величиной параметра асимметрии, с другой стороны, в соответствии с аналитической моделью, параметр асимметрии может быть соотнесен со скоростью генерации информации в системе. Это приводит нас к заключению, что *информация, генерируемая нашей модельной системой, и скорость производства информации полностью определяются асимметрией.*

### 8.2.5. Заключительные замечания

Наши численные эксперименты начинались с однородного распределения частиц и их кинетической энергии. Затем мы наблюдали нелинейное перераспределение частиц (до насыщения), обусловленное введенной асимметрией мембраны. Этот процесс не имеет места при симметричной мембране.

Таким образом, производство информации обусловлено только наличием асимметрии в структуре нашей модельной системы, и его величина не зависит от других параметров модели. *Полученные в результате величины ИППИ и ИОПИ, вычисленные по "наблюдаемым" характеристикам, являются количественными мерами структурной информации нашей модельной системы.* Они играют роль скрытых энтропий в переходах "газ-жидкость" и "жидкость-кристалл" (увеличивающаяся асимметрия), обсуждавшихся в подразделе 8.1, поскольку достижение насыщения про-

very rapid process at the gas-dynamic time scale. In our model system, entropy changes *after* the asymmetry is «inserted» into the system. If we take into account the heat exchange with environment at the (initial) temperature  $T$ , entropy increase would be positive, Fig.8.7 (except some cases for the non-physical ideal membrane penetration, the decrease being lesser than accuracy of calculation, see mean square deviations in Figs. 8.4, 8.5).

исходит за время примерно 1000-2000 парных столкновений (на одну частицу), а это является очень быстрым процессом на газодинамической временной шкале. В нашей модельной системе энтропия изменяется *после* того, как асимметрия "внесена" в систему. Если мы примем во внимание теплообмен с окружением, находящимся при (начальной) температуре  $T$ , увеличение энтропии будет положительным, рис.8.7 (за исключением нефизических случаев идеальной проницаемости мембраны, причем отрицательное приращение меньше чем точность вычислений, даваемая величиной среднеквадратичных отклонений на рис. 8.4, 8.5).

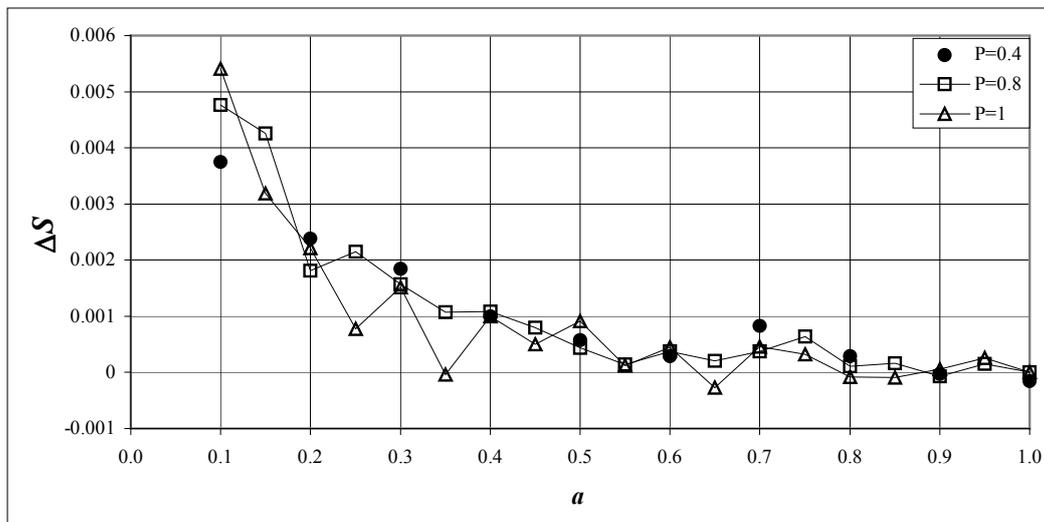


Fig.8.7. Entropy increase (per particle, undimensioned) due to the heat exchange of numeric model system with environment at the same initial temperature as was the system before asymmetry was introduced. This increase is always lesser that calculation accuracy given by mean square deviations of informations.

Рис.8.7. Увеличение энтропии(на частицу, обезразмерено) при учете теплообмена в численной модели при учете теплообмена с окружением при той же начальной температуре, при которой находилась система до внесения асимметрии.. Это увеличение всегда меньше точности вычислений, даваемой среднеквадратичным отклонением информации.

For such a heat exchange the temperatures of the both part of our model system would be equal, but particle numbers - not. This does not contradict the second law of thermodynamics, because we first introduce the asymmetry, i.e. structural information decreasing entropy, in the system "by hand" and then observe how it effects the "observable" characteristics of the system. IMTI and DMTI are the measures of this effect.

The main contribution to the entropy change is due to redistribution of particles, but not due to temperatures. Hence we can not consider this model as a modification of Maxwell's demon [33-51], see Fig.8.3. We can not reference to the Loschmidt demon [38,52] as well because we do not reverse all the velocities simultaneously. Both these demons were actually the ways to think of what would happen if we would introduce asymmetry in the system in one way or another. In our case the role of demon is played by the membrane asymmetry which does not require any information transmission or processing to account for its action [35,14,15]. *Asymmetries, unlike the demons, function statistically.*

### 8.3. Whether is the *perpetuum mobile* so impossible?

Being skillful in thermodynamics, we strongly *believe* that *perpetuum mobile* is impossible. Neither one of the first kind, nor of the second. But...

We use the tidal waves to gen-

При таком учете теплообмена температуры в разных частях системы сравниваются, а числа частиц - нет. Это не противоречит второму закону термодинамики, поскольку мы *сначала* вносим асимметрию, т.е. структурную информацию, уменьшающую энтропию, в систему "от руки", и *затем* наблюдаем, как это влияет на наблюдаемые характеристики системы. *ИППИ и ИОПИ* являются мерами этого эффекта.

Главный вклад в изменение энтропии обусловлен перераспределением частиц, а не их температуры. Поэтому мы не можем рассматривать нашу численную модель как модификацию демона Максвелла [33-51], см. рис.8.3. Мы не можем также ссылаться на демона Лошмидта [38,52], потому что мы не меняем направление всех скоростей одновременно. Оба этих демона были фактически введены как способы обдумывания последствий внесения в систему асимметрии тем или иным образом. В нашем случае роль демона выполняет асимметрия мембраны, которая не требует какого либо учета обработки или переноса информации [35,14,15] для объяснения своего действия. *Асимметрии, в отличие от демонов, функционируют статистически.*

### 8.3. Так ли уж невозможен вечный двигатель ?

Будучи умудренными термодинамикой, мы твердо *верим*, что вечный двигатель невозможен. Ни первого рода, ни второго. Но...

Мы используем приливные

erate electric power. These waves are due to the presence of the Moon - the only satellite of the Earth. At the scale of solar system, to have only one satellite is not the typical situation, see Table 8.3.1. In the case of absence of the Moon we could not use the tidal waves. Whether could we use the tidal waves in the case of several satellites? It is not clear. Thus we can consider our situation of having only one Earth's satellite as a random one, or a large scale fluctuation.

волны для генерации электрической энергии. Эти волны обусловлены присутствием Луны - единственного спутника Земли. На масштабе Солнечной системы наличие только одного спутника является не типичным, см табл. 8.3.1. В случае отсутствия Луны, мы не могли бы использовать приливные волны. Могли бы мы использовать их при наличии нескольких спутников? Неизвестно. Таким образом, мы можем рассматривать нашу ситуацию с одним спутником Земли как случайную, или как флуктуацию очень большого масштаба.

Table 8.3.1. The number of satellites of the planets

Таблица 8.3.1. Числа спутников различных планет

Planet Планета	Number of satellites Число спутников	Planet Планета	Number of satellites Число спутников
Mercury\Меркурий	0	Saturn\Сатурн	18
Venus\Венера	0	Uranus\Уран	15
Earth\Земля	1	Neptune\Нептун	8
Mars\Марс	2	Pluto\Плутон	1
Jupiter\Юпитер	16	Average number Среднее число	6.78

The tidal waves arrive and elapse. They bring and take away their kinetic energy. The possibility to transform their energy into the electric power is due to the asymmetry of man-made devices - the generators providing useful power output from the symmetric natural phenomenon. We can say that something like ratchet mechanism enables us to get energy from the symmetric wave process occurring at a rather large space and time scale. Undoubtedly, presence of

Приливные волны приходят и уходят. Они приносят и уносят свою кинетическую энергию. Возможность преобразовывать эту энергию в электрическую определяется асимметрией искусственных приборов - генераторов, обеспечивающих полезный выход энергии из симметричного природного явления. Мы можем сказать, что нечто вроде храпового механизма позволяет нам извлекать энергию из симметричного волнового процесса, происходящего на довольно больших временных и пространственных масштабах. Несомненно,

only one satellite is a fluctuation at a very large time scale but some microscopic (at this scale) beings use the resulted effects in their own purposes by introducing asymmetry into the natural symmetric wave processes.

Since the ancient times humankind uses the energy of the wind by, for example, windmills. This example is "more statistical" because the wind direction can change in a wide range. We could think that at every given location there is some prevailing wind direction and the problem is to dispose the given wind device correctly to get wind power. But a sailing vessel can move by tacks using energy of even contrary wind and the energy expenses necessary to control sailing vessel are much lesser than the resulting energy output. Thus the sense of wind direction is not important. Important is fabric of wind device allowing to transfer fluctuating wind energy into the useful work. Generally, the blades, sails, etc. of such devices/installations/machines are arranged in such a way that either the geometrical structure of the devices have some broken symmetry, for example, with respect to mirror reflection, or they use natural gradients of wind velocity near the Earth's surface. Again, at the scale of the whole Earth's atmosphere, wind is a result of energy fluctuations and we use this energy in our purposes owing to the broken symmetry built in our machines in one

мненно, наличие только одного спутника является флуктуацией на очень большой временной шкале, но некоторые микроскопические (на этой шкале) существа используют результирующие эффекты в своих собственных целях, вводя асимметрию в естественные волновые процессы.

С древних времен человечество использует энергию ветра с помощью, например, ветряных мельниц. Этот пример является "более статистическим", потому что направление ветра изменяется в широком диапазоне. Мы могли бы думать, что при данном местоположении имеется некоторое преимущественное направление ветра, и проблема состоит в том, чтобы правильно расположить данную ветровую установку, чтобы извлекать энергию ветра. Но парусник может двигаться галсами, используя энергию встречного ветра, при этом энергетические потери на управление парусника много меньше результирующего энергетического выхода. Таким образом, направление ветра не важно. Важной является структура устройства, позволяющего трансформировать флуктуирующую энергию ветра в полезную работу. В общем случае, лопасти, паруса, и пр. таких устройств/установок/машин располагаются таким образом, что либо геометрическая структура устройств имеет некоторую нарушенную симметрию, например, по отношению к зеркальному отражению, либо они используют естественные градиенты скорости ветра возле поверхности Земли. Опять же, на масштабе земной атмосферы в целом, ветер является результатом флуктуаций энергии, и мы

way or another.

From the above examples we see that asymmetry can function like a ratchet mechanism fixing the effects of spontaneous symmetry breaking and accumulating the energy of fluctuations. Nowadays we can use only the energy of fluctuations at rather large space (wind) and time (tides) scales. Usually we do not think about such fluctuations as a heat. But, nevertheless, they are merely fluctuations and we can utilize their energy. The problem is what are the limits of this ability (if they exist)? The discussion of this problem was started actually by Maxwell more than century ago who introduced abstractedly some "being who can see individual molecules..." [34] (and who was later called demon by Thomson but Maxwell in his letter to Tait suggested to call the being "**no more a demon but a valve**" [37]) in proving the statistical character of the second law of thermodynamics. Ever since this discussion continues, [33-51,14,15] and many others. We do not discuss here all the aspects of Maxwell's demon paradigm. We would like only to note that "Things do not change, we do" (H.D. Thoreau). Maxwell wrote about the possibility to separate the hydrogen molecules of different masses [34], bottom paragraph on p.329: "...this cannot be done...", but now humankind has some problems due to its ability to

используем их энергию в своих целях, благодаря нарушенной симметрии, встроеной в наши машины тем или иным способом.

Из примеров выше мы видим, что асимметрия может действовать по типу храпового механизма, фиксируя эффекты спонтанного нарушения симметрии, и накапливая энергию флуктуаций. На сегодняшний день мы можем использовать энергию флуктуаций на довольно больших пространственных (ветер) и временных (приливы) масштабах. Обычно, мы не думаем о таких флуктуациях как о тепле. Но, тем не менее, они являются всего лишь флуктуациями, и мы можем использовать их энергию. Проблема состоит в том, каковы пределы этой способности (если они существуют)? Обсуждение этой проблемы фактически было начато более столетия назад Максвеллом, который абстрактно ввел в рассмотрение "существо, которое может видеть отдельные молекулы..." [34] (и которое позже Томсон назвал демоном, но Максвелл в его письме Тейту предложил называть существо "**далее не демоном, а клапаном**" [37]) при доказательстве статистического характера второго закона термодинамики. С тех пор это обсуждение продолжается, [33-51,14,15] и многие другие. Мы не будем обсуждать здесь все аспекты парадигмы демона Максвелла. Мы хотели бы только заметить, что "Мир не меняется, меняемся мы" (Торо). Максвелл писал о возможности разделять молекулы водорода различной массы [34], нижний абзац на стр.329: "...этого сделать нельзя...", но сегодня человечество имеет некоторые проблемы из-за

separate the isotopes, in that number ones of the lighter elements. We would like also to remind some thoughts by Bridgman [36].

(i) "...although it is assumed that the distinction between heat and work is possible, no directions are usually given as to how the distinction is to be made in the laboratory, but the matter is left to the instinct of experimenter... We do by saying that we still have conservation in such cases (when we deal with heat and work together rather than separately) and that we can no longer distinguish a stream of thermal energy and a stream of mechanical energy entering the body, the two streams merge into a stream of generalized energy. No instrument responds to this stream of generalized energy."

(ii) "Is it possible by ingenious enough construction to violate the second law of thermodynamics on an industrially profitable scale? ... The answer is not to be found in the completely random character of the small-scale fluctuations, for it is possible on a larger scale to extract useful energy from the completely random motion of waves in the sea, for example. This can be done by the use of a ratchet mechanism. We have to ask why a ratchet mechanism is impossible on a scale small enough to deal with fluctuations? It is no answer to say that the ratchet would be subject to fluctuations..."

своей способности разделять изотопы, в том числе легких элементов. Мы хотели бы также напомнить некоторые мысли Бриджмена [36].

1) "...хотя предполагается, что различие между теплом и работой возможно, обычно не дается никаких рекомендаций, как проводить это различие в лаборатории, и решение вопроса доверяется инстинкту экспериментатора... Мы выходим из положения, говоря, что мы по-прежнему имеем сохранение в таких случаях (когда мы имеем дело с теплом и работой вместе, а не отдельно), и что мы не можем больше различать поток термической энергии и поток механической энергии, входящих в тело, и два потока соединяются в поток обобщенной энергии. Никакой экспериментальный инструмент не отвечает этому потоку обобщенной энергии".

2) "Возможно ли создание достаточно изощренного устройства, для обхода второго закона термодинамики на промышленно пригодном масштабе? ... Ответ не следует искать в полностью случайном характере флуктуаций малого масштаба, учитывая, что возможно, на большей масштабной шкале, извлекать полезную энергию из полностью случайного движения волн на море, например. Это можно делать с помощью храпового механизма. Нам следует спросить, почему храповой механизм невозможен на масштабе, достаточно малом, чтобы иметь дело с флуктуациями? Не будет ответом заявление, что храповой механизм был бы подвержен флуктуациям..."

(iii) "It is possible to generalize the entropy concept for some simple systems subject to essential irreversibility of this sort, and to find the specific form of the entropy function in terms of the parameters of state by imposing the requirements that the total entropy of the universe must increase for every possible method of coupling the systems with external universe and for every possible displacement. I believe that in general the analysis of such systems will be furthered by the recognition of a new type of large scale thermodynamic parameter of state, namely the parameter of state which can be measured but not controlled, and the equation of state in terms of new parameter."

It should be noted that there are some propositions of how to distinguish the heat (thermal energy) and mechanical (stored) energy [39]. Nevertheless, the citations above second our proposition to distinguish structural information from physical entropy in the phase transitions in Sec.8.2. We propose further that the asymmetry parameter is to be new **"large scale thermodynamic parameter of state which can be measured but not controlled."** As we can see from the numeric experiment with asymmetric membrane, internal asymmetry of this model system does result in the decrease in its "external", "manifested" entropy. The examples of tidal waves and wind also reference to the asymmetric structures of man-

3) "Возможно обобщение понятия энтропии для некоторых простых систем, подверженных существенной необратимости этого типа, и найти частную форму энтропийной функции параметров состояния при наложении требований, что общая энтропия Вселенной должна увеличиваться для любого возможного способа приведения систем в контакт с окружающей Вселенной и для любого возможного перемещения. Я уверен, что в общем анализ таких систем будет углублен введением нового типа параметра состояния на большом масштабе, а именно, параметра состояния, который может быть измерен, но не контролируем, и уравнения состояния, включающего новый параметр".

Следует отметить, что имеются некоторые предложения для различения тепла (тепловой энергии) и механической (запасаемой) энергии [39]. Тем не менее, цитаты выше поддерживают наше предложение отличать структурную информацию от физической энтропии в фазовых переходах в п.8.2. Мы предполагаем дальше, что параметр асимметрии должен являться новым **"параметром состояния на большом масштабе, а именно, параметром состояния, который может быть измерен, но не контролируем"**. Как мы можем видеть из численного эксперимента с асимметричной мембраной, внутренняя асимметрия этой модельной системы действительно приводит к уменьшению "внешней", "показательной" энтропии. Примеры с приливными волнами и ветром также

made constructions. The asymmetries (and their decay) of semiconductor p-n-transitions (with nonlinear characteristics) also result in the measurable thermal effects [11-13,17], for example, the thermoelectric (Seebeck and Peltier) effect [11-13]. We know also thermomagnetic (Ettingshausen) effect resulting in the heat transfer [11-13] due to the asymmetry introduced by magnetic field and (perpendicular) electric current. Thomson effect results in heat absorption or liberation in the solids with temperature gradient and electric current [12]. All these effects are due to the internal asymmetry of the constructions used which can be related to their structural information. In extensive monograph by Florensky (1924) [11] numerous other measurable physical effects were described in the relation to internal molecular, electron, etc. structure features of substances.

As was mentioned in Sec.8.2, reality of the mechanical model of asymmetric membrane is determined by ability of modern technology to produce the membranes with large number of small enough (1 mcm) asymmetric conical openings and this ability is accessible. If we would be able to produce such membranes we could use the constructions with several (many) parallel and sequential membranes to produce the pressure difference significant to make some additional device, something

ссылаются на асимметричные структуры искусственных конструкций. Асимметрии (и их распад) полупроводниковых p-n-переходов (с нелинейными характеристиками) так же дают измеримые термические эффекты [11-13,17], например, термоэлектрический (Зеебека и Пельтье) эффект [11-13]. Нам известны также термомагнитный (Эттингзхаузен) эффект, приводящий к теплопереносу [11-13] в силу асимметрии, вносимой магнитным полем и (перпендикулярным) электрическим током, эффект Томсона, приводящий к поглощению или выделению тепла в твердых телах при наличии градиента температуры и электрического тока [12]. Все эти эффекты обусловлены внутренней асимметрией используемых конструкций, которая может быть соотнесена с их структурной информацией. В обширной монографии Флоренского (1924 г.) [11] были описаны многочисленные другие измеримые физические эффекты в их соответствии с внутренними молекулярными, электронными, и т.д. структурными особенностями веществ.

Как упоминалось в п.8.2, реальность механической модели асимметричной мембраны определяется возможностью современной технологии производить мембраны с большим количеством достаточно малых (1 мкм) асимметричных конических отверстий и эта возможность достижима. Если бы мы были способны производить такие мембраны, мы могли бы использовать конструкции с несколькими (многими) параллельными и последовательными мембранами для производства разности давлений, достаточного для того,

like a small turbine, to do useful work being disposed in a pipe connecting the two vessels separated by the membranes. Expanding gas from the vessel with greater pressure, producing useful work, in such a "machine" would become cool and then would be heated by the heat exchange with environment, pressed by the "battery" of membranes, etc. in a cycle. In such a machine the external environmental heat would be transformed into the structural information and then into the useful work:  $\Delta Q \rightarrow \Delta I \rightarrow W$ . The reader could say that this is one more naive project of *perpetuum mobile* of the second kind. But this hypothetical device does not disobey the second law of thermodynamics because it does not require the entropy to be decreased without energy expenses. As we have shown in Fig.8.7, the entropy change due to the heat exchange in the case of model membrane is positive. The structural information increases due to the internal asymmetry producing the difference in particle numbers, or concentrations, simply by fixing and accumulating their local fluctuations near the membrane (the fluctuations of particle positions and velocity directions). This is merely a hypothetical model construction, or at least a romantic dream to solve a problem of a hotbed effect. But the tidal electrostations and wind devices/machines are actually implementations of the idea to accumulate fluctuation energy, and there are some other reasons to think about the model above

чтобы заставить другой прибор, что-нибудь типа малой турбины, производить полезную работу, будучи помещенным в трубку, соединяющую два сосуда, разделенные мембранами. Расширяющийся газ из сосуда с большим давлением, производя полезную работу, в такой "машине" охлаждался бы и затем нагревался бы благодаря теплообмену с окружением, сжимался бы "батареей" мембран, и т.д. в цикле. В такой машине внешнее тепло окружающей среды превращалось бы в структурную информацию и затем в полезную работу:  $\Delta Q \rightarrow \Delta I \rightarrow W$ . Читатель мог бы сказать, что это еще один наивный проект вечного двигателя второго рода. Но этот гипотетический прибор не нарушал бы второй закон термодинамики, потому что он не требует уменьшения энтропии без затрат энергии. Как показано на рис.8.7, изменение энтропии при теплообмене в случае модельной мембраны положительно. Структурная информация увеличивается в силу внутренней асимметрии, производящей разницу в числах частиц, или концентраций, просто фиксацией и накоплением их локальных флуктуаций вблизи мембраны (флуктуаций положений частиц и направлений скорости). Это всего лишь гипотетическая модельная конструкция, или по крайней мере романтическая мечта решить проблему парникового эффекта. Но приливные электростанции и ветровые приборы/машины являются фактическими воплощениями идеи аккумуляции энергии флуктуаций, и имеются еще некоторые другие причины думать об этой модели более серьезно.

more seriously.

As is known, the ways of symmetry breaking in the solids are numerous. There are the reports of the devices converting the thermal ("disordered") energy into the electrical ("ordered") one and that are able to do useful work [53,54]. Such devices were constructed on the base of the crystals with nonlinear electric characteristics, namely, the ferroelectric crystals. In ref. [53] by Hoh a converter of "uncollected solar radiation" into electric energy is described. "Uncollected" seems to mean something like heat, or almost. The device was constructed of the plates of ferroelectric material periodically exposed to the light.

In ref.[54] by Zaev a detailed report is presented describing the results of thermal measurements of the energy conversion during the "charge-discharge" cycles of nonlinear capacities. The capacity index of such nonlinear elements depends on the voltage, and, therefore the accumulated electric charge depends on the applied voltage nonlinearly. In the subsequent "charge-discharge" cycles this nonlinearity results in the greater discharge energy with cooling of the dielectric inside capacity, and this initiates the heat exchange with environment. That is, at the first glance, external heat is converted into electric power due to the nonlinear properties of dielectric inside the capacity. In the both works [53,54] the nonlinear properties of ferroelectric materials were used.

Как известно пути нарушенной симметрии в твердых телах неисповедимы. Есть описания приборов, преобразующих термическую ("неупорядоченную") энергию в электрическую ("упорядоченную") и способных производить полезную работу [53,54]. Такие приборы были сконструированы на основе кристаллов с нелинейными электрическими характеристиками - сегнетоэлектрических кристаллов. В работе Хоха [53] описан конвертер "несосредоточенной солнечной радиации" в электрическую энергию. "Несосредоточенной", по-видимому, должно означать что-либо типа тепла, или почти. Прибор был сделан из пластин сегнетоэлектрического материала, периодически подвергаемых действию света.

В работе Заева [54] представлен подробный отчет о результатах термических измерений преобразований энергии в процессе циклов "зарядка-разрядка" нелинейных емкостей. Величина емкости таких нелинейных элементов зависит от напряжения, и поэтому накопленный электрический заряд зависит от приложенного напряжения нелинейно. В последовательных циклах "зарядка-разрядка" эта нелинейность приводит к большей энергии разрядки и охлаждению диэлектрика внутри емкости, и это инициирует теплообмен с окружением. Т.е. на первый взгляд, наружное тепло превращается в электрическую энергию благодаря нелинейным свойствам диэлектрика внутри емкости. В обеих работах [53,54] использовались нелинейные свойства сегнетоэлектрических материалов.

As was noted above, most of physical systems with broken symmetry seems to behave nonlinearly. But the nonlinear properties of ferroelectrics are due to the spontaneous polarization of dielectric below the critical (Curie) temperature (which is lesser than 100-120°C). The spontaneous polarization is, in its turn, due to the internal asymmetry of the crystal lattice cells below the critical temperature. This can be described using the famous Barium titanate  $\text{BaTiO}_3$  crystal as follows [55,56]. Above the critical temperature this is a crystal of cubic cells (cubic crystal) with  $\text{Ba}^{+2}$ -ions at the corners,  $\text{Ti}^{+4}$ -ions at the center, and  $\text{O}^{2-}$ -ions at the centers of the faces of the cell. In spite of vibrational movement of the ions near their described mean equilibrium positions, this cell is symmetric in average (Fm3m for the face centered cells (fcc), or Im3m for the body centered cells (bcc) [7-9]) and therefore there is no spontaneous ion polarization. When temperature decreases below the critical value, the  $\text{Ti}^{+4}$ -ions shift from their central positions in such a way that all the neighboring Ti-O-chains are polarized in the same direction. The effects of this type occur in all ferroelectric crystals  $\text{ABO}_3$  like  $\text{PbTiO}_3$ ,  $\text{CdTiO}_3$ ,  $\text{PbZrO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{CaSnO}_3$ , and can be reinforced by the use of the solid solutions such as  $\text{BaTiO}_3$ - $\text{PbTiO}_3$ - $\text{BaSnO}_3$  that results in additional SB in the system. And thus it is the internal asymmetry of the solids (not controlled) that results in its nonlin-

Как было замечено выше, большинство физических систем с нарушенной симметрией, по-видимому, ведут себя нелинейно. Но нелинейные свойства сегнетоэлектриков обусловлены спонтанной поляризацией диэлектрика ниже критической температуры Кюри (менее 100-120°C). Спонтанная поляризация, в свою очередь, обусловлена внутренней асимметрией ячеек кристаллической решетки ниже критической температуры. Это можно пояснить на примере кристаллов знаменитого титаната бария  $\text{BaTiO}_3$  [55,56]. Выше критической температуры это кубический кристалл с ионами  $\text{Ba}^{+2}$  по углам, ионами  $\text{Ti}^{+4}$  в центре ячейки и ионами  $\text{O}^{2-}$  в центре граней ячейки. Несмотря на колебательное движение ионов около своих средних положений равновесия, эта решетка в среднем остается симметричной (Fm3m для гранецентрированных ячеек (гцк), или Im3m для объемно центрированных ячеек (оцк) [7-9]), и поэтому спонтанная ионная поляризация отсутствует. При уменьшении температуры ниже критической точки ионы  $\text{Ti}^{+4}$  смещаются из своих центральных положений таким образом, что соседние цепочки ионов Ti-O поляризуются одинаково. Эффекты этого типа происходят во всех сегнетоэлектрических кристаллах  $\text{ABO}_3$  типа  $\text{PbTiO}_3$ ,  $\text{CdTiO}_3$ ,  $\text{PbZrO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{CaSnO}_3$ , и могут быть усилены использованием твердых растворов, таких как  $\text{BaTiO}_3$ - $\text{PbTiO}_3$ - $\text{BaSnO}_3$ , что приносит дополнительную НС в систему. И таким образом, внутренняя асимметрия твердых тел (не управляемая) приводит к нелинейным электрическим свойствам, а по-

ear electric properties, and the latter can be used to convert heat into electric power. This is quite similar to the hypothetical model device described above. Internal asymmetry produces the structural information (polarization) which converts the heat into the useful work in the cycles of energy exchange with environment. The difference of the solids based devices is that this conversion is not mediated by some additional working body like vapor or liquid.

We do not propose here any new projects of *perpetuum mobile*, but only show that *such devices/machines already exist*, and their action can not be explained in the scope of traditional thermodynamics without introduction of additional concepts. (The steam engines had been used before 1824 (S. Carno) without any rigorous enough theory.) We propose to use for these purposes the concept of structural information in the described above sense as one of the manifestations of internal asymmetries of natural systems.

следние могут быть использованы для превращения тепла в электрическую энергию. Это очень похоже на модельный гипотетический прибор, описанный выше. Внутренняя асимметрия производит структурную информацию (поляризацию), которая превращает тепло в полезную работу в циклах энергетического обмена с окружающей средой. Отличие приборов на основе твердых тел состоит в том, что превращение не опосредуется некоторым дополнительным рабочим телом типа жидкости или пара.

Мы не предлагаем здесь каких-либо новых проектов вечного двигателя, но только показываем, что *такие приборы/машины уже существуют*, а их действие не может быть объяснено в терминах традиционной термодинамики без введения дополнительных концепций. (Паровые машины использовались до 1824 г. (Карно) без какой-либо достаточно строгой теории.) Мы предлагаем использовать для этих целей понятие структурной информации в описанном выше смысле, как одного из проявлений внутренних асимметрий естественных систем.

## 8.4. Appendix (Tables of data used and some numeric results)

## 8.4. Аппендикс (Таблицы использованных данных и некоторых численные результаты)

Table 8.4.1. The data on critical temperatures and latent heats at normal atmospheric pressure 0.1 MPa for melting ( $m$ ) and evaporation ( $v$ ) from the scholar handbook [22], see Fig.8.1.

Таблица 8.4.1. Данные по критическим температурам и скрытым теплотам при нормальном атмосферном давлении 0.1 МПа при плавлении ( $m$ ) и испарении ( $v$ ) из школьного справочника [22], см. рис.8.1.

Substance	$\Delta S_m$ , kJ/K/kg кДж/К/кг	$\Delta S_v$ , kJ/K/kg кДж/К/кг	$T_m$ , К	$\Delta Q_m$ , kJ/kg кДж/кг	$T_m$ , С	$T_v$ , К	$\Delta Q_v$ , kJ/kg кДж/кг	$T_v$ , С
Organics (ORG in Fig.8.1) Органика								
Naphthalene\Нафталин	0.4274	0.6436	353.3	151	80.3	491	316	218
Toluene\Толуол	0.4053	0.9513	177.9	72.1	-95.1	383.7	365	110.7
Glycerine\Глицерин	0.6050	1.4654	290.9	176	17.9	563	825	290
Benzol\Бензол	0.4560	1.1212	278.5	127	5.5	353.2	396	80.2
Acetone\Ацетон	0.5384	1.5917	178.3	96	-94.7	329.2	524	56.2
Alcohol\Спирт	0.6604	2.4082	159	105	-114	351.3	846	78.3
Water\Вода	1.2234	6.0590	273	334	0	373	2260	100
Pure metals (PM in Fig.8.1) Чистые металлы								
Bi	0.0919	0.4664	544	50	271	1833	855	1560
Hg	0.0501	0.4526	234.1	11.73	-38.9	629.7	285	356.7
Na	0.3996	3.6505	282.8	113	9.8	1156	4220	883
Al	0.3844	3.5834	931.3	358	658.3	2573	9220	2300
Li	1.3682	12.8931	459	628	186	1590	20500	1317
Mg	0.4037	3.9608	924	373	651	1376	5450	1103
Sn	0.1171	1.1876	504	59	231	2543	3020	2270
Au	0.0498	0.5125	1337.4	66.6	1064.4	3073	1575	2800
K	0.1804	2.0136	337	60.8	64	1033	2080	760
Pb	0.0375	0.4350	600.3	22.5	327.3	2023	880	1750
Fe	0.1625	1.8959	1803	293	1530	3323	6300	3050
Cu	0.1578	2.0547	1356	214	1083	2633	5410	2360
Ag	0.0713	0.9565	1234.9	88	961.9	2457	2350	2184
Ni	0.1591	2.2029	1725	274.5	1452	3273	7210	3000

Table 8.4.2. The data on the critical temperatures and latent enthalpies at normal atmospheric pressure 0.1 MPa for melting ( $m$ ) and evaporation ( $v$ ) by refs.[23,24]. The latent entropies were calculated in two ways in natural units of universal gas constant, and in specific units per mass, see Fig.8.2.

Таблица 8.4.2. Данные по критическим температурам и скрытым энтальпиям при нормальном атмосферном давлении 0.1 МПа при плавлении ( $m$ ) и испарении ( $v$ ) по справочникам [23,24]. Скрытые энтропии были вычислены как в натуральных единицах универсальной газовой постоянной, так и удельных единицах на массу, см. рис.8.2.

						C <sup>12</sup> /12			kJ/mol кДж/м оль	kJ/mol кДж/м оль	R=0.00831 kJ/K/mol кДж/К/моль		kJ/kg/K кДж/К/к г	kJ/kg/K кДж/К/кг
Symb	N	Row	Per	Gr1	Gr2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
H2	1	1	1	7	17	1.008	14.01	20.28	0.12	0.904	1.031	5.364	8.497	44.222
Li	3	2	2	1	1	6.941	453.69	1620	3.01	148.1	0.798	11.001	0.956	13.171
Na	11	3	3	1	1	22.99	370.96	1156.1	2.64	89.04	0.856	9.268	0.310	3.350
K	19	4	4	1	1	39.098	336.8	1047	2.4	77.53	0.858	8.911	0.182	1.894
Rb	37	6	5	1	1	85.468	312.2	961	2.2	69.2	0.848	8.665	0.082	0.843
Cs	55	8	6	1	1	132.905	301.55	951.6	2.09	65.9	0.834	8.334	0.052	0.521
Cu	29	5	4	1	11	63.546	1356.6	2840	13	304.6	1.153	12.907	0.151	1.688
Ag	47	7	5	1	11	107.868	1235.08	2485	11.3	255.1	1.101	12.353	0.085	0.952
Au	79	9	6	1	11	196.967	1337.58	3080	12.7	324.4	1.143	12.674	0.048	0.535
Symb	N	Row	Per	Gr1	Gr2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
He	2	1	1	8	18	4.003	0.95	4.216	0.021	0.082	2.660	2.341	5.522	4.859
Be	4	2	2	2	2	9.012	1551	3243	9.8	308.8	0.760	11.459	0.701	10.566
Mg	12	3	3	2	2	24.305	922	1363	9.04	128.7	1.180	11.363	0.403	3.885
Ca	20	4	4	2	2	40.078	1112	1757	9.33	149.95	1.010	10.270	0.209	2.129
Sr	38	6	5	2	2	87.62	1042	1657	9.16	138.91	1.058	10.088	0.100	0.957
Ba	56	8	6	2	2	137.327	1002	1910	7.66	150.9	0.920	9.507	0.056	0.575
Ra	88	10	7	2	2	226.025	973	1807	7.15	136.8	0.884	9.110	0.033	0.335
Zn	30	5	4	2	12	65.39	692.73	1180	6.67	115.3	1.159	11.758	0.147	1.494
Cd	48	7	5	2	12	112.411	594.1	1038	6.11	99.87	1.238	11.578	0.091	0.856
Hg	80	9	6	2	12	200.59	234.28	629.73	2.331	59.15	1.197	11.303	0.050	0.468

Table 8.4.2. Continued.

Таблица 8.4.2. Продолжение.

Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
<b>La</b>	57	8	6	3	3	138.906	1194	3730	10.04	399.6	1.012	12.892	0.061	0.771
Ce	58	8	6	3	3	140.155	1050	3173	12.9	313.8	1.478	11.901	0.088	0.706
Pr	59	8	6	3	3	140.908	1204	3400	11.3	332.6	1.129	11.772	0.067	0.694
Nd	60	8	6	3	3	144.24	1294	3341	14.67	283.7	1.364	10.218	0.079	0.589
Sm	62	8	6	3	3	150.36	1623	2064	10.9	191.6	0.808	11.171	0.045	0.617
Eu	63	8	6	3	3	151.965	1095	1870	10.5	175.7	1.154	11.307	0.063	0.618
Gd	64	8	6	3	3	157.25	1586	3539	15.5	311.7	1.176	10.599	0.062	0.560
Tb	65	8	6	3	3	158.925	1629	3073	16.3	391	1.204	15.311	0.063	0.801
Dy	66	8	6	3	3	162.5	1685	2835	17.2	293	1.228	12.437	0.063	0.636
Ho	67	8	6	3	3	164.93	1747	2968	17.2	251	1.185	10.177	0.060	0.513
Er	68	8	6	3	3	167.26	1802	3136	17.2	292.9	1.149	11.239	0.057	0.558
Tm	69	8	6	3	3	168.934	1818	2220	18.4	247	1.218	13.389	0.060	0.659
Yb	70	8	6	3	3	173.04	1097	1466	9.2	159	1.009	13.052	0.048	0.627
Lu	71	8	6	3	3	174.967	1936	3668	19.2	428	1.193	14.041	0.057	0.667
Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
<b>Ac</b>	89	10	7	3	3	227	1320	3470	14.2	293	1.295	10.161	0.047	0.372
Th	90	10	7	3	3	232.038	2023	4473	15.65	543.9	0.931	14.633	0.033	0.524
Pa	91	10	7	3	3	231.036	2113	4300	16.7	481	0.951	13.461	0.034	0.484
U	92	10	7	3	3	238.029	1405.5	4173	19.7	412	1.687	11.881	0.059	0.415
Np	93	10	7	3	3	237.048	913	4175	9.46	336.6	1.247	9.702	0.044	0.340
Pu	94	10	7	3	3	244	914	3505	2.8	343.5	0.369	11.793	0.013	0.402
Am	95	10	7	3	3	243	1267	2880	14.4	238.5	1.368	9.965	0.047	0.341

Table 8.4.2. Continued.

Таблица 8.4.2. Продолжение.

Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
Sc	21	4	4	3	3	44.956	1814	3104	15.9	304.8	1.055	11.817	0.195	2.184
Y	39	6	5	3	3	88.906	1795	3611	17.2	393.3	1.153	13.107	0.108	1.225
B	5	2	2	3	13	10.81	2303	4173	25	538.9	1.306	15.540	1.004	11.946
Al	13	3	3	3	13	26.982	933.52	2740	10.67	293.72	1.375	12.900	0.424	3.973
Ga	31	5	4	3	13	69.723	302.93	2500	5.59	256.1	2.221	12.327	0.265	1.469
In	49	7	5	3	13	114.82	429.32	2353	3.27	226.4	0.917	11.579	0.066	0.838
Tl	81	9	6	3	13	204.383	576.7	1730	4.31	162.1	0.899	11.276	0.037	0.458
Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
Ti	22	4	4	4	4	47.88	1933	3560	20.9	428.9	1.301	14.498	0.226	2.516
Zr	40	6	5	4	4	91.224	2125	4650	23	581.6	1.302	15.051	0.119	1.371
Hf	72	8	6	4	4	178.49	2503	5470	25.5	661.1	1.226	14.544	0.057	0.677
Si	14	3	3	4	14	28.086	1696	2628	46.5	394.5	3.299	18.064	0.976	5.345
Ge	32	5	4	4	14	72.61	1210.6	3103	29.8	334.3	2.962	12.964	0.339	1.484
Sn	50	7	5	4	14	118.71	505.118	2543	7.2	290.4	1.715	13.742	0.120	0.962
Pb	82	9	6	4	14	207.2	600.65	2013	5.121	179.4	1.026	10.725	0.041	0.430
Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
V	23	4	4	5	5	50.942	2160	3650	17.6	458.6	0.981	15.120	0.160	2.466
Nb	41	6	5	5	5	92.906	2741	5015	27.2	696.6	1.194	16.715	0.107	1.495
Ta	73	8	6	5	5	180.948	3269	5698	31.4	753.1	1.156	15.905	0.053	0.730
N2	7	2	2	5	15	14.007	63.29	77.4	0.72	5.577	1.369	8.671	0.812	5.144
P4	15	3	3	5	15	30.974	317.3	553	2.51	51.9	0.952	11.294	0.255	3.030
Sb	51	7	5	5	15	121.75	903.89	1908	20.9	128.2	2.782	8.086	0.190	0.552
Bi	83	9	6	5	15	208.98	544.5	1833	10.48	179.1	2.316	11.758	0.092	0.468

Table 8.4.2. Continued.

Таблица 8.4.2. Продолжение.

Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
Cr	24	4	4	6	6	51.996	2130	2945	15.3	348.78	0.864	14.252	0.138	2.278
Mo	42	6	5	6	6	95.94	2890	4885	27.6	594.1	1.149	14.635	0.100	1.268
W	74	8	6	6	6	183.85	3680	5930	35.2	799.1	1.151	16.216	0.052	0.733
O <sub>2</sub>	8	2	2	6	16	15.999	54.8	90.188	0.444	6.82	0.975	9.100	0.506	4.727
S	16	3	3	6	16	32.066	386	717.82	1.718	96.2	0.536	16.127	0.139	4.179
Se	34	5	4	6	16	78.96	490	958.1	5.42	26.32	1.331	3.306	0.140	0.348
Te	52	7	5	6	16	127.6	722.7	1263	13.5	114.1	2.248	10.871	0.146	0.708
Po	84	9	6	6	16	209	527	1235	10	100.8	2.283	9.822	0.091	0.391
Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
Mn	25	4	4	7	7	54.938	1517	2235	14.4	219.7	1.142	11.829	0.173	1.789
Tc	43	6	5	7	7	98.906	2445	4973	23.81	585.22	1.172	14.161	0.098	1.190
Re	75	8	6	7	7	186.207	3452	5900	38	707.1	1.325	14.422	0.059	0.644
H <sub>2</sub>	1	1	1	7	17	1.008	14.01	20.28	0.12	0.904	1.031	5.364	8.497	44.222
F <sub>2</sub>	9	2	2	7	17	18.998	53.53	85.01	1.556	6.548	3.498	9.269	1.530	4.054
Cl <sub>2</sub>	17	3	3	7	17	35.454	172.17	239.18	6.41	20.4	4.480	10.264	1.050	2.406
Br <sub>2</sub>	35	5	4	7	17	79.904	265.9	331.93	10.8	30	4.888	10.876	0.508	1.131
I <sub>2</sub>	53	7	5	7	17	126.904	386.7	457.5	15.27	41.67	4.752	10.961	0.311	0.718
At <sub>2</sub>	85	9	6	7	17	210	575	610	23.8	90.4	4.981	17.834	0.197	0.706

Table 8.4.2. Continued.

Таблица 8.4.2. Продолжение.

Symb	N	Row	Per	Gr 1	Gr 2	At.Mass	$T_m$ , K	$T_v$ , K	$\Delta H_m$	$\Delta H_v$	$\Delta S_m$ [R]	$\Delta S_v$ [R]	$\Delta S_m$	$\Delta S_v$
Fe	26	4	4	8	8	55.847	1808	3023	14.9	351	0.992	13.972	0.148	2.079
Ru	44	6	5	8	8	101.07	2773	4383	23.7	567.8	1.028	15.589	0.085	1.282
Os	76	8	6	8	8	190.2	3327	5300	29.3	627.6	1.060	14.250	0.046	0.623
Co	27	4	4	8	9	58.933	1768	3143	15.2	382.4	1.035	14.641	0.146	2.065
Rh	45	6	5	8	9	102.906	2239	4233	21.55	495.4	1.158	14.083	0.094	1.137
Ir	77	8	6	8	9	192.22	2683	4403	26.4	563.6	1.184	15.404	0.051	0.666
Ni	28	4	4	8	10	58.69	1726	3005	17.6	371.8	1.227	14.889	0.174	2.108
Pd	46	6	5	8	10	106.42	1825	3413	17.2	393.3	1.134	13.867	0.089	1.083
Pt	78	8	6	8	10	195.08	2045	4100	19.7	510.5	1.159	14.983	0.049	0.638
He	2	1	1	8	18	4.003	0.95	4.216	0.021	0.082	2.660	2.341	5.522	4.859
Ne	10	2	2	8	18	20.18	24.48	27.1	0.324	1.736	1.593	7.709	0.656	3.174
Ar	18	3	3	8	18	39.948	83.78	87.29	1.21	6.53	1.738	9.002	0.362	1.873
Kr	36	5	4	8	18	83.8	116.6	120.85	1.64	9.05	1.693	9.012	0.168	0.894
Xe	54	7	5	8	18	131.29	161.3	166.1	3.1	12.65	2.313	9.165	0.146	0.580
Rn	86	9	6	8	18	222	202	211.4	2.7	18.1	1.608	10.303	0.060	0.386

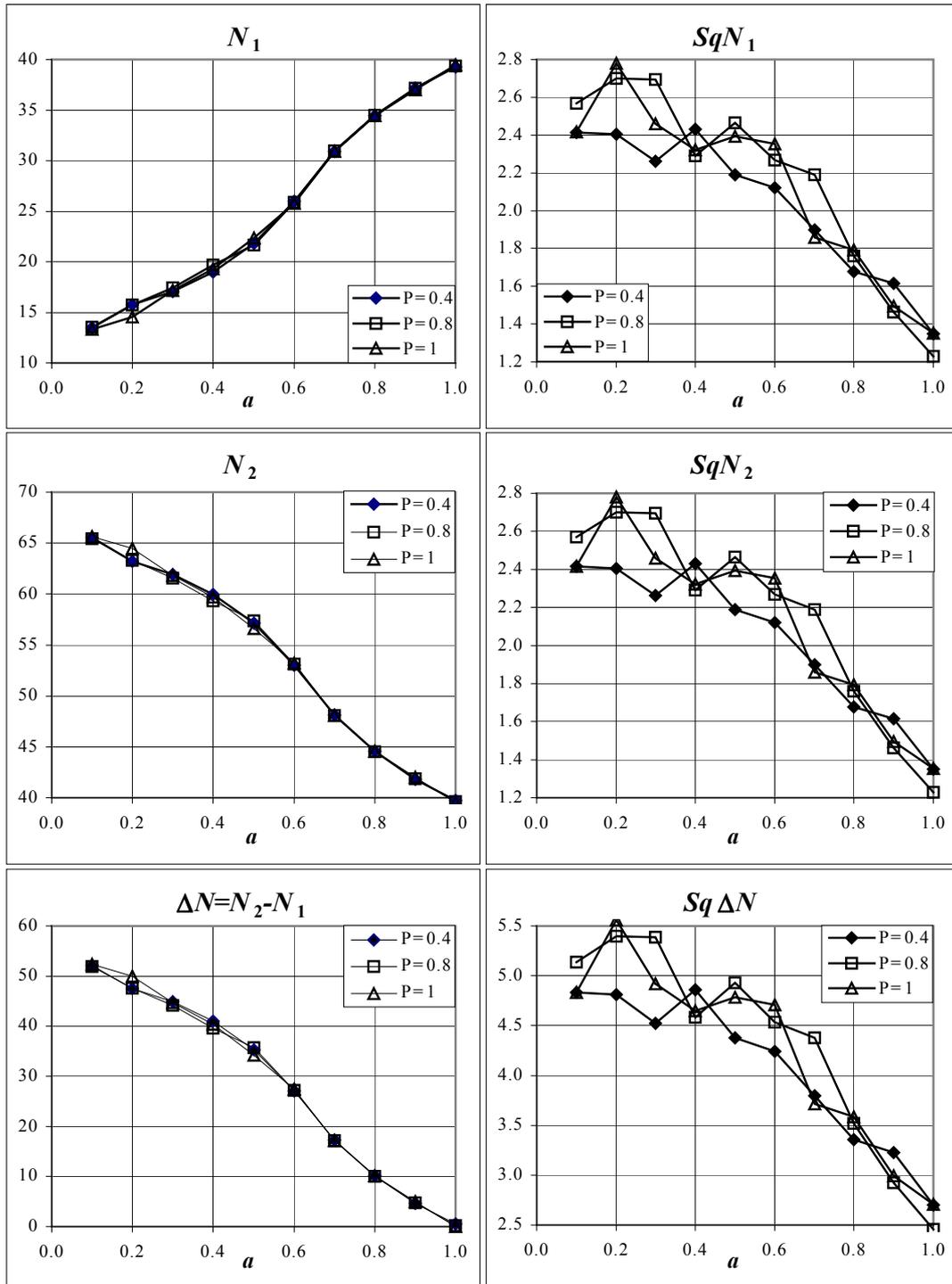


Fig.8.8a. Numeric results for the dependencies of saturation values of particle numbers on the asymmetry parameter (the left column of plots) for the different membrane penetrations,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and other parameters as described in Sec.8.2. The corresponding mean squared deviations are also given (the right column of plots).

Рис.8.8а. Численные результаты для зависимостей величин насыщения чисел частиц от параметра асимметрии (левый столбец графиков) при различных проницаемостях мембраны,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и других параметрах приведенных в тексте раздела 8.2. Справа приводятся соответствующие среднеквадратичные отклонения.

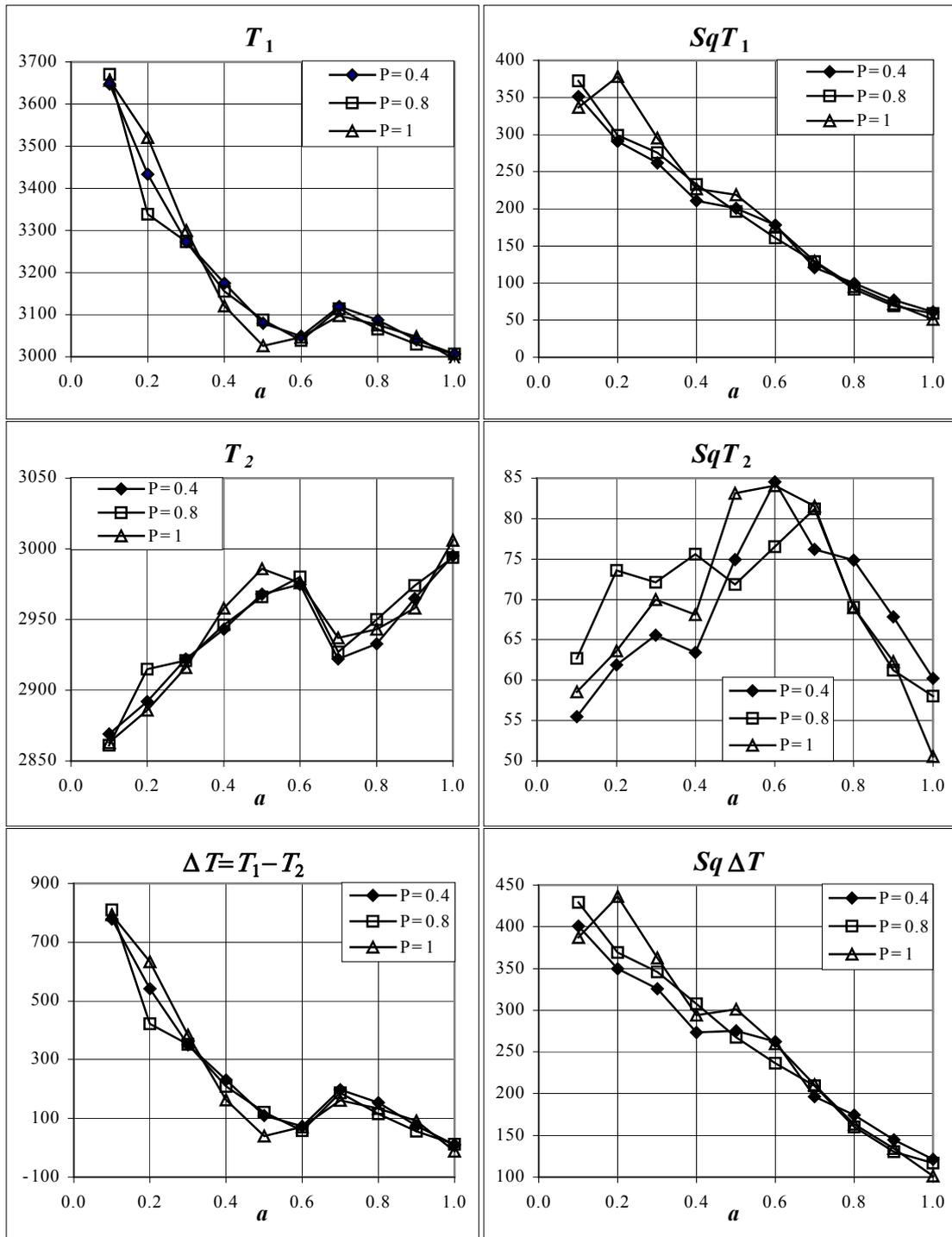


Fig.8.8b. Numeric results for the dependencies of saturation values of temperatures on the asymmetry parameter (the left column of plots) for the different membrane penetrations,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and other parameters as described in Sec.8.2. The corresponding mean squared deviations are also given (the right column of plots).

Рис. 8.8b. Численные результаты для зависимостей величин насыщения температур от параметра асимметрии (левый столбец графиков) при различных проницаемостях мембраны,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и других параметрах приведенных в тексте раздела 8.2. Справа приводятся соответствующие среднеквадратичные отклонения.

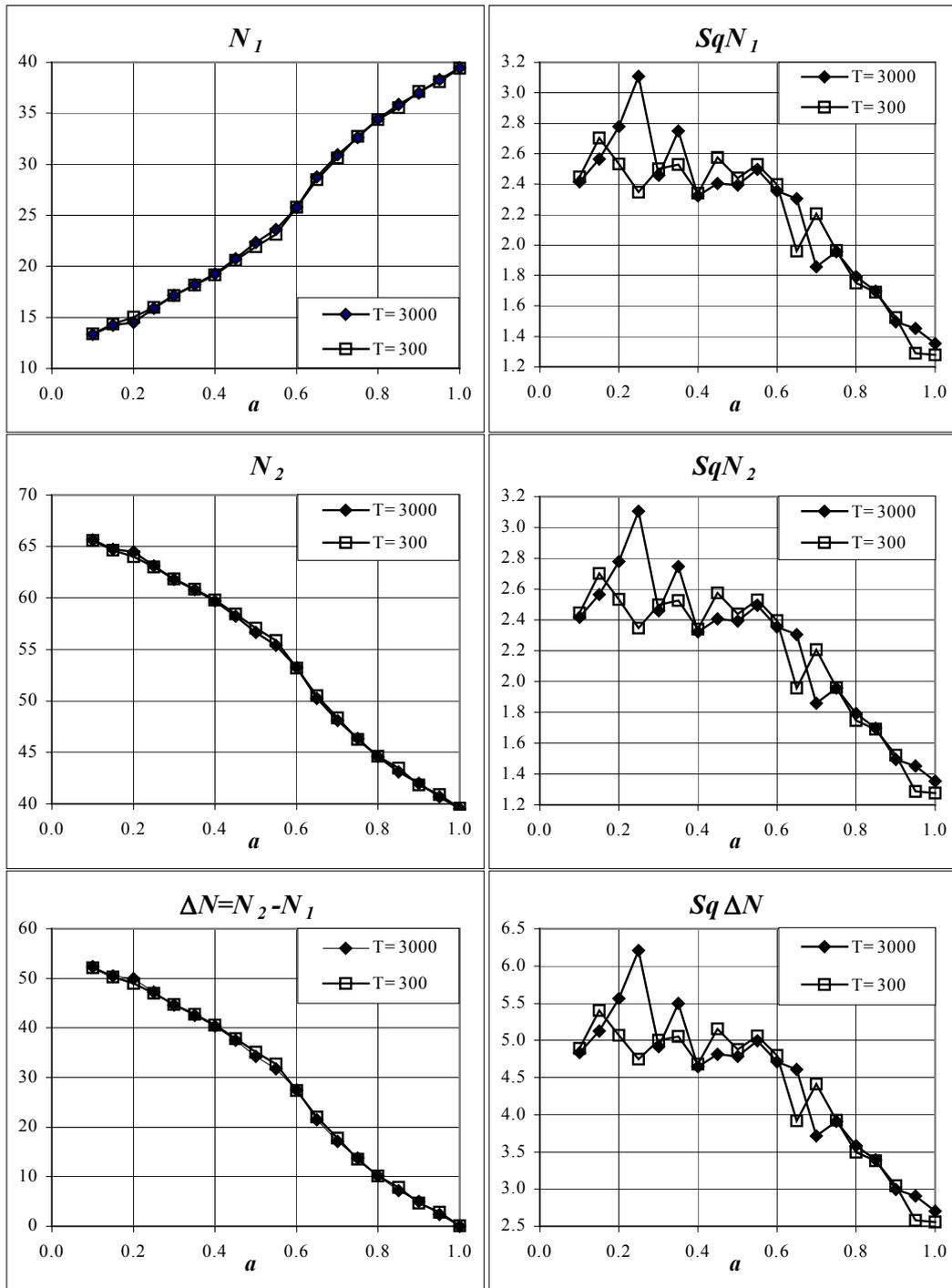


Fig.8.9a. Numeric results for the dependencies of saturation values of particle numbers on the asymmetry parameter (the left column of plots) for the different effective temperatures  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , membrane penetration  $P=1$ , and other parameters as described in Sec.8.2. The corresponding mean squared deviations are also given (the right column of plots).

Рис.8.9а. Численные результаты для зависимостей величин насыщения чисел частиц от параметра асимметрии (левый столбец графиков) при различных эффективных температурах,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , проницаемости мембраны  $P=1$ , и других параметрах приведенных в тексте раздела 8.2. Справа приводятся соответствующие среднеквадратичные отклонения.

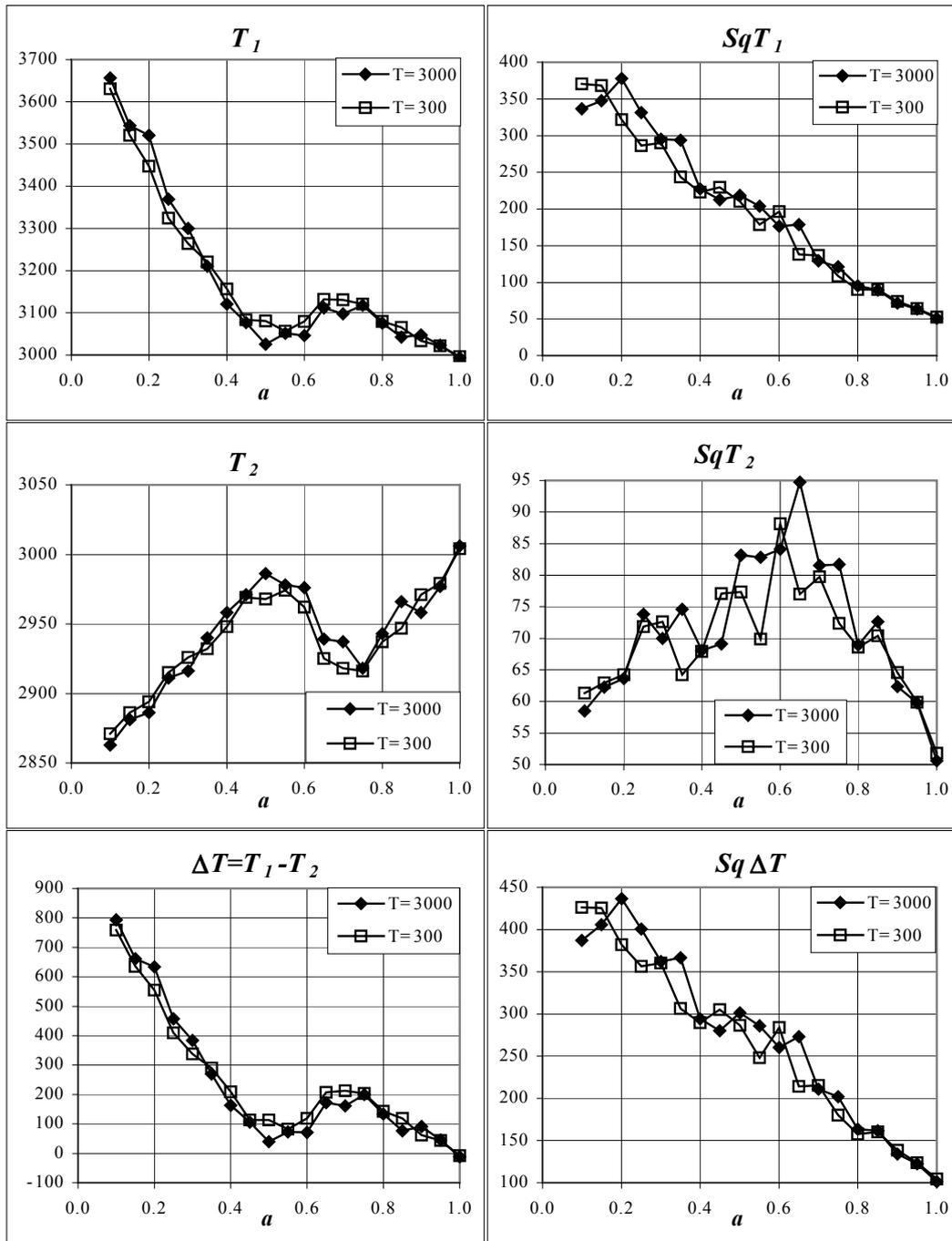


Fig.8.9b. Numeric results for the dependencies of saturation values of temperatures on the asymmetry parameter (the left column of plots) for the different effective temperatures  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  and  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , membrane penetration  $P=1$ , and other parameters as described in Sec.8.2. The corresponding mean squared deviations are also given (the right column of plots). All temperature values for  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$  are multiplied by 10.

Рис. 8.9b. Численные результаты для зависимостей величин насыщения температур от параметра асимметрии (левый столбец графиков) при различных эффективных температурах,  $T_{eff}=3 \cdot 10^7$  и  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$ , проницаемости мембраны  $P=1$ , и других параметрах приведенных в тексте раздела 8.2. Справа приводятся соответствующие среднеквадратичные отклонения. Все температурные величины для  $T_{eff}=3 \cdot 10^6$  умножены на 10.

## References

## Литература

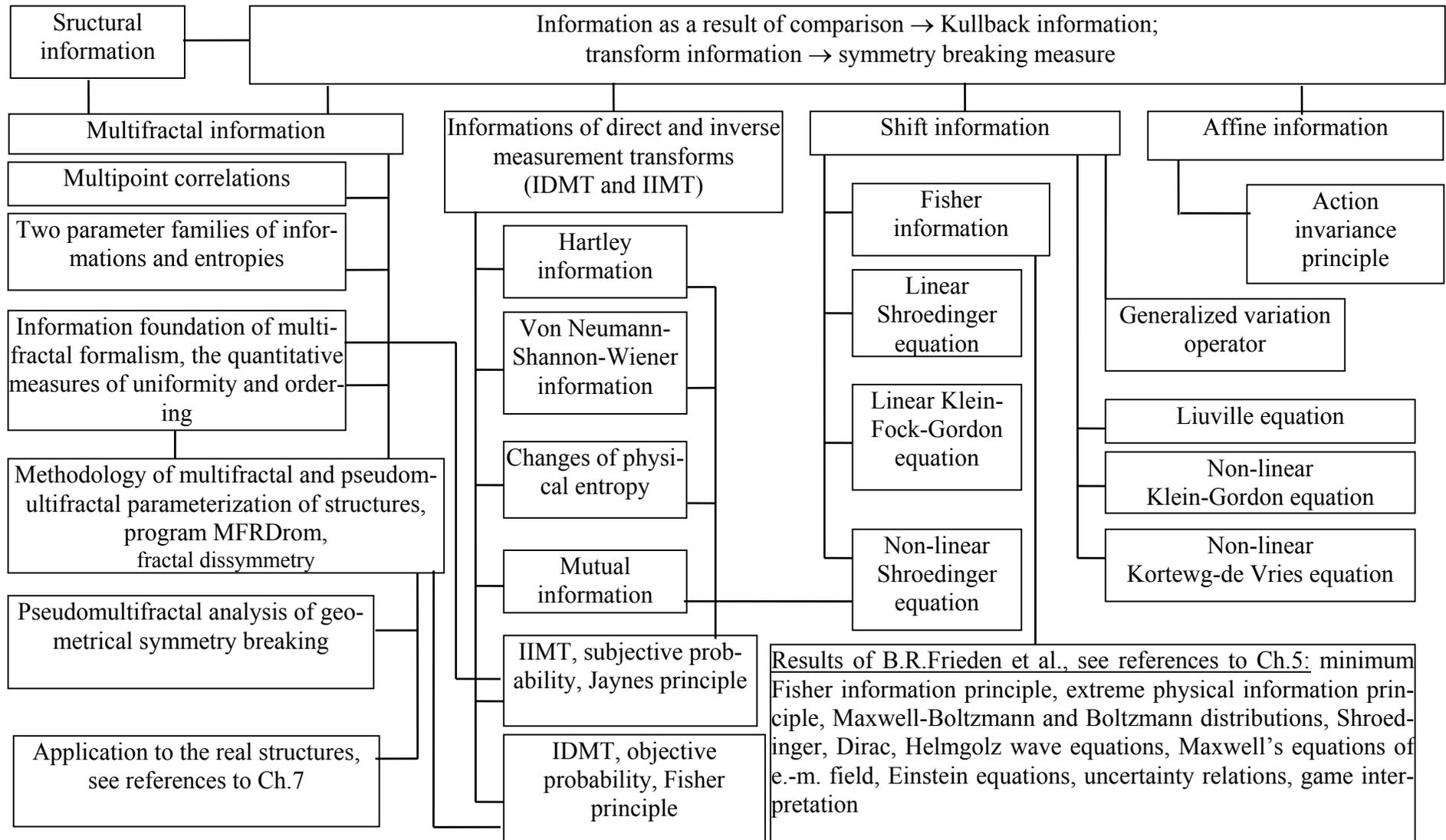
1. Schroedinger E. *What Is Life? The Physical Aspect of the Living Cell.* (1955). Шредингер Э. *Что такое жизнь? С точки зрения физика.* М.: Атомиздат, 1972
2. White R.M., Geballe T.H. *Long Range Order in Solids* (New York, etc., Academic Press, 1979).
3. Volkenshtein M.V. *Biophysics* (Moscow, Nauka, 1981) [in Russian]. Волькенштейн М.В. *Биофизика* (Москва, Наука, 1981).
4. Quastler H. (Ed.) (*Essays on the use of*) *Information Theory in Biology* (Urbana, University of Illinois Press, 1953).
5. Yockey H.P., Platzmann R.L., Quastler H. (Eds.) *Symposium on Information Theory in Biology* (London, etc., Pergamon Press, 1958).
6. Kizel V.A. *Physical Reasons of Dissymmetry of Living Systems* (Moscow, Nauka, 1985) [in Russian]. Кизель В.А. *Физические причины диссимметрии живых систем* (Москва, Наука, 1985).
7. Kittel Ch. *Introduction to solid state physics* (4<sup>th</sup> Edition, New York, etc., J.Wiley&Sons, 1976).
8. Karapetjanz M.Kh., Drakin S.I. *The Structure of Matter* (Moscow, Vysshaya Shkola, 1970) [in Russian]. Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. *Структура вещества* (Москва, Высшая школа, 1970).
9. Grigorovich V.K. *The Metallic bond and the Structure of Metals* (Nova Science Publishers, 1989).
10. Everett D.H. *An Introduction to the Study of Chemical Thermodynamics* (Longmans, 1961). Эверетт Д. *Введение в химическую термодинамику.* М.: Мир, 1963.
11. Florensky P.A. *Dielectrics and Their Technical Applications* (Moscow, Glavelectro VSNKh, 1924) [in Russian]. Флоренский П.А. *Диэлектрики и их технические применения* (Москва, Главэлектро ВСНХ, 1924).
12. Sokolov E.Ya., Brodyansky V.M. *Energetic ground of heat transformation and cooling processes* (Moscow, Energoatomizdat, 1981) [in Russian]. Соколов Е.Я., Бродянский В.М. *Энергетические основы трансформации тепла и процессов охлаждения* (Москва, Энергоатомиздат, 1981).
13. *New Energy Sources.* Special issue of Proc, IEEE, 1963, **51**, N5.
14. Brillouin L. *Science and Information Theory* (New York, Academic Press, 1962). Бриллюэн Л. *Наука и теория информации.* М.: Физматгиз, 1960.
15. Brillouin L., *Scientific Uncertainty and Information* (New York - London, Acad.Press, 1964). Бриллюэн Л. *Научная неопределенность и информация.* М.: Мир, 1966.
16. Denbigh K.G., Denbigh J.S. *Entropy in Relation to Incomplete Knowledge* (Cambridge University Press, 1985).

17. Vorobjev V.L. *Thermodynamic Grounds of Diagnostics and Reliability of Microelectronic Devices* (Moscow, Nauka, 1989) [in Russian]. Воробьев В.Л. *Термодинамические основы диагностики и надежности микроэлектронных устройств* (Москва, Наука, 1989).
18. Sychev V.V. *Complex Thermodynamic Systems* (Moscow, Energia, 1977) [in Russian]. Сычев В.В. *Сложные термодинамические системы* (Москва, Энергия, 1977).
19. Eyring H., Walter J., Kimball G.E. *Quantum Chemistry* (1946).
20. Haberditzl W. *Bausteine der Materie and chemische Bindung* (Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972) [in German].
21. Karapetjanz M.Kh. *The Methods of Relative Reckoning of Physico-Chemical Properties* (Moscow, Nauka, 1965) [in Russian]. Карапетьянц М.Х. *Методы относительного расчета физико-химических свойств* (Москва, Наука, 1965).
22. Koshkin N.I., Vasilchikova E.N. *Elementary Physics. Handbook* (Moscow, АО "Stoletie", 1996) [in Russian]. Кошкин Н.И., Васильчикова Е.Н. *Элементарная физика. Справочник* (Москва, АО "Столетие", 1996).
23. Emsley J. *The Elements* (Oxford, Clarendon Press, 1991). Эмсли Дж. *Элементы*. М.: Мир, 1993.
24. Kikoin I.K. (ed.) *Tables of Physical Quantities. Handbook* (Moscow, Atomizdat, 1976) [in Russian]. Кикоин И.К. (Ред.) *Таблицы физических величин. Справочник* (Москва, Атомиздат, 1976).
25. Bird G.A. *Molecular Gas Dynamics* (Oxford, Clarendon Press, 1976). Берд Г. *Молекулярная газовая динамика*. М.: Мир, 1981.
26. Tsang S.C., Harris P.J.F., Green M.L.H. *Thinning and opening of carbon nanotubes by oxidation using carbon dioxide*. *Nature*, 1993, **362**, 520-522.
27. Iijima S., Ichihashi T. *Single-shell carbon nanotubes of 1-nm diameter*. *Nature*, 1993, **363**, 603-605.
28. Ruoff R.S., Lorents D.C., Malhotra R. *Radial singlelayer nanotubes*. *Nature*, 1993, **366**, 637.
29. Ebbesen T.W., Ajayan P.M., Hiura H., Tanigaki K. *Purification of nanotubes*. *Nature*, 1994, **367**, 519.
30. Taylor R., Walton D.R.M. *The chemistry of fullerenes*. *Nature*, 1993, **363**, 685-693.
31. Bethune D.S., Johnson R.D., Salem J.R., de Vries M.S., Yannoni C.S. *Atoms in carbon cages: The structure and properties of endohedral fullerenes*. *Nature*, 1993, **366**, 123-128.
32. Branson H.R. *A definition of information from the thermodynamics of irreversible processes*. In (*Essays on the Use of*) *Information Theory in Biology*. H.Quastler (Ed.) (Urbana, University of Illinois Press, 1953). Pp.25-40.

- 33.Lamprecht I. *Entropy and information - supernatural behavior of Maxwell's demon*. In *Thermodynamics and Regulation of Biological Process*. Lamprecht I., Zotin A.A. (Eds.) (Berlin, etc., Walter de Gruyfer, 1984).
- 34.Maxwell J.C. *Theory of Heat*. 9-th ed. London: Longmans & Co. & New York:15 East 16th Street, 1888. 333pp. P.328-329.
- 35.Von Szilard L. *Uber die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen inteliger Wesen*. Z.Phys., 1929, Bd.53, H11/12, 840-856 [in German].
- 36.Bridgman P.W. *Reflections on Thermodynamics*. Proc.Amer.Acad. of Arts and Sciences, 1953, 8, N7, 301-309.
- 37.Heimann P.M. *Molecular forces, statistical representation and Maxwell's demon*. Hist. Phil.Sci., 1970, 1, N3, 189-211.
- 38.Daub E.E. *Maxwell's demon*. Hist.Phil.Sci., 1970, 1, N3, 213-227.
- 39.McClare C.W.F. *Chemical Machines, Maxwell's Demon and Living Organisms*. J.Theor.Biol.,1971, 30, N1, 1-34.
- 40.Lang R. *Maxwell's Demon and computation*. Philosophy of Science, 1974, 41, N2, 171-178.
- 41.Walker I. *Maxwell's Demon in Biological Systems*. Acta Biotheoretica, 1976, 25, N2-3, 103-110.
- 42.Butler J.A.V. *Life and the second law of thermodynamics*. Nature, 1946, 158, N4005, 153-152.
- 43.Johnson H.A., Knudsen K.D. *Rental efficiency and information theory*. Nature, 1965, 206, N4989, 930-931.
- 44.Stengel R.F. *'Maxwellian Demon' improves reactor efficiency*. Design News, 1976, 32, N21, 40-41.
- 45.Shotter J. *The existence of the crossroads policeman*. Nature, 1966, 211, N5047, 343-345.
- 46.Rajendra Bhandary. *Entropy, information and Maxwell's demon after quantum mechanics*. Pramana, 1976, 6, N3, 135-145.
- 47.Martin J. KLEIN *Maxwell, His Demon, and the Second Law of Thermodynamics*. American Scientist, 1970, 58, N1, 84-97.
- 48.Stong C.L. *Machines that work like muscles, and how Maxwell's demon was captured in a bottle*. Scientific American, 1973, 228, N4, 112-117.
- 49.Patlak C.S. *Contributions to the theory of active transport*. Bull.Math.Boiphys. 1956, 18, N4, 271-315.
- 50.Flagg-Newton J.L., Loewenstein W.R. *Asymmetrically Permeable Membrane Channels in Cell Junction*. Science, 1980, 207, N4432, 771-773.
- 51.Pierce J.R. *Symbols, Signals and Noise: The Nature and Process of Communication*. New York: Harper and Brothers, 1961. Ch.X, pp.184-207.
- 52.Rhim W.-K., Pines A., Waugh J.S. *Time-Reversal Experiments in Dipolar-*

- Coupled Spin Systems*. Phys.Rev.B, 1971, 3, N3, 684-695.
- 53.Hoh S.R. *Conversion of thermal to electrical energy with ferroelectric materials*. Proc. IEEE, 1963, **51**, N5, 838-845.
54. Zaev N.E. *Kessors: The concentrators of environmental energy*. Russkaya Mysl (Moscow), 1992, N2, 7-28 [in Russian]. Заев Н.Е. *Кессоры: концентраторы энергии окружающей среды*. Русская мысль, 1992, N2, 7-28.
- 55.Pluzhnikov V.M. *Dielectric Amplifiers* (Moscow, Energiya, 1969) [in Russian]. Плужников В.М. *Диэлектрические усилители* (Москва, Энергия, 1969).
- 56.Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*, V.5 (London, etc. Reading, 1964). Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике. Т.5. Электричество и магнетизм* (Москва, Мир, 1977).

### The logical structure of the book



## Логическая структура книги



## 9. Concluding remarks

On the whole, this book is to show that the rather wide scope of mathematical models of physical systems of quite different nature can be obtained from a unique concept root which is the transform information (TI).

The definition of information as a measure of the distinctions (in general, at all) allows to introduce the quantitative information measures which are adequate to the systems under study. The proposed approach to the formalization of such a concept of information corresponds (implicitly) to the following formal scheme : taking into account the nature of the system under study, the support set is first introduced (the space, space-time, phase space, state space, etc.), continuous or discrete, that also implies the choice of the method and level of description, and then the intensity measures set is assigned to the domains or elements of the support set (probability measure, field intensities, etc.). Then, taking into account the nature of the constraints imposed on the system, one or another transform is applied to the intensity set, and the respective transform information is made via eq.(3.1) which is the SB-measure with respect to the *information generating transform* chosen. This is reminiscent of information game with nature described in Sec. 5.1. An investigation of TI's extreme values, scaling or other its properties (in de-

## 9. Заключительные замечания

В целом эта книга призвана показать, что довольно большая совокупность математических моделей физических систем совершенно различной природы может быть получена из одного концептуального корня, которым является информация преобразования (ИП).

Определение информации как меры различий (вообще) позволяет ввести количественные меры информации адекватные исследуемым системам. Предложенный подход к формализации такого понятия информации соответствует (неявно) следующей формальной схеме: принимая во внимание природу исследуемой системы, сначала вводится базовое множество (пространство, пространство-время, фазовое пространство, пространство состояний, и т.д.), непрерывное или дискретное, что также подразумевает выбор метода и уровня описания, а затем вводится множество мер интенсивностей, приписанных областям или элементам базового множества (вероятностная мера, интенсивности поля, и т.д.). Затем, принимая во внимание природу ограничений, наложенных на систему, к множеству интенсивностей применяется то или иное преобразование, и строится соответствующая информация преобразования по ур.(3.1), которая является мерой ИС по отношению к выбранному *информационно производящему преобразованию*. Это напоминает информационную игру с природой, описанную в подразделе 5.1. Исследование экстремальных значений ИП, скейлинговых или других ее

pendence on the nature of the system and its properties to be described) results in the mathematical model of the system under study (intensity distribution over the support set, differential equations, the dependencies of system's characteristics on the parameters of the constraints, etc.). Thus the consideration of system's symmetries, or more exactly, its broken symmetries turns out to be not only like a test of certain kind or a selection rule of the models (according to Wigner) but one of the primary points of making the mathematical models. This is demonstrated by derivation of action invariance principle in Ch.6.

This very circumstance is a base for ascribing the sense to the known classical information measure appearing in the mathematical model. Since there is a direct connection of TI to the classical information measures, as was shown above, we have to make a conclusion about the existence of direct connection between the quantitative information measures and SB's in the systems to which they are applied. The very TI expresses only the possibility of SB, but the way it is realized in each particular case is determined by the constraints imposed on the system (see, for example, Jaynes' principle or minimum Fisher information principle by Frieden), or by the initial and/or boundary conditions. TI introduced in such a way allows not only to ascribe the sense to the known information measures but also to use

свойств (в зависимости от природы системы и свойств, которые требуется описать) дает в результате математическую модель исследуемой системы (распределение интенсивностей по базовому множеству, дифференциальные уравнения, зависимости характеристик системы от параметров ограничений, и т.д.). Таким образом оказывается, что рассмотрение симметрий системы, точнее ее нарушенных симметрий (НС), является не только чем-то типа проверки определенного рода или правилом отбора моделей (по Вигнеру), но одной из исходных точек построения математических моделей. Это демонстрируется выводом принципа инвариантности действия в Гл.6.

Само по себе это обстоятельство является основой приписывания смысла известным классическим мерам информации, возникающим в математических моделях. Поскольку имеется прямая связь ИП с классическими мерами информации, как было показано выше, нам следует сделать вывод о существовании прямой связи между количественными мерами информации и НС в системах, к которым они применяются. Сама по себе ИП выражает только возможность НС, но способ ее реализации в каждом конкретном случае определяется ограничениями, налагаемыми на систему (см., например, принцип Джейнса или принцип минимума информации Фишера по Фридену), или начальными и/или граничными условиями. ИП, введенная таким способом, позволяет не только приписывать смысл известным мерам информации, но так же использовать понятие информации в применении к

the concept of information as applied to the systems which traditionally were described without the concepts of probability theory. Regrettably, we have not yet managed to fit a Tsallis information [Tsallis C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J.Stat.Phys, 1988, 52,1/2, 479-87.] into our scheme explicitly, but in book [Bashkirov A.G. *Self-organization and second law of thermodynamics*. IDG RAS 2007] it was shown that Tsallis information is a degenerate form of Renyi entropy.

The relation between TI and Kullback information is two-fold: when the probabilistic description is used TI is a particular case of Kullback information, but, on the other hand, generalizes it in that respect that it does not prohibit one to use the non-probabilistic measures to evaluate the information quantity.

Some remarks are necessary also about the classical information measures and their interpretations in terms of TI. In applications the von Neumann-Shannon-Wiener information  $I_{NSW}$  is of the widest use and gives the theoretical results of valuable practical use, but its sense may be very different: it may express SB with respect to the rearrangements of the particles or their groups, or it may have the sense of the breaking of system's non-uniformity due to one or another reason. In terms of TI which is reduced to  $I_{NSW}$  (or from which the  $I_{NSW}$  is derived), the corresponding SB is a basis for ascribing the sense to  $I_{NSW}$ . Thus the

системам, традиционно описываемым без использования понятий теории вероятностей. К сожалению, нам пока не удалось разместить в нашей схеме информацию Тцаллиса [Tsallis C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J.Stat.Phys, 1988, 52,1/2, 479-87.] в явном виде, но в работе [Башкиров А.Г. *Самоорганизация и второе начало термодинамики*. ИДГ РАН 2007.] убедительно показано, что информация Тцаллиса есть вырожденная форма энтропии Реньи, см. гл.7.

Соотношение между ИП и информацией Кульбака двояко: когда используется вероятностное описание, ИП является частным случаем информации Кульбака, но, с другой стороны, обобщает ее в том отношении, что она не запрещает использование невероятностных мер для оценки количества информации.

Несколько замечаний необходимы также относительно классических мер информации и их интерпретации через ИП. В приложениях наиболее широко используется информация фон Неймана-Шеннона-Винера  $I_{NSW}$ , которая дает теоретические результаты большой практической значимости. Но ее смысл может быть очень разным: она может выражать НС по отношению к перестановкам частиц или их групп, или может иметь смысл нарушения однородности в системе по той или иной причине. Благодаря ИП, которая сводится к  $I_{NSW}$  (или из которой  $I_{NSW}$  выводится), соответствующая НС является основой приписывания смысла  $I_{NSW}$ . Таким образом, популярность

popularity of this quantitative information measure, indeed, can be considered as a result of sense expulsion, as was pointed out by H.Haken and L.Brillouin. As is seen from Sec.4.7, several TI's may be necessary for the adequate description of physical system, and their combination may give birth to the form of  $I_{NSW}$ . A comparison of the results of different sections of this book with Jaynes' and Frieden's principles can make one to think that the multipliers like the Boltzmann constant or squared absolute value of shift play a role of the units of information equivalents of the constraints.

A physical sense of the shift information based variational principle depends not only on the nature of the constraints, but also on the value of the shift. The infinitesimal shift information averaged over all shift directions, i.e. the Fisher information - expresses quantitatively only the comparison of the system's intensity measure with itself. The very reduction of the shift information to the Fisher information corresponds to the idea (by G.Nicolis, I.Prigogine, and H.Haken) that the gradient fields can be considered as the information support.

The TI based reviewing of multifractal formalism leads to natural introduction of concept of F-symmetry. From this viewpoint the regular (one scale) ideal fractals are the reper symmetric images of (multi)fractal way of description of strange objects just like the symmet-

этой количественной меры информации действительно можно рассматривать как результат изгнания смыслового содержания, как ранее отмечали Бриллюэн и Хакен. Как видно из п.4.7, для адекватного описания физической системы могут понадобиться несколько ИП, а их комбинация может рождать форму  $I_{NSW}$ . Сравнение результатов различных подразделов данной книги с принципами Джейнса и Фридена могут привести на мысль, что множители типа константы Больцмана или квадрата модуля сдвига играют роль единиц информационных эквивалентов ограничений.

Физический смысл вариационных принципов на основе информации сдвига зависит не только от природы ограничений, но также от величины сдвига. Информация инфинитезимального сдвига, усредненная по всем направлениям сдвига, т.е. информация Фишера, выражает количественно только сравнение меры интенсивности с самой собой. Само по себе сведение информации сдвига к информации Фишера соответствует идее (Г.Николис, И.Пригожин; Г.Хакен), что поля градиентов можно рассматривать как носители информации.

Пересмотр мультифрактального формализма на основе ИП приводит к естественному введению понятия Ф-симметрии. С этой точки зрения регулярные (одномасштабные) фракталы являются реперным симметричным образом (мульти)фрактального способа описания странных объектов совсем

ric geometrical images - the regular Plato's solids, triangles, quadrates, cycles, spheres etc.- are the basic ideal images of geometrical description.

In this concern, we should remind an amusing fact that B.B.Mandelbrot - a creator of fractal geometry - started his scientific life with information science applied to texts analysis, see ref.[8] to Ch.1.

In trying to understand what is information on a macroscopic level of description, and how could we manage to measure it, we come to the necessity to introduce a new concept - concept of structural information making us not to be afraid to bother the second law of thermodynamics and to think how can the real (working) devices, not understandable from the viewpoint of this law, do work.

As to mathematical austerities, it should be reminded, that from Leibnitz's times the steady rise during three last centuries of the requirements to mathematical austerities of logical and other axiomatic theories due to internal needs of the very mathematics has logically resulted in that Goedel has proved in 1931 his famous theorem of incompleteness of any deductive system. Any appearance negates itself. Since then we happily live in the times of a so-called third crisis of the mathematics foundations. I.e. our mathematics has no basis. So if to hold water completely, we should or completely refuse the use of mathematics and everything, that is con-

как симметричные геометрические образы - платоновы тела, треугольники, квадраты, окружности, сферы и т.д. - являются идеальными базовыми образами геометрического описания.

В этой связи следует упомянуть забавный факт, что Б.Б.Мандельброт - создатель фрактальной геометрии - начал свою научную жизнь с теории информации применительно к анализу текстов, см.[8] к Гл.1.

Стараясь понять, что представляет собой информация на макроскопическом уровне описания, и как бы мы могли ее измерять, мы приходим к необходимости введения нового понятия - понятия структурной информации, наводящего на мысль не бояться потревожить второй закон термодинамики, и подумать, как реальные (работающие) приборы, принцип работы которых не понятен с точки зрения этого закона, могут на самом деле работать.

Что касается математической строгости, то хотелось бы напомнить, что со времен Лейбница неуклонное повышение в течение трех последних столетий требований к математической строгости логических и других аксиоматических теорий благодаря внутренним потребностям самой математики логично привело к тому, что Гедель доказал в 1931 свою знаменитую теорему о неполноте любой дедуктивной системы. Всякое явление отрицает само себя. С тех пор мы счастливо живем во времена так называемого третьего кризиса оснований математики. Т.е. у нашей математики нет основы. Так что, если быть полностью последовательными, мы должны либо полностью отказаться от использования матема-

nected to it, or bring down a crossbar of the mathematical austerities requirements. The author likes the second way more.

The author, see Fig.4.3, does not insist that all his reasoning and conclusions are not disputable. He would be grateful if his thoughts would seem to be interesting.

тики и всего, что с ней связано, либо понизить планку требований математической строгости. Автору больше нравится второй вариант.

Автор, см.рис.4.3, не настаивает на том, что все его рассуждения и выводы бесспорны. Он был бы благодарен, если бы его мысли показались интересными.

vstovsky@yandex.ru

## **10. Attachment. Practical use of information destroying: Deterministic chaos based cryptography**

The cryptographic methods of information defense are based on the rearrangement and substitution of the discrete elements by which information is written, processed, transmitted, etc. Both operations, rearrangement and substitution, use some coding sequence of numbers (may be implicitly) and some algorithm. In a computer cryptography, dealing with information in the form of arrays of bits, bytes (characters), words, numbers, etc., all the substitutions of larger information elements (bytes, for example) can be represented as rearrangements of the finer ones (bits). Thus consideration of cryptographic manipulations from the viewpoint of rearrangements of discrete elements is a rather general approach, and not only in computer cryptography. As is known, the operation of rearrangements has a group property, i.e. there are the unity transform and inverse one (for any transform) restoring initial sequence of discrete information elements. This allows to hide and restore information by rearrangements of its discrete elements.

In this section a new method of updating generation of coding sequence of integer numbers is proposed on the base of iterations of the discrete chaotic maps that represent

## **10. Приложение. Практическое использование разрушения информации: Криптография на основе детерминированного хаоса**

Криптографические методы защиты информации основаны на перестановке или замене дискретных элементов, с помощью которых записана, обрабатывается или передается информация. Обе операции, перестановка и замена, используют некоторую кодирующую последовательность чисел (может быть неявно и некоторый алгоритм). В компьютерной криптографии, имеющей дело с информацией в форме полей битов, байтов (символов), слов, чисел и пр., все замены крупных элементов информации (например, байтов) могут быть представлены в виде перестановок малых элементов (битов). Таким образом, рассмотрение криптографических манипуляций с точки зрения перестановок дискретных элементов является совершенно общим подходом, и не только в компьютерной криптографии. Как известно, операция перестановок обладает групповым свойством, т.е. существует единичное преобразование и обратное (для любого преобразования), восстанавливающее исходную последовательность дискретных элементов информации. Это позволяет скрывать и восстанавливать информацию с помощью перестановок ее дискретных элементов.

В данном разделе предлагается новый способ генерации в явном виде кодирующих последовательностей целых чисел на основе итераций дискретных хаотических отображений.

the object of investigations of a young branch of mathematics - a theory of deterministic chaos, [1] and many others. An opportunity of such an application is due to instability of trajectories of chaotic maps (a so called sensitivity to the initial conditions) and to their property to lost information about previous iterations. Both these properties are characterized quantitatively by a so called Liapunov exponent. A very general superficial notion about these concepts is enough for the goals of this section.

### **Instability of one dimensional chaotic maps**

Nowadays, there are a lot of specialized and popular literature dedicated to the investigations of many unusual properties of chaotic maps, but we are interested in their main properties - the sensitivity to the initial conditions which results in the trajectory instability. Consider for the simplicity a discontinuous map of the interval  $[0,1]$  onto itself

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad (10.1)$$

obeying the condition that everywhere in the interval except, may be, some finite set of points ("except a set of a zero measure"),  $|df/dx|>1$ . For example, a so called Bernoulli shift, Fig.10.1, is such a map given by equations

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, & \text{for } 0.0 < x_n \leq 0.5, \\ x_{n+1} &= 2x_n - 1, & \text{for } 0.5 < x_n \leq 1.0. \end{aligned}$$

Последние представляют собой один из предметов изучения молодой отрасли математики - теории детерминированного хаоса, [1] и многие другие. Возможность такого применения обусловлена неустойчивостью траекторий хаотических отображений (т.н. чувствительность к начальным условиям) и их свойством терять информацию о предыдущих итерациях. Оба эти свойства количественно характеризуются показателем Ляпунова. Для целей данного раздела нам достаточно самых общих представлений об этих свойствах.

### **Неустойчивость одномерных хаотических отображений**

На сегодняшний день существует обширная специальная и популярная литература, посвященная исследованию различных необычных свойств хаотических отображений, но нас интересует их главное свойство - чувствительность к начальным условиям, которым и обусловлена неустойчивость траекторий. Рассмотрим для простоты разрывное отображение отрезка  $[0,1]$  в самого себя

с условием, что всюду за исключением некоторых отдельных точек ("за исключением множества меры нуль") на отрезке  $[0,1]$   $|df/dx|>1$ . Таким отображением является, например, т.н. "сдвиг Бернулли", рис.10.1, задаваемый уравнением

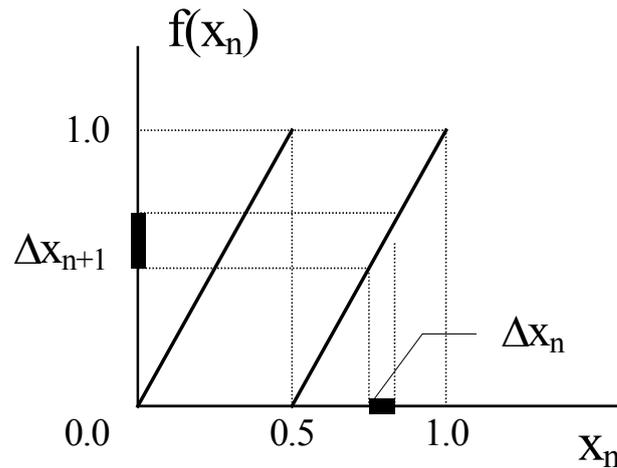


Fig.10.1. Bernoulli shift - a one-dimensional discontinuous map of the interval  $[0,1]$  onto itself with Liapunov exponent  $\lambda=\ln 2$ , as  $df/dx=2$ , see eq.(10.3).

Any vicinity  $\Delta x_n$  of the point  $x_n$  is mapped onto greater vicinity  $\Delta x_{n+1}$  of the point  $x_{n+1}$ . The inverse map of both the points and vicinities is not unique. Thus any inaccuracy  $\Delta x_0$  in setting the initial point  $x_0$  results in the growth of uncertainty  $\Delta x_n$  of the points  $x_n$  in the course of iterations of the map (10.1). So, the two trajectories  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  and  $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ , starting from the neighboring as close as possible points  $x_0$  and  $y_0$  are progressively escaping each other. This is schematically shown in Fig.10.2 for three first iterations of two close initial points. At some step of iterations their divergence  $\Delta_n = |x_n - y_n|$  becomes comparable with the size of the whole interval.

Рис.10.1. Сдвиг Бернулли - одномерное разрывное отображение интервала  $[0,1]$  на себя с показателем Ляпунова  $\lambda=\ln 2$ , т.к.  $df/dx=2$ , см. ур.(10.3).

Любая окрестность  $\Delta x_n$  точки  $x_n$  при таком отображении будет отображаться в большую окрестность  $\Delta x_{n+1}$  точки  $x_{n+1}$ . Причем, обратное отображение, как окрестностей, так и точек, не будет однозначным. Таким образом, любая неточность  $\Delta x_0$  в задании начальной точки  $x_0$  будет приводить к росту неопределенности  $\Delta x_n$  точки  $x_n$  в процессе итераций отображения (10.1). Поэтому две траектории  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  и  $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ , исходящие из соседних, как угодно близких, точек  $x_0$  и  $y_0$ , будут все больше расходиться в процессе итераций. Это схематически показано на рис.10.2. Через определенное число итераций величина расхождения  $\Delta_n = |x_n - y_n|$ , будет сравнима с размером всего отрезка.:

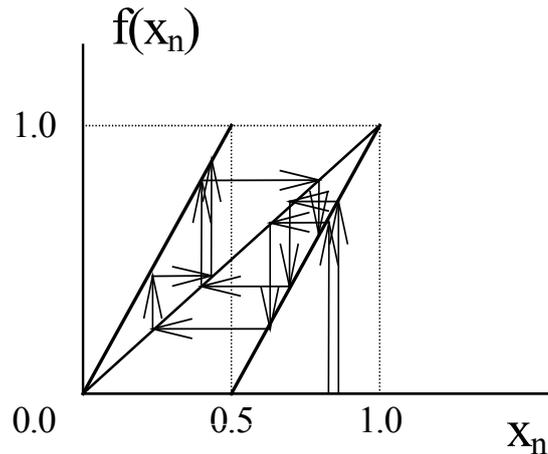


Fig.10.2. An example of first three iterations of two close initial points in the case of the Bernoulli shift.

Рис10.2. Пример первых трех итераций двух близких начальных точек в случае сдвига Бернулли.

The Liapunov exponent  $\lambda(x_0)$  ( $x_0$  is initial condition) is a quantitative measure of a divergence rate of close trajectories when the difference in initial conditions  $\varepsilon$  is small,  $\varepsilon \ll 1$ . For  $N$  iterations it is defined by

$$\varepsilon \exp(N\lambda(x_0)) \cong |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|, \quad (10.2)$$

$$f^N(x_0) = f(f^{N-1}(x_0)) = f(x_{N-1}).$$

Or in the limiting case

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln | [f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)] / \varepsilon | =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln | df^N(x_0) / dx_0 | = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \prod_{i=0}^{N-1} | df(x_i) / dx_i |,$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln | df(x_i) / dx_i |. \quad (10.3)$$

Thus by definition the factor  $e^{\lambda(x)}$  is an extension coefficient of a small vicinity  $\Delta x_n$  of the point  $x_n$  by one iteration in average. If the Liapunov exponent is positive, then any small vicinity enlarges in the course of iterations, the behavior of the trajectory  $(x, f(x), f(f(x)), \dots)$  becomes less and less certain, i.e. information about location of the point

Количественной мерой скорости разбегания близких траекторий с малой разницей  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , в начальных значениях является т.н. показатель Ляпунова для дискретных отображений  $\lambda(x_0)$  ( $x_0$  - начальное значение). Для  $N$  итераций он определяется к формулой

Или в предельном случае

Таким образом, по определению  $e^{\lambda(x)}$  - коэффициент растяжения малой окрестности  $\Delta x_n$  точки  $x_n$  в среднем за одну итерацию. Если показатель Ляпунова  $\lambda$  положителен, то любая малая окрестность точки  $x$  будет расти в процессе итераций, и поведение траектории  $(x, f(x), f(f(x)), \dots)$  будет все менее и менее определенным, т.е. информация о положении точки  $f^n(x)$  будет утрачи-

$f^n(x)$  will be lost. If the value of Liapunov exponent  $\lambda$  is known, one can calculate the number of iterations  $N_0$  after which the given inaccuracy  $\Delta x_0$  becomes equal to the size of the whole interval  $L$ :

$$N_0 = \frac{1}{\lambda} \ln(L/\Delta x_0). \quad (10.4)$$

Table 10.1. The iteration numbers necessary to make the initial uncertainty  $\Delta x_0$  equal to the length  $L=1$  of the whole interval.

$\Delta x_0$	$N_0, \lambda=1/2$	$N_0, \lambda=1$
$10^{-20}$	92	46
$10^{-10}$	46	23
$10^{-5}$	23	11
$10^{-3}$	14	7

Some figures are given in Table 10.1. So, information about the location of the initial point is lost. This can be described as follows [1].

Let's divide the interval  $[0,1]$  into  $n$  equal subintervals and suppose that initial point  $x_0$  can be found in any of subintervals with equal probabilities  $1/n$ . If we are aware of the location of the initial point, then we have information

$$I_0 = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n.$$

After the first iteration the subintervals change in  $a = |df/dx_0|$  times. The decrease in the certainty of the initial point location can be evaluated by the change of information

$$\Delta I = - \sum_{k=1}^{n/a} \frac{a}{n} \ln \frac{a}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = - \ln a = - \ln |df/dx_0|.$$

Averaging  $\Delta I$  over the iterations, we obtain

Если известна величина показателя Ляпунова  $\lambda$ , можно оценить число итераций  $N_0$ , после которых данная неточность  $\Delta x_0$  становится сравнимой с величиной всего отрезка  $L$ :

Таблица 10.1. Числа итераций, необходимых для увеличения начальной неопределенности  $\Delta x_0$  до размера длины  $L=1$  всего интервала.

Некоторые цифры приводятся в табл.10.1. Таким образом, информация о положении начальной точки теряется. Это можно описать следующим образом [1].

Разделим отрезок  $[0,1]$  на  $n$  равных подинтервалов и предположим, что начальная точка  $x_0$  может находиться в любом из них с равной вероятностью  $1/n$ . Если мы знаем, в каком именно - то это значит, что мы располагаем информацией

После первой итерации подинтервалы изменятся в  $a = |df/dx_0|$  раз. Уменьшение определенности нахождения точки можно оценить по изменению информации :

Усредняя  $\Delta I$  по итерациям, получим :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta I = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |df(x_i)/dx_i| = - \lambda(x_0). \quad (10.5)$$

Thus the Liapunov exponent is also a measure of loss rate of information about the location of the initial point. The greater Liapunov exponent, the faster this information is completely lost. This property is general for all the chaotic maps, discontinuous and continuous, one dimensional and many dimensional, etc. Bernoulli shift is described here for the simple illustration only. This very property of the chaotic maps determines the possibility of their use in cryptography to generate the coding sequences.

#### Method of coding sequence generation

The key idea of the method is to change the order of iterations over the set of values  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  by an order of their relation on the set of real numbers (by natural order), i.e. the iteration sequence is to be transformed to the sequence

$$(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), \quad (10.6)$$

где

where

$$x_{m0} = \min(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), x_{m1} = \min(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), \dots, \\ x_{mN-1} = \max(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN-1}), x_{mN} = \max(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}).$$

For example, if we obtain the iteration sequence of some chaotic map for  $N=5$  ( $x_0=0.51$ ;  $x_1=0.95$ ;  $x_2=0.75$ ;  $x_3=0.24$ ;  $x_4=0.43$ ;  $x_5=0.66$ ) then their natural order on the real axis is ( $x_3=0.24$ ;  $x_4=0.43$ ;  $x_0=0.51$ ;  $x_5=0.66$ ;  $x_2=0.75$ ;  $x_1=0.95$ ). So the initial iteration order (0,1,2,3,4,5) can be replaced by the natural real order (3,4,0,5,2,1) that corresponds

Таким образом, показатель Ляпунова является также мерой скорости потери информации о положении начальной точки. Чем больше показатель Ляпунова, тем быстрее эта информация полностью утратится. Это свойство является общим для всех хаотических отображений, разрывных и непрерывных, одномерных и многомерных, и пр., и пр., а сдвиг Бернулли приведен здесь только в качестве наглядной иллюстрации. Именно это свойство хаотических отображений определяет возможность их использования в криптографии для генерации кодирующих последовательностей.

#### Метод генерации кодирующих последовательностей

Ключевая идея метода состоит в изменении порядка итераций на множестве величин  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  на порядок их отношения на множестве вещественных чисел (на естественный порядок), т.е. последовательность итераций следует трансформировать в последовательность

$$(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), \quad (10.6)$$

где

$$x_{m0} = \min(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), x_{m1} = \min(x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}), \dots, \\ x_{mN-1} = \max(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN-1}), x_{mN} = \max(x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN}).$$

Например, если мы получаем итерационную последовательность некоторого хаотического отображения при  $N=5$  ( $x_0=0.51$ ;  $x_1=0.95$ ;  $x_2=0.75$ ;  $x_3=0.24$ ;  $x_4=0.43$ ;  $x_5=0.66$ ), то их естественный порядок на вещественной оси есть ( $x_3=0.24$ ;  $x_4=0.43$ ;  $x_0=0.51$ ;  $x_5=0.66$ ;  $x_2=0.75$ ;  $x_1=0.95$ ). Поэтому исходный порядок итераций (0,1,2,3,4,5) может быть заменен естественным вещест-

to some rearrangement of the indexes. Now one can use this and the reverse rearrangements for coding and restoring the information represented by five any discrete elements (bits, bytes (symbols), words, etc.).

We can do it in the same way in the case of arbitrary large number  $N$  of discrete elements. The encryption key for such a procedure is an initial point  $x_0$  set with some accuracy. The quality of the information defense for such a procedure depends on the mantissa length in the floating-point representation of the numbers used in calculations, length of the coded sequence of discrete elements (data segment), and the value of Liapunov exponent. The longer the lengths and the larger Liapunov exponent, the better information defense quality. The coding sequence of integer indexes is not necessary to be saved since it can be generated each time one needs it using the same encryption key which is the initial condition which is to be just kept in memory.

As was shown above, when restoring the information, any deviation from the true key leads to deviation of the trajectory of the map from the «true» trajectory and after  $N_0$  iterations (see eq.(10.4) and Table 10.1) the calculated trajectory completely diverges with «true» one that results in ultimate change of the natural order of iterated values of the map and, and so, to other rearrangement of information elements.

венным порядком (3,4,0,5,2,1), что соответствует некоторой перестановке индексов. Теперь мы можем использовать эту и обратную перестановку для кодирования и восстановления информации, представленной любыми пятью дискретными элементами (битами, байтами (символами), словами, и т.д.).

Мы можем делать это таким же образом в случае произвольно большого числа  $N$  дискретных элементов. Кодировующим ключом такой процедуры является начальная точка  $x_0$ , заданная с некоторой точностью. Качество защиты информации такой процедуры зависит от длины мантииссы в числах, используемых в вычислениях в представлении с плавающей точкой, длины кодируемой последовательности дискретных элементов (сегмента данных) и величины показателя Ляпунова. Чем больше длины и больше показатель Ляпунова, тем лучше качество защиты информации. Кодирующую последовательность целых чисел не обязательно сохранять, т.к. ее можно сгенерировать, когда нужно, используя тот же кодирующий ключ, которым является начальное условие, которое просто нужно запомнить.

Как было показано выше, при восстановлении информации любое отклонение от истинного ключа ведет к отклонению траектории отображения от "истинной" траектории, и после  $N_0$  итераций (см. ур.(10.4) и табл. 10.1) вычисляемая траектория окончательно расходится с "истинной", что ведет к полному изменению естественного порядка итерированных величин отображения, и поэтому - к другой перестановке элементов информации. Это может

This can happen even faster, Fig.10.2. By the way, this same coding sequence can be used to make the alphabetic substitutions together with (instead of) rearrangements of the finer information elements (like Caesar transform for bytes or whatever else).

Next we take bytes as the larger (universal, by the way) elements of information, bits - as the finer ones. The coding/decoding procedures can be schematically presented as a periodic sequence of operations after the encryption key is entered:

*{code generation (iterations, ordering),  
get segment, rearrange and/or substitute, put new segment;*

*{[code generation (iterations, ordering)], get segment, rearrange and/or substitute, put segment}; ...;*

*(etc. to the end of the data),*

where the coding sequence generation procedure can be made once and used for all the data segments, or it can be generated for every data segment (with the last value of previous iteration sequence used as a new key) that gains the information defense quality.

### **Some application aspects and possible modifications**

The application aspects we discuss here from the viewpoint of developing the information defense system on the base of standard (not very power) PC's and popular software developing systems.

произойти даже быстрее, рис.10.2. Кстатi, та же самая кодирующая последовательность может использоваться для алфавитных подстановок вместе (вместо) перестановки мелких элементов информации (типа преобразования Цезаря для байтов или чего-то еще).

Ниже мы примем, что крупные (универсальные, кстатi) элементы информации - байты, мелкие - биты. Кодирующие/декодирующие процедуры могут быть схематически представлены как периодические последовательности операций после введения кодирующего ключа.

*(генерация кода (итерации, упорядочение),  
взять сегмент, переставить и/или подставить, записать новый сегмент);*

*([генерация кода (итерации, упорядочение)],  
взять сегмент, переставить и/или подставить, записать новый сегмент);...;*

*(и т.д. до конца данных),*

где процедура генерации кодирующей последовательности может производиться один раз и использоваться для всех сегментов данных, или она может генерироваться для каждого сегмента данных (с последним значением прежней итерационной последовательности в качестве нового ключа), что повысит качество защиты информации.

### **Некоторые прикладные аспекты и возможные модификации**

Прикладные аспекты мы обсуждаем здесь с точки зрения создания системы защиты информации на базе стандартных (не очень мощных) ПК и популярных систем разработки программ.

The mantissa length in standard floating-point representation in modern programming systems such as C, Pascal, Java, Delphi, etc., does not exceed 19-20. Given the Liapunov exponent value, one can evaluate by eq.(10.4), Table 10.1, the minimum number of iterations after which the minimum deviation from the true key by one least decimal digit in the mantissa results in the change of coding rearrangement. In the case of not very large information segment to be coded, one can rearrange the finer information elements, bits, for example.

One should take into account that, due to the very principle of the coding, the result of the calculation of the coding sequence depends on the (inevitable) rounding after each operation with floating-point numbers. So, the use of whole mantissa length in iterations of chaotic map makes the resulting coding sequence depending on the type of mathematical co-processor. This property can be used to attach the coding sequence generation to particular type of PC to gain the quality of information defense. On the other hand, this attachment can be "switched off" by rounding the result of each iteration to 10 decimals, for example.

The encryption key length 20 is too short. This length can be made as long as one needs by the use of several maps iterated simultaneously each with its own initial condition. For example, if two maps are used, the maximum encryption key length becomes 40. At the ordering stage of

Длина мантииссы в стандартном представлении с плавающей точкой современных систем программирования, таких как C, Pascal, Java, Delphi и пр., не превышает 19-20. По заданной величине показателя Ляпунова можно оценить, см. ур.10.4, табл.10.1, минимальное число итераций, после которых минимальное отклонение от истинного ключа на одну последнюю десятичную цифру в мантииссе приведет к изменению кодирующей перестановки. В случае не очень большого кодируемого информационного сегмента можно переставить более мелкие информационные единицы, биты, например.

Следует иметь ввиду, что в силу самого принципа кодирования результат вычислений зависит от (неизбежного) округления после каждой операции с числами с плавающей точкой. Поэтому использование всей длины мантииссы в итерациях хаотических отображений делает кодирующую последовательность зависимой от типа математического сопроцессора. Это свойство можно использовать для привязки генерации последовательности к частному типу ПК для повышения качества защиты информации. С другой стороны, такая привязка может быть "отключена" округлением результата каждой итерации до десяти чисел после запятой, например.

Длина кодирующего ключа 20 слишком мала. Эта длина может быть сделана как угодно большой, если итерировать одновременно несколько отображений, каждое со своим начальным условием. Например, если используются два отображения, максимальная длина кодирующего ключа становится

coding sequence generation one can use the natural order, for example, of the values  $((x_{m0})^2 \pm (y_{m0})^2, (x_{m1})^2 \pm (y_{m1})^2, \dots, (x_{mN})^2 \pm (y_{mN})^2)$  constructed of two iteration sequences  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  and  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_N)$  of the maps. Other appropriate algebraic functions can be used. The number of maps can be made (arbitrary) large and so is the encryption key length. Thus one can develop the information defense system with very large encryption key length on the base of standard software development systems.

This length can be made larger in the case of the use of maps with parameters the values of which influence the calculation results and are extracted from the key. The parameters should be in the ranges corresponding to the iteration regimes ensuring the positive large enough Liapunov exponents, i.e. these must be completely chaotic or intermittency (with short periodic phases) regimes. However, most of the popular chaotic maps have a non-monotone or discontinuous dependence of Liapunov exponent on the parameters of the maps. Nevertheless, there are the maps with always positive Liapunov exponent of the order of unity [2]. These maps are:

$$x_{m+1} = x_m + \theta_m, \theta_m = \arctg(\text{sign}(-x_m) \sqrt{z^2 + 1} - z), z = \frac{3A^2 - 1}{4A}, \quad (10.7)$$

$A = \nu \sin(-x_m)$  - "s-map",  $A = -\nu x_m$  - "l-map",  $A = -\nu(x_m)^3$  - "c-map",  $A = \nu \text{tg}(-x_m)$  - "t-map",

$\nu$  is a control parameter,  $x_m$  varies in the interval. The dependencies of the

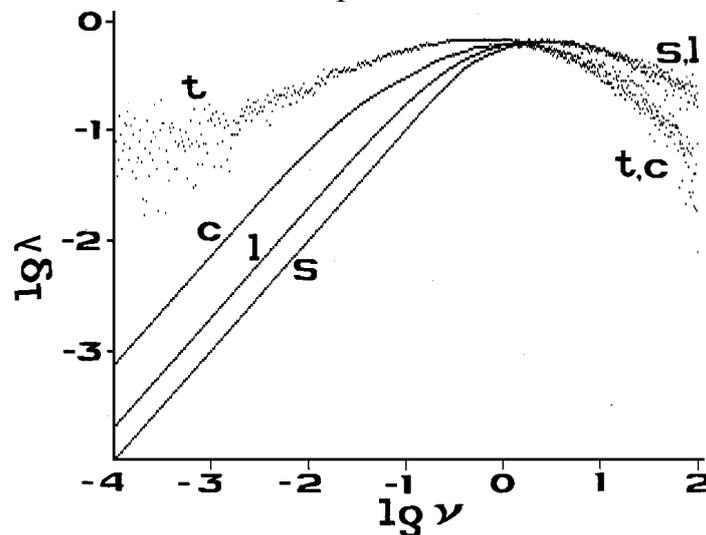
40. На стадии упорядочения при генерации кодирующей последовательности можно использовать естественный порядок величин  $((x_{m0})^2 \pm (y_{m0})^2, (x_{m1})^2 \pm (y_{m1})^2, \dots, (x_{mN})^2 \pm (y_{mN})^2)$ , сконструированных из двух итерационных последовательностей  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$  и  $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_N)$  этих отображений. Можно использовать другие подходящие алгебраические функции. Число отображений и длину кодирующего ключа можно сделать (произвольно) большими. Таким образом, можно создать систему защиты информации с очень большим кодирующим ключом на базе стандартных систем программирования.

Эта длина может быть увеличена при использовании отображений с параметрами, величина которых влияет на результат вычислений и извлекается из ключа. Эти параметры должны быть в диапазонах, соответствующих режимам итераций, гарантирующим достаточно большую положительную величину показателя Ляпунова, т.е. это должны быть полностью хаотические режимы, или режимы перемежаемости. Однако, большинство популярных хаотических отображений имеют немонотонную или разрывную зависимость показателя Ляпунова от параметров отображений. Тем не менее, имеются отображения с всегда положительным показателем Ляпунова порядка единицы [2]. Это отображения:

$\nu$  - контрольный параметр,  $x_m$  изменяется на интервале  $[-\pi/2, +\pi/2]$ . Зависи-

Liapunov exponents of these maps on the control parameter  $\nu$  are shown in Fig.10.3. (By the way, s-,l- and c-maps have fractal bifurcation diagrams.) Although the iterations of such maps take more time than simple logistic map or Bernoulli shift, but this time takes not more than from 70% (for the very short segments) to 3.4% (for the long segments) of the overall time of coding sequence generation and this is not crucial for applications, see Table 10.2 and Fig.10.4

мости показателей Ляпунова этих отображений от контрольного параметра  $\nu$  показаны на рис.10.3. (Кстати, s-,l- и c-отображения имеют фрактальные бифуркационные диаграммы.) Хотя итерации таких отображений требуют больше времени, чем простое логистическое отображение или сдвиг Бернулли, но это время занимает не более чем от 70% (для очень коротких сегментов) до 3.4% (для длинных сегментов) общего времени генерации кодирующей последовательности, и это не критично для приложений, см. табл.10.2 и рис.10.4.



Fig,10.3. The dependencies of Liapunov exponents of the maps (10.7) on control parameter.

Рис.10.3. Зависимость показателей Ляпунова отображений (10.7) от контрольного параметра.

Table 10.2. Actual times, sec, of coding sequence generation by Pentium 100 MHz, AMD K6 166 MHz, and Pentium 2 233 MHz processors.

Таблица 10.2. Фактические времена генерации кодирующей последовательности процессорами Pentium 100 МГц, AMD K6 166 МГц, and Pentium 2 233 МГц.

Segment size*, K Размер сегмента	P, 100 MHz	K6, 166 MHz	P2, 233 MHz	Iterations time**, % Время итераций
1/2	1.4	0.74	0,29	≈70
2/2	2.86	1.63	0.53	≈50
4/2	6.73	4.53	1.33	25.0
8/2	19.86	14.84	4.20	13.3
16/2	67.72	53.75	16.25	5.8
30/2	229.20	181.25	63.25	3.4

\*The coding sequence is generated, in fact, for the half of data segment and then expanded by a special algorithm. This significantly reduces the processor time with the same "combinatorial quality" of coding sequence.

\*\*Three identical maps like (10.7) iterated simultaneously.

\*Кодирующая последовательность генерируется фактически для половины сегмента данных и расширяется по специальному алгоритму. Это существенно снижает процессорное время с тем же самым "комбинаторным качеством" кодирующей последовательности.

\*\* Три одинаковых отображения типа (10.7) итерируются одновременно.

Implying that the problems of apparatus and virus information escape are solved, we can evaluate the information defense quality by simple combinatorial calculations. The practical application of the method proposed implies dividing the data to be processed into the segments the length of which determines the information defense quality. The coding sequence can be generated for every data segment, or once for all the data segments. The figures for the case of demo version of the program realizing this method of cryptographic defense on the base

Подразумевая, что проблемы аппаратной и вирусной утечки информации решены, мы можем оценить качество защиты информации простыми комбинаторными вычислениями. Практическое приложение предложенного метода подразумевает деление обрабатываемых данных на сегменты, длина которых определяет качество защиты информации. Кодирующая последовательность может генерироваться для каждого сегмента данных, или единожды для всех. Числа для случая демо версии программы, реализующей этот метод криптографической защиты на основе отображений (10.7) с длиной

of maps (10.7) with the encryption key length up to 60 symbols and the choice of data segment length among 1,2,4,8,16,30 K with possible bits rearrangement are as follows.

The extraction of coded information is possible in two ways: to find out the encryption key - one of approximately  $10^{60}$  possible keys, or to overview an awful number of possible combinations of bits of each data segment. We can evaluate the minimum difficulties for the minimum segment 1K.

The first way is somewhat difficult because to probe only one encryption key requires to generate the code and to view and recognize (during 1 sec at least) the result. It will take more than  $10^{53}$  years for the usual PC. For the super computers (very expensive to use) this figure will hardly ever be less more than 20 orders. The second way is slightly more difficult because the number of combinations of bits in 1 K is  $2^{1024*8} = (2^{10})^{102.4*8} \cong (10^3)^{102.4*8} = 10^{2457.6}$ . To overview the all possible rearrangements of bytes ( $1024! \cong \exp[1024*(\ln(1024)+1)] \cong e^{8121.8} \cong 10^{3527.3}$ ) is one more opportunity to have a good time. It should be pointed out once more that these optimistic figures are valid if only there are not the virus and apparatus information escape, and such problems must be solved by other methods.

In Tables 10.2 and 10.3 there are some figures obtained for the demo version elaborated by (32 bit)

ключа до 60 символов и выбором длины сегмента из 1,2,4,8,16,30 К с возможностью перестановки битов следующие.

Возможны два способа экстракции закодированной информации: найти кодирующий ключ - один из примерно  $10^{60}$  возможных ключей, или обозрение огромного числа возможных комбинаций битов каждого сегмента данных. Мы можем оценить минимальные трудности для минимального сегмента данных 1 К.

Первый путь трудноват, потому что проба только одного кодирующего ключа требует генерации кода и просмотра и распознавания (за 1 сек. по крайней мере) результата. Это потребует более  $10^{53}$  лет для обычного ПК. Для суперкомпьютеров (использование которых очень дорого) эта цифра врядли будет меньше более чем на 20 порядков. Второй путь чуть-чуть тяжелее, потому что число комбинаций битов в 1 К равно  $2^{1024*8} = (2^{10})^{102.4*8} \cong (10^3)^{102.4*8} = 10^{2457.6}$ . Обозрение всех возможных перестановок байтов ( $1024! \cong \exp[1024*(\ln(1024)+1)] \cong e^{8121.8} \cong 10^{3527.3}$ ) - еще одна возможность поразвлечься. Следует еще раз отметить, что эти оптимистические цифры правильны, если только нет аппаратной или вирусной утечки информации, а такие проблемы должны решаться другими методами.

В таблицах 10.2 и 10.3 имеются некоторые цифры, полученные для демо версии программы, разработанной с

programming system under Windows 95. The coding sequence generation time is proportional to the data segment length power 1.5-1.9 depending on the range of segment size (the short<4K or the long>4K) and processor type, Fig.10.4, Table 10.2. Taking into account the power of modern PC's, the data segment length can be made up to 30 K for the reasonable processing times, Table 10.3.

Table 10.3. Actual full times, sec, (for P/100 and K6/166 based PC's ) of processing the files of different sizes on HDD for the coding sequence is generated once at the beginning (see Table 10.2).

File size, K Размер файла	10		120		4715		13642	
Segment size*, K Размер сегмента	P100	K6	P100	K6	P100	K6	P100	K6
1	2	1	3	2	43	34	120	98
2**	3	2	4	2	24	19	65	53
4**	7	5	8	5	19	14	43	35
8**	20	15	20	15	28	21	49	34
16**	71	54	68	54	69	58	95	67
30**	228	162	229	163	233	165	252	172

\*The coding sequence is generated, in fact, for the half of data segment and then expanded by a special algorithm.

\*\*Coding sequence is constructed for the full segment size, but if the file size is smaller then the coding sequence is compressed to the required length. The same is done for the end pieces of files when they are shorter than the coding sequence.

For the very small files up to 10 K the short segments 1-2 K with

помощью (32 битовой) системы программирования под Windows 95. Время генерации кодирующей последовательности пропорционально длине сегмента данных в степени 1.5-1.9 в зависимости от диапазона размера сегмента (короче или длиннее 4К) и типа процессора, рис.10.4, табл.10.2. Принимая во внимание мощность современных ПК, длина сегмента данных может быть сделана до 30 К при разумных временах обработки, табл.10.3.

Таблица 10.3. Фактические времена, сек., (для ПК на основе P/100 и K6/166) обработки файлов различного размера на жестком диске, когда кодирующая последовательность генерируется один раз в начале (см. табл.10.2).

\*Кодирующая последовательность генерируется фактически для половины сегмента данных и расширяется по специальному алгоритму.

\*\*Кодирующая последовательность конструируется для всего сегмента данных, но если файл меньше сегмента, то кодирующая последовательность сжимается до нужного размера. То же самое относится к конечным кускам файлов, если они короче кодирующей последовательности

Для очень малых файлов до 10К могут быть рекомендованы короткие

continuous code generation can be recommended. For the files up to 1 M the segments 4-8 K with continuous code generation or the larger segments with at once code generation can be recommended. For the bigger files the segments 16 K and more with at once code generation can be recommended. The segment size 8 K may be considered as optimal for the processing rate and defense quality.

Application of the proposed technique to the compressed files also gains information defense quality.

сегменты 1-2 К с непрерывной генерацией кода. Для файлов до 1 М можно рекомендовать сегменты 4-8 К с непрерывной генерацией кода, или большие сегменты с генерацией кода ежиножды. Для больших файлов можно рекомендовать сегменты 16 К и более с одной генерацией кода. Размер сегмента 8 К можно рассматривать как оптимальный по скорости обработки и качеству защиты.

Применение предложенной методики к сжатым файлам также повышает качество защиты информации.

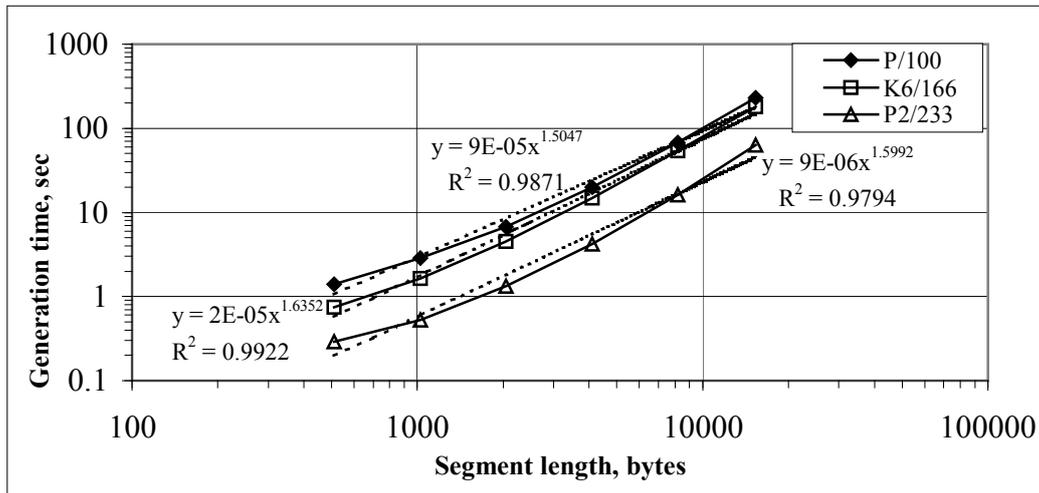


Fig.10.4. Dependence of coding sequence generation time on the sequence length, see Table 10.2.

Рис.10.4. Зависимость времени генерации кодирующей последовательности от ее длины, см. табл.10.2.

Thus, even at the first glance, the proposed method can be used for developing power many level information defense system on the base on standard PC's and software developing systems. In the case of demo version mentioned above, there are 6 segment sizes to set, times 2 ways of code generation (at once at the beginning or for every data segment)

Таким образом, даже на первый взгляд, предложенный метод можно использовать для создания многоуровневой системы защиты информации на базе стандартных ПК и систем программирования. В случае упомянутой выше демо версии имеются 6 задаваемых размеров сегментов, умножить на 2 способа генерации кода (один раз в начале и для каждого сегмента данных), умножить на 2 способа обработки битов (пе-

,times 2 ways of bits processing (to rearrange bits/substitute bytes or not), times 2 ways of iterations calculation (to round iteration result to 12 decimals or not) that is 48 information defense levels. The deterministic chaos based cryptography can also be used for the access denying, defense of licensed products, antiviral defense and in many other ways. With some complications the method can be elaborated to use two keys, the one open to hide and the second to restore the information like it does in the RSA method.

реставлять биты в каждом байте, или нет), умножить на 2 способа вычисления итераций (округлять до 12 знаков после запятой, или нет), что составляет 48 уровней защиты информации. Криптография на основе детерминированного хаоса может также использоваться для отклонения доступа, защиты лицензированных продуктов, антивирусной защиты и во многих других задачах. С некоторыми усложнениями метод может быть развит для использования двух ключей, один открытый для скрывания и другой закрытый для восстановления информации, как это имеет место в методе RSA.

### References

1. Schuster H.G. *Deterministic chaos. An introduction.* (Weinheim, Physik-Verlag, 1984). Шустер Г. *Детерминированный хаос. Введение.* М.:Мир, 1988.
2. Vstovsky G.V. *Fractal model of a fatigue crack.* J.Appl.Mech.Tech.Phys. (Russia), 1992, N2, 130-137. Встовский Г.В. *Фрактальная модель усталостной трещины.* ПМТФ, 1992, №2, 130-137.

### Литература